UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

SAMUEL PEREIRA ALVES

UM ESTUDO SOBRE A MATEMÁTICA PRESENTE NO VESTIBULAR DO ITA

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ
2018

SAMUEL PEREIRA ALVES

UM ESTUDO SOBRE A MATEMÁTICA PRESENTE NO VESTIBULAR DO ITA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:
Profª. Drª. Maria Silvana Alcântara Costa.

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

A477e Alves, Samuel Pereira.
Um estudo sobre a matemática presente no vestibular do ITA/Samuel Pereira Alves. – 2018.
90 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia –Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2018.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Profª. Drª. Maria Silvana Alcântara Costa.

1. Matemática. 2. ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica. 3. Resultados. I. Título.

. CDD 510.07

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Um Estudo Sobre a Matemática Presente no Vestibular do ITA

Samuel Pereira Alves

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 06 de setembro de 2018.

Banca Examinadora

Maria Silvana Alcântara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa - UFCA

Orientadora

Plácido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade- UFCA

Junio Moreira de Alencar

Prof. Ms. Junio Moreira de Alencar – IFCE

Dedico este trabalho aos meus pais que sempre me ensinaram que educação é a maior herança que um filho pode receber, e que sempre fizeram de tudo para que eu pudesse realizar os meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Obrigado Deus por sempre me guiar e me proporcionar a realização de um sonho.

Agradeço aos meus pais e irmãos. Em especial ao meu pai, meu melhor amigo.

À Maria Fernanda, que sempre me apoiou, mesmo nas horas mais difíceis.

Ao Colégio Êxito do Cariri, por ter me dado a oportunidade de coordenar o Núcleo de Exatas onde pude crescer como profissional.

À dona Djalma Macedo Barbosa, pessoa que sempre serei grato por ter me dado a primeira oportunidade profissional, e por ter investido em mim ao longo desses anos.

À Drª Maria Engracia Loiola, minha maior inspiração na profissão de professor.

Ao meu grande mestre e amigo Mário de Assis Oliveira, referência na profissão e um dos melhores professores que já vi.

Ao grande professor, em breve doutor, Júnio Moreira de Alencar que há tempos me incentiva, e que me ajudou a chegar aqui.

Aos colegas de mestrado que ajudaram a tornar as aulas mais divertidas. Em especial à Luídson Robson e Antônio Ricardo.

Agradeço também a professora Drª. Maria Silvana Alcântara Costa, por quem eu tenho um respeito enorme, e admiração maior ainda pela qualidade das aulas e a extrema competência em coordenar um mestrado desse porte.

Aos professores do programa, em especial ao Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade.

Por fim, agradeço aos que não foram citados, mas que de alguma forma me ajudaram nessa árdua trajetória.

"Um homem pode morrer, lutar, falhar, até mesmo ser esquecido, mas sua ideia pode modificar o mundo mesmo tendo passado 400 anos." (V de Vingança.)

RESUMO

A matemática presente no vestibular do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) exige do candidato um alto nível de conhecimento. Tão importante quanto conseguir resolver as questões é ter domínio dos principais resultados envolvidos nas provas, a fim de resolver os problemas durante o tempo previsto. Sabendo disso, o presente trabalho apresenta os conteúdos matemáticos mais abordados no vestibular do ITA, e fornece um pequeno compêndio com teoremas, definições, proposições e exemplos totalmente baseados nestes conteúdos. A análise das questões de matemática do ITA compreendem os últimos 10 vestibulares realizados, tornando assim, a conclusão sobre os conteúdos matemáticos de maior incidência mais consistente e segura. Além disso, o presente trabalho traz algumas informações sobre o ITA e resoluções de questões dos últimos anos, cuja explicação está relacionada com os resultados aqui discutidos. O público alvo esperado são os candidatos, treineiros e professores que trabalham com turmas específicas pro vestibular ITA, portanto espera-se que este trabalho sirva como apoio e norteamento do que deve ser priorizado na disciplina de matemática a fim de realizar um bom exame.

Palavras-chave: Matemática. ITA. Resultados.

ABSTRACT

The mathematics present in the vestibular of the Technological Institute of Aeronautics (ITA) requires from the candidate a high level of knowledge. As important as to be able to solve the issues is to master the main results Involved in the tests, in order to solve the problems during the scheduled time. Knowing this, the current work presents the mathematical most covered contents in the ITA exam, and provides a small compendium with theorems, definitions, propositions and examples fully based on these contents. The analysis of ITA mathematics questions includes the last 10 vestibular tests performed, thus making the conclusion on the mathematical contents of higher incidence consistent and secure. In addition, the current paper brings some information about the ITA and resolutions of issues of recent years, whose explanation is related to the results discussed here. The target audience expected are the candidates, trainers and teachers who works with specific groups for the ITA entrance exam, so it is expected that this work will serve as support and guidance for what should be prioritized in the discipline of mathematics in order to perform a good examination.

Keywords: Mathematic. ITA. Results.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dos vestibulares mais famosos do Brasil, o vestibular do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) é um dos mais exigentes do país. Não é à toa que os candidatos em geral, precisam estudar as disciplinas cobradas de forma específica e diferenciada do que é encontrada nas escolas de Ensino Básico. A prova de matemática do ITA, como era de se esperar, é de alto nível e contempla inúmeros conteúdos.

Em contrapartida ao alto nível da prova, o ensino de matemática no Brasil passa por grandes dificuldades. No Brasil, Santos (1994, p. 14) afirma que a Organização das Nações Unidas (ONU) considera que as escolas brasileiras possuem o segundo maior índice de reprovação na disciplina de matemática em todo o mundo, e isso se torna um fator de peso para os futuros candidatos, pois terão que corrigir a defasagem de aprendizado para competir com chances reais de aprovação.

O foco desse trabalho é propor aos candidatos e professores, um material de apoio que possa ajudar os interessados na disciplina de matemática. Existem resultados cuja demonstração fogem da alçada do candidato, e suas respectivas demonstrações podem ser omitidas em um primeiro contato, porém existem resultados clássicos da matemática do Ensino Médio, com demonstração acessível, que devem, sim, ser ensinadas aos alunos, pois além de melhorar a percepção a respeito do tema, evitam que os estudantes tenham que decorar determinada fórmula, podendo obtê-los rapidamente. Temos também o propósito de resumir e aplicar o que é importante de fato, sem nos estendermos com conteúdos não prioritários buscando simplificar o que será estudado. Resultados considerados básicos primordiais, como resolução de equação de 2º grau, Teorema de Pitágoras e leis dos senos e cossenos, serão utilizados aqui a partir do princípio de que o leitor ou leitora já possua um conhecimento prévio sobre estes assuntos.

No capítulo 2 podemos encontrar informações sobre o ITA, seu vestibular e cursos de graduação. Ainda nesse capítulo, podemos ver quais conteúdos foram mais cobrados nos últimos 10 anos e assim determinar o que é prioritário na hora de se preparar para a prova.

No capítulo 3, intitulado "Coletânea de Resultados", faremos um passeio sobre as principais áreas matemáticas, expondo os teoremas, proposições e resultados de relevância que são considerados obrigatórios para todo candidato que pretende concorrer a uma vaga no ITA. Dividido em 5 seções, esse capítulo pode ser considerado o coração desse trabalho, de forma que tentamos deixar nele a base matemática presente no vestibular. Todos os conteúdos contidos nestas seções foram escolhidos a partir do resultado obtido no capítulo 2, ao analisarmos o que foi cobrado na última década, no que se refere à matemática do ITA.

Finalmente, no capítulo 4 fizemos uma seleção de questões dos últimos vestibulares do ITA. São questões que abrangem os conteúdos trabalhados anteriormente, com suas respectivas soluções mais detalhadas possíveis, pois o objetivo aqui é explicar as soluções em paralelo com os resultados expostos no capítulo 3, de forma que não fiquem dúvidas a respeito das resoluções. As questões de geometria plana, espacial e analítica estão acompanhadas de desenhos e esboços da situação pedida, a fim de facilitar o entendimento das soluções.

2 O ITA E A BASE MATEMÁTICA EXIGIDA

O ITA possui um dos vestibulares mais concorridos e difíceis do Brasil. Em especial, na disciplina de matemática é possível perceber que há uma base de conteúdos recorrentes, que é o caso, por exemplo, dos números complexos, trigonometria e geometria. Este capítulo em questão traz informações sobre a instituição em si, e sobre os conteúdos cobrados em matemática, percorrendo o que foi aplicado no vestibular nos últimos dez anos.

No final do capítulo poderemos encontrar quais são, de fato, os conteúdos matemáticos mais presentes no vestibular do ITA. Com isso, o aluno poderá se nortear de quais áreas de estudo da matemática deverá priorizar em seus estudos. Todas as informações necessárias para escrever este capítulo podem ser encontradas em [12] e [14].

2.1 SOBRE O ITA

O Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) é uma instituição pública federal vinculado ao Comando da Aeronáutica (COMAER). O Instituto fica na cidade de São José dos Campos, em São Paulo, mais precisamente no Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial (DCTA). O ITA possui cursos de graduação e pós-graduação em engenharias, em especial na ramo aeroespacial. É, segundo o Índice Geral de Cursos (IGC) divulgado pelo Ministério da Educação, uma das melhores instituições de ensino superior do Brasil [11].

Cursos de graduação oferecidos pelo ITA:

1. Engenharia Aeroespacial.
2. Engenharia Eletrônica.
3. Engenharia Civil-Aeronáutica.
4. Engenharia da Computação.

5. Engenharia Mecânica-Aeronáutica.

6. Engenharia Aeronáutica.

O curso é gratuito e tem duração de 5 anos. Os alunos recebem alimentação gratuita e têm a opção de moradia de baixo custo dentro da instituição. Além disso, há também cursos de mestrado e doutorado.

Fundado em 16 de janeiro de 1950, o ITA matricula os candidatos aprovados em seu vestibular automaticamente no Centro de Preparação de Oficiais da Reserva da Aeronáutica (CPOR), local onde os aprovados prestarão serviço militar de acordo com sua formação profissional. No fim desse curso, de duração de 1 ano, os alunos se tornam aspirantes a oficial da reserva da aeronáutica. O aluno, no ato da inscrição para o vestibular, pode optar pela carreira militar.

Todo aluno de graduação do ITA deve cumprir, nos dois primeiros anos, o chamado curso fundamental, e só depois dele é que poderá cursar as disciplinas no curso profissional escolhido. As aulas teóricas são preferencialmente realizadas pela manhã, enquanto as aulas práticas ficam no período da tarde. As disciplinas que todos os alunos devem cursar são:

1. Introdução à Computação;

2. Algoritmo e Estrutura de Dados;

3. Matemática Computacional;

4. Modelagem Geométrica e Geometria Descritiva;

5. Desenho Técnico;

6. Introdução à Engenharia;

7. Mecânica dos Sólidos.

8. Termodinâmica.

Além dessas disciplinas, todos os alunos devem cursar outras, advindas das seguintes áreas do conhecimento:

1. Matemática;

2. Física;

3. Química;
4. Humanidades.

No vestibular 2019, o ITA resolveu aderir um novo formato, o que antes era realizado através de uma fase com quatro dias de prova, e a inspeção de saúde, agora será realizado em três fases. A primeira fase será composta de 60 questões objetivas divididas em 5 disciplinas, a saber: matemática; física; química; português; inglês. Este exame consta de 12 questões cada, aplicadas em um único dia, de caráter eliminatório e classificatório. Os alunos classificados para a segunda fase, terão mais dois dias de prova com questões dissertativas. No primeiro dia farão 10 questões de matemática e 10 de química, no segundo dia farão 10 questões de física e uma redação. A terceira fase é a inspeção de saúde.

Após esse pequeno resumo sobre o ITA, analisaremos na seção seguinte quais são os conteúdos matemáticos que rotineiramente são explorados em seu vestibular, para termos uma compreensão mais elaborada sobre o que é base para se estudar em matemática, a fim de se preparar para o vestibular do instituto.

2.2 UM ESTUDO SOBRE OS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS MAIS ABORDADOS

Embora composta de conteúdos do Ensino Médio, a prova de matemática do ITA possui questões de um nível elevado aos padrões das escolas públicas e particulares. Em geral, os candidatos realizam cursos específicos para competir nesse vestibular. O ITA, nas instruções para o exame, apresenta quais são os conteúdos matemáticos que devem ser estudados. São eles:

1. Números complexos;
2. Combinatória;
3. Matrizes e determinantes;
4. Teoria dos conjuntos;
5. Polinômios;
6. Trigonometria;
7. Progressões aritméticas e geométricas;
8. Geometria plana;

9. Geometria espacial;

10. Geometria analítica;

11. Funções;

12. Equações Algébricas.

O que faremos aqui é uma contagem do que é explorado no vestibular nos últimos 10 anos a fim de determinar os conteúdos mais recorrentes. Com isso teremos embasamento para, no capítulo seguinte, reunir os principais resultados da matemática que o ITA exige dos seus candidatos, de forma que este material possa servir de ajuda para os alunos interessados em prestar o vestibular, e para os professores que trabalham com turmas específicas para o ITA.

A tabela a seguir mostra os principais conteúdos da matemática e a quantidade de questões nos vestibulares do ITA desde o vestibular 2009 até 2018, vale salientar que nesse período as provas de matemática tinham 30 questões cada.

Tabela 1: Quantidade de questões de cada área da matemática do vestibular ITA no período 2009-2018

Conteúdo	**2018**	**2017**	**2016**	**2015**	**2014**	**2013**	**2012**	**2011**	**2010**	**2009**
Conjuntos	0	2	0	0	0	1	4	2	2	1
Binômio	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Combinatória	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0
Equação/Polinômio	3	1	3	4	1	3	3	4	3	4
Funções	1	3	3	1	3	3	1	0	4	2
Geom. Analítica	3	4	4	6	3	2	4	1	3	5
Geom. Espacial	4	2	2	2	4	4	3	0	3	3
Geom. Plana	2	3	4	2	3	2	2	7	0	1
Inequação	1	2	0	0	0	0	0	2	0	1
Logaritmo	1	1	1	1	2	1	1	0	0	0
Matriz/Det.	3	1	2	2	2	1	2	2	2	3
Nºs Complexos	2	1	2	3	2	4	2	4	2	2
P.A. e P.G.	1	3	0	2	2	2	1	1	3	2
Probabilidade	2	1	2	1	1	2	2	2	2	2
Sistemas Lineares	1	2	1	1	3	1	0	1	1	1
Trigonometria	3	3	5	4	2	3	4	4	4	3
Total	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Fonte: Autor.

Observando a Tabela 1, percebe-se que algumas áreas se destacam mais que outras. A tabela seguinte apresenta um resumo por conteúdo matemático nos últimos dez anos, e o percentual de cada um deles.

Tabela 2: Total de questões por conteúdo e seu percentual

Conteúdo	**Total**	**Porcentagem**
Conjuntos	12	4%
Binômio	3	1%
Combinatória	8	2,67%
Equação/Polinômio	29	9,67%
Funções	21	7%
Geom. Analítica	35	11,67%
Geom. Espacial	27	9%
Geom. Plana	26	8,67%
Inequação	6	2%
Logaritmo	8	2,67%
Matriz/Det.	20	6,67%
Nºs Complexos	24	8%
P.A. e P.G.	17	5,67%
Probabilidade	17	5,67%
Sistemas Lineares	12	4%
Trigonometria	35	11,67%
Total	300	100%

Fonte: Autor.

Podemos perceber então que nos últimos 10 anos de vestibular os conteúdos de geometria analítica, plana, espacial, trigonometria e números complexos compuseram em torno de 49% das questões de matemática do vestibular do ITA. Destaque também para o conteúdo de equações e polinômios que, sozinho, tem praticamente um décimo de todas as 300 questões de matemática dos últimos dez anos.

A partir desta estatística, o capítulo seguinte será dividido em 5 seções, onde separamos os principais resultados, teoremas, proposições e definições dos conteúdos citados na tabela, dando ênfase àqueles de maior incidência.

3 COLETÂNEA DE RESULTADOS

Para realizar uma boa preparação para o ITA, o aluno deve ter conhecimento de conteúdos que englobam as principais ramificações da matemática do Ensino Médio. Um bom domínio em tais resultados ajuda-o a poupar tempo nas resoluções das questões, e é de suma importância que sejam trabalhados em sala de aula na preparação com seus alunos.

Neste capítulo o leitor pode encontrar uma seleção de teoremas, definições e exemplos que, quando unidos, moldam basicamente o que o ITA espera de conhecimentos matemáticos de seus vestibulandos. Serão abordados resultados clássicos da geometria plana, geometria analítica, álgebra, matemática discreta, trigonometria, funções e o que mais for considerado pelo autor como base para um bom desenvolvimento na prova de matemática deste vestibular de alto nível.

Este capítulo oferece ao leitor uma base para a resolução de questões, porém é sempre recomendado o uso de outros materiais de apoio a fim de tornar o aprendizado mais sólido. Toda a teoria escrita neste capítulo pode ser encontrada em [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [13], [15], [16], [17], [18], [19], [20] e [21].

3.1 SOBRE FUNÇÕES, POLINÔMIOS, ÁLGEBRA E COMBINATÓRIA

Começando com o conceito de função, é necessário compreender o significado das particularidades das funções, como também, por exemplo, o que se quer mostrar quando uma função é injetiva ou sobrejetiva. Para tanto vamos definir alguns conceitos básicos sobre funções.

Definição 1 *Dados os conjuntos X e Y. Uma função $f : X \to Y$ é uma regra que associa a cada $x \in X$ um único elemento $y \in Y$. Chamaremos o conjunto X de domínio e Y de contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ é chamado de imagem de x pela função f.*

Definição 2 *Uma função $f : X \to Y$ é chamada de injetiva quando para elementos dis-*

tintos em X, a função f aplica em elementos distintos em Y. Ou seja:

$$x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definição 3 *Uma função $f : X \to Y$ é chamada de sobrejetiva quando, para todo elemento $y \in Y$, podemos encontrar pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Definição 4 *Uma função bijetiva é aquela que é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo. Também pode ser chamada de correspondência biunívoca, função bijetora ou bijeção.*

Definição 5 *Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma função par se*

$$f(-x) = f(x),$$

para todo x pertencente ao domínio, e dizemos que f é uma função ímpar se

$$f(-x) = -f(x),$$

para todo x pertencente ao domínio.

O primeiro resultado que será demonstrado é o teorema das raízes racionais, que fornecerá uma condição a respeito das soluções racionais de uma equação polinomial. A principal utilidade deste teorema é auxiliar a determinação das raízes racionais de um polinômio, caso existam. A partir da descoberta de uma raiz racional, o polinômio dado pode ser fatorado e transformado em um produto de funções polinomiais de menor grau.

Teorema 1 ***(Teorema das Raízes Racionais)*** *Seja p/q uma raíz de*

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $p, q, a_n, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$, e p e q primos entre si. Então: p divide a_0 e q divide a_n

Demonstração. Seja p/q uma raíz de $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, então

$$a_n (p/q)^n + \cdots + a_1 (p/q) + a_0 = 0.$$

Isolando a_0, multiplicando ambos os membros por q^n e deixando p em evidência temos:

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} q p^{n-2} + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

Como $p, q, a_n, \cdots, a_1, a_0$ são inteiros, podemos concluir que p divide $-a_0 q^n$. Como p e q são primos entre si, da aritmética pode-se concluir que p e q^n também são. Logo p divide a_0.

Se por outro lado o termo líder a_n tivesse sido isolado, repetindo o processo anterior, e com o fator q em evidência, ficaria

$$q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}qp^{n-2} + \cdots + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n.$$

Então pela mesma explicação feita há pouco, pode-se concluir que q divide a_n.

■

Outro resultado muito utilizado no vestibular do ITA são as chamadas relações de Girard para equações de segundo e terceiro grau. As quais fornecem uma relação entre a soma e o produto das raízes de uma equação, e permitirá uma redução considerável na resolução do exercício. Apresentaremos apenas o resultado, porém a demonstração pode ser encontrada em [15].

Teorema 2 ***(Relações de Girard para Equações de Graus 2 e 3.)***
1. Dada uma equação de 2º grau definida como: $ax^2 + bx + c = 0$*, com* $a \neq 0$ *e raízes* x_1 *e* x_2 *tem-se:*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$
$$x_1.x_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Se a equação de 3º grau: $ax^3+bx^2+cx+d = 0$*, com* $a \neq 0$ *e raízes* x_1*,* x_2 *e*x_3 *tem-se que:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a};$$
$$x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = \frac{c}{a};$$
$$x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Definição 6 *Chamamos de função afim a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *para qual existem números* a*,* $b \in \mathbb{R}$*, tais que* $f(x) = ax + b$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Definição 7 *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita quadrática quando existem números reais* a*,* b *e* c*, com* $a \neq 0$*, tais que* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Definição 8 ***(Função Exponencial)****. Seja* a *um número real positivo, diferente de* 1*. Chamaremos de função exponencial de base* a*,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$*, e denotamos* $f(x) = a^x$*, aquela que tiver as propriedades seguintes, para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$*:*

1. $a^x.a^y = a^{x+y}$*;*

2. $a^1 = a$*;*

3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ *quando* $a > 1$ *(crescente) e*
$x < y \Rightarrow a^y < a^x$ *quando* $0 < a < 1$ *(decrescente).*

A função exponencial é bijetiva, ou seja, possui uma função inversa que é chamada logaritmo. Devemos dar destaque à função logaritmo, pois conhecer suas propriedades são cruciais para a resolução de problemas que envolvam tal conteúdo. Comecemos então com a definição de logaritmo.

Definição 9 ***(Logaritmo)***. *Sejam* x *e* y *números reais positivos com* $x \neq 1$. *O logaritmo de* y *na base* x *é o número* w *de tal modo que*

$$\log_x y = w \Leftrightarrow x^w = y.$$

Com $x > 0$, $x \neq 1$ *e* $y > 0$.

Com essa definição ganhamos algumas propriedades interessantes dos logaritmos, que permitirão resolver muitos problemas deste conteúdo.

Propriedade 1 *Transformação de produto em soma:*

$$\log_x(y \cdot z) = \log_x y + \log_x z.$$

De fato; se $u = \log_x y$ e $v = \log_x z$ então $x^u = y$ e $x^v = z$, multiplicando ambos temos:

$$z \cdot y = x^v \cdot x^u = x^{v+u},$$

onde pela definição de logaritmo:

$$\log_x z \cdot y = u + v = \log_x y + \log_x z.$$

Propriedade 2 *Transformação de quociente em subtração:*

$$\log_x \left(\frac{y}{z}\right) = \log_x y - \log_x z.$$

De fato; Se $u = \log_x y$ e $v = \log_x z$, então $x^u = y$ e $x^v = z$, dividindo ambos temos:

$$\frac{y}{z} = \frac{x^u}{x^v} = x^{u-v},$$

e através da definição

$$\log_x \left(\frac{y}{z}\right) = u - v = \log_x y - \log_x z.$$

Propriedade 3 *Logaritmo da potência:*

$$\log_x y^z = z \cdot \log_x y.$$

Com efeito, seja $a = \log_x y$, então pela definição temos $x^a = y$. Ora

$$(x^a)^z = y^z = x^{az}.$$

Isso nos diz que

$$\log_x y^z = az.$$

Por outro lado temos

$$a = \log_x y \Leftrightarrow az = z \log_x y.$$

Conclusão:

$$\log_x y^z = z \log_x y.$$

Propriedade 4 *Mudança de base:*

$$\log_x y = \frac{\log_w y}{\log_w x}.$$

Com $w \neq 1$ e $x \neq 1$.

Com efeito

$$\begin{cases} \log_w y = a \Leftrightarrow w^a = y \\ \log_w x = b \Leftrightarrow w^b = x \end{cases}$$

Agora note que

$$(w^b)^{\frac{a}{b}} = x^{\frac{a}{b}} = w^a = y.$$

De $x^{\frac{a}{b}} = y$ temos

$$\log_x y = \frac{a}{b} = \frac{\log_w y}{\log_w x}.$$

Outro conteúdo relevante é o de matrizes e determinantes. Com eles, ganhamos técnicas de se resolver um sistema de equações lineares.

Definição 10 *Dados m e $n \in \mathbb{N}$, definimos uma matriz de ordem $m \times n$, como sendo uma sequência formada por elementos de $\mathbb{R}$ distribuídos em m linhas e n colunas. Estes elementos serão chamados de entradas da matriz.*

Uma matriz arbitrária $m \times n$ pode ser representada como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

É possível realizar transformações básicas nas matrizes de acordo com a seguinte definição:

Definição 11 *Seja A uma matriz $m \times n$. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotamos por L_i a i-ésima linha de A. É definida transformações elementares nas linhas da matriz a saber*

1. *Permutação das linhas L_i e L_j, ou seja, $L_i \leftrightarrow L_j$.*
2. *Multiplicação de uma linha L_i por um número real x não nulo, ou seja, $L_i \to xL_i$.*
3. *Substituição de uma linha L_i pela adição da mesma linha com x vezes uma outra linha L_j, ou seja, $L_i \to L_i + xL_j$.*

Definição 12 *Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$. A matriz A é chamada equivalente por linhas à matriz B se B pode ser obtida a partir de A e realizando um número finito de transformações elementares sobre linhas.*

Um exemplo de aplicação das duas últimas definições seria:

Exemplo 1 *Dada a matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vamos realizar transformações elementares.

Começando fazendo $L_2 \to L_2 - 5L_1$ e $L_3 \to L_3 - 3L_1$. Obtendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Agora, fazendo $L_3 \to L_3 + 2L_2$ temos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pela Definição 12 concluímos que A é equivalente por linhas à matriz B. Note que a transformação é reversível, podendo a partir de B fazer o procedimento por linhas e obter a matriz A.

Na matemática, o determinante de uma matriz é uma função que associa cada matriz quadrada a um escalar, ou seja, transforma uma matriz em um número real, vamos então defini-la. Vale ressaltar que este resultado e a definição de corpo podem ser encontrados em [7].

Definição 13 ***(Determinante)*** *Seja A o conjunto das matrizes quadradas $(n \times n)$ sobre um corpo K. Chamamos de determinante a função que segue as propriedades:*

1. *f é n-linear e alternada nas linhas das matrizes;*

2. *$f(I_n) = 1$ onde I_n é a matriz identidade.*

Denotaremos o determinante de A por $\det(A)$ *ou* $|A|$.

Para a teoria de determinantes reservamos aqui o teorema de Laplace e a Regra de Cramer, entretanto se faz necessária a definição de cofator.

Definição 14 *O cofator de uma matriz quadrada de ordem n é o número A_{ij} tal que $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\det[Cij]$, com $\det[Cij]$ o determinante da matriz obtida eliminando a linha e a coluna da matriz original que contenha A_{ij}.*

De posse dessa definição podemos então enunciar o Teorema de Laplace, que nos permitirá resolver, em especial, determinantes de matrizes com ordem maior que 3×3, embora sirva para matrizes de ordens menores também.

Teorema 3 (Teorema de Laplace) *O determinante de uma matriz $A \in M_{n\times n}$ é igual à soma algébrica dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna pelos respectivos cofatores.*

A demonstração do Teorema de Laplace pode ser encontrada em [7]. Segue uma aplicação prática deste teorema:

Exemplo 2 *Calcule o determinante da seguinte matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

O Teorema de Laplace nos permite escolher a terceira coluna. Com esta escolha iremos reduzir significativamente os cálculos. De fato:

$$\det[A] = 1.(-1)^{1+3}.\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

E, aplicando o teorema novamente na matriz 4×4, na terceira coluna obtemos

$$\det[A] = 1.(-1)^{3+3}.\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 2.(-1)^{4+3}.\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como estamos com uma matriz 3×3, podemos usar a regra de Sarrus, obtendo como solução final:

$$\det[A] = 1.(4 - 2 - 8 + 2) - 2.(5 - 6 - 10 - 3) = 24.$$

Portanto, pelo Teorema de Laplace, $\det A = 24$.

É sempre bom relembrar algumas características de determinantes, a saber:

Proposição 1 *Se o determinante não é zero, então o sinal inverte se permutarmos duas linhas ou duas colunas.*

Proposição 2 *A multiplicação de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada, por uma constante real k é equivalente a multiplicar o determinante da matriz por k.*

Proposição 3 *Se uma matriz quadrada tem uma linha ou uma coluna nula, seu determinante é zero.*

Proposição 4 *Se uma matriz quadrada tem duas linhas ou duas colunas iguais, seu determinante é igual a zero.*

Proposição 5 *Se uma linha ou uma coluna de uma matriz quadrada for combinação linear (ou múltipla) de outra seu determinante é igual a zero.*

Proposição 6 *O determinante de uma matriz quadrada não se altera se trocarmos uma linha pela soma dessa linha com um múltiplo de outra (vale o mesmo para colunas).*

Proposição 7 *O determinante da matriz produto AB é igual ao produto dos determinantes das respectivas matrizes, ou seja:* $\det AB = \det A \det B$.

Proposição 8 *Dadas as matrizes A e B tais que $AB = I_d$, então $BA = I_d$, ou seja $A = B^{-1}$*

Agora apresentaremos a regra de Cramer, onde sua principal utilidade é resolver um sistema de equações lineares com uso de determinantes. Em particular, vamos trabalhar com um sistema de três equações lineares e três variáveis, que é um caso comum para as provas do ITA. Para o teorema seguinte vamos usar a notação $\det[a, b, c]$ para representar o determinante da matriz formada pelos vetores coluna da matriz dada, onde $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ e $c = (c_1, c_2, c_3)$. Ressaltamos que nem sempre a melhor escolha para resolução de sistemas é a regra de Cramer, podendo o candidato escolher outra abordagem para o problema.

Teorema 4 (Regra de Cramer) *Dado o sistema linear:*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}.$$

Sejam

$$D = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det[a, b, c];$$

$$D_x = \det \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det[d, b, c];$$

$$D_y = \det \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det[a, d, c];$$

$$D_z = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix} = \det[a, b, d].$$

Se $D \neq 0$, então o sistema linear é determinado e sua única solução é dada por:

$$x = \frac{D_x}{D};$$

$$y = \frac{D_y}{D};$$

$$z = \frac{D_z}{D}.$$

Demonstração. Resolver o sistema imediatamente anterior é equivalente a determinar os números x, y, e $z \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

Que pode ser escrito também como

$$xa + yb + zc = d.$$

onde d é uma combinação linear dos vetores a, b e c. Usando as propriedades de determinantes temos:

$$\det[d,b,c] = \det[xa+yb+zc,b,c] = x\det[a,b,c] + y\det[b,b,c] + z\det[c,b,c] = x\det[a,b,c]$$

Logo, se $\det[a,b,c] \neq 0$ então

$$x = \frac{\det[d,b,c]}{\det[a,b,c]};$$

$$y = \frac{\det[a,d,c]}{\det[a,b,c]};$$

$$z = \frac{\det[a,b,d]}{\det[a,b,c]}.$$

■

Para finalizar essa seção, vamos definir progressão aritmética e geométrica, expor o termo geral e abordar a base da análise combinatória, descrevendo alguns resultados muito úteis e dando algumas dicas de como resolver problemas de contagem. No entanto se faz necessário o uso do princípio da indução.

Axioma da Indução: Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:
i) $P(1)$ é válida;
ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$, onde $n+1$ é o sucessor de n.
Então $P(n)$ é válida para qualquer que seja o número natural n.

Definição 15 *Uma progressão aritmética PA é uma sequência na qual a diferença entre um termo qualquer e seu anterior é constante. Essa constante leva o nome de razão, denotado por r.*

O termo geral de uma progressão aritmética é

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Isto é simples de se verificar pois, pela própria definição de PA:

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ \vdots = \vdots \\ a_{n-1} = a_{n-2} + r \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}.$$

Somando membro a membro, teremos:

$$a_n = a_1 + r(n-1).$$

Por indução matemática como $P(1)$ é válida,

$$a_1 = a_1 + r(1-1) = a_1.$$

Suponha que $a_n = a_1 + r(n-1)$ para todo n natural. Agora note que

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + r(n-1) + r = a_1 + r(n).$$

Ou seja, é válido para todo $n \in \mathbb{N}$, segundo o princípio da indução finita.

Teorema 5 *A soma S_n dos n primeiros termos de uma PA é*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração. De fato, a soma S_n de uma PA é escrita assim:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Porém, note que S_n também pode ser escrito como:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

Somando membro a membro:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Observe que a soma dos índices dos termos dentro de cada parênteses são iguais, ou seja, dentro de cada parênteses a primeira parcela aumenta r enquanto a segunda parcela diminui, tornando todos os parênteses iguais ao primeiro, como eles aparecem n vezes temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n).n \Longrightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}.$$

■

Definição 16 *Uma progressão geométrica PG é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante, chamada de razão da PG e denotada por q.*

O termo geral de uma progressão geométrica é:

$$a_n = a_1.q^{n-1}.$$

Pela definição de PG:

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1.q \\ a_3 = a_2.q \\ \vdots = \vdots \\ a_{n-1} = a_{n-2}.q \\ a_n = a_{n-1}.q \end{cases}.$$

Multiplicando membro a membro, teremos

$$a_n = a_1.q^{n-1}.$$

A demonstração segue por indução matemática, temos $P(1)$ válida pois

$$a_1 = a_1.q^{1-1} = a_1.$$

Suponha que $a_n = a_1.q^{n-1}$ para n natural, então

$$a_{n+1} = a_n.q = (a_1.q^{n-1}).q = a_1.q^n.$$

Logo, pelo princípio da indução, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 6 *A soma dos n primeiros termos de uma PG, de razão q, com $q \neq 1$, é*

$$S_n = a_1.\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Demonstração. De fato, podemos escrever S_n assim:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Multiplicando todos os termos pela razão q, obtemos

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + an + a_{n+1}.$$

Agora, realizando a subtração $S_n - qS_n$:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}.$$

Ou melhor, como $q \neq 1$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1.q^n \Longrightarrow S_n = a_1.\frac{1-q^n}{1-q}.$$

■

Em análise combinatória destacaremos os principais resultados.

Princípio Fundamental da Contagem. Se existem m formas de tomar uma decisão D_1, e depois de tomada a decisão D_1, existirem n formas de tomar uma decisão D_2, então, o número total de modos de tomar essas decisões é o produto mn.

Permutação Simples. Problemas de ordenação ou anagramas levam o nome de permutação, sendo uma permutação simples, temos:

$$P_n = n!$$

Porém, se a permutação for com repetição de objetos, faremos

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}.$$

Combinação. Para problemas em que é preciso selecionar p objetos distintos dentre n objetos distintos, onde $n > p$, usamos uma combinação simples, a saber:

$$C_(n,p) = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Definição 17 ***(Permutação Circular)*** *Chamamos de permutação circular, e denotamos por PC, uma permutação em que os n elementos em questão estejam organizados em ordem cíclica. Para realizar essa contagem usamos*

$$(PC)_n = (n-1)!$$

Com o que foi apresentado aqui, já é possível resolver várias questões do tema, porém é sempre conveniente aumentar o repertório das técnicas de resolver problemas de conta-

gem, por isso damos o resultado a seguir.
Para determinar o número de soluções inteiras e não-negativas de um problema do tipo: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$, representando a resposta por CR_n^p, faremos:

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p.$$

Exemplo 3 *Uma loja possui 5 tipos de doces. Pirulito, bala, chiclete, doce de leite e cocada. Essas guloseimas são vendidas em pacotes com 20 tipos de doces, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos de pacotes diferentes é possível montar?*

Solução. A chave para uma resolução eficiente e eficaz é abordar a melhor estratégia a ser realizada. Note que temos um problema do tipo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$, logo é só usar o resultado anterior, então:

$$CR_5^{20} = C_{5+20-1}^{20} = C_{24}^{20} = 10626.$$

Exemplo 4 *Quantas são as soluções inteiras e não-negativas de $x + y + z \leq 6$?*

Solução. Uma estratégia seria contar, uma por uma, as soluções de $x + y + z = 0$, $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$, ... , $x + y + z = 6$, porém daria um trabalho absurdo. Aqui a estratégia é perceber que todas as soluções de $x + y + z \leq 6$ são também soluções de $x + y + z + w = 6$, tornando o problema muito mais simples. A resposta então é

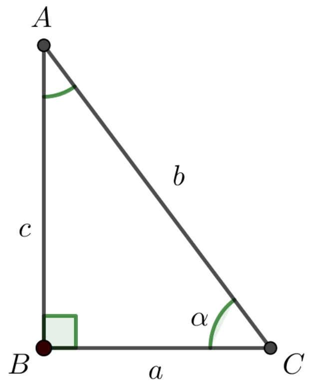
$$CR_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = 84.$$

3.2 A BASE TRIGONOMÉTRICA DO ITA

A Trigonometria figura para o ITA como um dos pilares do seu vestibular. Tal conteúdo tem seu uso na física, biologia, química, medicina, engenharias, astronomia, dentre outras. O objetivo primordial dessa seção é construir os principais resultados que o vestibular exige, contemplando uma pequena volta no mundo trigonométrico. Como o público alvo do ITA são os alunos do Ensino Médio, as demonstrações dessa seção e suas deduções serão feitas de uma forma mais simples, pois o principal objetivo é reunir os resultados básicos da Trigonometria. Iniciaremos esta seção com a Relação Fundamental da Trigonometria, construindo alguns resultados, e encerraremos com as transformações da soma e diferença em produto .

Teorema 7 (Relação Fundamental da Trigonometria) *Dado o triângulo retângulo a seguir*

Figura 1: Triângulo Retângulo



Fonte: Autor

Temos que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Demonstração: Inicialmente pelo teorema de Pitágoras temos

$$b^2 = a^2 + c^2.$$

Dividindo todos os lados por b^2;

$$1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Note que

$$\text{sen}\alpha = \frac{c}{b} \text{ e } \cos\alpha = \frac{a}{b}.$$

Substituindo, chegamos em

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1}$$

A relação foi deduzida para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, mas sabemos que é válida para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

A partir da relação trigonométrica fundamental podemos chegar nas chamadas relações derivadas, ora dividindo ambos os membros por $\text{sen}^2\alpha$, ora dividindo por $\cos^2\alpha$, chegando em:

$$1 + \text{cotg}^2\alpha = \csc^2\alpha. \tag{2}$$

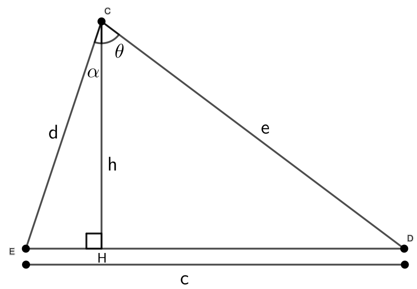
e

$$tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha. \tag{3}$$

Para as transformações trigonométricas, vamos inicialmente mostrar a adição e subtração de arcos. A partir dessas transformações será possível calcular, por exemplo,o seno e o cosseno de alguns ângulos não notáveis, como o de 15° e o de 75°. Essas transformações trigonométricas auxiliam na resolução de questões, porém os alunos possuem dificuldade em lembrá-las devido o fato de serem extensas. Para as próximas equações que virão, vamos abordar as demonstrações de uma forma mais simples, de modo que não se exija um raciocínio muito elaborado para sua compreensão.

Para a seguinte demonstração, vamos usar apenas o conceito de área de um triângulo qualquer, e as áreas serão calculadas em função de dois lados e do seno do ângulo entre eles. Na seção seguinte desse capítulo, podemos encontrar uma demonstração simples da área do triângulo em função dos lados e do seno do ângulo entre eles. Dado o triângulo a seguir

Figura 2: Triângulo CDE



Fonte: Autor

Como a área do triângulo CDE é igual a soma das áreas dos triângulos CEH e CDH, calculando a área em função do seno temos

$$\frac{1}{2}de\text{sen}(\alpha+\theta) = \frac{1}{2}dh\text{sen}(\alpha) + \frac{1}{2}eh\text{sen}(\theta).$$

Dividindo ambos os membros por $d.e$, e cancelando as frações, obtemos

$$\text{sen}(\alpha+\theta) = \frac{h}{e}\text{sen}(\alpha) + \frac{h}{d}\text{sen}(\theta),$$

ou melhor,

$$\text{sen}(\alpha+\theta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)\cos(\alpha). \tag{4}$$

Chamamos esta última relação de seno da soma.

Para o seno da diferença fazemos

$$\text{sen}(\alpha - \theta) = \text{sen}(\alpha)\cos(-\theta) + \text{sen}(-\theta)\cos(\alpha).$$

Sabendo que seno é uma função ímpar e cosseno é uma função par, obtemos

$$\text{sen}(\alpha - \theta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)\cos(\alpha). \tag{5}$$

A partir do seno da soma é possível determinar também o cosseno da soma, para isso usaremos que $\cos(\alpha) = \text{sen}(90° - \alpha)$, logo

$$\cos(\alpha+\theta) = \text{sen}(90°-(\alpha+\theta)) = \text{sen}((90°-\alpha)-\theta) = \text{sen}(90°-\alpha).\cos(\theta)-\text{sen}(\theta)\cos(90°-\alpha).$$

Portanto

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\theta). \tag{6}$$

Para o cosseno da diferença fazemos

$$\cos(\alpha - \theta) = \cos(\alpha)\cos(-\theta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(-\theta).$$

Logo

$$\cos(\alpha - \theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\theta). \tag{7}$$

A tangente de um ângulo é a razão entre o seno e o cosseno desse ângulo. Assim, é possível gerar uma equação que nos permita calcular a tangente da soma a partir do seno e cosseno da soma. Para tanto, façamos

$$tg(\alpha + \theta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \theta)}{\cos(\alpha + \theta)} = \frac{\text{sen}(\alpha)\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\theta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\theta)}.$$

Agora, multiplicando por $\dfrac{\cos(\alpha)\cos(\theta)}{\cos(\alpha)\cos(\theta)}$, obtemos:

$$tg(\alpha + \theta) = \frac{\text{sen}(\alpha).\cos(\theta) + \text{sen}(\theta).\cos(\alpha)}{\cos(\alpha).\cos(\theta) - \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\theta)}.\frac{\cos(\alpha).\cos(\theta)}{\cos(\alpha).\cos(\theta)} = \frac{\dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}}{1 - \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}.\frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}}.$$

Logo

$$tg(\alpha + \theta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\theta)}{1 - tg(\alpha)tg(\theta)}. \tag{8}$$

Para a tangente da diferença podemos repetir os passos anteriores, usando o seno e o cosseno da diferença. Logo

$$tg(\alpha - \theta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\theta)}{1 + tg(\alpha)tg(\theta)}. \tag{9}$$

Com o seno, cosseno e tangente da soma é possível chegar em equações do arco metade, duplo e triplo, conteúdos recorrentes no ITA. Para tanto note que

$$\text{sen}(\alpha + \theta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)\cos(\alpha).$$

Fazendo $\alpha = \theta$

$$\text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha)\cos(\alpha).$$

Logo

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha). \tag{10}$$

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\theta).$$

Fazendo $\alpha = \theta$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\alpha).$$

Logo

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha). \tag{11}$$

$$tg(\alpha + \theta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\theta)}{1 - tg(\alpha)tg(\theta)}.$$

Fazendo $\alpha = \theta$, obtemos

$$tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg(\alpha) + tg(\alpha)}{1 - tg(\alpha)tg(\alpha)}.$$

Portanto

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)}. \tag{12}$$

Para o arco metade, começamos a partir da relação fundamental da trigonometria, como $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, como $\text{sen}^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$ e substituindo no cosseno do arco duplo, temos

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha)) = 2\cos^2(\alpha) - 1.$$

Fazendo $2\alpha = \theta$ chegamos em

$$\cos(\theta) = 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1.$$

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}.$$

Portanto,

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}. \tag{13}$$

Ao isolar $\cos^2(\alpha) = 1 - \text{sen}^2(\alpha)$ e repetindo o processo anterior, teremos

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}. \tag{14}$$

E para concluir arco metade, a tangente é

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}}.$$

Ou seja

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}. \tag{15}$$

As funções trigonométricas do arco triplo nada mais são que consequências do que já foi feito até aqui, começando pelo seno do arco triplo. Note que,

$$\begin{aligned}
\text{sen}(3\alpha) = \quad & \text{sen}(2\alpha+\alpha) = \text{sen}(2\alpha)\cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha)\cos(2\alpha) \\
& = 2\text{sen}(\alpha)\cos^2(\alpha) + \text{sen}(\alpha)(\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)) \\
& = 2\text{sen}(\alpha)(1-\text{sen}^2(\alpha)) + \text{sen}(\alpha)(1-2\text{sen}^2(\alpha)) \\
& = 2\text{sen}(\alpha) - 2\text{sen}^3(\alpha) + sen(\alpha) - 2\text{sen}^3(\alpha) \\
& = 3\text{sen}(\alpha) - 4\text{sen}^3(\alpha).
\end{aligned} \tag{16}$$

O cosseno do arco triplo segue das relações

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) = \quad & \cos(2\alpha+\alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \text{sen}(2\alpha)\text{sen}(\alpha) \\
& = (2\cos^2(\alpha) - 1)\cos(\alpha) - 2\text{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha) \\
& = (2\cos^2(\alpha) - 1)\cos(\alpha) - 2\cos(\alpha)(1-\cos^2(\alpha)) \\
& = (2\cos^3(\alpha) - \cos(\alpha) - 2\cos(\alpha) + 2\cos^3(\alpha) \\
& = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).
\end{aligned} \tag{17}$$

A tangente do arco triplo vem de

$$
\begin{aligned}
tg(3\alpha) = \quad tg(2\alpha+\alpha) &= \frac{tg(2\alpha)+tg(\alpha)}{1-tg(2\alpha)tg(\alpha)} \\
&= \frac{\dfrac{2tg(\alpha)}{1-tg^2}+tg(\alpha)}{1-\dfrac{2tg^2(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}} \\
&= \frac{2tg(\alpha)+tg(\alpha)-tg^3(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)-2tg^2(\alpha)} \\
&= \frac{3tg(\alpha)-tg^3(\alpha)}{1-3tg^2(\alpha)}. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Para concluir a seção sobre trigonometria vamos deduzir as fórmulas de Prostaférese, também conhecidas como transformação de somas e subtrações de razões trigonométricas em produto. Essas fórmulas são excelentes para problemas do tipo: $\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}(\theta)=0$, pois elas transformarão o problema em uma multiplicação como $ab=0$, e isso implica $a=0$ ou $b=0$.

Para tanto precisamos usar o seno e cosseno da soma e subtração de arcos. Para começar, montamos um sistema com o cosseno da soma e da subtração, logo:

$$
\begin{cases}
\cos(\alpha+\theta) = \cos(\alpha).\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\theta) \\
\cos(\alpha-\theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\theta)
\end{cases}.
$$

Somando as equações chegaremos em uma relação, subtraindo teremos outra, são elas

$$
\begin{cases}
\cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha-\theta) = 2\cos(\alpha)\cos(\theta) \\
\cos(\alpha+\theta) - \cos(\alpha-\theta) = -2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\theta)
\end{cases}.
$$

Agora fazendo uma substituição onde $\alpha+\theta=\delta$ e $\alpha-\theta=\rho$, teremos

$$
\cos(\delta)+\cos(\rho) = 2\cos\left(\frac{(\delta+\rho)}{2}\right)\cos\left(\frac{(\delta-\rho)}{2}\right). \qquad (19)
$$

E também

$$
\cos(\delta)-\cos(\rho) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{(\delta+\rho)}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(\delta-\rho)}{2}\right). \qquad (20)
$$

Que são as fórmulas de Prostaférese para a soma e diferença de cossenos.

O raciocínio é análogo para o seno:

$$
\begin{cases}
\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\cos(\alpha) \\
\\
sen(\alpha-\theta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)\cos(\alpha)
\end{cases}.
$$

Somando e subtraindo como feito anteriormente, obtemos

$$\begin{cases} \text{sen}(\alpha+\theta)+\text{sen}(\alpha-\theta)=2\text{sen}(\alpha)\cos(\theta) \\ \text{sen}(\alpha+\theta)-\text{sen}(\alpha-\theta)=2\text{sen}(\theta)\cos(\alpha) \end{cases}.$$

Agora fazendo a substituição $\alpha+\theta=\delta$ e $\alpha-\theta=\rho$, temos

$$\text{sen}(\delta)+\text{sen}(\rho)=2\text{sen}\left(\frac{(\delta+\rho)}{2}\right).\cos\left(\frac{(\delta-\rho)}{2}\right). \tag{21}$$

E também

$$\text{sen}(\delta)-\text{sen}(\rho)=2\text{sen}\left(\frac{(\delta-\rho)}{2}\right).\cos\left(\frac{(\delta+\rho)}{2}\right). \tag{22}$$

Concluindo aqui as fórmulas de Prostaférese para a soma e diferença de senos.

3.3 SOBRE ÁREAS E VOLUMES

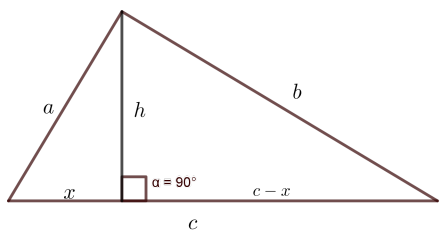
Um dos conceitos mais abordados no que se refere a geometria do Ensino Médio é o cálculo de áreas e volumes. Nesta seção faleremos sobre as áreas e volumes e formas alternativas para se calcular as áreas de um triângulo qualquer. Começando em triângulos, podemos calcular sua área de formas diversas. O teorema a seguir trata da famosa Fórmula de Heron que permite calcular a área de um triângulo em função de seus lados.

Teorema 8 ***(Fórmula de Heron)*** *Dado um triângulo de lados a, b e c e seja $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro do mesmo. A área A do triângulo é:*

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Demonstração. Considere um triângulo qualquer.

Figura 3: Triângulo qualquer



Fonte: Autor

Sabemos que a área desse triângulo é $A = \frac{1}{2}ch$, vamos então determinar o valor de h. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + x^2 \\ \\ b^2 = h^2 + (c-x)^2 \end{cases}$$

Fazendo $h^2 = a^2 - x^2$ da primeira equação e substituindo na segunda, ao mesmo passo realizando o produto notável:

$$b^2 = a^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cx \Longrightarrow x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

Recorrendo então à primeira equação equação, e determinando o valor de h:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}\right)^2 \Longrightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}\right)^2}.$$

Portanto a área do triângulo pode ser calculada por

$$A = \frac{1}{2}c\sqrt{a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}\right)^2}.$$

Agora o que falta é utilizar fatoração para ajustar a equação e chegar ao resultado esperado. De fato:

$$A = \frac{1}{2}c\sqrt{a^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c})^2} = \sqrt{\frac{c^2a^2}{4} - \frac{c^2}{4}\frac{(c^2 + a^2 - b^2)^2}{4c^2}}.$$

Cancelando os termos possíveis, e usando a diferença dos quadrados, temos

$$A = \sqrt{\left(\frac{ca}{2} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4}\right)\left(\frac{ca}{2} + \frac{-c^2 - a^2 + b^2}{4}\right)} =$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{c^2 + 2ca + a^2 - b^2}{4}\right)\left(\frac{-c^2 - a^2 + 2ca + b^2}{4}\right)}.$$

Como $c^2 + 2ac + a^2) = (c+a)^2$ e $c^2 - 2ac + a^2 = (c-a)^2$, chegamos na seguinte igualdade

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{(c+a)^2 - b^2}{4}\right)\left(\frac{b^2 - (c-a)^2}{4}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{4}\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{4}} \end{aligned}$$

Note que $\frac{b+c-a}{2} = \frac{a+b+c-2a}{2} = p - a$, chegamos em

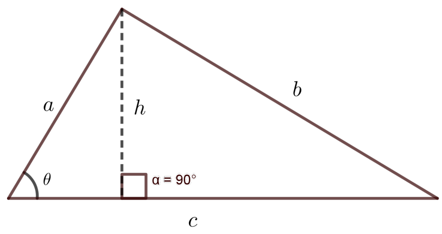
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, como queríamos demonstrar.

Teorema 9 *A área de um triângulo qualquer é igual a metade do produto de dois lados quaisquer pelo seno do ângulo entre eles.*

Demonstração: É simples de se verificar esse teorema, observe a figura a seguir.

Figura 4: Triângulo



Fonte: Autor

Sabemos que

$$A = \frac{ch}{2} \text{ e que } \operatorname{sen}(\theta) = \frac{h}{a} \Longrightarrow h = a\operatorname{sen}(\theta).$$

Substituindo o valor de h na fórmula da área, chegamos em

$$A = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}(\theta).$$

De forma análoga, podemos chegar na fórmula da área do triângulo em função do ângulo oposto ao lado a e ao lado c.

A seguir veremos como determinar a área de um triângulo em função das medidas de seus lados e da medida do raio da circunferência inscrita.

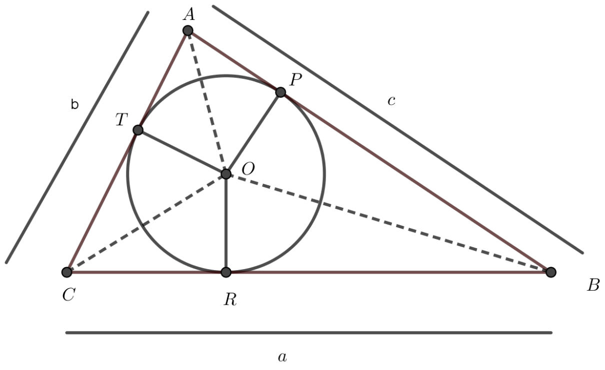
Teorema 10 *Se um triângulo tem medidas de lados a, b e c, e raio da circunferência inscrita r. Então:*

$$A = pr,$$

onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração: Acompanhe a figura

Figura 5: Triângulo com circunferência inscrita



Fonte: Autor

Note que OT, OP e OR são as alturas dos triângulos $\triangle AOC$, $\triangle AOB$ e $\triangle BOC$ respectivamente, onde todas elas tem comprimento igual ao raio r da circunferência inscrita. A área do triângulo $\triangle ABC$ é a soma das áreas dos triângulos $\triangle AOC$, $\triangle AOB$ e $\triangle BOC$. Sabendo que uma fórmula da área de um triângulo é a metade do produto da base pela altura, temos,

$$A(\triangle ABC) = A(\triangle AOC) + A(\triangle AOB) + A(\triangle BOC).$$

Logo,

$$A(\triangle ABC) = \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} + \frac{ra}{2} = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = pr.$$

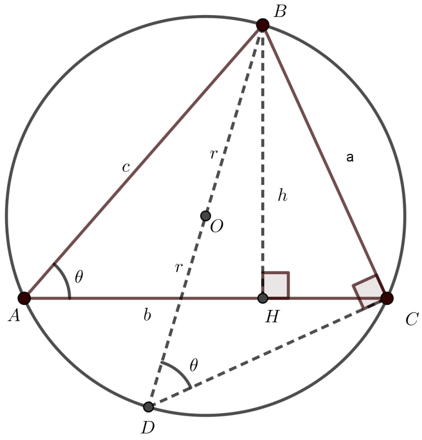
Para finalizar as diversas formas de se calcular as áreas dos triângulos, vejamos como calcular a área em função das medidas dos lados e da medida do raio da circunferência circunscrita.

Teorema 11 *Dado um triângulo de lados a, b e c, e de raio da circunferência circunscrita r, a área A pode ser calculada por*

$$A = \frac{abc}{4r}.$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado utilizaremos o Teorema de Tales. Assim, a demonstração se tornará simples e de fácil entendimento. Analise a figura seguinte

Figura 6: Triângulo com circunferência circunscrita



Fonte: Autor

Sabemos que a área do triângulo $\triangle ABC = \dfrac{bh}{2}$. Note que fizemos o triângulo $\triangle BDC$ de modo que $BD = 2r$ e o ângulo $B\widehat{D}C$ com medida θ. Os triângulos $\triangle ABH$ e $\triangle BCD$ são semelhantes, pois possuem respectivamente os mesmos ângulos, portanto pelo Teorema de Tales:

$$\frac{BH}{BC} = \frac{AB}{BD} \Longrightarrow \frac{h}{a} = \frac{c}{2r} \Longrightarrow h = \frac{ac}{2r}.$$

Substituindo esse valor de h na fórmula da área do $\triangle ABC$, temos:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{b\frac{ac}{2r}}{2} = \frac{abc}{4r}.$$

Por completude, vale ressaltar as áreas das principais figuras planas.

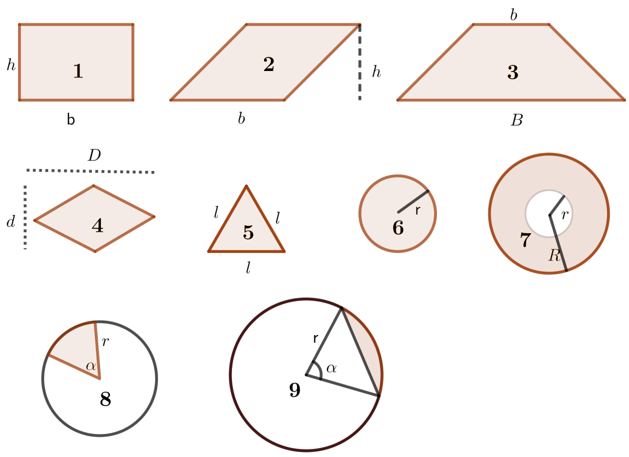
1. **Área do retângulo** $A = bh$.
2. **Área do paralelogramo** $A = bh$.
3. **Área do trapézio** $A = \dfrac{(B+b)h}{2}$, onde b é a base menor, B a maior e h a altura.
4. **Área do losango** $A = \dfrac{D.d}{2}$. Onde D é a diagonal maior e d é a menor.
5. **Área do triângulo equilátero** $A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Com l sendo o lado do triângulo.
6. **Área do círculo** $A = \pi.r^2$, onde r o raio do círculo.
7. **Área da coroa circular** $A = \pi(R^2 - r^2)$, onde R raio do círculo maior e r raio do menor.

8. **Área do setor circular** $A = \dfrac{\alpha}{360°}\pi r^2$. A saber α é o ângulo central e r raio da circunferência.

9. **Área do segmento circular** $A = A_{setor} - A_{\triangle}$.

Para facilitar o entendimento temos a figura a seguir

Figura 7: Principais áreas

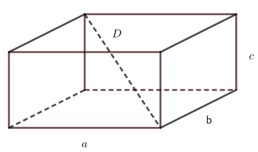


Fonte: Autor

Em termos de geometria espacial, para encerrar a seção, separamos aqui informações que são sempre importantes de relembrar.

1. **Paralelepípedo reto retângulo.** Ver a figura 8:
   Volume: $V = abc$.
   Diagonal: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
   Área total: $A = 2(ab + ac + bc)$. Para o cubo, faça $a = b = c$.

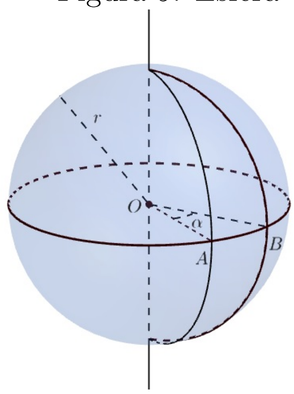
Figura 8: Paralelepípedo reto retângulo



Fonte: Autor

2. **Esfera.** Ver a figura 9:
   Volume: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.
   Área da superfície: $A = 4\pi r^2$.
   Volume da cunha esférica: $V_c = \dfrac{\pi r^3 \alpha}{270°}$, com α em graus.
   Área do fuso esférico: $A_f = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{90°}$, com α em graus.

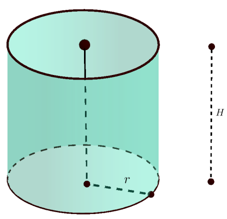
Figura 9: Esfera



Fonte: Autor

3. **Cilindro.** Ver a figura 10:
   Área da base: $A_b = \pi r^2$.
   Área lateral: $A_l = 2\pi r H$.
   Área total: $A_t = A_l + 2A_b$.
   Volume: $V = AbH$.
   Área da secção meridiana: $A_{sm} = 2rH$.

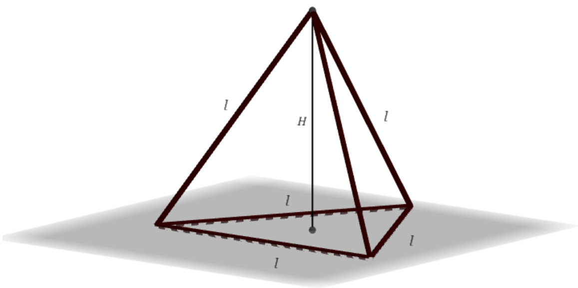
Figura 10: Cilindro



Fonte: Autor

4. **Tetraedro regular.** De acordo com a figura 11
   Altura: $H = \dfrac{l\sqrt{6}}{3}$.
   Área total: $A_t = l^2\sqrt{3}$.
   Volume: $V = \dfrac{l^3\sqrt{2}}{12}$.

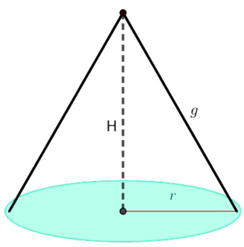
Figura 11: Tetraedro regular



Fonte: Autor

5. **Cone.** De acordo com a figura 12:
   Área da base: $A_b = \pi.r^2$.
   Área lateral: $A_l = \pi.r.g$.
   Área total: $A_t = A_l + A_b$.
   Volume: $V = \dfrac{1}{3}Ab.H$.
   Área da secção meridiana: $A_{sm} = rH$.

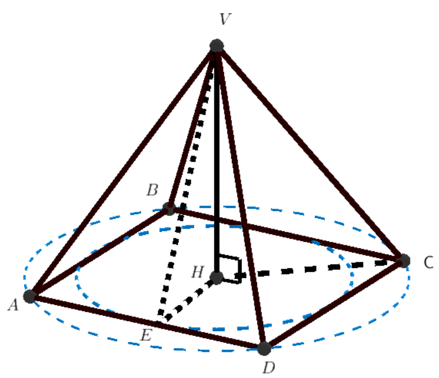
Figura 12: Cone



Fonte: Autor

6. **Pirâmide regular.**
   Área da base: $A_b =$ Área da polígono que estiver na base.
   Área lateral: $A_l =$ Soma de todas as áreas das figuras laterais.
   Área total: $A_t = A_l + A_b$.
   Volume: $V = \dfrac{1}{3}Ab.H$.
   A partir da figura 13, vamos destacar:
   $VH = h$ altura da pirâmide.
   $HC = R$ raio da circunferência circunscrita.
   $HE = r$ raio da circunferência inscrita.
   $VE = g$ apótema da pirâmide.
   $VA = VB = VC = VC = l$ arestas.
   $h^2 + R^2 = l^2$.
   $h^2 + r^2 = g^2$.

Figura 13: Pirâmide quadrangular regular



Fonte: Autor

3.4 NÚMEROS COMPLEXOS

É alto o índice de questões do ITA que abordam o conteúdo de números complexos. Porém, não é todo livro didático que traz para os alunos o estudo sobre esse tipo de conjunto, exigindo do estudante que recorra a outros meios para aprender.

Sabendo disso, nesta seção, vamos apresentar um breve resumo do que o vestibulando deve saber sobre números complexos.

Definição 18 *É definido como unidade imaginária, e denotado como i, o número:*

$$i^2 = -1.$$

Note que a princípio, problemas como a equação

$$x^2 + 1 = 0.$$

podem ser resolvidos a partir dessa simples definição.

Definição 19 *Um número complexo z é um número da forma $z = a + bi$. De modo que a é a parte real e b é a parte imaginária do número z.*

Denotamos: $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$. As operações com números complexos são bem definidas. Considere os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

Definição 20 ***(Adição/Subtração.)*** *Obtida através da adição/subtração da parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária:*

$$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i.$$

Definição 21 ***(Multiplicação.)*** *Aplicação da distributividade e agrupamento das partes reais e imaginárias:*

$$z_1 z_2 = (a + bi).(c + di).$$

$$z_1 z_2 = ac + adi + bci - bd.$$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Definição 22 ***(Divisão.)*** *Resolvemos a razão $\frac{z_1}{z_2}$, multiplicando numerador e denominador pelo conjugado de z_2 (Veja a definição 24):*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di}\frac{c - di}{c - di}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i.$$

Todo número complexo $z = a+bi$ não nulo, tem inverso multiplicativo. Assim se $z = a+bi$, o inverso é

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

De fato, dado $z = a + bi$, vamos determinar $z' = a' + b'i$ tal que $zz' = 1$", substituindo temos

$$1 = zz' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i.$$

De onde podemos concluir que
$$\begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ab' - bb' = 0 \end{cases}.$$
Ao resolver esse sistema chegamos em:
$$a' = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ e } b' = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$
Garantindo assim que
$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i. \tag{23}$$
Apenas com essa breve teoria já é possível resolver algumas questões sobre números complexos.

Exemplo 5 *Resolva a equação:* $\dfrac{1+i}{1-i} = z + i.$

Solução. Como $1 - i \neq 0$, multiplicando ambos os membros por $1 - i$ teremos:
$$1 + i = (z + i)(1 - i) = (z + i - zi + 1).$$
Onde, somando os termos semelhantes temos:
$$0 = z(1 - i).$$
Permitindo então concluir que $z = 0$.

Exemplo 6 *Mostre que:*
$$i^n = \begin{cases} 1, sen = 4q \\ i, sen = 4q+1 \\ -1, sen = 4q+2 \\ -i, sen = 4q+3 \end{cases}.$$

Solução. Se $n = 4q$ com $q \in \mathbb{N}$, segue que
$$i^n = i^{4q} = (i^2)^{2q} = (-1)^{2q} = 1.$$
Se $n = 4q + 1$, temos
$$i^n = i^{4q+1} = i^{4q}i^1 = 1i = i.$$
Se $n = 4q + 2$, temos
$$i^n = i^{4q+2} = i^{4q}i^2 = 1(-1) = -1.$$

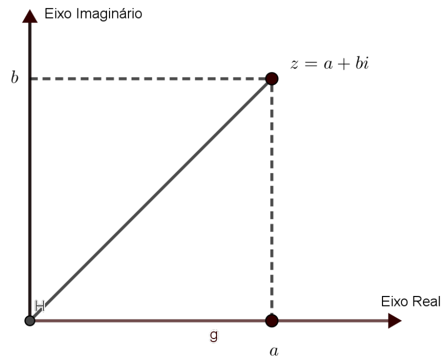
Se $n = 4q + 3$, temos

$$i^n = i^{4q+3} = i^{4q} i^3 = 1(i^2)(i) = -1i = -i.$$

Como queríamos mostrar.

Os números complexos possuem representação geométrica, que é a mesma base do conhecido plano cartesiano, onde o eixo das abcissas ficará com a parte real, e o eixo das ordenadas ficará com a parte imaginária do número complexo dado. A figura seguinte ilustra a representação.

Figura 14: Plano Complexo



Fonte: HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. 2012.

Definição 23 *O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\overline{z} = a - bi$, que representa geometricamente ao simétrico de z nem relação ao eixo real.*

Propriedades do conjugado complexo

1. $\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

2. $\overline{\overline{z}} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

3. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

4. $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$.

5. $\overline{zw} = \overline{zw}$.

6. $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ e $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Essas propriedades são fáceis de serem verificadas. Façamos a demonstração do item 6: Dado $z = a + bi$, seu conjugado é $\overline{z} = a - bi$. Note que:

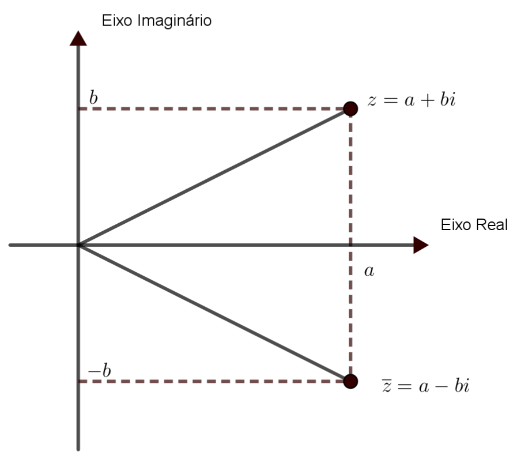
$$z + \overline{z} = 2a \Rightarrow Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}.$$

Agora perceba que

$$z - \overline{z} = 2bi \Rightarrow Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

A representação geométrica de um número complexo e seu conjugado pode ser vista na figura logo abaixo

Figura 15: Conjugado de um número complexo



Fonte: HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. 2012.

O módulo $|z|$ de um número complexo $z = a + bi$ é um número real não negativo definido por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente o módulo de um número complexo z é a distância da origem até o ponto z.

Propriedades do módulo.

1. $z.\overline{z} = |z|^2$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. $|z| = |\overline{z}|$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
3. $|z.w| = |z|.|w|$, para quaisquer z, $w \in \mathbb{C}$.

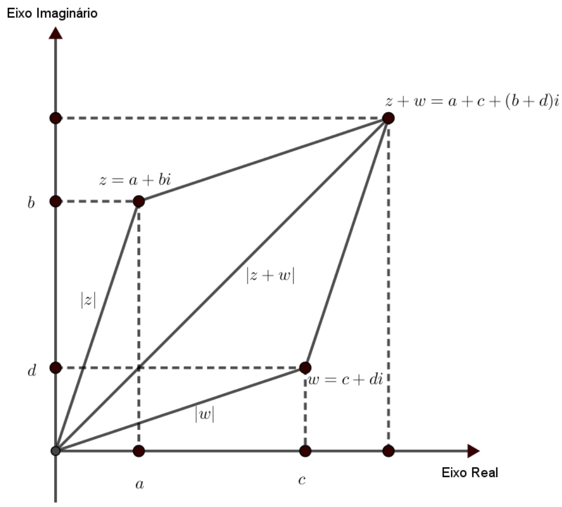
É interessante notar que o módulo de números complexos possuem a propriedade chamada de desigualdade triangular:

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Para quaisquer z, $w \in \mathbb{C}$. Este resultado nos permite reesolver questões no campo das inequações.

A figura a seguir ilustra geometricamente a desigualdade triangular. Note também a representação da soma de dois números complexos

Figura 16: A desigualdade triangular



Fonte: HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. 2012.

Segue então dois exemplos para reforçar os conceitos de conjugado e módulo dos números complexos:

Exemplo 7 *Se* $z \in \mathbb{C}$ *e* $z \neq 0$, *mostre que* $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Solução. Suponha que $z = a + bi$, então observe que

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi}.$$

Agora, multiplicando a fração por 1, usando a ideia de conjugado, temos:

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} . \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Como queríamos mostrar.

Exemplo 8 *Represente no plano o conjuntos dos números complexos que satisfazem a desigualdade*

$$|z+i| \leq 4.$$

Solução. Suponha que $z = a + bi$, então:

$$|z+i| = |a+(b+1)i| \leq 4.$$

Pela definição de módulo temos:

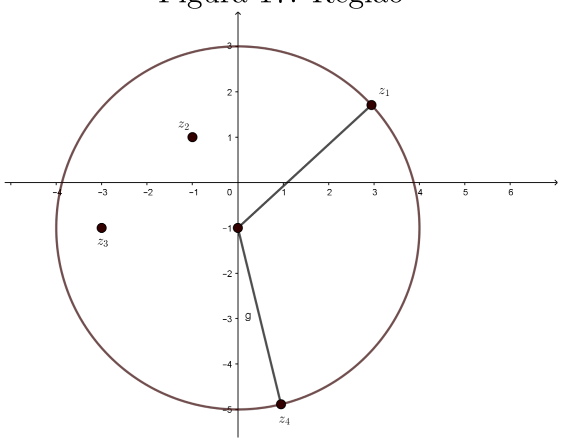
$$\sqrt{a^2+(b+1)^2} \leq 4.$$

Isso nos diz que:

$$a^2+(b+1)^2 \leq 16.$$

Observe a representação no plano dos números complexos que satisfazem a inequação

Figura 17: Região



Fonte: Autor

Logo, temos como resposta todos os pontos interiores ao disco de centro $C = (0, -1)$ e raio 4 ou que estão no círculo de centro $C = (0, -1)$ e raio 4. Note que os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 são só alguns dos infinitos pontos que satisfazem a inequação dada.

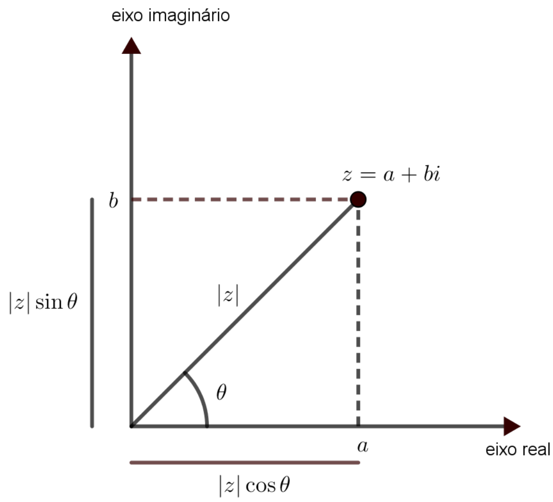
Existe outra representação dos números complexos denominada de forma trigonométrica ou polar. De grande importância, esta maneira de representar os números complexos permitirão calcular a potência, o produto e a extração de raízes de forma mais simples, facilitando também a interpretação geométrica das operações citadas. Muito útil para resolução de questões, a forma polar também nos permitirá conhecer a fórmula de De

Moivre, que utilizaremos para calcular potências de números complexos.

De uma forma mais simplificada, pense no nosso plano complexo. Dado um $z = a + bi$ onde $z \in \mathbb{C}$, o segmento que parte da origem e vai até o ponto (a, b) representa o módulo do complexo z. Este segmento determina com o eixo real um ângulo θ onde em radianos se situa entre $[0, 2\pi)$. θ será chamado de argumento principal de z e denotado como $arg(z) = \theta$.

Observe também que, por trigonometria básica, $a = |z|\cos\theta$ e $b = |z|\text{sen}\theta$. A Figura seguinte ilustra a situação.

Figura 18: Argumento principal de z



Fonte: HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. 2012.

Definição 24 *A forma polar de um número complexo não nulo $z = a + bi$, com módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e argumento principal $arg(z) = \theta$, é definida por*

$$z = |z|(\cos\theta + isen\theta).$$

Exemplo 9 *Determine o módulo e o argumento principal do número complexo $z = 2 - 2i$ e o escreva na forma polar.*

Solução. O módulo de z é $\sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Como $a = |z|\cos\theta$ e $b = |z|\text{sen}\theta$, para o cálculo do argumento principal temos:

$$2 = 2\sqrt{2}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

E

$$-2 = 2\sqrt{2}\text{sen}\theta \Rightarrow \text{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, $arg(z) = \frac{7\pi}{4}$, pois é o ângulo simétrico de $\frac{\pi}{4}$, com seno negativo e cosseno positivo.

A forma polar de z é:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right).$$

Proposição 9 *Dados números complexos $z_1 = |z_1|(\cos\theta + isen\theta)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\alpha + isen\alpha)$, o produto de números complexos na forma polar é dado por*

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta+\alpha) + isen(\theta+\alpha)).$$

Demonstração:

$$z_1.z_2 = |z_1|(\cos\theta + i\text{sen}\theta).|z_2|(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha).$$

$$z_1.z_2 = z_1.z_2((\cos\theta\cos\alpha - \text{sen}\theta\text{sen}\alpha) + i(\cos\theta\text{sen}\alpha + \text{sen}\theta\cos\alpha))$$

Note que temos aqui as identidades trigonométricas do $\cos(\theta+\alpha)$ e $\text{sen}(\theta+\alpha)$. Usando essas identidades, temos:

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta+\alpha) + i\text{sen}(\theta+\alpha)).$$

Exemplo 10 *Determine na forma polar o produto $z_1.z_2$, onde*

$$z_1 = \frac{5\sqrt{3}+5i}{2} \text{ e } z_2 = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i}{2}.$$

Solução. Calculando inicialmente os módulos de z_1 e z_2:

$$|z_1| = \sqrt{((\frac{5\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2)} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5.$$

$$|z_2| = \sqrt{((\frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{3\sqrt{2}}{2})^2)} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3.$$

Portanto $|z_1|.|z_2| = 5.3 = 15$. Note agora que:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2};\\ \text{sen}\theta &= \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2};\\ \text{sen}\alpha &= \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Concluindo assim que $\theta = \frac{\pi}{6}$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Logo

$$z_1.z_2 = 15(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) + i.\text{sen}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})) = 15(\cos\frac{5\pi}{12} + isen\frac{5\pi}{12}).$$

Como queríamos determinar.

Proposição 10 ***(Fórmula de De Moivre)*** *Dado $z = |z|(\cos\theta + isen\theta)$, um número complexo, não nulo, na forma polar, então para cada inteiro n, temos:*

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + isen(n\theta)).$$

Demonstração: Para $n = 0$ é válido, pois teremos

$$z^0 = |z|^0(\cos(0) + i\text{sen}(0)) = 1.(1 + 0) = 1.$$

Para $n = 1$, também é verdadeiro, pois é a própria forma polar. Tome $n \geq 1$ e suponha que a igualdade é válida para n. Então,

$$z^{n+1} = z^1 z^n.$$

Usando a hipótese de indução, obtemos:

$$z^{n+1} = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta).(|z^n|(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))).$$

Aplicando agora a multiplicação de números complexos na forma polar;

$$z^{n+1} = |z^{n+1}|(\cos(\theta + n\theta) + i\text{sen}(\theta + n\theta)).$$

$$z^{n+1} = |z^{n+1}|(\cos((n+1)\theta) + i\text{sen}((n+1)\theta)).$$

Concluindo assim que vale para $n + 1$, portanto para todo $n \geq 0$.

Para $n < 0$, faremos o seguinte:
Se $n < 0$, então $-n > 0$; Como já provamos que a fórmula vale para números inteiros

positivos, então

$$z^n = ((z^{-n})^{-1}) = (|z|^{-n}(\cos(-n\theta) + i\mathrm{sen}(-n\theta)))^{-1}.$$

Usando o fato de seno ser função ímpar e cosseno função par, então

$$\begin{aligned}
z^n &= (|z|^{-n}(\cos(n\theta) - i\mathrm{sen}(n\theta)))^{-1}. \\
z^n &= (|z|^n.(\frac{1}{\cos(n\theta) - i\mathrm{sen}(n\theta)})). \\
z^n &= \frac{|z|^n}{\cos(n\theta) - i\mathrm{sen}(n\theta)}.\frac{\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta)}{\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta)}. \\
z^n &= \frac{|z|^n(\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta))}{\cos^2(n\theta) + \mathrm{sen}^2(n\theta)}.
\end{aligned}$$

Pela relação fundamental da trigonometria, concluímos que

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta)),$$

onde $n < 0$, como queríamos mostrar.

Exemplo 11 *Calcule a potência $(2+2i)^5$, usando a forma polar do número complexo.*

Solução. Calculando inicialmente o módulo do número complexo $(2+2i)$, temos:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Determinando o ângulo θ:

$$\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{sen}\theta.$$

Isso nos diz que $\theta = \frac{\pi}{4}$. Agora usando a fórmula de De Moivre:

$$z^5 = (2\sqrt{2})^5\left(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{4})\right).$$

$$(128\sqrt{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -128 - 128i.$$

Como queríamos calcular.

Exemplo 12 *Determine os valores do número natural $n \geq 2$, para os quais $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^n$ seja;*

1. *um número real;*

2. *um imaginário puro.*

Solução. Pela fórmula de De Moivre, temos:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n = 2\left(\cos(n\frac{\pi}{4}) + i\text{sen}(n\frac{\pi}{4})\right).$$

Para que tenhamos um número real, a parte imaginária precisa dar igual a zero. Para tanto:

$$\text{sen}\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow n\frac{\pi}{4} = k\pi.$$
$$\Rightarrow \frac{n}{4} = k \Leftrightarrow n = 4k.$$

Ou seja, n deve ser um múltiplo do número 4.
Para que tenhamos um imaginário puro:

$$\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$
$$\Rightarrow \frac{n}{4} = \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow n = 2 + 4k.$$

Ou seja, n deve ser um número que deixa resto 2 na divisão por 4. Como queríamos determinar.

Para calcular raízes complexas n-ésimas usaremos a proposição a seguir:

Proposição 11 *Dado um número complexo $z \neq 0$, para cada natural n existem exatamente n raízes complexas, que são:*

$$z_l = \sqrt[n]{|z|}(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi.l}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2\pi.l}{n}\right)).$$

Onde $l = 0, 1, 2, ..., n-1$, e θ argumento de z.

Definição 25 *São chamadas de raízes da unidade as raízes complexas n-ésimas de* 1.

A raiz 1-ésima da unidade é 1. Quando $n > 1$, teremos $\theta = 0$, logo

$$z_l = \cos\frac{2\pi.l}{n} + i\text{sen}\frac{2\pi.l}{n},$$

onde $l = 0, 1, ..., n-1$, onde cada valor de z_l será uma raiz n-ésima da unidade. É muito importante saber que as raízes n-ésimas da unidade são vértices de um polígono regular de n lados inscrito num círculo de raio 1 e centro na origem em $\mathbb{C}$.

Exemplo 13 *São raízes cúbicas da unidade os números* $\left(1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$.

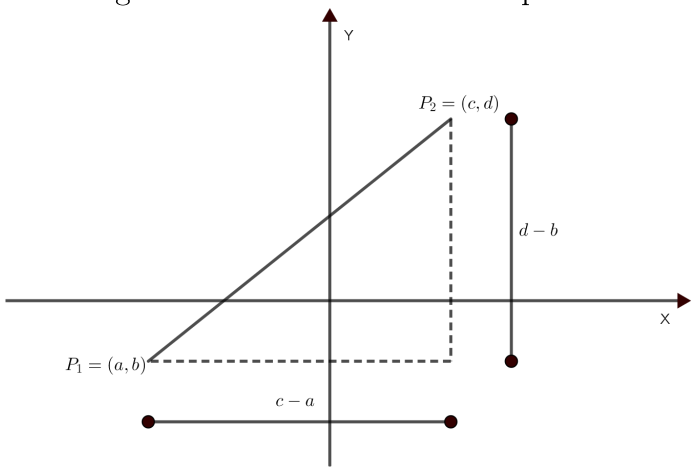
3.5 O RESULTADO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Nesta última seção vamos expor alguns dos principais resultados da Geometria Analítica, de forma que torne possível resolver o máximo de questões do ITA. Tópicos envolvendo este assunto como coordenadas, vetores e equações da reta no plano, assim como posições relativas, distâncias e as formas canônicas das cônicas serão trabalhados nesta seção. É importante saber reconhecer uma cônica através da sua equação, e determinar seus pontos notáveis.

Geometria Analítica figura entre os conteúdos mais presentes no vestibular do ITA. Ela fornece uma conexão entre a álgebra e a geometria, portanto usaremos artifícios algébricos para resolução de problemas deste conteúdo. Iniciaremos a partir da distância entre dois pontos distintos.

Dados dois pontos distintos $P_1 = (a, b)$ e $P_2 = (c, d)$ a distância entre eles é obtida através do teorema de Pitágoras. Vejamos a figura seguinte

Figura 19: Distância entre dois pontos



Fonte: Autor

Note que a distância de P_1 até P_2 é a hipotenusa do triângulo retângulo, ou seja:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(d-b)^2 + (c-a)^2}.$$

Definição 26 *Dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, definimos o vetor $\vec{v}$, onde as coordenadas desse vetor são $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$, e escreveremos $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.*

Proposição 12 *Dado um triângulo ABC de vértices A,B e C, a área desse triângulo é:*

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}|det(\begin{smallmatrix}\vec{AB}\\ \vec{AC}\end{smallmatrix})|.$$

Proposição 13 *Dadas as equações reduzidas das retas* $r_1 : y = ax + b$ *e* $r_2 : y = cx + d$*.*

1. *Então elas serão paralelas se e somente se* $a = c$ *e* $b \neq d$*.*

2. *Dadas as mesmas retas, elas serão perpendiculares se e somente se* $ac = -1$*.*

Teorema 12 *Dada a reta* $r : ax + by + c = 0$ *e um ponto* $P = (x_0, y_0)$ *do plano, a distância do ponto* P *até a reta* r *é:*

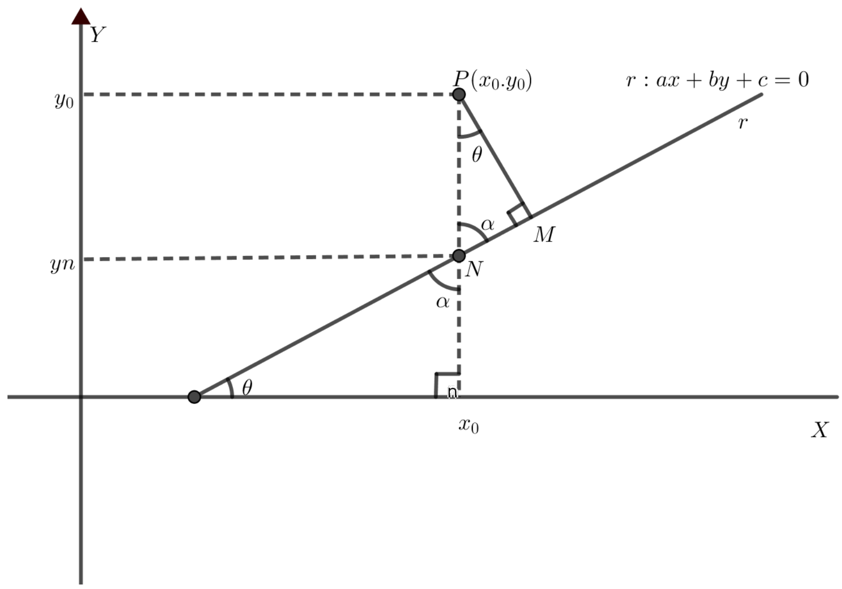
$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstração: Dada a reta $r : ax+by+c = 0$, se $b \neq 0$, ao isolar y temos: $y = -\dfrac{ax}{b} - \dfrac{c}{b}$. Sabemos que o coeficiente angular da reta é a tangente do ângulo, logo

$$tg(\theta) = \frac{-a}{b}.$$

Dado um ponto P fora da reta r, queremos a distância de P até um ponto M pertencente a r de modo que o segmento PM seja perpendicular a reta r. A figura seguinte ajudará a seguir o raciocínio

Figura 20: Distância do ponto a reta



Fonte: DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF; L. 2013.

Por trigonometria, $\cos(\theta) = \dfrac{PM}{PN}$ implicando que $PM = PN.\cos(\theta)$.
Observe a partir da figura que $PN = |y_0 - y_n|$, em módulo pois se trata de uma distância. Como o ponto N pertence a reta r, ela obedece a equação da reta, ou seja:

$$ax_0 + by_n + c = 0.$$

Isolando y_n e substituindo na fórmula de PN, temos:

$$PN = \left| y_0 + \frac{ax_0 + c}{b} \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b} \right|.$$

Vimos neste capítulo que

$$tg^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}.$$

Usando essa relação e o fato de que $tg(\theta) = \dfrac{-a}{b}$, temos:

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\frac{a^2}{b^2} + 1}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Como θ é um ângulo agudo, então $\cos\theta > 0$. Pra finalizar, como PM é a distância do ponto a reta, e $PM = PN.\cos(\theta)$, então:

$$d(P, r) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b} \right| . \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Como queríamos demonstrar.

Proposição 14 *Sejam $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : ax + by = d$ duas retas paralelas ou coincidentes. A distância entre elas é*

$$d(r_1, r_2) = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstração: De fato, tome um ponto $P = (x_0, y_0)$ da reta r_1. Então, usando a distância de um ponto a uma reta:

$$d(r_1, r_2) = d(P, r_2) = \frac{|ax_0 + by_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Porém, $ax_0 + by_0 = c$ é a reta r_1 aplicada no ponto P, logo temos que:

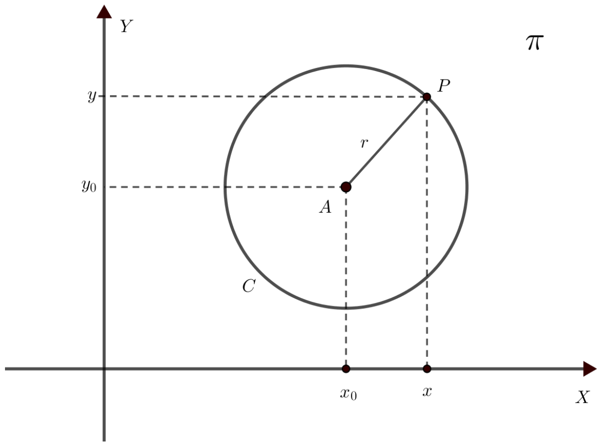
$$d(r_1, r_2) = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Definição 27 ***(Círculo):*** *Chamamos de círculo C de centro no ponto A pertencente ao* *plano π e raio $r > 0$ o lugar geométrico dos pontos equidistantes do centro A, de tal modo que essa equidistância tenha comprimento igual a r. Ou seja:*

$$C = \{P \in \pi / d(P, A) = r\}.$$

Determinemos a equação do círculo.

Figura 21: Círculo de raio r e centro A.



Fonte: DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF; L. 2013.

Através da definição tem-se

$$P = (x, y) \in C \iff d(P, A) = r$$

$$\iff d(P, A)^2 = r^2 \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Portanto, a equação do círculo C será

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

A partir desta equação, as propriedades geométricas do círculo podem ser algebricamente deduzidas.

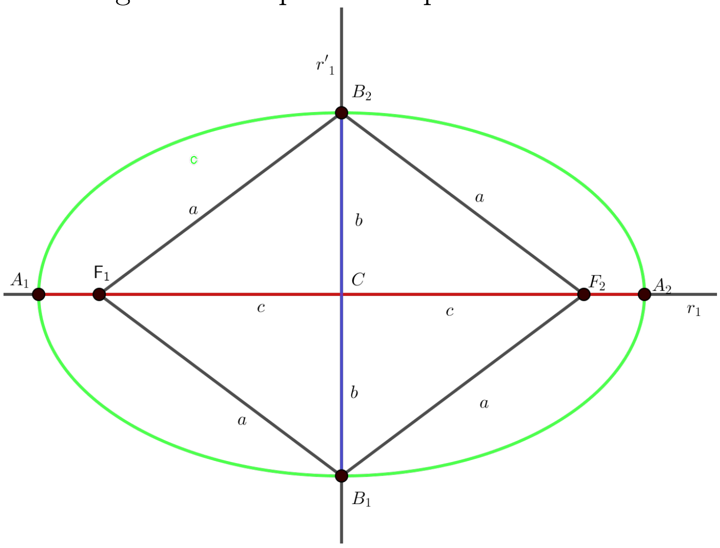
Para concluir esta seção, vamos agora falar sobre as cônicas, definindo-as e apresentando suas formas canônicas, que permitirão identificar e determinar pontos notáveis. Vale ressaltar que cônicas são curvas que foram geradas na intersecção de um plano que intersecta um cone. Comecemos definindo a elipse:

Definição 28 *Levará o nome de elipse de focos F_1 e F_2, e será denotada pelo símbolo $\mathbb{E}$, o conjunto dos pontos P do plano nas quais as distâncias de cada um desses pontos ao foco F_1 somada com as distância ao foco F_2 seja igual a um valor constante $2a > 0$,* *de tal forma que seja maior que a distância entre os focos, denotados aqui de* $2c \geq 0$. *Resumidamente, sendo* $0 \leq c < a$ *e* $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\mathbb{E} = \{P/d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

F_1 e F_2 são os focos da elipse.
A reta r_1 que contém os focos será chamada de reta focal.
Intersectando a elipse com a reta focal r_1, encontraremos dois pontos, A_1 e A_2, que serão chamados de vértices da elipse sobre a reta focal. Com o auxílio da figura seguinte, completaremos as informações a respeito da elipse.

Figura 22: Elipse e seus pontos notáveis



Fonte: Autor

Note que o centro C é o ponto médio do eixo focal A_1A_2, também é ponto médio do segmento F_1F_2 determinado pelos focos e do segmento B_1B_2 da reta não focal.

1. O eixo não focal é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, no qual $b^2 = a^2 - c^2$.

2. O número a é a distância do centro ao vértice que está sobre a reta focal, c é a distância do centro aos focos e b é a distância do centro ao vértice que está sobre a reta não focal.

3. O segmento A_1A_2 é o eixo focal da elipse e tem comprimento $2a$.

4. A reta focal r_1 é perpendicular a reta não focal r'_1.

5. Chamamos de excentricidade da elipse a razão $e = \dfrac{c}{a}$, onde $0 \leq e < 1$.

A forma canônica de uma elipse, de centro $C = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX é:

$$\mathbb{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - yo)^2}{b^2} = 1.$$

Onde os focos são: $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

A reta focal: $r_1 : y = y_0$.

A reta não focal: $r_1' : x = x_0$.

Vértices sobre a retal focal: $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (xo + a, y_0)$.

Vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$.

Se a elipse tiver eixo focal paralelo ao eixo OY, a equação será:

$$\mathbb{E} : \frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - yo)^2}{a^2} = 1.$$

E os elementos da elipse são:

Os focos são: $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.

A reta focal: $r_1 : x = x_0$.

A reta não focal: $r_1' : y = y_0$.

Vértices sobre a retal focal: $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (xo, y_0 + a)$.

Vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$.

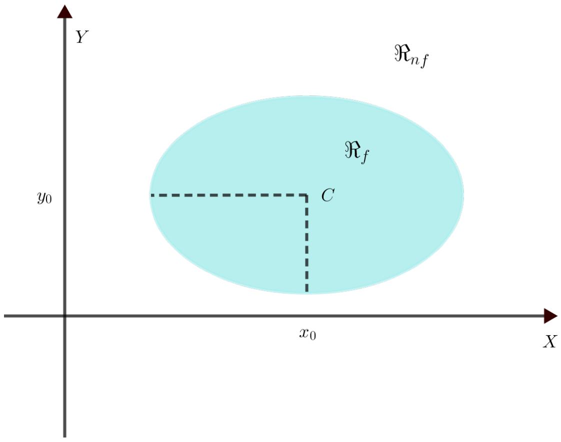
Dada uma elipse em que $\mathbb{E} : \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - yo)^2}{b^2} = 1$ seja sua equação, temos:

$$\Re_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - yo)^2}{b^2} < 1\}.$$

$$\Re_{nf} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - yo)^2}{b^2} > 1\}.$$

Onde $\Re_f$ é chamada região focal e $\Re_{nf}$ é a região não focal da elipse. Observe a seguir um esboço dessas regiões

Figura 23: Região focal e não focal da elipse



Fonte: DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF; L. 2013.

Definição 29 *Será Chamada de Hipérbole de focos F_1 e F_2, e denotada por $\mathbb{H}$, o conjunto de todos os pontos P do plano nos quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, porém menor que a distância entre os focos $2c > 0$, ou melhor:*

$$\mathbb{H} = \{P/|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

Com $0 < a < c$ e $d(F_1, F_2) = 2c$.

Alguns detalhes sobre a terminologia:

1. F_1 e F_2 são os focos da hipérbole e a retal focal é a reta que os contém.

2. O segmento A_1A_2 é chamado de eixo focal, de comprimento $2a$.

3. A interseção da hipérbole com a reta focal r_1 resulta em dois pontos, A_1 e A_2, chamados de vértices da hipérbole.

4. O ponto C é o centro da hipérbole, onde $C = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = \dfrac{F_1 + f_2}{2}$.

5. A reta r_1', que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal r_1, é a reta não focal da hipérbole.

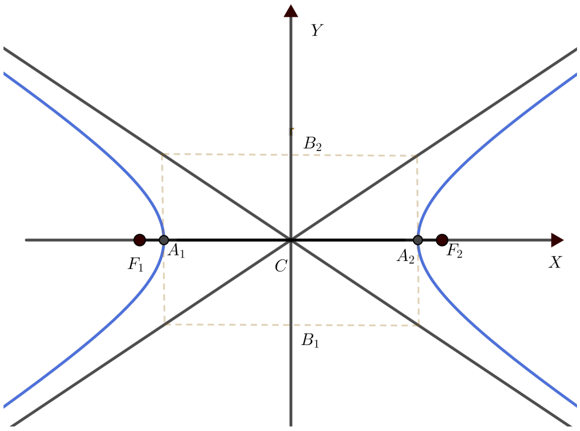
6. O segmento B_1B_2, perpendicular ao eixo focal, com ponto médio em C e comprimento $2b$, é denominado eixo não focal da hipérbole.

7. A excentricidade de uma hipérbole é $e = \dfrac{c}{a}$, onde $e > 1$, pois $c > a$.

8. O retângulo de base da Hipérbole é aquele que possui A_1, A_2,B_1 e B_2 como pontos médios. As retas que passam por suas diagonais são chamadas de assíntotas da hipérbole.

A figura seguinte ilustra genericamente a situação

Figura 24: Hipérbole e seus pontos notáveis



Fonte: Autor

A forma canônica de uma hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX é dada por

$$\mathbb{H} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Onde $b^2 = c^2 - a^2$,com as seguintes particularidades:

Os focos: $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Vértices: $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$.

Vértices imaginários: $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$.

Reta focal: $r_1 : y = y_0$.

Reta não focal: $r_1' : x = x_0$.

Assíntotas: $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$.

Se a hipérbole tiver eixo focal paralelo ao eixo OY, a equação será:

$$\mathbb{H} : \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

E os elementos da hipérbole serão:

Os focos: $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.

Vértices: $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$.

Vértices imaginários: $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$.

Reta focal: $r_1 : x = x_0$.

Reta não focal: $r_1' : y = y_0$.

Assíntotas: $x - x_0 = \pm\frac{b}{a}(y - y_0)$.

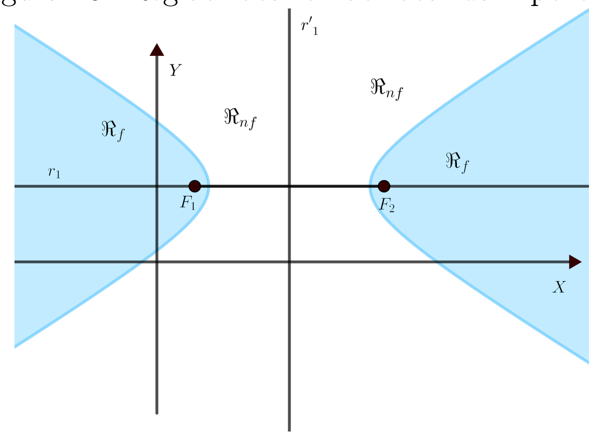
Dada uma hipérbole em que $\mathbb{H} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ seja sua equação, temos que:

$$\Re_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - yo)^2}{b^2} > 1\}.$$

$$\Re_{nf} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - yo)^2}{b^2} < 1\}.$$

Onde $\Re_f$ é chamada região focal e $\Re_{nf}$ é a região não focal da hipérbole. Observe a figura

Figura 25: Região focal e não focal da hipérbole



Fonte: DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF; L. 2013.

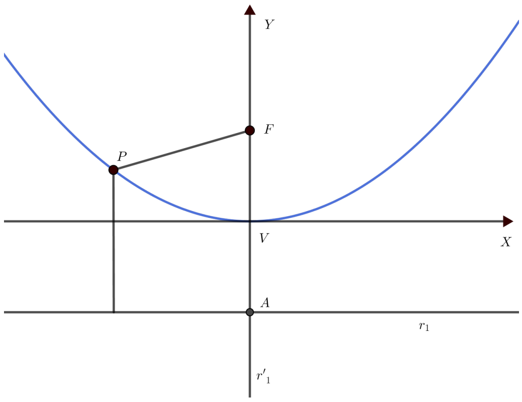
Definição 30 *Dada uma reta r_1 e F um ponto do plano não pertencente a r_1. Chamaremos de parábola $\mathbb{P}$ de foco F e diretriz r_1, o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F seja igual à sua distância a r_1, ou seja:*

$$\mathbb{P} = \{P/d(P, F) = d(P, r_1)\}.$$

Chamaremos de parâmetro da parábola a distância do foco até a reta diretriz, denotando por $2p = d(F, r_1)$.

A reta focal r'_1 da parábola é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz r_1. Considere que a interseção da reta focal com a diretriz seja o ponto A. Então o ponto médio do segmento que parte de A e vai até o foco F será chamado de vértice da parábola. Vale salientar que toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal. Observe a figura

Figura 26: Parábola e seus pontos notáveis



Fonte: Autor

A forma canônica de uma parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, reta focal paralela ao eixo OX e foco à direita da diretriz será dada por:

$$\mathbb{P} : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

Onde diretriz: $r_1 : x - x_0 = -p$.

Vértice: $V = (x_0, y_0)$.

Reta focal: $r'_1 : y - y_0 = 0$.

Foco: $F = (x_0 + p, y_o)$.

Se o foco estiver à esquerda da diretriz:

$$\mathbb{P} : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0).$$

Onde a diretriz: $r_1 : x - x_0 = p$.

Vértice: $V = (x_0, y_0)$.

Reta focal: $r_1' : y - y_0 = 0$.

Foco: $F = (x_0 - p, y_o)$.

Se a parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ tiver reta focal paralela ao eixo OY e foco acima da diretriz, a forma canônica será:

$$\mathbb{P} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Onde a diretriz: $r_1 : y - y_0 = -p$.

Vértice: $V = (x_0, y_0)$.

Reta focal: $r_1' : x - x_0 = 0$.

Foco: $F = (x_0, y_o + p)$.

Se o foco estiver embaixo da diretriz:

$$\mathbb{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0).$$

Onde a diretriz: $r_1 : y - y_0 = p$.

Vértice: $V = (x_0, y_0)$.

Reta focal: $r_1' : x - x_0 = 0$.

Foco: $F = (x_0, y_o - p)$.

Para concluir a seção e por consequência o capítulo, vamos abordar as regiões focais e não focais da parábola, assim como foi feito com a elipse e a hipérbole.

Com essas ferramentas poderemos ir para o capítulo seguinte, sobre resolução de questões, munidos de uma boa fundamentação teórica que nos permitirá abordar os problemas de uma forma mais fidedigna.

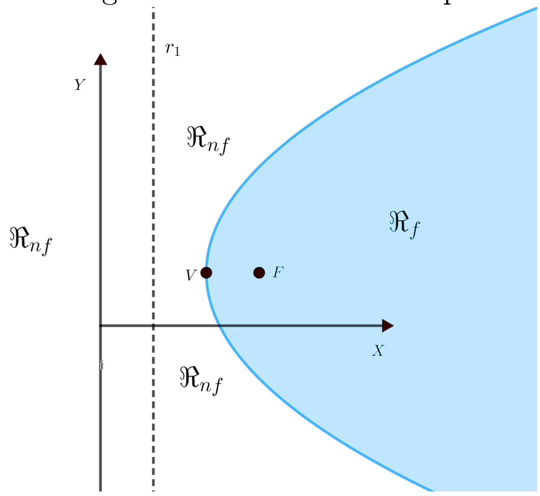
Dada uma parábola em que $\mathbb{P} : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ seja sua equação, onde o vértice é $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX, temos que:

$$\Re_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (y - y_0)^2 < 4p(x - x_0)\};$$

$$\Re_{nf} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (y - y_0)^2 > 4p(x - x_0)\},$$

onde $\Re_f$ é chamada região focal e $\Re_{nf}$ é a região não focal da parábola. Observe a seguir um esboço dessas regiões.

Figura 27: Região focal e não focal da parábola



Fonte: DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF; L. 2013.

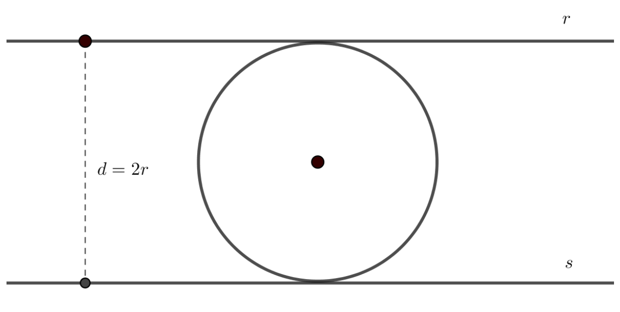
4 TRABALHANDO QUESTÕES

O objetivo deste capítulo é abordar questões de matemática presentes nos vestibulares do Instituto Tecnológico da Aeronáutica nos últimos anos. Decidimos por deixar as soluções mais completas e explicadas, sem omitir etapas. A ideia principal é usar os resultados do capítulo anterior para resolver as questões. As principais referências fortemente utilizadas neste capítulo foram [2], [8], [9], [10], [14], [15], [21] e [22].

Questão 01. (ITA 2015, q. 4) Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas $r : 3x + 4y - 4 = 0$ e $s : 3x + 4y - 19 = 0$. A área do círculo determinado por C é igual a:

Solução. Note que as retas r e s são paralelas. Como a circunferência é tangente às retas, temos que a distância do centro da circunferência à qualquer uma das retas é perpendicular às mesmas, logo o diâmetro da circunferência tem o mesmo comprimento da distância entre as duas retas.Veja a figura a seguir

Figura 28: Distância entre duas retas



Fonte: Autor

Para calcular a área do círculo precisamos somente do raio que, a partir da figura 28, a distância entre as retas é igual ao diâmetro. Então a estratégia é somente calcular a distância entre as retas, dividir por 2, assim determinar a área e concluir a questão.

Calculando a distância entre as retas temos:

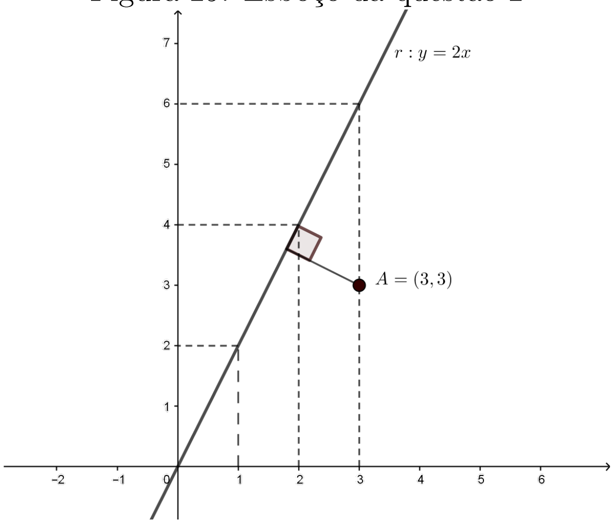
$$d(r,s) = 2r = \frac{|c-d|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|4-19|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3.$$

Logo $r = \frac{3}{2}$. Então a área do círculo é

$$A = \pi(\frac{3}{2})^2 = \frac{9\pi}{4}.$$

Questão 02. (ITA 2017, q. 5) Considere a reta $r: y = 2x$. Seja $A = (3,3)$ o vértice de um quadrado $ABCD$, cuja diagonal BD está contida em r. A área deste quadrado é:
Solução. Uma ilustração do problema pode ser vista no esboço a seguir

Figura 29: Esboço da questão 2



Fonte: Autor

Como o ponto A é vértice do quadrado, a diagonal BD está contida em r e sabendo que as diagonais de um quadrado se intersectam perpendicularmente em seus pontos médios, a distância do ponto A até a reta r é igual a metade da diagonal do quadrado. Calculando a distância temos:

$$d(p,r) = \frac{|2.3 - 1(3) - 0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Então a diagonal do quadrado é $D = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Agora é só aplicar o teorema de Pitágoras, para um triângulo retângulo isósceles com hipotenusa $D = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ e catetos L, lembrando que a área de um quadrado de lados iguais a L é $A = L^2$. Temos:

$$2L^2 = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 \Longrightarrow L^2 = \frac{18}{5}.$$

Concluindo a questão.

Questão 03. (ITA 2016, q. 2) Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a:

Solução. O primeiro número de 2 dígitos é 10, o de 3 dígitos é 100, e por ai vai. Note que o primeiro número de n dígitos é 10^{n-1}. A ideia aqui é montar uma inequação simultânea com x e utilizar álgebra para determinar um intervalo para $\sqrt[7]{x}$. Temos:

$$10^{2014} \leq x < 10^{2015}.$$

Note que é conveniente "cancelar"a base 10, para isso vamos utilizar a função logaritmo na base 10 a qual é crescente. Assim:

$$2014 \leq \log x < 2015.$$

Logo

$$\frac{2014}{7} \leq \frac{1}{7}\log x < \frac{2015}{7}.$$

Realizando uma divisão e deixando os valores aproximados:

$$287,71 \leq \log x^{\left(\frac{1}{7}\right)} = \log \sqrt[7]{x} < 287,86.$$

Voltando para a base 10 temos:

$$10^{287} < 10^{287,71} \leq \sqrt[7]{x} < 10^{287,86} < 10^{288}.$$

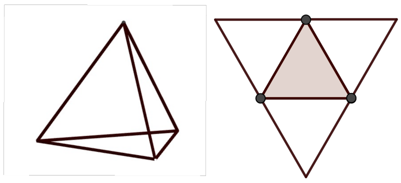
Como 10^{287} é o primeiro número que possui 288 algarismos, e 10^{288} é o primeiro a ter 289 algarismos, então a parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ possui 288 dígitos.

Questão 04. (ITA 2013, q. 24) Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

Solução. Essa questão precisa ser abordada em casos para que a contagem seja realizada. Vamos dividir a contagem pelo número de cores que será utilizada desde uma cor até 4 cores.

O desenho que segue é somente para ilustrar um tetraedro regular e sua planificação

Figura 30: Tetraedro e sua planificação



Fonte: Autor

Vejamos **Uma cor.** Temos 4 formas diferentes de pintar o tetraedro.
Duas cores. Vamos separar em dois casos:
Caso 1. Uma face de uma cor e as outras faces de outra:
Para essa situação, fixamos uma cor em uma face, temos 3 escolhas de cor para as faces restantes. Como existem 4 cores que podem ser fixadas, pelo princípio fundamental da contagem temos: $4.3 = 12$.
Caso 2. Duas faces de uma cor e as outras duas de outra:
Aqui podemos usar uma combinação $C_{4,2} = 6$.
Três cores. Usando três cores obviamente duas faces terão a mesma cor, ao fixar duas faces pra uma mesma cor, temos $3.2 = 6$ modos de colorir, porém é necessário tirar os casos repetidos através de uma rotação, como são duas faces, dividindo por 2, temos: $\frac{6}{2} = 3$ formas de pintar. Como podemos fixar em duas faces qualquer uma das 4 cores, a contagem fica em $4.3 = 12$.
Quatro cores. Podemos fixar duas cores sobrando apenas duas possibilidades para as outras, ou seja, 2.
Somando tudo existem $S = 4 + 12 + 6 + 12 + 2 = 36$ formas de distinguir os tetraedros regulares de acordo com as especificações da questão.

Questão 05. (ITA 2017, q. 27) Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + az = 5 \end{cases}$$

Solução. A ideia aqui é usar o teorema de Cramer, pois se o sistema linear é impossível, $D = 0$ e D_x,D_y ou $D_z \neq 0$. Portanto:

$$D = det \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{bmatrix} = 0.$$

$$\Longrightarrow 9a - 2a + a^2 + 6 = 0 \Longrightarrow a^2 + 7a + 6 = 0.$$

De tal modo que as raízes são: $a_1 = -1$ e $a_2 = -6$. Calculando então D_y:

$$D_y = det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & a \end{bmatrix} \neq 0.$$

$$\Longrightarrow 18 - a - 5 + 2a + 3 - 15 = a + 1 \neq 0 \Longrightarrow a \neq -1.$$

Logo, de acordo com as possibilidades podemos afirmar que $a = -6$.

Questão 06. (ITA 2018, q. 18) Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, ..., a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, calcule o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}.$$

Solução. Vamos inicialmente determinar os termos da matriz e a razão da PA. Veja por hipótese que $2n^2 + 5n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$S_1 = a_1 = 2(1)^2 + 5(1) = 7.$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \Longrightarrow 2(2)^2 + 5(2) = 7 + a_2 \Longrightarrow a_2 = 11.$$

Portanto temos uma progressão aritmética de razão $11 - 7 = 4$ e os termos que precisamos são $(7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39)$. Agora o problema se resume em calcular o determinante:

$$\det \begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ 33 & 35 & 39 \end{vmatrix}.$$

Embora determinantes de matrizes 3×3 sejam simples de resolver, os números dessa matriz estão muito grandes e tornaria os cálculos cansativos. Então vamos diminuir os valores das entradas da matriz fazendo combinações entre as colunas. Faremos inicialmente $c_2 = c_2 - c_1$ e $c_3 = c_3 - c_1$, teremos:

$$\det\begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ 33 & 35 & 39 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 19 & 4 & 8 \\ 33 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Agora faremos $c_3 = c_3 - 2c_2$ e então calculamos o determinante:

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 19 & 4 & 0 \\ 33 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7(4)(2) - 2(4)(19) = 56 - 152 = -96.$$

Questão 07. (ITA 2016, q. 4) Se $tgx = \sqrt{7}$ e $x \in [\pi, \dfrac{3\pi}{2}]$, então $\text{sen}(3x)$ é igual a:
Solução. Usando uma das relações trigonométricas, temos:

$$\sec^2(x) = tg^2(x) + 1 = (\sqrt{7})^2 + 1 = 8 \Longrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{8} \Longrightarrow \cos(x) = -\sqrt{\frac{1}{8}}.$$

Note que a solução é negativa, pois o ângulo pertence ao terceiro quadrante. Como

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Longrightarrow \text{sen}^2(x) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \Longrightarrow \text{sen}(x) = -\sqrt{\frac{7}{8}}.$$

O valor é negativo pois no terceiro quadrante o seno é negativo. Vimos que:

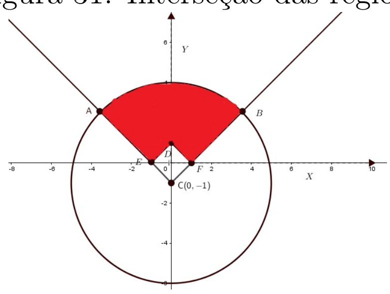
$$\text{sen}(3x) = 3\text{sen}(x) - 4\text{sen}^3(x).$$

Logo

$$\text{sen}(3x) = 3(-\sqrt{\frac{7}{8}}) - 4(-\sqrt{\frac{7}{8}})^3 = \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

Questão 08. (ITA 2017, q. 9) Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq ||x| - 1|\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 25\}$. A área da região $S_1 \cap S_2$ é:
Solução. Perceba que S_2 é a região delimitada pela circunferência de centro $C(0, -1)$ e raio $= 5$. A figura seguinte mostra um esboço das duas regiões

Figura 31: Interseção das regiões



Fonte: Autor

Assim a área da região $S_1 \cap S_2$ é a diferença entre a área do setor circular $\widehat{ACB}$ e do quadrado $CEDF$. Como todo quadrado é losango, vamos calcular a área dele usando a fórmula do losango, pois é possível perceber pela figura 30 que cada diagonal tem comprimento 2. Note também que o ângulo central $A\widehat{C}B$ é 90° devido $CEDF$ ser um quadrado. Então a área pedida é

$$A(S_1 \cap S_2) = \frac{\pi.5^2.90^\circ}{360^{\text{o}}} - \frac{2.2}{2} = \frac{25\pi}{4} - 2.$$

Questão 09. (ITA 2015, q. 3) Se $z = (\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{10}$, então o valor de $2\text{arcsen}(Re(z)) + 5\text{arctg}(2Im(z))$ é igual a:

Solução. Note que para resolver o problema é necessário descobrirmos o valor da parte real e da imaginária. Comecemos eliminando o número irracional do denominador:

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}.\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right) = \left(\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}\right) = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right).$$

A ideia agora é passar esse número complexo para a forma polar e depois usar a fórmula de De Moivre. Note que:

$$\cos\theta = \frac{-1}{2} < 0 \text{ e } \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$

Logo o ângulo pertence ao segundo quadrante, e assim a medida do ângulo vale 120° ou $\frac{2\pi}{3}$. Perceba também que o módulo do número complexo vale

$$\rho = \sqrt{(\frac{-1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Agora usando a fórmula de De Moivre tem-se que:

$$z = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{10} = 1^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\text{sen}\frac{20\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$$

Segue então que:

$$Re(z) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ e } Im(z) = \text{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto

$$2\text{arcsen}(Re(z)) + 5\text{arctg}(2Im(z)) = 2\text{arcsen}(\frac{-1}{2}) + 5\text{arctg}(2.\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\frac{-\pi}{6}) + 5(\frac{\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3}.$$

Questão 10. (ITA 2018, q. 29) Seja $p(x)$ um polinômio não nulo. Se $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ são divisores de $p(x)$, determine o menor grau possível de $p(x)$.

Solução. Dado $q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ através do teorema das raízes inteiras (pois $a_n = 1$) uma raíz inteira é 2 e a outra é 1, de simples verificação. Temos $(x-2)(x-1) = (x^2 - 3x + 2)$ e fatorando através do dispositivo de Briot-Ruffini concluímos que

$$q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2).$$

Dado $r(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, usando o mesmo argumento anterior concluímos que

$$r(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

Como $q(x)$ e $r(x)$ são divisores de $p(x)$, implica que o mesmo admite no mínimo 4 raízes que são as raízes duplas 1 e 2 de $q(x)$ e $r(x)$. Logo o menor grau possível é 4.

Questão 11. (ITA 2018, q. 19) São dadas duas caixas, uma delas contém três bolas brancas e duas pretas e a outra contém duas bolas brancas e uma preta. Retira-se, ao acaso, uma bola de cada caixa. Se P_1 é a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta e P_2 a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor, então $P_1 + P_2$ vale:
Solução. Para que aconteça P_1 temos 3 situações para contar. Tirar uma bola preta da caixa um e uma bola branca da caixa dois, tirar uma bola branca da caixa um e uma bola preta da caixa dois, ou tirar duas bolas pretas.
Probabilidade de tirar duas bolas pretas:

$$\frac{2}{5}.\frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

Probabilidade de tirar bola preta na caixa um e branca na caixa dois:

$$\frac{2}{5}.\frac{2}{3} = \frac{4}{15}.$$

Probabilidade de tirar bola branca na caixa um e preta na caixa dois:

$$\frac{3}{5}.\frac{1}{3} = \frac{3}{15}.$$

Somando todas as probabilidades temos:

$$P_1 = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{9}{15}.$$

Pro cálculo de P_2 basta contar a chance de escolher duas brancas e depois duas pretas
Probabilidade de tirar duas bolas brancas:

$$\frac{3}{5}.\frac{2}{3} = \frac{6}{15}.$$

Probabilidade de tirar duas bolas pretas:

$$\frac{2}{5}.\frac{1}{3}=\frac{2}{15}.$$

Somando todas as probabilidades temos:

$$P_2=\frac{6}{15}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}.$$

Para concluir

$$P_1+P_2=\frac{9}{15}+\frac{8}{15}=\frac{17}{15}.$$

Questão 12. (ITA 2014, q. 29) Três circunferências C_1, C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios r_1, r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. A soma dos comprimentos de C_1, C_2 e C_3 é igual a 26π cm. Determine:

a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1, C_2 e C_3.

b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

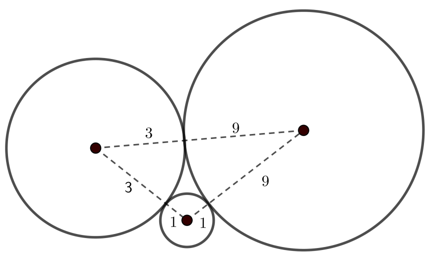
Solução. a): Como os raios estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$, temos a seguinte PG $(r_1, \frac{r_1}{3}, \frac{r_1}{9})$. Sabendo que o comprimento de uma circunferência é igual a $2\pi.r$ e que a soma dos comprimentos é igual a 26π cm, então

$$C_1+C_2+C_3=2\pi.r_1+2\pi.\frac{r_1}{3}+2\pi.\frac{r_1}{9}=26\pi.$$

$$r_1+\frac{r_1}{3}+\frac{r_1}{9}=13\Longrightarrow r_1=9.$$

Logo $r_1=9$, $r_2=3$ e $r_3=1$.

Figura 32: Circunferências tangentes entre si



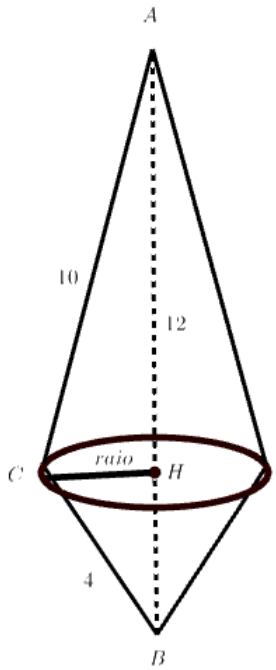
Fonte: Autor

A partir da figura anterior temos que a área do triângulo pode ser calculada através da fórmula de Heron, onde os lados são 12,10 e 4 e semiperímetro 13. Calculando a área:

$$A = \sqrt{13(13-12)(13-10)(13-4)} = \sqrt{39(9)} = 3\sqrt{39}.$$

Portanto a área do triângulo é $3\sqrt{39}cm^2$.
b): O sólido é a união de dois cones

Figura 33: União entre dois cones



Fonte: Autor

Note que $AB = 12$, $AH = h_1$ e $BH = h_2$. A área do triângulo $\triangle ACB$ possui como base 12 e altura igual ao raio da circunferência, como já sabemos o valor da área do triângulo, temos:

$$A(\triangle ACB) = 3\sqrt{39} = \frac{1}{2}12.r \Longrightarrow r = \frac{\sqrt{39}}{2}.$$

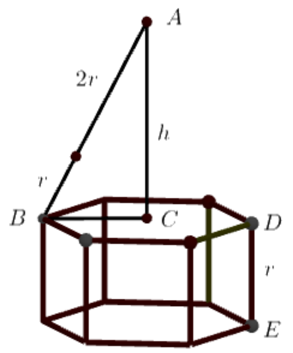
O volume total é a soma dos volumes dos cones. Portanto:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2(h_1+h_2) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\right)^2(12) = 39\pi cm^3.$$

Questão 13. (ITA 2014, q. 28) Seis esferas de mesmo raio r são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2r$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2r$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Solução. Para realizar o desenho numa prova seria algo muito trabalhoso, por isso a saída aqui é perceber que, ao ligar todos os vértices das esferas menores teremos um hexágono regular de lado $2r$. Podemos formar um prisma regular de base hexagonal, tal como o desenho a seguir.

Figura 34: Prisma hexagonal regular



Fonte: Autor

Onde A é o centro da esfera maior, C é o centro do hexágono, os vértices da base superior do prisma são os centros das esferas menores, tal qual o comprimento de cada aresta da base superior seja igual a $2r$ (pois representam a distância do centro de uma esfera menor para o centro de uma das esferas tangentes à mesma). Logo, a distância que queremos calcular é o comprimento do segmento AC somado com DE. Perceba também que o comprimento BC tem o mesmo tamanho das arestas do hexágono regular, pois um hexágono regular é a junção de 6 triângulos equiláteros. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACB, obtemos

$$(3r)^2 = h^2 + (2r)^2 \Longrightarrow h = r\sqrt{5}.$$

Para finalizar:

$$AC + DE = h + r = r\sqrt{5} + r = r(1 + \sqrt{5}).$$

Questão 14. (ITA 2017, q. 10) Sejam a,b,c,d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$;
II) $(\frac{a}{b})^{\log_d c}(\frac{b}{c})^{\log_d a}(\frac{c}{a})^{\log_d b} = 1$;
III) $\log_{ab}(bc) = \log_a c$.
Quais afirmações são verdadeiras?
Solução.
I): Tome $\log_c b = x$ e $\log_c a = y$. Isso significa, por definição de logaritmo que $c^x = b$ e $c^y = a$. Assim devemos mostrar que $a^x = b^y$. De fato

$$a^x = c^{xy} = (c^x)^y = b^y.$$

Portanto I) é verdadeira.
II): Tome $\log_d c = x$, $\log_d a = y$, $\log_d b = z$, tem-se que: $d^x = c$, $d^y = a$ e $d^z = b$. Substituindo temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c}\left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = \left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{c}\right)^{y}\left(\frac{c}{a}\right)^{z} = \left(\frac{d^y}{d^z}\right)^{x}\left(\frac{d^z}{d^x}\right)^{y}\left(\frac{d^x}{d^y}\right)^{z}.$$

$$\Longrightarrow (\frac{a}{b})^{\log_d c}(\frac{b}{c})^{\log_d a}(\frac{c}{a})^{\log_d b} = \frac{d^{xy}}{d^{xz}}\frac{d^{yz}}{d^{xy}}\frac{d^{xz}}{d^{yz}} = 1.$$

Portanto II) é verdadeira.
III): Suponha que $\log_{ab}(bc) = \log_a c$ seja verdade. Usando propriedades de logaritmos podemos fazer:

$$\log_{ab}(bc) = \frac{\log_a bc}{\log_a ab} = \frac{\log_a b + \log_a c}{\log_a a + \log_a b} = \frac{\log_a b + \log_a c}{1 + \log_a b}.$$

Usando nossa suposição temos:

$$\log_{ab}(bc) = \frac{\log_a b + \log_a c}{1 + \log_a b} = \log_a c.$$

Resolvendo temos:

$$\frac{\log_a b + \log_a c}{1 + \log_a b} = \log_a c \Longrightarrow \log_a b + \log_a c = \log_a c + \log_a b.\log_a c.$$

$$\Longrightarrow 1 = \log_a c \Longleftrightarrow a = c.$$

Ou seja, só é verdadeiro se, e somente se, tivermos $a = c$, logo basta $a \neq c$ e a afirmação torna-se falsa.
Portanto III) é falsa.

Questão 15. (ITA 2015, q. 7) Considere o polinômio p dado por

$$p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$$

com a, $b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de p, então o valor de $b - a$ é igual a:

Solução. Resolver esse problema pode ser feito caso usemos as relações de Girard. Em especial, que o produto das raízes de uma equação de 3° grau é igual a $-D/A$, onde $D = -16$ e $A = 2$. Como p admite raiz duplam então as raízes (x_1, x_2, x_3) são respectivamente iguais a $(x_1, x_1, 2)$. Pelas relações de Girard:

$$x_1x_2x_3 = x_1x_12 = 2(x_1)^2 = \frac{16}{2} = 8 \Longrightarrow x_1 = \pm 2.$$

Temos então que $x_1 = -2$, pois se $x_1 = 2$ ela não seria raiz dupla e sim tripla, o que não ocorre de acordo com a questão. Podemos então escrever p na sua forma fatorada:

$$p(x) = 2(x-2)(x+2)(x+2) = 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16.$$

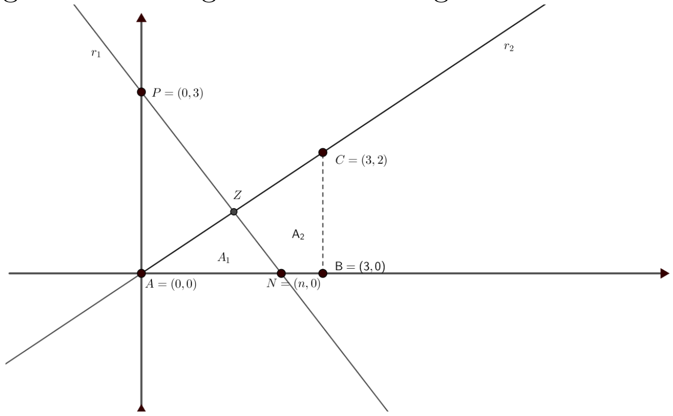
Podemos então concluir que $a = 4$ e $b = -8$, finalmente:

$$b - a = -8 - 4 = -12.$$

Questão 16. (ITA 2018, q. 30) No plano cartesiano são dados o ponto $P = (0, 3)$ e o triângulo de vértices $A = (0, 0)$,$B = (3, 0)$ e $C = (3, 2)$. Determine um ponto N sobre o eixo dos x de modo que a reta que passa por P e N divida o triângulo ABC em duas regiões de mesma área.

Solução. Observe a figura que ilustra a situação descrita, onde $A_1 = A_2$

Figura 35: Triângulo com duas regiões de mesma área



Fonte: Autor

Com os pontos $(0, 3)$ e $(n, 0)$ chegamos na equação da reta r_1, e com os pontos $(0, 0)$ e $(3, 2)$ chegamos na equação da reta r_2. Sendo assim as equações reduzidas das retas ficam sendo

$$r_1 : y = \frac{-3x}{n} + 3.$$

$$r_2 : y = \frac{2x}{3}.$$

Note que $r_1 \cap r_2 = Z$, e isso nos permitirá determinar as coordenadas do ponto Z, que são as soluções do sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3x}{n} + 3 \\ y = \dfrac{2x}{3} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chegamos em $Z = \left(\dfrac{9n}{9+2n}, \dfrac{6n}{9+2n}\right)$. A área de A_1 é metade da área do triângulo ABC, logo

$$A(A_1) = \frac{3}{2}ua.$$

Podemos também calcular a área de A_1 utilizando a base de comprimento n e altura $\dfrac{6n}{9+2n}$. Logo

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}(n.\frac{6n}{9+2n}) \Longrightarrow 2n^2 - 2n - 9 = 0.$$

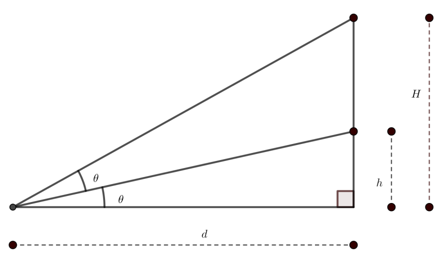
As raízes de $2n^2 - 2n - 9 = 0$ são $\dfrac{1 \pm \sqrt{19}}{2}$, como $n > 0$. Assim as coordenadas do ponto N são:

$$N = (\frac{1+\sqrt{19}}{2}, 0).$$

Questão 17. (ITA 1995, q. 20) Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois projéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sobre um ângulo $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$, atinge a torre a uma altura h. Se o segundo disparado a um ângulo 2θ, atinge-se a uma altura H, qual será a relação entre as duas alturas?

Solução. Vejamos a figura

Figura 36: Trajetória dos projéteis e alturas atingidas na torre



Fonte: Autor

Facilmente por trigonometria podemos concluir que

$$tg\theta = \frac{h}{d} \text{ e } tg2\theta = \frac{H}{d}.$$

Ademais, vimos no capítulo anterior que $tg2\theta = \dfrac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta}$, ou seja, temos:

$$H = d.tg2\theta = d.\frac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta} = d.\frac{2\dfrac{h}{d}}{1 - \dfrac{h^2}{d^2}} = \frac{2hd^2}{d^2 - h^2}.$$

Questão 18. (ITA 2017, q. 11) Sejam:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Considere $A = P^{-1}DP$. Calcule o valor de $\det(A^2 + A)$.
Solução. Usando propriedades de matrizes e determinantes temos:

$$A^2 = P^{-1}DPP^{-1}DP = P^{-1}D^2P \Longrightarrow A^2 + A = P^{-1}D^2P + P^{-1}DP = P^{-1}(D^2 + D)P$$

$$\Longrightarrow \det(A^2 + A) = \det(P^{-1}(D^2 + D)P) = \det(D^2 + D).$$

Note que:

$$D^2 + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Para finalizar

$$\det(D^2 + D) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 2.6.12 = 144.$$

Questão 19. (ITA 2013, q. 28) Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas $(y - x - 2)\left(y + \dfrac{x}{2} - 2\right) = 0$ e $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$.
Solução. Fatorando $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$ descobrimos que

$$x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9 \Longrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 3^2.$$

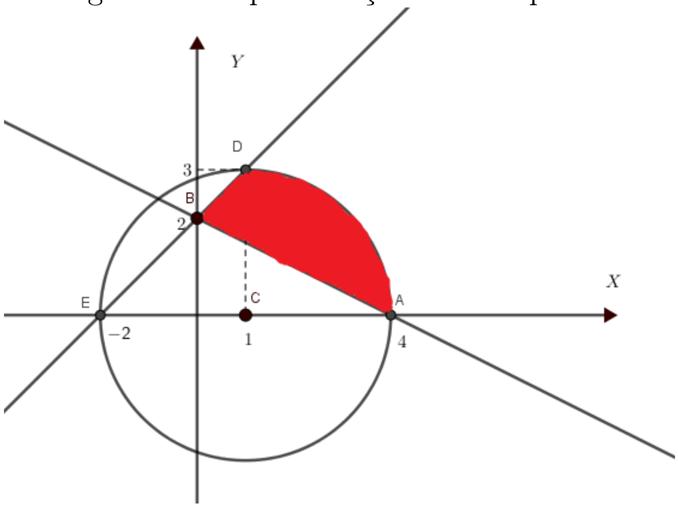
A equação de uma circunferência de raio 3 e Centro $C = (1, 0)$.

$$\text{Se } (y - x - 2)\left(y + \frac{x}{2} - 2\right) = 0,$$

$$\text{então } (y - x - 2) = 0 \text{ ou } \left(y + \frac{x}{2} - 2 = 0\right).$$

Que são duas retas que se intersectam no ponto $B = (0, 2)$. Um esboço da figura, com a área em destaque no primeiro quadrante, a seguir

Figura 37: Representação da área pedida



Fonte: Autor

Note que a área M pedida é igual soma da área do triângulo $\triangle CDE$ com o quarto de círculo, e depois subtraído da área do triângulo $\triangle EBA$. Logo:

$$M = \frac{3.3}{2} + \frac{1}{4}\pi.(3)^2 - \frac{6.2}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - 1\right) = \frac{3}{4}(3\pi - 2).$$

Questão 20. (ITA 2018, q. 8) As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é:

Obs: Vamos resolver essa questão de duas formas diferentes, usando raízes da unidade, e na outra solução usando extração de raízes n-ésimas.

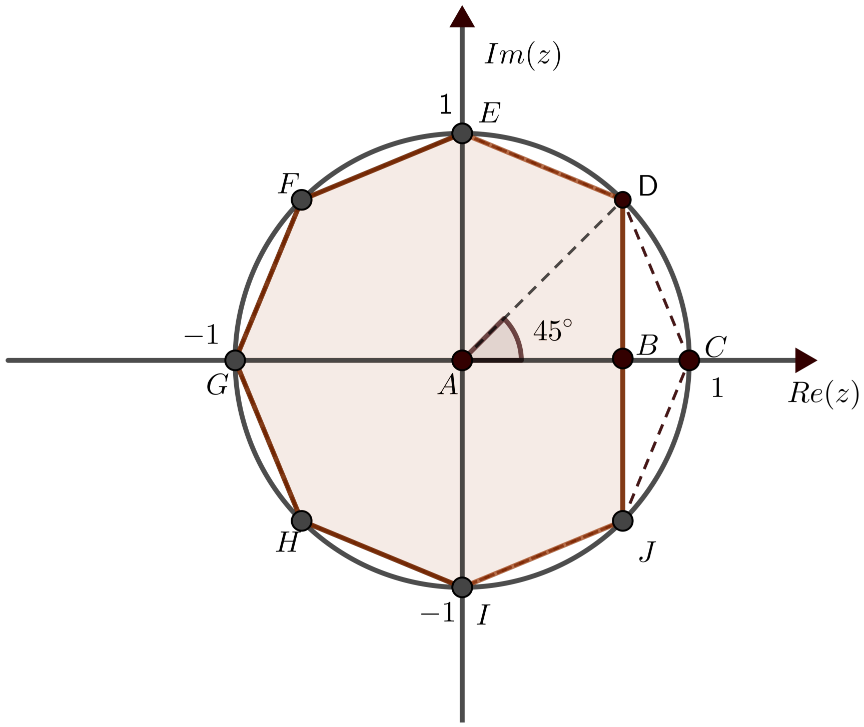
As duas soluções são válidas, porém na primeira os cálculos são reduzidos. Já na segunda solução, embora seja maior e exija que aluno saiba como calcular raízes n-ésimas, é um método natural de pensamento, fatorar e depois analisar a situação final.

Solução 1. Comece percebendo que

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 = \frac{z^8 - 1}{z - 1}$$

com $z \neq 1$. Sabemos de raízes da unidade que $z^8 = 1$ tem como solução os pontos que formam um octógono regular inscrito numa circunferência de raio 1 e centro na origem. Um esboço segue na figura a seguir. Note que 1 não faz parte da solução do nosso polinômio, então devemos desconsiderar esse vértice

Figura 38: Polígono convexo no plano complexo



Fonte: Autor

Primeiramente, por trigonometria, note que $AB = BD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. A área do octógono regular é igual a oito vezes a área do triângulo $\triangle ACD$, então

$$A = 8.\frac{1}{2}.1.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Área do triângulo } \triangle CDJ = \frac{1}{2}\sqrt{2}.(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

A área pedida é a subtração da área do octógono pela do triângulo $\triangle CDJ$:

$$\text{Área final} = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{3\sqrt{2} + 1}{2}.$$

Solução 2. Note que:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 = 1(1 + z) + z^2(1 + z) + z^4(1 + z) + z^6(1 + z).$$

$$\Longrightarrow (1+z)(1+z^2+z^4+z^6) = (1+z)(1+z^2+z^4(1+z^2)) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4) = 0.$$

Então nossas soluções decorrem de:

$$1+z=0 \Longrightarrow z=-1.$$

$$1+z^2=0 \Longrightarrow z=\pm i.$$

$$1+z^4=0 \Longrightarrow z^4=-1.$$

Para resolver essa última equação vamos usar as raízes complexas n-ésimas.

Temos que $|z|=1$ e $\theta=\pi$. Logo as raízes complexas quartas de z são:

$$\phi_l = \frac{\theta+2\pi.l}{4} = \frac{\theta}{4}+\frac{\pi.l}{2} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi.l}{2}.$$

Onde $l \in 0,1,2,3$. Portanto as raízes quartas z_0, z_1, z_2 e z_3 são obtidas assim:

$$\begin{aligned}
z_0 = &\quad 1(cos\frac{\pi}{4}+i\text{sen}\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i.\\
z_1 = &\quad 1(cos\frac{3\pi}{4}+i\text{sen}\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i.\\
z_2 = &\quad 1(cos\frac{5\pi}{4}+i\text{sen}\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.\\
z_3 = &\quad 1(cos\frac{7\pi}{4}+i\text{sen}\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.
\end{aligned}$$

Agora resta fazer um esboço do polígono e calcular a área de maneira semelhante à solução 1.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho se preocupou em ser um apoio para alunos e professores envolvidos no vestibular do Instituto Tecnológico da Aeronáutica, sejam como candidatos, docentes ou treineiros. Desde o princípio, o objetivo era separar conteúdos, analisar os mais importantes pelo grau de recorrência no vestibular, montar um pequeno compêndio com os principais resultados e abordar as questões dos últimos anos da forma mais simplificada possível, procurando sempre manter o elo com o capítulo sobre a teoria matemática.

A matemática possui uma vastidão de conteúdos e, por vezes, os alunos não têm experiência suficiente para filtrar o que precisa, de fato, saber para construir uma base sólida que lhe permita resolver questões. Por esse motivo, montamos uma tabela que constata o que é exigido na prova de matemática do vestibular ITA com frequência.

Para concluir, ressaltamos que nesse trabalho os resultados selecionados, não compreendem 100% de tudo que é indicado para estudar afim de fazer uma boa prova de matemática no vestibular do ITA, de modo que outros materiais devem sim ser utilizados como apoio. Nas referências bibliográficas é possível encontrar diversos livros e sites consultados para elaboração deste trabalho, e que possuem mais informações, demonstrações aqui omitidas e conteúdos matemáticos que não foram tratados nessa dissertação. É recomendável que o estudante ou professor procure alguns desses materiais para compreender as demonstrações aqui omitidas e assim complementar a sua formação.

REFERÊNCIAS

[1] ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria Elementar dos Números.** 2ª ed. São Paulo: Nobel, 1985.

[2] CARMO, Manfredo. P. **Trigonometria e Números Complexos.** 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[3] DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF; L. **Geometria analítica.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

[4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, **Fundamentos de Matemática Elementar.** Geometria Espacial v. 10. 6ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[5] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, **Fundamentos de Matemática Elementar.** Geometria Plana v. 9. 8ª ed.. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[6] HEFEZ, A. **Aritmética**. 1ª ed. 2ª impressão. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

[7] HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C.S. **Introdução à algebra linear.** 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016 (Coleção PROFMAT).

[8] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e equações algébricas.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

[9] <http://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao_comentada/ita.asp>. Acesso em 19 de Maio de 2018.

[10] <http://www.fariasbrito.com.br/itaime/>. Acesso em 19 de Maio de 2018.

[11] <http://inep.gov.br/indice-geral-de-cursos-igc->. Acesso em 08 de Setembro de 2018.

[12] <http://www.ita.br/>. Acesso em 10 de Maio de 2018.

[13] <http://www.obaricentrodamente.com/2015/09/formulas-para-area-de-um-triangulo.html>. Acesso em 10 de Julho de 2018.

[14] <http://www.vestibular.ita.br/provas.htm>. Acesso em 5 de Maio de 2018.

[15] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Complexos, Polinômios, Equações. v. 6. 6ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

[16] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Trigonometria. v. 3. 7ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

[17] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Logaritmos v. 2. 9ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

[18] IEZZI, Gelson; MURAkAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar.** Funções v. 1. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

[19] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

[20] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta.** 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT).

[21] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

[22] NETTO, Sergio Lima, **A Matemática no Vestibular do ITA.** 1ª ed.Fortaleza: VestSeller Editora, 2013

[23] SANTOS, Wladir dos. **Ensino Modular: Uma Revolução Brasileira na Educação**. Campinas. São Paulo, Edilap, 1994.