



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL PROFMAT



SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS:  
Elementos Iniciais para Abordagem no Ensino Médio

JOÃO RICARDO VALLIM PEREIRA

Sinop - MT  
2018

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS:  
Elementos Iniciais para Abordagem no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional de Matemática – PROFMAT no Polo da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT, campus Sinop como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Profissional

Orientador: Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves

Coorientador: Prof. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong

Sinop - MT

2018

Walter Clayton de Oliveira CRB 1/2049

P436s	<p>PEREIRA, João Ricardo Vallim Pereira . Sequências e Séries Numéricas Elementos Iniciais para Abordagem no Ensino Médio / João Ricardo Vallim Pereira Pereira - Sinop, 2018. 55 f.; 30 cm.(ilustrações) Il. color. (não)</p> <p>Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) - Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2018. Orientador: Dr. Rogério dos Reis Gonçalves Coorientador: Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong</p> <p>1. Sequências Numéricas . 2. Séries Numéricas. 3. Ensino Básico. I. João Ricardo Vallim Pereira Pereira. II. Sequências e Séries Numéricas : Elementos Iniciais para Abordagem no Ensino Médio.</p> <p>CDU 511</p>
-------	--



ESTADO DE MATO GROSSO  
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP  
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS.  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
PROFMAT UNEMAT - SINOP



JOÃO RICARDO VALLIM PEREIRA

**Sequências e Séries Numéricas: Elementos Iniciais para Abordagem no  
Ensino Médio**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT no *Campus* Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Reis Gonçalves

Aprovado em: 22/08/2018

**BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. Rogério Reis Gonçalves -UNEMAT

Prof. Dr. Eberson Paulo Trevisan -UFMT

Prof. Dr. Emivan Ferreira da Silva -UNEMAT

SINOP – AGOSTO-2018



Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional  
UNEMAT- Sinop Avenida dos Ingás, nº 3001 - Centro - CEP: 78.555-000 - Sinop-  
MT. Tel./Fax: (66)9601-8925 - Cx. Postal: 680 - profmat-unemat@unemat-net.br



*Dedico este trabalho aos meus orientadores:  
Dr. Rogério dos Reis Gonçalves e  
Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong.*

## **AGRADECIMENTOS**

A todos aqueles que contribuíram para que finalizasse este trabalho e, em especial, aos meus orientadores, professor Dr. Rogério dos Reis Gonçalves e Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong.

*“Muito estudo não ensina compreensão.”*

*Heráclito*

## **RESUMO**

O estudo de sequências e séries numéricas na Educação Básica geralmente se dá quando é trabalhado progressões aritméticas e geométrica, tornando assim a investigação do tema proposto apenas com casos particulares. Neste trabalho foi proposto um estudo de sequências e séries numéricas para que o professor possa utilizar em sala de aula, não necessariamente com o compromisso de apresentar este estudo de forma sistematizada, conforme vê-se nos livros textos tradicionais, mas sempre buscando fazer com que os sujeitos envolvidos sejam curiosos, criativos, façam questionamentos e participem do processo, para que haja maior aprendizagem.

Palavras-Chave: Sequências Numéricas, Séries Numéricas, Ensino Médio.



## **ABSTRACT**

The study of sequences and numerical series in Basic Education usually occurs when it's done the study of arithmetic and geometric progressions, thus the investigation of the proposed theme is only done with particular cases. In this work, it was proposed a study of sequences and numerical series for the teacher to use in the classroom, not necessarily with the commitment to present this study in a systematized way, as seen in the traditional textbooks, but always seeking to make the subjects involved are curious, creative, ask questions and participate in the process, so that there is greater learning.

**Key Words: Number Sequences, Number Series, High School.**

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	11
<b>2. UMA INTRODUÇÃO ÀS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS</b> .....	14
2.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS .....	14
<b>3. UMA INTRODUÇÃO ÀS SÉRIES NUMÉRICAS</b> .....	20
3.1 SÉRIE INFINITA.....	20
3.2 SOMAS PARCIAIS DAS SÉRIES NUMÉRICAS .....	23
3.3 ALGUMAS SÉRIES ESPECIAIS.....	28
3.3.1 SÉRIES GEOMÉTRICAS .....	28
3.3.2 A SÉRIE HARMÔNICA.....	31
3.3.3 UMA SÉRIE CURIOSA .....	33
3.3.4 UMA SÉRIE TELESCÓPICA .....	36
<b>4. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	39
<b>5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	40
<b>6. APÊNDICE</b> .....	42
6.1 SEQUÊNCIAS E SÉRIES: UMA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO.....	42
6.1.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA.....	42
6.1.1 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA.....	48

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo de sequências e séries é parte do programa de matemática do Ensino Médio, que normalmente é apresentado ao aluno de forma teórica e breve e, geralmente, apenas os casos particulares que são as progressões aritméticas e geométricas, limitando a exploração do tema, que é de suma importância na matemática e em outras áreas do conhecimento. Segundo Silva (2017), outras sequências numéricas podem ser estudadas no Ensino Médio, tais como, “as progressões aritmético-geométricas”, “os coelhos de Fibonacci”, “a torre de Hanói” e “a pizza de Steiner”, dentre outros, podem, perfeitamente, ser propostos aos alunos e, posteriormente, discutidos em sala de aula. Neste sentido, faremos um estudo sobre sequências e séries numéricas apresentando alguns conceitos interessantes sobre este assunto e sem a preocupação de apresentar o tema de forma sistematizada. Propomos ao professor alguns elementos que achamos interessantes para o ensino de sequências e séries numéricas em sala de aula, incluindo também uma concisa discussão sobre convergência e divergência de uma série por meio de exemplos e estratégias algébricas e/ou geométricas, instigando o aluno e o leitor em geral a analisar cada exemplo abordado. Dessa forma, entendemos que a partir daí os alunos podem explorar as progressões aritméticas e geométricas, estas que são apenas temas secundários neste trabalho. A seguir apresentaremos alguns trabalhos encontrados na literatura que discutem sobre o ensino de sequências e/ou séries numéricas.

Veiga (2018) realiza um estudo sobre sequências e seus principais resultados para o professor de Matemática e leitores em geral, abordando o modo em que este conceito é trabalhado desde o Ensino Básico ao Ensino Superior. A teoria contida neste trabalho é acompanhada de vários exemplos que contribuem para o embasamento do leitor. Foram apresentados também alguns problemas, dos mais variados níveis, com suas respectivas soluções, extraídos de provas de vestibulares, referências bibliográficas e olimpíadas matemáticas de vários países, com o intuito de proporcionar aprofundamento ao leitor sobre o que foi dissertado.

Silva (2017) apresenta como tema central as sequências recorrentes, em especial, as progressões aritméticas e geométricas, que são sequências numéricas estudadas no Ensino Médio. Destas sequências são evidenciados os seguintes tópicos: definição, construção da fórmula do termo geral, construção da fórmula da soma dos termos e

aplicações. Recebe atenção especial o estudo das progressões aritméticas de ordem superior. Neste trabalho, foram apresentados problemas cuja resolução recaiu no contexto de progressão aritmética, progressão geométrica ou uma sequência recorrente qualquer. Problemas contextualizados, também são abordados.

Araújo (2017) propôs um estudo sucinto, porém, mais aprofundado dos conteúdos relativos a sequências e séries do que aqueles geralmente abordados no Ensino Médio. Foram apresentamos também algumas aplicações das sequências reais que não precisam de estudos avançados na área para serem compreendidas, por exemplo, a demonstração geométrica da convergência de uma série geométrica. O autor apresentou também alguns teoremas sobre a teoria de limites, sequências, séries e critérios de convergência.

Titoneli (2017) faz uma análise de padrões que são modelados matematicamente através de conceitos que envolvem as sequências numéricas bem como aspectos geométricos. São consideradas algumas aplicações práticas de conteúdos trabalhados na Educação Básica, muitas vezes estudados de forma mecânica através de fórmulas que tornam a Matemática enfadonha e até sem sentido para os discentes. O objetivo é mostrar que a Matemática transpõe os limites das salas de aula e que sua beleza pode ser vista em áreas diversas. As ideias e conceitos que envolvem as Progressões Aritméticas e Geométricas, por exemplo, são úteis na resolução de várias situações. A arte musical que está envolta em conhecimentos matemáticos desde os primórdios de seu desenvolvimento. Os estudos desenvolvidos com a sequência de Fibonacci e como está relacionada com a razão áurea e com fenômenos naturais que aparentemente nada teriam em comum.

Cerqueira (2013) apresenta um estudo sobre a teoria de sequências e séries numéricas. Foram abordados temas presentes no Currículo de Matemática da Educação Básica e algumas sugestões de propostas didáticas foram sugeridas aos professores de Matemática que lecionam no Ensino Médio. Ainda, neste trabalho também foi explorara as séries de potências e as séries de Taylor.

Segundo Titoneli (2017), no trabalho do professor é importante sempre propiciar para os alunos uma forma de construir os conceitos e não apenas recebê-los sem que façam sentido algum para o aprendiz. Além disso, os alunos sempre se interessam por

curiosidades a respeito dos números. É nessa perspectiva que entendemos que esta dissertação de mestrado se justifica e que poderá contribuir para o ensino de sequências e séries numéricas.

Este trabalho está estruturado como segue: No Capítulo 1 apresentamos a introdução deste. O Capítulo 2 apresenta alguns conceitos sobre sequências numéricas enquanto que no Capítulo 3 foram apresentados uma introdução às séries numéricas com algumas séries especiais. As considerações finais serão apresentadas no Capítulo 4 e, por fim, o Capítulo 5 é composto pelas referências bibliográficas.

## 2. UMA INTRODUÇÃO ÀS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Neste capítulo será apresentado alguns resultados sobre sequências e séries numéricas.

### 2.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

**Definição 2.1.** Uma sequência numérica infinita  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ , que indicaremos por  $(a_n)$ , é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

Muitos livros didáticos apresentam casos particulares de sequências, como as progressões aritméticas e geométricas. No entanto, há vários tipos de sequências que podem ser exploradas em sala de aula. Nesta seção mostraremos alguns tipos especiais de sequências numéricas e também algumas de suas propriedades, tais como, a lei de recorrência, gráficos, convergência etc. Note que uma sequência numérica pode ser definida como uma lista de números escritos em uma ordem definida  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ . O número  $a_1$  é chamado de primeiro termo,  $a_2$  é o segundo termo e  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo.

**Exemplo 1:** Considere a sequência

$$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

Note que a partir do segundo termo, cada termo é a soma dos dois termos imediatamente anteriores. Esta sequência é conhecida como sequência de Fibonacci e é recursivamente definida por

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

É interessante que o professor apresente a sequência de Fibonacci em sala de aula, pois além de exigir que o aluno perceba como os termos podem ser obtidos recursivamente, nela podem ser exploradas várias aplicações da natureza, como por exemplo, a reprodução de coelhos, as folhas das Bromélias, as sementes do Girassol, a reflexão da luz em lâminas paralelas, etc. Sugerimos que estas aplicações sejam pesquisadas e apresentadas por um grupo de alunos por meio de seminários. Um estudo mais detalhado sobre a sequência de Fibonacci pode ser encontrado em diversos

trabalhos, dentre eles, (MACENA, E. S. 2018); (BARBOSA, F. A. 2017), (FULONE, H. D. 2017), (MELO, M. I. A. 2017), (SILVA, P. E. A. 2017), (LEOPOLDINO, K. S. M. 2016), (POSSEBON, J. E. 2016), (BELINI, M. M. 2015), (BORGES, F. P. 2015), (CARRION, M. R. 2015) e (SILVA, L. S. 2015).

**Exemplo 2:** Seja  $(a_n)$  definida por

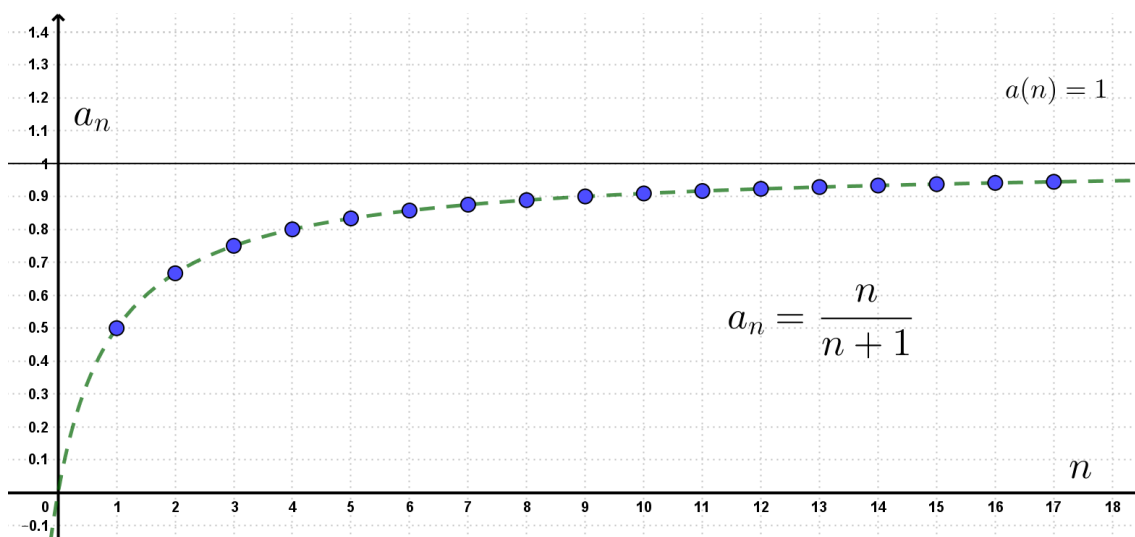
$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Assim, tem-se:

$$(a_n) = \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \right)$$

A Figura 1 mostra o comportamento da sequência  $a_n = \frac{n}{n+1}$ . Nota-se que à medida em que aumenta o valor de  $n$ , os termos  $a_n$  também aumentam e se aproximam de 1.

Figura 1: Gráfico da sequência  $a_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$



Fonte: Elaborado pelo autor no *software* GeoGebra

O Exemplo 2 pode ser utilizado para que o professor relembre em sala de aula o conceito de domínio de uma função, neste caso o conjunto dos números inteiros positivos, função crescente, função limitada e também definir assíntotas horizontal e vertical. É interessante que os alunos façam a construção do gráfico.

O estudo de sequências numéricas também pode se tornar algo bastante prazeroso em sala de aula, pois há muitos problemas e desafios envolvendo sequências lógicas de números. Mesmo que o objetivo seja o estudo das sequências conhecidas por progressão aritmética e geométrica, é plausível que o professor possa primeiramente inserir no contexto escolar alguns problemas curiosos que provavelmente irão instigar os alunos a querer entender melhor o assunto proposto. A seguir serão listados alguns exemplos envolvendo sequências lógicas de números.

**Exemplo 3:** Qual número corresponde a sequência a seguir: 1, 4, 9, 16, 25, ...?

Resolução:

Essa sequência é formada pelos quadrados perfeitos, em ordem crescente. Veja que

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

pode ser representada por

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$$

Portanto, o próximo termo da sequência é igual a  $6^2$ , ou seja, igual a 36.

**Observação:** O professor pode aproveitar este momento para relembrar o conceito de quadrados perfeitos, o motivo pelo qual foram denominados assim (vale solicitar pesquisa via internet). Inclusive, usar a ocasião para pergunta-los como seria uma sequência com cubos perfeitos, o que são cubos perfeitos?

**Exemplo 4:** Qual número corresponde a sequência a seguir: 37, 31, 29, 23, 19, 17, ...?

Resolução:

Observe que esta sequência é formada pelos números primos menores do que ou igual a 37 e estão em ordem decrescente.

Assim, o próximo número da sequência deve ser o número primo 13.



**Observação:** Este tipo de problema é muito válido, pois além de ser intrigante, causando a curiosidade dos alunos, pode conter conceitos matemáticos importantes. O professor poderia pedir aos alunos que encontre o décimo segundo termo dessa sequência. Ela é finita ou infinita? Veja que a lista dos onze primeiros termos dessa sequência é dada por

$$37, 31, 29, 23, 19, 17, 13, 11, 7, 5, 3, \dots$$

Logo, qual será o décimo segundo termo? Dúvidas surgirão, pois há muitas dúvidas quanto ao número 1 ser ou não ser um número primo, visto que, é comum os alunos acharem que basta um número ser apenas divisível por 1 e por ele mesmo para ser primo. Sendo assim, eles concluem erroneamente que 1 é primo. A definição é mais sutil, pois exclui o número 1 (por que?) e, muitas vezes exclui também os números negativos.

É importante o professor ter discernimento sobre a importância das discussões geradas no parágrafo anterior e verificar em qual ou quais turmas elas podem ser mais aprofundadas. Talvez no Ensino Médio essa discussão pode ocorrer de forma mais superficial, a fim de não perder o foco do tema principal e gerar desconfortos por parte dos alunos. Por outro lado, pelo menos nos cursos de Matemática, é relevante que seja abordada ou solicitada como pesquisa por parte dos acadêmicos.

**Exemplo 5:** Que número corresponde a sequência a seguir: 1, 0, 2, 1, 3, 2, ...?

Resolução:

Note que os termos de ordem ímpar (primeiro, terceiro, quinto etc) representam os números inteiros a partir do 1, os quais são, respectivamente iguais a 1, 2, 3, ....

Os termos de ordem par (segundo, quarto, sexto etc) representam os inteiros iniciando por 0, os quais são, respectivamente iguais a 0, 1, 2, ....

Como o próximo número da sequência dada é o sétimo, segue que é um termo de ordem ímpar e, portanto, é o quarto inteiro a partir do número 1, ou seja, é o número 4.

**Exemplo 6:** Qual número corresponde a sequência a seguir: 2, 10, 12, 16, 17, 18, 19...?

Resolução:

Este é um problema clássico, mas também intrigante, pois devido ao aparecimento dos três primeiros termos dessa sequência, parece que ela não possui qualquer tipo de propriedade característica.

De antemão, quem não conhece este exemplo, pode achar impossível encontrar uma lógica numérica que sirva para determinar o próximo termo (a saber, não é igual a 20). Do ponto de vista conceitual, é um exemplo considerado nível baixo, mas nos mostra ideias que podem ser utilizadas em problemas de diversos concursos no Brasil.

Note que todos os termos são números inteiros positivos cuja denominação inicia com a letra D e estão expostos em ordem crescente. Assim, o próximo termo é o número 200 (verifique!).

**Exemplo 7:** Qual número corresponde a sequência a seguir: 77, 69, 61, 53, 45, 37, ...?

Resolução:

Claramente, cada termo é o anterior subtraído 8 unidades, ou seja, a partir do segundo termo, a diferença entre um termo e o anterior é igual a 8. Assim, o próximo termo é igual a 29.

**Observação:** Esta sequência é um exemplo de progressão aritmética (PA) decrescente. Mais exemplos poderão ser dados para que adiante seja introduzida o conceito formal de PA. Pode ser solicitado aos alunos que encontrem o décimo quinto termo por exemplo. Caso análogo pode ser obtido com progressões geométricas.

**Exemplo 8:** Qual número corresponde a sequência a seguir:  $\frac{1}{2}, \frac{2}{6}, \frac{4}{18}, \frac{8}{54}, \dots$ ?

Resolução:

Neste exemplo, espera-se que os alunos respondam que o próximo termo seja igual a  $\frac{16}{162}$ , talvez por verificar que, a partir do segundo termo, o numerador de cada

termo é multiplicado por 2 enquanto o denominador por 3. Este raciocínio está correto e, neste caso particular, tem-se um exemplo de progressão geométrica.

**Observação:** Peça para que eles dividam um termo pelo anterior e note os resultados obtidos. O que se conclui disso? Levar para sala de aula problemas que causam interesse dos alunos é uma ótima estratégia para prepara-los ao tema centrar. Talvez esta preparação pode não ser pela aprendizagem direta de tais conceitos, mas sim de motivação.

Exemplos como os apresentados acima, podem servir também de um ótimo passatempo extraclasse, devido a ser desafiante e eles acreditarem que poderão resolvê-los a qualquer momento. Os próprios alunos deverão levar para sala de aula estes tipos de problemas para desafiarem os colegas e, inclusive, o professor. É uma excelente oportunidade para que o raciocínio lógico matemático seja estimulado.

Neste trabalho foram apresentados alguns exemplos sobre o tema desta seção. No entanto, cabe ao professor junto com os alunos discutirem outros tipos de problemas relacionados ao tema, como por exemplo, a Torre de Hanói. Neste, é interessante encontrar o número mínimo de movimentos para transportar todos os discos de uma haste para outra, respeitando as regras impostas.

Após uma boa discussão sobre aplicações e problemas de raciocínio lógico envolvendo sequências numéricas, sugere-se que possa ser introduzido o estudo de progressões aritméticas e, em seguida, progressões geométricas. Neste último tema, aparece o conceito de séries infinitas quando deseja-se calcular a soma infinita dos termos de uma PG.

Sendo assim, da mesma forma como este trabalho sugere que se faça no estudo de sequências, também acredita-se que antes de iniciar a discussão sobre soma infinita de termos de uma PG, deve-se preparar o aluno com o conceito de séries numéricas de um modo geral, levando problemas interessantes e instigando-os a verificar se uma dada série converge ou diverge. No caso de convergência, solicitar o valor de sua soma. Na próxima será apresentado estudo sucinto sobre séries numéricas.

### 3. UMA INTRODUÇÃO ÀS SÉRIES NUMÉRICAS

#### 3.1 SÉRIE INFINITA

Vimos a definição de sequência numérica infinita  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ . Ao adicionarmos seus termos, obtemos o que denominamos de **série infinita**, ou simplesmente, série.

$$\text{Notação: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Em um primeiro momento pode parecer estranho aos alunos do Ensino Básico pensar em calcular uma soma infinita, pois provavelmente alguns poderão pensar que sempre somando, por exemplo, parcelas positivas, tem-se que sua soma ultrapassa qualquer valor preestabelecido. Se isso acontecer, sugerimos ao professor que instigue ao aluno a pensar em algumas sequências numéricas, como, por exemplo, progressões geométricas. Em particular, a progressão geométrica  $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ . Se a soma dos termos desta sequência é finita, dizemos que a série associada é convergente, conforme definição a seguir.

#### Definição de Séries Convergentes:

Dizemos que um número real  $S$  é a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , ou que a série

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge para  $S$ , se e somente se,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  (o limite da sequência das

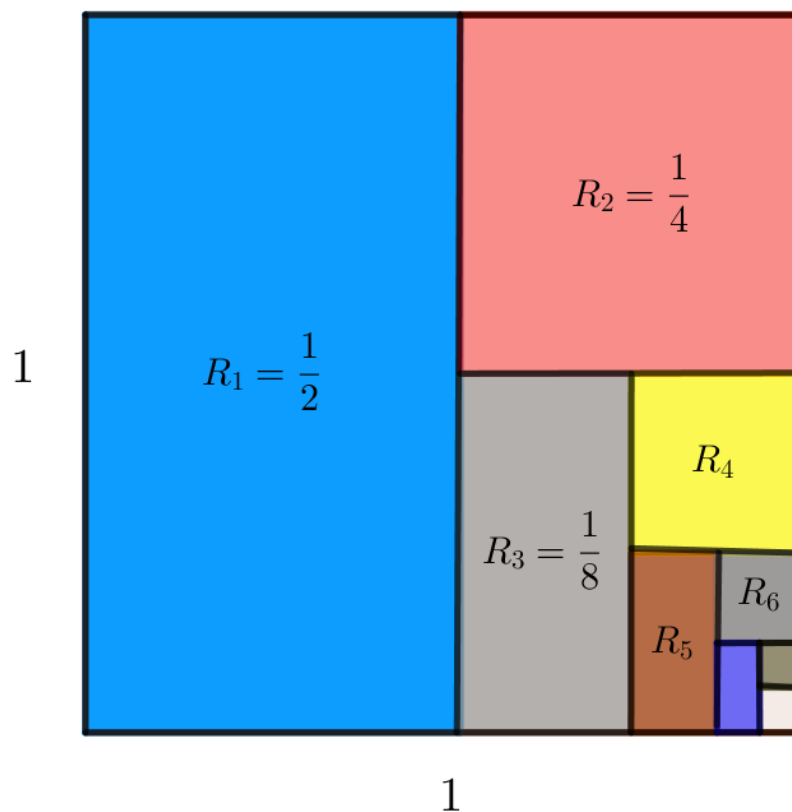
somas parciais  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  é  $S$ ). Neste caso, escrevemos  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Quando  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  não existe, dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge. A divergência pode ocorrer  $S_n$  torna-se infinita ou  $S_n$  oscila quando  $n \rightarrow \infty$ .

De acordo com a definição de série convergente, note que a série associada à sequência citada no parágrafo anterior converge para 1 e, uma noção geométrica pode ser observada pela Figura 2, onde um quadrado de lado 1 u.m. (área igual a 1 u.A.) foi particionado em infinitos retângulos  $R_1, R_2, R_3, \dots$  cujas áreas são numericamente iguais aos termos da sequência anterior. Dessa forma, tem-se que  $R_1 + R_2 + R_3 + \dots = 1$ , ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

Figura 2 - Ilustração geométrica da convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ .



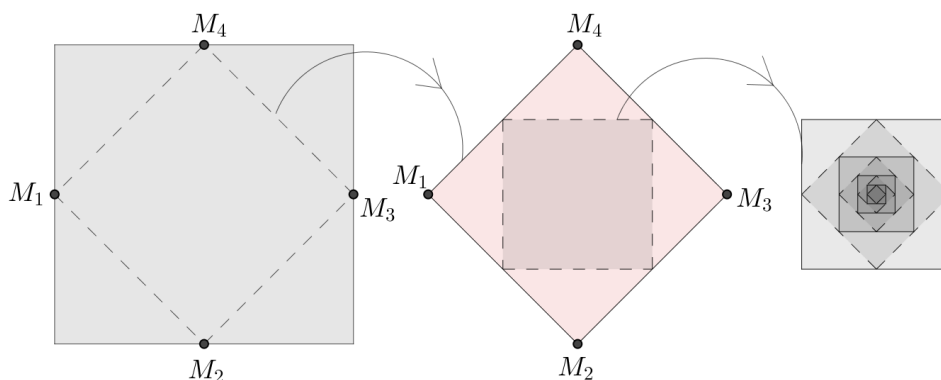
A definição de séries geométricas e alguns resultados serão estudados mais adiante.

Outra maneira de mostrar aos alunos que a série geométrica acima converge para 1 pode ser dada conforme ilustração apresentada na Figura 2. Peça aos alunos que peguem uma cartolina quadrada; tome os pontos médios  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  e  $M_4$  de cada lado; ligue estes pontos por segmentos de reta. Assim, a figura obtida é um quadrado (esta propriedade poderá ser explorada por meio de conceitos de geometria plana). Faça o recorte com uma tesoura e deixe que eles percebam que o novo quadrado terá área igual a  $1/2$  unidade de área. Consequentemente, a área que foi descartada terá a mesma medida. Este procedimento deverá ser feito mais vezes com os novos quadrados obtidos e eles perceberão que a soma das áreas descartadas se aproxima cada vez mais de 1 e este valor não poderá ser ultrapassado, o que fica claro pelo procedimento que está sendo executado.

O professor pode aproveitar este momento para comentar que a nova sequência  $(S_n) = (0.5, 0.75, 0.875, 0.9375, 0.96875, \dots)$ , formada pelas somas das áreas será chamada de somas parciais e que neste exemplo tal sequência é monótona crescente e limitada, portanto, isso garante que ela converge. A demonstração deste resultado não é necessária no Ensino Médio. No entanto, é interessante que seja apresentado este resultado e, possivelmente, utilizado.

Figura 3 – Ilustração geométrica da convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  por

meio de recortes em uma cartolina quadrada.



Fonte: Elaborado pelo autor no *software* GeoGebra.

Acreditamos que estes exemplos instigam ao aluno ao interesse no estudo de séries numéricas infinitas. Neste momento, o professor pode apresentar a série

harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  e pedir para que os alunos analisem se ela converge ou não e, em

caso de convergência, qual é a sua soma. Acredita-se que algum aluno pensará que esta série é convergente e não divergente, pois os termos estão decrescendo para zero. Sugere-se que o professor deixe esta análise para que os alunos a façam como "dever de casa", com o uso também de algum *software* (há diversos *softwares* livres que podem ser trabalhados no laboratório da escola, se existir, ou extra-classe, inclusive pode ser instalado no celular, como por exemplo o Geogebra). Espera-se que muitas dúvidas ocorram e é este um dos interesses do professor, que gere discussão entre os alunos e alunos-professor. Esta série será estudada adiante.

### 3.2 SOMAS PARCIAIS DAS SÉRIES NUMÉRICAS

Vimos que a série geométrica  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  possui soma igual a 1.

Esta série é dita convergente, pois existe um número real  $S$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ . Mas nem toda série é convergente, como por exemplo a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots$ . Claramente, para todo real  $S$ , existe um natural  $N$  tal que  $1 + 2 + 3 + \dots + N$  é maior do que  $S$ . Este tipo de série é classificado como divergente, ou simplesmente, não convergente.

Após apresentar estas duas séries aos alunos, indague-os para que eles próprios definam quando uma série converge ou diverge. Provavelmente eles irão concluir que uma série numérica é convergente quando é possível encontrar um valor para a soma infinita e divergente quando o valor da soma não for finito. Ao final de tais discussões, apresente a seguinte série:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$ . Se existir, qual é o valor da soma dos termos desta série? Esta série converge ou diverge? É possível que alguns alunos digam que converge para 0 e outros para 1, isso vai depender se somarmos um número ímpar ou par de termos.

As discussões apresentadas nos parágrafos anteriores mostrarão aos alunos que precisamos encontrar alguma definição ou resultado que garanta a convergência ou não de uma série. Neste momento o professor poderá apresentar o conceito de somas parciais e, a partir delas, definir quando uma série é convergente.

Nota-se que é importante que o professor saiba apresentar este estudo de forma instigante, sem excesso de rigor matemático para não tornar o assunto difícil, cansativo e, conseqüentemente, desinteressante.

A seguir será apresentado o conceito de soma infinita.

Numa série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ , se for somado apenas os  $N$  primeiros termos, teremos a soma parcial  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ .

Vamos encontrar a sequência  $(S_n) = (S_1, S_2, S_3, \dots)$  das somas parciais das três últimas séries apresentadas nesta seção. Em seguida, apresentaremos a definição da convergência de uma série por meio da sequência das somas parciais.

Caso 1: Dada a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ . Temos que:

$$S_1 = a_1 = 1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

⋮

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$



Veja que à medida que  $n$  cresce,  $S_n$  se aproxima de 1 ou, utilizando a notação de limite, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

Caso 2: Dada a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots$ . Temos que:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 + 2 = 3$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 :$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Note que à medida que  $n$  cresce,  $S_n$  também cresce e  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ .

A expressão  $\frac{n(n+1)}{2}$  para o cálculo dos  $n$  primeiros inteiros positivos pode ser

encontrada junto com os alunos ou deixando como “dever de casa” para eles. Note que esta soma deverá também ser apresentada no estudo de progressões aritméticas.

Caso 3: Dada a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$ . Temos que:

$$S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, S_5 = -1, S_6 = 0, \dots$$

Esta série tanto parece ser igual a -1 como igual a zero, dependendo de como ela é encarada. Veja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = -1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) - \dots = -1.$$

Também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = -(1-1) - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots = 0.$$

Veja ainda o que pode ser feito. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = -1 - (-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots)$$

segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Daí, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -\frac{1}{2}$$

E agora?  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  é igual a 1, zero ou  $\frac{1}{2}$ ? Essa aparente contradição ocorre,

pois, segundo Ávila (2005), somar números, sucessivamente, uns após outros, é uma ideia concebida para uma quantidade finita de números a somar. Ao aplicá-la a somas infinitas, por mais que somemos, sempre haverá parcelas a somar. O processo de somas sucessivas não termina; em consequência, não serve para definir a soma de uma infinidade de números.

Vimos nos três casos anteriores que no primeiro existe o limite, enquanto que nos dois últimos, tal limite não existe. Em particular, no último a sequência das somas parciais oscila e, portanto, não existe o limite.

Uma discussão como foi apresentada com a última série deve ocorrer cuidadosamente se for feita em turmas do Ensino Médio, visto que ela leva a conclusões contraditórias e o professor deve estar bem preparado para debater como os alunos casos desta natureza. Por outro lado, é imprescindível que seja feita nos cursos de cálculo e/ou análise matemática, pois é um exemplo intrigante e isso deve causar a curiosidade dos acadêmicos em melhor entender este assunto.

Como curiosidade o professor pode ressaltar que matemáticos como Gauss e Euler usaram com sucesso séries infinitas para obter resultados anteriormente inalcançáveis. Laplace usou séries infinitas para provar a estabilidade do sistema solar. Passaram-se muitos anos até que analistas cuidadosos como Cauchy desenvolvessem o fundamento teórico para cálculos de séries, mandando muitos matemáticos (inclusive Laplace) de volta para a escrivaninha para verificar seus resultados.

Séries infinitas formam a base para uma técnica notável que nos permite expressar muitas funções como "polinômios infinitos" e, ao mesmo tempo, calcular o erro quando truncamos esses polinômios para torná-los infinitos. Além de produzir aproximações polinomiais eficazes de funções diferenciáveis, esses polinômios infinitos (chamados séries de potências) tem muitas outras utilidades. As séries infinitas fornecem uma maneira eficiente para avaliar integrais não elementares e resolvem equações diferenciais que nos permitem compreender o fluxo de calor, a vibração, a difusão química e a transmissão de sinais.

Após essa discussão, espera-se que os alunos percebam que a existência deste limite está diretamente relacionada com a convergência de uma série. Neste momento o professor pode apresentar a definição de convergência de uma série.

Note que a série apresentada no Caso 1 é convergente, enquanto que as séries apresentadas nos casos 2 e 3 são divergentes.

### 3.3 ALGUMAS SÉRIES ESPECIAIS

#### 3.3.1 SÉRIES GEOMÉTRICAS

Antes do professor apresentar em sala de aula o conceito de séries geométricas, sugerimos que verifiquem como os alunos aprenderam a encontrar a geratriz de uma dízima periódica. Provavelmente a maioria dirá que encontravam por meio de um “macete” ou denotando a dízima periódica de “ $x$ ”, por exemplo, e a partir daí, obtém-se duas dízimas periódicas diferentes cujas partes decimais eram iguais, para em seguida subtrair estas novas dízimas, o que eliminava a parte decimal e, a partir daí, obtinha-se a fração geratriz da dízima dada.

Vamos apresentar outra maneira de encontrar a sua geratriz, valorizando o conceito de somas infinitas.

**Exemplo 9:** Determine a geratriz da dízima periódica  $0,171717\dots$

Resolução:

Seja  $a = 0,171717\dots$

Assim,

$$a = 0,17 + 0,0017 + 0,000017 + \dots$$

$$= \frac{17}{10^2} + \frac{17}{10^4} + \frac{17}{10^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{10^2} \left( 17 + \frac{17}{10^2} + \frac{17}{10^4} + \frac{17}{10^6} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{10^2} (17 + a)$$

Dessa forma,

$$a = \frac{1}{10^2}(17 + a).$$

Isto implica que

$$10^2 a = 17 + a.$$

Logo,

$$a(10^2 - 1) = 17 \text{ e, portanto,}$$

$$a = \frac{17}{10^2 - 1} = \frac{17}{99}$$

Esta estratégia pode mostrar aos alunos que não há um único método ou algoritmo para resolver este tipo de problema e, além do mais, pode instiga-los a ter curiosidade nas manipulações algébricas.

No Exemplo 9 foi mostrado uma proposta para encontrar a geratriz de uma dízima periódica simples. A ideia utilizada pode ser expandida para o cálculo da geratriz de dízimas periódicas compostas, conforme segue:

**Exemplo 10:** Determine a geratriz da dízima periódica 0,235555....

Resolução:

$$\text{Seja } a = 0,235555\dots$$

Assim,

$$a = 0,23 + 0,005 + 0,0005 + 0,00005 + \dots$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \dots$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{5}{10^2} \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right)$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{9}$$

$$= \frac{9 \cdot 23 + 5}{900} = \frac{212}{900}$$

Logo, segue que a geratriz da dízima periódica  $a = 0,235555\dots$  é igual a  $\frac{212}{900}$ .

Veja que na resolução deste problema foi utilizado o seguinte resultado:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = \frac{1}{9}$$

Este resultado deverá ser proposto em sala de aula. Sua resolução poderá ocorrer de modo análogo ao proposto no exemplo anterior. Com isso, os alunos perceberão que  $0,1111\dots = \frac{1}{9}$ .

Tendo de antemão o resultado anterior, o professor poderá instigar os alunos a perceberem que a geratriz da dízima periódica  $a = 0,235555\dots$  poderá ser obtida da seguinte maneira:

$$0,235555\dots = 0,23 + 0,005555\dots$$

$$= 0,23 + \frac{5}{100} \cdot 0,1111\dots$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{9}$$

$$= \frac{212}{900}$$

Apresentar diversificados tipos de soluções em certos problemas sobre séries também é uma parte fundamental deste trabalho. Muitas vezes, resolver um problema de apenas uma forma, mesmo que seja considerada clara e didática, pode não atingir alguns objetivos, como por exemplo, o de fazer com que o aluno tome gosto pela matemática,

pela resolução de problemas. Por isso, criar novas possibilidades para “atacar” um problema pode ser muito útil no que diz respeito a tomar “gosto” pela matemática.

Na resolução dos exemplos 9 e 10 foi utilizado somas infinitas as quais pertencem à classe das séries geométricas. Até este momento, não é necessário que o professor utilize o conhecimento prévio de sua soma ou mostre a fórmula para calculá-la. Tais somas foram encontradas por meio de estratégias também convincentes e de certo modo interessantes. No entanto, verificar a convergência e demonstrar como pode ser obtida a soma é imprescindível no estudo das séries geométricas. Isso se justifica também pelo fato de sua demonstração ser de fácil compreensão.

### 3.3.2 A SÉRIE HARMÔNICA

A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  é conhecida como série harmônica e seu

termo geral  $a_n = \frac{1}{n}$  tende a zero, ou seja, à medida que  $n$  cresce, os termos ficam cada vez mais próximos de zero, o que pode causar uma intuição falha quanto à sua convergência ou divergência, visto que a contribuição na soma se torna cada vez menor.

Após o estudo das séries geométricas convergentes, é natural que os alunos concluam que a série harmônica também convirja. No entanto, é preciso uma análise bem cuidadosa sobre esta série.

O professor pode pedir para que os alunos utilizem algum *software* e somem os 100 primeiros termos desta série. Em seguida, os 1000 primeiros termos. Peça para que verifiquem se houve um aumento considerável nesta soma. Eles vão perceber que não. Pode ainda solicitar que vá aumentando o número de termos e tabelando os resultados obtidos.

O procedimento acima é na verdade, análogo ao de encontrar a sequência  $(S_n)$  das somas parciais, mas, devido à lentidão na soma, é menos exaustivo determinar alguns termos com passos maiores. A Tabela 1 mostra alguns termos encontrados no *software* wxMaxima, em que foi considerado truncamento de seis casas decimais.

Tabela 1: Alguns termos da sequência das somas parciais da série harmônica

n	$S_n$	n	$S_n$
<b>10</b>	2,928968	<b>300</b>	6,282663
<b>20</b>	3,597739	<b>400</b>	6,569929
<b>30</b>	3,994987	<b>500</b>	6,792823
<b>40</b>	4,278543	<b>1.000</b>	7,485470
<b>50</b>	4,499205	<b>5.000</b>	9,094508
<b>60</b>	4,679870	<b>10.000</b>	9,787606
<b>70</b>	4,832836	<b>50.000</b>	11,397003
<b>80</b>	4,965479	<b>100.000</b>	12,090146
<b>90</b>	5,082570	<b>1000.000</b>	14,392726
<b>100</b>	5,187377	<b>10.000.000</b>	16,695311
<b>200</b>	5,878030	<b>100.000.000</b>	18,997896

O uso de um *software* é uma ferramenta essencial para a obtenção dos valores apresentados na Tabela 1. O wxMaxima é um *software* gratuito e com uma interface bastante amigável. Ele pode ser obtido a partir do seguinte endereço na web: <http://maxima.sourceforge.net/download.html>.



Note que o crescimento das somas parciais é muito lento, isso causa a falsa ideia de que a série harmônica é convergente. No entanto, será mostrado a seguir que tal série é divergente.

Considere a série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ . Seus termos podem ser

agrupados da seguinte maneira:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{17} \dots$$

Note que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

⋮

e assim por diante, de sorte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Visto que esta última soma representa uma infinidade de termos constantes diferentes de zero, segue que a série diverge.

### 3.3.3 UMA SÉRIE CURIOSA

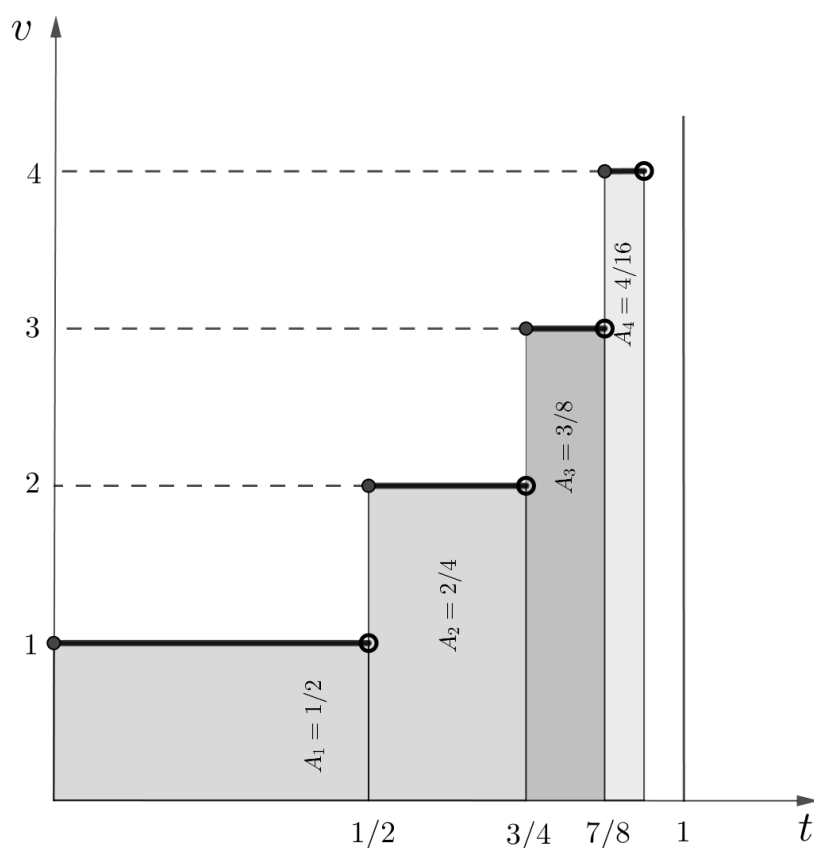
Considere a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$ . As informações que se seguem

sobre essa série serão baseadas em ÁVILA (1996). Segundo ÁVILA (1996), essa série

foi considerada, por volta de 1350, por um dos matemáticos de Oxford, Richard Swineshead. O surgimento desta série se deu considerando um movimento de uma partícula que se desenvolve durante o intervalo de tempo  $[0, 1]$  da seguinte maneira: a velocidade da partícula permanece constante e igual a 1 durante a primeira metade do intervalo, ou seja, no intervalo  $[0, 1/2]$  de duração  $1/2$ . Neste intervalo, o espaço percorrido é igual a  $1/2$ ; durante a primeira metade do intervalo  $[1/2, 1]$ , a velocidade da partícula permanece constante e igual 2, ou seja, no intervalo  $[1/2, 3/4]$  de duração  $1/4$ . Neste intervalo, o espaço percorrido é igual a  $2/4$ ; durante a primeira metade do intervalo  $[3/4, 1]$ , a velocidade da partícula permanece constante e igual 3, ou seja, no intervalo  $[3/4, 7/8]$  de duração  $1/8$ . Neste intervalo, o espaço percorrido é igual a  $3/8$ ; Este procedimento ocorre indefinidamente.

Note que os espaços percorridos são numericamente iguais à área dos retângulos mostrados na Figura 4. Isto ocorre em virtude deste gráfico representar o gráfico da velocidade  $v$  em função do tempo  $t$ .

Figura 4: Gráfico da Velocidade em função do tempo.



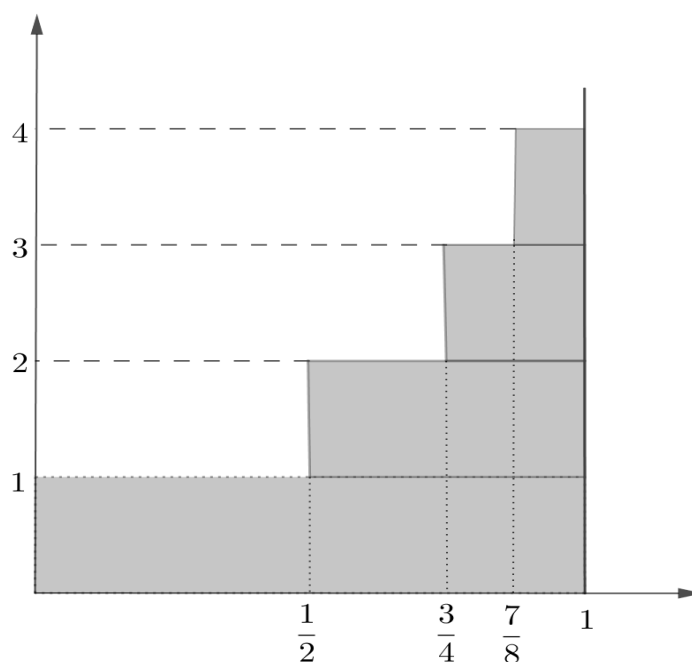
Fonte: Adaptado de Ávila (1996).

Desta forma, o espaço percorrido pela partícula é igual a 2. Richard Swineshead mostrou que o valor desta soma é igual a 2 por meio de um argumento longo e complicado. Mas, tempos depois, Oresme apresentou uma explicação geométrica interessante para a soma desta série. Vimos que essa soma é igual a soma das áreas dos retângulos verticais que, por sua vez, é igual à soma das áreas dos retângulos horizontais mostrados na Figura 5.

Esta última soma pode ser pensada da seguinte maneira: consideremos uma sucessão infinita de movimentos, todos com velocidades iguais a 1; o primeiro no intervalo de tempo  $[0,1]$ ; o segundo no intervalo de tempo  $[\frac{1}{2}, 1]$ ; o terceiro no intervalo  $[\frac{3}{4}, 1]$ , e assim por diante.

Com este tipo de movimento, fica claro que os espaços percorridos (que são numericamente iguais as áreas dos retângulos verticais) são iguais a  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$  e assim, sucessivamente. Em consequência disso, a soma dos espaços percorridos pode ser representada pela série geométrica, a qual possui soma 2, que é a soma da série original, conforme foi mostrado geometricamente igualando as áreas mostradas nas figuras 4 e 5.

Figura 5: Gráfico da Velocidade  $v$  em função do tempo  $t$



Fonte: Adaptado de Ávila (1996).

Acabamos de apresentar a ideia que Oresme utilizou para calcular o valor da série, mostrando que sua soma é igual a 2.

### 3.3.4 UMA SÉRIE TELESCÓPICA

Os primeiros termos desta série são  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots$ . É uma série também interessante para ser discutida em sala de aula. Em um primeiro momento, pode ocorrer de alguns alunos pensarem que ela diverge, visto que podem

associar à série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Por outro lado, se comparada à série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1, \text{ vê-se claramente que para}$$

um natural  $N$  fixado, segue que  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n}$ , o que é um bom indício que ela seja convergente. Estas duas conjecturas deverão ocorrer por parte dos alunos e isso pode ser instigado pelo professor.

Mais uma vez, vamos usar a ideia de somas parciais para o estudo da convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

⋮

Raciocinando indutivamente, concluímos que

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Como  $S_n = \frac{n}{n+1}$  converge para um, segue que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

também converge para 1, isto é,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots = 1$ .

A forma como foi abordado este problema provavelmente deverá ser análogo ao dos alunos, visto que neste momento eles já foram apresentados ao conceito de somas parciais. Portanto, é esperado que utilizem este conceito. No entanto, o professor deverá tentar leva-los à outra forma de analisar esta série, por meio da decomposição em frações parciais, conforme segue:

Primeiramente, podemos notar que  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .

Assim,

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$a_4 = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

⋮

Portanto,

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots = 1 - \frac{1}{n},$$

em que à medida que  $n$  aumenta,  $S_n$  se aproxima cada vez mais de 1. Daí,

concluímos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  converge para 1.

Vimos que apesar de para qualquer natural  $n$ , tem-se  $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{2^n}$ , as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  convergem para o mesmo valor. Este resultado é bastante curioso e isso mostra como é muitas vezes difícil e ao mesmo tempo instigante o estudo de séries numéricas. A série apresentada acima é um exemplo de uma série telescópica.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente o estudo de sequências e séries é abordado de modo superficial no Ensino Médio. Geralmente os livros textos dão enfoque às progressões aritméticas e geométricas, deixando de lado muitos conceitos que dizem respeito às sequências e séries numéricas. Normalmente é feito assim:

O que propomos aqui não é que o professor deixe de utilizar os livros didáticos, nem tão pouco que deixe de explorar os conceitos e formalidades matemáticas relacionadas ao tema, mas sim, uma maneira pela qual o professor pode introduzir o tema, para depois partir para um estudo mais formal (se achar necessário).

Neste trabalho não foi nossa intenção apresentar uma proposta didático-pedagógica do ensino de séries e sequências, mas houve a preocupação de mostrar a importância de se abordar o assunto quando se trabalha as progressões aritméticas e geométricas.

No desenvolvimento desta dissertação foi verificado que se pode trabalhar o tema com alunos utilizando os *softwares* livres GeoGebra e Maxima. Estes *softwares* ajudam a fazer conjecturas e tornar os problemas ainda mais desafiadores e em um contexto do seu cotidiano, instigando-os a resolvê-los. Isso ocorreu, por exemplo, quando foi discutido a série geométrica e a harmônica, pois foi concluído que a primeira converge enquanto que a segunda diverge, no sentido de que sua soma é maior do que qualquer valor preestabelecido. Dessa forma, acreditamos que isso provocará inquietações e questionamentos por parte dos alunos, estimulará a imaginação deles e é esta a proposta desafiadora que norteia este trabalho.

Esta pesquisa teve grande contribuição na minha formação, mas também contribuirá com a de outros professores da área para que eles possam abordar melhor este tema, mostrando aos alunos diferentes formas de se trabalhar um mesmo conteúdo, porém com outra abordagem.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO J. A. M.; *Sequências e Séries: uma abordagem mais aprofundada para o ensino médio*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Amazonas, Manaus - AM, 99 f., 2017.

ÁVILA, G. As Séries Infinitas. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 30, p.10-17, 1996.

BARBOSA, F. A.; *Proposta de abordagem da Sequência de Fibonacci e razão áurea no ensino médio: teoria e aplicações*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade de Brasília, UNB, Brasília, DF, 83 f., 2017.

BELINI, M. M.; *A razão áurea e a sequência de Fibonacci*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 67 f., 2015.

BORGES, F. P.; *A Sequência de Fibonacci e algumas de suas aplicações*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra. Cuiabá - MT, 76 f., 2015.

CARRION, M. R.; *A razão áurea e a sequência de Fibonacci como recursos de aprendizagem de sequências numéricas – PA e PG – no ensino médio*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências, Presidente Prudente - SP, 74 f., 2015.

CERQUEIRA, A. C. S; *Um estudo sobre sequências e séries*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro - SP, 63 f., 2013.

FULONE, H. D.; *Desmistificando a Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do ABC. Santo André - SP, 138 f., 2017.

LEOPOLDINO, K. S. M.; *Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea: Aplicações no Ensino Básico*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal - RN, 117 f., 2016.



MACENA, E. S.; *Identidades dos números de Fibonacci: Uma proposta de sequência didática para turmas olímpicas de nível 2*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió - AL, 80 f., 2018.

MELO, M. I. A.; *Razão Áurea e Números de Fibonacci: da teoria à prática através da fotografia*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro - RJ, 80 f., 2017.

POSSEBON, J. E.; *Fibonacci e a razão áurea: Uma abordagem para o Ensino Básico*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Palmas do Amazonas, Palmas - TO, 130 f., 2016.

SILVA, J. A. L.; *Uma abordagem selecionada de sequências recorrentes*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Fortaleza – CE, 57 f., 2017.

SILVA, L. S.; *A razão áurea e a sequência de Fibonacci*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 67 f., 2015.

SILVA, P. E. A.; *A Sequência de Fibonacci e o número de ouro: Contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos do primeiro ano do ensino médio*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista - BA, 129 f., 2015.

TITONELI, L. M. B; *A observação de padrões: modelagem matemática através de sequências numéricas e objetos geométricos*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, Rio de Janeiro – RJ, 78 f., 2017.

VEIGA, E. S; *Sequências: do ensino básico à pós-graduação*. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 135 f., 2018.

## 6. APÊNDICE

### 6.1 SEQUÊNCIAS E SÉRIES: UMA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

Nesta seção será apresentado de forma concisa um pouco sobre a teoria de sequências e séries que geralmente aparecem nos currículos de matemática na Educação Básica. As sequências costumam ser exploradas no contexto das progressões aritméticas e geométricas e as séries aparecem quando se estudam as dízimas periódicas e a soma dos "infinitos" termos de uma progressão geométrica.

Toda esta discussão no Ensino Médio aparece de maneira pouco precisa e intuitiva, pois, nesta etapa de escolarização, os alunos ainda não dispõem da teoria de limites para um estudo aprofundado do tema. Além disso, posteriormente, será apresentada algumas propostas de trabalho com somas infinitas e as séries de Maclaurin das funções seno, cosseno e exponencial que se adequam ao trabalho do professor no Ensino Médio. Não se tratam de propostas onde o processo de aprendizagem acontece nos moldes tradicionais com o professor explicando e exemplificando os resultados para em seguida desenvolver exercícios com a classe. Pelo contrário: será mostrado propostas de trabalho onde a descoberta por parte dos alunos, o trabalho em grupo e o desenvolvimento de posturas ativas na busca pelo aprendizado são privilegiados e destacados dentro do processo de ensino e aprendizagem.

#### 6.1.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma sucessão aritmética é também chamada de Progressão Aritmética se a diferença entre seus termos consecutivos for constante.

##### **Termo Geral de uma Progressão Aritmética**

Uma progressão aritmética genérica é uma sequência numérica que pode ser escrita da forma  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  cuja a razão é  $r$ .

De acordo com a definição podemos escrever:

$$a_2 = a_1 + 1.r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$

.....

Podemos deduzir das igualdades acima que:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r \text{ (denominada termo geral da PA).}$$

Dessa fórmula, temos que:

$a_n$  : é o termo de ordem  $n$  (n-ésimo termo);

$r$  : é a razão;

$a_1$  : é o primeiro termo da Progressão Aritmética – PA.

### Propriedades de uma PA

**1ª Propriedade:** Em toda Progressão Aritmética (PA), um termo qualquer, excluindo-se os extremos, é média aritmética entre o seu antecedente e o seu conseqüente.

Desta forma na P.A. temos:  $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n) \Rightarrow a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$

**Exemplo 11:** P. A. = (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...)  $\Rightarrow 5 = \frac{3+7}{2}$ ;  $9 = \frac{7+11}{2}$ ; etc.

**2ª Propriedade:** Em toda P.A. limitada, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Na P.A.  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$  temos

Exemplo: PA (1, 2, 3, ..., 98, 99, 100)  $\Rightarrow$  Temos:  $2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 1 + 100$ .

**3ª Propriedade:** Em toda P.A. de número ímpar de termos, o termo central ou termo médio é a média aritmética dos termos equidistantes a ele.

Exemplo: PA (3, 5, 7, 9, 11)  $\Rightarrow 7 = \frac{3+11}{2} = \frac{5+9}{2}$

**Soma dos termos uma Progressão Aritmética (P.A.):**

Soma dos termos de uma P.A. finita (ou limitada) é igual ao produto da semissoma dos extremos pelo número de termos.

Demonstração:

Se fizermos a soma dos  $n$  termos de uma PA finita ordenando de forma crescente e decrescente os termos teremos:

$$+ \begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como há  $n$  termos de mesmo valor  $(a_1 + a_n)$ , pela propriedade 2, temos:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

**Exemplo 12:** Calcular a soma dos 20 primeiros termos de uma PA (2, 5, 8, ...).

**Solução:**

$$a_{20} = 2 + (20 - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_{20} = 2 + 57 = 59$$

Portanto,

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(2 + 59) \cdot 20}{2} = 610$$

**Interpolação de uma Progressão Aritmética (PA):**

Interpolar ou inserir “ $k$ ” meios aritméticos entre dois extremos  $a_1$  e  $a_n$ , significa formar uma PA de  $n = k + 2$  termos onde  $a_1$  e  $a_n$  são os extremos.

Como  $a_1$  e  $a_n$  são dados, basta determinar a razão  $r$ .

**Exemplo 13:** Insira 4 meios aritméticos entre 3 e 38.

**Solução.**

$$a_1 = 3; a_n = 38; n = 6; r = ?$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow r = 7.$$

Logo, PA (3, 10, 17, 24, 31, 38).

### Progressão Aritmética de 2ª Ordem

A definição de progressão aritmética utilizada até agora, na verdade é um caso particular chamado progressão aritmética de 1ª ordem, onde a subtração dos termos consecutivos é constante. No caso da PA de 2ª ordem, a segunda subtração de termos consecutivos é que será constante.

**Exemplo 14:** (1, 3, 6, 10, ...)

1ª subtração:  $3 - 1 = 2$ ;  $6 - 3 = 3$ ;  $10 - 6 = 4$ , ....

Observe que as diferenças não são constantes, mas os resultados (2, 3, 4, ...) formam uma PA de razão constante igual a 1. Portanto, a sequência (1, 3, 6, 10, ...) é uma PA de segunda ordem.

De forma  $\dots$ , podemos escrever essa situação da seguinte forma:

i)  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  representando a PA de 2ª ordem.

ii)  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  representando a PA de 1ª ordem.

$$a_2 - a_1 = b_1$$

$$a_3 - a_2 = b_2$$

$$a_4 - a_3 = b_3$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$$

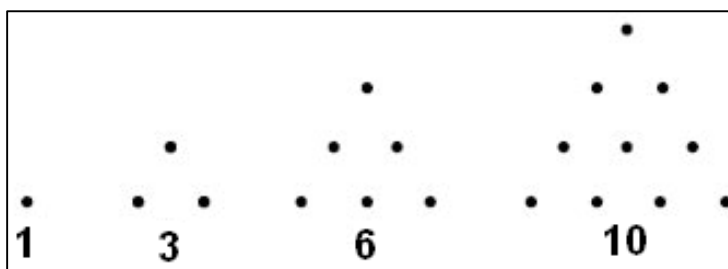
Adicionando os dois membros entre si, observamos que os termos simétricos do 1º membro se anulam sobrando  $(a_n - a_1)$  e no 2º membro forma-se uma soma de PA. Escrevendo essa expressão, temos:

$$a_n - a_1 = \frac{(b_1 + b_{n-1}) \cdot (n-1)}{2}$$

Logo,

$$a_n = a_1 + \frac{(b_1 + b_{n-1}) \cdot (n-1)}{2}$$

**Exemplo 15:** “Números triangulares” são números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos equiláteros. É conveniente definir 1 como o primeiro número triangular. Apresentamos a seguir os primeiros números triangulares. Se  $T_n$  representa o n-ésimo número triangular, então  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 3$ ,  $T_3 = 6$ ,  $T_4 = 10$ , e assim por diante. Dessa forma, qual o valor de  $T_{100}$ ?



**Solução:**

$$\begin{cases} a_{100} = 1 + \frac{(2 + b_{99}) \cdot (100-1)}{2} = 1 + \frac{(2 + b_{99}) \cdot 99}{2} \\ b_{99} = 2 + (99-1) \cdot 1 = 2 + 98 = 100 \end{cases}$$

Assim,

$$a_{100} = 1 + \frac{(2 + 100) \cdot 99}{2} = 5050.$$

## Proposta de atividade didática

Apresentamos agora uma proposta didática utilizando progressões aritméticas em um problema de matemática financeira; especificadamente serão abordados juros simples.

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio.

Recursos Pedagógicos: Lousa.

Objetivo Geral: Discutir com os alunos o conceito de juros simples, empregando os conhecimentos prévios sobre progressões aritméticas.

Objetivos Específicos:

1. Ensinar a linguagem básica de matemática financeira aos alunos do Ensino Médio;
2. Desenvolver a teoria de juros simples através da aplicação do conceito de progressão aritmética;
3. Aplicar o conceito de juros simples na resolução de problemas. Conteúdo: Progressões aritméticas, matemática financeira (juros simples).

Desenvolvimento: Esta proposta será realizada em duas aulas. Na primeira das aulas, após introduzir a linguagem comum de matemática financeira e definir os conceitos de juros, tempo, taxa, montante e outros pertinentes, o professor poderá motivar os alunos com o seguinte problema:

Uma pessoa faz um empréstimo de R\$2.000, 00 a ser pago segundo uma capitalização de juros simples em 24 parcelas iguais e a uma taxa de 1,8% ao mês. Qual o valor de cada uma das parcelas?

Em grupos, os alunos trabalharão na resolução do problema. O professor supervisionará os grupos verificando as estratégias que os grupos estão considerando. Após esta etapa, o professor mediará um debate onde cada grupo socializará as soluções e estratégias. Fechando a discussão, o professor abordará o problema com o uso das progressões, fazendo depois algumas considerações teóricas acerca do tema, como as feitas abaixo: Sendo  $C$  o capital emprestado, decorrido o primeiro mês, o saldo devedor será igual a

$$C + iC = C(1 + i).$$

No segundo mês, como o sistema é de juros simples, o saldo devedor será igual a  $C + iC + iC = C + 2iC$ .

De modo indutivo, percebe-se que a sequência formada pelo saldo devedor mês a mês forma uma progressão aritmética de primeiro termo  $a_1 = C$  e razão  $r = iC$ , onde  $i$  é a taxa de juros e  $C$  é o capital inicial.

Assim, para determinar o saldo devedor no tempo  $t$  é necessário que se determine o  $t$ -ésimo elemento desta sequência.

No problema apresentado, como  $C = 2.000$ ,  $i = 0,018$  e o tempo de pagamento é de 24 meses, é necessário que se determine o elemento  $a_{24}$  na PA.

Sabemos que:

$$a_n = 2.000 + (n - 1) * 2.000 * 0,018 = 2.000 + (n - 1) * 36 \text{ e, assim, } a_{24} = 2.000 + 23 * 36 = 2.000 + 828 = 2.828.$$

Como as parcelas devem ser todas iguais, a prestação mensal é aproximadamente igual a R\$117,83.

Na segunda das aulas desta proposta, o professor apresentará uma lista de problemas que deve ser resolvida pelos alunos em grupos com o uso de progressões aritméticas. Ao final da aula, o professor deduzirá as fórmulas que geralmente são encontradas nos livros didáticos que tratam do tema.

Avaliação: A avaliação é um processo contínuo e terá início na primeira aula, com a verificação da participação, interesse e envolvimento com todas as etapas aqui propostas. Os registros produzidos pelos alunos em grupo serão importantes elementos para o acompanhamento de todo o processo.

### 6.1.1 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Progressão Geométrica é a sequência de números não nulos, onde qualquer termo (a partir do segundo), é igual ao antecedente **multiplicado** por uma constante. Essa constante é denominada **razão da progressão**, sendo indicada por **q**.



As progressões geométricas possuem este nome graças à seguinte característica de sua formação: Tomando-se 3 termos consecutivos de uma PG, o termo do meio é a média geométrica dos outros dois termos.

### Exemplos simples

(3, 9, 27, 81, ...) → é uma P.G. Crescente de razão  $q = 3$ .

(90, 30, 10, ...) → é uma P.G. Decrescente de razão  $q = 1/3$ .

(-7, 14, -28, 56, ...) → é uma P.G. Oscilante de razão  $q = -2$ .

(3, 3, 3, 3, ...) → é uma P.G. Constante de razão  $q = 1$ .

A razão de uma **PG** pode ser calculada pela igualdade abaixo:

$$q = a_n / a_{n-1}$$

ou seja:

$$q = a_2 / a_1 = a_3 / a_2 = a_4 / a_3 = a_n / a_{n-1} \dots$$

### Classificação:

Quando  $q > 0$ , a P.G. é **crescente**. Por exemplo: (3, 6, 12, 24, 48, ...)

$$q = a_2 / a_1$$

$$a_1 = 3$$

$$q = 6 / 3$$

**onde**

$$a_2 = 6 \text{ (} a_2 = a_1 \cdot q \rightarrow a_2 = 3 \cdot 2 \rightarrow a_2 = 6 \text{)}$$

$$q = 2$$

$$a_3 = 12 \text{ (} a_3 = a_1 \cdot q^2 \rightarrow a_3 = 3 \cdot 2^2 \rightarrow a_3 = 3 \cdot 4 \rightarrow a_3 = 12 \text{)}$$

Note que toda **PG** crescente, partindo do segundo termo, qualquer elemento é maior que o anterior.

Quando  $a_1 < 0$  e  $q > 1$  ou  $a_1 > 0$  e  $0 < q < 1$ , a P.G. é **decrescente**. Por exemplo: (48, 24, 12, 6, ..., 3)

$$q = a_2 / a_1 \qquad a_1 = 48$$

$$q = 24 / 48 \qquad \text{onde} \qquad a_2 = 24 \quad (a_2 = a_1 \cdot q \rightarrow a_2 = 48 \cdot 1/2 \rightarrow a_2 = 24)$$

$$q = 1 / 2 \qquad a_3 = 12 \quad (a_3 = a_1 \cdot q^2 \rightarrow a_3 = 48 \cdot (1/2)^2 \rightarrow a_3 = 48 \cdot 1/4 \rightarrow a_3 = 12)$$

Note que toda **PG** decrescente, partindo do segundo termo, qualquer elemento é menor que o anterior.

Quando  $q < 0$ , a P.G. é Alternante ou Oscilante. Por exemplo: (- 5, 10, - 20, 40, - 80, ...)

$$q = a_2 / a_1 \qquad a_1 = - 5$$

$$q = 10 / -5 \qquad \text{onde} \qquad a_2 = 10 \quad (a_2 = a_1 \cdot q \rightarrow a_2 = - 5 \cdot - 2 \rightarrow a_2 = 10)$$

$$q = - 2 \qquad a_3 = - 20 \quad (a_3 = a_1 \cdot q^2 \rightarrow a_3 = - 5 \cdot (-2)^2 \rightarrow a_3 = -5 \cdot 4 \rightarrow a_3 = - 20)$$

observe que toda **P.G.** Alternante ou Oscilante, partindo de qualquer termo, há uma alternância sucessiva entre termo negativo e positivo.

### Termo Geral da PG.

Como em uma PA, pode se achar todos os seus termos a partir de qualquer termo e da razão, em uma PG isso também é possível, sendo a fórmula denominada *termo geral da PG*. Veja:

$$a_2 / a_1 = q \rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 / a_2 = q \rightarrow a_3 = a_2 \cdot q \rightarrow a_3 = a_1 \cdot q \cdot q \rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 / a_3 = q \rightarrow a_4 = a_3 \cdot q \rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^2 \cdot q \rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad (\text{e assim por diante})$$

Uma PG de razão  $q$  pode ser escrita assim:

$$PG ( a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n )$$

Aplicando a definição de PG, podemos escrevê-la de uma outra forma:

PG (  $a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot 2q, a_1 \cdot 3q, a_1 \cdot 4q, \dots, a_1 \cdot q^{(n-1)}$  )

Portanto, o termo geral será:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ para todo } n \in N.$$

Assim, concluímos que  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  é a fórmula que rege a demonstração acima, lembrando que, se não tivéssemos o primeiro termo da PG, mas tivéssemos outro como o terceiro, usaríamos a seguinte fórmula:

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

**Exemplo 16:** Dada a PG (2, 4, 8, ... ), pede-se calcular o décimo termo. Temos:  $a_1 = 2, q = 4/2 = 8/4 = \dots = 2$ .

Para calcular o décimo termo ou seja  $a_{10}$ , vem pela fórmula: dados  $a_1 = 2, q = 2$  e  $n = 10$ , segue que

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 2^9 \Rightarrow a_{10} = 1024.$$

**Exemplo 16:** Sabe-se que o quarto termo de uma PG é igual a 20 e o oitavo termo é igual a 320. Qual a razão desta PG?

Temos  $a_4 = 20$  e  $a_8 = 320$ .

Logo, podemos escrever:  $a_8 = a_4 \cdot q^{8-4}$ .

Assim,  $320 = 20 \cdot q^4$  e, portanto,  $q = 2$ .

**Exemplo 17:** Quantos termos tem na PG (3,6,.....,48)?

Dados  $a_1 = 3, q = 2$  e  $a_n = 48$ .

Como  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , segue que  $48 = 3 \cdot 2^{n-1}$ .

Portanto,  $n = 5$ .

**Exemplo 18:** Interpolar três termos geométricos entre 3 e 48.

(3, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, 48)

Dados  $a_1 = 3$ ,  $n = 5$  e  $a_5 = 48$ .

De  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , segue que  $48 = 3 \cdot q^{5-1}$  e, portanto,  $q = \pm 2$  ..

Assim, temos (3, 6, 12, 24, 48) ou (3, -6, 12, -24, 48).

## Propostas de atividades didáticas

### O paradoxo de Aquiles e a tartaruga

A primeira das propostas que apresentamos é um trabalho com o famoso paradoxo de Zenão sobre a corrida fantasiosa entre Aquiles e uma tartaruga. Para mostrar aos seus adversários no que consistia a unidade ou repouso do ser, evidenciando que o movimento ou pluralidade é impossível, Zenão inventou os paradoxos (para = contra; doxa = opinião). Segundo Zenão, numa disputa entre Aquiles e uma simples tartaruga, se fosse dada uma pequena vantagem à tartaruga, Aquiles jamais a alcançaria. Isso porque se o espaço fosse divisível ao infinito (observe os divisores de uma régua, por exemplo), Aquiles sempre deveria passar por um ponto dividido entre o infinito e o ponto de partida, ou seja, o espaço seria sempre dividido pela metade, impossibilitando o movimento. Isso significa que, em tempo finito, jamais alguém poderia percorrer uma distância infinita. A solução clássica para esse paradoxo envolve a utilização do conceito de limite e convergência de séries numéricas e pode ser satisfatoriamente trabalhada com alunos do Ensino Médio. O paradoxo surge ao supor intuitivamente que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita, de tal forma que seria necessário passar um tempo infinito para Aquiles alcançar a tartaruga. No entanto, os infinitos intervalos de tempo descritos no paradoxo formam uma progressão geométrica e sua

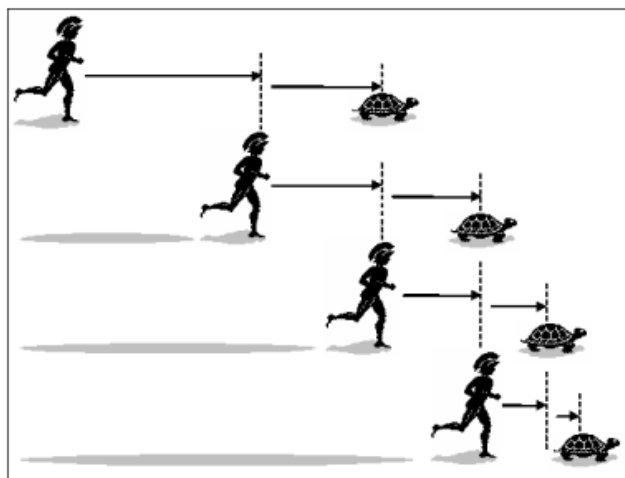
soma converge para um valor finito, em que Aquiles encontra a tartaruga. A proposta a ser desenvolvida com os alunos encontra-se detalhada no plano de aula abaixo:

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio.

Recursos Pedagógicos: Laboratório de informática, Lousa.

Objetivo Geral: Desenvolver com os alunos a noção intuitiva de limite de uma sequência.

Objetivos Específicos:



1. Apresentar aos alunos os paradoxos de Zenão enfocando especialmente o problema da corrida entre Aquiles e a tartaruga.
2. Explicar a aparente incapacidade de Aquiles em alcançar a tartaruga usando a noção intuitiva de limite e a ideia de soma de infinitos termos de uma progressão geométrica.

Conteúdo: Soma de infinitos termos de uma progressão geométrica; Noção intuitiva de limite.

Desenvolvimento: A sequência proposta desenvolver-se-á durante três aulas.

Para melhor exposição do trabalho a ser feito, abaixo estão descritos detalhadamente os tópicos cobertos em cada uma das aulas e a dinâmica das aulas.

Na primeira aula, os alunos pesquisarão no laboratório de informática sobre Zenão e seus paradoxos. Em grupos, farão a exposição, ao final da aula, do resultado da pesquisa feita e, num debate mediado pelo professor, os alunos entenderão a importância do pensamento de Zenão e seus famosos problemas (Corrida de Aquiles, Arco e Flecha, Fileiras em Movimento, entre outros).

Na segunda aula, o professor trará para a classe uma variante do problema de Aquiles e da tartaruga pedindo aos alunos que, em grupo, elaborem estratégias matemáticas para explicar a aparente contradição existente.

Sugere-se a seguinte variante: "Aquiles, famoso corredor grego era conhecido por ser invencível. Os melhores corredores gregos o desafiavam na corrida e foram incapazes de vencê-lo. Ao ser desafiado por uma tartaruga, Aquiles riu e disse que daria uma vantagem grande à tartaruga e que mesmo assim, ganharia fácil a corrida. Suponha que Aquiles seja cem vezes mais rápido que a tartaruga e que só comece a correr após a tartaruga estar exatos 10.000 metros a sua frente." Em grupo, os alunos tentarão explicar a contradição aparente. Por que a lógica nos sugere que a tartaruga sempre estará à frente de Aquiles, quando na prática isso não acontece. Após a discussão nos grupos, os alunos apresentarão as justificativas encontradas para a contradição. Após ouvir todos os grupos, o professor argumentará que a aparente contradição se explica porque a distância entre Aquiles e a tartaruga vai sempre diminuindo e que, apesar de serem considerados infinitos intervalos de espaços percorridos, a soma destes infinitos intervalos é finita! Na terceira aula, o problema será abordado de maneira matemática com os alunos. Quando Aquiles vencer os 10.000 metros que o separa da tartaruga, esta terá avançada mais 100 metros; quando Aquiles avançar os próximos 100 metros que o separa da nova posição da tartaruga, esta terá avançada mais 1 metro e assim sucessivamente. Por mais que sejamos capazes de medir infinitamente a distância entre Aquiles e a tartaruga, a sensação de que ela está sempre na frente se desfaz quando se consideram as somas dos espaços percorridos por Aquiles e pela tartaruga.

Seja  $(a_n)$  a sequência dos espaços percorridos por Aquiles. Então,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 10.000$ ,  $a_3 = 100$ ,  $a_4 = 1$ , ... . No caso da tartaruga, temos a seguinte sequência  $(t_n)$  de espaços percorridos:  $t_1 = 10.000$ ,  $t_2 = 100$ ,  $t_3 = 1$ ,  $t_4 = 0$ ,  $t_5 = 0,01$ , ... .

Basta agora observar que as duas sequências são idênticas, a menos do primeiro termo; portanto devem convergir para o mesmo valor. Esse valor comum de convergência é dado pela posição em que Aquiles efetivamente passa a tartaruga.

Avaliação: A avaliação é um processo contínuo e terá início na primeira aula, com a verificação da participação, interesse e envolvimento em todas as etapas aqui propostas.