



Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e
Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: UMA ESTRATÉGIA PARA UM APRENDIZADO SIGNIFICATIVO

José Jocione da Silva

Teresina

2018

José Jociene da Silva

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO
MÉDIO: UMA ESTRATÉGIA PARA UM
APRENDIZADO SIGNIFICATIVO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual do Piauí, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Modelagem Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo
Silva Brito.

Teresina

2018

S586m Silva, José Jociene da.

Modelagem matemática no ensino médio: uma estratégia para um aprendizado significativo / José Jociene da Silva. - 2018.
75f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.
“Orientador(a): Prof.(a) Dr. Arnaldo Silva Brito.”

1. Modelagem Matemática. 2. Modelo Matemático.
3. Ensino Médio. I. Título.

CDD: 511.8

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz (Bibliotecária) CRB 3/1067

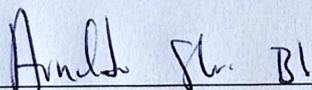
JOSÉ JOCIONE DA SILVA

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: UMA ESTRATÉGIA
PARA UM APRENDIZADO SIGNIFICATIVO.**

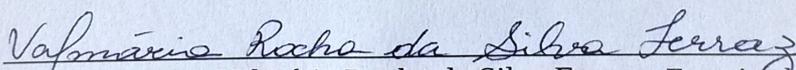
Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA

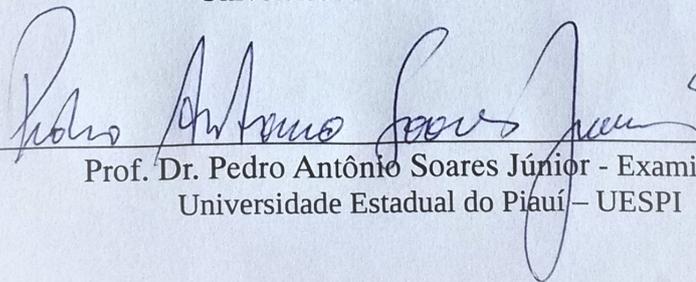
Aprovado por:



Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito - Presidente e Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI



Prof.^a. Dr.^a. Valmária Rocha da Silva Ferraz - Examinadora
Universidade Federal do Piauí - UFPI



Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior - Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

José Jcione da Silva, graduou-se em Matemática pela Universidade Federal do Piauí no ano de 2006, foi orientador de estudos no programa (PPFEM), Pacto Pelo Fortalecimento do Ensino Médio promovido pelo (MEC) no ano de 2015, especializou-se em ensino de matemática do ensino médio pela Universidade Estadual do Piauí no ano de 2016 e concluiu o curso de mestrado profissional em matemática (PROFMAT) no ano de 2018 pela Universidade Estadual do Piauí (UESPI), durante a graduação foi bolsista na secretaria municipal de educação de Teresina de 2004 a 2006, foi professor substituto na rede estadual de educação do Piauí de 2006 a 2012, é professor efetivo da rede municipal de educação de Teresina desde de 2010 e professor efetivo da rede estadual de educação do Piauí desde 2012.

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha família, meus filhos, Sofia Cristina, Jocione Júnior e à minha esposa Jocirene Reis.

Agradecimentos

Agradeço à Deus em primeiro lugar, pois sempre esteve me abençoando com seu amor.

Agradeço à minha esposa, por ter me dado forças nos momentos mais difíceis dessa jornada. Agradeço aos meus filhos Sofia Cristina e Jocione Júnior por ser minha maior fonte de energia para eu continuar estudando, mesmo tendo que me ausentar para me dedicar aos estudos.

Agradeço aos Professores: Arnaldo Silva Brito pelas orientações no decorrer desse trabalho, Pedro Júnior, Helder Borges, Afonso Norberto, Newton pelos incentivos e dedicação que tiveram comigo que permitiram que eu desenvolvesse esse trabalho e a professora Valmária que compôs a banca examinadora contribuindo bastante para uma melhora no meu trabalho .

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro parcial durante o curso.

Agradeço aos meus colegas companheiros do curso, aos meus colegas de trabalho da Unidade Escolar Hilton Leite de Carvalho e da Escola Municipal Parque Piauí.

Para isso existem as escolas: não para ensinar as respostas, mas para ensinar as perguntas. As respostas nos permitem andar sobre a terra firme. Mas somente as perguntas nos permitem entrar pelo mar desconhecido.

Rubem Alves.

Resumo

Neste trabalho, fazemos um breve histórico sobre o uso da modelagem matemática na antiguidade, bem como seus precursores no Brasil; demonstramos as etapas do processo de modelagem matemática utilizando como tema, o serviço de transporte de passageiro não convencional em Teresina "UBER" e alguns modelos: lineares que utilizamos para estimar o comprimento em função do tempo de cultivo de uma espécie de peixe cultivado aqui no Brasil, a "Tilápia do Nilo", o modelo quadrático que utilizamos para estimar o peso em função do tempo de cultivo da "Tilápia do Nilo" e os modelos determinísticos de Malthus e de Verhurst que aplicamos para estimarmos o crescimento da população piauiense e ao compararmos os dois modelos, verificamos que o Modelo de Verhurst se mostrou mais eficiente. Com o intuito de diminuir a dicotomia que existe entre o que é ensinado e o que é aprendido pelos alunos, estudamos a possibilidade da utilização da modelagem matemática como estratégia de ensino, fazendo uso dos modelos aplicando-os em situações reais.

Palavras-chave

Modelagem matemática, Ensino, modelo matemático.

Abstract

In this work, we make a brief history about the use of mathematical modeling in antiquity, as well as its precursors in Brazil; we show the steps of the mathematical modeling process using as theme the unconventional passenger transport service in Teresina "UBER" hspace 0.2cm and some linear models that we use to estimate the length as a function of the time of cultivation of a the Nile Tilapia, the quadratic model we used to estimate the weight as a function of the time of cultivation of the "Nile Tilapia" and the deterministic models of Malthus and Verhurst model that we applied to estimate the growth of the Piauí population and when comparing the two models, we verified that the Model of Verhurst was more efficient. In order to reduce the dichotomy between what is taught and what is learned by students, we study the possibility of using mathematical modeling as a teaching strategy, making use of the models by applying them in real situations.

Keywords

Mathematical modeling, teaching, model mathematics.

Lista de Figuras

1	Modelo Geocêntrico do sistema planetário de Ptolomeu	21
2	Cidade de Königsberg por volta do ano de 1700	22
3	Diagrama matemático de Euler das pontes de Königsberg	22
4	Aristides Camargo Barreto	24
5	Rodney Carlos Bassanezi	25
6	Ubiratan D'Ambrosio	26
7	Etapas do processo de modelagem matemática.	32
8	Curva Logística	46
9	Gráfico da taxa de crescimento $\frac{dP}{dt}$ em função da população $P(t)$	50
10	Gráfico da evolução da população $P(t)$ em função do tempo t	51
11	Percurso do bairro Promorar, Teresina-Pi ao bairro Saci, Teresina-Pi.	54
12	Gráfico de dispersão do comprimento em função do tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.	58
13	Equação da reta de ajuste do comprimento em função do tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.	60
14	Gráfico de dispersão do peso em função do tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.	62
15	Gráfico da parábola de ajuste do peso em função do tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.	64
16	Reta das médias populacionais P_i em função das taxas médias r_i da população piauiense em cada censo considerado.	69
17	Gráfico de dispersão da evolução da população piauiense obtido através do Modelo de Verhurst.	71

Lista de Tabelas

1	Tarifas cobradas pelo serviço Uber na cidade de Teresina-PI.	54
2	Comparação dos valores observados com os valores estimados da viagem utilizando o serviço UBER	56
3	Resumo dos dados referente ao período de cultivo da tilápia do Nilo. . .	57
4	Dados sobre comprimento e tempo referente ao período de cultivo da Tilápia do Nilo.	59
5	Comparação dos valores estimados com os valores observados referentes ao comprimento e tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.	61
6	Dados referente ao peso e tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.	62
7	Dados referente ao peso e tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.	63
8	Comparação dos valores estimados com os valores observados referentes ao peso em função do tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.	64
9	Número de habitantes do Piauí nos seus respectivos censos (1940 - 2010).	65
10	Comparação dos valores estimados e dos valores observados da população piauiense.	67
11	Valores das taxas médias r_i e populações médias P_i do Piauí em cada censo considerado.	68
12	Comparação dos dados observados e os dados estimados da população piauiense usando o modelo de Verhurst.	70

Sumário

1	Introdução	15
2	Fundamentação teórica	19
2.1	Breve histórico	19
2.1.1	A modelagem matemática na antiguidade	19
2.1.2	A modelagem matemática no Brasil	23
2.2	Modelagem matemática	27
2.2.1	Modelo matemático	29
2.2.2	Etapas da modelagem matemática	31
2.2.3	Modelagem matemática no ensino	33
2.3	Modelo linear	36
2.4	Modelo Quadrático	38
2.5	Método dos Mínimos Quadrados	39
2.6	Modelos determinísticos de populações isoladas	39
2.6.1	Modelo discreto Malthusiano	42
2.6.2	Curva Logística	44
2.6.3	Modelo Logístico contínuo (Verhurst)	46
3	Metodologia	52
3.1	Aplicações da Modelagem Matemática	52
3.1.1	Aplicação da modelagem demonstrando suas etapas	52
3.1.2	Modelo Linear	56
3.1.3	Modelo Quadrático	61
3.1.4	Modelo discreto Malthusiano	65
3.1.5	Modelo Logístico contínuo (Verhurst)	67

1 Introdução

Como descrever o movimento dos planetas por meio da matemática? Como descrever matematicamente o custo e o lucro de uma empresa para analisar o melhor caminho para uma certa produção? Como utilizar a matemática para descrever a dinâmica populacional de certa região para um melhor controle de qualidade de vida? Para responder a essas perguntas e outras num contexto matemático, buscamos uma maneira de representar esses problemas em uma linguagem matemática procurando relacionar o mundo real com a matemática. Para Bassanezi (2014, p.15):

"Ao contrário dos que acreditam ser a matemática aplicada uma matemática inferior onde os problemas são abordados com técnicas modestas ou métodos computacionais que desvalorizam esta ciência, pensamos que, para o desenvolvimento de um modelo de educação menos alienado e mais e mais comprometido com as realidades dos indivíduos e sociedades, necessitamos lançar mão de instrumentos matemáticos inter-relacionados a outras áreas do conhecimento humano."

Neste trabalho temos como linha de pesquisa a "Modelagem Matemática", que se mostra uma boa ferramenta no processo de ensino-aprendizagem. Tive contato com o tema, no ano de 2015, quando tive a oportunidade de participar de um programa desenvolvido pelo Ministério da Educação, onde eu exercia a função de orientador de estudo da escola onde trabalho. Dentre minhas atribuições, uma era orientar os professores nas atividades que eram propostas pelo programa e dentre os conteúdos estudados como: Parâmetros Curriculares, Avaliação e Metodologias e que na metodologia propus um projeto que consistia em: Reunidos com todos os professores, nós tínhamos que eleger um tema qualquer e a partir daí que esses elaborassem problemas relacionada com esse tema e posteriormente ir em busca de soluções juntamente com os alunos

sendo dessa forma uma metodologia semelhante a utilizada no processo de Modelagem Matemática.

Ao analisarmos a importância do uso da modelagem matemática no processo de ensino aprendizagem, buscamos mostrar que o processo de modelagem matemática, propicia ao aluno um contato direto com os conteúdos que são expostos nos livros didáticos, e ao verificar que a modelagem matemática, pode ser usada como ferramenta no processo de ensino aprendizagem, e apresentamos a modelagem matemática através da resolução de problemas reais como uma forma do estudante compreender melhor os conteúdos de matemática.

O ser humano sempre buscou entender, explicar o mundo e seus fenômenos, logo a busca por modelos que explicassem, pelo menos descrevessem esses fenômenos se manifesta desde os tempos mais remotos.

A modelagem matemática como é conhecida hoje, tem estado presente na vida diária do ser humano desde os tempos mais primitivos, surgindo de aplicações na rotina dos povos antigos. A expressão se deu no Renascimento, quando se construíram as primeiras ideias da Física apresentadas segundo uma linguagem e tratamentos matemáticos. Hoje, a modelagem matemática se apresenta como um ramo próprio da matemática, que em sua essência, tenta traduzir uma situação real para uma linguagem matemática, possibilitando assim uma melhor compreensão, previsão, simulação ou ainda, mudar determinadas estratégias de ação nas mais variadas áreas do conhecimento. Na educação brasileira, a modelagem matemática é mais recente, somente nas últimas quatro décadas, ela veio a ganhar adeptos como Aristides Camargo Barreto, Rodney Carlos Bassanezi, Maria Salett Biembengut entre outros.

Vários desafios que encontramos hoje, ao tentarmos educar nossos alunos para que esses sejam capazes de seguirem em seus estudos nas diversas áreas do conhecimento,

tem tornado crescente um movimento em prol da educação matemática, pois para alguns estudiosos nessa área, os alunos aprendendo matemática, desenvolverão seu raciocínio lógico e embora não apliquem os conceitos matemáticos aprendidos durante o processo na profissão que escolherem, esses possuirão uma melhor capacidade de aprendizagem. Conforme Biembengut e Hein (2009, P.9):

"Desafios como esse têm tornado crescente o movimento em prol da educação matemática, em especial, nas últimas décadas. Têm gerado reestruturações no currículo e nos métodos de ensino que fornecem elementos que desenvolvam potencialidades, propiciando ao aluno a capacidade de pensar crítica e independentemente. Não é difícil perceber que o futuro da civilização e da própria sobrevivência dependem da qualidade de imaginação criadora dos homens e das mulheres do nosso tempo e das futuras gerações. [...]. A matemática, alicerce de quase todas as áreas do conhecimento e dotada de uma arquitetura que permite desenvolver os níveis cognitivos e criativo, tem sua utilização defendida, nos mais diversos graus de escolaridade, como meio para fazer emergir essa habilidade em criar, resolver problemas, modelar."

Atualmente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nas suas diversas abordagens dos conteúdos de matemática já traz em uma das áreas a serem estudadas com obrigatoriedade, a Modelagem Matemática usando modelos em forma de algoritmos, reafirmando a ideia do uso dessa estratégia como alternativa para amenizar os problemas que encontramos hoje no ensino da matemática. Para Bassanezi (2014 pag.18), "quando se propõe analisar um fato ou uma situação real cientificamente, isto é, com o propósito de substituir a visão ingênua desta realidade por uma postura crítica e mais abrangente, deve-se procurar uma linguagem adequada que facilite e racionalize o pensamento". Ainda segundo Bassanezi (2014, pag.18), o objetivo fundamental do uso de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em

um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem.

Este trabalho, consiste em uma proposta do estudo da matemática de maneira significativa visando um melhor processo de ensino e aprendizado. Assim, como as aulas quase sempre são ministradas apenas utilizando conteúdos pré definidos onde, defini-se o conteúdo e vai-se em busca de exercícios onde esses conteúdos são aplicados, buscamos com esse trabalho uma forma de melhorar o ensino de matemática, com base na modelagem matemática, onde, o aluno pode escolher um tema e a partir daí elaborar problemas e só depois vai-se em busca de conteúdos que resolva esses problemas, problemas esses que são encontrados no nosso cotidiano e nessa busca por uma solução, trabalha-se com os modelos matemáticos que podem ser escolhidos ou criados dependendo da natureza do problema, e assim o aluno entra em contato direto com os conteúdos expostos nos livros didáticos que são ensinados em sala de aula e mediado pelo professor, e dessa forma a modelagem matemática pode ser usada como uma ferramenta bastante útil para amenizar a dicotomia que existe entre o que é ensinado e o que é aprendido nas aulas de matemática e para isso detalhamos e aplicamos alguns modelos matemáticos preferencialmente os determinísticos de populações isoladas.

2 Fundamentação teórica

Nessa seção, descrevemos as referências que utilizamos em nosso trabalho bem como os métodos e modelos aplicados.

2.1 Breve histórico

Nessa seção descrevemos a trajetória do processo de modelagem matemática, partindo de alguns fatos ocorridos na antiguidade e descrevendo o seu surgimento no Brasil citando os seus percursores até os dias atuais.

2.1.1 A modelagem matemática na antiguidade

Para Biembengut e Hein (2009, p.7), a modelagem matemática é tão antiga quanto a matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos. A modelagem matemática vem sendo estudada desde a antiguidade, quando matemáticos, filósofos e físicos tiveram a necessidade de resolver problemas relacionados a sua vida diária, utilizando-se de experimentos e de observações, tentando transpor uma situação real para um problema matemático, que só mais tarde receberia o nome de modelagem matemática e assim esses estudiosos, tentavam criar um modelo matemático para explicar essas situações através de uma linguagem diferente.

Para mostrar a veracidade das afirmações feitas por Biembengut e Hein (2009), apresentamos algumas situações da história da matemática em que observa-se claramente o uso da modelagem matemática para resolver situações problemas.

Na antiguidade, Arquimedes de Siracusa nascido em 287 A.C que, dentre seus trabalhos que contribuíram para física e matemática, publicou um tratado intitulado *Sobre os corpos flutuantes*, onde Arquimedes apresenta o princípio fundamental da hidrostática e onde é encontrado o Teorema ou Princípio de Arquimedes. Segundo a história,

Arquimedes foi convidado pelo rei Hieron para resolver um problema: *descobrir se a coroa que o rei enviou para ser confeccionada por um ourives era de ouro maciço ou se tratava de uma mistura de outro metal*. Arquimedes ao tomar banho percebeu que ao mergulhar, o volume de água que era derramado da banheira, era igual ao volume do seu corpo mergulhado e assim através de experimentos descobriu a solução do problema proposto pelo rei. Além disso verificando que se tratava de um princípio geral, enunciou o Teorema de Arquimedes que afirma: *"todo corpo mergulhado em um fluido recebe um empuxo de baixo para cima, igual ao peso do volume do fluido deslocado"*. Nesse trabalho Arquimedes começa com um postulado sobre a natureza da pressão dos fluidos, obtendo grandes resultados como os do teorema citado.

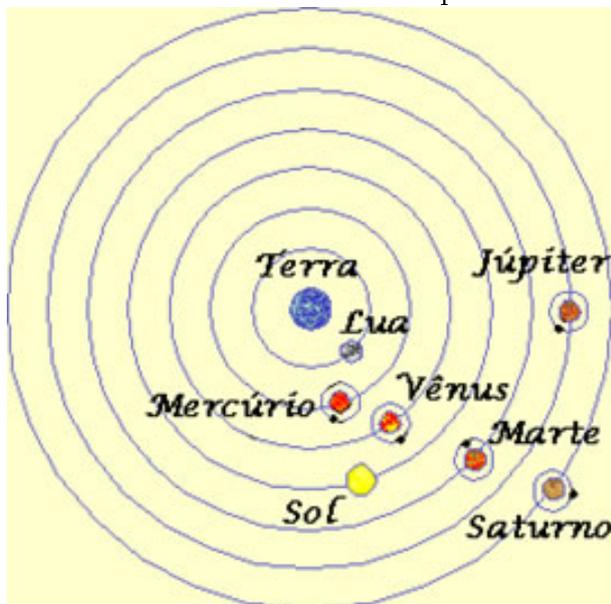
Ptolomeu¹ no século II DC, dentre suas obras destaca-se, **O Almogesto**, que é uma enciclopédia composta por treze livros que dentre eles no livro I, Ptolomeu marca a posição da terra usando resultados de Hiparco² e considerando-a imóvel. Em seguida com a terra como centro do universo, distribuiu os corpos celestes que giravam em torno dela criando assim seu modelo planetário.

Na figura 1, vemos a representação do Sistema Planetário de Ptolomeu, onde, ele utilizou-se de um diagrama como modelo para representar uma situação real.

¹Cláudio Ptolomeu, (90 - 168), foi um cientista grego que viveu em Alexandria, uma cidade do Egito. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em óptica e teoria musical.

²Hiparco, foi um astrônomo grego, construtor de máquinas, exímio cartógrafo e matemático da escola de Alexandria, nascido em 190 a.C. em Niceia, na Bitínia, hoje Iznik, na atual Turquia.

Figura 1: Modelo Geocêntrico do sistema planetário de Ptolomeu

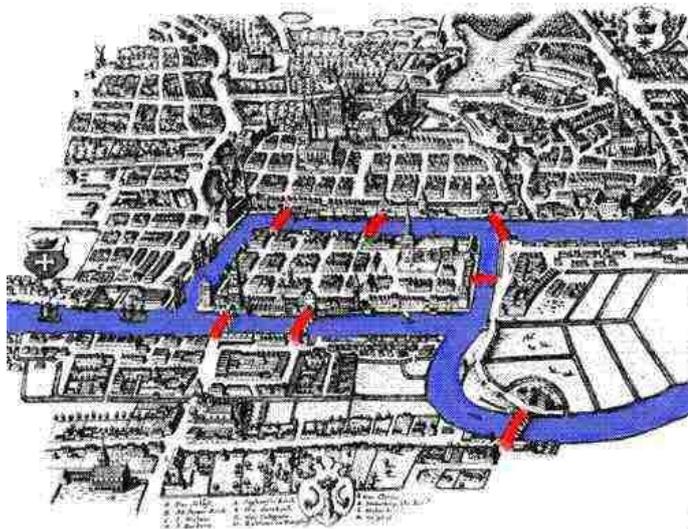


Fonte: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, (ENEM)

Para Biembengut e Hein (2009), a modelagem matemática consiste em transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolve-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real, assim podemos citar: O problema das Pontes de Königsberg, onde os habitantes de Königsberg na Prússia, hoje Kaliningrad, Rússia, costumavam passear atravessando as sete pontes que ligavam o Rio Pregél à cidade. Durante essa caminhada um fato intrigava aos que ali faziam tal percurso: "*Seria possível, partindo-se de qualquer uma região, margem ou ilha, atravessar as setes pontes do Rio Pregel, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida?*" Essa situação problema, tratada por muitos pesquisadores como lenda, enigma, recreação ou ainda como "charada matemática", ficou conhecida como: O Problema das Pontes de Königsberg e coube a Lenhard Euler³ resolvê-lo.

³Lenhard Euler, foi um matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha, fez importantes descobertas em várias áreas da matemática como o cálculo, teoria dos grafos e análise matemática.

Figura 2: Cidade de Königsberg por volta do ano de 1700

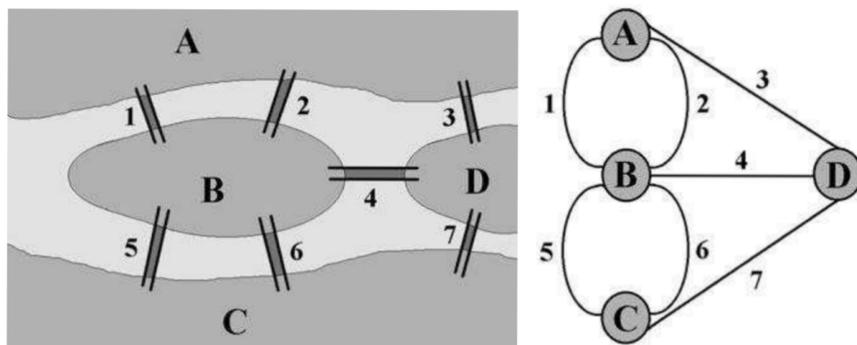


Fonte: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, (ENEM)

Na figura 2, temos a ilustração das sete pontes sobre o Rio Prejél na cidade de Königsberg ligando a cidade às ilhas.

Euler apresentou a solução do problema à academia de Ciência Russa de São Petersburgo no ano de 1736. Em uma linguagem moderna, podemos dizer que Euler criou um modelo matemático representado por um diagrama como o da figura seguinte:

Figura 3: Diagrama matemático de Euler das pontes de Königsberg



Fonte: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, (ENEM)

Onde:

i) A, B, C e D São os pontos associados às partes que contem terra firme, onde A e C são as duas margens e B e D são as ilhas. Os pontos são chamados atualmente de vértices.

ii) 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7 são as linhas que representam as sete pontes que ligam as ilhas as margens e as ilhas entre si, aqui chamadas de arestas.

A solução consiste em partindo de qualquer vértice, tentar atravessar todas as arestas uma única vez e retornando ao vértice de origem. Assim considerando que de um vértice parte um número par ou ímpar de arestas, Euler fez as seguintes descobertas:

1) Um diagrama pode ser atravessado começando e acabando num mesmo ponto sem passar duas vezes na mesma aresta, se, e somente se, todos os vértices forem par.

2) Um diagrama que contém no máximo dois vértices ímpares também pode ser atravessado, entretanto sem voltar ao local de partida.

3) Se o diagrama contém $2n$ vértices ímpares, onde n é um número inteiro qualquer, para atravessá-lo será necessário n passagens distintas por uma mesma linha.

Observe que no diagrama que representa o passeio pela cidade de Königsberg, de todos os vértices partem um número ímpar de de arestas, portanto, podemos concluir que de acordo com Euler, não é possível fazer todo o percurso retornando ao local de partida sem passar duas vezes pela mesma ponte, a demonstração ver (SAMPAIO).

2.1.2 A modelagem matemática no Brasil

Segundo Biembengut e Hein, o surgimento da modelagem matemática no Brasil deveu-se a um grupo de professores, dentre eles destacamos, Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, com uma forma de trabalho diferenciada procurando romper com os métodos tradicionais de ensinar matemática e reafir-

madras por Biembengut (2009, p.7) ao afirmar que a modelagem matemática no Brasil tem como principais referências Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi na época professores do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação -IMECC da Universidade Estadual de Campinas -UNICAMP, no final da década de 70 e início da década de 80, os quais iniciaram um movimento pela modelagem matemática e com isso incentivaram a linha de pesquisa em modelagem matemática no ensino brasileiro.

Figura 4: Aristides Camargo Barreto



Fonte: Centro de Referência em Modelagem Matemática no Ensino (CREMM)

De acordo com o centro Referencial de Modelagem Matemática no Ensino -CREMM, Aristides foi o precursor da modelagem matemática no Brasil. Tomou conhecimento sobre modelagem matemática em 1960 quando cursou engenharia, foi o representante do Brasil em vários congressos internacionais. Como acadêmico, foi coordenador de cursos de formação continuada e pós-graduação em Modelagem Matemática em várias instituições brasileiras. Em 1970, como professor da PUC/Rio, utilizava nas suas aulas de cálculo diferencial integral na graduação e pós-graduação a modelagem matemática criando vários modelos aplicados nas áreas de biologia, linguística e ecologia conforme (FERREIRA, 2013). Em 1976, como professor da PUC/Rio foi o primeiro orientador

de dissertações em modelagem matemática.

Figura 5: Rodney Carlos Bassanezi



Fonte: Centro de Referência em Modelagem Matemática no Ensino (CREMM)

Adepto de Aristides, Bassanezi teve o primeiro contato com o termo e o tema modelagem matemática através de uma palestra proferida por Aristides na UNICAMP. Na década de 1980 coordenou um curso na IMECC-UNICAMP, para 30 professores de Cálculo Diferencial Integral de diversas universidades do sul do Brasil com duração de uma semana. Nesse curso, Bassanezi não pretendia fazer uso da metodologia tradicional, sem um tema pré estabelecido foi proposto aos alunos que eles se reunissem por 2 horas e elaborassem problemas que envolvessem cálculo diferencial integral para a solução, ao término do tempo, Bassanezi verificou que a maioria do problemas elaborados pelos alunos era igual aos já apresentados nos livros textos, então esse momento foi crucial para Bassanezi propor a utilização da modelagem matemática. Foi coordenador do primeiro curso de pós-graduação em modelagem matemática da Universidade de Guarapuava-PR voltado para professores do IMECC-UNICAMP onde veio a ser professor mais tarde.

Outro adepto a modelagem matemática, doutor em matemática, D'Ambrosio desenvolveu suas pesquisas em etnomatemática. Foi marcante para a Educação Matemática brasileira, quando fez ser implantado nos cursos de graduação, o componente curricular "Tendências Atuais na Educação Matemática".

Figura 6: Ubiratan D'Ambrosio



Fonte: Centro de Referência em Modelagem Matemática no Ensino (CREMM)

Em 1960, D'Ambrosio professor e pesquisador de diversas universidades internacionais, tomou conhecimento de um movimento que vinha ocorrendo nos Estados Unidos em relação ao ensino e a aprendizagem de matemática, que objetivava preparar módulos de aprendizagem de matemática por temas procurando preparar um material de apoio didático com aplicações desse tema nas mais diversas áreas do conhecimento, com o fim de melhorar a aprendizagem matemática de alunos da Educação Superior, materiais semelhantes a modelos matemáticos.

Em 1972, retorna ao Brasil para ser professor na UNICAMP, tendo a oportunidade de implantar no Brasil uma metodologia semelhante as aplicadas nos Estados Unidos. Dentre as propostas feitas por D'Ambrosio duas foram bastante relevantes para a nova perspectiva do ensino matemático nas escolas;

- 1) A criação de novos materiais didáticos-pedagógicos de apoio para o ensino fundamental com vários temas matemáticos;

- 2) A implantação do primeiro mestrado de Ensino em Ciências e Matemática pela UNICAMP no ano de 1975, em que foram desenvolvidos diversos trabalhos em Etnomatemática e Modelagem.

Em 1984 inseriu a etnomatemática⁴ no primeiro curso de pós graduação da UNESP em Rio Claro-SP. Em 2001 a Sociedade Brasileira de Educação Matemática, SBEM, cria o Grupo de Trabalho (GT) de Modelagem Matemática. Em Blumenau-SC, a professora Maria Salett Biembengut funda, em 2006, o Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino, CREMM onde estão a disposição um vasto acervo de materiais referentes a modelagem matemática. E assim a modelagem matemática no Brasil, vem conquistando cada vez mais adeptos a essa metodologia de ensino onde professores e pesquisadores estão empenhados em melhorar a qualidade do ensino de matemática no Brasil.

2.2 Modelagem matemática

A Modelagem Matemática tem como principal objetivo, estimular a criatividade e o raciocínio matemático, dar uma maior compreensão da aplicação da matemática em outras áreas, e desenvolver habilidades na resolução dos problemas, a fim de que os estudantes se sintam motivados a aprender de forma contínua.

Desde o surgimento da matemática, o ser humano sempre se utilizou dos modelos, tanto para se comunicar com seus semelhantes como para preparar suas ações vivenciais, nesse sentido, Biembengut e Hein (2009, p.11), entende que *A modelagem, arte de modelar, é um processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e de expressões do conhecimento.* Ainda segundo Biembengut e Hein (2009, p.12), Um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações

⁴Etnomatemática é a matemática praticada por um grupo cultural, surgiu na década de 1970, com base em críticas sociais acerca do ensino tradicional da matemática, como a análise das práticas matemáticas em seus diferentes contextos culturais. Mais adiante, o conceito passou a designar as diferenças culturais nas diferentes formas de conhecimento.

geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais etc. No entanto, quando se propõe um modelo ele não representa fielmente a realidade, ele é proveniente de aproximações e buscamos assim aperfeiçoá-lo para obter uma melhor representação da realidade, e com isso podemos dizer que a modelagem é um meio de aproximar a matemática da realidade fazendo dessa forma uma contextualização daquilo que é ensinado em sala de aula.

A modelagem matemática é um processo que envolve a obtenção de um modelo, onde a elaboração desse modelo, requer do pesquisador um bom conhecimento de matemática pois quanto mais conhecimento o pesquisador tiver, melhor será o seu modelo. Para Biembengut e Hein (2009, p.13), a modelagem matemática é uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias.

Numa perspectiva diferente de encarar a matemática, a modelagem pode ser vista como um método científico ou como uma estratégia de ensino-aprendizagem que se mostra bastante eficaz, para Bassanezi (2014, p.16), a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. A modelagem matemática pressupõe multidisciplinaridade e nesse sentido, indo ao encontro das novas tendências pedagógicas buscando contextualizar aquilo que é ensinado em sala de aula. Assim, podemos dizer que é um processo que avalia teoria e prática e que motiva os indivíduos envolvidos a procura do conhecimento da realidade que os cercam e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel na sociedade: A educação inspirada nos princípios da liberdade e da solidariedade humana tem por fim o preparo do indivíduo e da sociedade para o domínio dos recursos científicos e tecnológicos que

lhe permitem utilizar as possibilidades e vencer as dificuldades de meio, (Lei 4024-20/12/61) artigo 1º, que fixava as Diretrizes e Bases da Educação Nacional".

No processo de modelagem, segundo Bassanezi (2014, p.19), quando se procura refletir sobre uma porção da realidade na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela, o processo usual é selecionar no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo, e assim:

"Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual".
(BASSANEZI, 2014, p.24)

Ainda segundo Bassanezi (2014, p.24), a modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estarmos sempre elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.

2.2.1 Modelo matemático

Na procura por uma representação de uma situação-problema encontrada no dia-a-dia, buscamos sempre associar essa situação a um problema matemático e assim vai-se em busca de um modelo que represente essa situação, para Biembengut e Hein (2009, p.12), Modelo Matemático "é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real". A palavra modelo pode ter vários tipos de interpretações, com isso consideramos apenas o que concerne a representação de um sistema, assim nos limitamos a dois tipos

de modelos:

1) Modelo Objeto, é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e homogeneidade das variáveis tais como: pictogramas, um desenho, um mapa e etc. Nesse modelo as representações são parciais podendo deixar de considerar algumas variáveis, por exemplo, em um modelo epidemiológico formado por equações diferenciais.

2) Modelo Teórico, é um modelo vinculado a uma teoria geral existente, é sempre construído em torno de um modelo objeto, devendo possuir as mesmas características que o sistema real e assim chamamos de modelo matemático, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado Bassanezi, (2014, p.20).

Os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificados conforme o tipo de matemática utilizada na sua formulação.

i) Linear ou não linear;

São modelos baseados em equações que tenham essas características. São exemplos de modelos lineares: Os ajustes Lineares e de não lineares: Os ajustes quadráticos.

ii) Estático ou dinâmico;

São estáticos quando representam a forma do objeto, como a forma geométrica de um alvéolo que são cavidades diminuída de um órgão vegetal e dinâmicos quando simulam variações de estágios dos fenômenos como crescimento populacional de uma cultura de bactérias.

iii) Educacional ou Aplicativos;

Educacional quando é baseado em um número pequeno de suposições tendo quase soluções analíticas. Nesse modelo há o envolvimento de uma ou duas variáveis. Geral-

mente esses modelos não representam a realidade fielmente e assim não se pode fazer previsões futuras, contudo adquire-se experiência e ideias para a formulação de outros mais adequados. Por outro lado, são baseados em hipóteses realistas onde há um grande número de variáveis.

iv) Estocástico ou Determinístico.

São determinísticos, quando há suposição de que existam informações suficientes no processo em um determinado instante, podendo assim haver uma previsão do futuro do sistema como, os modelos utilizados para prever o crescimento populacional. É estocástico quando descrevem a dinâmica de um sistema em termos probabilístico como o modelo binomial que podemos ver em (BUSSAB, 2004).

2.2.2 Etapas da modelagem matemática

Como característica da modelagem matemática, temos o fato de que o problema vem de uma situação real e que depois de formulado, escolhido o modelo e resolvido o problema, esse modelo possa ser aplicado posteriormente em outras situações problemas e assim no processo de modelagem matemática, seguintes uma sequência.

"A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático restringe-se a uma matemática elementar, como aritmética ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses conceitos. Tanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada. Porém o valor do modelo não está restrito à sofisticação matemática. (BASSANEZI, 2014, p.12)."

No processo de modelagem, há uma interação da situação problema e a situação real, e para isso utiliza-se de alguns procedimentos, conforme o esquema a seguir:

Figura 7: Etapas do processo de modelagem matemática.



Fonte: Biembengut e Hein (2009)

Interação

É nessa fase que o tema é escolhido e pode ser feito pelo aluno ou pelo professor, porém quando escolhido pelo aluno, haverá uma desvantagem, pois nem sempre o aluno escolhe um tema relacionado com o conteúdo estudado, porém sendo escolhido pelo aluno, haverá assim uma participação mais efetiva por parte deles e o professor atuando apenas como mediador. Essa fase é caracterizada pela pesquisa, e é nela onde busca-se investigar a situação-problema para entendê-la, tornando-o familiar e também é nela onde são selecionados os dados que serão relevantes na solução da situação-problema.

Matematização

Esta é a fase que se mostra mais desafiadora, pois é nela onde o problema é formulado e é nela onde procura-se a solução do problema aplicando o modelo escolhido, ou seja, é nesta fase que o pesquisador traduzirá a situação problema para a linguagem matemática, passando a situação real para o modelo matemático podendo solucionar ou não o problema.

Nessa fase, o pesquisador deve obter um conjunto de expressões, fórmulas, equações, gráficos ou esquemas que darão suporte para a obtenção da solução do problema e isso requer do pesquisador um domínio do conteúdo matemático envolvido no modelo.

Análise do modelo

É o processo de aceitação ou não do modelo proposto, nessa fase, ocorre a interpretação e a verificação da aplicabilidade do modelo e assim, o modelo poderá ser validado ou não, dependendo do grau de confiabilidade e sua aplicação em outras situações problemas, verificando se é viável ou não comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real, caso não ocorra a validade, o processo deve ser retomado da fase anterior.

Essa fase consolida o trabalho da modelagem matemática, que mostrará a modelagem como uma ferramenta bastante útil no processo de ensino-aprendizado resolvendo problemas do dia-a-dia, permitindo uma visão mais analítica dos fenômenos de nossa realidade.

2.2.3 Modelagem matemática no ensino

No que se refere ao ensino de matemática, há um consenso entre os pesquisadores dessa área, em que o ensino precisa voltar-se para a promoção do conhecimento matemático e da habilidade em utiliza-lo, que significa ir além da simples resolução de questões matemáticas, muitas vezes sem nenhum significado para o aluno, e levá-lo a uma melhor compreensão tanto da teoria quanto da natureza do problema a ser resolvido.

Dessa forma a modelagem matemática no ensino pode ser uma alternativa para despertar no aluno o interesse pelos conteúdos de matemática que ele desconhece até mesmo os já conhecidos, ao mesmo tempo que aprende a modelar matematicamente,

dando ao aluno a oportunidade de estudar temas diversos por meio de pesquisas, desenvolvendo assim seu interesse e seu senso crítico.

"A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo-modelagem. Pode valer como método de ensino-aprendizagem de matemática em qualquer nível escolar, das séries iniciais a um curso de pós-graduação.". (BIEMBENGUT e HEIN, 2009, p.18)

Usada como estratégia de ensino-aprendizagem, o processo de modelagem matemática tem como objetivos:

- i) Aproximar uma outra área do conhecimento da matemática;
- ii) Enfatizar a importância da matemática para a formação do aluno;
- iii) Despertar o interesse pela matemática e sua aplicabilidade;
- iv) Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
- v) Desenvolver a habilidade para resolver problemas; e
- vi) Estimular a criatividade.

O desenvolvimento de novas teorias matemáticas e suas apresentações como algo acabado e completo, acabaram conduzindo seu ensino nas escolas de maneira desvinculada da realidade, nota-se uma separação entre "Matemática Pura" e "Matemática Aplicada". Essa separação pode ter tido como causa, o desinteresse pela matemática por parte dos alunos, com isso no processo evolutivo da educação matemática, a inclusão de aspectos e resoluções de problemas e modelagem, tem sido defendida por vários pesquisadores da área onde defendi-se que, essa matéria deve ser ensinada de um modo significativo matematicamente, considerando as próprias realidades do sistema educacional, Bassanezzi (2014, p.36), cita alguns argumentos que justificam tal inclusão.

- i) Argumentos formativos

Enfatiza aplicações matemáticas e a performance da modelagem matemática e resolução de problemas como processo para desenvolver capacidade em geral e atitudes dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.

ii) Argumentos de competência crítica

Focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.

iii) Argumentos de utilidade

Enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.

iv) Argumentos intrínsecos

Considera que a inclusão de modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas.

v) Argumentos de aprendizagem

Garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática.

vi) Argumentos de alternativa epistemológica

A modelagem também se encaixa no Programa Etnomatemática, indicado por D'Ambrósio, "que propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla, Parte de realidade e chega, de maneira natural e através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica", atuando, dessa forma, como uma metodologia mais adequada às realidades socioculturais.

2.3 Modelo linear

Uma regressão ou ajuste linear de uma curva é um recurso utilizado para expressar a tendência da variável dependente y , quando relacionada com a variável independente x . Ao analisar fenômenos através de dados numéricos, estamos interessados, além da descrição e tendências locais fornecidas por uma curva de regressão, em saber se a relação $y = f(x)$ é também adequada para fazer previsões de y quando x não está no intervalo pesquisado.

Na modelagem matemática de processos dinâmicos, a formulação dos modelos quase sempre exigem análise de dados experimentais, tornado assim o método de ajuste linear, fundamental na verificação da aproximação dos dados obtidos no modelo com a realidade, sendo indispensável para a validação do modelo.

Em geral esses modelos dependem de parâmetros onde são estimados de forma que o ajuste represente o mais próximo possível da realidade.

Ajuste linear

Um ajuste é linear quando é da forma: $y(x) = f(x; a, b) = ax + b$, onde o gráfico fica representado por uma reta, ou seja representa uma função afim.

Nesse caso a reta que melhor se ajusta aos dados, é uma reta de parâmetros a e b que tornam mínimo a soma dos quadrados dos desvios:

$$S = S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - ax_i - b]^2$$

Como queremos minimizar a função $S(a, b)$, calculamos as derivadas parciais de S em relação a a e b .

$$\begin{cases} \frac{dS}{da} = \sum_{i=1}^n -2x_i \cdot (y_i - ax_i - b) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot x_i \\ \frac{dS}{db} = \sum_{i=1}^n -2 \cdot (y_i - ax_i - b) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \end{cases}$$

Utilizando as derivada para obter os valores dos parâmetros a e b nos quais a função $S(a, b)$ possua valor mínimo.

$$\begin{cases} -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot x_i = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb \quad (2)$$

Multiplicando a equação (3) por $-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ e somando com a (2) obtemos:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \cdot a \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n} = a \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right) \\ \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb \quad (4)$$

Da equação (3) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n} &= a \left(\frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right) \\ a &= \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{aligned}$$

Substituindo a expressão correspondente ao valor de a na equação (4) obtemos:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ b &= \bar{y} - a\bar{x} \end{aligned}$$

Onde \bar{x} e \bar{y} , são as médias dos x_i e y_i respectivamente.

2.4 Modelo Quadrático

Os modelos quadráticos são representados por funções onde os gráficos dessas funções definem uma parábola, ou seja, são da forma: $y(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Este modelo possui como principal característica o fato de possuir pontos de máximo e mínimos locais para a variável independente y , em um determinado intervalo de variação de x .

Para determinarmos os valores dos parâmetros a , b e c , utilizamos o método dos mínimos quadrados para minimizar a expressão a seguir, pois estamos interessados em encontrar a melhor parábola que se ajusta aos dados.

$$S = S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - ax_i^2 - bx_i - c]^2.$$

Como queremos minimizar a função $S = S(a, b, c)$, calculamos as derivadas parciais de S com relação a a , b , e c e igualamos a zero para encontrar os valores dos parâmetros a , b e c , ou seja:

$$\begin{cases} \frac{dS}{da} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i^2) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (x_i^2) = 0 \\ \frac{dS}{db} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (x_i) = 0. \\ \frac{dS}{dc} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-1) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (x_i^0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 - \sum_{i=1}^n a x_i^4 - \sum_{i=1}^n b x_i^3 - \sum_{i=1}^n c x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n a x_i^3 - \sum_{i=1}^n b x_i^2 - \sum_{i=1}^n c x_i = 0. \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^0 - \sum_{i=1}^n a x_i^2 - \sum_{i=1}^n b x_i - \sum_{i=1}^n c x_i^0 = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^0 y_i = c \sum_{i=1}^n x_i^0 + b \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = c \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + a \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = c \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + a \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{cases}$$

2.5 Método dos Mínimos Quadrados

Utilizamos este método quando temos uma distribuição de pontos e queremos ajustar a melhor curva a este conjunto de dados.

Para que esta seja a curva que melhor se ajusta aos dados, devemos minimizar a soma das diferenças entre os valores pertencentes a curva de ajuste e os valores observados na distribuição mas esta diferença pode ser tanto positiva quanto negativa, o que pode ocasionar em uma soma nula das diferenças mesmo com os valores muito distantes da curva.

Uma forma de evitar esse anulamento, é minimizar o quadrado da diferença.

Considerando um conjunto de valores de n observações $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e uma função $y(x) = f(x; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$, onde a_j ($j = 1, 2, \dots, k$) são os parâmetros, "o método dos mínimos quadrados" consiste em determinar esses parâmetros de modo que minimize o valor da expressão:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_k) - \hat{y}]^2. \quad (5)$$

Ou seja, devemos minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores observados y da distribuição e os valores estimados \hat{y} da curva de ajuste.

2.6 Modelos determinísticos de populações isoladas

Na dinâmica populacional usamos os modelos determinísticos, que são baseados na suposição da existência de informações suficientes no instante ou estágio do processo

de modelagem, onde o futuro do sistema pode ser previsto.

Mesmo que em nosso estudo, as populações não sejam isoladas, pois podem sofrer influência de fatores como, espaço, tempo, emigração, imigração, guerra entre outros, considerando que as populações interagem para persistirem, e para tal necessitam aumentar e que não sofrem influência de fatores externos.

A ideia de usar a matemática para estabelecer um modelo para o crescimento da população humana, começou com Thomas Malthus⁵ em 1798, onde seu modelo era baseado em dois postulados:

- i) "O alimento é necessário á subsistência do homem";
- ii) "A paixão entre os sexos é necessário e deverá permanecer aproximadamente em seu estado permanente".

Na Europa por volta de 1700, na época da revolução industrial as pessoas passaram a ver o progresso da humanidade e algumas começaram a dizer que a humanidade poderia continuar melhorando para sempre, acabando com a pobreza e surgiria uma sociedade utópica, sem guerras, sem fome, sem conflitos de nenhum tipo, mas existiam algumas pessoas dentre elas Thomas Malthus, que afirmava que:

"O poder de crescimento da população é tão superior ao poder do solo para produzir a subsistência para o homem que a morte e epidemias de uma maneira ou de outra, ataca a espécie humana. Os vícios da humanidade são tão ativos e hábeis agentes de despovoamento. Eles são os antecessores do grande exército da destruição e frequentemente eles próprios executam pavoroso trabalho. Entretanto, quando eles fracassam nessa guerra de extermínio, períodos de enfermidades, epidemias, pestes e pragas entram em ação com uma terrível disposição e eliminam milhares e dezenas de milhares de homens. Quando o sucesso fosse ainda incompleto: a fome gigantesca e

⁵Thomas Malthus foi um economista inglês que desenvolveu uma teoria sobre o crescimento populacional e a produção de alimentos conhecida como Teoria Neomalthusiana.(1766 - 1834)

inevitável espreita a retaguarda e com um possante sopro varre a população e o alimento do mundo."(MALTHUS, T.R, 1798, C. VII, P.61).

Para Thomas Malthus, se a população pudesse se reproduzir e aumentar como de fato aconteceu, ela iria aumentar tanto que os alimentos produzidos não iriam ser o suficiente para alimentar essa população, então esse crescimento tinha um limite, limite esse baseado na quantidade de alimentos que a terra podia produzir e se a população passa-se desse limite os mais diversos problemas da sociedade começariam a aparecer como epidemias, guerras e uma competição por alimentos e a partir dai o número de habitantes poderia oscilar em torno desse limite e mesmo que esse limite fosse atingido, todo o processo seria retomado.

Atualmente em dinâmica populacional convencionou-se a chamar de modelo de Malthus, um modelo em que a taxa de crescimento a cada instante é proporcional a população total, (progressão geométrica ou crescimento exponencial), assim a população cresce sem influência de nenhum fator inibidor, sendo assim um crescimento otimizado considerando que todos os indivíduos são idênticos e com o mesmo comportamento..

Na evolução dos modelos, ao longo do tempo, buscando uma melhor previsão do crescimento das populações, em 1838 um sociólogo belga chamado Pierre Francois Verhurst, propôs um modelo "Modelo Contínuo de Verhurst", em que toda população sofre uma inibição natural em seu crescimento, devendo atingir um limite populacional com o passar do tempo e que a taxa de crescimento populacional é proporcional a população em cada instante.

Tanto os modelos de Malthus quanto o de Verhurst, foram formulados considerando o tempo contínuo onde se supõe que os elementos da população se reproduzam a todo instante sem sofrer influência de outros fatores, mas na realidade poucas populações possuem essa característica.

2.6.1 Modelo discreto Malthusiano

Na formulação dos modelos matemáticos, a variação de uma população pode ser traduzida por:

Variação da população P para tempos discretos, (variação discreta).

$$P(t_2) - P(t_1)$$

, onde t_i é o tempo inicial e t_2 é o tempo final em um intervalo de tempo. Variação da população P para tempos contínuos, (variação contínua).

$$\frac{dP}{dt}$$

Variação média da população P em um intervalo de tempo.

$$\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Se tivermos como hipótese que a variação populacional é proporcional à própria população, temos para uma variação contínua:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P(t)$$

Sendo P o número de indivíduos de uma população, esse número dependendo do tempo temos que:

$$\frac{dP}{dt} = P(t) \tag{6}$$

Considerando o número de indivíduos em função do tempo sendo $P(t)$ e assumindo apenas valores inteiros, isso para uma população pequena, se o número de indivíduos da população for suficientemente grande podemos aproximar $P(t)$ para valores contínuos.

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = \alpha$$

A variação relativa da população é constante, ou seja, a variação da população é proporcional à própria população em cada período de tempo. Sendo α a taxa de crescimento específico da população $P(t)$, e considerando-a constante.

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$$

$$P(t+1) = \alpha P(t) + P(t)$$

$$P_{t+1} = (\alpha + 1)P_t$$

Considerando a população inicial $P(0) = P_0$, a solução é obtida através da recorrência da expressão:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1 + \alpha)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

$$P_{t+1} - P_t = \alpha \cdot P_t$$

$$P_{t+2} - P_{t+1} = \alpha \cdot P_{t+1}$$

$$P_{t+3} - P_{t+2} = \alpha \cdot P_{t+2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$P_{t+n} - P_{t+n-1} = \alpha \cdot P_{t+n-1}$$

Somando membro a membro na equação temos:

$$P_{t+n} - P_t = \alpha \cdot P_t + \alpha \cdot P_{t+1} + \alpha \cdot P_{t+2} + \alpha \cdot P_{t+3} + \cdots + \alpha \cdot P_{t+n-1}$$

$$P_{t+n} - P_t = \alpha \cdot P_t + \alpha \cdot (\alpha + 1)P_t + \alpha \cdot (\alpha + 1)^2 P_t + \alpha \cdot (\alpha + 1)^3 P_t + \cdots + \alpha \cdot (\alpha + 1)^{n-1} P_t$$

$$P_{t+n} - P_t = \alpha \cdot (\alpha + 1)^0 P_t + \alpha \cdot (\alpha + 1)P_t + \alpha \cdot (\alpha + 1)^2 P_t + \alpha \cdot (\alpha + 1)^3 P_t + \cdots + \alpha \cdot (\alpha + 1)^{n-1} P_t$$

$$P_{t+n} - P_t = \alpha \cdot P_t [(\alpha + 1)^0 + (\alpha + 1) + (\alpha + 1)^2 + (\alpha + 1)^3 + \cdots + (\alpha + 1)^{n-1}]$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = \alpha \cdot [(\alpha + 1)^0 + (\alpha + 1) + (\alpha + 1)^2 + (\alpha + 1)^3 + \cdots + (\alpha + 1)^{n-1}]$$

Somando os termos da Progressão Geométrica de razão $(\alpha + 1)$ temos:

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = \alpha \cdot \frac{(\alpha + 1)^n - 1}{(\alpha + 1) - 1}$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = (\alpha + 1)^n - 1$$

Usando a condição inicial de que $P(0) = P_0$ temos:

$$\frac{P_{0+n} - P_0}{P_0} = (\alpha + 1)^n - 1;$$

$$P_n - P_0 = P_0 \cdot [(\alpha + 1)^n - 1];$$

$$P_n - P_0 = P_0 \cdot (\alpha + 1)^n - P_0;$$

$$P_n = P_0 \cdot (\alpha + 1)^n.$$

Assim:

$$P_t = (\alpha + 1)^t P_0,$$

$$(\alpha + 1)^t = \frac{P_t}{P_0},$$

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1.$$

Como:

$$(\alpha + 1)^t = e^{\ln(\alpha+1)t}$$

$$P_t = P_0 e^{\ln(1+\alpha) \cdot t} \quad (7)$$

E assim obtemos o Modelo Discreto Malthusiano que pode ser usado para para estimar o crescimento populacional de populações isoladas e assim, utilizamos para estimar o crescimento populacional piauiense.

2.6.2 Curva Logística

Uma curva logística é a representação gráfica de uma função que possui as seguintes características:

- 1) A tendência da variável de y é de estabilidade, isto é, $y \rightarrow y_\infty$, quando x cresce. y_∞ é denominado valor máximo sustentável ou capacidade de suporte.
- 2) Sendo y_0 , o valor inicial da sequência dos y_i . Isto é, $y = y_i$, quando $x = 0$, tem-se: y é crescente se $y_0 < y_\infty$ e y é decrescente se $y_0 > y_\infty$
- 3) A taxa de crescimento relativo de y_i é linear, isto é, $\lambda = \frac{y_{i+1}}{y_i} \implies \lambda = ay + b$
- 4) Se $y_0 < \frac{y_\infty}{2}$, a curva $y(x)$ muda de concavidade quando, $y = \frac{y_\infty}{2}$, o que implica na existência de um ponto de inflexão na curva.

Assim temos a equação $y = \frac{a}{b \cdot e^{\lambda x} + 1}$, onde $a = y_\infty$, $b = \frac{y_\infty}{y_0} - 1$ e $\lambda = \alpha y_\infty$ é a taxa de variação máxima.

Onde:

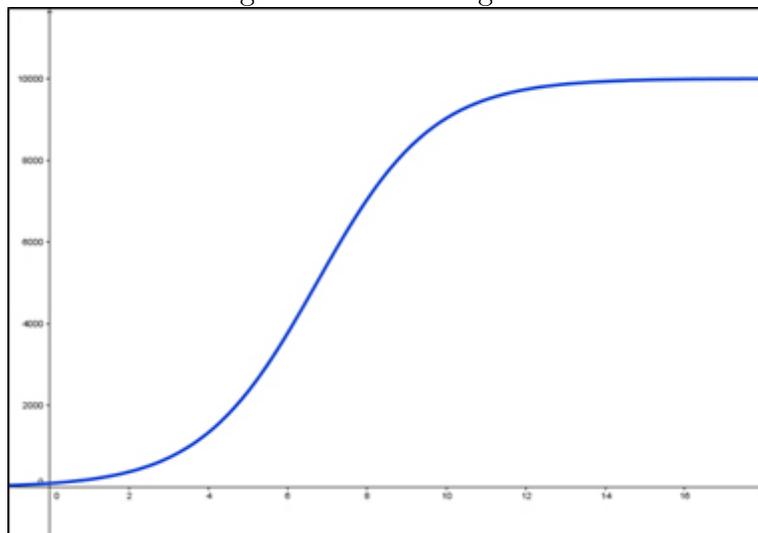
λ é a taxa de crescimento.

y é a variável dependente e x a variável independente.

a e b são constantes.

Na curva logística, como podemos observar na figura 8, a taxa de crescimento populacional em cada instante se torna cada vez menor à medida que o tamanho da população se aproxima de um máximo imposto por recursos limitantes no ambiente, conhecido como capacidade de suporte.

Figura 8: Curva Logística



Fonte: Bassanezi, (2014)

2.6.3 Modelo Logístico contínuo (Verhurst)

No Modelo de Malthus temos que quando o número de indivíduos é suficientemente grande podemos aproximar a população $P(t)$ por uma função contínua e assim podemos considerar que:

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

e que $P(t + \Delta t) - P(t) = \beta(t)\Delta t$, quando temos um intervalo discreto. Assim podemos escrever quando o intervalo for contínuo:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \beta(P)P \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

No modelo de Verhurst, supõe-se que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um determinado *limite máximo sustentável*, isto é, ela tende a se estabilizar.

Na equação é introduzido um fator inibidor de proporcionalidade do crescimento populacional e considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à popula-

ção em cada instante e assim podemos escrever:

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \quad (8)$$

$$\beta(P) = r \left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right), r > 0 \quad (9)$$

P_∞ é o limite da população (capacidade suporte) e r é a taxa máxima relativa e $\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)$ funcionando como fator inibidor de crescimento.

Dessa forma $\beta(P)$ tende a zero quando $P \rightarrow P_\infty$.

Substituindo $\beta(P)$ na equação (8) temos:

Modelo contínuo de Verhurst ou Modelo Logístico.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) \\ P(0) = P_0, r > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Se observarmos na equação (10), $P(t) = 0$ e $P(t) = P_\infty$ são soluções dessa equação.

Utilizando integração por partes para obter as soluções analíticas de (10) temos:

Separando as variáveis temos:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} &= r dt. \\ \int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} &= \int r dt. \end{aligned}$$

Usando a técnica das frações parciais temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} &= \frac{A}{P} + \frac{B}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} \\ \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) \cdot A + P \cdot B &= 1 \\ P \left(-\frac{A}{P_\infty} + B\right) + A &= 1 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(-\frac{A}{P_\infty} + B\right) &= 0 \\ B &= \frac{1}{P_\infty} \\ \frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} &= \frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{P_\infty}}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} \\ \int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} &= \int \left(\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{P_\infty}}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)}\right) dP \\ \int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} &= \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{\frac{1}{P_\infty}}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} dP \\ \int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} &= \ln|P| + \int \frac{\frac{1}{P_\infty}}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} dP \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável na integral temos:

$$\begin{aligned} u = \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) &\implies \frac{du}{dp} = -\frac{1}{p_\infty} \implies dp = (-P_\infty)du \\ \int \frac{\frac{1}{P_\infty}}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} dP &\longrightarrow \int \frac{\frac{1}{P_\infty}}{u} \cdot (-P_\infty)du = \int -\frac{1}{u} du = -\ln|u| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{P_\infty}}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} &= -\ln\left|1 - \frac{P}{P_\infty}\right| \\ \int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} &= \ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{P_\infty}\right|. \end{aligned}$$

E calculando a integral $\int rdt$, temos:

$$\begin{aligned} \int rdt &= rt + c. \\ \ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{P_\infty}\right| &= rt + c. \\ \ln\left|\frac{P(t)}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}}\right| &= rt + c \\ \ln\left|\frac{P_\infty \cdot P(t)}{P_\infty - P(t)}\right| &= rt + c. \end{aligned}$$

Usando a condição inicial de que $P(0) = P_0$, temos que:

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P_\infty}} \right| &= r \cdot 0 + c \\ c &= \ln \left| \frac{P_\infty \cdot P_0}{P_\infty - P_0} \right| \\ \ln \left| \frac{P_\infty \cdot P(t)}{P_\infty - P(t)} \right| &= rt + \ln \left| \frac{P_\infty \cdot P_0}{P_\infty - P_0} \right| \\ \ln \left| \frac{P_\infty \cdot P(t)}{P_\infty - P(t)} \right| - \ln \left| \frac{P_\infty \cdot P_0}{P_\infty - P_0} \right| &= rt \\ \ln \left| \frac{(P_\infty \cdot P(t)) \cdot (P_\infty - P_0)}{(P_\infty \cdot P_0) \cdot (P_\infty - P(t))} \right| &= rt \\ \ln \left| \frac{P(t) \cdot (P_\infty - P_0)}{P_0 \cdot (P_\infty - P(t))} \right| &= rt \\ e^{rt} &= \frac{P(t) \cdot (P_\infty - P_0)}{P_0 \cdot (P_\infty - P(t))} \\ e^{rt} \cdot \frac{P_0}{(P_\infty - P_0)} &= \frac{P(t)}{(P_\infty - P(t))} \\ \frac{(P_\infty - P_0)}{P_0 \cdot e^{rt}} &= \frac{(P_\infty - P(t))}{P(t)} \\ \frac{(P_\infty - P(t))}{P(t)} &= \frac{P_\infty}{P(t)} - 1 \\ P(t) &= \frac{P_\infty}{\frac{(P_\infty - P_0)}{P_0 \cdot e^{rt}} + 1} \\ P(t) &= \frac{P_\infty}{\frac{(P_\infty - P_0)}{P_0} \cdot e^{-rt} + 1} \\ P(t) &= \frac{P_\infty}{\left(\frac{P_\infty}{P_0} - 1\right) \cdot e^{-rt} + 1} \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo por P_0 , temos o Modelo Logístico de Verhurst a seguir:.

$$P(t) = \frac{P_\infty \cdot P_0}{(P_\infty - P_0) \cdot e^{-rt} + P_0} \quad (11)$$

Com r fixo.

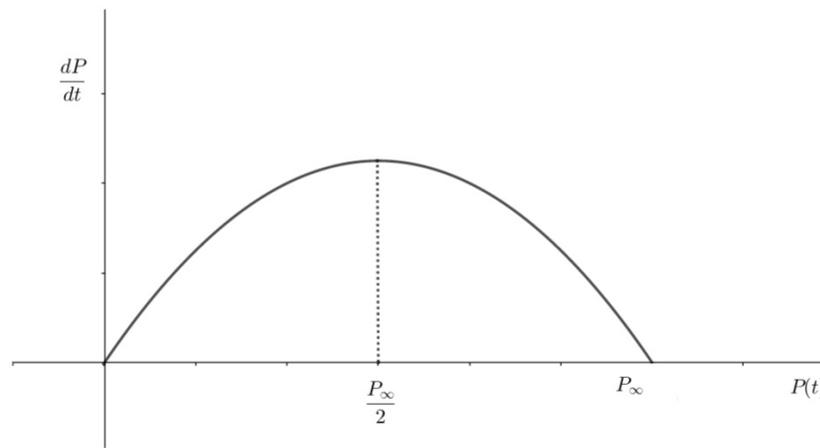
Considerando a equação:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right), \text{ temos que:}$$

a) Se $P_0 < P_\infty$, então $P_0 < P(t) < P_\infty$, com $P(t) \rightarrow P_\infty$, crescendo pois $\frac{dP}{dt} > 0$.

- b) Se $P_0 > P_\infty$, então $P_\infty > P(t) > P_0$, com $P(t) \rightarrow P_\infty$, decrescendo pois $\frac{dP}{dt} < 0$.
- c) Da equação $\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) = rP - r\frac{P^2}{P_\infty}$, temos que $\frac{dP}{dt}$, como função de P é uma parábola com concavidade voltada para baixo e raízes $P = 0$ e $P = P_\infty$, que são as soluções de equilíbrio da equação pois $\frac{dP}{dt} = 0$ nesses pontos.

Figura 9: Gráfico da taxa de crescimento $\frac{dP}{dt}$ em função da população $P(t)$.

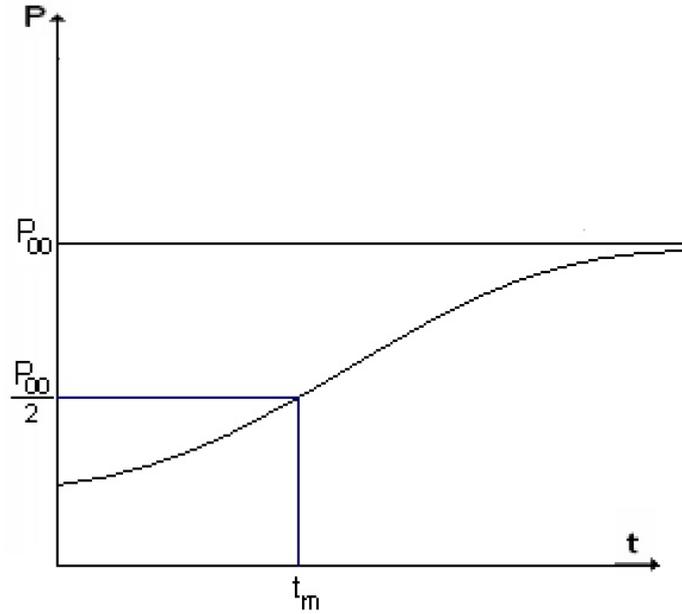


Fonte: Bassanezi, (2014), p. 336

- d) Como $r > 0$, temos que $\frac{dP}{dt}$ é crescente se $0 < P(t) < \frac{P_\infty}{2}$ e decrescente se $\frac{P_\infty}{2} < P(t) < P_\infty$, assim o valor máximo de $\frac{dP}{dt}$ é quando $P = \frac{P_\infty}{2}$.
- e) Se considerarmos a equação $P(t) = \frac{P_\infty \cdot P_0}{(P_\infty - P_0) \cdot e^{-rt} + P_0}$, para $P(t) = \frac{P_\infty}{2}$, determinamos o instante t_m em que a variação será máxima.

$$\begin{aligned} \frac{P_\infty}{2} &= \frac{P_\infty \cdot P_0}{(P_\infty - P_0) \cdot e^{-rt_m} + P_0} \\ e^{rt_m} &= \frac{P_\infty - P_0}{P_0} \\ t_m &= \frac{1}{r} \ln \frac{P_\infty - P_0}{P_0} \end{aligned}$$

Figura 10: Gráfico da evolução da população $P(t)$ em função do tempo t .



Fonte: Bassanezi, (2014), p. 336

Na equação $P(t) = \frac{P_\infty \cdot P_0}{(P_\infty - P_0) \cdot e^{-rt} + P_0}$, estimamos os valores de P_∞ e r e ajustamos os valores r_i médios com as respectivas populações médias P_i que são estimados através de um modelo exponencial onde:

$$r_i = \sqrt[10]{\frac{P_{t+1}}{P_i}} - 1 \text{ e } P_i = P\left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right) = P(t_i) \cdot e^{r_i \frac{t_{i+1} - t_i}{2}}, \text{ para um período de 10 anos.}$$

Como a taxa decaí linearmente em função da população, ajustamos os r_i com os P_i através de uma equação de reta.

3 Metodologia

Apresentamos uma aplicação da modelagem matemática com o intuito de demonstrar as etapas que envolvem esse processo, para isso foi escolhido um tema, feito a investigação da situação, seleção dos dados relevantes, formulação do problema, tradução da situação problema para linguagem matemática, escolha e aplicação do modelo encontrando a solução do problema e posteriormente analisado a solução e validado o modelo. Aplicamos um Modelo Linear para estimarmos o comprimento em função do tempo de cultivo de uma espécie de peixe conhecida como Tilápia do Nilo e o Modelo quadrático para estimarmos o peso em função do tempo de cultivo dessa espécie de peixe. Utilizamos os modelos determinísticos de Malthus e de Verhurst para estimarmos a população piauiense ao longo dos censos.

3.1 Aplicações da Modelagem Matemática

Nessa subseção, aplicamos alguns modelos matemáticos na resolução de algumas situações-problemas.

3.1.1 Aplicação da modelagem demonstrando suas etapas

Para demonstrarmos as etapas da modelagem matemática, utilizamos um modelo linear multivariado.

1) Interação

Escolha do tema:

Transporte de táxi não convencional em Teresina, Uber.

Investigação da situação:

Uber é um serviço de condução de passageiros particular que atualmente opera em 77 países e em mais de 545 cidades em todo mundo. A palavra "Uber", é uma gíria que

significa super, mega, ultra, muito, melhor, cool. É utilizada para expressar admiração, surpresa, espanto ou para salientar que alguma coisa é excepcional, é o máximo, é tudo de bom. Para contratar um serviço Uber, o usuário precisa instalar um aplicativo em seu aparelho celular e fazer um cadastro. Existem várias categorias, como: UberX, Uber Select, Uber Black entre outras, dependendo da cidade onde se deseja o serviço. Em Teresina, contamos apenas com a categoria UberX.

Os valores a pagar por esse serviço depende da cidade onde o serviço é oferecido.

Os valores a pagar por esse serviço em Teresina é composto por:

- i) Tarifa base: Uma taxa fixa cobrada no início da viagem;
- ii) Custo por minuto: Valor cobrado por minuto do início ao fim da viagem;
- iii) Custo por quilômetro: Valor cobrado por quilômetro percorrido;
- iv) Taxa de reserva: Taxa fixa cobrada para cobrir custos operacionais, não incluso em algumas categorias;
- v) E pedágio quando existir.

No cálculo do valor ainda incide um fator moderador, que é chamado de "dinâmica", que depende da simulação da procura feita pelos usuários e da quantidade de veículos disponíveis na região de procura em um determinado perímetro, ou seja, quando existem muitos usuários simulando a procura pelo serviço e poucos veículos disponíveis, a dinâmica sobe aumentando assim o valor do serviço, e quando o número de simulações de procura feita pelos usuários é menor ou igual ao número de veículos disponíveis, a dinâmica volta para 1, ou seja, o valor normal do serviço.

Tabela 1: Tarifas cobradas pelo serviço Uber na cidade de Teresina-PI.

<i>Categoria</i>	<i>Uber X</i>
<i>Tarifa base</i>	R\$ 2,50
<i>Custo por km</i>	R\$ 1,18
<i>Custo por min</i>	R\$ 0,14
<i>Taxa de cancelamento</i>	R\$ 6,00
<i>Taxa minima</i>	R\$ 6,00
<i>Custo fixo</i>	R\$ 0,00

Fonte: <https://www.uber.com>

2) Matemática

Formulação do problema:

Qual o valor a pagar por uma viagem utilizando o serviço Uber, tendo como partida o bairro Promorar e destino o bairro Saci em Teresina com tarifa normal? E qual o valor a ser pago quando a dinâmica for 1,5?

Figura 11: Percurso do bairro Promorar, Teresina-Pi ao bairro Saci, Teresina-Pi.



Fonte: <https://www.google.com>

Tradução da situação problema para linguagem matemática

O valor a pagar é obtido através da equação:

$$Valor = [(Tarifa base) + (Custo por km) + (Custo por min) + (Custo fixo)] \cdot k$$

Onde k é o valor da dinâmica.

Escolha e aplicação do modelo:

Sendo x a distância em km e y a duração em minutos da viagem e k o fator moderador da dinâmica temos:

$$Valor = [(2,50) + (1,18 \cdot x) + (0,14 \cdot y) + (0)] \cdot k$$

O tempo estimado da viagem é de 10 *min*.

A distância estimada da viagem é de 5 *km*.

Com tarifa normal temos $k = 1$

$$Valor = ((2,50) + (1,18 \cdot 5) + (0,14 \cdot 10) + (0)) \cdot 1$$

Com dinâmica de 1,5 temos $k = 1,5$

$$Valor = ((2,50) + (1,18 \cdot 5) + (0,14 \cdot 10) + (0)) \cdot 1,5$$

Solução do problema

Com tarifa normal temos que o valor da viagem será: $Valor = R\$ 9,80$

Com dinâmica de 1,5 temos que o valor da viagem será: $Valor = R\$ 14,70$.

3) Análise do modelo.

Interpretação do modelo:

Verificando os valores reais obtivemos para $k = 1$ $R\$ 10,00$, e para $k = 1,5$ obtivemos $R\$ 15,00$ e utilizando o modelo para estimarmos os valores, obtivemos $R\$ 9,85$ para tarifa normal e com dinâmica de 1,5 obtivemos $R\$ 14,80$, obtendo assim um erro bem próximo do real podendo assim ser um erro aceitável, pois esse cálculo depende exatamente do ponto de partida e do ponto de chegada.

Tabela 2: Comparação dos valores observados com os valores estimados da viagem utilizando o serviço UBER

k	$V. observados$	$V. estimados$	$ Erro $	$Erro(\%)$
1	R\$ 10,00	R\$ 9,80	0,02	2%
1,5	R\$ 15,00	R\$ 14,70	0,02	2%

Fonte: Autor

Validação do modelo:

Com a comparação dos valores estimados com os valores reais, através da diferença modular, obtemos um erro de aproximadamente 2% e observando que o grau de aproximação ficou bem pequeno, e assim podemos validar o modelo obtido e aplicá-lo para estimar o valor de outras viagens usando o aplicativo Uber.

Consolidação do modelo:

Chegando nessa fase visto que o modelo foi validado e com a possível viabilidade e aplicabilidade, podemos utilizar esse modelo como uma ferramenta de auxílio no processo de ensino-aprendizagem.

3.1.2 Modelo Linear

Para aplicar o modelo linear, escolhemos o cultivo de uma espécie de peixe chamada Tilápia do Nilo onde será analisado o seu crescimento no decorrer de 13 semanas, pois esse é o período de abate considerado por alguns criadores.

Segundo os Núcleos de Pesquisas Aplicadas em Pesca e Aquicultura do Brasil, a tilápia do Nilo é a espécie de peixe de água doce mais cultivada no Brasil. Vamos analisar a evolução do cultivo de 800 peixes em taques de alvenaria durante um período de 91 dias, onde esses atingem um peso médio de 179,6g e comprimento 20,7cm. O cultivo foi realizado em tanque de alvenaria com área de 200 m^2 , com renovação de água de

10% semanalmente, foram realizadas biometrias para a coleta dos dados sobre comprimento médio (cm) e peso médio (g), para posterior análise de dados trabalhando as características de ganho de peso médio, consumo médio de ração, conversão alimentar aparente, taxas de crescimento em peso e comprimento. Os peixes foram alimentados com ração balanceada seguindo o programa alimentar: uso de ração 40% de PB em pó de 0,05 até 50 g; ração 32% de PB de 50 a 300g, com frequência alimentar de 3 vezes ao dia. Foram utilizados 1000 alevinos, revertidos sexualmente, com peso médio inicial de 0,5 g e comprimento médio inicial de 1cm, a densidade de estocagem utilizada de 4 peixes m^2 .

Os dados obtidos sobre peso e comprimento dos peixes referentes aos dias de cultivo foram:

Tabela 3: Resumo dos dados referente ao período de cultivo da tilápia do Nilo.

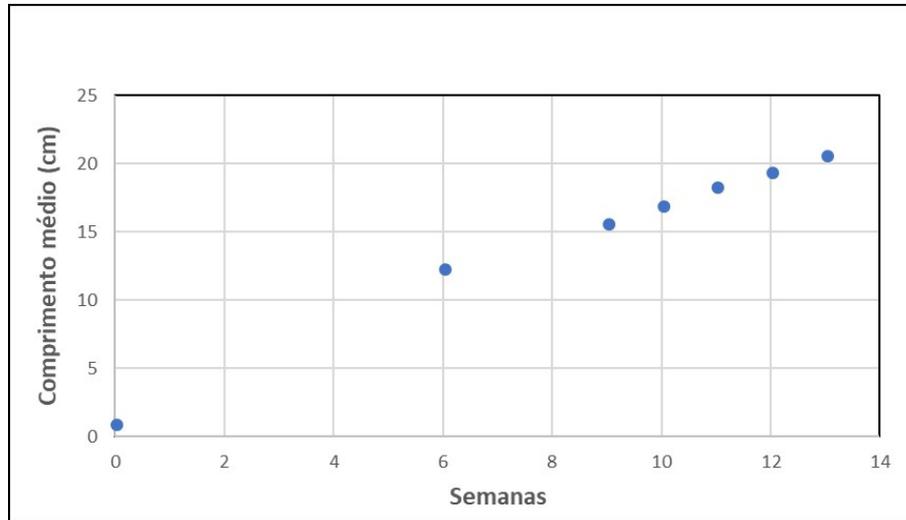
<i>n^o semana</i>	<i>Comprimento médio (cm)</i>	<i>Peso médio (g)</i>
0	1,0	0,5
6	12,4	40,0
9	15,7	86,0
10	17,0	108,1
11	18,4	130,0
12	19,5	139,3
13	20,7	179,6

Fonte: Núcleo de pesquisa aplicada em pesca e aquicultura

Na tabela 3, observamos os valores do comprimento em *cm* e do peso em *kg* referentes as 13 semanas de cultivo da Tilápia do Nilo.

Na figura 12, temos a dispersão das variáveis. Observamos que a medida que o número de semanas cresce, aumenta o comprimento das Tilápias do Nilo.

Figura 12: Gráfico de dispersão do comprimento em função do tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.



Fonte: Autor

Para analisarmos a correlação entre período de cultivo e comprimento das tilápias, utilizamos o coeficiente de correlação de Pearson que é determinado utilizando a fórmula seguinte e onde sua demonstração pode ser encontrada em (BARROSO, 1987) e (BUSSAB, 2004):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n}\right)}}$$

Onde:

x_i representa o número de semanas de cultivo das Tilápias;

y_i representa o comprimento médio em centímetros das Tilápias na semana x_i ;

n representa o número de observações feitas durante o experimento.

Tabela 4: Dados sobre comprimento e tempo referente ao período de cultivo da Tilápia do Nilo.

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	0	1,0	0	0	1
2	6	12,4	1,44	36	153,76
3	9	15,7	141,3	81	246,49
4	10	17,0	170,0	100	289,0
5	11	18,4	202,4	121	338,56
6	12	19,5	234,0	144	380,25
7	13	20,7	269,1	169	428,49
Σ	61	104,7	178,82	651	1837,55

Fonte: Autor

Assim o coeficiente de correlação sera:

$$r = \frac{178,82 - \frac{61 \cdot 104,7}{7}}{\sqrt{\left(651 - \frac{(61)^2}{7}\right) \cdot \left(1837,55 - \frac{(104,7)^2}{7}\right)}}$$

$$r = 0,9930.$$

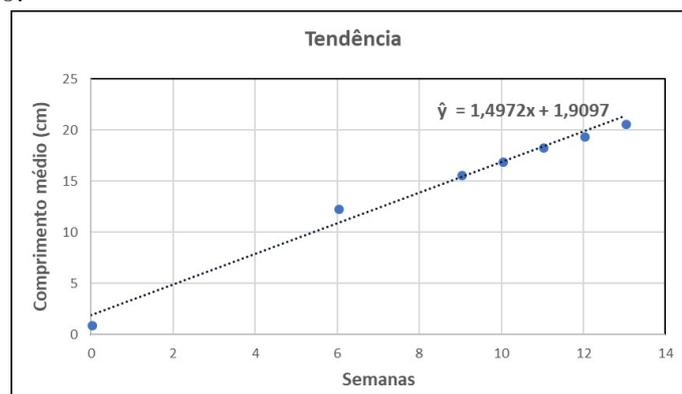
Há uma correlação de aproximadamente 99,3%, isso significa que 95,3% da variação do comprimento y , é explicada pelo número de semanas x . Observando o gráfico de dispersão Tempo/Comprimento, podemos estimar o comprimento das tilápias em função do período de cultivo através de uma equação da reta.

$\hat{y} = ax + b$, onde \hat{y} é o valor estimado do comprimento.

Utilizando o Método dos mínimos quadrados,

$$\begin{aligned}
e &= (y_i - \hat{y}_i) \\
\sum_{i=1}^n e_i^2 &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \\
a &= \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\
b &= \bar{y} - a\bar{x} \\
\hat{y} &= ax + b \\
\bar{x} &= 8,714285 \\
\bar{y} &= 14,957143 \\
a &= \frac{7 \cdot (1091,2) - (61)(104,7)}{7 \cdot (651) - (61)^2} \\
a &= 1,497249 \\
b &= 14,957143 - (1,497249) \cdot (8,714285) = 1,909689 \\
\hat{y} &= 1,497249x + 1,909689
\end{aligned}$$

Figura 13: Equação da reta de ajuste do comprimento em função do tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.



Fonte: Autor

Na figura 13, temos o gráfico da reta de ajuste do comprimento da Tilápia em função do número de semanas.

Tabela 5: Comparação dos valores estimados com os valores observados referentes ao comprimento e tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.

i	x_i	y_i	\hat{y}_i	$e = (y_i - \hat{y}_i)$
1	0	1,0	1,909689	-0,909689
2	6	12,4	10,893183	1,506817
3	9	15,7	15,38493	0,315070
4	10	17,0	16,882179	0,117821
5	11	18,4	18,379428	0,020572
6	12	19,5	19,876677	-0,376677
7	13	20,7	21,373926	-0,673926

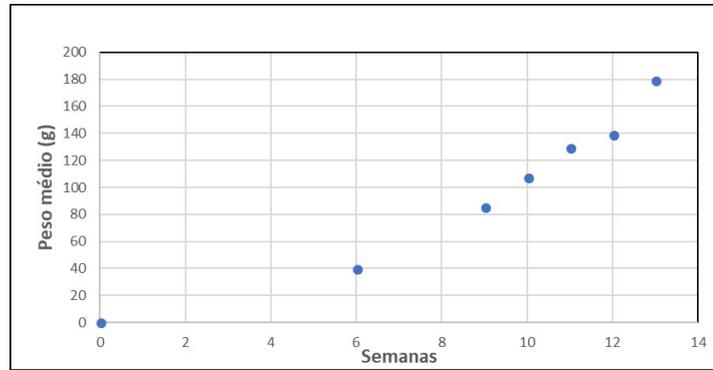
Fonte: Autor

Observando a diferença entre os valores estimados e os valores observados utilizando a diferença $e = (y_i - \hat{y}_i)$ como sendo o erro, obtemos um baixo percentual de erro podendo ser aceitável, tornando assim o modelo viável e aplicável para estimar o comprimento da Tilápia do Nilo em função do tempo de cultivo.

3.1.3 Modelo Quadrático

Para aplicarmos o modelo quadrático, usamos os dados referentes ao peso em função das 13 semanas de cultivo da Tilápia do Nilo citados no item anterior. Observando a curva de tendência do peso das tilápias em função do número de semanas, percebemos uma tendência de crescimento descrito por uma parábola.

Figura 14: Gráfico de dispersão do peso em função do tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.



Fonte: Autor

Tabela 6: Dados referente ao peso e tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	0	0,5	0	0,0	0,25
2	6	40,0	240,0	36	1600
3	9	86,0	774,0	81	7396,0
4	10	108,1	1081,0	100	11685,61
5	11	130,0	1430,0	121	16900,0
6	12	139,3	1671,6	144	19404,49
7	13	179,6	2334,8	169	32256,16
Σ	61	7531,4	178,82	651	89242,51

Fonte: Autor

Analisando o gráfico de dispersão na figura 14, escolhemos ajustar os dados através de uma equação de uma parábola, $\hat{y} = ax^2 + bx + c$ e utilizando o Método dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros da equação da parábola.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = c \sum_{i=1}^n x_i^0 + b \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = c \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + a \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = c \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + a \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{cases}$$

Tabela 7: Dados referente ao peso e tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.

i	x_i	y_i	$x_i^2 y_i$	x_i^3	x_i^4
1	0	0,5	0	0	0
2	6	40,0	1440	216	1296
3	9	86,0	6966	729	6561
4	10	108,1	10810	1000	10000
5	11	130,0	15730	1331	14641
6	12	139,3	20059,2	1728	20736
7	13	179,6	30352,4	2197	28561
Σ	61	7531,4	85357,6	7201	81795

Fonte: Autor

$$\begin{cases} 753,4 = c.7 + b.61 + a.651 \\ 178,82 = c.61 + b.651 + a.7201 \\ 85357,6 = c.651 + b.7201 + a.81795 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos:

$$a = 0,9626, b = 0,8731, c = 0,5089 \text{ com isso } \hat{y} = 0,9626x^2 + 0,8731x + 0,5089$$

$$\hat{y}_1 = 0,9626.0^2 + 0,8731.0 + 0,5089 = 0,5089$$

$$\hat{y}_2 = 0,9626.6^2 + 0,8731.6 + 0,5089 = 40,4011$$

$$\hat{y}_3 = 0,9626.9^2 + 0,8731.9 + 0,5089 = 86,3374$$

$$\hat{y}_4 = 0,9626.10^2 + 0,8731.10 + 0,5089 = 105,4999$$

$$\hat{y}_5 = 0,9626.11^2 + 0,8731.11 + 0,5089 = 126,5876$$

$$\hat{y}_6 = 0,9626.12^2 + 0,8731.12 + 0,5089 = 149,6005$$

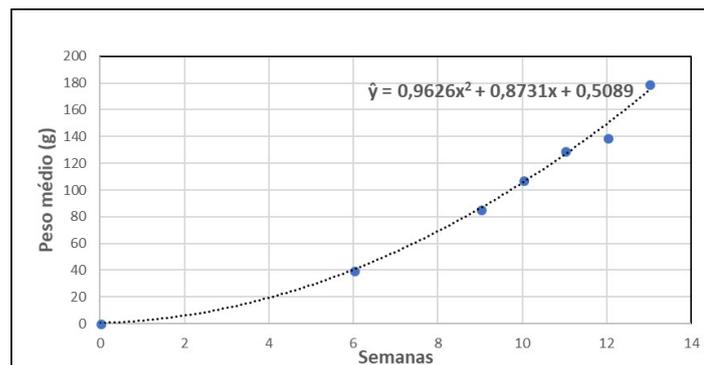
$$\hat{y}_7 = 0,9626.13^2 + 0,8731.13 + 0,5089 = 174,5386$$

Tabela 8: Comparação dos valores estimados com os valores observados referentes ao peso em função do tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.

i	x_i	y_i	\hat{y}_i	$e = (y_i - \hat{y}_i)$	$e^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$
1	0	0,5	0,5089	-0,0089	7,9210
2	6	40	40,4011	-0,4011	0,1608
3	9	86	86,3374	-0,3374	0,1138
4	10	108,1	105,4999	2,6001	6,7605
5	11	130	126,5876	3,4124	11,6444
6	12	139,3	149,6005	-10,3005	106,1003
7	13	179,6	174,5386	5,0614	25,6177

Fonte: Autor

Figura 15: Gráfico da parábola de ajuste do peso em função do tempo de cultivo da Tilápia do Nilo.



Fonte: Autor

Considerando esse período de 91 dias em um tanque de $200m^2$ com 800 tilápias, esse modelo é viável para estimar o peso das tilápias em função do tempo de cultivo, já que obtivemos uma boa aproximação dos valores reais.

3.1.4 Modelo discreto Malthusiano

Para aplicarmos o modelo Malthusiano, escolhemos estudar o crescimento populacional piauiense no decorrer dos censos de 1940 a 2010.

Vamos estimar o crescimento populacional piauiense através do modelo discreto de Malthus. Após fazer uma investigação da população piauiense através dos censos de 1940 a 2010 obtivemos os dados:

Na tabela 9, estão os valores da população piauiense nos censos de 1940 à 2010. Vamos

Tabela 9: Número de habitantes do Piauí nos seus respectivos censos (1940 - 2010).

<i>Censo</i>	<i>População</i>
1940	817601
1950	1045696
1960	1242136
1970	1680573
1980	2139021
1991	2582137
2000	2843278
2010	3118360

Fonte: IBGE: Censos demográficos de 1940 à 2010.

utilizar o Modelo de Malthus para estimar a população piauiense. Usando os dados da tabela 9 calculamos a taxa média α do crescimento populacional piauiense de 1940 à 2010:

$t = 70$, $P(70) = 3118360$ e $P(0) = 817601$.

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \implies \alpha = \sqrt[70]{\frac{3118360}{817601}} - 1 = 0,0193081523$$

Substituindo na equação (7) o valor calculado de α e a população inicial $P_0 = 817601$ temos:

$$P_t = P_0 e^{\ln(1+0,0193081523)t}$$

$$P(t) = 817601 e^{(0,019121151)t}$$

Vamos estimar a população piauiense através do Modelo de Malthusiano:

$$P(t) = 817601 e^{(0,019121151)t}$$

$$P(0) = 817601 e^{(0,019121151)0} = 817601$$

$$P(10) = 817601 e^{(0,019121151)10} = 989882$$

$$P(20) = 817601 e^{(0,019121151)20} = 1198466$$

$$P(30) = 817601 e^{(0,019121151)30} = 1451001$$

$$P(40) = 817601 e^{(0,019121151)40} = 1756749$$

$$P(51) = 817601 e^{(0,019121151)51} = 2167984$$

$$P(60) = 817601 e^{(0,019121151)60} = 2575100$$

$$P(70) = 817601 e^{(0,019121151)70} = 3117713$$

Para o ano de 2020 temos:

$$P(80) = 817601 e^{(0,019121151)80} = 3774663, 5147344.$$

Adotando o Modelo Malthusiano para estimar a população piauiense no ano de 2020, estimas-se que essa população será de 3774663 habitantes.

Observando na tabela 10 como os valores estimados não ficaram bem próximos dos valores reais, talvez esse modelo não seria adequado para estimar o crescimento populacional piauiense, pois utilizando diferenças modular para encontrar o erro quando comparados os valores e assim como prevê o processo de modelagem matemática, buscamos outro modelo para estimar o crescimento da população piauiense.

Tabela 10: Comparação dos valores estimados e dos valores observados da população piauiense.

<i>Censo</i>	<i>V. observados</i>	<i>V. estimados</i>	<i> Erro </i>	<i>Erro(%)</i>
1940	817601	817601	0	0
1950	1045696	989882	55814	5,33
1960	1242136	1198466	43670	3,51
1970	1680573	1451001	229572	13,66
1980	2139021	1756749	382272	17,87
1991	2582137	2167984	414153	16,03
1996	2673085	2385488	287597	10,75
2000	2843278	2575100	268178	9,43
2010	3118360	3117713	647	0,002

Fonte: Autor

3.1.5 Modelo Logístico contínuo (Verhurst)

Com o intuito de melhorar a estimativa do crescimento populacional piauiense, usamos o Modelo Logístico de Verhurst.

Na equação $P(t) = \frac{P_\infty \cdot P_0}{(P_\infty - P_0) \cdot e^{-rt} + P_0}$, vamos estimar os valores de P_∞ e r e vamos ajustar os valores r_i médios com as respectivas populações médias P_i que serão estimados através de um modelo exponencial com $i = 1, 2, 3, \dots$ onde:

$$r_i = \sqrt[10]{\frac{P_{i+1}}{P_i}} - 1 \text{ e } P_i = P\left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right) = P(t_i) \cdot e^{r_i \frac{t_{i+1} - t_i}{2}}$$

Como a taxa decai linearmente em função da população, ajustamos os r_i com os P_i através de uma equação de reta.

$$r_1 = \sqrt[10]{\frac{1045696}{817601}} - 1 = 0,02491 \implies P_1 = 817601 \cdot e^{0,02491 \cdot 5} = 926046$$

$$r_2 = \sqrt[10]{\frac{1242136}{1045696}} - 1 = 0,01736 \implies P_2 = 1045696 \cdot e^{0,01736 \cdot 5} = 1140518$$

$$r_3 = \sqrt[10]{\frac{1680573}{1242136}} - 1 = 0,03069 \implies P_3 = 1242136 \cdot e^{0,03069 \cdot 5} = 1448143$$

$$r_4 = \sqrt[10]{\frac{2139021}{1680573}} - 1 = 0,02441 \implies P_4 = 1680573.e^{0,02441*5} = 1898729$$

$$r_5 = \sqrt[11]{\frac{2582137}{2139021}} - 1 = 0,01726 \implies P_5 = 2139021.e^{0,01726*5} = 2331818$$

$$r_6 = \sqrt[9]{\frac{2843271}{2582137}} - 1 = 0,01076 \implies P_6 = 2582137.e^{0,01076*5} = 2724860$$

$$r_7 = \sqrt[10]{\frac{3118360}{2843278}} - 1 = 0,00927 \implies P_7 = 2843278.e^{0,00927*5} = 2978165$$

Tabela 11: Valores das taxas médias r_i e populações médias P_i do Piauí em cada censo considerado.

i	r_i	p_i
1	0,02491	926046
2	0,01736	1140518
3	0,03069	1448143
4	0,02441	1898729
5	0,01726	2331818
6	0,01076	2724860
7	0,00927	2978165

Fonte: Autor

Na tabela 11, temos os valores estimados das taxas médias r_i com suas respectivas populações médias p_i dos censos de 1940 à 2010.

Na figura 16, temos o gráfico da reta de ajuste da taxa média de crescimento, em função da população média $r(p) = -0,000000007421588P + 0,0334953697634$.

Com isso:

$$\text{Quando } r \longrightarrow 0, P \longrightarrow P_\infty \implies P_\infty = \frac{-0,0334953697634}{-0,000000007421588}$$

$$P_\infty = 4513234$$

$$\frac{dP}{dt} = r(p)P$$

$$\frac{dP}{dt} = (-0,000000007421588P + 0,0334953697634)P$$

$$\frac{dP}{dt} = -0,000000007421588P^2 + 0,0334953697634P$$

Colocando $0,0334953697634P$ em evidência temos:

$$\frac{dP}{dt} = 0,0334953697634P \left(1 - \frac{0,000000007421588P}{0,0334953697634} \right)$$

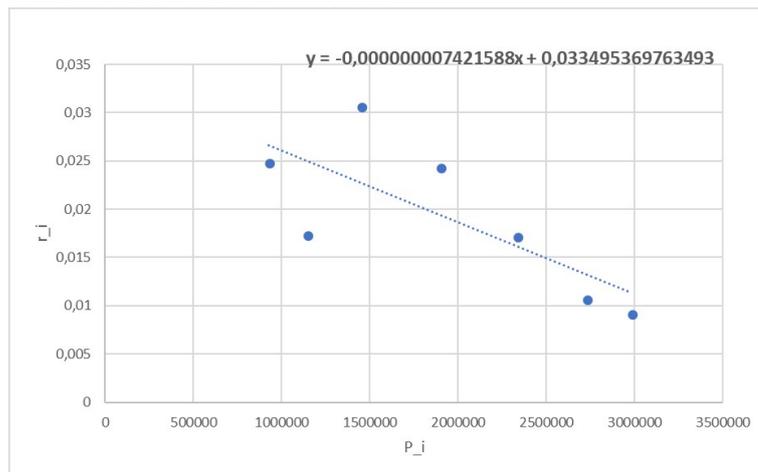
$$\frac{dP}{dt} = 0,0334953697634P \left(1 - \frac{P}{4513134} \right)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right)$$

Concluimos que:

$$r = 0,0334953697634$$

Figura 16: Reta das médias populacionais P_i em função das taxas médias r_i da população piauiense em cada censo considerado.



Fonte: Autor

$$P(t) = \frac{P_\infty}{\left(\frac{P_\infty}{P_0} - 1\right) \cdot e^{-rt} + 1}$$

$$P(t) = \frac{4513234}{\left(\frac{4513234}{817601} - 1\right) \cdot e^{-0,03349(t-1940)} + 1}$$

$$P(t) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(t-1940)} + 1}$$

$$P(1940) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(1940-1940)} + 1} = 817601$$

$$P(1950) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(1950-1940)} + 1} = 1048893$$

$$P(1960) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(1960-1940)} + 1} = 1243489$$

$$P(1970) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(1970-1940)} + 1} = 1688348$$

$$P(1980) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(1980-1940)} + 1} = 2198325$$

$$P(1991) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(1991-1940)} + 1} = 2498555$$

$$P(2000) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(2000-1940)} + 1} = 2875530$$

$$P(2010) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(2010-1940)} + 1} = 3119644$$

Para os próximos censos até 2050 utilizando o Modelo Contínuo de Verhurst, temos que a estimativa da população piauiense será:

$$P(2020) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(2020-1940)} + 1} = 3444796$$

$$P(2030) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(2030-1940)} + 1} = 3693646$$

$$P(2040) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(2040-1940)} + 1} = 3894939$$

$$P(2050) = \frac{4513234}{4,52009 \cdot e^{-0,03349(2050-1940)} + 1} = 4052954$$

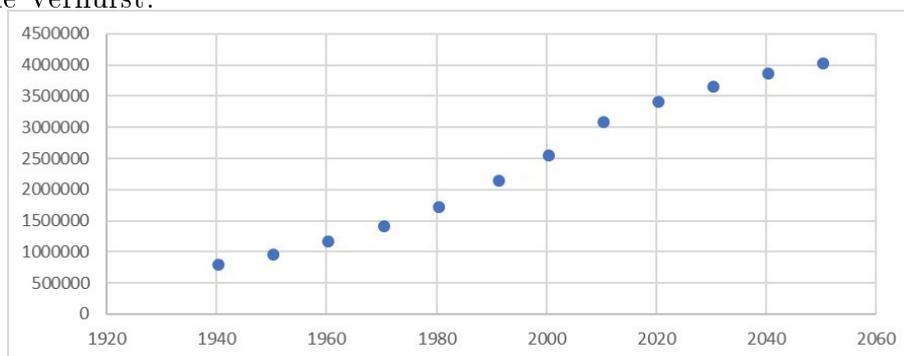
Tabela 12: Comparação dos dados observados e os dados estimados da população piauiense usando o modelo de Verhurst.

<i>Censo</i>	<i>V. observados</i>	<i>V. estimados</i>	<i> Erro </i>	<i>Erro(%)</i>
1940	817601	817601	0	0
1950	1045696	1048893	20325	0,30
1960	1242136	1243989	119966	0,14
1970	1680573	1688348	19294	0,46
1980	2139021	2198325	72560	2,77
1991	2582137	2498555	101213	3,23
2000	2843278	2875530	33053	1,13
2010	3118360	3119644	29950	0,04

Fonte: Autor

A seguir, temos o gráfico de dispersão dos valores da evolução da população piauiense obtidos através do Modelo de Verhurst.

Figura 17: Gráfico de dispersão da evolução da população piauiense obtido através do Modelo de Verhurst.



Fonte: Autor

Observando na tabela 12 o erro obtido utilizando as diferenças modulares, concluímos que o Modelo de Verhurst se mostrou mais eficiente que o Modelo de Malthus onde essa diferença poder ser justificada pelo fato de que, na estimativa das taxas de crescimento, no Modelo de Malthus a taxa é proporcional a população total enquanto que no Modelo de Verhurst, a taxa de crescimento é proporcional a população em cada instante.

Ao analisarmos o gráfico de dispersão da evolução da população piauiense na figura 17 obtido através do Modelo de Verhurst, percebemos que com esse modelo, houve uma melhor aproximação dos valores estimados com os valores observados a respeito do crescimento populacional piauiense se comparado com o Modelo de Malthus, e assim podemos utilizar esse modelo para estimar a população piauiense no decorrer dos próximos censos. Percebemos nitidamente de como seria o comportamento da curva que se ajustaria a esses dados, com taxa crescente até cerca do ano 2000 e a partir de então um decréscimo dessa taxa com uma tendencia de estabilidade por volta do ano de 2060, sendo essas as características da Curva Logística.

4 Considerações Finais e Trabalhos Futuros

A modelagem matemática não é apenas uma forma de estudar matemática aplicada, a escolha de modelos matemáticos no ensino, seja na forma de apresentações ou seja em aplicações adequando problemas matemáticos à realidade dos alunos, é uma forma de propicia ao aluno melhorar seu desempenho escolar tornando-o sujeito parte do processo de ensino. O aluno participando do processo de modelagem, no qual o conteúdo é associado à realidade haverá uma ligação direta do que se aprendeu com o que se trabalhou na modelação e com isso professores e alunos ficarão mais entusiasmados com os conteúdos de matemática. Com o ensino de matemática através desse processo, acreditamos que o processo de ensino aprendizagem, se tornará mais gratificante, uma vez que aluno passa a estudar assuntos que le interessam e fazendo com que ele embora indiretamente, seja responsável pelo seu aprendizado. O professor também se beneficia, pois aprimorará seus conhecimentos sendo levado a ensinar conteúdos imprevisíveis com a escolha dos temas feito pelos alunos.

O que propomos não é uma metodologia que vai acabar com as dificuldades de ensino-aprendizagem, e sim,, uma forma de amenizar essas dificuldades embora tenha algumas resistência quanto ao uso dessa metodologia. Com o intuito de ensinar buscando metodologias alternativas, propomos para trabalhos futuros como: oficinas, a utilização da modelagem matemática em sala, pois para o processo se tornar completo, o pesquisador tem que conhecer, saber como funciona e aplicar a modelagem matemática.

Referências

- [1] ALVES, J.L. **Modelagem Matemática na Programação Linear: Método Simplex e Aplicações**. *Dissertação de mestrado*. Teresina-PI, UFPI (2016).
- [2] ARAGÃO, M. F. A. **A HISTÓRIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA: Uma perspectiva de didática no Ensino Básico**. *Artigo*. 2^a ed. Campina Grande- PB, (2013).
- [3] BARROSO, L.C; BARROSO, M.A. **Cálculo numérico com aplicações**. 2^a ed. São Paulo-SP, Harbra, (1987).
- [4] BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 4^a ed.São Paulo-SP: Contexto, (2014).
- [5] BASSANEZI, R.C. **Equações Diferenciais Ordinárias: Um curso introdutório**. Coleção BC&T- UFABC, Textos didáticos V.1.
- [6] BASSANEZI, R.C. **Temas & modelos**. Santo André-SP, Universidade Federal do ABC.
- [7] BICUDO, M. A. V; BORBA. M. de C. **Educação Matemática: Pesquisa em movimento**. 2^a ed. - São Paulo-SP; Cortez (2005).
- [8] BIEMBENGUT, M.S; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 3^a ed.- São Paulo-SP: Contexto, (2009).
- [9] BURACK, D. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. *Tese de doutorado*. Campinas-SP, UNICAMP (2002).
- [10] BUSSAB, W. DE O; MORETTIN, P. A., **Estatística Básica**. 5^a ed. São Paulo-SP: Saraiva, (2004).

- [11] CAETANO, M. T. P. **Modelagem Matemática da Influenza A(H1N1)**. *Dissertação de mestrado*. Campinas-SP, IMECC (2010).
- [12] CENTRO DE REFERÊNCIA EM MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO, (CRMM), **Percursos brasileiros**. disponível em: *https://www.furb.br/cremm/*, acessado em 15/05/2018;
- [13] FERREIRA, G.P; SILVEIRA, A; DA SILVA, L.A. **A modelagem matemática ao longo da história e o surgimento da modelagem no Brasil**. *XI ENEM, Artigo*. 2ª ed. Campos Cabo Frio, IFF, (2013).
- [14] FUNDAÇÃO CEPRO, **Piauí em números**. F. Cepro, 9ª ed. Teresina -PI (2012).
- [15] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. V:1. 5ª edição. Rio de Janeiro-RJ: LTC (2001).
- [16] LIMA, R.R. **Modelagem Matemática da População Teresinense e a Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS)**. *Dissertação de mestrado*. Teresina-PI, UFPI (2016).
- [17] MACENA, O. M. C. F; FIRMINI, A. G. L; REIS, R. M. S. **Avaliação de desempenho zootécnico da Tilápia do Nilo**. *IV Encontro Nacional dos Núcleos de Pesquisa Aplicada em Pesca e Aquicultura*, (Artigo).
- [18] MIGUEL, I. C; NATTI, P. L. **Uma proposta de modelagem matemática aplicada à produção de farinha de trigo**. *Artigo*. Londrina-PR, Universidade Estadual de Londrina (2009).
- [19] NETO, A. C. M. **Fundamentos de Cálculo**. 1ª edição. Rio de Janeiro-RJ: SBM (2015).

- [20] PREÇO DO SERVIÇO UBER, disponível em: *https* :
//www.techtudo.com.br/tutoriais/uber - preco - dinamico.htm. acessado
em 21/05/2018.
- [21] ROQUE, C. C. E. **Modelagem matemática no ensino fundamental**. *Artigo*.
- [22] SAMPAIO, J.C.V. **Passeios de Euler e as Pontes de Königsberg**. Disponível
em <http://www.dm.ufscar.br/sampaio/PasseiosdeEuler.pdf>.
- [23] SERVIÇO DE TRANSPORTE UBER, disponível em: *https* :
//www.uber.com/pt - BR/, acessado em 22/05/2018;