



Universidade Estadual do Piauí  
Pró-Reitoria de Pesquisa e  
Pós-Graduação–PROP  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



## O uso da Trigonometria como uma ferramenta para a resolução de problemas reais

Joyce do Nascimento Oliveira

Teresina  
2018

Joyce do Nascimento Oliveira

# O uso da Trigonometria como uma ferramenta para a resolução de problemas reais

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao programa de mestrado profissional em matemática (PROFMAT) em rede nacional da Universidade Estadual do Piauí - Campus Poeta Torquato Neto, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.  
Área de concentração: Matemática no Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva

Teresina  
2018

O48u Oliveira, Joyce do Nascimento  
O uso da Trigonometria como uma ferramenta para a  
resolução de problemas reais / Joyce do Nascimento Oliveira. –  
2018.  
88 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do  
Piauí – UESPI, Mestrado Profissional em Matemática  
PROFMAT, 2018.  
“Orientador Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva.”

1. Aplicações. 2. Aprendizagem. 3. Ensino. 4. Trigonometria.  
I. Título.

CDD: 516.2

**JOYCE DO NASCIMENTO OLIVEIRA**

**O USO DA TRIGONOMETRIA COMO UMA FERRAMENTA PARA A  
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS REAIS.**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática  
do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de  
MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA  
Aprovado por:

*Afonso Norberto da Silva*

---

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Presidente e Examinador  
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

*Arnaldo Silva Brito*

---

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito - Examinador  
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

*Ezequias Matos Esteves*

---

Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves - Examinador  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI

TERESINA  
Outubro/2018

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Joyce do Nascimento Oliveira**, graduou-se em Matemática pela UFPI - CMRV, concluiu Especialização em Docência no Ensino Superior pelo ISEPRO e depois o curso de Mestrado PROFMAT/UESPI, bolsista pela CAPES. É professora efetiva da rede Estadual de ensino no Piauí.

# Dedicatória

Dedico este trabalho, bem como todas as minhas demais conquistas, aos meus pais, pelo apoio, incentivo e carinho.

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado saúde e forças para superar as dificuldades.

Aos meus pais e irmãos que sempre estiveram ao meu lado, me incentivando a continuar.

A meu namorado (Diogenes Rocha) pela compreensão e incentivo.

Aos meus amigos Paulo Junior (PJ) e Anna Karla, pelo companheirismo em nossas viagens e nos estudos.

Ao meu amigo Esmar e minha amiga Nakya e sua família (Sr. Antônio, Dona Francisca, Naryelle, Nayara, Henrique, Luis e Nigel) que me acolheram em Teresina e fizeram eu me sentir em casa.

Ao meu amigo Raphael Ramon, pelo incentivo para vim a Teresina cursar o mestrado e continuar.

Um agradecimento especial ao meu orientador, AFONSO NORBERTO, por toda paciência, compreensão e ensinamentos.

Aos professores do PROFMAT/UESPI pelos conhecimentos e pelas orientações dadas.

À CAPES, pela ajuda financeira.

Por fim, agradeço à todos os meus colegas de mestrado, pelo companheirismo.

"Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real".

(Nicolai Lobachevsky)

## Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar aplicações da Trigonometria em diversas áreas, como Astronomia, Engenharia, Topografia, dentre outras. Apesar da trigonometria ter inúmeras aplicações, não são facilmente encontradas as que enfatizam ideias e conceitos trigonométricos nos cálculos. Uma grande parte das aplicações mostram apenas fórmulas prontas. A proposta deste trabalho é apresentar aplicações mostrando em seus desenvolvimentos, o momento em que foi utilizado determinado conceito trigonométrico, tendo em vista que, para tornar a aprendizagem mais significativa para os alunos é necessário que eles saibam de onde vem cada resultado. Para os professores, essas aplicações poderão servir de base para o aprofundamento e podem ser aplicadas em turmas de Ensino Médio e algumas até em turmas de Ensino Fundamental.

**Palavras-chave:** Aplicações. Aprendizagem. Ensino. Trigonometria.

## Abstract

This present work aims to present applications of Trigonometry in several areas, such as Astronomy, Engineering, Topography, among others. Although trigonometry has many applications, those that emphasize trigonometric ideas and concepts in calculations are not easily found. A great part of applications shows only-made formulas. The goal of this work is to present applications demonstrating their development moment when a certain trigonometric concept was used since to make learning more meaningful for students, it is necessary that they know where each result comes from. For the professors, these applications can be used as a basis for deepening and can even be applied in high school classes and even in elementary school classes.

**Keywords:** Applications. Learning. Teaching. Trigonometry.

## Lista de Figuras

1	Região convexa do ângulo . . . . .	18
2	Região côncava do ângulo . . . . .	18
3	O grau como unidade de medida de ângulos . . . . .	19
4	Região côncava do ângulo . . . . .	19
5	Triângulos semelhantes . . . . .	20
6	Triângulos semelhantes pelo Caso LLL . . . . .	21
7	Ponto $B''$ . . . . .	21
8	Ponto $C''$ . . . . .	22
9	Os pontos $B''$ , $C''$ e $D$ . . . . .	23
10	Triângulos semelhantes pelo Caso AA . . . . .	24
11	O ponto $X$ . . . . .	24
12	O ponto $Y$ . . . . .	25
13	Os pontos $X$ , $Y$ e $Z$ . . . . .	25
14	Triângulos semelhantes pelo Caso LAL . . . . .	26
15	O ponto $X$ no triângulo $ABC$ . . . . .	27
16	Os pontos $X$ e $Y$ no triângulo $ABC$ . . . . .	27
17	Os pontos $X$ , $Y$ e $Z$ no triângulo $ABC$ . . . . .	28
18	Ângulo $\alpha$ . . . . .	29
19	As perpendiculares . . . . .	30
20	Ângulo agudo . . . . .	31
21	Construção da perpendicular . . . . .	32
22	Triângulo retângulo . . . . .	33
23	Relação entre circunferência unitária e reta real . . . . .	35
24	A circunferência e os valores de seno e cosseno . . . . .	36
25	Simetria da função de Euler . . . . .	37
26	Triângulo retângulo . . . . .	41
27	O triângulo formado pelos pontos $P, P_1$ e $I$ . . . . .	43
28	Os pontos $A, B$ e $P$ . . . . .	44
29	Esquema do problema . . . . .	44
30	Cidade de Alexandria. . . . .	45
31	A ideia de Eratóstenes . . . . .	47
32	Um terreno inclinado . . . . .	48
33	Elementos necessários para o cálculo da diferença de nível ente $A$ e $B$ . . . . .	49

34	O Método de Triangulação . . . . .	50
35	O processo de nivelamento trigonométrico . . . . .	51
36	Posição da Lua ao nascer ou ao pôr do Sol quando a Lua está em quarto crescente ou minguante . . . . .	52
37	O triângulo formado pela Terra, Lua e Sol . . . . .	52
38	Ângulo pelo qual vemos o Sol e a Lua . . . . .	54
39	Eclipse total do Sol . . . . .	54
40	Lua atravessando o cone de sombra da Terra . . . . .	55
41	Lua, Terra e Sol em um eclipse lunar . . . . .	55
42	Inclinação transversal de rampas . . . . .	59
43	Esboço da rampa I . . . . .	59
44	Esboço da rampa II . . . . .	59
45	Modelo de uma tesoura inglesa no plano . . . . .	60
46	Tesoura Inglesa ou Howe . . . . .	60
47	Esquema da tesoura utilizada na aplicação . . . . .	61
48	Esquema do telhado . . . . .	61
49	A inclinação I de um telhado . . . . .	62
50	Inclinação do telhado . . . . .	63
51	O banzo superior da tesoura . . . . .	63
52	Esquema de metade da tesoura evidenciando as verticais e diagonais . . . . .	64
53	A primeira vertical . . . . .	65
54	A segunda vertical . . . . .	66
55	A primeira diagonal . . . . .	67
56	A segunda diagonal . . . . .	67
57	Esquema da tesoura com todos os elementos necessários para o cálculo . . . . .	68
58	Manipuladores na indústria . . . . .	69
59	Elos e juntas . . . . .	69
60	Junta prismática . . . . .	70
61	Junta Rotacional . . . . .	70
62	Junta Esférica . . . . .	70
63	Junta Cilíndrica . . . . .	71
64	Junta Planar . . . . .	71
65	Junta tipo fuso . . . . .	71
66	Representação esquemática das juntas . . . . .	72
67	Manipulador RR em movimento plano vertical . . . . .	73

68	Medidas envolvidas na movimentação de um manipulador RR . . . . .	73
69	Geometria de um manipulador . . . . .	74
70	Junta 2 voltada para baixo . . . . .	76
71	Junta 2 voltada para cima . . . . .	76
72	Ângulos do manipulador RR para a determinação da cinemática inversa	77
73	Praia de Atalaia - Luis Correia . . . . .	78
74	O ponto de onde foram feitas as previsões . . . . .	79
75	Os pontos de acordo com as previsões . . . . .	80
76	Valores reais e os valores depois das aproximações . . . . .	81
77	Função f . . . . .	83

## Lista de Tabelas

1	Dimensionamento de rampas . . . . .	58
2	Dimensionamento de rampas para situações excepcionais . . . . .	58
3	As previsões feitas pelo CHM da altura das marés . . . . .	79
4	Horários depois das aproximações . . . . .	80
5	Valores que serão utilizados no modelo . . . . .	81
6	Comparação entre os dados . . . . .	84

## **Lista de Siglas**

**CHM** Centro de Hidrografia da Marinha

**CMRV** Campus Ministro Reis Velloso

**ISEPRO** Instituto de Educação Superior Programus

**NBR** Norma Brasileira aprovada pela Associação Brasileira de Normas Técnicas

**UFPI** Universidade Federal do Piauí

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>1 Fundamentação Teórica</b>	<b>18</b>
1.1 Ângulo . . . . .	18
1.2 Semelhança de triângulos . . . . .	20
1.2.1 Casos de semelhança de triângulos . . . . .	20
1.3 Funções trigonométricas de um ângulo agudo . . . . .	29
1.4 Funções trigonométricas de ângulos quaisquer . . . . .	34
1.5 Lei dos Senos . . . . .	41
<b>2 Aplicações</b>	<b>43</b>
2.1 Calcular a distância entre dois pontos inacessíveis no plano horizontal . . . . .	43
2.2 Determinar o comprimento da circunferência e do raio da Terra . . . . .	45
2.3 Nivelamento trigonométrico . . . . .	48
2.4 Medir a distância da Terra ao Sol e da Terra a Lua . . . . .	51
2.5 Construção de rampas de acessibilidade . . . . .	57
2.6 Construção de uma tesoura inglesa ou howe de um telhado . . . . .	60
2.7 Movimentação de um manipulador RR no plano . . . . .	69
2.8 Altura das ondas no litoral piauiense . . . . .	78
<b>3 Considerações Finais</b>	<b>85</b>

## Introdução

A Trigonometria teve suas primícias na Matemática grega. Ela surgiu das necessidades da Astronomia em prever efemérides celestes, para calcular o tempo, e para ser utilizada na Navegação e Geografia. Os estudos de trigonometria eram voltados para a Trigonometria Esférica, que estuda triângulos na superfície de uma esfera. Entretanto, para avançar na trigonometria esférica, tornou-se necessário o desenvolvimento da Trigonometria Plana.

Tendo em vista que a trigonometria surgiu de necessidades do cotidiano, por que o ensino dela está distante da realidade?

Muitos professores do ensino básico que já lecionam a algum tempo, prendem-se a rotina de ensinar apenas aqueles conteúdos que se sentem mais seguros e repetir as mesmas atividades que eles já sabem como resolver. Muitos adquirem sua renda lecionando em mais de uma escola e dispõem de pouco tempo para estudar. Por isso, existe uma necessidade de se aperfeiçoar esses professores com o intuito de se adaptarem as condições atuais de ensino, objetivando uma preparação melhor para os jovens.

Em relação a postura do professor dentro do processo de ensino e aprendizagem, em [8], p.162, é dito: "Para conscientizar-se da relevância do seu trabalho e, conseqüentemente, executá-lo com entusiasmo, é bom que o professor tenha, e procure transmitir a seus alunos, uma noção do que significa a matéria ensinada".

Esse olhar reafirma a ideia de que o professor precisa tornar o conteúdo significativo para o aluno, deixando de lado aquele processo mecânico de apresentar aos alunos fórmulas prontas para serem aplicadas em valores sem significância. Outro fato que merece ser enfatizado é que quando o professor sabe a relevância desse conhecimento, torna o ambiente de ensino aprendizagem mais prazeroso tanto para ele, quanto para os alunos.

De acordo com [16], p.2, "A verdadeira aprendizagem se dá quando o aluno (re)constrói o conhecimento e forma conceitos sólidos sobre o mundo, o que vai possibilitá-lo agir e reagir diante da realidade". Assim, um ensino que tenha em vista a aprendizagem significativa tem que propor ao aluno situações que possibilitem a reconstrução dos conhecimentos já adquiridos e a interligação deles.

Dessa forma, o professor deve apresentar aos alunos situações que o façam repensar a utilidade dos conceitos ensinados, bem como instigar o aluno a refletir sobre outras situações em que aquele conceito pode ser aplicado.

O presente trabalho surgiu da motivação de apresentar aplicações que possam despertar o interesse, exibir a eficiência e utilidade da trigonometria.

Uma grande parte das aplicações trigonométricas que são apresentadas nos livros didáticos, trazem fórmulas prontas e não mostram o desenrolar do pensamento matemático envolvido. As aplicações que serão apresentadas neste trabalho, tem como diferencial mostrarem em seus desenvolvimentos o momento em que os conceitos trigonométricos foram utilizados e o propósito da utilização de cada um.

Neste trabalho, a princípio, serão apresentados os conceitos, propriedades, e teoremas que servirão de base para as aplicações e, logo em seguida, serão apresentadas aplicações nas áreas de Engenharia, Topografia, Astronomia, dentre outras.

Uma visão geral das aplicações:

- **"Calcular a distância entre dois pontos inacessíveis no plano horizontal"** que é baseada em [10], apresenta um modelo matemático para calcular a distância entre dois lugares no plano que por algum obstáculo não é possível o acesso. Essa aplicação pode ser utilizada pelo professor de maneira prática, basta que ele procure em sua localidade dois lugares com essa característica.
- **"Determinar o comprimento da circunferência e do raio da Terra" e "Medir a distância da Terra ao Sol e da Terra a Lua "** que estão de acordo com [2] e [3], apresentam o aspecto histórico dos pensamentos trigonométricos, mostrando as sutilezas no pensamento de Eratóstenes <sup>1</sup> e Aristarco <sup>2</sup> ao buscarem essas medidas. Também, destaca-se nessas aplicações a precisão dos instrumentos que possuímos nos dias atuais.
- **"Nivelamento Trigonométrico"** que é baseada em [27], apresenta o processo para descobrir a diferença entre dois níveis diferentes de um terreno.
- **"Construção de rampas de acessibilidade"** que é baseada em [15] e [1], apresenta como a ideia de tangente está implícita no cálculo da inclinação de uma rampa de acesso que esteja de acordo com a NBR 9050/2015 e explica o porquê dessa ideia ficar somente implícita.
- **"Construção de uma tesoura inglesa ou howe de um telhado"** que é baseada em [6], apresenta um modelo matemático que determina a quantidade de

---

<sup>1</sup>Matemático grego que nasceu na cidade de Cyrene (por volta do ano 276 a.C.).

<sup>2</sup>Astrônomo e Matemático grego que nasceu na cidade de Samos (por volta de 320 a.C.).

madeira utilizada na construção de uma tesoura inglesa. É importante salientar que conceitos bem simples são utilizados e que essa aplicação pode ser mostrada para turmas de Ensino Fundamental.

- **"Movimentação de um manipulador  $RR^3$  no plano"** que é baseada em [5], evidencia a matemática que está por trás de um movimento que aparenta ser tão simples, como posicionar um braço robótico em um determinado lugar, e também nos faz refletir sobre a matemática envolvida em uma linha de produção em larga escala que utilizam manipuladores no processo.
- **"Altura das ondas no litoral piauiense"** que é baseada em [12], apresenta uma adaptação com dados locais. Essa aplicação pode ser adaptada para um ponto do litoral mais próximo de onde o professor ensina.

---

<sup>3</sup>É um manipulador que possui duas juntas Rotativas Rotacionais.

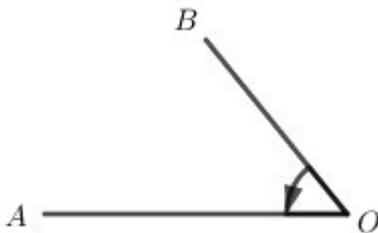
# 1 Fundamentação Teórica

Neste capítulo apresentaremos definições, teoremas, propriedades e exemplos em conformidade com as referências [4], [9], [10], [11], [13] e que servirão de base para as aplicações que serão apresentadas no trabalho.

## 1.1 Ângulo

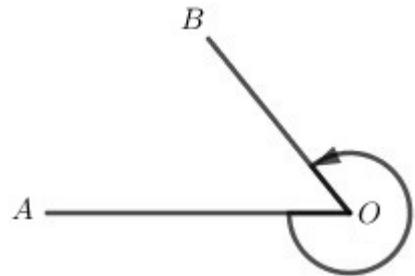
Dadas as semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , notamos que existem duas regiões do plano limitadas por essas semirretas, qualquer uma dessas duas regiões (região convexa e região côncava) pode ser considerada o ângulo formado por elas, o contexto é que deixará claro a qual nos referimos. As semirretas são os lados do ângulo e a origem comum recebe o nome de vértice.

Figura 1: Região convexa do ângulo



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 2: Região côncava do ângulo

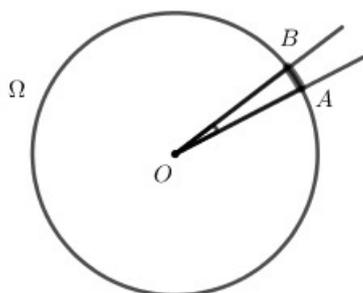


Fonte: Elaborada pela autora

Podemos representar os ângulos acima por  $A\hat{O}B$  e  $B\hat{O}A$ . Utilizando essa notação, a letra que corresponde ao vértice deve aparecer entre as outras duas. Se tivermos ângulos que possuem vértices distintos, podemos utilizar apenas a letra que designa o vértice para representá-lo.

Com o intuito de associar a todo ângulo uma medida da região do plano ocupada por ele, dividimos um círculo  $\Omega$  de centro  $O$  em 360 arcos iguais e tomamos os extremos  $A$  e  $B$  de um desses arcos. Definimos 1 grau, como a medida do ângulo convexo formado pelas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .

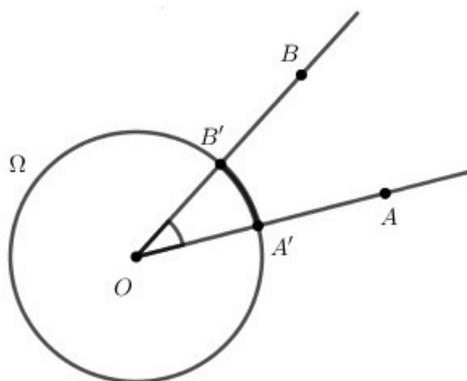
Figura 3: O grau como unidade de medida de ângulos



Fonte: Elaborada pela autora

Denotamos: Medida  $A\hat{O}B = 1^\circ$ . Como consequência da definição de grau, percebemos que um círculo completo corresponde a  $360^\circ$ . Considerando o grau como unidade de medida, podemos medir um ângulo qualquer  $A\hat{O}B$ , fazendo a seguinte construção: Traçamos um círculo  $\Omega$  com centro em O e marcamos os pontos  $A'$  e  $B'$  em que  $\Omega$  intersecta  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  de  $A\hat{O}B$ . Logo após, vemos qual fração do comprimento total de  $\Omega$  o arco  $A'B'$  representa. A medida de  $A\hat{O}B$  é essa fração de  $360^\circ$ .

Figura 4: Região côncava do ângulo

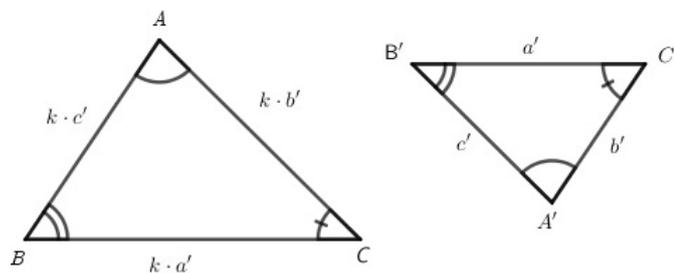


Fonte: Elaborada pela autora.

## 1.2 Semelhança de triângulos

Dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são ditos semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices  $A, B, C$  e  $A', B', C'$ , de modo que os ângulos em vértices correspondentes são congruentes e existe um número  $k$ , real positivo, tal que a razão entre os comprimentos dos lados correspondentes é sempre essa mesma medida.

Figura 5: Triângulos semelhantes



Fonte: Elaborada pela autora com base em [13]

Os triângulos da Figura 5 são semelhantes, pois todas as condições são atendidas.

- Correspondência entre os vértices:

$$A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B' \text{ e } C \leftrightarrow C'.$$

- Correspondência entre os ângulos:

$$\hat{A} \cong \hat{A}', \hat{B} \cong \hat{B}' \text{ e } \hat{C} \cong \hat{C}'$$

- Razão entre os comprimentos dos lados correspondentes

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k, \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \text{ e } \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k.$$

### 1.2.1 Casos de semelhança de triângulos

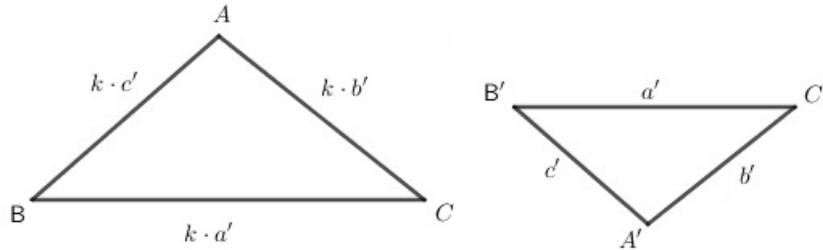
Os casos de semelhança de triângulos são proposições que apresentam condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

#### 1º Caso: LLL (Lado - Lado - Lado)

Se dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  no plano, apresentarem uma correspondência biunívoca entre os vértices  $A, B, C$  e  $A', B', C'$ , de modo a possuírem a razão entre

os comprimentos dos lados correspondentes sendo a mesma medida, podemos afirmar que esses triângulos são semelhantes.

Figura 6: Triângulos semelhantes pelo Caso LLL



Fonte: Elaborada pela autora com base em [13]

Na Figura 6 os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes.

Note,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k.$$

*Demonstração:*

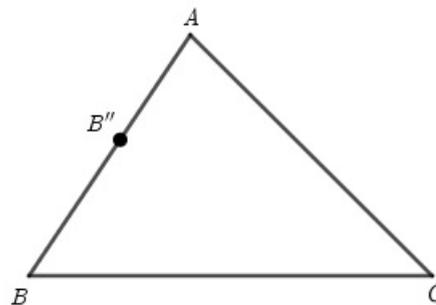
Seja  $k$  o valor das razões:  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ ,  $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$  e  $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ .

Logo,

$$\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}, \overline{BC} = k \cdot \overline{B'C'} \text{ e } \overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'}.$$

Suponha, sem perda de generalidade,  $k > 1$  e marque  $B'' \in AB$ , tal que  $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ .

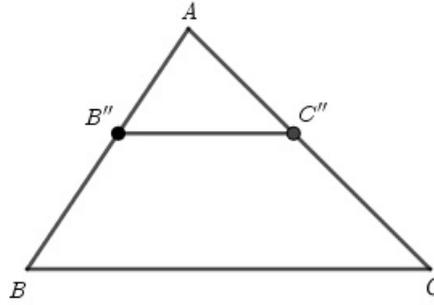
Figura 7: Ponto  $B''$



Fonte: Elaborada pela autora com base em [13]

Considere  $C''$  o ponto de interseção entre  $AC$  e a reta paralela ao lado  $BC$  que passa por  $B''$ .

Figura 8: Ponto  $C''$



Fonte: Elaborada pela autora com base em [13]

Pelo teorema de Thales, temos

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB''}}{\overline{AB}}$$

Como  $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$ .

Segue,

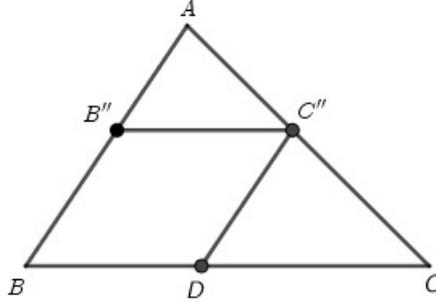
$$\frac{\overline{AB''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{k \cdot \overline{A'B'}} = \frac{1}{k}$$

Daí,

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \overline{AC''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{k} \cdot k \cdot \overline{A'C'} = \overline{A'C'} \Rightarrow \overline{AC''} = \overline{A'C'}$$

Em seguida, considere  $D$  o ponto de interseção entre o lado  $BC$  e a reta paralela ao lado  $AB$  que passa por  $C''$ .

Figura 9: Os pontos  $B''$ ,  $C''$  e  $D$



Fonte: [13]

Observe que  $B''BDC''$  é um paralelogramo. Aplicando novamente o teorema de Thales, temos

$$\frac{\overline{B''C''}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k}$$

Segue,

$$\overline{B''C''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{k} \cdot k \cdot \overline{B'C'} = \overline{B'C'}$$

Logo,

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'}, \overline{AC''} = \overline{A'C'} \text{ e } \overline{B''C''} = \overline{B'C'}.$$

Pelo caso LLL de Congruência entre triângulos,  $AB''C''$  e  $A'B'C'$  são congruentes.

Portanto, temos

$$\hat{A} \cong \hat{B}AC \cong \hat{B}''AC'' \cong \hat{B}'A'C' \cong \hat{A}'$$

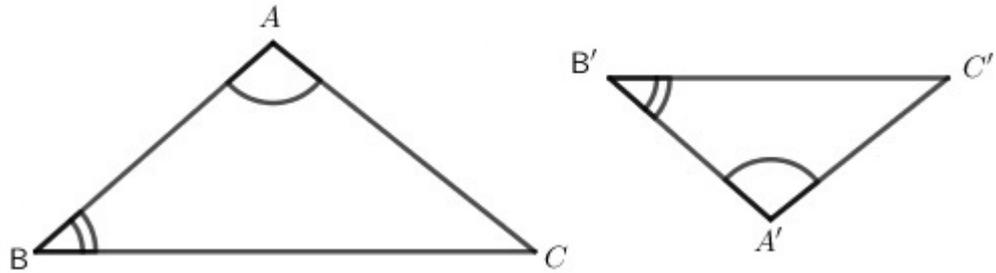
$$\hat{B} \cong \hat{A}BC \cong \hat{A}B''C'' \cong \hat{A}'B'C' \cong \hat{B}'$$

$$\hat{C} \cong \hat{A}CB \cong \hat{A}C''B'' \cong \hat{A}'C'B' \cong \hat{C}'.$$

## 2º Caso: AA (Ângulo - Ângulo)

Se dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  no plano, apresentarem uma correspondência biunívoca entre os vértices  $A, B, C$  e  $A', B', C'$ , de modo que dois ângulos em vértices correspondentes são congruentes, podemos afirmar que esses triângulos são semelhantes.

Figura 10: Triângulos semelhantes pelo Caso AA



Fonte: Elaborada pela autora com base em [13]

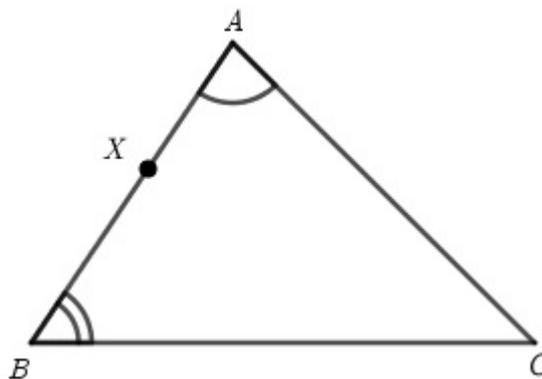
Na Figura 10 os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, pois  $\hat{A} \cong \hat{A}'$  e  $\hat{B} \cong \hat{B}'$ .

*Demonstração:*

Suponha, sem perda de generalidade, que  $\overline{A'B'} < \overline{AB}$ .

Tome um ponto  $X \in AB$  tal que  $\overline{AX} = \overline{A'B'}$ .

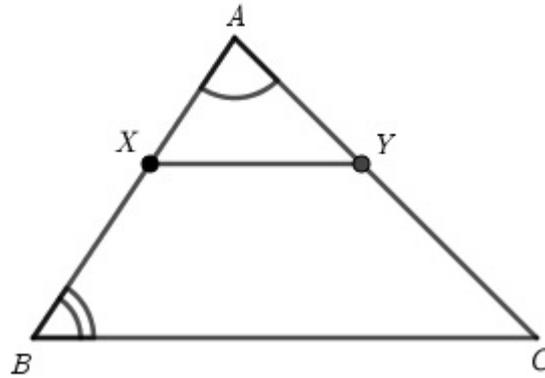
Figura 11: O ponto  $X$



Fonte: Elaborada pela autora

Considere  $Y$  sendo a interseção entre o lado  $AC$  e a reta paralela ao lado  $BC$  passando por  $X$ .

Figura 12: O ponto Y

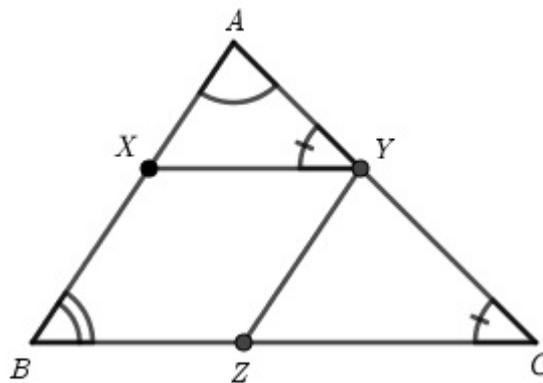


Fonte: Elaborada pela autora

Logo, os triângulos  $A'B'C'$  e  $AXY$  são congruentes pelo caso ALA, pois  $\overline{AX} = \overline{A'B'}$ ,  $\hat{A} \cong \hat{A}'$  (por hipótese),  $\hat{B} \cong \hat{B}'$  (por hipótese) e  $\hat{B} \cong \hat{CBA} \cong \hat{YXA}$ .

Em seguida, tome  $Z$  sendo a interseção entre o lado  $BC$  e a reta paralela ao lado  $AB$  que passa por  $Y$ .

Figura 13: Os pontos X, Y e Z



Fonte: Elaborada pela autora

Logo, pelo teorema de Thales, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{XY}}$$

Como

$$\overline{AX} = \overline{A'B'}, \overline{AY} = \overline{A'C'} \text{ e } \overline{XY} = \overline{B'C'}.$$

Segue,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

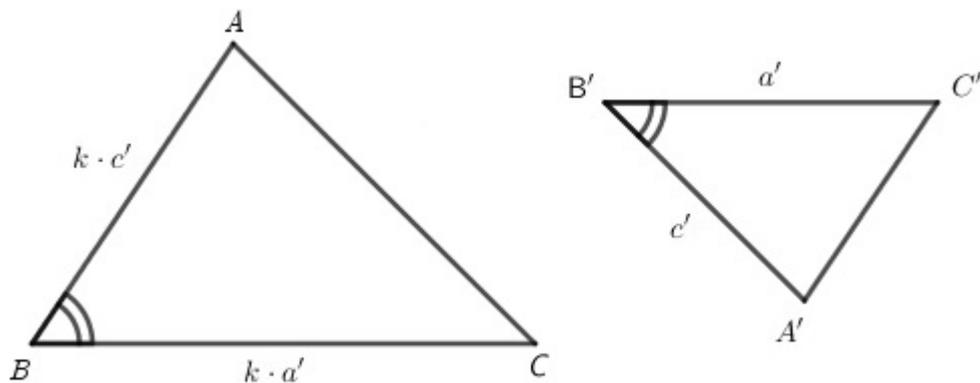
Portanto,

$$\hat{C} \cong \hat{C'} \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

### 3º Caso: LAL (Lado - Ângulo - Lado)

Se dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  no plano, apresentarem uma correspondência biunívoca entre os vértices  $A, B, C$  e  $A', B', C'$ , de modo que a razão entre os comprimentos de dois lados e seus correspondentes seja a mesma medida e o ângulo presente no vértice comum a esses dois lados seja congruente ao seu correspondente, podemos afirmar que esses triângulos são semelhantes.

Figura 14: Triângulos semelhantes pelo Caso LAL



Fonte: Elaborada pela autora com base em [13]

Na Figura 14 os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, pois  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$  e  $\hat{A} \cong \hat{A'}$ .

*Demonstração:*

Seja  $k$  o valor das razões  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$  e  $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ .

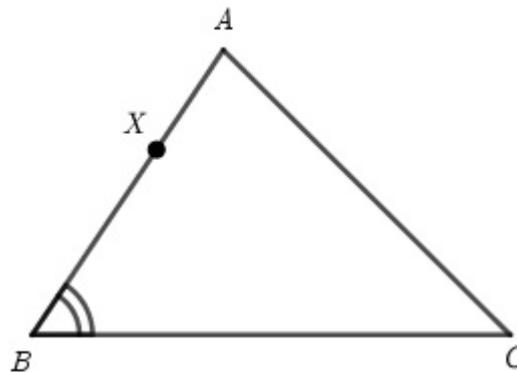
Logo,

$$\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} = k \cdot \overline{B'C'}$$

Suponha, sem perda de generalidade,  $k > 1$  e marque  $X \in AB$  tal que  $\overline{XB} = \overline{A'B'}$ .

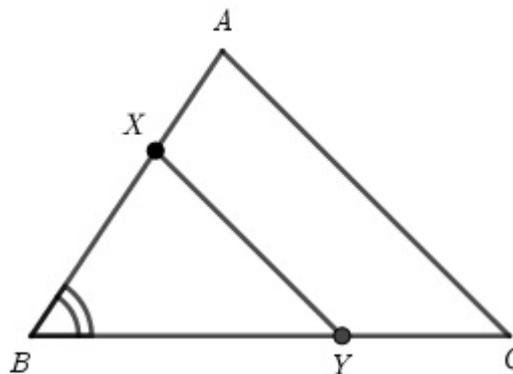
Figura 15: O ponto  $X$  no triângulo  $ABC$



Fonte: Elaborada pela autora

Considere  $Y$  sendo interseção entre o lado  $BC$  e a reta paralela ao lado  $AC$  passando por  $X$ .

Figura 16: Os pontos  $X$  e  $Y$  no triângulo  $ABC$



Fonte: Elaborada pela autora

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{BC}}$$

Como  $\overline{XB} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$ , segue

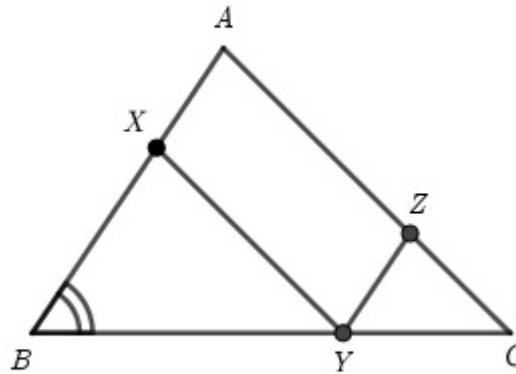
$$\frac{\overline{XB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{k \cdot \overline{A'B'}} = \frac{1}{k}.$$

Daí,

$$\overline{BY} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{k} \cdot k \cdot \overline{B'C'} = \overline{B'C'}$$

Considere  $Z$  o ponto de interseção entre o lado  $AC$  e a reta paralela ao lado  $AB$  que passa por  $Y$ .

Figura 17: Os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  no triângulo  $ABC$



Fonte: Elaborada pela autora

Observe que  $AXYZ$  é um paralelogramo. Aplicando o teorema de Thales novamente, temos

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{BC}} = \frac{1}{k}$$

Note que os triângulos  $XBY$  e  $A'B'C'$  são congruentes pelo caso  $LAL$ , pois  $\overline{XB} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BY} = \overline{B'C'}$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$  (por hipótese).

Logo,

$$\hat{A} \cong \hat{BAC} \cong \hat{BXY} \cong \hat{B'A'C'} \cong \hat{A}'$$

$$\hat{C} \cong B\hat{C}A \cong B\hat{Y}X \cong B'\hat{C}'A' \cong \hat{C}'.$$

Como  $\overline{XY} = \overline{A'C'}$ , temos

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$$

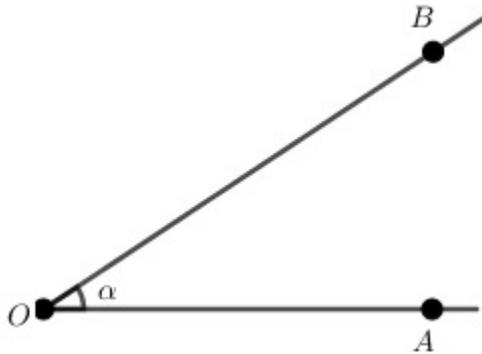
Portanto,

$$\hat{A} \cong \hat{A}', \hat{C} \cong \hat{C}' \text{ e } \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k.$$

### 1.3 Funções trigonométricas de um ângulo agudo

Pressuponha um ângulo  $\alpha$ , agudo.

Figura 18: Ângulo  $\alpha$

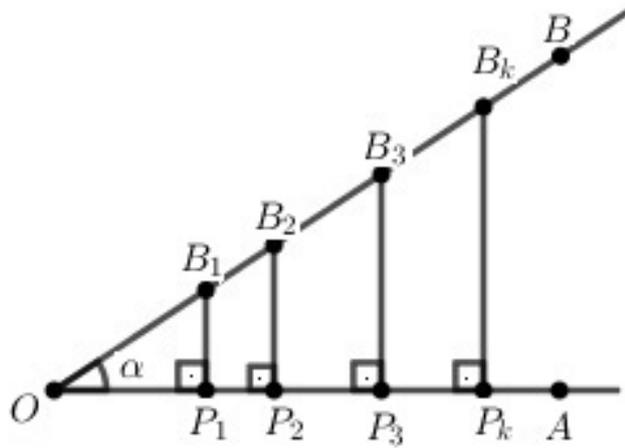


Fonte: Elaborada pela autora

Definiremos: Seno de  $\alpha$ , Cosseno de  $\alpha$  e Tangente de  $\alpha$ .

Tomemos os pontos  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_K, \dots$  na semirreta  $\overrightarrow{OA}$  e tracemos perpendiculares à esta semirreta passando por esses pontos.

Figura 19: As perpendiculares



Fonte: Elaborada pela autora

Note que, ao fazermos isso, os triângulos formados serão semelhantes, por possuírem os ângulos congruentes.

Daí,

$$\frac{\overline{P_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{P_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{P_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \dots = \frac{\overline{P_kB_k}}{\overline{OB_k}} = \dots \quad (I)$$

$$\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{OP_3}}{\overline{OB_3}} = \dots = \frac{\overline{OP_k}}{\overline{OB_k}} = \dots \quad (II)$$

$$\frac{\overline{P_1B_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{P_2B_2}}{\overline{OP_2}} = \frac{\overline{P_3B_3}}{\overline{OP_3}} = \dots = \frac{\overline{P_kB_k}}{\overline{OP_k}} = \dots \quad (III)$$

Observe as relações (I), (II), (III) e atente para o fato que elas dependem apenas do ângulo  $\alpha$  e não dos comprimentos relacionados, ou seja, dependem apenas do ângulo  $\alpha$  e não do triângulo retângulo que o contém. Com isso, cada uma dessas relações é uma função de  $\alpha$ .

Da relação (I), definimos o seno de  $\alpha$ , ou simplesmente,  $\sin \alpha$ .

Para  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,

$$\sin \alpha = \frac{\overline{P_1B_1}}{\overline{OB_1}}$$

Da relação (II), definimos o cosseno de  $\alpha$ , ou simplesmente,  $\cos \alpha$ .

Para  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OB_1}}$$

Da relação (III), definimos o tangente de  $\alpha$ , ou simplesmente,  $\tan \alpha$ .

Para  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,

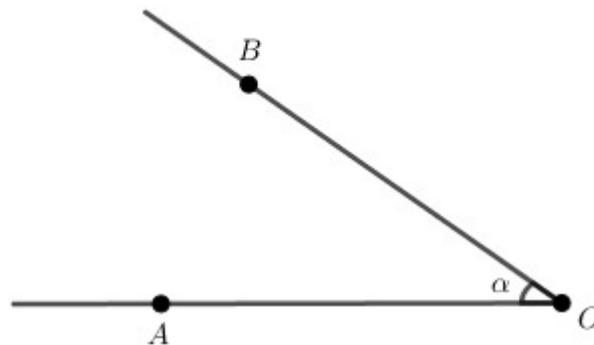
$$\tan \alpha = \frac{\overline{P_1B_1}}{\overline{OP_1}}$$

Destacamos duas relações que são consequências dessas definições.

1)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

*Demonstração:* Considere um ângulo  $\alpha$ , com  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , como mostra a Figura 20 .

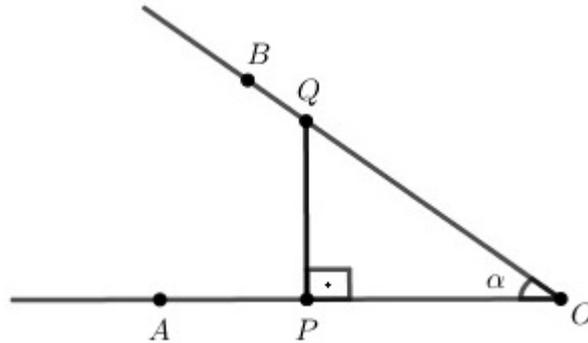
Figura 20: Ângulo agudo



Fonte: Elaborada pela autora

Tome um ponto  $P$  pertencente a semirreta  $\overrightarrow{OA}$ . Em seguida, construa uma perpendicular à semirreta  $\overrightarrow{OA}$  que passe pelo ponto  $P$ .

Figura 21: Construção da perpendicular



Fonte: Elaborada pela autora

Pelas definições de seno e cosseno,

$$\sin \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} \text{ e } \cos \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$$

Segue daí,

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}\right)}{\left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}\right)} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}\right) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$$

Observando a Figura 21, pela definição de tangente,  $\tan \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$ .

Logo,

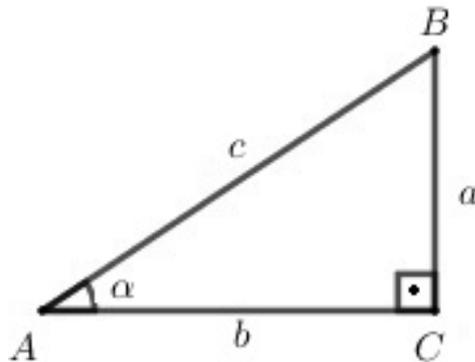
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}\right)}{\left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}\right)} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}\right) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \tan \alpha$$

Portanto,  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

**2)**  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

*Demonstração:* Seja um ângulo  $\alpha$ , tal que  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Como qualquer ângulo agudo pode ser visto como um dos ângulos de um triângulo retângulo, consideremos  $\alpha$  um dos ângulos do triângulo retângulo  $ABC$ , como mostra a Figura 22.

Figura 22: Triângulo retângulo



Fonte: Elaborada pela autora

Sendo  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ , pelo Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Como  $c > 0$ , fazemos a divisão de ambos os lados da igualdade por  $c^2$ :

$$\frac{c^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

Note,  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$  e  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ .

Logo,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2$$

Portanto,  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

Essa relação nos mostra, que obtendo os valores dos senos, teremos os valores dos cossenos, ou vice-versa, e também é fácil ver que, o seno e o cosseno de um ângulo agudo são valores que estão entre 0 e 1.

## 1.4 Funções trigonométricas de ângulos quaisquer

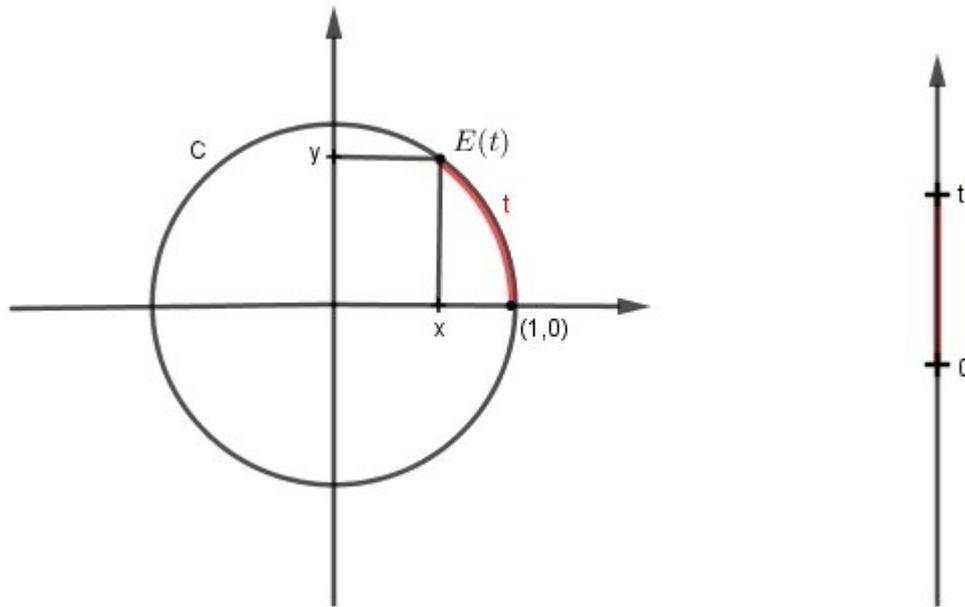
Com o intuito de definir as funções trigonométricas para um ângulo qualquer, devemos associar a cada número real  $t$  um ângulo e considerar o cosseno e o seno daquele ângulo.

Tomaremos como ponto de partida a *Função de Euler*,  $E : \mathbb{R} \rightarrow C$ , uma função que faz a correspondência de um número real  $t$  com um ponto  $E(t) = (x, y)$  de uma circunferência unitária obtida da seguinte forma:

- $E(0) = (1, 0)$
- Se  $t > 0$ ,  $E(t)$  será o ponto final ao percorrermos sobre a circunferência  $C$ , um caminho de comprimento  $t$ , partindo do ponto  $(1, 0)$  no sentido anti-horário, sentido esse que consideraremos positivo.
- Se  $t < 0$ ,  $E(t)$  será o ponto final ao percorrermos sobre a circunferência  $C$ , um caminho de comprimento  $|t|$ , partindo do ponto  $(1, 0)$  no sentido horário, sentido esse que consideraremos negativo.

Imaginemos a função de Euler  $E : \mathbb{R} \rightarrow C$  da seguinte maneira: Tomemos a reta real e façamos com que ela seja enrolada sobre a circunferência de modo que cada ponto da reta sobrepõe um ponto da circunferência de forma que  $0 \in \mathbb{R}$  esteja sobre o ponto  $(1, 0)$  da circunferência.

Figura 23: Relação entre circunferência unitária e reta real

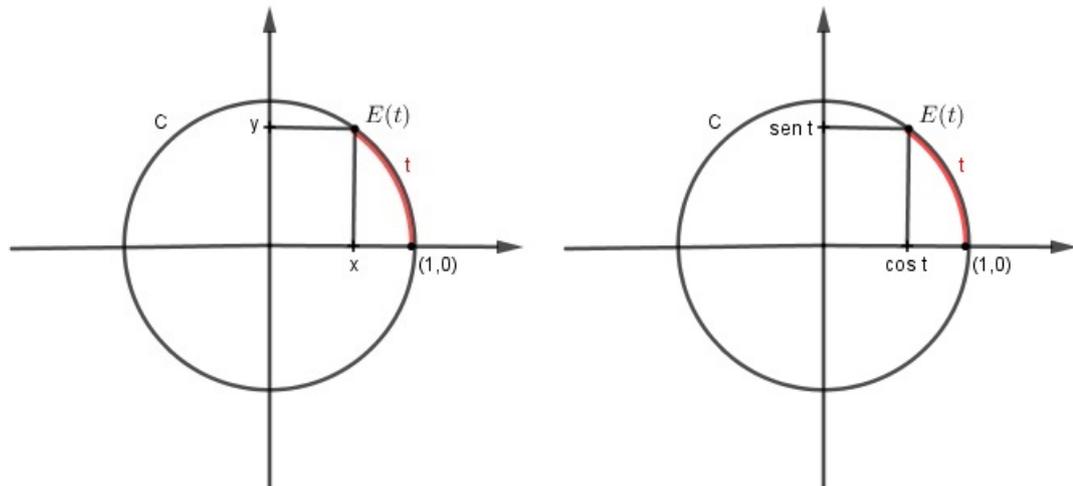


Fonte: Elaborada pela autora

Observe que para  $t > 2\pi$ , será necessário dar mais de uma volta em  $C$ , no sentido positivo, para encontrarmos  $E(t)$ . O mesmo ocorrerá para valores de  $t$  menores que  $-2\pi$ , será necessário dar mais de uma volta em  $C$ , só que no sentido negativo. Note que, cada ponto de  $C$  será imagem de uma infinidade de valores reais, todos eles da forma,  $t + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

A partir da função de Euler definiremos Função seno e Função cosseno. As funções  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são nesta ordem, chamadas função seno e função cosseno e definidas para cada  $t \in \mathbb{R}$ , como  $E(t) = (\cos t, \sin t)$ .

Figura 24: A circunferência e os valores de seno e cosseno

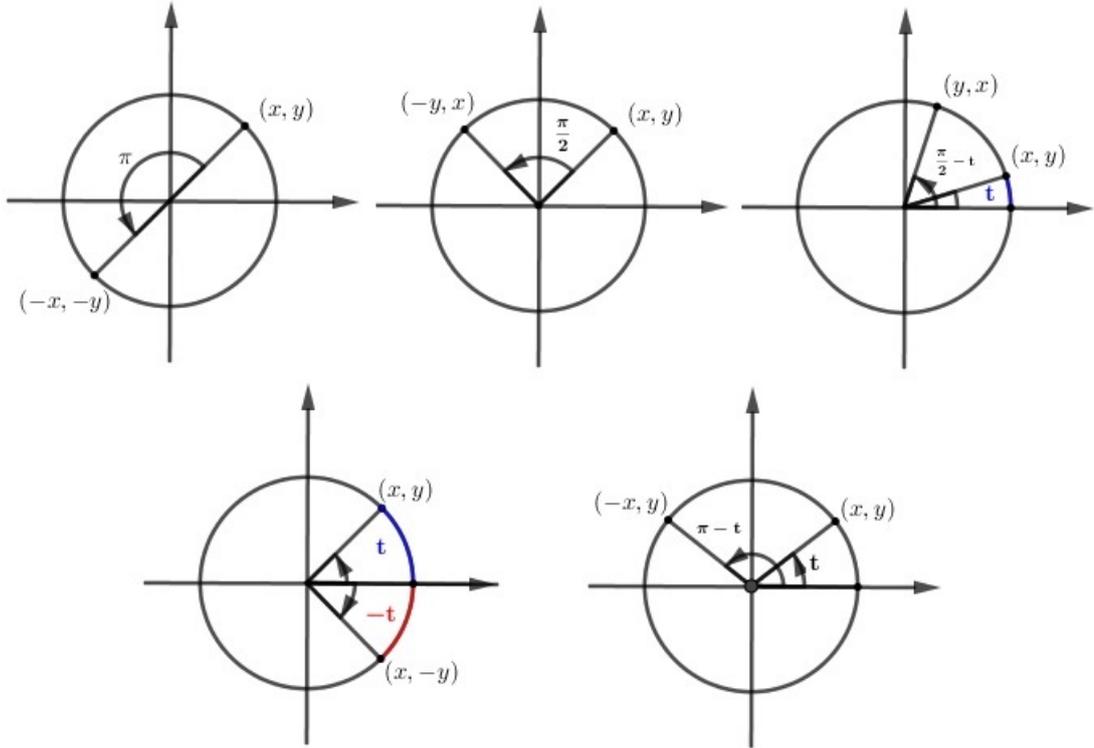


Fonte: Elaborada pela autora

De outra forma,  $\cos t$  e  $\sin t$  são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto  $E(t)$  da circunferência unitária. Note que essas novas definições para seno e cosseno, apenas ampliam a primeira e mantêm as relações básicas. Os valores das funções no intervalo  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ , permanecem os mesmos e como  $E(t) = (\cos t, \sin t)$  pertence a  $C$  e está a uma unidade da origem, segue daí,  $(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Algumas considerações em relação a simetrias presentes na função de Euler são interpretadas como propriedades das funções seno e cosseno.

Figura 25: Simetria da função de Euler



Fonte: Elaborada pela autora com base em [11]

Na Figura 25, observamos que se  $E(t) = (x, y)$  então  $E(t + \pi) = (-x, -y)$ ,  $E(t + \frac{\pi}{2}) = (-y, x)$ ,  $E(-t) = (x, -y)$ ,  $E(\frac{\pi}{2} - t) = (y, x)$  e  $E(\pi - t) = (-x, y)$ .

Como, por outro lado,  $E(t) = (\cos t, \sin t)$ , temos:

- $E(t + \pi) = (\cos(t + \pi), \sin(t + \pi)) = (-x, -y)$ , o que implica,  $\cos(t + \pi) = -\cos t$  e  $\sin(t + \pi) = -\sin t$ .
- $E(t + \frac{\pi}{2}) = (\cos(t + \frac{\pi}{2}), \sin(t + \frac{\pi}{2})) = (-y, x)$ , o que implica,  $\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t$  e  $\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t$ .
- $E(-t) = (\sin(-t), \cos(-t)) = (x, -y)$ , o que implica,  $\sin(-t) = \cos t$  e  $\cos(-t) = -\sin t$ .
- $E(\frac{\pi}{2} - t) = (\cos(\frac{\pi}{2} - t), \sin(\frac{\pi}{2} - t)) = (y, x)$ , o que implica,  $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$  e  $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$

- $E(\pi - t) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t)) = (-x, y)$ , o que implica,  $\cos(\pi - t) = -\cos t$  e  $\sin(\pi - t) = \sin t$

Das funções seno e cosseno derivam outras funções trigonométricas:  $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ ,  $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$ ,  $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ ,  $\csc t = \frac{1}{\sin t}$ , respectivamente denominadas, tangente, cotangente, secante e cossecante. É necessário observar que o domínio dessas funções é restrito aos números reais e como tais funções são definidas por meio de quocientes, somente pertencem ao domínios valores reais para os quais o denominador é diferente de zero.

Uma propriedade fundamental nas funções trigonométricas é que elas são periódicas.

**Definição:** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica quando existe um  $P \neq 0$  tal que  $f(t + P) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se isto acontece, então  $f(t + kP) = f(t)$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ . Será chamado de período da função  $f$ , o menor número  $P$  positivo tal que  $f(t + P) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Note que as funções seno e cosseno são periódicas, de período  $2\pi$ . De fato, já vimos anteriormente que cada ponto  $E(t) = (\cos t, \sin t)$  de  $C$  será imagem de uma infinidade de valores reais, todos eles da forma,  $t + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Em outras palavras,  $E(t + 2k\pi) = (\cos(t + 2k\pi), \sin(t + 2k\pi)) = (\cos t, \sin t)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Daí,  $\cos t = \cos(t + 2k\pi)$  e  $\sin t = \sin(t + 2k\pi)$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Como o menor valor de  $2k\pi$  positivo é  $2\pi$ , temos que as funções seno e cosseno são periódicas e o período delas é  $2\pi$ .

Nem sempre é simples identificar o período de funções trigonométricas. Os dois teoremas seguintes servem para facilitar a identificação do período de inúmeras funções.

**Teorema 1:** Seja  $f$  uma função periódica, definida por  $y = f(x)$ , de período  $p$ , então a função  $g(x) = m + n \cdot f(ax + b)$ , com  $m, n, a$  e  $b$  constantes reais e  $a, n \neq 0$ , é periódica e seu período é  $P = \frac{p}{|a|}$ .

*Demonstração:*

Primeiramente vamos provar que a função  $g(x)$  é periódica. Para isso, devemos mostrar que existe um número real  $T$ , tal que  $g(x) = g(x + T)$ , isto é,  $m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f[a(x + T) + b]$ .

Como a função  $f$  é periódica de período  $p$ , segue,  $f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = f(x + 3p) = \dots = f(x + kp)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Daí,

$$f(ax + b) = f(ax + b + kp)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
g(x) &= m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f(ax + b + kp) \\
\Rightarrow g(x) &= m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f\left(ax + b + \frac{akp}{a}\right) \\
\Rightarrow g(x) &= m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f\left[a\left(x + \frac{kp}{a}\right) + b\right]
\end{aligned}$$

Considerando  $T = \frac{kp}{a}$ , obtemos:

$$g(x) = g(x + T)$$

Portanto,  $g$  é periódica.

Como, por definição, período é o menor valor de  $T$  positivo, podemos obtê-lo tomando  $k = 1$ . Logo, o período da função  $g$  é dado por  $\frac{p}{|a|}$ .

### Exemplos:

1. Calcule o período da função  $f(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right)$ .

O período da função  $\tan x$  é  $\pi$ . Logo, o período de  $f(x)$  é dado por  $\frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$ .

2. Determine o período da função  $g(x) = 11 - 7 \sec(-\pi x)$ .

O período da função  $\sec x$  é  $2\pi$ . Portanto, o período da função  $g(x)$  é  $\frac{2\pi}{|-\pi|} = 2$ .

3. Explícite o período da função  $h(x) = \cos^2 x$ .

Primeiramente, vamos escrever a função  $h(x)$  na forma  $m + n \cdot f(ax + b)$ .

Note,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = -1 + 2\cos^2 x$$

Daí,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

.

O período da função  $\cos x$  é  $2\pi$ . Portanto, o período da função  $h(x)$  é  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ .

**Teorema 2:** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções periódicas, cujos períodos são respectivamente,  $p_1$  e  $p_2$ , com  $p_1 \neq p_2$ . Se  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros positivos e

primos entre si, então as funções definidas por  $H = f + g$  e  $I = f \cdot g$  são periódicas e o período delas é  $P = np_1 = mp_2$ .

*Demonstração:*

Precisamos mostrar que existe um número real  $T$ , tal que  $H(x) = H(x + T)$  e  $I(x) = I(x + T)$ , isto é,  $f(x) + g(x) = f(x + T) + g(x + T)$  e  $f(x) \cdot g(x) = f(x + T) \cdot g(x + T)$ .

Como os períodos de  $f$  e  $g$ , são  $p_1$  e  $p_2$ , nesta ordem.

Temos:

$$f(x) = f(x + p_1) = f(x + 2p_1) = \dots = f[x + (kn)p_1], \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$$g(x) = g(x + p_2) = g(x + 2p_2) = \dots = g[x + (km)p_2], \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Logo,

$$f(x) + g(x) = f[x + (kn)p_1] + g[x + (km)p_2], \text{ com } kn, km \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) \cdot g(x) = f[x + (kn)p_1] \cdot g[x + (km)p_2], \text{ com } kn, km \in \mathbb{Z}$$

Por hipótese,  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$ , o que implica,  $m \cdot p_2 = n \cdot p_1$ . Tomando  $T = kmp_2 = knp_1$ , segue:

$$f(x) + g(x) = f(x + T) + g(x + T) \Rightarrow H(x) = H(x + T)$$

$$f(x) \cdot g(x) = f(x + T) \cdot g(x + T) \Rightarrow I(x) = I(x + T)$$

Portanto, as funções  $H$  e  $I$  são periódicas.

Como, por definição, período é o menor valor de  $T$  positivo, podemos obtê-lo tomando  $k = 1$ . Logo, o período das funções  $H$  e  $I$  é dado por  $P = np_1 = mp_2$ .

### Exemplos:

1. Calcule o período da função  $f(x) = \tan(4x) + \sin(3x)$ .

O período da função  $g(x) = \tan(4x)$  é  $p_1 = \frac{\pi}{4}$  e da função  $h(x) = \sin(3x)$  é

$$p_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Daí, } \frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{8}.$$

Portanto, o período de  $f$  é  $8p_1 = 3p_2$ , ou seja, o período de  $f$  é  $2\pi$ .

2. Determine o período da função  $f(x) = \cos(4x) \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ .

O período da função  $g(x) = \cos(4x)$  é  $p_1 = \frac{\pi}{2}$  e o período da função  $h(x) =$

$$\sin\left(\frac{2}{3}x\right) \text{ é } p_2 = 3\pi.$$

$$\text{Daí, } \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{6}.$$

Portanto, o período de  $f$  é  $6p_1 = p_2$ , ou seja, o período de  $f$  é  $3\pi$ .

3. Calcule o período da função  $f(x) = \sec x - \sin x$ .

O período da função  $g(x) = \sec x$  é  $p_1 = 2\pi$  e o período da função  $h(x) = -\sin x$  é  $p_2 = 2\pi$ .

$$\text{Daí, } \frac{p_1}{p_2} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

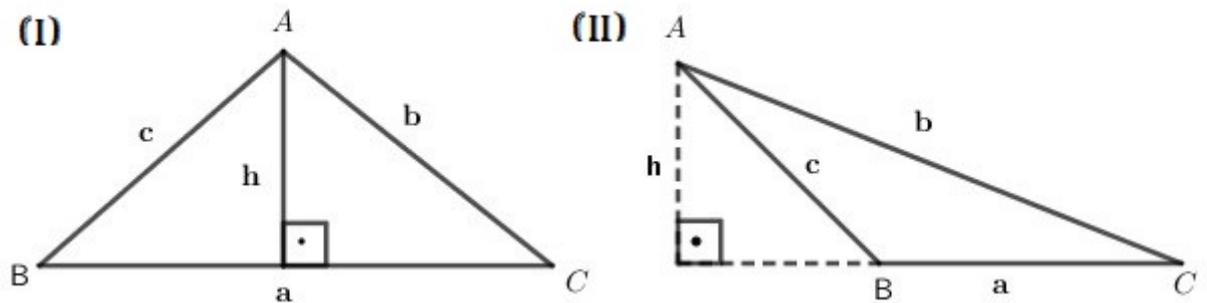
Portanto, o período de  $f$  é  $p_1 = p_2$ , ou seja, o período de  $f$  é  $2\pi$ .

## 1.5 Lei dos Senos

Dado um triângulo  $ABC$ , consideremos  $a, b, c$ , as medidas dos lados  $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ , nessa ordem e tomemos  $h$  como a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

Observe que existe duas possibilidades para  $h$ .

Figura 26: Triângulo retângulo



Fonte: Elaborada pela autora

Do triângulo (I) conseguimos as seguintes informações:

$$\sin \hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin \hat{B} \text{ e } \sin \hat{C} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin \hat{C}.$$

Logo,

$$h = c \cdot \sin \hat{B} = b \cdot \sin \hat{C} \Rightarrow h = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

No triângulo (II),

$$\sin \hat{C} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin \hat{C} \text{ e } \sin (\pi - \hat{B}) = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin (\pi - \hat{B}).$$

Como o seno de ângulos suplementares tem o mesmo valor, segue daí que  $\sin (\pi - \hat{B}) = \sin \hat{B}$ .

Desta forma, também conseguimos no triângulo (II) que  $h = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$ .

Analogamente, se tomarmos no triângulo  $ABC$  a altura relativa ao lado  $\overline{AC}$ , obtemos a relação  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$ .

Portanto, dado um triângulo qualquer  $ABC$ , tem-se

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

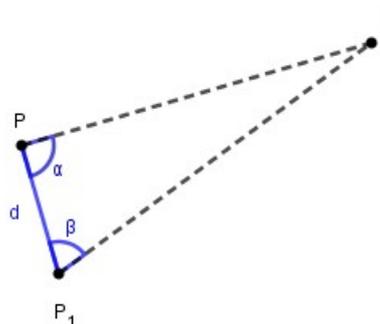
## 2 Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos aplicações que podem ser utilizadas no ensino da trigonometria, evidenciando os cálculos por trás de cada uma delas e, em algumas, as noções trigonométricas implícitas.

### 2.1 Calcular a distância entre dois pontos inacessíveis no plano horizontal

Para calcular a distância de um ponto  $P$ , onde o observador está, a um ponto  $I$ , inacessível, é necessário que esse observador possa se locomover para um ponto  $P_1$  no plano horizontal, de onde também possa ver o ponto  $I$ .

Figura 27: O triângulo formado pelos pontos  $P, P_1$  e  $I$



Fonte: Elaborada pela autora

Observe que conseguimos medir a distância entre os pontos  $P$  e  $P_1$  e que podemos utilizar um teodolito para medirmos os ângulo  $P_1\hat{P}I$  e  $P\hat{P}_1I$ .

Com essas informações, podemos descobrir a medida do ângulo  $P\hat{I}P_1$ , tendo em vista que, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer no plano é  $180^\circ$ .

Considere  $d$  a distância entre  $P$  e  $P_1$  e  $\alpha$  e  $\beta$ , as medidas, respectivamente, de  $P_1\hat{P}I$  e  $P\hat{P}_1I$ . Aplicando a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{d}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{\overline{PI}}{\sin \beta}$$

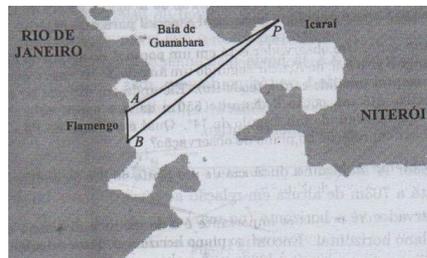
Logo,

$$\overline{PI} = \frac{d \cdot \sin \beta}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]}$$

Um problema apresentado na pg. 70 em [10], serve como exemplo para essa aplicação.

**Enunciado:** De um ponto  $A$  na praia do Flamengo no Rio de Janeiro avista-se um ponto  $P$  na praia de Icaraí em Niterói (esses dois pontos estão em lados opostos do canal de entrada da Baía de Guanabara). De um ponto  $B$  na praia do Flamengo, distante 1 km de  $A$  também se avista o ponto  $P$ . Um observador no Rio de Janeiro mediu os ângulos  $B\hat{A}P = 119^\circ$  e  $A\hat{B}P = 52^\circ$ . Qual é a distância entre  $A$  e  $P$ ?

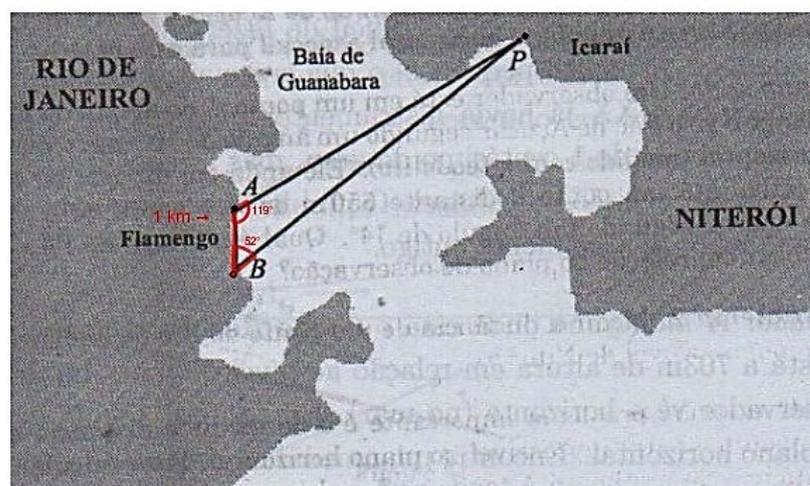
Figura 28: Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$



Fonte:[10],p.71

Fazendo a associação dos dados com a imagem:

Figura 29: Esquema do problema



Fonte: Elaborada pela autora com base em [10]

Daí,

$$\overline{AP} = \frac{1 \cdot (\sin 52^\circ)}{\sin[180^\circ - (119^\circ + 52^\circ)]} = \frac{\sin 52^\circ}{\sin 9^\circ}$$

Como  $\sin 52^\circ \approx 0,7880$  e  $\sin 9^\circ \approx 0,1564$ , segue,  $\overline{AP} \approx \frac{0,7880}{0,1564}$ .

Portanto,  $\overline{AP} \approx 5,04$  km.

## 2.2 Determinar o comprimento da circunferência e do raio da Terra

Sobre o Cálculo do comprimento do raio da Terra em [2], pg.1:

O cálculo do raio da Terra por Eratóstenes aparece em alguns livros do Ensino Médio, portanto, não é tão desconhecido. No entanto, vale a pena revê-lo, primeiro por ser coisa muito interessante e de grande relevância na construção do conhecimento e também para que os alunos vejam o poder da Matemática.

Primeiramente vamos situar as ideias de Eratóstenes em relação ao tempo e ao espaço.

Figura 30: Cidade de Alexandria.



Fonte:[2].

Eratóstenes viveu na cidade de Alexandria no terceiro século a.C., que está localizada no extremo oeste do delta do rio Nilo. Mais ao sul, onde hoje está localizada a represa de Assuã, ficava a cidade de Siena. Naquela época deveria existir um tráfego

regular de caravanas entre essas duas cidades, talvez por isso, estimava-se em 5000 estádios (corresponde a aproximadamente 800 km), a distância entre Alexandria e Siena. Outra coisa que eles já sabiam naquela época é que as duas cidades estavam mais ou menos no mesmo meridiano, ou seja, tinham a mesma longitude. Certamente eles acreditavam que as duas cidades estavam no mesmo meridiano uma vez que para ir de Alexandria a Siena viajava-se diretamente na direção sul.

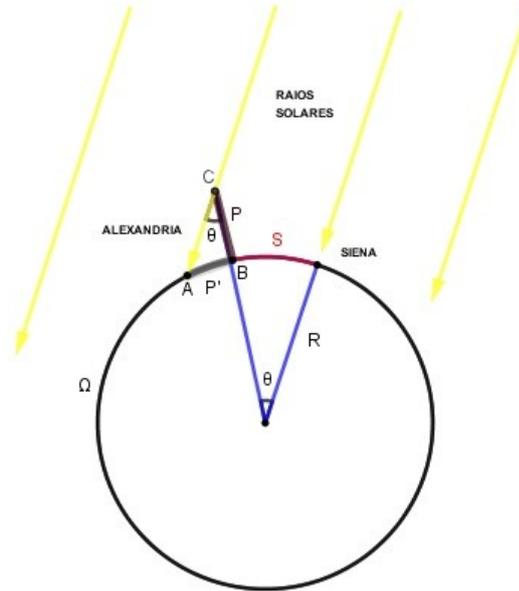
Para compreendermos como Eratóstenes fez o cálculo da circunferência da Terra, precisamos considerar mais algumas observações cruciais em seu raciocínio:

1. Os raios solares que chegam a nosso planeta são praticamente paralelos, por causa da grande distância que o sol se encontra da Terra.
2. Enquanto os raios solares caíam verticalmente ao meio-dia em Siena (fato esse que era comprovado através de observação das cisternas ao meio-dia, pois elas ficavam completamente iluminadas e o disco podia ser visto refletido no fundo), em Alexandria eles formavam com a vertical do lugar um ângulo diferente de zero.

### **A ideia de Eratóstenes**

A figura abaixo nos apresenta um esquema da ideia que Eratóstenes teve para medir a circunferência da Terra, levando em conta as observações já apresentadas anteriormente.

Figura 31: A ideia de Eratóstenes



Fonte: Elaborada pela autora

De acordo com [2], pg.2, parece que Eratóstenes descobriu a medida de  $\theta$  utilizando um relógio solar que certamente existia em Alexandria naquela época. Esse relógio nada mais é que uma coluna vertical, cujas sombras projetadas serviam para designar a hora do dia. Provavelmente, ele aguardou o dia do ano em que se sabia que os raios incidiam verticalmente em Siena ao meio-dia, e nesse instante, mediu o comprimento da sombra projetada pela coluna do relógio solar em Alexandria. Depois de descobrir o comprimento  $P$  da coluna do relógio e o comprimento  $P'$  da sombra da coluna, ele teria desenhado um triângulo retângulo com lados proporcionais aos segmentos  $P$  e  $P'$  em uma folha de Papiro e assim teria verificado que a medida de  $\theta$  era  $\frac{1}{50}$  da circunferência completa.

Eratóstenes sabendo que  $\theta$  tinha medida igual a  $\frac{1}{50}$  da circunferência completa e que a distância entre as cidades de Siena e Alexandria era aproximadamente 5000 estádios, utilizou o seguinte raciocínio: Se a  $\frac{1}{50}$  de ângulo correspondem 5000 estádios de arco, a circunferência toda corresponderá  $50 \cdot 5000 = 250.000$  estádios  $\approx 40.000$  km.

Observe que dois fatos matemáticos ficam explícitos em seu pensamento, o primeiro fato é que o ângulo  $\theta$  obtido em Alexandria tem a mesma medida que o ângulo central, observe que a igualdade dos ângulos existe por serem ângulos correspondentes em

duas retas paralelas cortadas por uma transversal; o outro fato matemático utilizado é a relação trigonométrica da proporcionalidade entre ângulos e arcos, ângulos são proporcionais aos arcos que subentendem.

Depois de descobirmos o comprimento da circunferência da Terra, para determinar a medida do raio basta sabermos que existe uma proporcionalidade entre o comprimento e o diâmetro e que a razão da circunferência para o diâmetro é um valor constante em todas as circunferências. Tendo em vista que hoje sabemos que essa constante foi designada por  $\pi$  e que seu valor é próximo de 3,14, temos:

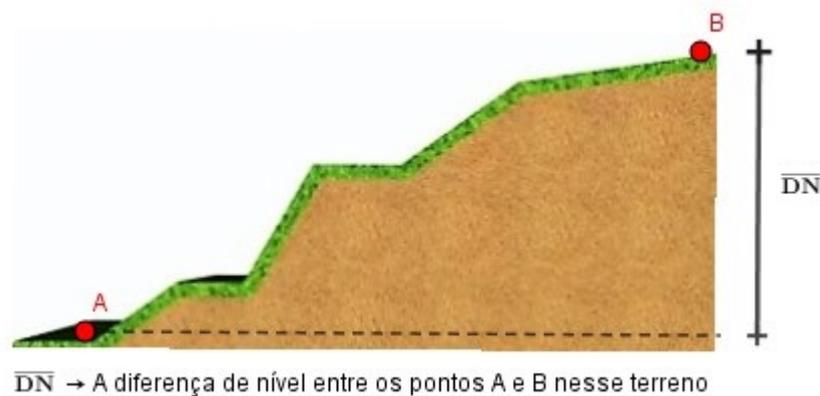
$$\frac{40000}{2 \cdot R} = 3,14 \Rightarrow R = \frac{40000}{6,28} \approx 6.369 \text{ km}$$

Como a Terra tem o comprimento de sua circunferência aproximadamente 40000 km segundo Eratóstenes, a medida de seu raio é aproximadamente 6.369 km.

### 2.3 Nivelamento trigonométrico

O Levantamento altimétrico ou Nivelamento é a operação que tem por finalidade determinar diferenças de nível ou distâncias verticais entre pontos de um terreno.

Figura 32: Um terreno inclinado



Fonte: Elaborada pela autora

Geralmente é utilizado nas seguintes situações:

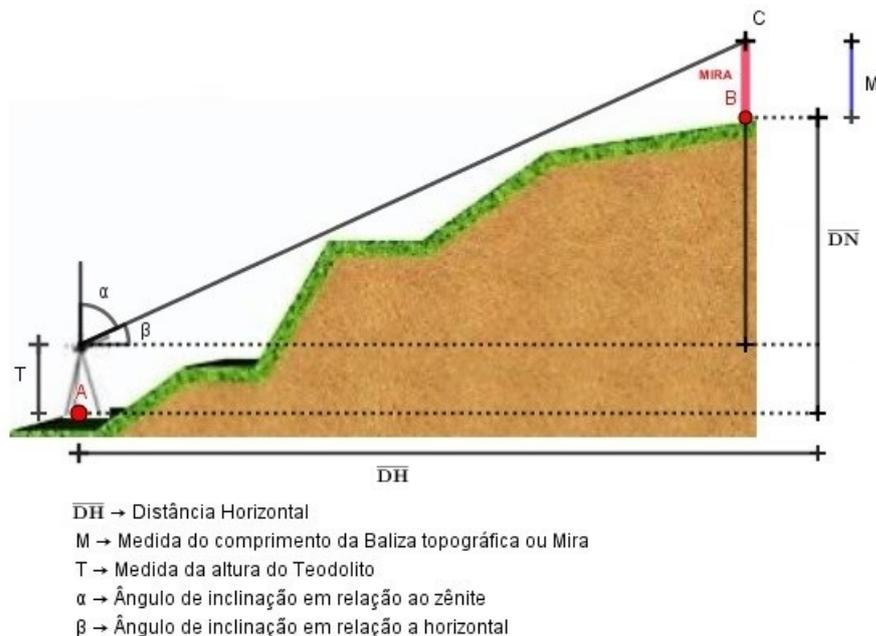
- Elaboração de perfis de rodovias, ferrovias, canais e rios;

- Na determinação de alturas de morros, torres e prédios;
- Em terraplanagem;
- Em lavouras de arroz e terraceamento;
- Em barragens.

O nivelamento trigonométrico é um processo que consiste em determinar a diferença de nível utilizando a distância horizontal e o ângulo de inclinação em relação ao horizonte ou ao zênite (ângulo zenital).

Observe a Figura 33.

Figura 33: Elementos necessários para o cálculo da diferença de nível ente  $A$  e  $B$



Fonte: Elaborada pela autora

Antes de calcularmos a diferença de nível entre os pontos  $A$  e  $B$ , vejamos como procederemos para obter o ângulo de inclinação  $\beta$  e a distância horizontal ( $\overline{DH}$ ).

Com um teodolito conseguimos identificar o ângulo zenital  $\alpha$ . Conseqüentemente, também conseguimos determinar a medida de  $\beta$ , visto que  $\beta$  é o complemento do ângulo  $\alpha$ .

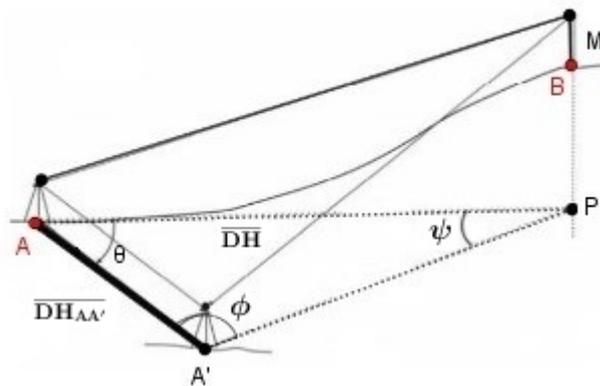
Para determinar a distância horizontal podemos utilizar o método de triangulação, pois requer somente o uso de um teodolito e material acessório (trena, balizas, ...).

Para aplicar esse método executamos os seguintes procedimentos, conforme a Figura 34:

1. Tomamos um ponto  $A'$ , próximo do ponto  $A$ , e medimos a distância horizontal, com precisão, entre os pontos  $A$  e  $A'$ .
2. Posicionamos o teodolito no ponto  $A$  e depois no ponto  $A'$ , medindo respectivamente, o ângulo interno plano  $P\hat{A}A'$  (ângulo  $\theta$ ) e o ângulo interno plano  $A\hat{A}'P$  (ângulo  $\phi$ ).

Perceba que ao fazermos esses procedimentos conseguimos identificar a medida de  $\psi$ , tendo em vista que  $\psi$  é o suplemento de  $(\theta + \phi)$ , ou seja,  $\psi = 180 - (\theta + \phi)$ .

Figura 34: O Método de Triangulação



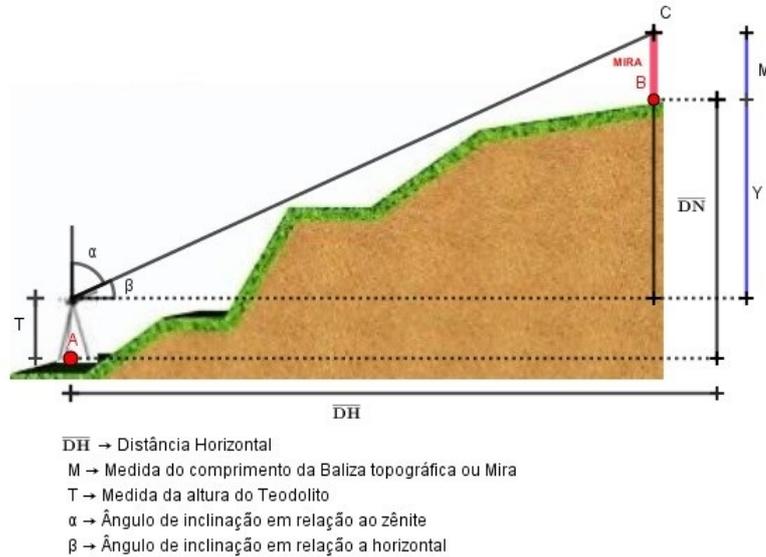
Fonte: Elaborada pela autora

Com esses dados, ao aplicarmos a Lei dos senos, obtemos:

$$\frac{\overline{DH_{AA'}}}{\sin \psi} = \frac{\overline{DH}}{\sin \phi} \Rightarrow \overline{DH} = \frac{\overline{DH_{AA'}} \cdot \sin \phi}{\sin [180^\circ - (\theta + \phi)]}$$

Conhecendo a medida de  $\beta$  e  $\overline{DH}$ , podemos calcular a diferença de nível entre os pontos  $A$  e  $B$ , da seguinte maneira:

Figura 35: O processo de nivelamento trigonométrico



Fonte: Elaborada pela autora

Primeiramente calculamos a medida  $Y$ , que nada mais é, que a distância entre o topo do teodolito e o começo da Mira, como mostra a Figura 35. Para isso, utilizamos a tangente do ângulo  $\beta$ . Como  $\tan \beta = \frac{M + Y}{\overline{DH}}$ , decorre daí que  $Y = \overline{DH} \cdot \tan \beta - M$ .

Note,

$$\overline{DN} = Y + T$$

Logo,

$$\overline{DN} = \overline{DH} \cdot \tan \beta - M + T$$

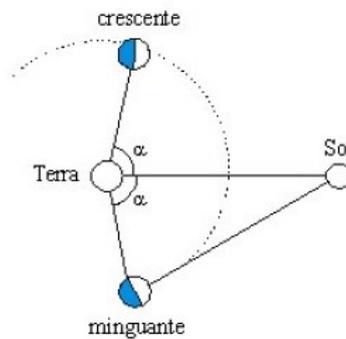
Portanto, a diferença de nível entre os pontos  $A$  e  $B$  pode ser calculada utilizando a fórmula:  $\overline{DN} = \overline{DH} \cdot \tan \beta - M + T$ , onde  $\overline{DH}$  representa a distância Horizontal,  $\beta$  é o ângulo de inclinação com a linha do horizonte,  $M$  é o comprimento da Mira e  $T$  a altura do Teodolito.

## 2.4 Medir a distância da Terra ao Sol e da Terra a Lua

Aristarco, um notável astrônomo da antiguidade, teve a seguinte ideia para comparar as distâncias da Terra ao Sol e à Lua.

Vejam algumas premissas utilizadas por ele no desenvolvimento de sua ideia. A primeira consideração a ser feita é sobre como ele prova que o Sol está mais distante da Terra do que a Lua. Ele chegou a essa conclusão ao observar a Lua em quarto crescente ou quarto minguante, quando podemos vê-la metade escura e metade iluminada. Nessas fases, se fizermos a observação ao nascer ou ao pôr do sol, verificamos que a Lua está quase na vertical acima de nossas cabeças. Na Figura 36 visualizamos essa situação.

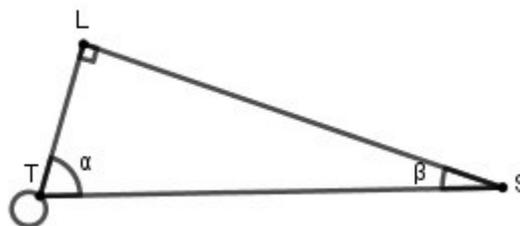
Figura 36: Posição da Lua ao nascer ou ao pôr do Sol quando a Lua está em quarto crescente ou minguante



Fonte:[3]

Se considerarmos apenas o triângulo formado pela Terra, Lua (em quarto crescente ou quarto minguante) e Sol, podemos representá-lo da seguinte forma:

Figura 37: O triângulo formado pela Terra, Lua e Sol



Fonte: Elaborada pela autora

Seja T, L e S a representação, na devida ordem, de um observador na Terra, do centro da Lua e do centro do Sol. Perceba que o triângulo que obtemos é retângulo em L e que a medida do ângulo  $\alpha$  é um valor próximo de  $90^\circ$ . Com isso, a medida de

$\beta$  é um valor próximo de  $0^\circ$ , tendo em vista que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ . Note que esta constatação já é o bastante para comprovar que o Sol está mais longe da Terra do que a Lua, basta lembrar que em um triângulo no plano o maior ângulo está oposto ao maior lado.

Conforme [3], pg.2, Aristarco achou para  $\alpha$  um valor próximo de  $87^\circ$ , certamente desenhou um triângulo semelhante ao TSL num pedaço de pergaminho, de um papiro ou mesmo na areia e nesse triângulo pequeno ele conseguiu determinar a razão  $\frac{\overline{TS}}{\overline{TL}} = 20$ , comprovando que  $\overline{TS}$  é aproximadamente  $20 \cdot \overline{TL}$ .

É importante ressaltar como Aristarco poderia ter feito o cálculo da medida de  $\alpha$ , uma vez que naquela época não existiam instrumentos precisos de medição e nem uma tabela trigonométrica, o que facilitaria bastante o valor da razão  $\frac{\overline{TL}}{\overline{TS}}$  ser encontrado, uma vez que  $\frac{\overline{TL}}{\overline{TS}}$  é o seno do ângulo  $\beta$ .

Segundo [3], pg.2, Aristarco teria observado que o tempo gasto para a Lua dar uma volta na terra é 29,5 dias e que para passar do minguante para crescente era cerca de 14,25 dias, um dia a menos que de crescente para minguante. Fatos esses que não podem ser comprovados apenas em uma única observação. Admitindo corretos os dados de Aristarco conseguimos obter  $\alpha$  utilizando a seguinte proporção

$$\frac{360^\circ}{2\alpha} = \frac{29,5}{14,25}$$

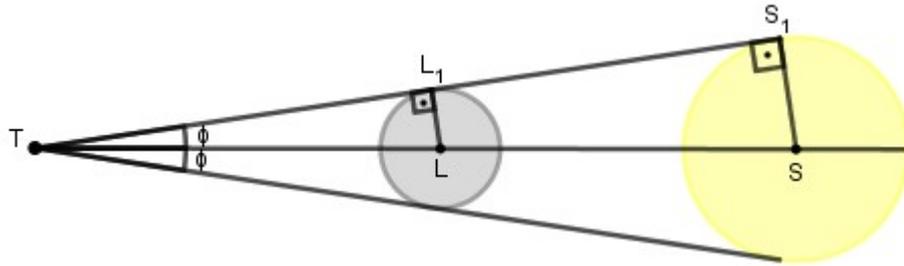
Segue daí,

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot 14,25}{29,5 \cdot 2} = \frac{5130^\circ}{59} \approx 87^\circ$$

É necessário salientar que hoje sabemos que a razão entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua é aproximadamente 400 e a medida do ângulo  $\alpha$  é próximo de  $89,86^\circ$ . Não precisamos mais construir um triângulo semelhante ao TSL e medirmos os seus lados, utilizamos as tabelas trigonométricas e através de uma proporção simples identificamos o lado desconhecido de um triângulo retângulo.

A segunda consideração a ser feita que está presente na ideia de Aristarco é que o ângulo sob qual vemos a Lua é o mesmo sob o qual vemos o sol, isto significa dizer que o Sol e a Lua têm o mesmo tamanho angular. A Figura 38 nos ajuda a entender o que isso significa.

Figura 38: Ângulo pelo qual vemos o Sol e a Lua



Fonte: Elaborada pela autora

Podemos nos convencer ao observar um eclipse total do Sol, onde percebemos a coincidência exata do disco solar com o disco lunar.

Figura 39: Eclipse total do Sol



Fonte:[17]

Considerando a Figura 38 percebemos que os triângulos  $TL_1L$  e  $TS_1S$  são semelhantes pelo caso AA. Daí,

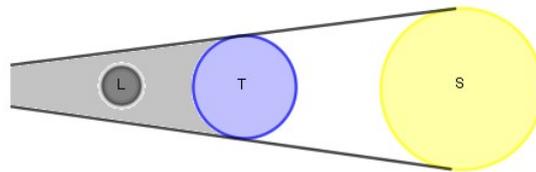
$$\frac{\overline{L_1L}}{\overline{S_1S}} = \frac{\overline{TL_1}}{\overline{TS_1}}$$

Isso quer dizer que a razão entre o raio da Lua e o raio do Sol é igual a razão entre a distância da Terra à Lua e da Terra ao Sol. Como  $\frac{\overline{TL_1}}{\overline{TS_1}}$  já é conhecida, já sabemos quanto vale  $\frac{\overline{L_1L}}{\overline{S_1S}}$ . Conforme [3], pg.3, Aristarco, em relação ao ângulo  $\phi$ , determinou que era aproximadamente  $1^\circ$  e em relação as razões  $\frac{\overline{TL_1}}{\overline{TS_1}}$  e  $\frac{\overline{L_1L}}{\overline{S_1S}}$ , elas seriam iguais e estariam compreendidas entre 18 e 20. Notemos que apesar de sabermos hoje que o

valor aproximado de  $\phi$  é  $0,5^\circ$  não altera os resultados já apresentados e que Aristarco estava certo em relação as razões serem iguais, apesar de não estarem entre 18 e 20.

A última consideração a ser feita antes de expormos os resultados de Aristarco foi descrita em [3], pg.4, em que ele apresenta o raciocínio de Aristarco ao observar um eclipse da Lua, no momento em que ela atravessa o cone de sombra da Terra como mostra a Figura 40 .

Figura 40: Lua atravessando o cone de sombra da Terra

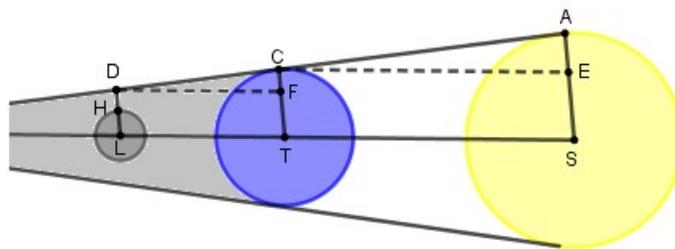


Fonte: Elaborada pela autora

Segundo [3], pg.4, Aristarco utilizando o tempo gasto pela Lua para atravessar o cone de sombra da Terra calculou o diâmetro desse cone na altura da Lua (indicaremos essa medida por LD na Figura 41) como sendo  $\frac{8}{3}$  do diâmetro da Lua.

Observemos a Figura 41.

Figura 41: Lua, Terra e Sol em um eclipse lunar



Fonte: Elaborada pela autora

Daí, segundo Aristarco  $\overline{LD} = \frac{8}{3}(\text{Raio da Lua})$  e da semelhança dos triângulos DFC com o triângulo CEA conseguimos a seguinte proporção  $\frac{\overline{CF}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}$ .

Aristarco partindo das constatações feitas determinou a distância da terra a Lua, a distância da terra ao Sol, o Raio da Lua e o Raio do Sol, em função do Raio da Terra.

A partir desse momento para facilitar a compreensão dos resultados obtidos por Aristarco definiremos dois parâmetros  $a$  e  $b$  e utilizaremos as seguintes notações propostas em [3], pg.3.

$$\overline{HL} = R_L \rightarrow \text{Raio da Lua}$$

$$\overline{CT} = R_T \rightarrow \text{Raio da Terra}$$

$$\overline{AS} = R_S \rightarrow \text{Raio do Sol}$$

$$\overline{DF} = D_L \rightarrow \text{Distância da Terra à Lua}$$

$$\overline{CE} = D_S \rightarrow \text{Distância da Terra ao Sol}$$

$$a = \frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L}$$

$$b = \frac{D_S}{D_L}$$

Ao analisar a Figura 41 , obtemos:

$$\bullet \quad \overline{CF} = \overline{CT} - \overline{TF} = R_T - \overline{LD} = R_T - \frac{8}{3}R_L$$

$$\bullet \quad \overline{AE} = \overline{AS} - \overline{SE} = R_S - R_T$$

Substituindo os valores na proporção  $\frac{\overline{CF}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}$ , temos:

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S} \quad (I)$$

Como  $a = \frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L}$  e  $b = \frac{D_S}{D_L}$ , segue daí,  $D_S = b \cdot D_L$ ,  $R_S = a \cdot D_S = a \cdot (b \cdot D_L)$  e  $R_L = a \cdot D_L$ .

Logo a igualdade (I) pode ser reescrita dessa forma:

$$\begin{aligned} \frac{R_T - \frac{8}{3}a \cdot D_L}{D_L} &= \frac{ab \cdot D_L - R_T}{b \cdot D_L} \Rightarrow \frac{R_T}{D_L} - \frac{8}{3}a = a - \frac{R_T}{bD_L} \Rightarrow \frac{R_T}{D_L} + \frac{R_T}{bD_L} = \frac{11}{3}a \\ \Rightarrow \frac{b \cdot R_T}{b \cdot D_L} + \frac{R_T}{bD_L} &= \frac{11}{3}a \Rightarrow \frac{(1+b)R_T}{bD_L} = \frac{11}{3}a \Rightarrow D_L = \frac{3(1+b)R_T}{11ab} \end{aligned}$$

Daí,

$$\bullet \quad D_S = b \cdot D_L \Rightarrow D_S = \frac{3(1+b)R_T}{11a}$$

$$\bullet \quad R_S = ab \cdot D_L \Rightarrow R_S = \frac{3(1+b)R_T}{11}$$

$$\bullet \quad R_L = a \cdot D_L \Rightarrow R_L = \frac{3(1+b)R_T}{11b}$$

Com os valores que Aristarco encontrou para  $\beta$  e  $\phi$ , ele obteve os seguintes resultados:  $D_L \approx 16,8R_T$ ,  $D_S \approx 337R_T$ ,  $R_S \approx 5,7R_T$  e  $R_L \approx 0,29R_T$ .

De acordo com [3], pg.3, utilizando as razões que Aristarco encontrou com os valores mais atualizados de  $\beta$  e  $\phi$ , os resultados ficam bem mais próximos dos valores contemporâneos.  $D_L \approx 62R_T$ ,  $D_S \approx 24855R_T$ ,  $R_S \approx 109R_T$  e  $R_L \approx 0,27R_T$ .

Por fim, sabermos que os valores encontrados por Aristarco não estão de acordo com os valores modernos não diminui o brilhantismo de suas ideias, tendo em vista que ele não possuía os recursos que temos atualmente.

## 2.5 Construção de rampas de acessibilidade

A norma técnica de acessibilidade, a NBR 9050/2015, determina critérios e parâmetros técnicos a serem considerados em um projeto, na construção, na instalação e adaptação do meio urbano ou rural para atender as condições de acessibilidade.

Esta Norma visa proporcionar a utilização de maneira autônoma, independente e segura do ambiente, edificações, mobiliário, equipamentos urbanos e elementos à maior quantidade possível de pessoas, independentemente de idade, estatura ou limitação de mobilidade ou percepção ([1], pg.1).

Para garantir a acessibilidade em uma rampa, são determinados os limites máximos de inclinação, os desníveis a serem vencidos e o número máximo de segmentos<sup>4</sup>.

Segundo NBR 9050/2015, a inclinação das rampas deve ser calculada de acordo com a seguinte equação:

$$i = \frac{(h \cdot 100)}{c}$$

onde,

$i$  é a inclinação, expressa em porcentagem (%);

$h$  é a altura do desnível;

$c$  é o comprimento da projeção horizontal.

Essa norma também estabelece que as rampas devem ter inclinação de acordo com a tabela abaixo.

---

<sup>4</sup>Nem sempre é possível construir uma rampa de forma contínua no local disponível. Às vezes, é necessário construir a rampa de forma segmentada, onde após cada segmento deve existir um patamar para descanso.

Tabela 1: Dimensionamento de rampas

Inclinação admissível em cada rampa (i em %)	Desníveis máximos de cada segmento de rampa (h em m)	Número máximo de segmentos de rampa
5	1,50	SEM LIMITE
$5 < i \leq 6,25$	1,00	SEM LIMITE
$6,25 < i \leq 8,33$	0,80	15

Fonte: [1],p.42

E em reformas quando não for possível uma solução que atenda os parâmetros da Tabela 1, podem ser utilizadas inclinações superiores a 8,33% até 12,5% conforme a tabela abaixo.

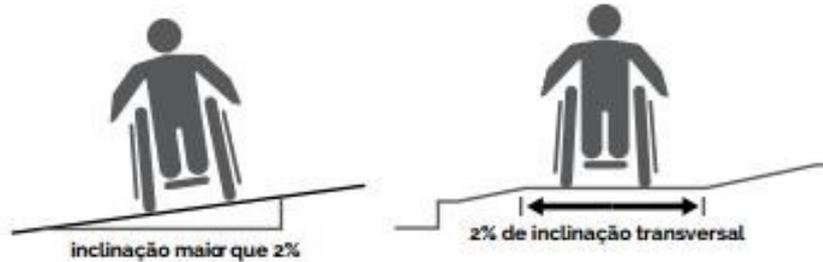
Tabela 2: Dimensionamento de rampas para situações excepcionais

Inclinação admissível em cada rampa (i em %)	Desníveis máximos de cada segmento de rampa (h em m)	Número máximo de segmentos de rampa
$8,33 \leq i < 10,00$	0,20	4
$10,00 \leq i < 12,5$	0,075	1

Fonte: [1],p.42

Em relação a inclinação transversal não deve exceder 2% em rampas internas e 3% em rampas externas.

Figura 42: Inclinação transversal de rampas



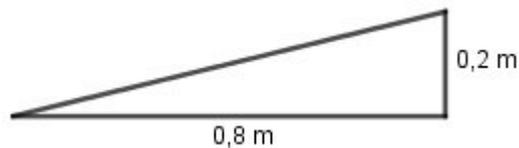
Fonte:[20]

Para maior compreensão segue abaixo um problema apresentado na pg. 29 de [15].

**Enunciado:** Um fiscal anotou as seguintes medidas de duas rampas de acesso: A primeira 20 cm de altura e 80 cm de projeção horizontal, já a segunda com 20 cm de altura e 240 cm de projeção horizontal. Após calcular a inclinação da rampa, qual foi o resultado que o fiscal deu para cada uma?

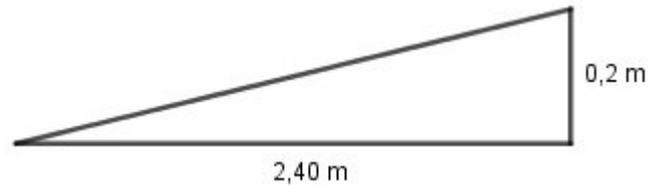
Façamos o esboço das duas rampas com suas devidas medidas

Figura 43: Esboço da rampa I



Fonte: Elaborada pela autora com base em [15].

Figura 44: Esboço da rampa II



Fonte: Elaborada pela autora com base em [15].

Utilizando a fórmula,  $i = \frac{(h \cdot 100)}{c}$ , podemos verificar se as rampas I e II estão de acordo com as normas técnicas.

$$\text{RAMPA I} \\ i = \frac{(0,2 \cdot 100)}{0,8} = \frac{20}{0,8} = 25\%$$

$$\text{RAMPA II} \\ i = \frac{(0,2 \cdot 100)}{2,40} = \frac{20}{2,40} \approx 8,33\%$$

Analisando os resultados, a RAMPA I seria reprovada por não estar de acordo com os padrões estabelecidos e a RAMPA II seria aprovada por estar dentro das normas.

A trigonometria está implícita na construção das rampas ao calcularmos  $i = \frac{h}{c}$ , note que essa razão nada mais é que  $\text{tg } \alpha$ . Podemos facilmente criar outros problemas utilizando rampas para utilizarmos seno e cosseno de  $\alpha$ .

O que é interessante salientar nessa aplicação é o porquê da norma não expressar as inclinações utilizando  $\alpha$ .

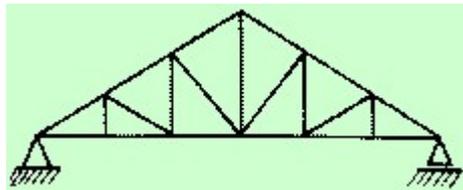
Conseguimos interpretar melhor o resultado em percentual. Por exemplo, se a inclinação de uma rampa é 5%, fica fácil para quem vai construí-la entender que a cada 5 cm na vertical é necessário 1m na horizontal.

## 2.6 Construção de uma tesoura inglesa ou howe de um telhado

Uma tesoura é uma armação triangular usada em telhados para sustentação da cobertura, suas barras estão distribuídas em uma rede de triângulos que tornam a estrutura inflexível.

Existem vários tipos de tesouras, a tesoura inglesa ou howe é um dos modelos de tesoura empregada no Brasil. Esse modelo é adequado para casas de até 18 metros de comprimento. Este é o tipo de tesoura que utilizaremos nessa aplicação.

Figura 45: Modelo de uma tesoura inglesa no plano



Fonte: Referência [18]

Figura 46: Tesoura Inglesa ou Howe



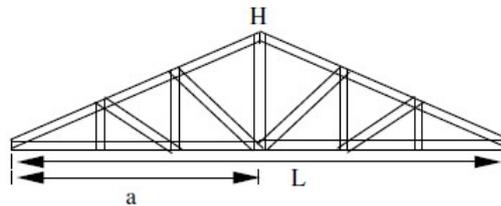
Fonte: Referência [19]

Os modelos matemáticos que serão apresentados foram desenvolvidos por Angéli Cervi, Rosane Bins e Taila Deckert, acadêmicas do Curso de Licenciatura em Matemática da UNIJUÍ sobre a supervisão do professor Pedro Augusto Pereira Borges.

Segundo [6], pg.1, esses modelos foram desenvolvidos com o intuito de determinar a quantidade de madeira para a construção de uma tesoura simples utilizada em casas residenciais, cuja largura varia de 6 a 10 metros, e seu respectivo custo.

O esquema da tesoura utilizada:

Figura 47: Esquema da tesoura utilizada na aplicação



Fonte:[6]

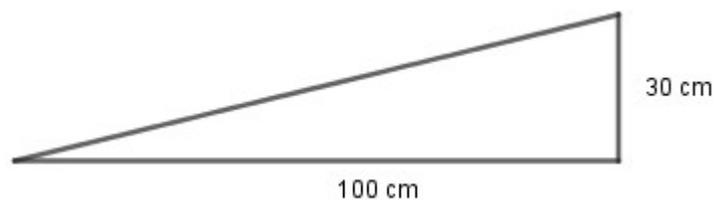
O primeiro modelo matemático criado por eles teve como objetivo calcular a altura da tesoura ( $H$ ) em função da inclinação do telhado ( $I$ ) e da largura da casa ( $L$ ), já acrescida do beiral. Deve ser ressaltado que a inclinação do telhado depende do tipo de telha que será utilizado.

Antes de apresentar esse modelo torna-se necessário explicar como se calcula a inclinação de um telhado.

Cada tipo de telha possui uma inclinação própria que é determinada pelo seu tamanho e recomendada pelo fabricante. A inclinação dos telhados é medida em porcentagem (%) e não em ângulo ( $^{\circ}$ ).

Exemplo: Telhado com inclinação de 30%.

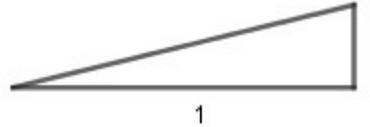
Figura 48: Esquema do telhado



Fonte:Elaborada pela autora

Isso significa que para 30 cm na vertical tem-se 100 cm na horizontal.

Figura 49: A inclinação  $I$  de um telhado



Fonte: Elaborada pela autora

Observe que para cada unidade na horizontal temos a medida da inclinação na vertical.

Vamos expor agora o modelo criado para a determinação da altura da tesoura.

Note a seguinte proporção

$$\begin{array}{ccc} \text{Altura} & & \text{Largura(base)} \\ \frac{I}{H} & = & \frac{1}{a} \end{array}$$

Multiplicando os dois membros por  $H \cdot a$ , obtemos:

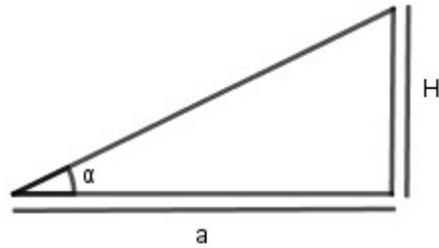
$$H \cdot 1 = I \cdot a$$

$$\Rightarrow H = I \cdot a$$

Sendo  $H$  = altura da tesoura,  $a$  = Largura dividida por 2 e  $I$  = inclinação do telhado (em decimais).

Em seguida foi utilizado um modelo matemático para determinar a inclinação  $\alpha$  do telhado.

Figura 50: Inclinação do telhado



Fonte: Elaborada pela autora

Note,

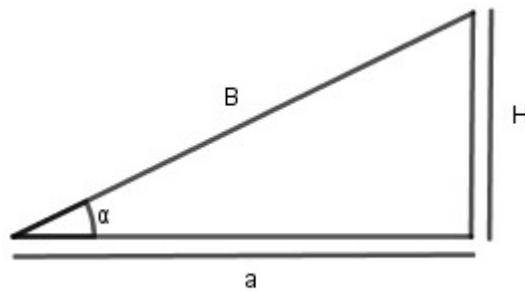
$$\tan \alpha = \frac{H}{a}$$

Como  $H = I \cdot a$ , temos:

$$\tan \alpha = \frac{I \cdot a}{a} \Rightarrow \tan \alpha = I \Rightarrow \alpha = \arctan(I)$$

O próximo modelo foi criado para estabelecer o comprimento do banzo superior (B) da tesoura.

Figura 51: O banzo superior da tesoura



Fonte: Elaborada pela autora

Aplicando o Teorema de Pitágoras

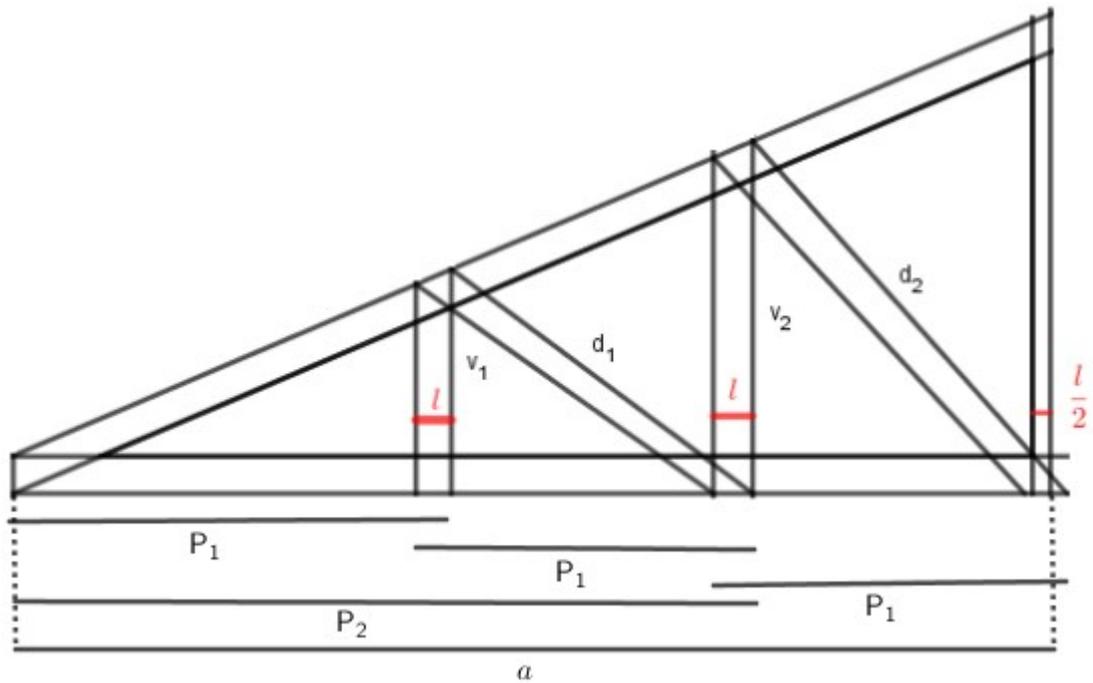
$$\begin{aligned} B^2 &= H^2 + a^2 \\ \Rightarrow B^2 &= (I \cdot a)^2 + a^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B^2 = a^2 \cdot (I^2 + 1)$$

$$\Rightarrow B = a\sqrt{1 + I^2}$$

Posteriormente o modelo feito teve como objetivo calcular o vão entre as verticais da tesoura somado à largura das verticais anterior e posterior ao vão ( $P_1$ ).

Figura 52: Esquema de metade da tesoura evidenciando as verticais e diagonais



Fonte: Elaborada pela autora

Atente para o fato de  $a = P_1 + (P_1 - l) + [P_1 - (l + \frac{l}{2})]$ .

Daí,

$$a = 3P_1 - (l + l + \frac{l}{2})$$

$$\Rightarrow a = 3P_1 - \frac{5l}{2}$$

$$\Rightarrow 3P_1 = a + \frac{5l}{2}$$

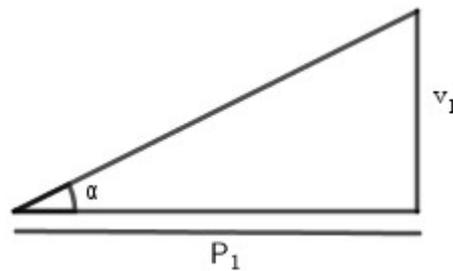
$$\Rightarrow P_1 = \frac{a + \frac{5l}{2}}{3}$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{2a + 5l}{6}$$

Os modelos apresentados em seguida serão para determinar o comprimento das verticais ( $v_1$  e  $v_2$ ) e das diagonais ( $d_1$  e  $d_2$ ) da tesoura.

- A medida do comprimento de  $v_1$

Figura 53: A primeira vertical



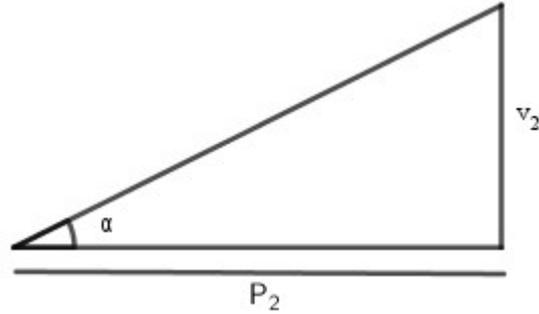
Fonte: Elaborada pela autora

utilizando a definição de tangente:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{v_1}{P_1} \\ \Rightarrow v_1 &= P_1 \cdot \tan \alpha \\ \Rightarrow v_1 &= \left( \frac{2a + 5l}{6} \right) \cdot \tan \alpha\end{aligned}$$

- A medida do comprimento de  $v_2$

Figura 54: A segunda vertical



Fonte: Elaborada pela autora

Primeiro é necessário determinar o valor de  $P_2$ . Observe a Figura 52, perceba que  $P_2 = 2P_1 - l$ . Segue daí,

$$P_2 = 2 \left( \frac{2a + 5l}{6} \right) - l$$

$$P_2 = \left( \frac{2a + 5l}{3} \right) - l$$

Logo,

Utilizando a definição de tangente

$$\tan \alpha = \frac{v_2}{P_2}$$

$$\Rightarrow v_2 = P_2 \cdot \tan \alpha$$

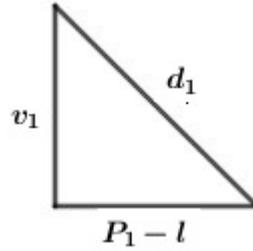
$$\Rightarrow v_2 = \left( \frac{2a + 5l}{3} - l \right) \cdot \tan \alpha$$

$$\Rightarrow v_2 = \left( \frac{2a + 2l}{3} \right) \cdot \tan \alpha$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{2(a + l)}{3} \cdot \tan \alpha$$

- A medida do comprimento de  $d_1$

Figura 55: A primeira diagonal



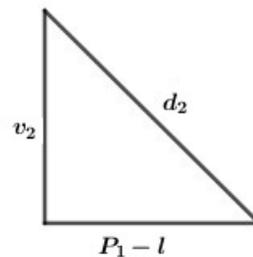
Fonte: Elaborada pela autora

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(d_1)^2 = (v_1)^2 + (P_1 - l)^2$$
$$\Rightarrow d_1 = \sqrt{(v_1)^2 + (P_1 - l)^2}$$

- A medida do comprimento de  $d_2$

Figura 56: A segunda diagonal



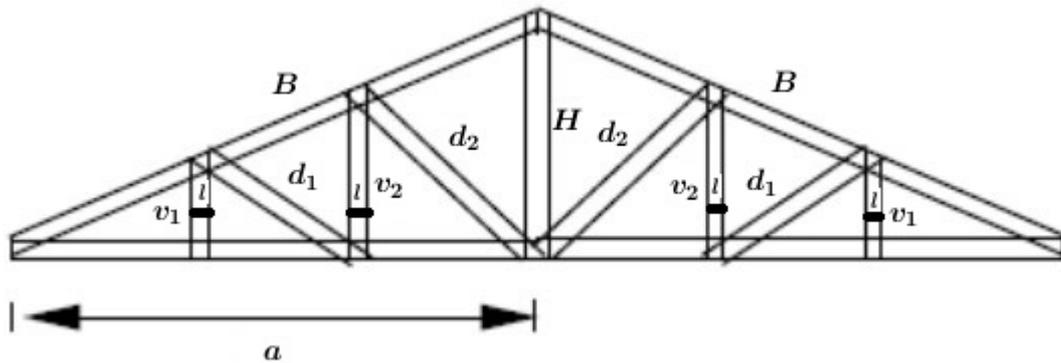
Fonte: Elaborada pela autora

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(d_2)^2 = (v_2)^2 + (P_1 - l)^2$$
$$\Rightarrow d_2 = \sqrt{(v_2)^2 + (P_1 - l)^2}$$

Finalmente podemos calcular o total de madeira (M) para a construção dessa tessaoura.

Figura 57: Esquema da tesoura com todos os elementos necessários para o cálculo



Fonte: Elaborada pela autora com base em [6]

Note,

$$M = H + 2 \cdot (a + B + v_1 + v_2 + d_1 + d_2)$$

$$\Rightarrow M = I \cdot a + 2 \cdot (a + a\sqrt{1 + I^2} + v_1 + v_2 + \sqrt{(v_1)^2 + (P_1 - l)^2} + \sqrt{(v_2)^2 + (P_1 - l)^2})$$

Sendo

$I$  = Inclinação do telhado (em decimais);

$a$  = Largura da tesoura dividida por 2;

$l$  = Largura da guia;

$$P_1 = \frac{2a + 5l}{6};$$

$$\alpha = \arctan(I);$$

$$v_1 = \left( \frac{2a + 5l}{6} \right) \cdot \tan \alpha;$$

$$v_2 = \frac{2(a + l)}{3} \cdot \tan \alpha;$$

Depois de descobrir o total de madeira ( $M$ ), basta multiplicá-lo pelo preço do metro de guia ( $R$ ) para se determinar o custo da Madeira de uma tesoura ( $C$ ), ou seja,  $C = M \cdot R$ .

## 2.7 Movimentação de um manipulador RR no plano

Braços robóticos vem a cada dia substituindo o trabalho humano nas indústrias. Isso ocorre por serem capazes de exercerem funções variadas e com precisão, em um curto intervalo de tempo.

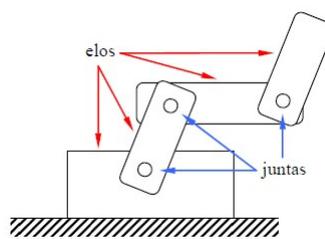
Figura 58: Manipuladores na indústria



Fonte:[7]

A movimentação de um braço robótico é possível devido aos elos e juntas presentes em sua composição, apesar de nem sempre ser fácil de percebê-los devido a estrutura do robô e as proteções que são colocadas para protegê-los do ambiente externo.

Figura 59: Elos e juntas



Fonte:[5](2016,p.15)

Segundo Fu (1987), conforme citado por [5], p.9, as juntas podem ser rotativas, prismáticas, cilíndricas, esféricas, de parafusos e planares, dependendo dos movimentos que as juntas são capazes de fazer. Elas podem se mover em uma, duas ou três direções (graus de liberdade) e são caracterizadas da seguinte forma:

- A junta prismática ou linear: move-se em linha reta. São compostas de duas hastes que deslizam entre si;

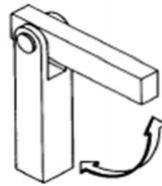
Figura 60: Junta prismática



Fonte:[21]

- A junta rotacional: gira em torno de uma linha imaginária estacionária chamada de eixo de rotação. Ela gira como uma cadeira giratória e abrem e fecham como uma dobradiça;

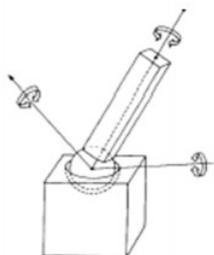
Figura 61: Junta Rotacional



Fonte:[21]

- A junta esférica funciona com a combinação de três juntas de rotação, e permite rotações em torno de três eixos distintos;

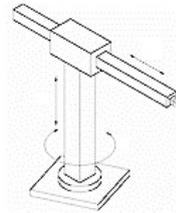
Figura 62: Junta Esférica



Fonte: Referência [21]

- A junta cilíndrica é composta por duas juntas, uma rotacional e uma prismática;

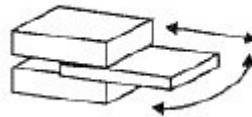
Figura 63: Junta Cilíndrica



Fonte: [22]

- A junta planar é composta por duas juntas prismáticas, e realiza movimentos em duas direções;

Figura 64: Junta Planar



Fonte: [23]

- A junta tipo fuso ou parafuso é constituída de um parafuso e uma rosca que executa um movimento semelhante ao da junta prismática, porém, com movimento de rotação no eixo central (movimento do parafuso).

Figura 65: Junta tipo fuso

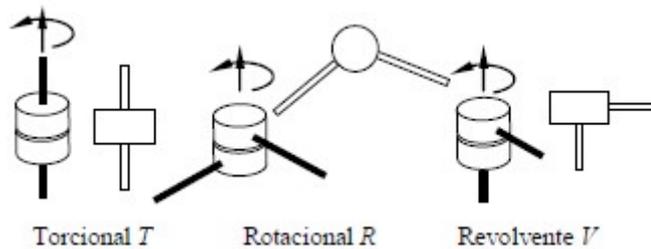


Fonte: [24]

De acordo com [5], p.9, as juntas rotativas segundo as direções dos elos de entrada e saída em relação ao eixo de rotação, podem ser classificadas da seguinte forma:

- Rotativa de torção ou torcional T, quando os elos de entrada e de saída tem a mesma direção do eixo de rotação da junta.
- Rotativa rotacional R, quando os elos de entrada e saída são perpendiculares ao eixo de rotação da junta.
- Rotativa revolvente V, quando o elo de entrada possui a mesma direção do eixo de rotação, mas o eixo de saída é perpendicular a este.

Figura 66: Representação esquemática das juntas



Fonte: Referência [5](2015, p.10)

Nessa aplicação analisaremos a cinemática direta e inversa de um braço robótico que possui duas juntas rotativas rotacionais (R).

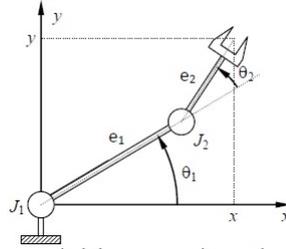
Vamos entender alguns termos que serão utilizados:

A cinemática de um braço robótico nada mais é do que o estudo dos movimentos feitos por esse braço, sem levar em consideração os fatores que possibilitam esses movimentos. O estudo desses movimentos nos ajuda a prever a posição do braço em qualquer ponto de acordo com a movimentação das juntas.

A cinemática direta, segundo [5], p.41, é o estudo da posição da extremidade do braço, com base nas medidas do ângulo de cada junta e a cinemática inversa é o estudo dos ângulos que cada junta deve efetuar, com base no conhecimento prévio da posição desejada.

Nessa aplicação calcularemos a cinemática direta e a cinemática inversa de um manipulador RR de elos com comprimentos  $e_1$  e  $e_2$  movendo-se em num plano vertical.

Figura 67: Manipulador RR em movimento plano vertical

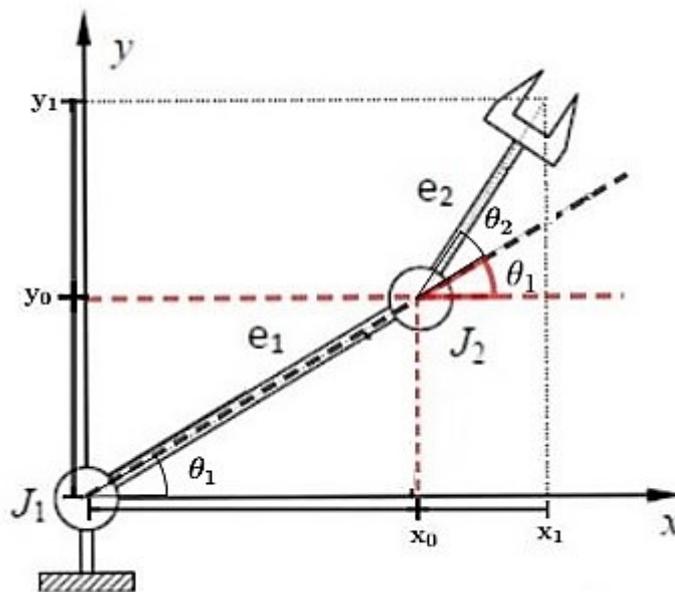


Fonte: Elaborada pela autora com base em [5]

### Cinemática direta

Conhecendo  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , vamos determinar a posição alcançada pelo braço, nesse caso, o ponto  $(x_1, y_1)$ , conforme Figura 68.

Figura 68: Medidas envolvidas na movimentação de um manipulador RR



Fonte: Elaborada pela autora com base em [5]

Note,

- $\sin \theta_1 = \frac{y_0}{e_1} \Rightarrow y_0 = e_1 \cdot \sin \theta_1$
- $\sin (\theta_1 + \theta_2) = \frac{(y_1 - y_0)}{e_2} \Rightarrow y_1 - y_0 = e_2 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2)$

- $\cos \theta_1 = \frac{x_0}{e_1} \Rightarrow x_0 = e_1 \cdot \cos \theta_1$
- $\cos (\theta_1 + \theta_2) = \frac{(x_1 - x_0)}{e_2} \Rightarrow x_1 - x_0 = e_2 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2)$

Como  $y_1 = y_0 + (y_1 - y_0)$  e  $x_1 = x_0 + (x_1 - x_0)$ .

Segue,

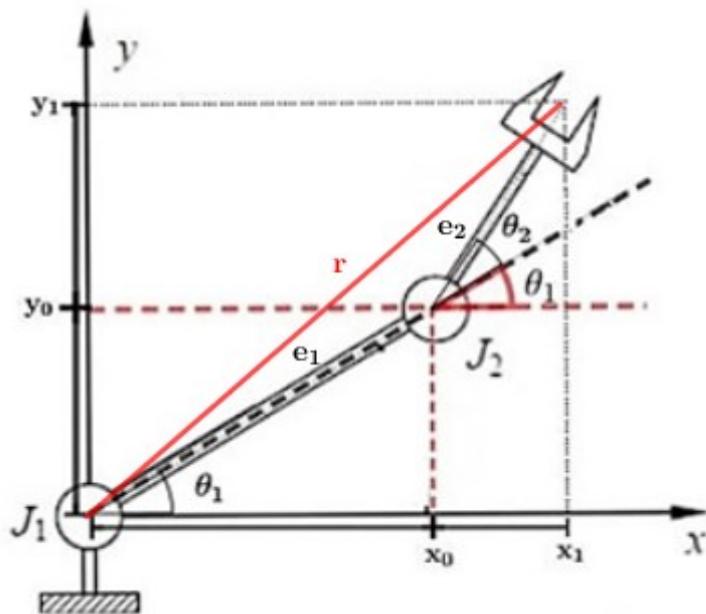
$$x_1 = e_1 \cdot \cos \theta_1 + e_2 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_1 = e_1 \cdot \sin \theta_1 + e_2 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2)$$

O comprimento dos elos ( $e_1$  e  $e_2$ ) é fornecido pelo fabricante do manipulador.

### Cinemática inversa

Figura 69: Geometria de um manipulador



Fonte: Elaborada pela autora com base em [5]

Haja vista que conhecemos a posição  $(x_1, y_1)$  que a extremidade do robô pretende atingir, encontraremos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

Observe que  $r^2 = x_1^2 + y_1^2$ .

Daí,

$$\begin{aligned}
 r^2 &= [e_1 \cdot \cos \theta_1 + e_2 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2)]^2 + [e_1 \cdot \sin \theta_1 + e_2 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2)]^2 \\
 \Rightarrow r^2 &= \{e_1^2 \cdot (\cos \theta_1)^2 + 2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) + e_2^2 \cdot [\cos (\theta_1 + \theta_2)]^2\} + \\
 &\quad \{e_1^2 \cdot (\sin \theta_1)^2 + 2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2) + e_2^2 \cdot [\sin (\theta_1 + \theta_2)]^2\} \\
 \Rightarrow r^2 &= e_1^2 [(\cos \theta_1)^2 + (\sin \theta_1)^2] + e_2^2 \{[\cos (\theta_1 + \theta_2)]^2 + [\sin (\theta_1 + \theta_2)]^2\} + \\
 &\quad 2e_1e_2 [\cos \theta_1 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta_1 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2)]
 \end{aligned}$$

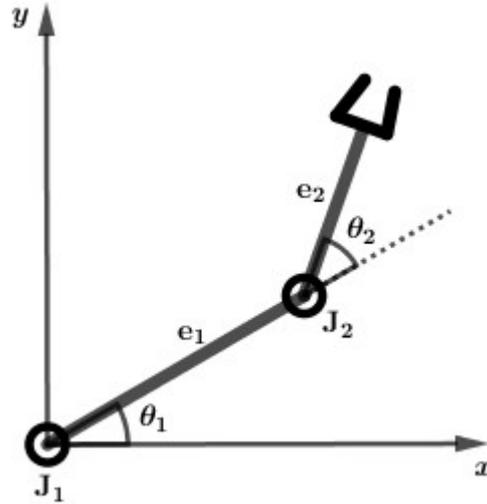
Atente para o fato que  $\cos \theta_1 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta_1 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2)$  é o cosseno da diferença  $[\theta_1 - (\theta_1 + \theta_2)]$  e que pela relação fundamental da trigonometria,  $(\cos \theta_1)^2 + (\sin \theta_1)^2$  e  $[\cos (\theta_1 + \theta_2)]^2 + [\sin (\theta_1 + \theta_2)]^2$  são iguais a 1. Além disso, temos que  $\cos(-\theta_2) = \cos \theta_2$

Logo,

$$\begin{aligned}
 r^2 &= x_1^2 + y_1^2 = e_1^2 + e_2^2 + 2e_1e_2 \cos \theta_2 \\
 \Rightarrow \cos \theta_2 &= \frac{x_1^2 + y_1^2 - e_1^2 - e_2^2}{2e_1e_2} \\
 \Rightarrow \theta_2 &= \pm \arccos \left( \frac{x_1^2 + y_1^2 - e_1^2 - e_2^2}{2e_1e_2} \right)
 \end{aligned}$$

Ao tomarmos  $\theta_2 > 0$  estamos considerando a situação em que a junta 2 está voltada para baixo.

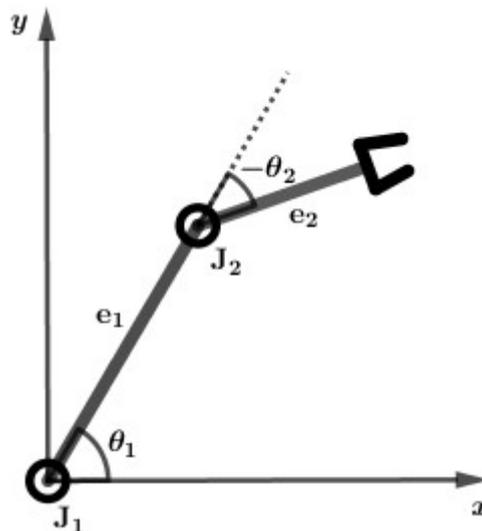
Figura 70: Junta 2 voltada para baixo



Fonte: Elaborada pela autora com base em [5].

Ao tomarmos  $\theta_2 < 0$  estamos considerando a situação em que a junta 2 está voltada para cima.

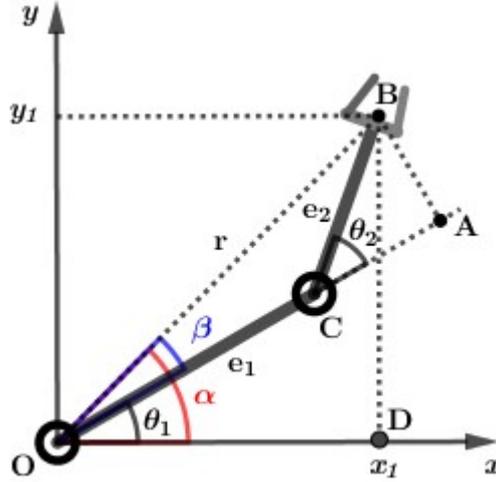
Figura 71: Junta 2 voltada para cima



Fonte: Elaborada pela autora com base em [5].

Considere a Figura 72 para o cálculo da medida de  $\theta_1$ .

Figura 72: Ângulos do manipulador RR para a determinação da cinemática inversa



Fonte: Elaborada pela autora com base em [5].

Atente para o fato que  $\theta_1 = \alpha - \beta$ . Segue daí, que podemos obter  $\theta_1$  usando a tangente da diferença entre os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ .

$$\tan \theta_1 = \tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Observando os triângulos OAB e ABC, temos:

- $\overline{AC} = e_2 \cos \theta_2$
- $\overline{AB} = e_2 \sin \theta_2$
- $\tan \alpha = \frac{y_1}{x_1}$
- $\tan \beta = \frac{\overline{AB}}{e_1 + \overline{AC}} = \frac{e_2 \sin \theta_2}{e_1 + e_2 \cos \theta_2}$

Logo,

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{e_2 \sin \theta_2}{e_1 + e_2 \cos \theta_2}}{1 + \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{e_2 \sin \theta_2}{e_1 + e_2 \cos \theta_2}} \\ &= \frac{y_1 \cdot (e_1 + e_2 \cos \theta_2) - x_1 \cdot (e_2 \sin \theta_2)}{x_1 \cdot (e_1 + e_2 \cos \theta_2) + y_1 \cdot (e_2 \sin \theta_2)} \\ &\Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{x_1 \cdot (e_1 + e_2 \cos \theta_2)}{x_1 \cdot (e_1 + e_2 \cos \theta_2) + y_1 \cdot (e_2 \sin \theta_2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{y_1 \cdot (e_1 + e_2 \cos \theta_2) - x_1 \cdot (e_2 \sin \theta_2)}{x_1 \cdot (e_1 + e_2 \cos \theta_2) + y_1 \cdot (e_2 \sin \theta_2)}$$

Como o valor de  $\theta_1$  depende do valor de  $\theta_2$  e este possui dois valores distintos, encontraremos dois valores também para  $\theta_1$ . A escolha entre qual dos valores utilizar fica por conta do programador, que pode escolher selecionar o cotovelo para cima ou para baixo.

## 2.8 Altura das ondas no litoral piauiense

A Praia de Atalaia em Luis Correia é o destino de muitos para passar o Réveillon. A chegada dos turistas traz à tona uma preocupação em relação à segurança, pois devido ao número de pessoas, crianças se perdem com facilidade e muitas pessoas ingerem mais bebidas alcoólicas do que o recomendado. Nessa época do ano existe uma grande preocupação em relação a afogamentos.

Figura 73: Praia de Atalaia - Luis Correia



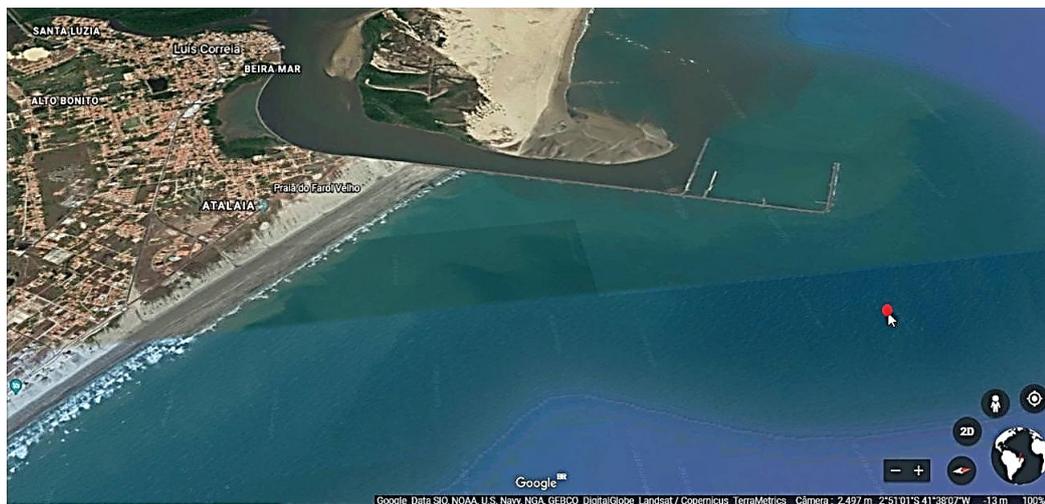
Fonte: [25]

Ao percebermos essa situação, alguns questionamentos podem ser feitos em relação ao comportamento das ondas nesse trecho do litoral: Qual é a altura média das ondas na praia de Atalaia no decorrer do ano? Existe a possibilidade de descobrirmos em um dado instante, a altura aproximada das ondas na praia de Atalaia?

Nessa aplicação apresentaremos um modelo matemático que nos permitirá prever a altura das ondas na praia de Atalaia no dia 31/12/2018, baseado nas previsões elaboradas no Centro de Hidrografia da Marinha (CHM). Os dados utilizados se referem

ao ponto do mapa que tem Latitude  $02^{\circ}51'.1$  S e Longitude  $041^{\circ}38'.7$  W. Observemos sua localização na Figura 74.

Figura 74: O ponto de onde foram feitas as previsões



Fonte: Google Earth

Primeiramente vamos apresentar as previsões de altura das marés feitas para o dia 31/12/2018 de acordo com [26].

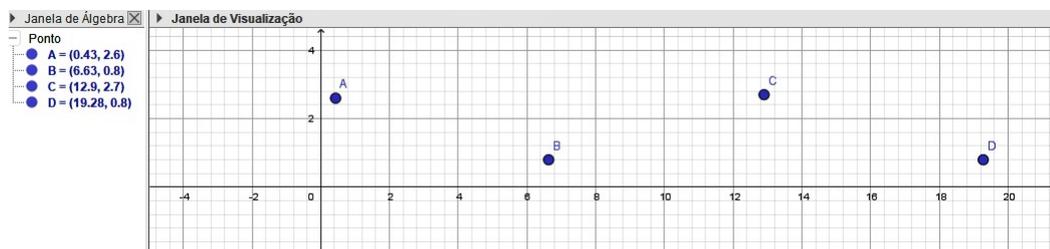
Tabela 3: As previsões feitas pelo CHM da altura das marés

HORÁRIO (horas)	HORÁRIO (na forma decimal)	ALTURA (metros)
00:26	0,43	2,6
06:38	6,63	0,8
12:54	12,9	2,7
19:17	19,28	0,8

Fonte: Elaborada pela autora com base em [26]

Usando o software GeoGebra representamos graficamente os dados, como mostra a Figura 75.

Figura 75: Os pontos de acordo com as previsões



Fonte: Elaborada pela autora com base em [26]

Utilizando a função Seno para modelar essa situação, torna-se necessário fazer aproximações para adequar os dados as suas características. Uma das características que deve ser observada, é que a função seno é periódica, logo os intervalos entre as marés devem ser iguais, para conseguirmos obter o período da função.

Dividindo os horários em intervalos de tempo iguais, temos:

Tabela 4: Horários depois das aproximações

HORÁRIO	HORÁRIO (Depois das aproximações)
0,43	0,43
6,63	6,71
12,9	12,99
19,28	19,27

Fonte: Elaborada pela autora com base [26]

Em seguida, vamos calcular as médias entre as alturas das marés baixas e das marés altas nesse dia.

Média das marés baixas =  $\frac{0,8+0,8}{2} = 0,8$  e Média das marés altas =  $\frac{2,6+2,7}{2} = 2,65$

Logo, o modelo matemático que será apresentado terá como base os valores da tabela seguinte.

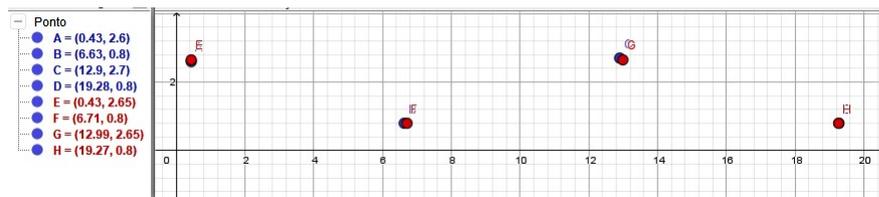
Tabela 5: Valores que serão utilizados no modelo

HORÁRIO	ALTURA
0,43	2,65
6,71	0,8
12,99	2,65
19,27	0,8

Fonte: Elaborada pela autora

Observe a comparação gráfica entre os valores reais e as aproximações feitas.

Figura 76: Valores reais e os valores depois das aproximações



Fonte: Elaborada pela autora com base em [26]

Como as marés sobem e descem no decorrer do dia, podemos utilizar a função Seno para representar esse movimento, isto é, a função que utilizaremos terá a forma  $f(t) = a + b \sin(ct + d)$ . A amplitude de um senóide é 1 e varia de  $[-1, 1]$ . Note que a variável  $b$  é que modificará a amplitude do gráfico da função  $f$ , pois o valor máximo que podemos encontrar para  $\sin(ct + d)$  é 1. Já a variável  $a$ , é responsável pelo deslocamento vertical do gráfico da função. Nessa aplicação, para calcularmos o valor de  $a$ , basta fazermos a média aritmética entre a altura máxima e a altura mínima das ondas.

Daí,

$$a = \frac{2,65 + 0,8}{2} = \frac{3,45}{2} \approx 1,73$$

Para calcular o valor de  $b$

$$2,65 = 1,73 + b \cdot \sin(cx + d)$$

$$\Rightarrow 2,65 = 1,73 + b \cdot 1$$

$$\Rightarrow 2,65 - 1,73 = b$$

$$\Rightarrow b = 0,92$$

O período ( $p$ ) de uma função seno é dado por  $\frac{2\pi}{c}$ . Nessa aplicação, o valor do período corresponde ao tempo de uma maré alta até outra ou de uma maré baixa até outra maré baixa.

Logo,

$$p = 12,99 - 0,43 = 12,56$$

Segue,

$$p = 12,56 = \frac{2\pi}{c}$$

$$\Rightarrow c = \frac{2\pi}{12,56}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6,28}$$

Colocando os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  na função  $f$ , temos:

$$f(t) = 1,73 + 0,92 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6,28}t + d\right)$$

. Para obtermos a variável  $d$ , como o gráfico da função  $f$  deve passar pelo ponto  $(0,43; 2,65)$ , segue:

$$f(0,43) = 1,73 + 0,92 \cdot \sin\left(\frac{0,43\pi}{6,28} + d\right)$$

$$\Rightarrow 2,65 = 1,73 + 0,92 \cdot \sin\left(\frac{0,43\pi}{6,28} + d\right)$$

$$\Rightarrow 2,65 - 1,73 = 0,92 \cdot \sin\left(\frac{0,43\pi}{6,28} + d\right)$$

$$\Rightarrow 0,92 = 0,92 \cdot \sin\left(\frac{0,43\pi}{6,28} + d\right)$$

$$1 = \sin\left(\frac{0,43\pi}{6,28} + d\right)$$

Aplicando a inversa de seno em ambos os membros,

$$\arcsin 1 = \arcsin \left[ \sin \left( \frac{0,43\pi}{6,28} + d \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{0,43\pi}{6,28} + d$$

$$\Rightarrow d = \frac{\pi}{2} - \frac{0,43\pi}{6,28}$$

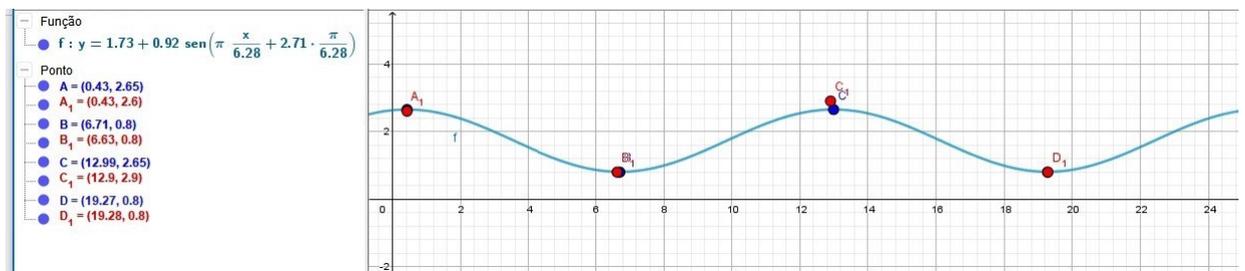
$$\Rightarrow d = \frac{3,14\pi - 0,43\pi}{6,28}$$

$$\Rightarrow d = \frac{2,71}{6,28}\pi$$

Portanto,  $f(t) = 1,73 + 0,92 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{6,28}t + \frac{2,71}{6,28}\pi \right)$  representa um modelo matemático para o movimento das marés no dia 31/12/2018 em Luis Correia em função do tempo.

A Figura 77 mostra a função  $f$ , os valores das previsões (pontos azuis) e das aproximações (pontos vermelhos) utilizados.

Figura 77: Função  $f$



Fonte: Elaborada pela autora

A tabela abaixo apresenta uma comparação entre os dados do CHM e os obtidos com a função trigonométrica  $f(t) = 1,73 + 0,92 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{6,28}t + \frac{2,71}{6,28}\pi \right)$ .

Tabela 6: Comparação entre os dados

t	ALTURA (CHM)	ALTURA (Valor estimado pelo modelo - $f(t)$ )
0,43	2,6	2,65
6,63	0,8	0,81073664848
12,9	2,7	2,64906771231
19,28	0,8	0,81001151164

Fonte: Elaborada pela autora com base em [26].

Assim, ao observarmos os dados da tabela concluímos que o modelo encontrado consegue descrever o movimento das ondas na praia de Atalaia no dia 31/12/2018.

### 3 Considerações Finais

O processo de ensino e aprendizagem não pode mais ser pautado no modelo da Escola Tradicional, os alunos não vão para a escola apenas para assimilar conhecimentos. Existe a necessidade de interagir com o conhecimento e isso somente será possível quando o aluno descobrir a significância daqueles conhecimentos na vida fora do contexto escolar.

Preparar uma aula na qual o aluno interaja e perceba a importância daquele conhecimento, não é fácil. O professor precisa se comprometer a ir buscar constantemente novas aplicações e metodologias para aplicar na sala de aula.

Esse trabalho apresenta algumas aplicações que podem servir de apoio bibliográfico para aqueles professores que tem interesse em tornar suas aulas mais significativas.

Espera-se que esse trabalho possa incentivar professores a buscarem e criarem mais aplicações voltadas para utilização na Educação Básica.

## Referências

- [1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9050: Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos**. Rio de Janeiro, p.148. 2015.
- [2] ÁVILA, Geraldo. Se eu fosse professor de Matemática. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n.54, 2 quadrimestre, 2004. Disponível em: <[www.rpm.org.br/cdrpm/54/1.htm](http://www.rpm.org.br/cdrpm/54/1.htm)>. Acesso em: 26 mar. 2018.
- [3] ÁVILA, Geraldo. Aristarco e as dimensões astronômicas. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n.55,3 quadrimestre, 2004. Disponível em: <[www.rpm.org.br/cdrpm/55/1.htm](http://www.rpm.org.br/cdrpm/55/1.htm)>. Acesso em: 25 mar. 2018.
- [4] CARMO, Manfredo Perdigão do;MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria Números Complexos**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 177p.
- [5] CARRARA, Valdemir. Introdução à Robótica Industrial. São José dos Campos: INPE, 2015. 101p. (sid.inpe.br/mtc-m21b/2015/08.25.14.16-PUD) Disponível em: <<http://URLIB.NET/8JMKD3MGP3W34P/3K5JPL8>>. Acesso em: 23 set. 2018.
- [6] CERVI, Angéli; BINS, Rosane ; BORGES, Pedro Augusto Pereira . A Modelagem Matemática na construção de telhados com diferentes tipos de telhas. In: IX EGEM - Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2006, Caxias do Sul. Educação Matemática Frente às Diferenças: Como educar na diversidade? Como educar para a diversidade?, 2006.
- [7] CIM Automação - Braços robóticos. Disponível em: <<http://www.cimautomacao.com.br/lp/imgs/braco-robotico-industrial-2.jpg>> Acesso em: 23 ago. 2018.
- [8] LIMA, Elon lages. **Matemática e Ensino**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 250p.(Coleção do Professor de Matemática)
- [9] LIMA, Elon lages et al.**Temas e problemas Elementares**. 5.ed. Rio de Janeiro:SBM, 2013. 335p. (Coleção PROFMAT)

- [10] LIMA, Elon lages et al. **Temas e problemas** .3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 225p. (Coleção do Professor de Matemática)
- [11] LIMA, Elon lages et al. **A Matemática do Ensino Médio-vol1**. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 280p. (Coleção do Professor de Matemática)
- [12] MICHELSON, L. L.; MENDONCA, S. C. ; BRAGA, G. S. ; VERTUAN, Rodolfo E.. Uma atividade de modelagem matemática sobre as marés na perspectiva do ensino e aprendizagem da matemática. 2016. (Apresentação de Trabalho/Comunicação).
- [13] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 471p. (Coleção PROFMAT)
- [14] OLIVEIRA, Davide Jorge Pereira Novais de. **Braço robótico manipulador para aplicação em robô de serviços**. Universidade do Minho, Portugal, Setembro, p.47-54 2010.
- [15] SCHELCK, Paula Aparecida Aquiles do Valle. **O uso da trigonometria na construção de rampas de acesso**. 2015. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, p.29-37. 2015.
- [16] SANTOS, Júlio César Furtado dos. O Desafio de promover a Aprendizagem Significativa. 2007. Disponível em: <[http://www.unisul.br/wps/wcm/connect/a7c548f3-6254-4148-8b48-9fd0497b5ad4/desafio-aprendizagem-significativa\\_integracaouniversitaria\\_extensao.pdf?MO=D=AJPERES](http://www.unisul.br/wps/wcm/connect/a7c548f3-6254-4148-8b48-9fd0497b5ad4/desafio-aprendizagem-significativa_integracaouniversitaria_extensao.pdf?MO=D=AJPERES)> Acesso em: 13 jul. 2017.
- [17] <<http://jconlineimagem.ne10.uol.com.br/imagem/noticia/2017/08/21/normal/80bc22459adac0741237c78a711f0ed7.jpg>> Acesso em: 13 de outubro de 2018.
- [18] <[https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/modelagem/Modelagem\\_Tesouras\\_Web/modela6.gif](https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/modelagem/Modelagem_Tesouras_Web/modela6.gif)> Acesso em: 13 de outubro de 2018.
- [19] <[https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQYPKR3q8A8bTiQsX20jY6TJKifBPXv\\_\\_UBnDbGzgJPY3jXwhc](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQYPKR3q8A8bTiQsX20jY6TJKifBPXv__UBnDbGzgJPY3jXwhc)> Acesso em: 13 de outubro de 2018.

- [20] <[https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSDjw5do9csRzNTc-KfsPdGEonYdlKeT\\_evUf7eWVRzstL2jBIz](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSDjw5do9csRzNTc-KfsPdGEonYdlKeT_evUf7eWVRzstL2jBIz)> Acesso em: 13 de outubro de 2018.
- [21] <<https://image.slidesharecdn.com/20160919003239aula3-170511221244/95/20160919003239aula-3-8-638.jpg?cb=1494540842>> Acesso em: 13 de outubro de 2018.
- [22] <<http://www.profelectro.info/wp-content/uploads/juntas4.jpeg>> Acesso em: 13 de outubro de 2018.
- [23] <<http://www.profelectro.info/wp-content/uploads/juntas5.jpeg>> Acesso em: 13 de outubro de 2018.
- [24] <<http://www.profelectro.info/wp-content/uploads/juntas6.jpeg>> Acesso em: 13 de outubro de 2018.
- [25] <[http://www.proparnaiba.com/sites/default/files/imagecache/internapost/materias\\_images/praias\\_-\\_redim\\_0.jpg](http://www.proparnaiba.com/sites/default/files/imagecache/internapost/materias_images/praias_-_redim_0.jpg)> Acesso em: 13 de outubro de 2018.
- [26] <[https://www.marinha.mil.br/chm/sites/www.marinha.mil.br.chm/files/dados\\_de\\_mare/luis\\_correia\\_2018.pdf](https://www.marinha.mil.br/chm/sites/www.marinha.mil.br.chm/files/dados_de_mare/luis_correia_2018.pdf)> Acesso em: 13 de outubro de 2018.
- [27] <[http://topografiapoli.pbworks.com/w/file/fetch/77583296/MMacedo\\_TopAlt\\_Nivelamento\\_Trigonometrico.pdf](http://topografiapoli.pbworks.com/w/file/fetch/77583296/MMacedo_TopAlt_Nivelamento_Trigonometrico.pdf)> Acesso em: 13 de outubro de 2018.