UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

(Mestrado)

DENIR COSTA DE OLIVEIRA

BASES NUMÉRICAS

Maringá-PR

2018

DENIR COSTA DE OLIVEIRA

BASES NUMÉRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi

Maringá
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

O482b

Oliveira, Denir Costa de
Bases numéricas / Denir Costa de Oliveira. -- Maringá, 2018.
xv, 81 f. : il., fotos, color.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2018.

1. Sistema posicional numérico. 2. Bases numéricas. 3. Critérios de divisibilidade. I. Shirabayashi, Wesley Vagner Inês, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 513.5

Edilson Damasio CRB9-1.123

DENIR COSTA DE OLIVEIRA

BASES NUMÉRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Jair da Silva
Universidade Federal do Paraná – Jandaia do Sul

Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 10 de outubro de 2018.
Local de defesa: Sala 107, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses anos de estudos, em especial: à minha esposa pelo companheirismo e meus pais pelo exemplo de vida.

Agradecimentos

Quero manifestar aqui minha sincera gratidão a todas as pessoas que de alguma forma me ajudaram a conquistar mais essa vitória. Agradeço em especial:

- À minha esposa Rosimeire, pela paciência, e por me apoiar em todos os momentos.
- Aos meus filhos, por compreender meus momentos de ausência.
- À minha irmã Aurea, que me incentivou a seguir esse caminho.
- Aos meus amigos e colegas de mestrado: Valdenor que acompanhou o início dessa caminhada e me apoiou nos momentos de decepção, Wagner pelos seus esforços em encontrar um caminho alternativo na longa estrada da matemática e Rogério que se mostrou um grande professor explicando e exigindo qualidade durante nossos estudos;
- A todos os meus demais amigos, muito obrigado. Pelas horas de estudo, companheirismo e ajuda;
- Ao meu orientador Prof. Wesley Vagner, pela paciência e pelas ótimas ideias;
- Ao apoio financeiro recebido da CAPES.

“Se experimentar prazer com a Matemática, não a esquecerá facilmente e haverá, então, uma grande probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais: uma ocupação favorita, uma ferramenta profissional, a própria profissão, ou uma grande ambição.”

George Pólya.

Resumo

O presente trabalho abrange a relevância histórica acerca de bases numéricas e seus conceitos: grande mudança no modo de registrar os números depois dos sistemas numéricos posicionais, mais especificamente no que tange ao sistema decimal, a verificação que as operações matemáticas têm os mesmos algoritmos em todas as bases. Investigamos alguns critérios de divisibilidade, na base decimal e em uma base n qualquer. Estes estudos também apresentam propostas de situação de aprendizagem de Matemática, composta por cinco atividades, em que discutimos procedimentos matemáticos e uso das tecnologias que colaboram com o ensino-aprendizagem, através do desenvolvimento de metodologias que enfatizem a construção de estratégias abstraídas do contexto e generalizar. Propomos aplicações das bases numéricas: jogo do nim, código de barras, armazenamento de textos em computador, problema com balança e truques de adivinhação.

Palavras chave: sistema posicional numérico, bases numéricas, critérios de divisibilidade.

Abstract

The present work encompasses the historical relevance of numerical bases and their concepts: great change in the way to register the numbers after the positional numerical systems, more specifically in what concerns the decimal system, the verification that the mathematical operations have the same algorithms on all bases. We investigated some divisibility criteria, in the decimal base and in any n base. These studies also present proposals for learning situations in Mathematics, composed of five activities, in which we discuss mathematical procedures and use of technologies that collaborate with teaching learning, through the development of methodologies that emphasize the construction of strategies abstracted from the context and generalize. We propose applications of the numerical bases: nim game, bar code, computer text storage, scales problem and tricks of divination.

key words: numerical basis system, numerical bases, divisibility criteria.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Segundo Andrini (Andrini, pág. 7)[1] na maior parte da história da humanidade, as pessoas não sabiam contar, e a humanidade levou centenas de milhares de anos para construir a ideia de números. Também [1] lembra que é provável que a ideia de números tomou sentido devido a necessidade de se formalizar a quantidade, de algum modo. A maneira inicial de contagem foi a correspondência um a um. Os dedos foram instrumentos para indicar os primeiros sinais, usando-os para contar até dez, para valores maiores eram usadas pedras, ossos e todo tipo de objetos a mão. Segundo Boyer (Boyer, pág. 2) [2] alguns povos passaram a agrupar de 5 em 5, outros de 10 em 10, de 12 em 12, de 20 em 20 ou de 60 em 60. Aristóteles é citado por Boyer [2], por ter observado há muito tempo, que o sistema decimal é apenas o resultado da anatomia humana. Historicamente a contagem pelos dedos, ou o uso de contar por cinco e dez parece ter surgido depois da contagem por dois e três.

Os sinais para números nos adverte Boyer [2] que provavelmente precederam as palavras para números, pela facilidade de marcar bastões ao invés de modular uma palavra para identificar um número. Como a socialização por palavras é tão difícil por isso o sistema decimal teve progresso, por ser fácil de se observar e entender.

Também Boyer (Boyer, pág. 2) [2] observa que as linguagens modernas são construídas quase sempre, sem exceção, em torno da base dez, de modo que alguns números, são descritos por múltiplos de dez. A demora no desenvolvimento da linguagem para abstrações, como o número, é percebido pela necessidade do uso de coleções concretas para identificar números. Exemplos: dois peixes ou dois bastões, mais tarde os números foram abstraídos, e usados para identificar todo tipo de conjunto.

Boyer [2] lembra que usualmente, supõe-se que a matemática surgiu em resposta à necessidades práticas, mas estudos antropológicos sugerem que a contagem teve início em rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo. Note que, nas encenações religiosas era necessário seguir uma ordem de apresentação, surgindo assim o aspecto ordinal antes do cardinal. Esses estudos não tem provas fortes, mas estaria em harmonia com a divisão ritual dos inteiros ímpares e pares, os primeiros considerados como masculinos e os últimos, como femininos. Tais distinções eram conhecidas em civilizações em todos os cantos da terra, e mitos relativos a números masculinos e femininos sempre tem muita consistência.

Basta criar uma linguagem gestual (números) para atingir um número desejado como reflete os pensamentos de Ifrah [6]: antes de tudo essa linguagem precisa da concepção da noção de unidades distintas e da capacidade de realizar sua síntese. Numa ordem de sucessão invariável obedecendo o princípio da recorrência, alem disso, dispõe de uma "base",que permite repartir os números segundo níveis sucessíveis chamados de unidade de primeira ordem, unidade de segunda ordem, e assim por diante. Ou seja, para que os sinais substantivos constituam um sistema de numeração é preciso que:

- os sinais devem ser estruturados de tal maneira que o pensamento de seu utilizador possa construí-lo como um sistema de unidades hierarquizadas sucessivamente.
- exista um número determinado de elementos que indica o número de unidades (base).

Resumindo, tendo uma notação numérica em que dois indivíduos se compreendam, logo o sistema de numeração é um sistema de comunicação humano que deve ser regido pelo princípio da recorrência e pelo princípio da base (Ifrah [6], pág. 502).

Ao longo dos 5000 anos de história da numeração, os povos não trabalharam com um único sistema de numeração, por isso é feita uma classificação das numerações na história.

Classificação Das Numerações Escritas

Baseado nos estudos de Ifrah [7] essa classificação revela três grandes categorias dos sistemas de notações numéricas:

- Categoria das numerações aditivas: apoiam-se sobre o princípio de adição e cujos algarismos possuem, cada um, seu valor próprio, independentemente de sua posição nas representações numéricas. De acordo com a Figura 1.

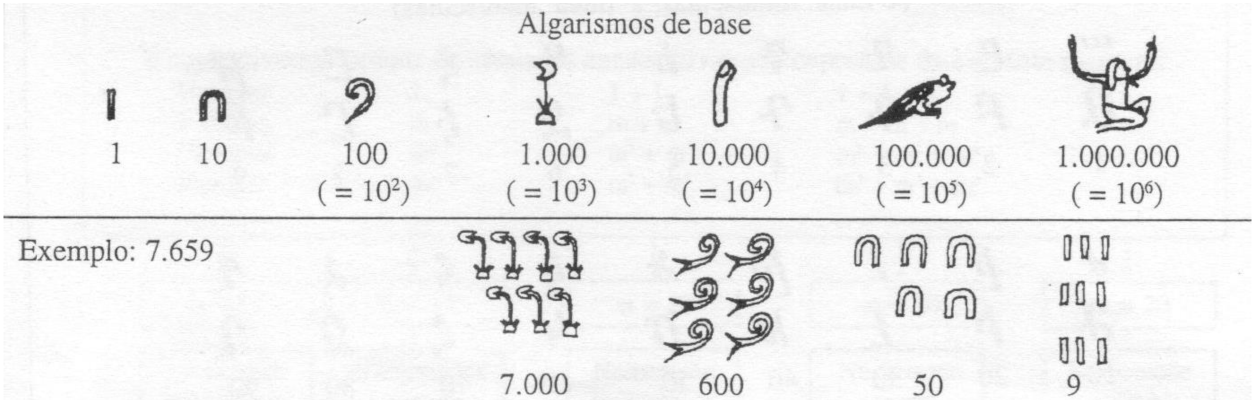


Figura 1: Numeração Hierográfica Egípcia. Fonte: pág. 521 [7].

Representação usada no princípio aditivo, segundo a decomposição:

$$\begin{aligned} 7659 &= (1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000) \\ &+ (100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100) \\ &+ (10 + 10 + 10 + 10 + 10) \\ &+ (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1). \end{aligned}$$

- Categoria das numerações híbridas: apoiam-se sobre o princípio em que a adição e a multiplicação intervenham ao mesmo tempo nas representações e cujos algarismos possuem, cada um, seu valor próprio, independente de sua posição nas representações numéricas. De acordo com as Figuras 2 e 3.

  Representação do princípio híbrido, segundo a decomposição:

$$\begin{aligned} 7659 &= (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \times 1000 \\ &+ (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \times 100 \\ &+ (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\ &+ (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1). \end{aligned}$$

- Categoria das numerações de posição: apoiam-se sobre o princípio de que o valor dos algarismos de base é determinado por sua posição na escrita dos números, tem como uma das principais diferenças a necessidade do zero.

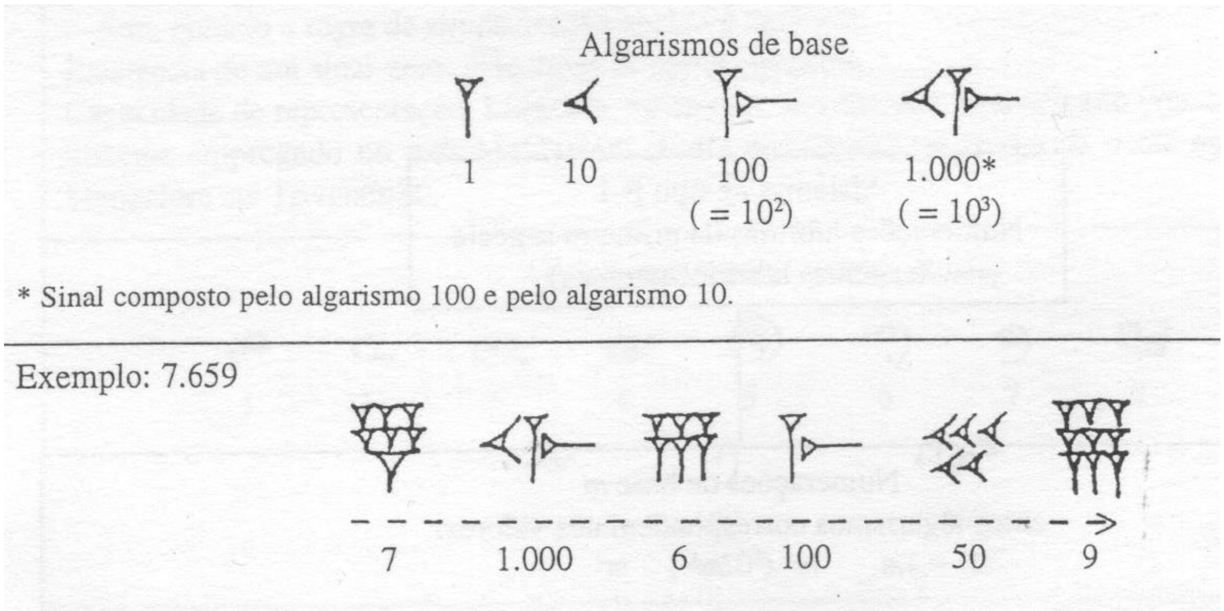


Figura 2: Numeração comum Assírio Babilônio. Fonte: pág. 536 [7].

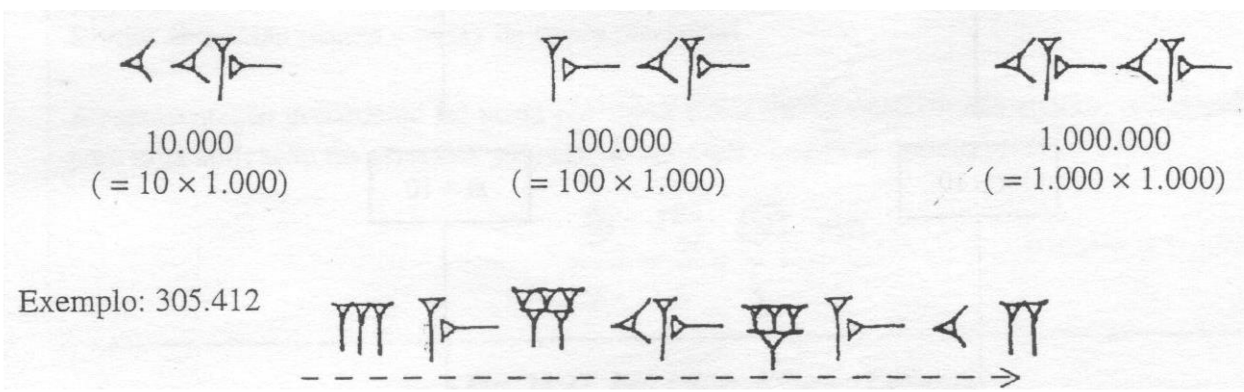


Figura 3: Notação dos grandes números Assírios Babilônios. Fonte: pág. 536 [7].

Representação do princípio posicional, segundo a decomposição:

$$7659 = 7.10^3 + 6.10^2 + 5.10^1 + 9.10^0.$$

Capítulo 1

História das Bases

Neste capítulo faremos uma breve descrição da história das bases, informando a respeito do uso delas por alguns povos.

1.1 Base 2

É bem comum encontrar quem diga que o cálculo binário nasceu com a filosofia do *yin* e do *yang*. Pois, segundo Ifrah [7], até mesmo o matemático Leibniz [1], um dos inventores do sistema binário se convenceu dessa ideia, quando lhe mostraram as 64 figuras formadas pelos hexagramas do tratado chinês do *"yijing"*. Segundo a doutrina chinesa, esses princípios nada mais seriam do que a aparência bipolar do "Último Supremo", (céu e a terra), o *yin-yang* está fundamentado em uma concepção que opõe em alternância, duas energias:

- uma, feminina, o *yin*, representada graficamente por um traço descontínuo – –;
- e outra, masculina, o *yang*, representada graficamente por um traço contínuo ——.

Tirando o fato de que o sistema binário e a filosofia chinesa, ambos trabalhem com dois símbolos, não há mais em comum, sabe-se que o número binário é fundamentado no princípio posicional e utiliza-se do zero. Ora, os chineses usaram muitos outros sistemas de numeração e todos com base decimal, sabe-se que os chineses demoraram a utilizar o zero na sua história. Então temos como época de nascimento da numeração binária o século XVII.

Podemos observar, pela história, que o que impulsionou o desenvolvimento e a reflexão progressiva do sistema binário (base 2), como também o octal (base 8) e o sistema hexade-

[1] Gotfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).

cimal, foram as discussões pelos estudiosos europeus, que devido a ponto de vista teórico, voltaram-se para possibilidades do sistema numérico posicional e propuseram a substituição do sistema decimal. Tentativas frustradas já que o sistema decimal já fazia parte da tradição humana.(Ifrah, pág. 578) [7]

Na história contemporânea os computadores digitais utilizam o sistema de numeração de base 2. Como foi comentado, Leibniz, foi um dos primeiros defensores do sistema binário e propunha que todo pensamento racional se tornasse matemático e defendia na sua aritmética binária que 1 representava Deus e 0 o nada, em outras palavras, uma espécie de linguagem ou escrita universal. Suas ideias foram deixadas de lado e só foram retomadas no século XIX por George Boole que criou um sistema de lógica simbólica conhecido como Álgebra Booleana. Essa Álgebra Booleana e o sistema binário foram usados um século depois para a criação do computador digital eletrônico.

No sistema de numeração base $b = 2$, muito utilizado em computação, devido à vinculação direta com o funcionamento dos circuitos eletrônicos digitais, que utilizam a representação de sinais digitais: ligado/desligado, aceso/apagado, presente/ausente, alto/baixo, verdadeiro/falso etc. temos que o conjunto S:

$$S = \{0, 1\},$$

e todo número natural é representado por uma sequência de 0 e 1. Por isso é utilizado para o armazenamento, a manipulação e a troca de informações entre computadores, pois permite que a informação seja validada e conferida.

1.2 Base 5

A mitologia Grega segundo Lintz (Lintz, pág. 85) [9] tem de forma empírica o conceito de número; como sistema de numeração, sistema de pesos e medidas, e cita que Homero[2], usa com frequência a frase "contar de cinco em cinco", que esclarece que mesmo nos tempos homéricos, nessa época já estabelecido o sistema decimal, ainda existiam traços do sistema de contar de cinco em cinco, ou seja, "de mão em mão", evidenciando sua origem antropomórfica.

[2]Homero, poeta grego, do século VIII a.C .

Essa é a mesma origem do sistema de contar de vinte em vinte, isto é, as duas mãos e os dois pés, deixando vestígios no francês onde oitenta é "quatre-vingts".

Boyer [2] diz que "Quando o homem primitivo usava tal método de representação, ele frequentemente amontoava as pedras em grupos de cinco, pois os quíntuplos lhe eram familiares por observação das mãos e pés humanos".

A técnica digital quinária, ainda é usada pelos povos de Bombaim na Índia, segundo Ifrah [6]. Essa técnica consiste inicialmente da contagem das cinco primeiras unidades pela extensão sucessiva dos dedos da mão esquerda. Uma vez atingido esse número, eleva-se, em seguida, o polegar direito, depois continua-se a contar até dez, estendendo-se novamente os dedos da mão esquerda. Assim, pode se contar até 30, de acordo com a Figura 1.1.

Figura 1.1: Técnica digital quinária (base 5). Fonte: pág. 87 [6].

Parece pertinente a pergunta: por que a base 5 não substituiu a decimal sendo essa base de origem antropomórfica como as outras? Não se sabe a resposta a essa pergunta. O que sabe-se é que a base 5 foi utilizada, deixando traços em quatro continentes. (Ifrah, pág. 71).

1.3 Base 10

Boyer [2] fala sobre o surgimento do sistema de numeração hindu arábico, surgido no século VII. Define como um dos marcos iniciais, quando a obra astronômico matemática, conhecida pelos árabes como *Sindhind*, foi trazida a Bagdá da Índia. Essa obra foi traduzida para o árabe e estimulou o interesse dos conquistadores árabes, estimulando a absorverem a cultura de seus vizinhos. O astrônomo e matemático Mohammed ibu-Musa al-Klowarizmi baseado nas traduções das obras *Sindhind*, escreveu dois livros sobre aritmética e álgebra que tiveram papéis muito importantes na história da matemática. Nessa obra al-Khowarizmi deu uma exposição tão completa dos números hindus que foi provavelmente responsável pela impressão falsa de que o nosso sistema de numeração é de origem árabe, mesmo assumindo como fato a origem hindu desse sistema de numeração. Mesmo assim os leitores distraídos começaram a atribuir o sistema de numeração como de autoria de al-Khowarizmi. Surgindo uma nova notação conhecida inicialmente como al-Kho-warizmi, depois algorismi, e finalmente o esquema de numeração usando numerais hindus veio a ser chamado simplesmente de algorismo ou algoritmo, palavra que, originou-se do nome al-Khowarizmi, e que significa, um modo de resolução de operações matemáticas.

1.3.1 Princípio da Base Decimal

Segundo Andrini [1], pág. 21, quando os povos antigos iniciaram a criação de animais e a plantar, contar passou a ser importante para que pudessem controlar o que possuíam, lançaram mão da contagem univoca, quando os animais desfilavam. Desse fato nos vem a pergunta. E quando a criação aumentava? Para isso precisou-se definir uma nova tecnologia para contar, porque a quantidade de dedos é limitada. De acordo com Ifrah [6], pág. 48, um exemplo vem do povo de certas regiões da África, onde os pastores enumeravam rebanhos fazendo colares. O primeiro animal era representado por uma concha em um colar, o segundo animal por outra concha e assim por diante. No décimo animal era trocado o colar por outro, e uma concha era colocada nesse segundo colar, associado às dezenas. Depois recomeçava-se a enfiar as conchas novamente no colar anterior até a passagem do vigésimo animal, ocasião em que se trocava novamente o colar pela segunda concha no colar dos decimais, quando essa também continha dez conchas, trocava-se essa por uma concha que era enfiada em um terceiro colar, associado as centenas. E assim sucedia até o final da contagem dos animais.

A ideia fundamental desse procedimento reside, demasiadamente, na predominância do agrupamento de coisas de dez em dez: das unidades em dezenas (conjuntos de dez), das dezenas em centenas (conjuntos de dez dezenas), das centenas em milhares (conjuntos de dez centenas) e etc. Essa técnica concreta é o que se chama princípio da base dez. Essa técnica além de ser aplicada com objetos, pode ser aplicada tanto a palavras quanto a sinais gráficos de base dez. Nossa enumeração atual é escrita com os seguintes símbolos gráficos:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.$$

Nessa numeração, todos os problemas foram superados pelos hindus que criaram um sistema de numeração que tinha três grandes características:

- de base dez ou decimal;
- posicional;
- define o zero como número, isto é, um símbolo para o nada.

No entanto, o sistema posicional já tinha sido usado em outros sistemas numéricos, como o dos babilônios, por exemplo. Mas, foi na numeração hindu em que ele ganhou eficácia, graças à criação de um símbolo para o nada (zero).

1.3.2 Resenha Sobre as Vantagens da Base Dez

A base dez é a mais difundida da história e sua adoção é hoje quase universal. A base dez tem vantagem de memorização em relação a base sessenta, trinta ou vinte, já que os nomes dos números ou os símbolos de base são relativamente poucos e uma tabela de adição ou uma tabela de multiplicação, pode sem dificuldade ser aprendida. Portanto, as dificuldades são bem maiores nos outros casos.

Numa base grande os números com valor maior do que a base terão como vantagem sua representação reduzida, mas imagine a grande dificuldade de uma pessoa tendo de memorizar sessenta algarismos, ou ainda mais, memorizar uma tabela de adição com 60×60 entradas, por exemplo.

Com bases menores, como a binária, bem mais restrita que a decimal é mais fácil de memorizar seus elementos, ou tabelas de multiplicação por ter, nesse caso, apenas 2×2 entradas. Por outro lado, há dificuldades adicionais para representar grandes quantidades usando essa base quando comparada com o sistema decimal de base dez. Observe a Tabela 1.1:

	Números													
base 10	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
base 2	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	...

Tabela 1.1: Representação dos números na base 10 e na base 2.

Considere como exemplo o número um mil cento e dez, que só se escreve com quatro algarismos na base 10; 1110, este se exprimiria no sistema binário (linguagem computacional) com onze dígitos:

$$11101101100 = 1.2^{10} + 1.2^{9} + 1.2^{8} + 0.2^{7} + 1.2^{6} + 1.2^{5} + 0.2^{4} + 1.2^{3} + 1.2^{2} + 0.2^{1} + 0.2^{0}.$$

Pensando, ainda mais, qual base pode substituir a decimal? A base doze poderia substituir bem, levando em conta a limitação da memória humana, já que essa base ainda é usada em alguns momentos pontuais do nosso comércio (dúzia de ovos), essa base tem mais divisores: 2, 3, 4 e 6. Enquanto a decimal só tem dois divisores: 2 e 5. Seria muito mais vantajoso no uso de frações, tendo facilidade de se usar como consequência a metade, o terço, o quarto ou o sexto. Tais frações já são usadas, o que nem nos provoca estranheza. As divisões de tempo seriam facilitadas, pois os anos tem doze meses, os dias vinte quatro horas, ou seja, o dobro de doze, as horas e os minutos sendo conjuntos de sessenta seriam múltiplos desta base e etc.

Outro número com características específicas para base seria um dos números primos, qualquer um deles, sua vantagem principal é que suas frações seriam irredutíveis, não existindo ambiguidade entre frações equivalentes, o que acontece muito no sistema decimal entre as frações pertencentes ao conjunto dos números racionais, sendo cada fração única nesse sistema com base de número primo.

Ifrah [6], na página 81, menciona que existiram partidários da ideia de trocar a base do sistema decimal pelo duodecimal. Um desses partidários foi J. Essig em 1955, um inspetor geral de finanças, que tentou impor uma reforma nesse sentido. Perda de tempo, pois o hábito de contar por dezenas já se tornara tradição, e o que realmente aconteceu foi a estruturação do sistema de pesos e medidas em um sistema mais homogêneo, perfeitamente mais adaptado ao decimal. Que aconteceu durante a Revolução Francesa.

É fato que a troca da base dez por outra não muito maior, não traria grandes dificuldades de memorização de seus símbolos, pois seriam aproveitados os dez símbolos já existentes, e forneceriam ordens de grandeza tão satisfatórias para a escrita quanto a atual. Em relação às operações aritméticas, seriam executadas usando os mesmos algoritmos que se usa atualmente.

A substituição da base decimal por outra não nos parece viável, pois há a tradição humana de contar usando os dez dedos, ou seja, a anatomia de nossas mãos definiu que a base dez fosse absorvida na sociedade durante séculos.

1.4 Base 12

Segundo Lintz [9], na cultura grega como tantas outras as civilizações nascem do caráter mitológico, manifesta-se os primeiros conceitos sobre a origem do Universo, a interpretação de fenômenos naturais e consequentemente, do número, que é um dos mais poderosos e primitivos símbolos de toda a humanidade. Também segundo Lintz [9], Homero descreve muitas passagens da Odisséia onde o número doze aparece. Assim, a base doze surgiu de um apanhado da mitologia e da realidade. Isso se deu motivado a relação de números pela influência nos feitos hericos e cerimônias religiosas: por exemplo, os doze trabalhos de Hércules, doze são os signos do Zodíaco, como também era o número de prisioneiros troianos sacrificados nos funerais Pátroclo, sendo doze o número de faces do dodecaedro regular, que desde muito tempo se relaciona com uma série de mitos e sempre teve importância nas considerações dos matemáticos gregos.

Mas o sistema duodecimal, hoje ainda usado na contagem de dúzias tem seu ponto fi-

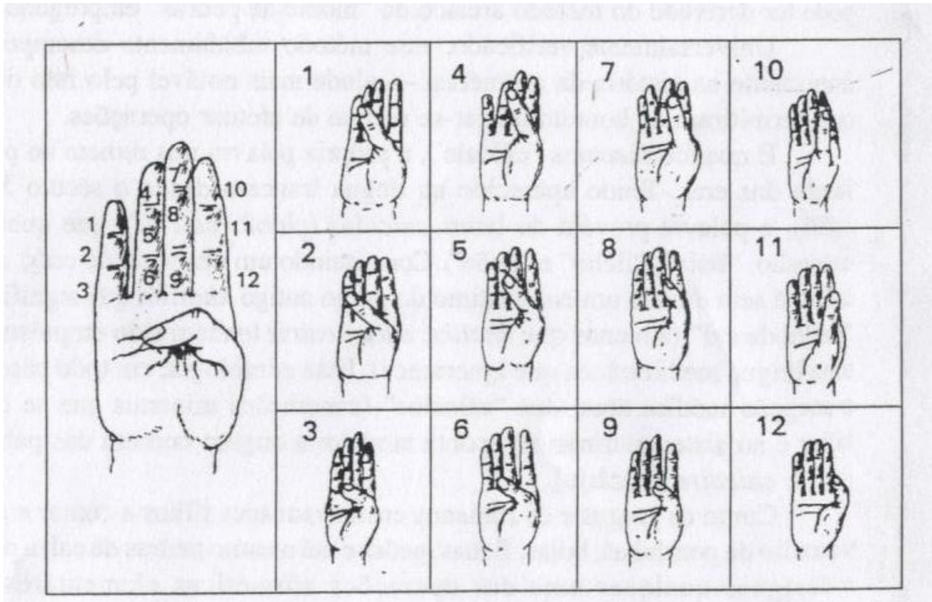


Figura 1.2: Técnica digital duodecimal. Fonte: pág.188 de [6].

losófico. De fato, o dodecaedro de doze faces pentagonais regulares sempre foi venerado pelos gregos como possuindo poderes mágicos. Isto se reflete no "Timeu"[3] onde ele é o símbolo do Cosmo, sendo um dos cinco sólidos de Platão e também pela consideração entre os pitagóricos cujo símbolo representativo era o pentágono regular, uma de suas faces.

Há também a hipótese da base duodecimal ser antropomórfica, como descrita por Ifrah [6], ou seja manual. Como cada dedo tem, três falanges (ou articulações) e como o polegar que marca as operações, então é excluído, podendo contar-se de 1 a 12 utilizando os dedos de uma única mão. Basta para tanto apoiar o polegar, sucessivamente, em cada uma das três falanges dos quatro dedos opostos da mesma mão. Seguindo os mesmos passos desde o início, em seguida contar 13 a 24, depois 25 a 36 e assim por diante. De acordo com a Figura 1.2. Observando que usando essa técnica a dezena impõe-se como a base auxiliar do sistema de numeração. Hoje ainda existe esse procedimento de contagem: e é usado no Egito, Síria, Iraque entre outros países. Dando força a essa conjectura sobre o sistema duodecimal.

[3]É um dos diálogos de Platão, principalmente na forma de um longo monólogo do personagem-título, escrito por volta de 360 a.C. O trabalho apresenta a especulação sobre a natureza do mundo físico e os seres humanos.

1.5 Base 20

Ifrah [6] sintetiza a origem da base vigesimal (20) na sua adoção pelos Astecas, fácil de entender observando a Figura 1.3, onde, nesse idioma:

- os cinco primeiros nomes de números podem ser associados aos cinco dedos de uma mão;
- os cinco seguintes, aos cinco dedos da outra mão;
- os cinco outros, ainda, aos cinco artelhos (dedos) de um pé;
- e os cinco últimos, aos cinco artelhos do outro pé.

1. polegar direito
2. indicador direito
3. médio direito
4. anular direito
5. mínimo direito
6. mínimo esquerdo
7. anular esquerdo
8. médio esquerdo
9. indicador esquerdo
10. polegar esquerdo
11. pequeno artelho direito
12. artelho seguinte
13. artelho seguinte
14. artelho seguinte
15. grande artelho direito
16. grande artelho esquerdo
17. artelho seguinte
18. artelho seguinte
19. artelho seguinte
20. pequeno artelho esquerdo

Esse método de contagem com base vinte fica evidente também em outros povos quando observamos suas expressões para o 20 e seus múltiplos, Ifrah [6] cita que segundo C. Zaslavsky, o povo "banda"da África central, diz o número 20 como "dobrar um homem", entendendo-se

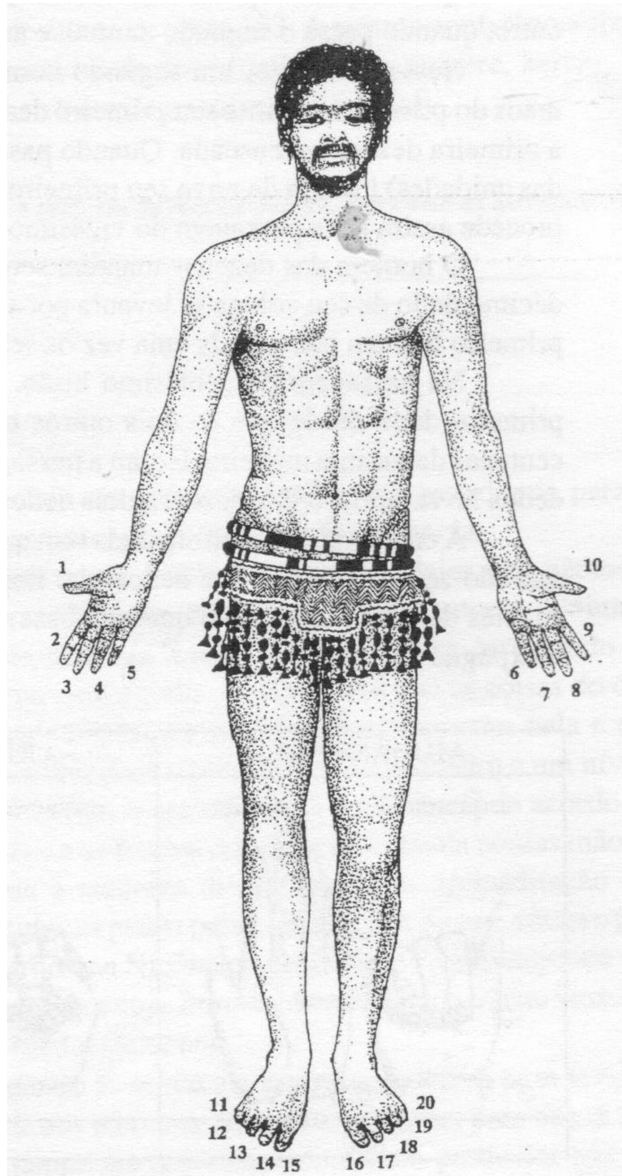


Figura 1.3: Técnica de contagem vigesimal (base 20). Fonte: pág. 86 [6].

por isso que quando um indivíduo flexiona as pernas, e fica fácil contar os dedos da mão e dos pés juntos . Traços desse sistema vigesimal também são encontrados nos povos de origem indo-europeu[4].

[4]Povos originários da Ásia central ou dos planaltos iranianos que, a partir do final do período Neolítico, se expandiram para a Europa.

1.6 Base 60

O sistema de base sexagesimal usado na Grécia, segundo Lintz [9], foi certamente importado do Oriente, em seu período de empirismo, para medir ângulos e usado na astronomia.

Sabemos que a base sessenta, não chegou a ser usada na Grécia como sistema numérico corriqueiro, tendo seu uso estritamente geométrico e astronômico, devido a afirmação de Ifrah [6] que "Os sumérios são os únicos da história a terem inventado e usado um sistema sexagesimal". Essa exclusividade técnica provocou uma grande curiosidade, e muitos autores pesquisaram e inventaram várias hipóteses sobre esse acontecimento histórico. Porém, aqui vamos relatar a hipótese descrita e aceita por Ifrah [6], que nos parece estruturada e determinante nos dias de hoje.

Do fato que os sumérios tem origem em dois povos estrangeiros, provavelmente no século IV a.C., se supõe que essas duas culturas, antes de se encontrar, tinham sistemas de contagem diferentes, ambas diferentes do sistema sexagesimal, um usando a base cinco e o outo usando a base doze. Noutras palavras, a numeração suméria de base sessenta tinha sido o resultado da combinação da base 12 e da base 5.

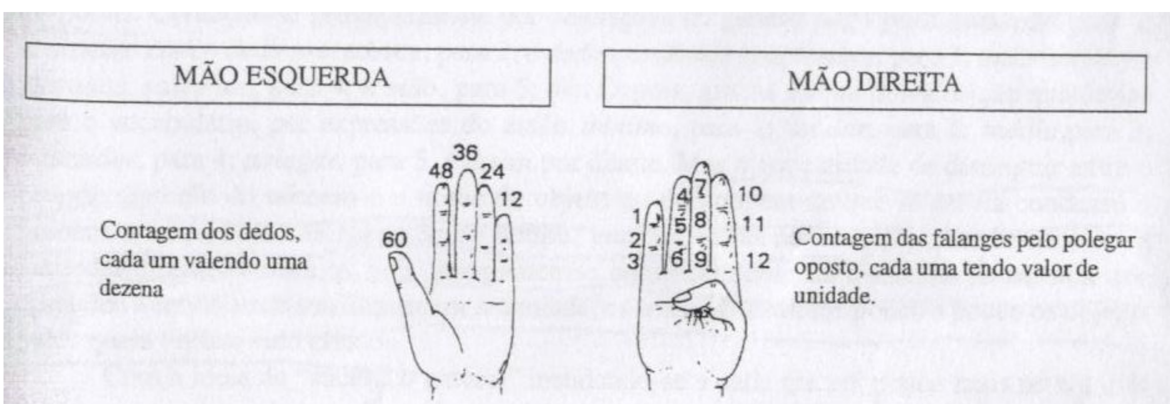


Figura 1.4: Sistema de contagem manual da Península Indochina. Fonte: 189 [6].

Como já descrito a origem das bases 5 e 12 devem ser antropomórficas, o que fortifica a hipótese, pois a vantagem de contar com os dedos, facilita a difícil obrigação de memorizar os sessenta símbolos, dai em diante se torna natural, uma vez adquirido o princípio da base

60. Ifrah [6] fala do sistema de contagem manual, ainda utilizada na península indochinesa para fortalecer sua hipótese, onde a base 60 aparece sendo a base principal, e os números 12 e 5 como bases auxiliares.

Segundo Ifrah [6], página 189, a contagem é feita da seguinte maneira. Conforme Figura 1.4: Na mão direita, conta-se de 1 a 12 apoiando o polegar sucessivamente em cada uma das três falanges dos quatro dedos opostos. Surge a dúzia com essa mão, dobra-se então o mínimo esquerdo. Volta-se em seguida à primeira mão e prossegue-se a contagem de 13 a 24 repetindo a técnica. Depois, uma vez atingindo o número 24, dobra-se o anular esquerdo e continua-se a contar da mesma maneira de 25 a 36 com a mão direita. Abaixa-se em seguida o médio esquerdo e procede-se igualmente até 48, em que se dobra o indicador esquerdo. Repete-se a operação, completando sessenta dobrando o último dedo da mão esquerda.

Os vestígios dessa aritmética são evidentes e estão incorporados a cultura contemporânea, por exemplo, no hábito de exprimir o tempo em horas, minutos e segundos e na medida de ângulos em graus, minutos e segundos.

Capítulo 2

O Princípio da Base e o Nascimento dos Sistemas de Numeração

Depois da abstração dos números e de diferenciar sutilmente a cardinalidade e a ordinalidade dos números, surgiu a necessidade de ampliar as suas concepções em relação aos seus antigos métodos de agrupamentos em conjuntos (pedras, conchas, colares de conchas, etc). Devido a essa nova necessidade é que esses instrumentos numéricos tornaram-se símbolos numéricos, bem mais simples para lembrar, reter, diferenciar e combinar.

Em seguida, os números se estruturaram um pouco com as técnicas corporais, por exemplo, o uso dos dedos da mão. A necessidade que persistia de distinguir o próprio símbolo do número e o nome do objeto de que se servia, até que a ligação entre o nome do objeto e do número desaparecesse completamente da memória. A medida que a humanidade foi se apropriando da linguagem articulada os sons substituíram pouco a pouco os objetos pelos quais tinham sido criados.

2.1 A Descoberta do Princípio da Base

Ifrah [6] define dois princípios úteis para que a humanidade simbolize os números:

- o primeiro, qualificou de cardinal, que consiste em adotar desde o início um símbolo padrão como representando a unidade e em repetir este tantas vezes quantas o número considerado contém unidades;
- o segundo, qualificou de ordinal, que consiste em atribuir a cada número um símbolo

original e, portanto, em considerar uma sucessão de símbolos que não têm nenhuma relação uns com os outros.

Princípio cardinal: são representados por uma simples repetição tantas vezes quanto o nome do número 1, ou ainda por alinhamento, justaposição ou superposição de tantas pedras, dedos, entalhes, traços ou seja qualquer símbolo que represente a unidade. Conforme Figura 2.1.

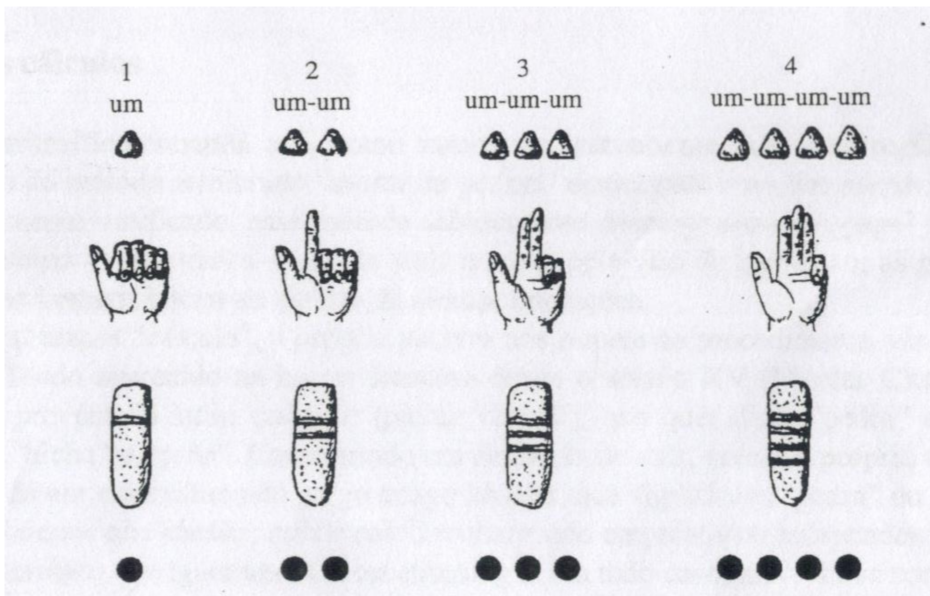


Figura 2.1: Representações cardinais dos quatro primeiros números. Fonte: pág. 47 [6].

Princípio ordinal: os mesmos números são representados por palavras, objetos, gestos ou sinais, todos diferentes uns dos outros. Conforme Figura 2.2.

O próximo passo para a humanidade foi aprender a conceber conjuntos cada vez mais extensos. Para representar números cada vez maiores, não se podia multiplicar indefinidamente os objetos, nem contar as partes do corpo infinitamente, muito menos repetir a mesma palavra de maneira ilimitada, ou sempre criar palavras novas quando necessário. Seria inaceitável nos dias de hoje repetir o mesmo símbolo para simbolizar os centavos de um real.

Conforme Ifrah [6], página 48, a solução encontrada foram os "agrupamentos"(como a dezena, a dúzia, a vintena ou a sessentena, por exemplo) e organizar a sequência dos números segundo uma classificação hierarquizada fundada nessa base (no sistema decimal: ordens e

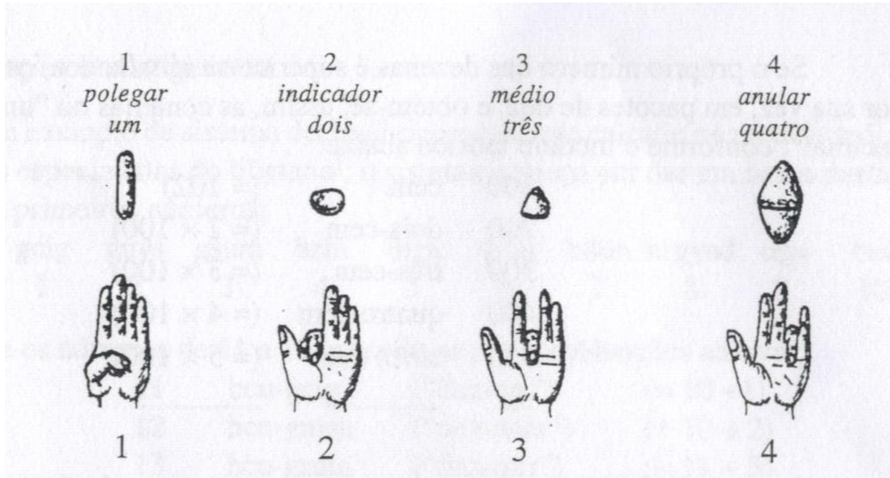


Figura 2.2: Representações ordinais dos quatro primeiros números. Fonte: pág. 48 [6].

classes). E é dessa maneira que se chegou a uma simbolização estruturada dos números evitando-se esforços de memória ou de representação considerável. É o princípio da base. Sua descoberta marcou o nascimento dos sistemas de numeração, onde se tem uma base que é o número de unidades que deve ser agrupada para que se possa formar uma unidade de ordem superior.

Capítulo 3

Sistema de Numeração

Para o desenvolvimento deste capítulo foi utilizada, principalmente, a referência [5], livro "Aritmética"de Abramo Hefez.

Temos no sistema decimal, que todo número inteiro é identificado por uma sequência dos algarismos;

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

acrescidos do símbolo zero (0), que representa a ausência de algarismo nas unidades, dezenas, centenas e etc. Por serem dez os algarismos, o sistema é chamado decimal.

Como cada algarismo, além do seu valor substantivo, possui um peso que lhe é atribuído devido a posição que ele ocupa, a ideia do sistema de numeração posicional é a variação do valor numérico dos dígitos do algarismo de acordo com a sua posição. Esse sistema é denominado posicional. A base numérica usada atualmente é a base de numeração decimal, ou seja, a base 10. Esse peso varia seguindo sempre uma base numérica, no caso potência de dez.

Os algarismos dependendo da sua posição no número tem pesos diferentes, seguindo da direita para a esquerda. O primeiro algarismo da direita tem peso um; o seguinte tem peso dez; o seguinte tem peso cem; o seguinte tem peso mil. Sempre seguindo essa ordem. Portanto, os números de um a nove são representados pelos algarismos de 1 a 9, correspondentes. O número dez é representado por 10, o número cem por 100, o número mil por 1000.

Por exemplo, o número 11001, na base 10, é a representação de

$$1.10^4 + 1.10^3 + 0.10^2 + 0.10^1 + 1.10^0 = 1.10^4 + 1.10^3 + 1.10^0.$$

Cada algarismo de um número possui uma ordem contada da direita para a esquerda. Portanto no número 11001; da direita para a esquerda o primeiro 1 que aparece é de primeira ordem, o segundo é de quarta ordem e o terceiro 1 é de quinta ordem. De três em três algarismos, também contados da direita para a esquerda, forma-se uma classe, ou seja, são separados os algarismos da direita para a esquerda em grupos de três ordens e cada grupo desses forma uma classe. Desse modo, temos:

$$\text{Classe das Unidades} \left[\begin{array}{lcl} \text{unidades} & - & 1^{\text{a}}\,\text{ordem} \\ \text{dezenas} & - & 2^{\text{a}}\,\text{ordem} \\ \text{centenas} & - & 3^{\text{a}}\,\text{ordem;} \end{array} \right.$$

$$\text{Classe do milhar} \left[\begin{array}{lcl} \text{unidades de milhar} & - & 4^{\text{a}}\,\text{ordem} \\ \text{dezenas de milhar} & - & 5^{\text{a}}\,\text{ordem} \\ \text{centenas de milhar} & - & 6^{\text{a}}\,\text{ordem;} \end{array} \right.$$

$$\text{Classe do milhão} \left[\begin{array}{lcl} \text{unidades de milhão} & - & 7^{\text{a}}\,\text{ordem} \\ \text{dezenas de milhão} & - & 8^{\text{a}}\,\text{ordem} \\ \text{centenas de milhão} & - & 9^{\text{a}}\,\text{ordem.} \end{array} \right.$$

Os sistemas de numeração posicional baseiam-se no teorema a seguir, que é uma aplicação da divisão euclidiana.

Teorema 3.1 (Aplicação do Teorema Euclidiano)**.** *(Hefez [5], página 68) Sejam dados os números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, ..., r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + ... + r_n b^n$.*

Essa representação apresentada no Teorema 3.1. é chamada de expansão relativa à base b. Note que, a base numérica não precisa necessariamente ser 10, qualquer número inteiro positivo pode ser escrito de modo único, numa base qualquer. Por exemplo, quando $b = 10$, essa expansão é chamada expansão decimal, e quando $b = 2$ é chamada expansão binária. A seguir o algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer relativamente à base

b. Ou seja, aplicar sucessivamente a divisão euclidiana:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0,\ r_0 < b,\\ q_0 &= bq_1 + r_1,\ r_1 < b,\\ q_1 &= bq_2 + r_2,\ r_2 < b,\\ &\vdots\\ q_{(n-2)} &= bq_{(n-1)} + r_{(n-1)},\ r_{(n-1)} < b,\\ q_{(n-1)} &= bq_n + r_n,\ r_n < b, \end{aligned}$$

e assim segue. Observa-se que se repetirmos esse processo indefinidamente, com $a > q_0 > q_1 \ldots$, quocientes cada vez menores, deveremos, em um certo ponto, ter $q_{n-1} < b$ e, como o quociente não pode ser negativo, chegará um momento em que ele será nulo e, portanto, de

$$q_{n-1} = bq_n + r_n,$$

teremos $q_n = 0$, e supondo que quando tivermos o quociente nulo, que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = ...$, e, portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \ldots$

Substituindo o valor de q_0 na primeira expressão e depois o valor q_1 na segunda e assim sucessivamente, encontraremos:

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + ... + r_n b^n.$$

Que é o algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer relativamente à base b. Essa expansão numa dada base b fornece-nos um algoritmo para representar os números naturais. Para tanto, escolha um conjunto S de b símbolos

$$S = \{s_0, s_1, ..., s_{b-1}\},$$

com $s_o = 0$, para representar os números de 0 a $b - 1$. Genericamente, um número natural a na base b escreve-se na forma

$$x_n x_{n-1} x_{n-2} .... x_1 x_0,$$

com $x_0, ..., x_n \in S$, e n variando, dependendo de a, representando o número

$$x_0 + x_1 b + ... + x_n b^n.$$

No sistema decimal, isto é, de base $b = 10$, usa-se

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Se $b \leq 10$, utilizam-se os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5,.., 9. Se $b > 10$, costuma-se usar símbolos de 0 a 9, acrescentando novos símbolos para 10,..., $b - 1$.

Há nesse momento a necessidade de provar a unicidade da forma de se expressar um número numa base b, pois do contrário, teríamos dois números diferentes para expressar uma mesma quantidade. Sem perda de generalidade vamos supor dois números diferentes escritos na mesma base. Para isso usaremos:

Teorema 3.2 (Proposição)**.** *(Hefez [5], página 69) Sejam dados os números inteiros* $b > 1$*,* $n, n' \geq 0$*,* $0 \leq r_0, ..., r_n < b$ *e* $0 \leq r'_0, ..., r'_{n'} < b$*, tem-se que;*

1. $r_0 + r_1 b + ... + r_n b^n < b^{n+1}$;

2. $n > n'$ *e* $r_n \neq 0 \Longrightarrow r_0 + r_1 b + ... + r_n b^n > r'_0 + r'_1 b + ... + r'_{n'} b^{n'}$;

3. $n = n'$ *e* $r_n > r'_n \Longrightarrow r_0 + r_1 b + ... + r_n b^n > r'_0 + r'_1 b + ... + r'_{n'} b^{n'}$.

Demonstração:

1. Temos, para todo $i = 0, 1, ..., n$, que

$$r_i b^i \leq (b - 1) b^i = b_{i+1} - b_i.$$

   Tomando o somatório de ambos os lados da igualdade acima, para $i = 0, 1, 2, ..., n$, obtemos

$$\begin{aligned} r_0 + r_1 b + ... + r_n b^n &\leq (b^1 - b^0) + (b^2 - b^1) + ... + (b^{n+1} - b^n) \\ &\leq b^0(b - 1) + b(b - 1) + ... + b^n(b - 1) \\ &\leq bn + 1 - 1 < bn + 1. \end{aligned}$$

2. Pelo item anterior, temos que se $n > n'$ e $r_n \neq 0$, então

$$r'_0 + r'_1 b + ... + r'_{n'} b^{n'} < bn' + 1 \leq b_n \leq r_0 + r_1 b + ... + r_n b^n.$$

3. Nessa situação, temos pelo item (2) que

$$r_0 + r_1 b + ... + (r_n - r'_n) b^n > r'_0 + r'_1 b + ... + r'_{n-1} b^{n-1}.$$

O que prova a unicidade da forma de expressar um número, já que $(r_n - r'_n) > 0$, ou seja, se os números na mesma base tem restos diferentes, são diferentes.

□

Essa unicidade só é aceita devido a unicidade do resto e do quociente no teorema da "Divisão Euclidiana".

Teorema 3.3 (Divisão Euclidiana)**.** *(Hefez [5], pág. 53) Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, \ com \ \ 0 \leq r < |b|.$$

Demonstração: Demonstração da unicidade: Suponha que $a = bq + r = bq' + r'$, onde $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. Assim, temos que $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$. Logo, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado , $b(q - q') = r' - r$, o que implica que

$$|b||q - q'| = |r' - r| < |b|,$$

o que só é possível se

$$q - q' = 0 \Longrightarrow q = q',$$

e consequentemente,

$$r' - r = 0 \Longrightarrow r = r'.$$

□

Segundo Hefez (Hefez, pág. 62) [5], Euclides desenvolveu a teoria dos números naturais, mas no teorema de divisão euclidiana 3.3 e na sua aplicação 3.1 usa-se o conjunto dos números inteiros. Portanto, precisamos aqui, deixar claro que o Teorema de Euclides também é usado para divisões com números inteiros negativos, e para isso usaremos como ferramenta o Teorema de Eudoxo, que nos dá a regra:

- O resto nunca pode ser negativo.

Teorema 3.4 (Teorema de Eudoxo). *(Fonseca [4], pág. 54)Seja a e $b \neq 0$ números inteiros , então:*

1. *a é um múltiplo de b e, portanto $a = bq$, com $q \in \mathbb{Z}$;*

2. *a está situado entre dois múltiplos consecutivos de b, isto é, existe um inteiro q tal que, para $b > 0$, $bq \leq a < b(q+1)$ e, para $b < 0$, $bq \leq a < b(q-1)$.*

Demonstração: Com efeito, se $b > 0$, nada há que demonstrar, e se $b < 0$, então $|b| > 0$, e por conseguinte existem e são únicos os inteiros q_1 e r tais que

$$a = |b|q_1 + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < |b|$$

ou seja, por ser $|b| = -b$:

$$a = b(-q_1) + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < |b|$$

Portanto, existem e são únicos os inteiros $q = -q_1$ e r tais que

$$a = bq + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < |b|$$

□

Exemplo 3.5. Divisão de $a = 45$ por $b = -7$: Efetuamos a divisão usual dos valores absolutos de a e de b, obtemos:

$$45 = 7.6 + 3$$

o que implica:

$$45 = (-7).(-6) + 3 \quad e \quad 0 \leq 3 < |-7|$$

Logo, o quociente $q = -6$ e o resto $r = 3$.

Capítulo 4

Sistema de Numeração em Diferentes Bases

Neste momento, estudaremos a representação numérica de sistemas posicionais utilizando-se de bases diferentes de 10. Utilizaremos, os mesmos símbolos da base decimal, acrescentando outros quando a base usada for maior que 10. O valor posicional nos é remetido quando temos que representar qualquer quantidade sem criar um novo símbolo. Na construção algébrica dos numerais observamos a repetição combinada e ordenada dos dígitos ou símbolos, sem criar nenhum outro símbolo, que permite representar qualquer quantidade em um sistema de numeração posicional.

Mas antes de estudarmos essas representações numéricas, faremos como Hefez [5], vamos definir uma notação, utilizaremos $[x_n...x_1x_0]_b$ para significar que o número é representado por $x_n...x_1x_0$ na base b. Assim,

$$[x_n...x_1x_0]_b = x_0 + x_1b + ... + x_nb^n.$$

Como a base dez é mais usada, vamos denotar $[x_n...x_1x_0]_{10}$ apenas por $x_n...x_1x_0$.

4.1 Operações Matemáticas em Algumas Bases Diferentes da Base 10

Os algarismos das operações aritméticas em todas as bases é genericamente igual por serem sistemas de numeração posicional.

Já falamos sobre as entradas nas tabelas de adição e multiplicação. Vamos fazer alguns exemplos de tabelas com algumas bases que já estudamos. Não faremos tabelas de subtração e divisão, pois são operações inversas da adição e da multiplicação, assim, pode-se usar as mesmas tabelas para os cálculos.

4.1.1 Operações no Sistema Binário

É uma operação, como comentado, semelhante à soma decimal. Com a diferença favorável de utilizar apenas os dígitos zero (0) e um (1). As regras para operações de adição são simples, ou seja, além das representações dos algarismos no sistema de numeração binária ser simplificada, também suas operações nesse sistema são simplificadas:

- $0 + 0 = 0$;
- $0 + 1 = 1$;
- $1 + 0 = 1$;
- $1 + 1 = 0$ e "vai um";
- $1 + 1 + 1 = 1$ e "vai um".

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabela 4.1: Tabela de adição binária.

Exemplo 4.1.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

A multiplicação binária tem o mesmo modelo da multiplicação decimal. A regra para a operação também é simples:

- $0 \times 0 = 0$;
- $0 \times 1 = 0$;
- $1 \times 0 = 0$;
- $1 \times 1 = 1$.

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 4.2: Tabela de multiplicação binária.

Exemplo 4.2.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & \text{x} & 1 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & + \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

4.1.2 Operações no Sistema Quinário

Como visto, tem 5 algarismos: 0, 1, 2, 3 e 4.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Tabela 4.3: Tabela de adição quinária.

Exemplo 4.3.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
+ & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & 3 & 0 & 2 & 3
\end{array}$$

+	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Tabela 4.4: Tabela de multiplicação quinária.

Exemplo 4.4.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2 & 3 & 3 & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & & \text{x} & 4 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & + \\
\hline
1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4
\end{array}$$

4.1.3 Operações no Sistema Duodecimal

É o sistema de base numérica com doze algarismos, os dez da base decimal mais dois, um para substituir o $10 = a$ e outro para substituir o $11 = b$, ou seja: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a e b.

Exemplo 4.5.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 8 & 7 & \text{a} \\
+ & 9 & 8 & 7 & \text{a} \\
\hline
 & \text{b} & 5 & 3 & 8
\end{array}$$

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	a	b	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	a	b	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	a	b	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	a	b	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	a	b	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	a	b	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	a	b	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	a	b	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
b	b	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a

Tabela 4.5: Tabela de adição duodecimal.

Exemplo 4.6.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & \\
 & & \mathrm{a} & 2 & 1 & \mathrm{b} \\
 & & & \mathrm{x} & 2 & 1 \\
\hline
 & & \mathrm{a} & 2 & 1 & \mathrm{b} \\
1 & 8 & 4 & 3 & \mathrm{a} & + \\
\hline
1 & 9 & 2 & 5 & \mathrm{b} & \mathrm{b}
\end{array}$$

Para fazer a Tabela 4.6 de multiplicação já foi muito trabalhoso. Para trabalhar com a base doze e não se atrapalhar é necessário uma outra aritmética: congruência módulo m, que esse trabalho não abrange. Por esse motivo não apresentaremos mais tabelas de adição ou multiplicação com a base 60. Observamos que esse deve ser um dos motivos da base sexagesimal ter sido usado somente pelo povo sumério e não ser usado nos dias de hoje, ou seja, a necessidade de aprender grande quantidade de números na tabela de adição e multiplicação.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b
2	0	2	4	6	8	a	10	12	14	16	18	1a
3	0	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	0	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	0	5	a	13	18	21	26	2b	34	39	42	47
6	0	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	0	7	12	19	24	2b	36	41	48	53	5a	65
8	0	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	0	9	16	23	30	34	46	53	60	69	76	83
a	0	a	18	26	34	42	50	5a	68	76	84	92
b	0	b	1a	29	38	47	56	65	74	83	92	a1

Tabela 4.6: Tabela de multiplicação duodecimal.

Capítulo 5

Conversão de Uma Base Numérica Para Outra

A conversão de uma base b qualquer para a base 10 é feita pela fatoração do número, como já foi mostrado na apresentação dos sistemas de numeração e demonstrado. Traremos exemplos dessas conversões da base 10 para as bases: binária, quinária, duodecimal e vigesimal. Essas bases que anteriormente foram relatadas em algum momento histórico em nosso trabalho, deixaremos sem exemplos a base sexagesimal por apresentar grande dificuldade de memorização de sessenta algarismos.

Como em qualquer base todos os sistemas de numeração são posicionais. Logo cada algarismo de um número possui uma ordem, assim vamos exemplificar com uma conversão na base três.

Exemplo 5.1.

$$\begin{array}{r|l} 43 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 13 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rl} 2 & \text{unidades} \\ 13 & \text{grupos de 3} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r|l|l} 43 & 3 & \\ \cline{2-2} 2 & 13 & 3 \\ \cline{3-3} & 1 & 4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rl} 2 & \text{unidades} \\ 1 & \text{grupo de 3} \\ 4 & \text{grupos de 9} \end{array} \right.$$

$$
\begin{array}{r|c|c|c}
43 & 3 & & \\ \cline{2-2}
2 & 13 & 3 & \\ \cline{3-3}
 & 1 & 4 & 3 \\ \cline{4-4}
 & & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\left[
\begin{array}{lcl}
2 \text{ unidades} & - & 1^{\text{a}} \text{ ordem} \\
1 \text{ grupo de } 3 & - & 2^{\text{a}} \text{ ordem} \\
1 \text{ grupo de } 9 & - & 3^{\text{a}} \text{ ordem} \\
1 \text{ grupo de } 27 & - & 4^{\text{a}} \text{ ordem}
\end{array}
\right.
$$

Portanto, os números na base 3 são formados pelos algarismos: 0, 1 e 2. E a expansão relativa à base 3 do número 43 na base 10 é:

$$27 + 9 + 3 + 2 = 1.3^3 + 1.3^2 + 1.3^1 + 2.3^0 = [1112]_3.$$

5.1 Conversão Decimal Para Binário

Exemplo 5.2. O número 30 na base 10 (decimal) representa qual número na base 2 (binária)?

Para resolver essa questão e as próximas de conversão, utilizaremos o processo de divisão sucessiva de Euclides, sendo necessário dividir o número 30 pela base 2 (para qual se quer converter) até chegar a um valor que não seja mais divisível por 2. O resultado será formado unindo o último quociente ao resto de cada uma das demais divisões, como pode-se ver na Figura 5.1.:

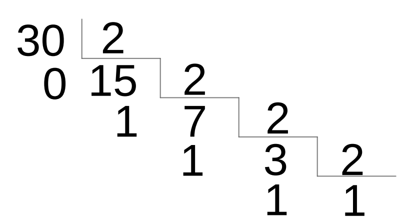


Figura 5.1: Transformação da base 10 para base 2. Fonte: autor.

Portanto, o sistema binário como os demais, também é posicional: o valor verdadeiro de um algarismo é proporcional à sua posição que é contada da direita para a esquerda, e começa com potencia de expoente zero. Aqui, representando um número na forma binária e sua expansão relativa para conversão para o sistema decimal.

$$[11110]_2 = 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = 30.$$

5.2 Conversão Decimal Para Quinária

Exemplo 5.3. O número 718 na base 10 (decimal) representa qual número na base 5 (quinária)?

Para fazer essa conversão, utilizaremos a mesma instrução do Exemplo 5.2. O resultado pode-se ver na Figura 5.2.:

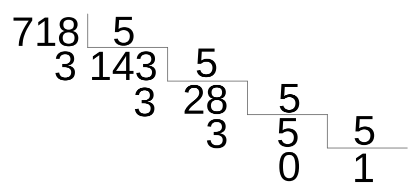


Figura 5.2: Transformação da base 10 para base 5. Fonte: autor.

Portanto, aqui, representando um número na forma quinária e sua expansão relativa para conversão para o sistema decimal.

$$[10333]_5 = 1.5^4 + 0.5^3 + 3.5^2 + 3.5^1 + 3.5^0 = 718.$$

5.3 Conversão Decimal Para Duodecimal

Como a base $b = 12$ é maior do que 10, devemos acrescentar novos símbolos para representar 10 e 11, que se tornam algarismos e que denotaremos por a e b, respectivamente.

Exemplo 5.4. O número 718 na base 10 (decimal) representa qual número na base 12 (duodecimal)?

Para fazer essa conversão, utilizaremos a mesma instrução do Exemplo 5.2. O resultado pode-se ver na Figura 5.3.:

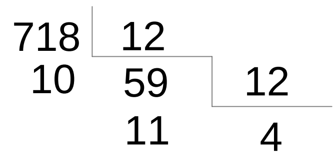


Figura 5.3: Transformação da base 10 para base 12. Fonte: autor.

Portanto, aqui, representando um número na forma duodecimal e sua expansão relativa para conversão para o sistema decimal:

$$[4ba]_{12} = a.12^0 + b.12^1 + 4.12^2 = 718,$$

$$[4ba]_{12} = 10.12^0 + 11.12^1 + 4.12^2 = 718.$$

5.4 Conversão Decimal Para Vigesimal

Como a base $b = 20$ é maior do que 10, devemos acrescentar novos símbolos para representar 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 e 19 que se tornam algarismos e que denotaremos respectivamente pelas primeiras letras do alfabeto: $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ e j, ou seja: $10 = a$, $11 = b$, $12 = c$, $13 = d$, $14 = e$, $15 = f$, $16 = g$, $17 = h$, $18 = i$ e $19 = j$.

Exemplo 5.5. O número 718 na base 10 (decimal) representa qual número na base 20 (vigesimal)?

Para fazer essa conversão, utilizaremos a mesma instrução do Exemplo 5.2. O resultado pode-se ver na Figura 5.4.:

Portanto, aqui, representando um número na forma vigesimal e sua expansão relativa para conversão para o sistema decimal.

$$[1fi]_{20} = 1.20^2 + f.20^1 + i.20^0 = 1.20^2 + 15.20^1 + 18.20^0 = 718.$$

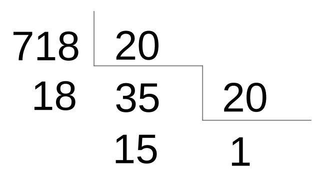


Figura 5.4: Transformação da base 10 para base 20. Fonte: autor.

Capítulo 6

Aplicações

6.1 Jogo do Nim

O Jogo do Nim nos interessou por abranger o conteúdo, tendo uma ligação interessante, com a aritmética dos números naturais no sistema binário de numeração, alem do seu enfoque educacional e histórico, segundo C.L.Bouton [1] que batizou esse jogo por Nim no seu artigo científico em 1901, esse jogo de palitos tem origem chinesa.

Há muitas versões do jogo do Nim, cada uma com uma estratégia. Descreveremos a seguir, uma das versões estudadas por Boutom, estas ideias estão presentes na formulação mais recente no livro Aritmética de A.Hefez [5].

O Jogo do Nim tem as seguintes características:

- Dispõe-se sobre a mesa um número N de palitos separados em três grupos de palitos, o grupo 1 com n_1 palitos, o grupo 2 com n_2 palitos, o grupo 3 com n_3 palitos, de modo que $n_1 + n_2 + n_3 = N$ e que $n_i \neq n_j$ se $i \neq j$;
- Dois participantes, A e B, onde se alternam efetuando movimentos;
- Na sua vez, cada jogador deve retirar um ou mais palitos de apenas um dos grupos;
- Ganha quem retirar o último palito.

Nosso objetivo neste trabalho metodológico é a percepção de regularidades no ato das jogadas e do uso da base binária. Além disso, mostrar a estratégia de encontrar uma situação favorável e se não cometer erros nas jogadas seguintes, ter a vitória no jogo.

[1]Matemático Charles Bouton, da Universidade de Harvard, que estudou as propriedades do jogo nim.

Analisando algumas situações do jogo do Nim, percebe-se que existindo apenas um grupo de palitos, então o jogador A ganha, desde que retire todas as peças do grupo. Outra possibilidade com dois grupos com o mesmo número de palitos, o jogador B ganha, fazendo a mesma jogada do primeiro. Quando existem dois grupos com números diferentes de palitos, o jogador A vence, desde que se retire palitos do grupo maior, deixando os dois grupos de palitos do mesmo tamanho. A analise fica mais difícil com mais de dois grupos. Para melhor conhecer a estratégia faremos um exemplo.

Exemplo 6.1. Colocar na situação real em que dois jogadores; André (A) e Beatriz (B) e que o jogo comece assim com três grupos (4,7,8).

!!!! !!!!!!! !!!!!!!!

Um exemplo de partida:

$$(4,7,8) \xrightarrow{A} (4,7,3) \xrightarrow{B} (4,7,0) \xrightarrow{A} (4,4,0) \xrightarrow{B} (0,4,0) \xrightarrow{A} (0,0,0).$$

O jogador André sempre teve uma estratégia que vamos revelar agora; como iniciou o jogo e seguindo os passos sem cometer erro, sempre vencerá.

Deves-se, antes de cada jogada, transformar a base decimal para binária. Veja o Exemplo 6.1: no início os grupos são;

Grupos	decimal	binário
Grupo 1	4	100
Grupo 2	7	111
Grupo 3	8	1000
		1211

.

Jogada de André:

Grupos	decimal	binário
Grupo 1	4	100
Grupo 2	7	111
Grupo 3	3	11
		222

.

Jogada de Beatriz:

Grupos	decimal	binário
Grupo 1	4	100
Grupo 2	7	111
Grupo 3	0	00
		211

.

Jogada de André:

Grupos	decimal	binário
Grupo 1	4	100
Grupo 2	4	100
Grupo 3	0	00
		200

.

Jogada de Beatriz:

Grupos	decimal	binário
Grupo 1	0	00
Grupo 2	4	100
Grupo 3	0	00
		100

.

Jogada de André:

Grupos	decimal	binário
Grupo 1	0	00
Grupo 2	0	00
Grupo 3	0	00
		00

.

Somando os números binários como se fosse na base decimal, a cada etapa, chamaremos essa soma de chave do jogo, como A. Hefez [5] chamou. Pode-se verificar que André sempre tornava os algarismos da chave pares, obrigando Beatriz na sua jogada de transformar a chave, pelo menos, um algarismo ímpar.

Uma posição em que todos os algarismos da chave são pares foi chamada de posição segura, enquanto que, quando pelo menos um dos algarismos da chave é impar, foi chamada de posição insegura, conforme Hefez [5], página 78.

Hefez [5] também cita Bouton, quando lembra, que mesmo "se um jogador encontrar na sua vez uma posição segura, qualquer que seja a jogada que faça, só poderá chegar a uma posição insegura”, e “de uma posição insegura, pode-se, com uma jogada conveniente, sempre retornar a uma posição segura”.

6.2 Código de Barras

O código de barras é uma revolução no comércio, se pararmos para pensar que a algum tempo era necessário muitos funcionários em um comércio só para remarcar os preços dos produtos, o que hoje, por causa desses códigos necessita-se apenas trocar o preço do produto em um software, em um terminal de computador.

Objetivo do código de barras, conforme Takahashi [17], página 281: identificar, com segurança, um objeto ou um artigo, de acordo com o país de origem, a empresa que o produz e o tipo de produto. Esses códigos facilitam os registros, como por exemplo, o controle de estoques e do movimento do caixa do estabelecimento comercial. A utilização dos códigos de barras é muito vasta, sendo aplicada em muitas áreas: industria, comércio, boletos bancários, etc. Esse código proposto, formalmente aceito (patenteado) em maio de 1973, passou a ser conhecido como código UPC (Universal Product Code) e foi adotado nos Estados Unidos e Canadá.

Vamos ver como funciona o código de barras. Existem várias versões sucessivas do UPC, o tipo de código de barras que vamos interpretar no nosso exemplo é conhecido como EAN13, não é o único existente, mas está entre os mais utilizados:

- É composto de 13 algarismos;
- Os três primeiros algarismos indicam o país de origem do produto. Para identificar o Brasil usa-se os algarismos: 789;
- Os quatro algarismos seguintes identificam a empresa fabricante;
- Os próximos cinco dígitos identificam o código do produto dentro da classificação da própria empresa, especificando sabor, modelo, cor, etc;
- O último algarismo é chamado de digito verificador. Ele é determinado por uma série de

operações realizadas com os algarismos anteriores, utilizado dessa forma para confirmar se a leitura do código foi feita corretamente;

- Quando o código de barras de algum produto é passado pelo leitor óptico, ele, envia ao computador a sequência de barras brancas e pretas impressa na embalagem. Um software interpreta qual sequência de algarismos ela representa, identificando o produto e seu preço.

6.2.1 Digito Verificador

Quando por algum motivo, a leitura óptica falha, o caixa digita a sequência de algarismos que aparece abaixo das barras. Geralmente o dígito de verificação tem como finalidade evitar erros na digitação ou no preenchimento de documentos com números, como por exemplo o algarismo após o hífen, nos CPF's e contas bancárias.

Um dos métodos empregados para gerar o dígito verificador obedece aos seguintes passos:

- Da esquerda para a direita, escreva os algarismos 1 e 3, alternadamente, abaixo de cada um dos 12 primeiros dígitos;
- Multiplique cada dígito do código pelo dígito colocado imediatamente abaixo dele, ou seja o primeiro por 1 o segundo por 3, e assim sucessivamente;
- E some todos os produtos obtidos;
- Calcula-se o resto da divisão dessa soma por 10, obtendo-se assim o dígito verificador.

Exemplo 6.2. $7.1+8.3+9.1+6.3+5.1+1.3+2.1+9.3+0.1+5.3+4.1+2.3 = 120 = 10.12+0$

7	8	9	6	5	1	2	9	0	5	4	2	0
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	
7	24	9	18	5	3	2	27	0	15	4	6	120

Tabela 6.1: Algoritmo para encontrar o dígito verificador.

6.2.2 Construção do Código de Barras

Essa atividade teve inspiração no livro didático escrito por Andrini [1].

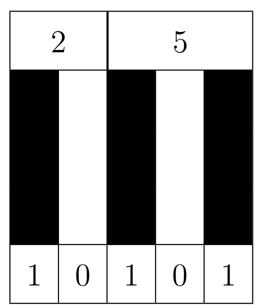
Primeiro vamos criar um código de barras simples usando a base binária, por exemplo, com dois algarismos, que identifique o produto e seu preço.

As barras pretas correspondem ao dígito 1 e as barras brancas ao dígito 0.

Exemplo 6.3. Os algarismos 2 e 5 que poderiam identificar respectivamente o produto e o preço do produto:

$$2 = 2 + 0 = 1.2^1 + 0.2^0 = 10;$$

$$5 = 4 + 0 + 1 = 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 101.$$



É preciso verificar quantos bits são necessários para representar cada número, para padronização das barras. Percebemos pelo resultado obtido no exemplo acima que é preciso utilizar 2 bits para representar o algarismo 2 e 3 bits para representar o algarismo 5, ou seja, 5 barras para a representação no código de barras.

Agora utilizaremos um exemplo de código de barras do tipo EAN13 segundo , Figura 6.1.

Segundo o padrão da estrutura do código em questão, é possível separar os dígitos na sua forma binária mais reduzida:

$0 = 00$, $1 = 01$, $2 = 10$, $3 = 11$, $4 = 100$, $5 = 101$, $6 = 110$, $7 = 111$, $8 = 1000$ e $9 = 1001$.

A representação é feita com barras “brancas” e “pretas” de diferentes larguras, as quais, através do leitor óptico e do computador, são decodificadas em sequências de “zeros” que correspondem as barras brancas ou “uns” que correspondem as barras pretas, usando o

Figura 6.1: Exemplo: código de barras do modelo EAN13.

<table>
<tr><td colspan="3">7</td><td colspan="4">8</td><td colspan="4">9</td><td colspan="3">6</td><td colspan="3">5</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="4">9</td><td colspan="2">0</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">4</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Tabela 6.2: Desenho do código de barras do tipo EAN13, escaneado do produto.

sistema binário para a escrita de qualquer número na base 10. Vamos desenhar o exemplo escaneado usando apenas 37 bits, Figura 6.1 na Tabela 6.2.:

6.3 Como os Computadores Armazenam Caracteres de Textos

A aplicação de bases proposta nesta seção tem como fonte o texto de Radamés [10], e a monografia de Miyaschita [11], e trata da linguagem de armazenamento de textos: “representação da escrita em computador”aceita pela computação.

Todas as letras do alfabeto podem ser processadas através do uso de impulsos elétricos em dois aparelhos: um transmissor capaz de converter letras em uma combinação de impulsos elétricos e um receptor capaz de realizar o inverso. Lógico, os dados passados para o computador estão na forma de sistema decimal de numeração e então a máquina precisa converter para o sistema de numeração binário.

Tomando conhecimento que a ausência de impulso corresponde ao número zero, e a existência de impulso ao número um. Hoje, esse processo é um pouco diferente, não são mais utilizados cabos para a passagem dos impulsos elétricos, e sim um material semicondutor, sólido capaz de mudar sua condição de isolante para condutor com grande facilidade. Porém, com o mesmo princípio de "sim"(condutor) e "não"(isolante) utilizado com os impulsos (Pode-se trabalhar essa atividade interdisciplinarmente com química: camada de valência).

A combinação de impulsos tratado aqui é na verdade números binários, que podem ser entendidos pelo aparelho eletrônico como letras do alfabeto, no local de recepção da mensagem.

O sistema operacional do PC (aparelho de computador) identifica as combinações de impulsos numéricos através do valor positivo ou negativo aplicado pelo programador aos zeros e uns do programa em execução. Assim, a leitura dos códigos binários funciona como um interruptor: quando o computador identifica o 1, a luz acende; ao se deparar com o 0, a luz apaga.

Para os computadores armazenarem textos na sua memória, é preciso converter as sílabas em números.

Exemplo 6.4. O computador armazena;

- O número 65 na forma binária: 01000001, que representa a letra "A";
- O número 97 na forma binária: 01100001, que representa a letra "a".

A primeira tabela ASCII (American standard code for information interchange) traduzindo: Código padrão americano para intercâmbio de informações, fazia uma correspondência entre números e sílabas básicas da ortografia inglesa. Dentre os quais a maioria é usada na redação e processamento de texto. Essa tabela alcançava até o número 127, o que corresponde a um código de 7 bits, pois computadores operam com o sistema binário de contagem, e convertido em notação binária, 127 equivale a um número de 7 dígitos.

Note que

$$127 = 1111111 = 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$$

é o ultimo código da tabela ASCII e é entendido pelo aparelho elétrico como o comando "apagar".

A primeira tabela ASCII funcionava bem, mas deixava a desejar na representação de textos em português, pois não considerava as letras com alteração fonética da nossa ortografia como as vogais acentuadas: á, é, í, ô, ü.

Essa tabela com 127 dígitos ficou obsoleta e a tabela foi expandida até o número 255. Em notação binária, isso corresponde a um número com 8 dígitos e, por isso, ela é considerada um código de 8 bits:

Exemplo 6.5.

$$255 = 11111111 = 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0.$$

Esse é um dos motivos da importância, na área computacional, de saber que um dígito binário (0 ou 1) é chamado de bit e o agrupamento de oito bits é denominado byte.

Mesmo assim, há falhas nessa tabela, por esse motivo há varias tabelas ASCII diferentes. Vamos usar uma parte da tabela ASCII, conhecida como ISO 8859-1. Essa parte só nos fornece o alfabeto no formato maiúsculo e minúsculo e também ponto, virgula e espaço. O suficiente para que os alunos escrevam algumas frases e interpretem outras, não tão bem escritas, pelo motivo já citado de problemas de fonética na língua portuguesa (ausência de símbolos) que esta na parte da Tabela 6.3.

Podemos usar essa atividade, primeiramente explanando sobre bases e depois ensinando os alunos como transformar: números do sistema numérico decimal para o sistema numérico binário e o inverso, usando os algoritmos que já foram detalhados. Após alguns cálculos de fixação.

Passar a tabela para os alunos e pedir para testarem alguns valores de números binários da tabela, observando que se relacionam univocamente com um número decimal, que significa um símbolo do alfabeto. Após os alunos se familiarizarem com o algoritmo e com a tabela, podemos pedir que escrevam frases curtas usando os códigos que fazem a correspondência entre números e sílabas básicas.

Exemplo 6.6. Escrever a frase: O estudo é a luz da vida.

01001111 00000000 01100101 01110010 01110011 01110100 01100100 01101110 00000000 01100101 00000000 01100001 00000000 01101011 01110100 01111001 00000000 01100100 01100001 00000000 01110101 01101001 01100100 01100001 00101110.

Aqui escrevemos a frase com números binários de oito dígitos (1 byte), o que atende a necessidade estipulada de usar letras maiúsculas e minúsculas.

Mas se quisermos simplesmente ler as frases sem se preocupar com letras maiúsculas ou pontuação, podemos escrever a frase com números binários de cinco dígitos; observe na Tabela 6.3 que as letras maiúsculas e minúsculas tem sempre os mesmos cinco últimos dígitos.

Exemplo 6.7.

Escrevendo a mesma frase: o estudo e a luz da vida

01111 00000 00101 10011 10100 10101 00100 01110 00000 00101 00000 00001 00000 01100 10101 11010 00000 00100 00001 00000 10110 01001 00100 00001 01110.

Facilitando o trabalho com os alunos, assim terão mais facilidade e agilidade de leitura destes códigos podendo decorar vinte e nove símbolos ou uma boa parte deles.

Notação binária	Notação decimal	caractere	Notação binária	Notação decimal	caractere
00000000	0	espaço	00101100	44	virgula
00101110	46	ponto			
01000001	65	A	01100001	97	a
01000010	66	B	01100010	98	b
01000011	67	C	01100011	99	c
01000100	68	D	01100100	100	d
01000101	69	E	01100101	101	e
01000110	70	F	01100110	102	f
01000111	71	G	01100111	103	g
01001000	72	H	01101000	104	h
01001001	73	I	01101001	105	i
01001010	74	J	01101010	106	j
01001011	75	K	01101011	107	k
01001100	76	L	01101100	108	l
01001101	77	M	01101101	109	m
01001110	78	N	01101110	110	n
01001111	79	O	01101111	111	o
01010000	80	P	01110000	112	p
01010001	81	Q	01110001	113	q
01010010	82	R	01110010	114	r
01010011	83	S	01110011	115	s
01010100	84	T	01110100	116	t
01010101	85	U	01110101	117	u
01010110	86	V	01110110	118	v
01010111	87	W	01110111	119	w
01011000	88	X	01111000	120	x
01011001	89	Y	01111001	121	y
01011010	90	Z	01111010	122	z

Tabela 6.3: Parte da tabela ASCII estendida, conhecida como ISO 8859-1.

6.3.1 Diferença de Caracteres e da Representação de Números no computador

Para que não fique duvidas, faremos uma breve diferenciação de como a máquina computacional entende os caracteres dos algarismos e como reconhece os números reais.

A maquina computacional do nosso exemplo representa os algarismos pelos caracteres na forma binária, representados na Tabela ASCII 6.5. Falaremo sobre o ponto flutuante que é uma forma de representar os números reais, seguindo as explicações sobre o assunto encontrado no trabalho de Ana Paula [12].

Funcionamento da representação em ponto flutuante:

- Usa-se a notação científica para sua representação

  $$x = \pm d \times \beta^e$$

  onde d é chamado de mantissa, β é chamado de base do sistema de numeração e e é o expoente;

- A forma numérica da mantissa

  $$(0, d_1 d_2 ... d_t)_\beta$$

  onde t é o número de dígitos e $d_t \in \{0, 1, ..., (\beta - 1)\}$, $i = 1, ..., t$;

- O expoente é definido no intervalo [L, U], onde L é limitante inferior do expoente e U é o limitante superior do expoente;

- Um sistema de ponto flutuante pode ser definido como

  $$F(\beta, t, L, U)$$

  onde:

  - β é a base do sistema;
  - t é o número de dígitos da mantissa;
  - L é o menor valor para o expoente;

- U é o maior valor para o expoente.

Transformação do número decimal para a representação em ponto flutuante com 16 bits:

- Transformar o número na base binária, e após, colocar-o na forma de notação científica;
- Construir uma tabela (16 bits) com 16 espaços;
- O primeiro espaço da esquerda para a direita identifica o sinal do número, onde:
  - O zero significa positivo;
  - O um significa negativo;
- O segundo espaço identifica o sinal do expoente, onde:
  - O zero significa positivo;
  - O um significa negativo;
- Os quatro espaços seguintes identifica o expoente, os espaços que ficarem vazios a esquerda serão preenchidos com zeros;
- Os espaços restantes identificam a mantissa e os espaço que ficarem vazios a direita serão preenchidos com zeros.

Exemplo 6.8. Modelo de representação em ponto flutuante do número 9 com 16 bits na base binária:

$$9 = [1001]_2 = 0,1001 \times 2^4 = 0,1001 \times 2^{100}$$

sinal		expoente				mantissa									
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Exemplo 6.9. Tabela com os números de 1 a 9 e suas representações ponto flutuante:

Notação decimal	Representação ponto flutuante
1	00 0001 1000000000
2	00 0010 1000000000
3	00 0010 1100000000
4	00 0011 1000000000
5	00 0011 1010000000
6	00 0011 1100000000
7	00 0011 1110000000
8	00 0100 1000000000
9	00 0100 1001000000

Tabela 6.4: Os números de 1 a 9 usando a representação de ponto flutuante com 16 bits, feita pelo autor.

Notação binária	Notação decimal	caractere
00110000	48	0
00110001	49	1
00110010	50	2
00110011	51	3
00110100	52	4
00110101	53	5
00110110	54	6
00110111	55	7
00111000	56	8
00111001	57	9

Tabela 6.5: Parte da tabela ASCII estendida com os algarismos, conhecida como ISO 8859-1.

6.4 Problema da Balança

Essa atividade tem como inspiração as aulas da apostila de aritmética do projeto PIC, Cadar [3], e suas vídeo aulas. Qual é o número mínimo de pesos inteiros (kg) que um comerciante deve comprar junto com uma balança de pratos para pesar qualquer quantidade inteira até 15 kg?

Na sala de aula, deve se propor que os alunos tentem descobrir essa solução empiricamente, aqui é importante para a resolução correta, que quanto menos pesos forem necessários, mais o comerciante economizará, por isso a necessidade do mínimo de pesos. Depois que os alunos responderem por tentativas e erros, devemos montar uma tabela com números de um até dez, e mais organizadamente, vamos combinando pesos para pesarmos de 1 kg a 15 kg: Como na Tabela 6.6.:

- Para pesar 1 kg, usaremos um peso de 1 kg;
- Para pesar 2 kg, usaremos um peso de 2 kg;
- Para pesar 3 kg, não se precisa comprar mais pesos, é só usar os pesos de 1 kg e de 2 kg;
- Para pesar 4 kg, será necessário comprar um peso de 4 kg;
- Para pesar 5 kg, não é necessário comprar outro peso, é só usar os pesos de 4 kg somado com o de 1 kg. E assim continuar a combinar pesos até completar a tabela.

Continuando nossa estratégia de resolução e observando a tabela pode-se observar que só foi necessário usar os pesos: 1, 2, 4 e 8 kg. Simplificando essa tabela e fazendo uma outra substituindo os quadradinhos vagos por 0 e os quadradinhos marcados por 1, vamos entender melhor o resultado na Tabela 6.7.

Assim, notamos que os valores dos pesos: 1, 2, 4 e 8 são potencias de dois. Daí podemos perguntar se isso foi coincidência, pois anteriormente já estudamos que todos os números podem ser escritos em qualquer base numérica, então deve-se propor outra pergunta:

Será que se pode pesar valores inteiros até 15 kg com uma quantidade de pesos menor do que 4?

Novamente devemos deixar os alunos debaterem, provavelmente eles vão perceber que não é possível, pois já fizeram tentativas anteriores. Novamente o professor deve organizar

kg	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1										x
2									x	
3									x	x
4							x			
5								x	x	
6							x		x	
7							x		x	x
8			x							
9			x							x
10			x						x	
11			x					x		
12			x				x			
13			x				x			x
14			x				x		x	
15			x				x		x	x

Tabela 6.6: Tabela para organizar as tentativas de pesagem.

as ideias e explicar. Se usarmos números da base dois, no máximos com três pesos podemos combinar oito soluções:

Exemplo 6.10. $P_1.P_2.P_3 = 2.2.2 = 8$.

Se usarmos pesos diferentes dos números da base binária será possível pesar os quinze valores mas com mais de quatro pesos.

Exemplo 6.11. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Observe que, a soma do 2 com o 3 repete o número 5, atrapalhando a pesagem de todos os valores.

Se quisermos generalizar mais um pouco para que os alunos percebam essa qualidade da base 2, podemos ir mais além e mostrar que com cinco pesos dessa base é possível pesar 31 valores, e com seis pesos é possível pesar 63 valores e assim:

Exemplo 6.12. $P_1.P._2.P_3.P_4.P_5 = 2.2.2.2.2 = 32$ e $P_1.P._2.P_3.P_4.P_5.P_6 = 2.2.2.2.2.2 = 64$.

Aqui descontando a possibilidade de pesar o zero. Isso mostra que para pesar a maior quantidade de valores com menos pesos, temos que usar pesos que tenham valores com base 2.

kg	8	4	2	1	números binários	expanção relativa à base 2
1				x	0 0 0 1	$= 0.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$
2			x		0 0 1 0	$= 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$
3			x	x	0 0 1 1	$= 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$
4		x			0 1 0 0	$= 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$
5		x		x	0 1 0 1	$= 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$
6		x	x		0 1 1 0	$= 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$
7		x	x	x	0 1 1 1	$= 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$
8	x				1 0 0 0	$= 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$
9	x			x	1 0 0 1	$= 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$
10	x		x		1 0 1 0	$= 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$
11	x		x	x	1 0 1 1	$= 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$
12	x	x			1 1 0 0	$= 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$
13	x	x		x	1 1 0 1	$= 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$
14	x	x	x		1 1 1 0	$= 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$
15	x	x	x	x	1 1 1 1	$= 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$

Tabela 6.7: Tabela de pesagem de pesos, comparada aos números binários.

6.5 Truques de Adivinhação

Essa atividade foi baseada nas explicações de Sampaio [14]. É uma atividade muito boa para iniciar o conteúdo: sistema de numeração posicional, principalmente de base 2.

6.5.1 Descobrir em que Mês o Aluno Nasceu

O jogo de adivinhação consiste em quatro cartões, que são entregues para um aluno, peça para ele escolher, sem contar aos outros, os cartões onde aparece o número do mês em que nasceu. Peça para ele mostrar os cartões escolhidos, e sensacional: "o professor acerta o mês de nascimento do aluno".

Vamos explicar o truque de adivinhação, que esta intimamente ligado ao sistema de numeração binário, as potências de base 2 devem ser separadas, digamos para melhor interpretação, repartidas em gavetas. Vamos tomar como exemplo o número 14:

$$14 = 8 + 4 + 2 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Montando a nossa gaveta, temos:

8	4	2	1
sim	sim	sim	não

.

Pode-se trabalhar nessas gavetas como interpreta o computador:

- O zero significa, não abrir a gaveta;
- O um significa, sim, abra a gaveta.

Assim podemos substituir a tabela anterior por outra:

8	4	2	1
1	1	1	0

.

Pra facilitar a interpretação vamos fazer uma tabela com os meses e seus respectivos valores binários e decimais Tabela 6.8:

Agora, sabendo da tabela com a representação binária, montaremos quatro cartões, Tabela 6.9.:

- O primeiro cartão tem que ter os números onde $2^0 = 1$ faz parte dos termos.

mês	Número decimal	Número binário			
Janeiro	1				1
Fevereiro	2			1	0
Março	3			1	1
Abril	4		1	0	0
Maio	5		1	0	1
Junho	6		1	1	0
Julho	7		1	1	1
Agosto	8	1	0	0	0
Setembro	9	1	0	0	1
Outubro	10	1	0	1	0
Novembro	11	1	0	1	1
Dezembro	12	1	1	0	0

Tabela 6.8: Meses e seus respectivos valores numéricos.

1			2			4			8		
1	3	5	2	3	6	4	5	6	8	9	10
7	9	11	7	10	11	7	12		11	12	

Tabela 6.9: Cartões para escolha do número do mês.

- O segundo cartão tem que ter os números onde $2^1 = 2$ faz parte dos termos.
- O terceiro cartão tem que ter os números onde $2^2 = 4$ faz parte dos termos.
- O quarto cartão tem que ter os números onde $2^3 = 8$ faz parte dos termos.

Observando os cartões sabemos que quem nasce em:

- Janeiro mostra o cartão 1;
- Fevereiro mostra o cartão 2;
- Março mostra os cartões 1 e 2;

- Abril mostra o cartão 4;
- Maio mostra os cartões 4 e 1;
- Junho mostra os cartões 4 e 2;
- Julho mostra os cartões 4, 2 e 1;
- Agosto mostra o cartão 8;
- Setembro mostra os cartões 8 e 1;
- Outubro mostra os cartões 8 e 2;
- Novembro mostra os cartões 8 e 3;
- Dezembro mostra os cartões 8 e 4.

Para surpresa da turma, é só somar mentalmente os números dos cartões e falar o mês de nascimento.

Isto acontece, por que cada número decimal tem uma única relação binária, isto é, não haverá outro número decimal com a mesma expressão relativa à base 2.

6.5.2 Qual o Dia do Mês Que o Aluno Nasceu?

Podemos fazer o mesmo truque da atividade anterior, com algumas adaptações. Precisamos de cinco calendários de 31 dias, que estão representados na Tabela 6.10.:

Como o número decimal 31 é representado, na forma binária, como a soma de $16 + 8 + 4 + 2 + 1$, isto é com cinco termos, devemos ter:

- O primeiro calendário tem que ter os números onde $2^0 = 1$ faz parte dos termos;
- O segundo calendário tem que ter os números onde $2^1 = 2$ faz parte dos termos;
- O terceiro calendário tem que ter os números onde $2^2 = 4$ faz parte dos termos;
- O quarto calendário tem que ter os números onde $2^3 = 8$ faz parte dos termos;

1						
1	2	**3**	4	**5**	6	**7**
8	**9**	10	**11**	12	**13**	14
15	16	**17**	18	**19**	20	**21**
22	**23**	24	**25**	26	**27**	28
29	30	**31**				

2						
1	**2**	**3**	4	5	**6**	**7**
8	9	**10**	**11**	12	13	**14**
15	16	17	**18**	**19**	20	21
22	**23**	24	25	**26**	**27**	28
29	**30**	**31**				

3						
1	2	3	**4**	**5**	**6**	**7**
8	9	10	11	**12**	**13**	**14**
15	16	17	18	19	**20**	**21**
22	**23**	24	25	26	27	**28**
29	**30**	**31**				

4						
1	2	3	4	5	6	7
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
15	16	17	18	19	20	21
22	23	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
29	**30**	**31**				

5						
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
22	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
29	**30**	**31**				

Tabela 6.10: Calendários para a escolha do dia.

- O quinto calendário tem que ter os números onde $2^4 = 16$ faz parte dos termos.

O aluno deve escolher os calendários onde a data do seu aniversário está colorido.

E é só somar mentalmente os valores binários referentes a cada número dos calendários, 1 para o calendário 1, 2 para o calendário 2, 4 para o calendário 3, 8 para o calendário 4 e 16 para o calendário 5, e falar o dia de nascimento do aluno. Por exemplo, se o aluno nasceu no dia 15, então ele mostrará os calendários 1, 2, 3 e 4, assim a soma será $1+2+4+8=15$.

6.6 Relato de Experiência das Aplicações

Aqui apresentamos um relato de experiência realizada com alunos do Colégio Estadual Carlos Gomes Ensino Fundamental e Médio, da cidade de Ubiratã - Paraná. Consiste principalmente da parte prática, onde há a participação dos alunos do oitavo ano dessa instituição pública durante a Semana Cultural nas apresentações da Feira de Ciências, na qual foi trabalhado o tema "Bases Numéricas": as aplicações do Capítulo 6, relacionados com os conteúdos curriculares presentes no projeto político pedagógico do colégio. Os dados para construção deste relato foram obtidos por meio de fotos e anotações em diário. Como resultados dessa experiência, apontamos a feira de ciências como um ambiente propício para instigar a curiosidade, o anseio de aprender novos conhecimentos e de prática durante a exposição dos trabalhos dos alunos além de mobilizar a comunidade escolar em seu entorno.

A realização da Feira de Ciências (Semana Cultural), gera um grande frisson na escola, pois tira os alunos e os professores da sua zona de conforto divulgando os trabalhos desenvolvidos pelos alunos e conteúdos trabalhados em sala. Para tanto, foi necessária uma boa preparação teórica e a participação verdadeira dos alunos nas atividades de estudos e práticas para chegarem na produção do trabalho e explicação dos conhecimentos produzidos na aula de matemática.

Portanto, a metodologia usada no desenvolvimento das aplicações na Feira de Ciências foi esquematizada em três partes:

- Expositiva, onde foi passado os nomes das atividades que seriam apresentadas na Feira de Ciências: jogo do nim, código de barras, editor de texto do computador e jogos de adivinhação de datas.
- Pesquisa, organização, elaboração de cartazes e montagem do ambiente da Feira de Ciências.
- Apresentação de forma expositiva das experiências e a explicação da aplicação do uso da matemática nas atividades.

É importante relatar que essa turma foi dividida ao meio, só metade dos alunos trabalharam nessa atividade e a outra metade da turma teve outras atividades culturais para realizar na Semana Cultural do colégio.

Agora faremos uma síntese do ocorrido durante as três partes. O professor iniciou com aulas expositivas de cada atividade, e como queria que fossem apresentadas as atividades pelos alunos na feira:

- Primeira aula (truques de adivinhação de datas,mês e dia do mês): onde os alunos participaram e o professor descobriu as datas corretas. Em seguida, foi revelado o segredo de como descobrir as datas, após foi explicado o conteúdo: bases numéricas, transformações da base decimal para base binária e a volta da base binária para base decimal, demonstrando assim a importância do sistema posicional em qualquer base.

- Segunda aula (Jogo do Nim): foram disputados alguns jogos com os alunos, em seguida foi explicada a estratégia vitoriosa que o professor utilizou para vencer os alunos. Retomou o conteúdo sobre as bases numéricas da aula anterior, para fixação do conteúdo que será necessário nas apresentações da Feira de Ciências.

- Terceira aula (código de barras): onde foram mostrados para os alunos vários códigos de barras, e em seguida, a explicação de como são desenhados esses códigos, ou seja, como os leitores de código de barras entendem o que estão lendo. Novamente para fixar o conteúdo, retomou-se os estudos de bases binárias, necessário para a explicação durante as apresentações na Feira de Ciências, Semana Cultural. Foi pedido, como tarefa para casa, que os alunos desenhassem um código de barras inventado por eles, usando as transformações de bases numéricas, já explicadas anteriormente.

- Quarta aula (como os computadores armazenam textos): Foi exposta a tabela: ASCII, e feitas algumas transformações de bases numéricas para mostrar que cada letra digitada corresponde a um número binário, depois de toda a explanação de como funciona o editor de texto do computador. Foi pedido para os alunos em pequenos grupos que escrevessem algumas palavras usando os números binários correspondentes.

Foi um desafio essa experiência, pois, ao mesmo tempo em que tinha a preocupação em preparar os trabalhos, ensinava o conteúdo. Após essas aulas expositivas, todos os alunos da sala já estavam familiarizados com o conteúdo. Como na Semana Cultural as turmas eram dividas em duas partes: metade dos alunos, apresentariam na Feira de Ciências e a outra metade fariam apresentações sobre outras matérias. Assim, essa parte dos alunos trabalharam em contraturno, para que outros conteúdos do currículo não atrasassem, pois só a metade dos alunos da sala precisavam se preparar para essa apresentação.

Os alunos que trabalharam as aplicações de bases numéricas, foram repartidos em quatro grupos: jogo do Nim, adivinhações de datas, código de barras e editor de texto. Assim cada grupo recebeu sua parte do conteúdo dessa dissertação para estudar, confeccionaram cartazes e prepararam sua abordagem aos visitantes da Feira de Ciências. Durante esse processo teve alunos que não trabalharam com enfoque investigativo, outros precisaram de apoio do professor para os planejamentos necessários para proporcionar resultados positivos, a exposição de trabalhos envolveu pesquisa escolar, o que ocasionou dificuldades por não ser rotina dos estudantes.

No dia marcado da Feira de Ciências (06/09/18), logo cedo foi feito um mutirão entre os alunos que organizaram a sala, notei o nervosismo entre eles pelo medo de não serem capazes de expor as atividades e explicar a matemática envolvida nessas apresentações, é claro também, como é uma atividade escolar eles também se preocupavam com as notas que esse trabalho iria proporcionar. Quando iniciou a feira as apresentações foram tímidas e até um pouco atrapalhadas, mas o tempo foi passando e as novas apresentações foram ficando mais firmes e organizadas, bem satisfatórias.

Considerando todo o processo, alguns alunos começaram a demonstrar interesse pelo conteúdo, outros demonstraram se preocupar com as notas, mas de maneira geral, o resultado obtido com essa experiência foi muito bom, os alunos em sua maioria entenderam e aprenderam o conteúdo para poder transmitir para os visitantes, criaram estratégias de abordagem aos visitantes e explanaram o conteúdo respondendo as perguntas e tirando dúvidas. Para nós o importante foi ver o trabalho dissertativo que preparamos sendo aplicado e contextualizado de forma satisfatória, deixando conhecimentos empíricos que acreditamos não ser mais esquecidos pelo grupo de alunos que participaram.

Segue algumas fotos:

Figura 6.2: Sala de Apresentação das Bases Numéricas.

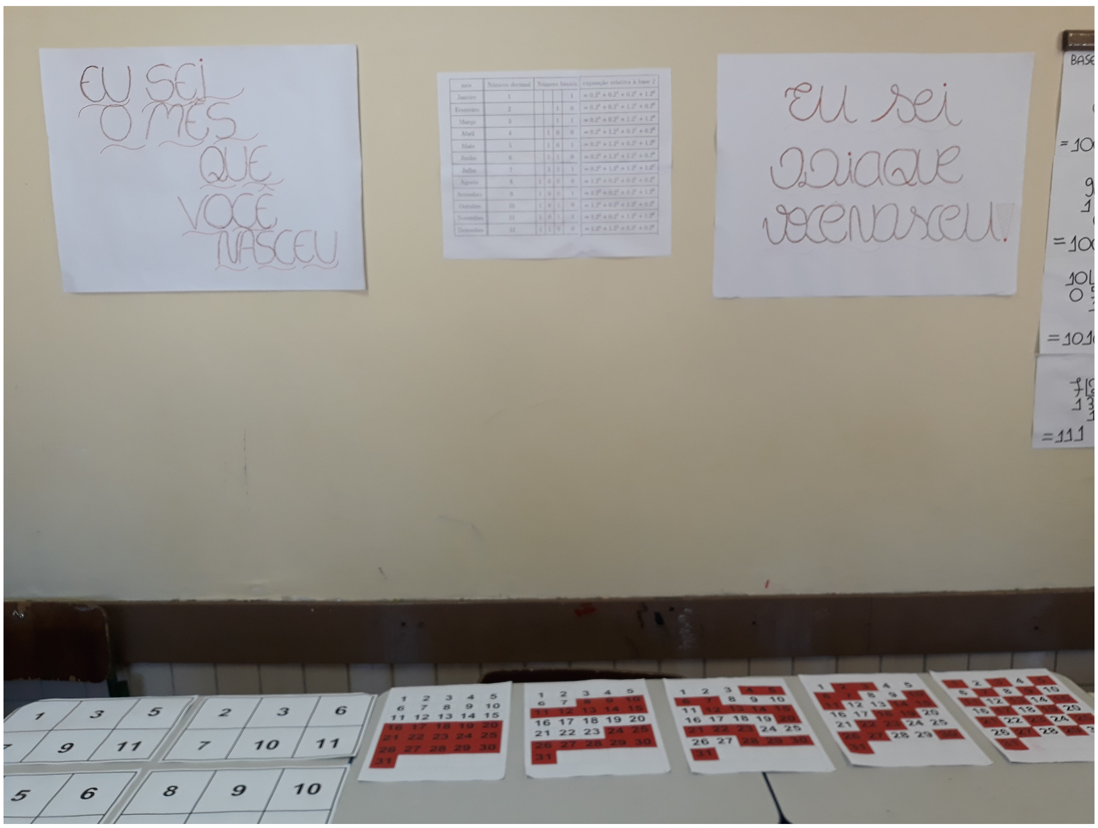


Figura 6.3: Truques de Adivinhação.

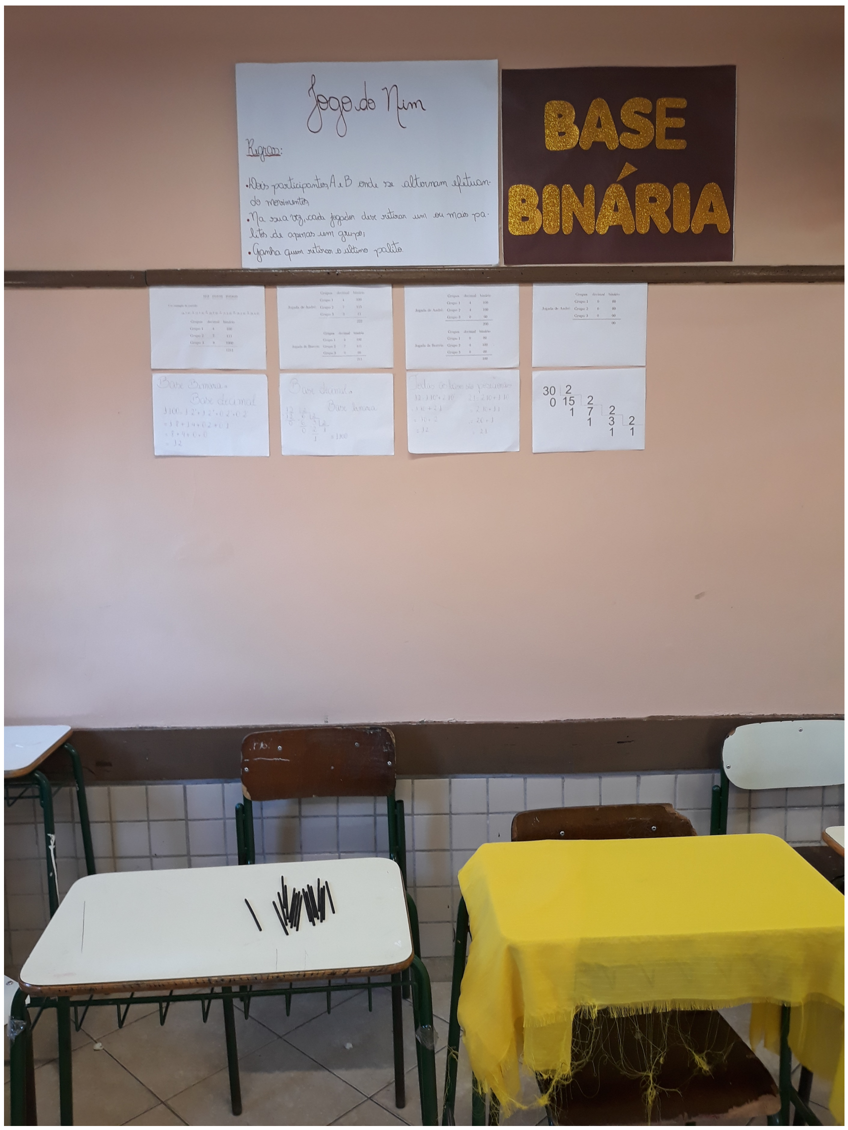


Figura 6.4: Jogo do Nim.

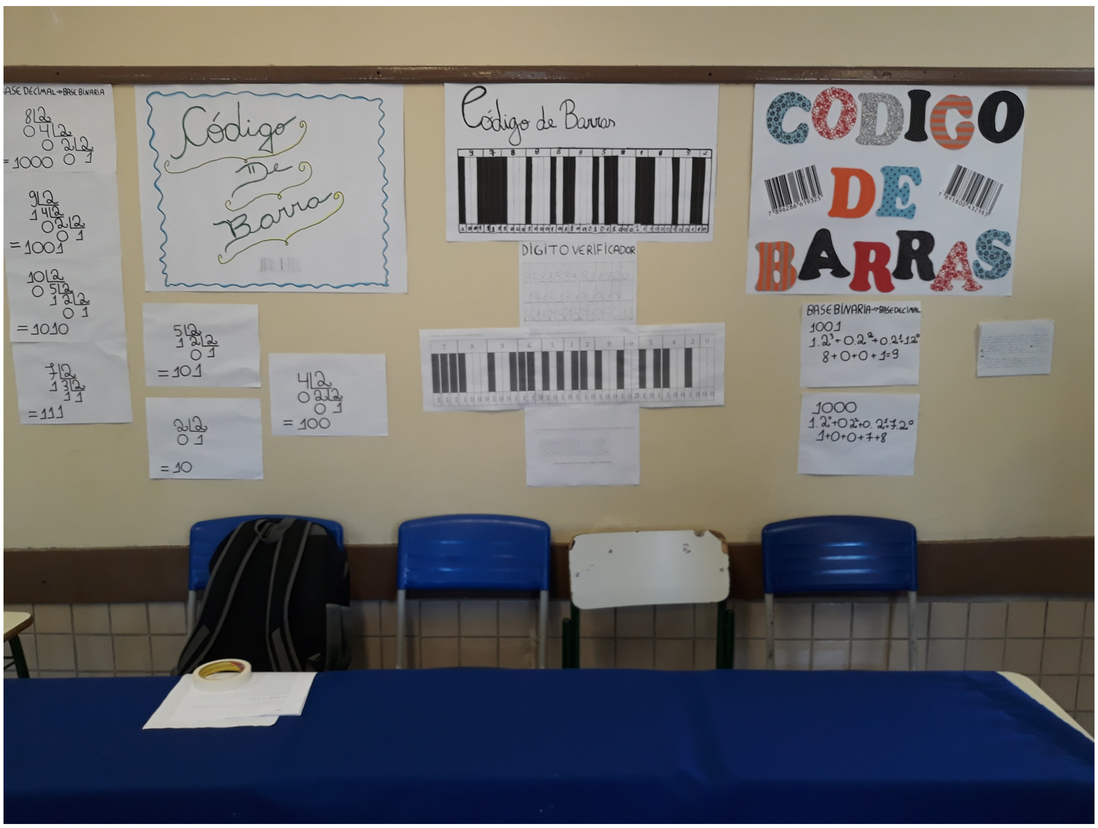


Figura 6.5: Código de Barras.

Figura 6.6: Como os Computadores Armazenam Textos.

Capítulo 7

Conclusão

A utilização de diferentes bases numéricas, num trabalho bem orientado e planejado, com a apresentação durante as aulas de matemática podem facilitar o entendimento de conceitos que permitem a aprendizagem do sistema posicional decimal. O uso de sistemas numéricos em outras bases (base binária), nos dá uma nova roupagem para as operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Proporcionando mais subsídios para a compreensão do sistema decimal.

As atividades apresentadas (propostas) tem como finalidade mostrar a importância do sistema posicional de numeração e dar ânimo ao aprendizado em sala de aula. Essas propostas são mais indicadas aos alunos do início do ensino fundamental dois. Pode-se observar que em todas as atividades de aplicação desse trabalho foi utilizado o sistema numérico binário, pois esse sistema nos parece o segundo mais usado nos dias de hoje, facilitando o encontro de exemplos em sala de aula.

O estudo histórico combinado com as propostas mencionadas permitem ao aluno vivenciar e entender as ideias matemáticas desse trabalho, relaciona conceitos matemáticos que promovem aprendizagem matemática com um conhecimento importante no mundo.

Apêndice: Divisibilidade

Aprendemos durante os estudos matemáticos que, quando divide-se um número inteiro por outro número inteiro diferente do zero, o quociente nem sempre é um número inteiro. Esta constatação nos leva à seguinte definição.

Definição 8.1. Um inteiro a divide um inteiro b, escrevendo $a \mid b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. Nesse caso, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a ou que b é divisível por a.

Quando escrevemos $a \mid b$, essa sentença diz ser verdade que existe um c inteiro tal que $b = ca$, enquanto que a negação desta sentença é representada por $a \nmid b$, ou seja, que não existe nenhum número inteiro c tal que $b = ca$.

Exemplo 8.2. Esses exemplos mostram que é fácil entender o conceito de divisibilidade da definição: $5 \mid 35$, pois $35 = 5 \cdot 7$; $-8 \mid 1456$, pois $1456 = -8 \cdot 182$.

Exemplo 8.3. É fácil mostrar pela definição que; $\pm 5 \nmid 8$ pois $8 \neq 5 \cdot c$, para todo $c \in \mathbb{Z}$.

O número inteiro c, da Definição 8.1, univocamente determinado, é chamado de quociente de b por a e usaremos a notação $c = \dfrac{b}{a}$.

Exemplo 8.4. É fácil mostrar que $\dfrac{0}{1} = 0$, $\dfrac{8}{1} = 8$, $\dfrac{8}{2} = 4$, $\dfrac{8}{4} = 2$, $\dfrac{8}{-8} = -1$.

Agora, estabelecemos algumas propriedades da divisibilidade.

Proposição 8.5. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tem-se que:*

1. $a \mid a$;

2. *se* $a \mid b$ *e* $b \mid c$*, então* $a \mid c$*;*

3. $a \mid b$ *e* $c \mid d$ *então* $ac \mid bd$*;*

4. $a \mid b$ *e* $a \mid c$*, então* $a \mid (b+c)$*;*

5. *se* $a \mid b$ *e* $a \mid c$*, então, para todos* $m, n \in \mathbb{Z}$*, temos que* $a \mid (mb+nc)$*.*

Demonstração:

(a) *decorre da definição,* $a = 1 \cdot a$*, onde* a *é múltiplo de* a*;*

(b) $a \mid b$ *e* $b \mid c$ *implica que existem* $f, g \in \mathbb{Z}$*, tais que* $b = fa$ *e* $c = gb$*. Substituindo o valor de* b *da primeira equação na outra, obtemos*

$$c = gb = g(fa) = (gf)a,$$

o que demonstra que $a \mid c$*;*

(c) *se* $a \mid b$ *e* $c \mid d$*, então existe* $f, g \in \mathbb{Z}$*,* $b = fa$ *e* $d = ac$*. Logo,* $bd = (fg)(ac)$*, ou seja* $ac \mid bd$*;*

(d) *agora se* $a \mid b$ *e* $a \mid c$*, temos que existe* $g, f \in \mathbb{Z}$ *tal que* $b = ga$ *e* $c = fa$*. Somando as duas igualdades acima, temos*

$$b + c = a(g+f),$$

donde segue que $a \mid (b+c)$*;*

(e) *como* $a \mid b$ *e* $a \mid c$ *temos que existe* $g, f, m, n \in \mathbb{Z}$*, tais que* $b = ga$ *e* $c = fa$*. Logo,*

$$mb + nc = m(ag) + n(af) = (mg+nf)a.$$

Portanto, $a \mid (mb+nc)$*.*

Exemplo 8.6. Alguns exemplos:

i. Temos $5 \mid 5$, $19 \mid 19$;

ii. Temos que $4 \mid 8$ e $8 \mid 64$, então $4 \mid 64$;

iii. Temos que $2 \mid 8$ e $3 \mid 9$, então $6 \mid 72$;

iv. Temos que $4 \mid 8$ e $4 \mid 20$, então $4 \mid (8+20)$;

v. Temos que $4 \mid 8$ e $4 \mid 20$, então $4 \mid (5 \cdot 8 + 2 \cdot 20)$.

□

Proposição 8.7. *Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que $a-b$ divide $a^n - b^n$.*

Demonstração: Por indução sobre n.

A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois a - b divide $a^1 - b^1 = a - b$.

Supondo, agora, que $a - b \mid a^n - b^n$. Escreve-se

$$a^{n+1} - b^{n+1} = aa^n - ba^n + ba^n - bb^n = (a-b)a^n + b(a^n - b^n).$$

Como $a-b \mid a-b$ e, por hipótese, $a-b \mid a^n - b^n$, decorre da igualdade acima e da Proposição 8.5(5) que $a - b \mid a^{n+1} - a^{n+1}$, concluindo, assim, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

8.0.1 Máximo Divisor Comum

Definição 8.8. Sejam dados $a, b \in \mathbb{Z}$, distintos ou não. Diremos que o número d é divisor comum de a e b se $d \mid a$ e $d \mid b$.

Exemplo 8.9. Os números $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ são os divisores comuns de 12 e 20.

Definição 8.10. Diremos que um número inteiro $d \geq 0$ é um máximo divisor comum (mdc) de a e b, se possuir as seguintes propriedades:

1. d é um divisor comum de a e b;

2. se c é um divisor comum de a e b, então $c \mid d$, para todo $c \in \mathbb{Z}$.

A condição 2, acima, implica que, se d e d' são dois mdc de um mesmo par de números, logo, $d \mid d'$ e $d' \mid d$, e isso implica que o mdc é único.

Denotaremos o mdc de a e b como (a, b). Sabendo que a ordem em que a e b são tomados não altera o mdc, temos que

$$(a, b) = (b, a).$$

Proposição 8.11. *Sejam a e b inteiros não simultâneamente nulos. Então:*

1. *se* $a \neq 0$*,* $mdc(a, 0) = |a|$ *(módulo de a);*

2. $mdc(1, a) = 1$*;*

3. $mdc(a, a) = |a|$*;*

4. *se* $a \mid b$ *então* $mdc(a, b) = |a|$.

Podemos verificar a existência do mdc nessas propriedades, faremos isso para o último item da Proposição.

$$a \mid b \Rightarrow mdc(a, b) = |a|.$$

Note, se $a \mid b$, temos que $|a|$ é um divisor comum de a e b, e se c é um divisor comum de a e b, então c divide $|a|$, o que mostra que $|a| = (a, b)$.

Usaremos o mesmo lema usado por Euclides para provar a existência do máximo divisor comum, conforme (Hefez, [5] pág. 88).

Lema 8.12. *Sejam* $a, b, n \in Z$*. se existe (a,b - na), então, (a,b) existe e*

$$(a, b) = (a, b - na).$$

Demonstração: Seja $d = (a, b - na)$. Segue da Proposição 8.5.(5), como $d \mid a$ e $d \mid (b - na)$, segue que d divide $b = b - na + na$. Portanto, d é um divisor comum de a e b. Supomos agora que c seja um divisor comum de a e b. Portanto, c é um divisor comum de a e $b - na$ e, portanto, $c \mid d$. Assim, prova que $d = (a, b)$. □

8.0.2 Mínimo Múltiplo Comum

Definição 8.13. Diremos que um número inteiro $m \geq 0$ é mínimo múltiplo comum (mmc) dos números inteiros a e b, se possuir as seguintes propriedades:

1. m é um múltiplo comum de a e b;

2. se c é múltiplo comum de a e b, então $m \mid c$.

Exemplo 8.14. 20 e 10 são múltiplos comum de 2 e 5, mas o mmc é o 10 que é divisor de 20.

O mínimo múltiplo comum, se existir, é único, observando o segundo item da Definição 8.13: se m e m' são dois mínimos múltiplos comum de a e b, temos que $m \mid m'$ e $m' \mid m$. Como m e m' pertencem ao conjunto dos inteiros não negativos, assim $m = m'$, provando a unicidade.

Também, se m é o mínimo múltiplo comum de a e b. E sendo c um múltiplo comum de a e b, então $m \mid c$. Logo, se c é positivo, temos que $m \leq c$, mostrando que m é o menor dos múltiplo comuns de a e b.

Denotaremos o mínimo múltiplo comum de a e b, se existir, por $[a, b]$.

8.1 Critérios de Divisibilidade

Nas subseções seguintes são apresentados critérios de divisibilidade.

8.1.1 Critério de Divisibilidade por 2

Proposição 8.15. *Seja $a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ a representação decimal do inteiro a. Uma condição necessária e suficiente para que o número a seja divisível por 2 é que o algarismo das unidades seja divisível por 2, ou seja $a_0 = 0$, 2, 4, 6 ou 8.*

Demonstração: Seja $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ a representação de $a \in \mathbb{Z}$ na base 10. Assim,

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Colocando o número 10 em evidência, a partir da segunda parcela, temos:

$$a = 10(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0.$$

Pela Proposição 8.5.(4), como $2 \mid 10$, temos que a é divisível por 2 se, e somente se ,$2 \mid a_0$. $\square$

8.1.2 Critério de Divisibilidade por 3 e 9

Proposição 8.16. *Seja* $a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ *a representação decimal do inteiro a. Uma condição necessária e suficiente para que o número a seja divisível por 3 (respectivamente por 9) é que a soma de seus algarismos seja divisível por 3 (respectivamente por 9), ou seja,* $3 \mid (a_n + \cdots + a_1 + a_0)$.

Demonstração: Seja $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ a representação de $a \in \mathbb{Z}$ na base 10. Assim,

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Temos que

$$a - (a_n + \cdots + a_1 + a_0) = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0 - (a_n + \cdots + a_1 + a_0)$$

$$= a_n(10^n - 1) + \cdots + a_1(10 - 1).$$

Como $9 \mid (10^n - 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$(pela Proposição 8.7.), temos para algum numero q, que

$$a = (a_n + \cdots + a_1 + a_0) + 9q.$$

Pela Proposição 8.5.(4), como $9 \mid q$, temos que a é divisível por 3 e 9 se, e somente se 3 e $9 \mid (a_n + \cdots + a_1 + a_0)$. □

8.1.3 Critério de Divisibilidade por 4

Proposição 8.17. *Seja* $a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ *a representação decimal do inteiro a. Uma condição necessária e suficiente para que o número a seja divisível por 4 é que o número formado pelos dois últimos dígitos seja divisível por 4, ou seja* $4 \mid a_1 \cdot 10 + a_0$.

Demonstração: Seja $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ a representação de $a \in \mathbb{Z}$ na base 10. Assim,

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Colocando o número 10^2 em evidência a partir da segunda parcela, temos:

$$a = 10^2(a_n \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_3 \cdot 10 + a_2) + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Pela Proposição 8.5.(4), como $4 \mid 10^2$, temos que a é divisível por 4 se, e somente se, $4 \mid (a_1 \cdot 10 + a_0)$.

$\square$

8.1.4 Critério de Divisibilidade por 5 e 10

Proposição 8.18. *Seja $a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ a representação decimal do inteiro a. Uma condição necessária e suficiente para que o número a seja divisível por 5 (respectivamente por 10) é que a_0 seja 0 ou 5 (respectivamente $a_0 = 0$).*

Demonstração: Seja $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ a representação de $a \in \mathbb{Z}$ na base 10. Assim,

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Colocando o número 10 em evidência a partir da segunda parcela, temos:

$$a = 10(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0.$$

Pela Proposição 8.5.(4), como $5 \mid 10$ (respectivamente $10 \mid 10$), temos que a é divisível por 5 se, e somente se $5 \mid a_0$ (respectivamente $10 \mid a_0$). $\square$

8.1.5 Outros Critérios de Divisibilidade

Critério de divisibilidade por um número $a = bc$, tais que b e c são números primos entre si, ou seja, o $(b, c) = 1$ e o $[b, c] = a$. Um número será divisível por a se for divisível, simultâneamente, por b e por c.

Critério de Divisibilidade por 12

Proposição 8.19. *Seja* $a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ *a representação decimal do inteiro a. Uma condição necessária e suficiente para que o número a seja divisível por 12, é que* $3 \mid a$ *e* $4 \mid a$.

Demonstração: Note que $3 \mid 12$ e $4 \mid 12$. Assim, se $12 \mid a$, então, pela Proposição 8.5.(3), $3 \mid a$ e $4 \mid a$. Pelos Critérios de Divisibilidade por 3 e 4, segue que a $3 \mid (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$ e $4 \mid a_1 \cdot 10 + a_0$.

Reciprocamente, se a é múltiplo de 4 e $3 \mid (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$, então $a = 4 \cdot b$, para algum $b \in \mathbb{Z}$ e $3 \mid a$. Portanto, $3 \mid (4 \cdot b)$ e $mdc(4, 3) = 1$, implicam que $3 \mid b$, ou seja, $b = 3 \cdot c$, para algum $c \in \mathbb{Z}$. Logo, $a = 4 \cdot b = 4 \cdot 3 \cdot c = 12 \cdot c$, e consequentemente $12 \mid a$.

□

Critério de Divisibilidade por 20

Proposição 8.20. *Seja* $a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ *a representação decimal do inteiro a. Uma condição necessária e suficiente para que o número a seja divisível por 20, é que* $5 \mid a$ *e* $4 \mid a$.

Demonstração: Note que $5 \mid 20$ e $4 \mid 20$. Assim, se $20 \mid a$, então, pela Proposição 8.5.(3), $5 \mid a$ e $4 \mid a$. Pelos Critérios de Divisibilidade por 5 e 4, segue que a_0 é 0 ou 5 e $4 \mid a_1 \cdot 10 + a_0$.

Reciprocamente, se a é múltiplo de 4 e a_0 seja 0 ou 5, então $a = 4 \cdot b$, para algum $b \in \mathbb{Z}$ e $5 \mid a$. Portanto, $5 \mid (4 \cdot b)$ e $mdc(4, 5) = 1$, implicam que $5 \mid b$, ou seja, $b = 5 \cdot c$, para algum $c \in \mathbb{Z}$. Logo, $a = 4 \cdot b = 4 \cdot 5 \cdot c = 20 \cdot c$, e consequentemente $20 \mid a$. □

Critério de Divisibilidade por 60

Proposição 8.21. *Seja* $a = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ *a representação decimal do inteiro a. Uma condição necessária e suficiente para que o número a seja divisível por 60, é que* $5 \mid a$ *e* $12 \mid a$.

Demonstração: Note que $5 \mid 60$ e $12 \mid 60$. Assim, se $60 \mid a$, então, pela Proposição 8.5.(3), $5 \mid a$ e $12 \mid a$. Pelos Critérios de Divisibilidade por 5 e 12, segue que a_0 é 0 ou 5 e $3 \mid a$ e $4 \mid a$.

Reciprocamente, se a é múltiplo de 12 e a_0 seja 0 ou 5, então $a = 12 \cdot b$, para algum $b \in \mathbb{Z}$ e $5 \mid a$. Portanto, $5 \mid (12 \cdot b)$ e $mdc(12, 5) = 1$, implicam que $5 \mid b$, ou seja, $b = 5 \cdot c$, para algum $c \in \mathbb{Z}$. Logo, $a = 12 \cdot b = 12 \cdot 5 \cdot c = 60 \cdot c$, e consequentemente $60 \mid a$. $\square$

8.1.6 Critérios de Divisibilidade em Qualquer Base

Sabemos que todo número N divisível por "d"em uma base "n", será divisível por "d" qualquer que seja sua representação numérica em outra base. Também os critérios de divisibilidade na base dez continuam valendo em outras bases.

Podemos estipular outros critérios para todas as bases. E as ideias e provas das demonstrações que iremos trabalhar estão no trabalho de dissertação de Luís Junqueira [8] e alguns vídeos de estudo do projeto PIC - OBMP [16]. Este critério nos dá imediatamente os coeficientes de divisibilidade em toda e qualquer base e o número $N = n - d$ (onde n é a base e d o número pelo qual estamos dividindo) é chamado coeficiente fundamental.

Vamos analisar alguns produtos notáveis:

Sejam a e $b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a(a+2b) + b^2, \tag{8.1}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a(a^2 + 3ab + 3b^2) + b^3, \tag{8.2}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = a(a^3 + 4a^2b + 6ab^2 + 4b^3) + b^4, \tag{8.3}$$

$$\vdots$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + nab^{n-1} + b^n = a(a^{n-1} + na^{n-2}b + \cdots + nb^{n-1}) + b^n. \tag{8.4}$$

Esses resultados nos mostram um polinômio múltiplo de a somado à uma potência de base b. Isto será muito útil nas demonstrações dos próximos critérios.

Vamos começar os estudos desses critérios desenvolvendo um exemplo:

Exemplo 8.22. Qual é o critério para que o número $[abc]_6$ seja divisível por 5?

$$\begin{aligned} [abc]_6 &= a.6^2 + b.6 + c \\ &= a(5+1)^2 + b(5+1) + c \\ &= a.5q_1 + a + b.5q_2 + b + c, \end{aligned}$$

com q_1, $q_2 \in \mathbb{Z}$, assim temos,

$$[abc]_6 = 5.k + a + b + c,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

O critério de divisibilidade por 5 na base 6 nos parece ser a soma de todos algarismos que o formam.

Generalizando esse resultado para uma base $n \in N$, qualquer, e um divisor $n - 1$.

$$[a_r.a_{r-1}.a_{r-2}......a_3.a_2.a_1.a_0]_n$$

$$= a_r.n^r + a_{r-1}.n^{r-1} + a_{r-2}.n^{n-2} + ... + a_3.n^3 + a_2.n^2 + a_1.n^1 + a_0$$

$$= a_r.((n-1)+1)^r + a_{r-1}.((n-1)+1)^{r-1} + ... + a_2.((n-1)+1)^2 + a_1.((n-1)+1)^1 + a_0.$$

Utilizando as analises dos produtos notáveis: 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4, temos

$$a_r.(q_1(n-1)+1) + a_{r-1}.(q_2(n-1)+1) + ... + a_2.(q_{r-1}(n-1)+1) + a_1.(q_r(n-1)+1) + a_0,$$

sendo $q_i \in \mathbb{Z}$ com i variando de 1 a r.

Colocando $(n - 1)$ em evidência, assim temos,

$$(n-1).k + a_r + a_{r-1} + a_{r-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1 + a_0.$$

O que nos fornece o critério de divisibilidade:

Um número na base n é divisível por $(n - 1)$ quando, a soma de seus algarismos resulta num múltiplo de n.

Exemplo 8.23. Qual é o critério para que o número $[abc]_5$ seja divisível por 3?

$$\begin{aligned} [abc]_5 &= a.5^2 + b.5 + c \\ &= a(3+2)^2 + b(3+2) + c \\ &= a.3q_1 + 4a + b.3q_2 + 2b + c, \end{aligned}$$

com q_1, $q_2 \in \mathbb{Z}$, assim temos,

$$[abc]_5 = 3.k + 4a + 2b + c,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

O critério de divisibilidade por 3 na base 5 nos parece ser a soma dos algarismos c, com o dobro de b e com o quádruplo do algarismo a.

Generalizando esse resultado para uma base $n \in N$, qualquer, e um divisor $n-2$.

$[a_r.a_{r-1}.a_{r-2}......a_3.a_2.a_1.a_0]_n = a_r.n^r + a_{r-1}.n^{r-1} + a_{r-2}.n^{n-2} + ... + a_3.n^3 + a_2.n^2 + a_1.n^1 + a_0$

$= a_r.((n-2)+2)^r + a_{r-1}.((n-2)+2)^{r-1} + ... + a_2.((n-2)+2)^2 + a_1.((n-2)+2)^1 + a_0.$

Utilizando as analises dos produtos notáveis: 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4, temos

$a_r.(q_1(n-2)+2^r) + a_{r-1}.(q_2(n-2)+2^{r-1}) + ... + a_2.(q_{r-1}(n-2)+2^2) + a_1.(q_r(n-2)+2) + a_0,$

sendo $q_i \in \mathbb{Z}$ com i variando de 1 a r.

Colocando $(n-2)$ em evidência, assim temos,

$$(n-2).k + 2^r a_r + 2^{r-1} a_{r-1} + 2^{r-2} a_{r-2} + ... + 2^3 a_3 + 2^2 a_2 + 2^1 a_1 + a_0.$$

O que nos fornece o critério de divisibilidade:

Um número na base n é divisível por $(n-2)$ quando o primeiro algarismo da direita vezes 2^0 mais os segundo algarismo vezes a potência 2^1 mais o terceiro algarismo vezes a potência 2^2, e assim, sucessivamente até somar todos os algarismo e essa soma resulta em um múltiplo de n.

Exemplo 8.24. Qual é o critério para que o número $[abc]_5$ seja divisível por 2?

$$\begin{aligned} [abc]_5 &= a.5^2 + b.5 + c \\ &= a(2+3)^2 + b(2+3) + c \\ &= a.2q_1 + 9a + b.2q_2 + 3b + c, \end{aligned}$$

com q_1, $q_2 \in \mathbb{Z}$, assim temos,

$$[abc]_5 = 2.k + 9a + 3b + c,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

O critério de divisibilidade por 2 na base 5 nos parece ser a soma dos algarismos c, com o triplo de b e com nove vezes o algarismo a.

Generalizando esse resultado para uma base $n \in N$, qualquer, e um divisor $n-3$.

$$[a_r.a_{r-1}.a_{r-2}......a_3.a_2.a_1.a_0]_n$$

$$= a_r.n^r + a_{r-1}.n^{r-1} + a_{r-2}.n^{n-2} + ... + a_3.n^3 + a_2.n^2 + a_1.n^1 + a_0$$

$$= a_r.((n-3)+3)^r + a_{r-1}.((n-3)+3)^{r-1} + ... + a_2.((n-3)+3)^2 + a_1.((n-3)+3)^1 + a_0.$$

Utilizando as analises dos produtos notáveis: 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4, temos

$$a_r.(q_1(n-3)+3^r)+a_{r-1}.(q_2(n-3)+3^{r-1})+......+a_2.(q_{r-1}(n-3)+3^2)+a_1.(q_r(n-3)+3)+a_0,$$

sendo $q_i \in \mathbb{Z}$ com i variando de 1 a r.

Colocando $(n-3)$ em evidência, temos,

$$(n-3).k + 3^r a_r + 3^{r-1}a_{r-1} + 3^{r-2}a_{r-2} + ... + 3^3 a_3 + 3^2 a_2 + 3^1 a_1 + a_0.$$

O que nos fornece o critério de divisibilidade:

Um número na base n é divisível por $(n-3)$ quando o primeiro algarismo da direita vezes 3^0 mais o segundo algarismo vezes a potência 3^1 mais o terceiro algarismo vezes a potência 3^2, e assim, sucessivamente até somar todos os algarismos e essa soma resulta em um múltiplo de n.

Se continuarmos a desenvolver genericamente, formamos a Tabela 8.1, de coeficientes de divisibilidade base n que atenderão a todas as possíveis bases.

Esses coeficientes de divisibilidades podem ser substituídos pelos seus restos da divisão deles pelo divisor d.

Assim, em base dez, na Tabela 8.3, chegamos aos mesmos critérios que já foram enunciados.

Base n:

Algarismo	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	$\cdots$	$n-(n-2)=2$
a_0	1^0	2^0	3^0	4^0	$\cdots$	$(n-2)^0$
a_1	1^1	2^1	3^1	4^1	$\cdots$	$(n-2)^1$
a_2	1^2	2^2	3^2	4^2	$\cdots$	$(n-2)^2$
a_3	1^3	2^3	3^3	4^3	$\cdots$	$(n-2)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$

Tabela 8.1: Coeficiente de divisibilidade base n.

Exemplo 8.25. Base 10

Algarismo	$10-1=9$	$10-2=8$	$10-3=7$	$10-4=6$	$10-5=5$	$10-6=4$	$10-7=3$	$10-8=2$
a_0	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0	7^0	8^0
a_1	1^1	2^1	3^1	4^1	5^1	6^1	7^1	8^1
a_2	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2
a_3	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 8.2: Coeficiente de divisibilidade base 10.

Algarismo	9	8	7	6	5	4	3	2
a_0	1	1	1	1	1	1	1	1
a_1	1	2	3	4	0	2	1	0
a_2	1	4	2	4	0	0	1	0
a_3	1	0	6	4	0	0	1	0
a_4	1	0	4	4	0	0	1	0
a_5	1	0	5	4	0	0	1	0
a_6	1	0	1	4	0	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 8.3: Coeficiente de divisibilidade resto base 10.

Referências

[1] Andrini, Á., *Coleção praticando matemática: vol. 6, 7 e 8*. São Paulo: Editora do Brasil, (2015).

[2] Boyer, C. B., *História da Matemática; prefácio de Isaac Asinov*. 3ªed. São Paulo: Blucher, (2010).

[3] Cadar, L., Dutenhefner, F., *Apostila: Encontros de Aritmética*. Disponível em: < *http : //www.obmep.org.br/apostilas.htm* >. Acesso em 1 de maio de 2018.

[4] Fonseca, R. V., Teoria dos Números Algébricos. UEPA . Belem, (2011). Disponível em: < *http : //ccse.uepa.br/downloads/material*$_2$010/*LIVRO*$_T$*N.pdf* >. Acesso em 30 de outubro de 2018.

[5] Hefez, A., *Aritmética*. 1ªed. Rio de Janeiro: SBM, (2014).

[6] Ifrah, G., *História Universal dos Algarismos, volume 1*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, (1997).

[7] Ifrah, G., *História Universal dos Algarismos, volume 2*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, (1997).

[8] Junqueira, L. C. S., *Critérios de Divisibilidade*. Trabalho de Conclusão de Curso - Graduação em Matemática, UFSC. Florianópolis, (2001). Disponível em: < *https : //repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/*123456789/97082/*LuisJunqueira.PDF?sequence* = 1 >. Acesso em 04 de março de 2018.

[9] Lintz, R. G., *História da Matemática*. 2ªed. rev. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, (2007).

[10] Manosso, R., *Produção cultural de Radamés Manosso, Representação da escrita em computador.* Disponível em: < *http : //radames.manosso.nom.br/linguagem/gramatica/grafologia/representacao − da − escrita − em − computador/* >. Acesso em 28 de maio de 2018.

[11] Miyaschita, W. Y., *Sistema de Numeração.* Monografia de Graduação em Matemática, UNESP de Bauru, (2002). Disponível em: < *http : //wwwp.fc.unesp.br/* ∼ *mauri/TN/SistNum.pdf* >. Acesso em 04 de março de 2018.

[12] Paula, A., *Cálculo Numérico, Aritmética de Ponto Flutuante e Noções de Erro.* UFMG. Disponível em: < *https : //homepages.dcc.ufmg.br/ ana.coutosilva/Aulas − CN/PontoFlutuanteErros.pdf* >. Acesso em 30 de outubro de 2018.

[13] Sampaio, F. A., *Matmágica: História, aplicações e jogos matemáticos.* Campinas, SP. Papirus, (2005).

[14] Sampaio, J. C., *Introdução à Teoria dos Números.* São Carlos: Nova EDUFISCAR, (2014).

[15] Souza, V. L. F., *Sistemas de Numeração: Jogos e Aplicações.* Monografia de Pós-graduação em Matemática - Epecialização, UFMG, (2013). Disponível em: < *https : //slidex.tips/download/universidade − federal − de − minas − gerais − instituto − de − ciencias − exatas − sistemas − de − nu* >. Acesso em 05 de novembro de 2017.

[16] Souza, F. H. T., *Um Critério de Divisibilidade em Base n.* Video Aula de Aritmética. Disponível em: < *https : //www.youtube.com/watch?v = uxS0rfwJ7Gw* >. Acesso em 28 de maio de 2018.

[17] Takahashi, C. R. S., *Artigo Revista Ciência e Natura, Especial PROFMAT.*Santa Maria, v. 37 Ed. 2015. Disponível em: < *https : //periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14614/pdf* >. Acesso em 28 de maio de 2018.