

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Geometria Fractal: conjunto de Cantor, dimensão e medida de Hausdorff e aplicações

Rita de Cássia Morasco da Cruz

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Rita de Cássia Morasco da Cruz

Geometria Fractal: conjunto de Cantor, dimensão e medida de Hausdorff e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Jair Silvério dos Santos

USP – São Carlos
Novembro de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C957g Cruz, Rita de Cássia Morasco
Geometria Fractal: conjunto de Cantor, dimensão
e medida de Hausdorff e aplicações / Rita de Cássia
Morasco Cruz; orientador Jair Silvério Santos. --
São Carlos, 2018.
93 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Geometria Fractal. 2. Conjunto de Cantor. 3.
Dimensão de Hausdorff. 4. Medida de Hausdorff. I.
Santos, Jair Silvério, orient. II. Título.

Rita de Cássia Morasco da Cruz

Fractal Geometry: Cantor set, Hausdorff dimension and measurement and applications.

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Jair Silvério dos Santos

**USP – São Carlos
November 2018**

Dedico este trabalho ao meu esposo, Luiz Gustavo da Cruz, por todo incentivo e apoio demonstrados ao longo deste trabalho. À minha querida amiga Daislaine (in memoriam), por todos os dias me fazer acreditar que eu era capaz. À minhas filhas Bianca e Isabela por compreenderem a importância deste meu trabalho, entendendo minhas ausências, demonstrando admiração, preocupação e carinho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me conceder forças para a concretização deste trabalho.

À minha família, pela compreensão e apoio em relação às dificuldades enfrentadas desde o início do meu mestrado.

Quero agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Jair Silvério dos Santos, pelo seu profissionalismo, paciência e dedicação demonstrada ao longo deste meu trabalho. Agradeço, também, por compreender minhas dificuldades em relação aos meus compromissos profissionais e familiares.

Aos amigos, que juntos sofreram e torceram para que eu pudesse vencer mais esta etapa da minha vida, me ouvindo, me apoiando, me incentivando e acima de tudo, acreditando na minha capacidade.

*“ As coisas tangíveis
tornam-se insensíveis
à palma da mão.
Mas as coisas findas,
muito mais que lindas,
essas ficarão. ”*

(Carlos Drummond de Andrade)

RESUMO

CRUZ, R. C. M. **Geometria Fractal: conjunto de Cantor, dimensão e medida de Hausdorff e aplicações**. 2018. 93 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Este trabalho está preocupado com o conceito de medida e dimensão de Hausdorff usando ferramentas matemáticas adequadas. Como, frequentemente, é importante e difícil determinar a dimensão Hausdorff ¹ de um conjunto e ainda mais difícil de encontrar ou mesmo estimar a sua medida Hausdorff, por auto proteção é usado o conjunto ternário de Cantor. A construção ternária simplifica certas dificuldades técnicas sobre a teoria da dimensão. O conjunto de Cantor é um exemplo interessante de um conjunto magro, perfeito, compacto e não enumerável, cuja medida e dimensão topológica são nulas. A análise de muitas das suas propriedades e consequências interessantes nos campos da teoria dos conjuntos e da topologia nos oferece uma rota direta que leva à medida Hausdorff do conjunto Cantor e sua dimensão fractal que é igual à sua dimensão Hausdorff. Também é calculada a dimensão Hausdorff para alguns fractais clássicos, como o tapete Sierpinski e a curva de flocos de neve von Koch.

Palavras-chave: Conjunto de Cantor, Dimensão, Medida, Fractal.

¹ Hausdorff-Besicovitch *dimension*

ABSTRACT

CRUZ, R. C. M. **Fractal Geometry: Cantor set, Hausdorff dimension and measurement and applications.** 2018. 93 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

This work is concerned with the concept of Hausdorff measure and dimension using suitable mathematical tools. Since it is often important and difficult to determine the Hausdorff dimension² of a set and even harder to find or even to estimate its Hausdorff measure, by self-protection choices, it is used the ternary Cantor set. The ternary construction reduces technical difficulties about dimension theory. Cantor set is an interesting example of a meager, perfect, compact, uncountable set whose measure and topologic dimension are zero. Analysis of many of its interesting properties and consequences in the fields of set theory and topology provides a direct route that leads to the Hausdorff measure of the Cantor set and its fractal dimension that is equal to its Hausdorff dimension. It is also computed the Hausdorff dimension for some classical fractals such as the Sierpinski carpet and the von Koch snowflake curve.

Keywords: Cantor set, Dimension, Measure, Fractal.

² Hausdorff-Besicovitch *dimension*

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pulmão	20
Figura 2 – Distância - circunferência de centro $(a,b) = (0,0)$	28
Figura 3 – Georg Cantor	33
Figura 4 – Construção geométrica do conjunto de Cantor	35
Figura 5 – Dimensão de Hausdorff	60
Figura 6 – Tapete de Sierpinski	65
Figura 7 – Imagem fractal	66
Figura 8 – Galáxias	67
Figura 9 – Niels Fabian Helge Von Koch	68
Figura 10 – Curva de Koch	68
Figura 11 – Construção Geogebra	70
Figura 12 – Construção Geogebra	71
Figura 13 – Construção Geogebra	71
Figura 14 – Construção Geogebra	72
Figura 15 – Construção Geogebra	73
Figura 16 – Construção Geogebra	74
Figura 17 – Construção Geogebra	74
Figura 18 – Construção Geogebra	75
Figura 19 – Construção Geogebra	76
Figura 20 – Construção Geogebra	76
Figura 21 – Floco de neve de Koch	77
Figura 22 – Área do floco de neve	77
Figura 23 – Waclaw Sierpinski	80
Figura 24 – Triângulo Sierpinski	80
Figura 25 – Giuseppe Peano	84
Figura 26 – Construção da curva Peano	85
Figura 27 – Curva Peano	85
Figura 28 – David Hilbert	87
Figura 29 – Geradora	88
Figura 30 – Construção da curva de Hilbert	88
Figura 31 – Curva de Hilbert	88

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	PRELIMINARES	23
2.1	Preliminares	23
2.1.1	<i>Espaços métricos</i>	23
2.1.2	<i>Espaços dos Códigos</i>	29
2.1.3	σ -Algebra	31
3	CONJUNTO DE CANTOR	33
3.1	Conjunto de Cantor	33
3.1.1	<i>Construção Geométrica do Conjunto de Cantor</i>	34
3.1.2	<i>Construção Analítica do Conjunto de Cantor</i>	37
3.2	Medida de Hausdorff	54
4	DIMENSÃO DE HAUSDORFF	59
4.1	Dimensão de Hausdorff e Dimensão Fractal	59
5	APLICAÇÕES	65
5.1	Curva de Koch	67
5.1.1	<i>Obtenção da curva</i>	68
5.1.2	<i>Estudo da curva</i>	69
5.1.3	<i>Dimensão da Curva de Koch</i>	70
5.1.4	<i>Construção da curva de Koch no Geogebra</i>	70
5.2	Floco de Neve de Koch	76
5.2.1	<i>Estudo do Floco de Neve</i>	77
5.3	O Triângulo de Sierpinski	79
5.3.1	<i>Números de triângulos</i>	81
5.3.2	<i>Perímetro do triângulo</i>	82
5.3.3	<i>Área do triângulo de Sierpinski</i>	82
5.3.4	<i>Dimensão do triângulo de Sierpinski</i>	83
5.4	Curvas de Enchimento	84
5.5	Construção da Curva de Peano	84
5.5.1	<i>Estudo da curva</i>	86
5.5.2	<i>Dimensão da Curva</i>	86

5.6	Curva de Hilbert	86
5.6.1	<i>Construção da curva</i>	87
5.6.2	<i>Dimensão da Curva</i>	89
5.7	Por que trabalhar com fractais na Educação Básica	89
5.8	Conteúdos de Matemática que podem ser trabalhados com o estudo dos Fractais, na Educação Básica	90
5.9	Atitudes, Valores e Competências	90
REFERÊNCIAS		93

INTRODUÇÃO

A teoria dos conjuntos formulada por Cantor, na segunda metade do século 19, foi o fator iniciador de uma subárea da topologia, a Teoria da Dimensão, cujo objeto é o estudo da dimensão de algumas classes de subconjuntos de um espaço métrico ou topológico. Há, pelo menos, três definições diferentes para a dimensão topológica de um conjunto¹. Formulada por Uryshon em 1922 e por Menger, em 1923, uma destas definições tornou-se conhecida como *Small Inductive Dimension of a set* ou *Uryshon-Menger Dimension*², familiar por coincidir com a dimensão euclidiana de comprimento, área e volume³ (ver (ENGELKING, 1978), *Cap.1*). A necessidade da formulação desta definição tornou-se imperativa quando foi estabelecido que um intervalo I da reta poderia conter tantos pontos quanto o quadrado $I^2 = I \times I$ e conseqüentemente I e I^2 seriam topologicamente equivalentes. A prova da negativa desta última afirmação, ou que $I, I^2 \dots I^n$ são topologicamente diferentes foi dada por Brouwer em 1911. Mas os estudos desenvolvidos com o propósito de dar prova para a questão introduziram axiomas, conceitos, relevantes resultados e deu origem à Teoria da Dimensão. Informalmente, Brouwer, Uryshon-Menger *Dimension* pode ser rephraseada como:

- Se tomarmos um conjunto \mathcal{A} com uma quantidade enumerável de pontos, a dimensão topológica de \mathcal{A} é zero.

¹ A Noção intuitiva de dimensão associa à palavra 1-dimensional um objeto que tem comprimento, 2-dimensional um objeto que tem área, 3-dimensional um objeto que tem volume e assim por diante (ver (HUREWICZ; WALLMAN, 1948) p8).

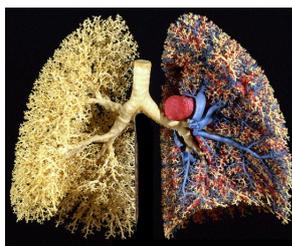
² Ideia:(i) o conjunto vazio tem dimensão -1 . (ii) a dimensão de um conjunto é pelo menos n e todo ponto do conjunto tem vizinhanças arbitrariamente pequenas cujas fronteiras têm dimensão menor ou igual que n (ver (HUREWICZ; WALLMAN, 1948) p4)

³ Se para seccionar um continuum for suficiente usar uma certa quantidade de cortes com pontos distinguíveis, dizemos que a dimensão deste continuum é um. Se para seccionar um continuum \mathcal{A} for suficiente usar um certa quantidade de cortes com um ou vários continua cuja dimensão de cada um destes continuum for igual a 1, dizemos que \mathcal{A} tem dimensão 2.

- Se \mathcal{A} contém pontos para os quais as fronteiras de suas vizinhanças arbitrariamente pequenas têm dimensão topológica \mathbf{n} , então \mathcal{A} tem dimensão $\mathbf{n} + 1$.

Nos primeiros anos do século 20, Peano construiu a curva conhecida como curva de enchimento de espaço ⁴ e mostrou como a dimensão de um conjunto pode ser alterada por transformações contínuas. Esta construção abriu a possibilidade de se contradizer qualquer ideia de dimensão topológica fundamentada sobre *minimum number of parameters* ou quantidade mínima de parâmetros. A curva de enchimento de espaço de Peano fragilizava a prova de Brouwer de 1911. Em 1913, Brouwer completa sua prova. Também em 1913, Henri Lebesgue⁵ elucidou o problema e mostrou como distinguir espaços euclidianos de dimensões topológicas diferentes. Seguindo as ideias de Lebesgue, Felix Hausdorff nos ensina um modo singular e próprio de medir tamanho de conjuntos cujo significado é **ao medir com precisão o tamanho de um conjunto, faz-se necessário verificar a forma de medir**. Nesse tempo, Cantor já havia mostrado que a cardinalidade de uma linha e a cardinalidade do plano eram iguais. Também já havia uma definição para o conjunto de Cantor. Como exemplo, podemos considerar um corpo humano com idade entre 19 e 40 anos, cuja área de sua pele é um número entre 7 e 10 metros quadrados, no entanto, os pulmões cujo volume total médio é 4,3 litros; dentro deles, há os alvéolos responsáveis pelas trocas gasosas, atividades vital para o ser humano, são em média 300 milhões e a área da superfície alveolar é em média 143 metros quadrados, ver (GEHR; BACHOFEN; WEIBEL, 1978).

Figura 1 – Pulmão



Seguindo os ensinamentos de Hausdorff, estudamos uma forma de medir o tamanho para o conjunto de Cantor que é recursivamente construída e auto-similar em todos os estágios de ampliação, frequentemente, denominada *infinitamente complexa*, mas aos olhares refinados de Mandelbrot recebeu o nome de Fractal. A ideia fundamental é investigar o tamanho de conjuntos interessantes em diferentes escalas de tamanho. Consideremos um cubo $E \subset \mathbb{R}^3$ com aresta \mathbf{um} . Dado $k \in \mathbb{N}$, podemos dividir este cubo em subcubos menores, cada um deles com aresta $s = k^{-1}$. Obviamente, a quantidade de subcubos depende de s e é dada por $N(s) = k^3 = s^{-3}$.

⁴ Por meio de uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$

⁵ Dimensão topológica ou dimensão por cobertura de Lebesgue é definida como o menor valor de n tal que qualquer cobertura tem um refinamento no qual nenhum ponto esteja incluído em mais que $n + 1$ elementos da cobertura. Se um espaço não tiver dimensão por cobertura de Lebesgue para qualquer m , este espaço é dito ter dimensão infinita.

Esta descrição nos mostra que o cubo E pode ser subdividido em $N(s)$ subcubos, dois a dois congruentes por translação e rotação em que cada subcubo é cópia reescalada do cubo E por um fator linear s . Esta construção nos oferece a *dimensão de auto-similaridade* de E que é o único valor d tal que $N(s) = s^{-d}$ ou

$$d = \frac{\log N(s)}{\log \frac{1}{s}}.$$

Esta dissertação pretende analisar uma das intrigantes consequências da Teoria da Dimensão, como medir o conjunto de Cantor com atenção especial sobre a forma de medir e compreender as ideias contidas na Dimensão Fractal. As outras duas definições de dimensão topológica coincidem com a Uryshon-Menger Dimension em uma classe de espaços métricos separáveis. Por estar fundamentada sobre o conceito de medida, a dimensão de Hausdorff tem formulação mais sofisticada. Como a formulação da dimensão Fractal deriva da dimensão de Hausdorff, podemos afirmar que a descrição da teoria da dimensão apresentada, nesta dissertação envolve técnicas relativamente sofisticadas. Enquanto a dimensão topológica é um elemento do conjunto $\{-1, 0, 1, 2 \dots\}$, a dimensão Hausdorff pode ser um número fracionário.

Nesta dissertação, apresentamos uma descrição da teoria da dimensão que depende de técnicas que se envolvem com espaços métricos e topológicos, conceito de compacidade, medida de Lebesgue de um conjunto, bem como, teoria dos números; representação binária e ternária de um número real que é usada para descrever algebricamente os elementos do conjunto de Cantor. Apresentamos provas relevantes de propriedades do conjunto de Cantor, como cálculo de sua medida, cardinalidade, categoria de Baire e discutimos a conexidade. Usamos o conceito de similaridade para descrever, geometricamente, o conjunto de Cantor, curva de Peano, Hilbert, Koch e tapete de Sierpinski. Com as ideias de Hausdorff, calculamos a medida de Hausdorff e dimensão de Hausdorff para o conjunto de Cantor, triângulo de Sierpinski, curva de Koch, curva de Peano e curva de Hilbert.

PRELIMINARES

2.1 Preliminares

2.1.1 Espaços métricos

Definição 1. Seja X um conjunto não vazio e $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Uma Métrica é uma função que satisfaz,

(i) $d(x, y) \geq 0$,

(ii) $d(x, y) = 0$, se e somente se $x = y$,

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

para qualquer $x, y, z \in X$,

Neste caso, a função d é chamada métrica ou distância sobre X , e o par ordenado (X, d) é denominado um espaço métrico.

Exemplo 1. Seja $X = \{\nabla, 2, a\}$ se $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ for dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y, \end{cases}$$

d é uma métrica sobre X , chamada métrica zero-um.

Observamos que

$$(a) \ d(a, \nabla) = d(\nabla, a) = 1, d(2, \nabla) = d(\nabla, 2) = 1 \text{ e } d(a, 2) = d(2, a) = 1.$$

$$(b) \ d(\nabla, a) \leq d(\nabla, 2) + d(2, a) = 2, \ d(2, a) \leq d(\nabla, 2) + d(\nabla, a) = 2.$$

Assim,

$$d(\nabla, 2) \leq d(2, a) + d(\nabla, a) = 2.$$

Então, d é uma métrica sobre X e (X, d) é um espaço métrico. ■

Exemplo 2. Seja X um conjunto e $d_0 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ uma métrica em X . Então $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \frac{d_0(x, y)}{1 + d_0(x, y)}$ também é uma métrica em X .

A verificação dos três primeiros itens da Definição 1 para a métrica d é trivial. Vamos verificar a desigualdade triangular.

Seja $\varphi : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$. É fácil ver que φ é derivável em $\mathbb{R} - \{-1\}$ e $\varphi'(t) = (1+t)^{-2} > 0$. Então φ é crescente. Como d_0 é uma métrica, $d_0(x, y) \leq d_0(x, z) + d_0(z, y)$ ou $\varphi(d_0(x, y)) \leq \varphi(d_0(x, z) + d_0(z, y))$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \frac{d_0(x, y)}{1 + d_0(x, y)} \\ &= \varphi(d_0(x, y)) \leq \varphi(d_0(x, z) + d_0(z, y)) = \frac{d_0(x, z) + d_0(z, y)}{1 + d_0(x, z) + d_0(z, y)} = \\ &= \frac{d_0(x, z)}{1 + d_0(x, z) + d_0(z, y)} + \frac{d_0(z, y)}{1 + d_0(x, z) + d_0(z, y)} \leq \frac{d_0(x, z)}{1 + d_0(x, z)} + \frac{d_0(z, y)}{1 + d_0(z, y)} \\ &\leq d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

■

Definição 2. Dado (X, d) um espaço métrico.

- Dado $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in X$, definimos bola aberta de centro em x_0 e raio ε o conjunto

$$B_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon\}$$

- Dado $A \subset X$, um ponto $x_0 \in X$ é um ponto interior do conjunto A , se existir um $\delta > 0$ tal que $B_d(x_0, \delta) \subset A$.

- Se $A \subset X$, $\text{Int}(A)$, é o conjunto de todos os pontos interiores de A .

Observação 1. Seja (X, d) um espaço métrico. Segue do terceiro item da Definição 2 que $\text{Int}(A) \subset A$, para todo $A \subset X$.

- Tomemos $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. Se $A_0 = [0; 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, então $\text{Int}(A_0) = (0; 1)$ pois, dado $x_0 \in A_0$, $x_0 \notin \{0, 1\}$, seja

$$\delta = \min\{x_0, 1 - x_0\},$$

a bola $B_d(x_0, \delta) \subset A_0$. Então se $x_0 \notin \{0, 1\}$, $x_0 \in \text{Int}(A)$. Esta descrição junto com a Observação 1 mostra que $(0; 1) \subset \text{Int}(A)$.

- Ainda, se $A_1 = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \dots \frac{1}{3^n} \dots\}$, dado $k \in \mathbb{N}$, $x_0 = \frac{1}{3^k}$ e

$$\delta_k = \min\left\{\frac{1}{3^{k-1}} - \frac{1}{3^k}; \frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{k+1}}\right\} > 0,$$

a bola $B_d(x_0, \delta_k) = (x_0 - \delta_k; x_0 + \delta_k)$ não é subconjunto de A_1 , qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $\text{Int}(A_1) = \emptyset$.

Observação 2. As Métricas apresentadas nos exemplos 1-2 são consideradas métricas especiais pois:

- no exemplo 1, se $x_0 \in X$ e $0 < \varepsilon < 1$, então $B_d(x_0, \varepsilon) = \{x_0\}$.
- nos exemplos 1-2 se $x_0 \in X$, $\varepsilon \geq 1$, então $B_d(x_0, \varepsilon) = X$.
- Dizemos que as métrica dos exemplos 1-2 são métricas limitadas, porque nesses casos $d(x, y) \leq 1$ para todo $(x, y) \in X \times X$.

Definição 3. Se $\mathcal{A} \subset X = \mathbb{R}$ for um intervalo e $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, dizemos que f é côncava se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ tem-se

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Exemplo 3. Se $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ for dada por $f(x) = x^s$ com $0 < s < 1$, então f é côncava. Consequentemente,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^s \geq \frac{1}{2}(x^s + y^s).$$

Como $f''(x) = s(s-1)x^{s-2}$, vemos que, se $0 < s < 1$, é $f''(x)$ positiva para todo $x \in (0, \infty)$. Isto é suficiente para concluirmos que f é côncava. Se tomarmos $\lambda = \frac{1}{2}$ a segunda parte segue facilmente. ■

Definição 4. Seja (X, d) um espaço métrico, e $A \subseteq X$. Dizemos que A é um conjunto aberto se e somente se para qualquer $a \in A$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_d(a, \varepsilon_0) \subseteq A$.

Definição 5. Dado (X, d) um espaço métrico, uma sequência em \mathbb{X} é uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ dada por $f(n) = x_n$.

Exemplo 4. Seja $X = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ dada por $f(n) = \frac{n}{n^2 + n}$.

Por conveniência, denotaremos uma sequência por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(x_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Definição 6. ((CANTOR, 1965) pp16, (SHILOV, 1996) p73) (**Ponto Limite**) Dado um espaço métrico (X, d) e um conjunto $F \subset X$. Um ponto $x \in X$ é dito um ponto limite de F se dado $\varepsilon > 0$ existir uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ e $\ell > 0$, tal que para qualquer $n > \ell$, $d(x, x_n) < \varepsilon$. Escrevemos $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Exemplo 5. Seja $X = \mathbb{R}$ com a distância $d(x, y) = |x - y|$. Consideremos o conjunto dado por $F = \{\frac{1}{3^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Então $x_0 = 0$ é ponto limite do conjunto F .

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\ell = \max\{1, \lceil \frac{1}{\ln(3)} \ln(\frac{1}{\varepsilon}) \rceil\}$ ($\lceil x \rceil$ maior inteiro de $x \in \mathbb{R}$). Seja $m \in \mathbb{N}$, $m > \ell$, então $m > \frac{1}{\ln(3)} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$ e assim é fácil ver que $0 < \frac{1}{3^m} \leq \frac{1}{3^\ell} < \varepsilon$ e isto implica que $d(0, x_n) = d(0, \frac{1}{3^m}) < \varepsilon$. Segue da Definição 5 que $x_0 = 0$ é ponto limite de F . ■

Exemplo 6. Seja $X = \mathbb{R}$ e a distância $d(x, y) = |x - y|$. O conjunto

$$F = \left\{ \left(1 - \frac{1}{4^p}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}_{p \in \mathbb{N}}.$$

O ponto limite do conjunto F é $x_0 = 1$.

Prova: Dado $p, q \in \mathbb{N}$ com $p < q$, como $4^p < 4^q$, temos $4^{-p} > 4^{-q}$ e $-4^{-p} < -4^{-q}$. Então $1 - 4^{-p} < 1 - 4^{-q}$. Mas a função $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(s) = s^{\frac{1}{p}}$ é crescente, $\varphi(1 - 4^{-p}) < \varphi(1 - 4^{-q})$ ou $\left(1 - \frac{1}{4^p}\right)^{\frac{1}{p}} < \left(1 - \frac{1}{4^q}\right)^{\frac{1}{q}}$. Além disso, se $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq \varphi(s) \leq 1$. Como $0 < 1 - 4^{-p} < 1$ para todo $p \in \mathbb{N}$, o conjunto F é limitado, de fato temos $F \subset [0, 1]$. Segue do Exemplo 4 – p – 110 de (LIMA, 1970) que o ponto limite do conjunto F é $x_0 = 1$. ■

Definição 7. ((SHILOV, 1996), p76) Dado (X, d) um espaço métrico, e $A \subseteq X$, o conjunto A é fechado se ele contém todos os seus pontos limites.

Podemos verificar que o intervalo $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \leq x \leq b\}$, é um conjunto fechado, mas o intervalo $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \leq x < b\}$ não é fechado, pois não contém o seu ponto limite b .

Se considerarmos $X = \mathbb{R}^2 = \{(x, y), \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}\}$ e $d_\infty, d_1, d_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$d_{\infty}((x,y), (a,b)) = \max\{|x-a|; |y-b|\}$$

$$d_2((x,y), (a,b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$d_1((x,y), (a,b)) = |x-a| + |y-b|,$$

é fácil ver que d_{∞}, d_1, d_2 são distâncias.

Exemplo 7. Para cada uma das três distâncias a circunferência de centro $(a,b) = (0,0)$ e raio um, que é um conjunto fechado aparece representada na figura abaixo.

Sejam \mathcal{E}_{∞} , \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 circunferência de centro $(a,b) = (0,0)$ e raio um com as respectivas distâncias d_{∞}, d_1, d_2 .

- a) $d_1((x,y), (0,0)) = 1$, ou seja, $|x-0| + |y-0| = 1$, o que nos dá $|x| + |y| = 1$. Este é o conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } |x| + |y| = 1\},$$

que na figura a seguir, esta representado pelo quadrado de vértices $(1,0), (0,1), (-1,0)$ e $(0,-1)$ que é a circunferência \mathcal{E}_1 .

- b) $d_2((x,y), (0,0)) = 1$ ou seja $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1$ que é o conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}.$$

Na figura abaixo a representação deste conjunto é conhecida como circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, \mathcal{E}_2 dada pela distância Euclidiana.

- c) $d_{\infty}((x,y), (a,b)) = 1$, ou seja $\max\{|x-0|; |y-0|\} = 1$. Isto nos dá o conjunto

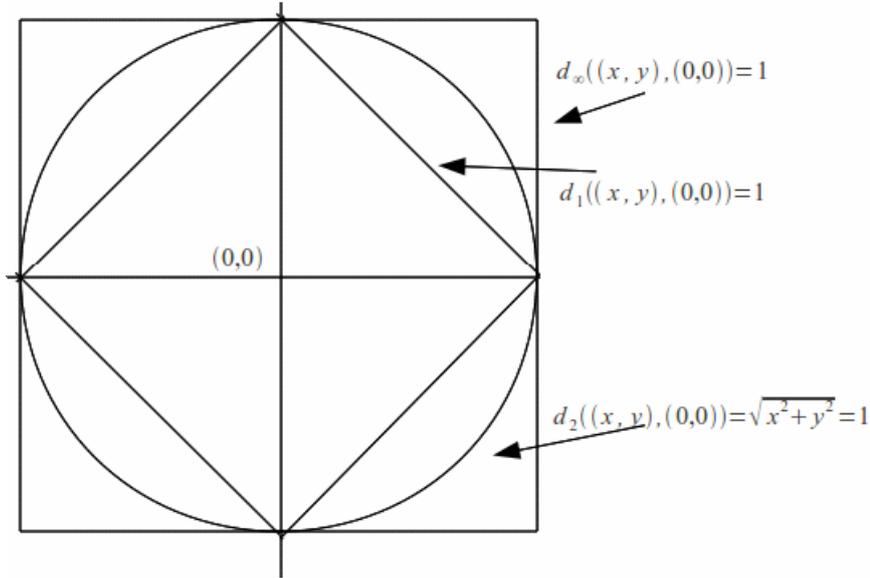
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \max\{|x|; |y|\} = 1\}.$$

Na figura abaixo a representação deste conjunto é o quadrado de vértices $(1,1), (1,-1), (-1,1)$ e $(-1,-1)$ que é a circunferência \mathcal{E}_{∞} .

■

Sejam X e Y conjuntos não vazios. Se (Y, d_0) for um espaço métrico e $f : X \rightarrow Y$ for uma aplicação injetiva, então $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dada por $d(x,y) = d_0(f(x), f(y))$ define uma métrica sobre X .

- Como d_0 é métrica, $d(x,y) = d_0(f(x), f(y)) = d_0(f(y), f(x)) \geq 0$. Ainda, Se $x, y \in X$ forem tais que $d(x,y) = 0$, então $d_0(f(x), f(y)) = 0$. Mas d_0 é métrica, então $f(x) = f(y)$. Como f é injetiva, $d(x,y) = 0$ se e somente se $x = y$.

Figura 2 – Distância - circunferência de centro $(a,b) = (0,0)$ 

- Dados x, y e $z \in X$,

$$d(x,y) = d_0(f(x), f(y)) \leq d_0(f(x), f(z)) + d_0(f(y), f(z)) = d(x,z) + d(y,z).$$

Um exemplo deste fato pode ser observada quando tomamos f como a função tangente ou seja

$$X = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), Y = \mathbb{R}, f : X \rightarrow Y \text{ e } f(t) = \tan(t).$$

Neste caso $d_0 : Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$ dada por $d_0(u, v) = |u - v|$ e

$$d(x,y) = d_0(f(y), f(x)) = |\tan(x) - \tan(y)|.$$

■

Seja (X_i, d_i) para $i \in \{1, 2, \dots, \ell\} = I \subset \mathbb{N}$ uma família de espaços métricos e o produto cartesiano

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_\ell = \prod_{i \in I} X_i.$$

Se $X_i = X$ para $i, j \in I$, denotamos $\prod_{i \in I} X_i$ como X^ℓ . Uma métrica usual em $\prod_{i \in I} X_i$ é dada por

$$d_{X^\ell}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{d_i(\alpha_i, \beta_i)}{\ell} \quad (2.1)$$

e o conjunto $\prod_{i \in I} X_i$ torna-se um espaço métrico com a métrica d_{X^ℓ} . No caso de $I = \mathbb{N}$, se $X_i = X_j$ para $i, j \in I$, denotamos $\prod_{i \in I} X_i$ como $X^\mathbb{N}$. Ainda, se para cada $i \in I$ a métrica d_i for limitada, e se tomarmos $\lambda > 1$ poderemos definir a métrica

$$d_\lambda(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(\alpha_i, \beta_i)}{\lambda^i} \quad (2.2)$$

A convergência da série dada em (2.2) segue do critério de comparação e a verificação será omitida. Se $X = \{1, 2, \dots, \ell\}$ com $\ell \in \mathbb{N}$ e $I = \mathbb{N}$, o conjunto $X^\mathbb{N}$ é o conjunto de todas funções $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Da definição 5 segue que cada elemento de $X^\mathbb{N}$ é uma sequência.

A Definição de cobertura de um conjunto apresentada a seguir aparece descrita em (LIMA, 1970)^{p48}.

Definição 8. Sejam (X, d) espaço métrico, $A \subset X$ e $J \subset \mathbb{R}$. Uma cobertura do conjunto A é uma coleção de $\{\mathcal{B}_\lambda\}$ com $\mathcal{B}_\lambda \subset X$ para cada $\lambda \in J$, tal que $A \subset \bigcup_{\lambda \in J} \mathcal{B}_\lambda$.

- Dizemos que a cobertura é fechada se para cada $\lambda \in J$, o conjunto \mathcal{B}_λ é um conjunto fechado em X .
- Dizemos que a cobertura é aberta se para cada $\lambda \in J$, o conjunto \mathcal{B}_λ é um conjunto aberto em X .

Exemplo 8. Seja (X, d) espaço métrico onde $X = \mathbb{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$. Dado $A = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } -2 \leq x < 3\}$ e $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, consideremos as duas coleções de conjuntos \mathcal{B}_λ e \mathcal{F}_λ , onde para cada $\lambda \in J$. Então para cada $\lambda \in J$ temos

- $\mathcal{B}_\lambda = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } 1 - \lambda < x < 4 - \lambda\}$, isto nos dá uma coleção de conjuntos abertos, e
- $\mathcal{F}_\lambda = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } -3 + \lambda \leq x \leq -2 + \lambda\}$, isto nos dá uma coleção de conjuntos fechados.

É fácil ver que $A \subset \bigcup_{\lambda \in J} \mathcal{B}_\lambda$ e $A \subset \bigcup_{\lambda \in J} \mathcal{F}_\lambda$.

2.1.2 Espaços dos Códigos

Definição 9. (ver (BARNSELY, 2012)) Dado $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$ definimos $\Sigma^\mathbb{N} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma, \text{ tal que } f \text{ é uma função}\}$.

Um típico ponto em $X = \Sigma^\mathbb{N}$ é uma sequência $f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$ dada por

$$x = 2 \ 1 \ 7 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 5 \ (N-1) \ 3 \ 0 \ 0 \ \dots = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} \dots$$

com $x_i \in \Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$. Existem várias denominações associadas ao espaço $X = \Sigma^{\mathbb{N}}$. Isto se deve a sua importância em uma variedade de segmentos da Ciência; Matemática, Física, Biologia, Economia e outros. Vamos considerar $X = \Sigma^{\mathbb{N}}$ como o espaço dos códigos sobre N símbolos ou palavras. Para um particular elemento $x \in X$ podemos escrever

$$x = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7 \dots$$

onde $x_i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Da definição 5, segue que os elementos de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ são sequências $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $\alpha_i \in \Sigma$ e assim, cada sequência é um código (ver (BARNSELY, 2012) p8).

Definição 10. Para cada $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ se $d_c : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ for dada por

$$d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \quad (2.3)$$

d_c é uma métrica.

Prova: A série dada em (2.3) é convergente para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pois $\max\{|\alpha_i - \beta_i|, i \in \mathbb{N}\} < N$ e assim,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^i} \leq N \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^i} \leq 1$$

A função d_c em (2.3) é uma métrica. De fato, dados $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^{\mathbb{N}}$,

1. como os termos da série em (2.3) são não negativos, $d_c(\alpha, \beta) \geq 0$ e $d_c(\alpha, \beta) = 0$ se e somente se $\alpha_i - \beta_i = 0$ para $i \in \{1, 2, \dots, \}$. Portanto, $\alpha = \beta$.

$$2. d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\beta_i - \alpha_i|}{(N+1)^i} = d_c(\beta, \alpha)$$

3. desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d_c(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \gamma_i + \gamma_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \gamma_i| + |\gamma_i - \beta_i|}{(N+1)^i} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \gamma_i|}{(N+1)^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\gamma_i - \beta_i|}{(N+1)^i} \leq d_c(\alpha, \gamma) + d_c(\gamma, \beta) \end{aligned}$$

Portanto, segue da Definição 1 que d_c é uma métrica, e $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ é o espaço métrico denominado espaço dos códigos. ■

Observação 3. Para todo $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} = \frac{1}{N}$, se $|\alpha_i - \beta_i| = 1$.

Seguindo as ideias contidas na Obsevação 2, vamos descrever as forma das bolas abertas no espaço métrico $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$.

Proposição 1. Seja $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ e $\varepsilon > 0$, então

$$B_{d_c}(\alpha, \varepsilon) = \begin{cases} \Sigma^{\mathbb{N}}, & \text{se } \varepsilon \geq 1. \\ \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}, \text{ tal que } \alpha_i = \beta_i, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ com } k \in \mathbb{N}; & \text{se } \varepsilon < 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Observação 4. Dadas $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_i = \beta_i$ para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, então

$$d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^i} < \frac{1}{(N+1)^{k+1}}.$$

A prova da Proposição 1 segue da observação 4 e pode ser encontrada com detalhes no capítulo IV-2 em (BARNESLEY, 2012).

2.1.3 σ -Algebra

Definição 11. Dado um conjunto X , uma σ -álgebra sobre o conjunto X é uma coleção \mathcal{A} de subconjuntos de X tal que

1. O conjunto vazio \emptyset e X são subconjuntos de \mathcal{A} .
2. Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Esta Definição pode ser encontrada em (ROYDEN; FITZPATRICK, 2010) p19.

Exemplo 9. Seja $X = \{\nabla, 2, a\}$ e

$$\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, X\},$$

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, \{\nabla\}, \{2, a\}\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{\nabla, 2\}\},$$

$$\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, X, \{2\}, \{\nabla, a\}\},$$

$$\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, X, \{\nabla\}, \{2\}, \{a\}, \{2, a\}, \{\nabla, a\}, \{\nabla, 2\}\}.$$

é fácil ver que \mathcal{A}_i é σ -álgebra para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Definição 12. Dado um conjunto X , uma topologia sobre o conjunto X é uma coleção \mathcal{A} de subconjuntos de X tal que

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.
3. Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, então $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$.

A definição 12 pode ser encontrada em (LIMA, 1970)p40. Há uma semelhança entre σ -Algebra e Topologia pois há duas propriedades das definições 1 e 12 que são idênticas.

Exemplo 10. Se (X, d) for um espaço métrico, então a coleção \mathcal{A} dos abertos de X é uma topologia em X .

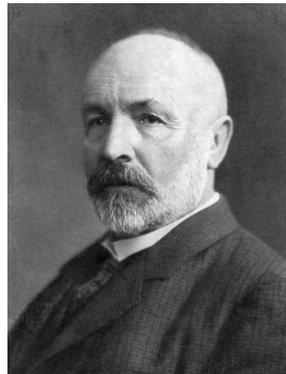
Prova: Seja \mathcal{A} a coleção dos abertos de X .

1. Como $\emptyset \in \mathcal{A}$ e o complementar do conjunto vazio é X , então $X, \emptyset \in \mathcal{A}$
2. Seja A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos em \mathcal{A} . Se $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Então para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $a \in A_k$. Como $A_k \in \mathcal{A}$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A_k$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Então $B(a, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$. Portanto, segue da Definição 4 que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ é aberto.
3. Seja A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos em \mathcal{A} . Se $a \in \bigcup_{i=1}^n A_i$. Então existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a \in A_k$. Como $A_k \in \mathcal{A}$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A_k \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$, e assim segue da definição 4 que $\bigcup_{i=1}^n A_i$ é aberto. ■

CONJUNTO DE CANTOR

3.1 Conjunto de Cantor

Figura 3 – Georg Cantor



Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em São Petersburgo (Rússia), em 3 de março de 1845, filho mais velho de Georg Waldemar Cantor e Maria Bohm. Sua família migrou-se para a Alemanha, e ele frequentou escolas em Frankfort. Aos 15 anos de idade, ingressou no Instituto de Wiesbaden (ver (CANTOR, 1965)). Em 1862 Cantor começa seus estudos universitários em Zurich, mas no ano seguinte, ele retorna à Alemanha, para a Universidade de Berlin, onde especializou-se em Matemática, Filosofia e Física; e tornou-se professor da Universidade de Halle em 1869 (ver (CANTOR, 1965)). A primeira contribuição importante de Cantor para a Matemática foi a teoria dos números irracionais apresentada em 1872, ano que apareceram teorias semelhantes de Weierstrass, de Charles M Eray e Dedekind (ver (CANTOR, 1965) p23).

Em 1873, estudou problemas de equipotência na classificação de conjuntos "excepcionais". Foram os estudos acerca dos números reais, que levou Cantor à teoria dos conjuntos na década de 1874 – 1884. A partir deste último ano, Cantor sofreu várias internações psiquiátricas,

devido às dificuldades e aos esforços mal sucedidos para tentar demonstrar a "hipótese do contínuo".

Nos anos 1870, apareceram várias tentativas de se definir o conjunto dos números reais, inclusive uma delas, em 1872, de Richard Dedekind que define os números reais em termos de cortes para expressar a integridade do *continuum*, mas prevaleceu a definição de Cantor, de 1872, para o conjunto dos números reais que descreve os números algébricos, transcendentos, faz claro a ideia de densidade. Cantor considerou coleções infinitas e deu a elas interpretação de conjunto unitário (ver (KANAMORI, 1996; CANTOR, 1874)). Ainda, a formulação de Cantor de números reais coincide com formulação geométrica descrita com o corte de Dedekind (ver (KANAMORI, 1996)). Nos anos 1890, Cantor desenvolve a teoria de conjuntos ordenados (aritmética e ética ordinal), define a adição e multiplicação de dois números cardinais, e prova as leis fundamentais sobre estes números que usamos rotineiramente (ver, (KANAMORI, 1996), *Addition and Multiplications of Power* (CANTOR, 1965) pp91). Cantor mostra que a coleção de todos os ordinais, que é uma coleção bem ordenada, é um conjunto que não pode ser tratado como um conjunto todo, pois seria por sua vez um ordinal, e assim ser equivalente a um segmento próprio (ver (CANTOR, 1874)). Cantor reconheceu que o conceito de “classe” é intuitivo, e nesse mesmo ano definiu: entendemos por classe toda reunião num único conjunto de objetos bem distintos da nossa intuição ou de nosso pensamento (ver (CANTOR, 1874), (CANTOR, 1965) pp.93). Com a definição de cardinalidade baseada em funções injetivas, Cantor, com seu famoso método de diagonalização, mostra em 1991, que o número cardinal de um conjunto é menor ou igual ao número cardinal do conjunto de todos os seus subconjuntos e apresenta um exemplo de um conjunto com *The Smallest Transfinite Cardinal Number Aleph-Zero* (ver (CANTOR, 1965) pp.103). Em dezembro de 1873, Cantor estabeleceu o conceito de um conjunto *Continuum* não enumerável (ver (KANAMORI, 1996)pp35).

Em 1882, Leopoldo Kronecker inaugura o movimento de reação contrária às tentativas de Cantor publicar suas contribuições sobre teoria dos conjuntos e das funções (ver (PIERPONT, 1928)). Em 1897, apesar dos atritos públicos apresentados em questionamentos fortemente agudos ou verdadeiras *farpas* de Leopoldo Kronecker (ver (PIERPONT, 1928)pp. 39 – 40) a teoria de conjuntos, apresentada por Cantor, recebe reconhecimento no Congresso Internacional de Matemática em Zurich.

3.1.1 Construção Geométrica do Conjunto de Cantor

Para construir o conjunto ternário de Cantor, tomamos o intervalo $[0, 1]$ e dividimos em três intervalos de comprimentos iguais a $\frac{1}{3}$ tal que $[0, 1] = [0, \frac{1}{3}] \cup (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1]$ (ver (COORNABERT, 2015a) p28) .

- O primeiro passo da construção do conjunto de Cantor consiste em remover o intervalo

aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Então, os elementos do conjunto de Cantor estão contidos no conjunto

$$\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]. \tag{3.1}$$

- O segundo passo consiste em repetir o mesmo processo em cada um dos intervalos contidos em \mathcal{C}_1 .

$$\mathcal{C}_1 = \left[[0, \frac{1}{9}] \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \right] \cup \left[[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \cup [\frac{8}{9}, 1] \right]. \tag{3.2}$$

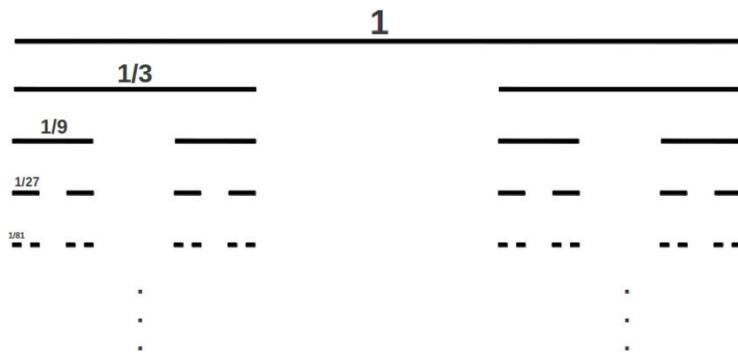
Removemos os intervalos abertos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Então, os elementos do conjunto de Cantor estão contidos no conjunto

$$\mathcal{C}_2 = \left[[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \right] \cup \left[[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \right].$$

- O terceiro passo consiste em repetir o mesmo processo em cada um dos intervalos contidos em \mathcal{C}_2 . Ou seja, remover em cada um dos intervalos que compõem \mathcal{C}_2 o intervalo aberto médio e assim obtemos

$$\mathcal{C}_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{3}{27}] \cup [\frac{6}{27}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{9}{27}] \cup [\frac{18}{27}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{21}{27}] \cup [\frac{24}{27}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1].$$

Figura 4 – Construção geométrica do conjunto de Cantor



Repetindo este processo n vezes, obtemos \mathcal{C}_{n+1} dividindo cada um dos intervalos \mathcal{C}_n em três subintervalos de mesmo comprimento e removendo o intervalo médio de cada um deles.

Definição 13. (ver (COORNAERT, 2015a) Seç 2.1) O conjunto de Cantor é a interseção de todos os conjuntos \mathcal{C}_n ou

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n \tag{3.3}$$

A coleção de conjuntos (intervalos) fechados que compõem cada \mathcal{E}_n em (3.13,) forma uma rede de conjuntos fechados, e quaisquer dois conjuntos nessa rede são disjuntos. Esta é a construção geométrica que ilustra quais são os passos da recorrência cujo resultado é o conjunto de Cantor, mas ainda dependemos de uma construção analítica deste conjunto para uma compreensão do conjunto de Cantor como subconjunto do conjunto dos números reais (ver (EDGAR, 2000)).

Definição 14. (ver (COORNAERT, 2015a) p29) Dado $x \in [0, 1]$ a expansão ternária de x é uma sequência $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n 3^{-n}.$$

Como exemplo temos

$$0,1\dots = 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + \dots = 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} 3^{-n} = 2 \cdot 3^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = 3^{-1} = (0,1)_3.$$

Os números cujo primeiro dígito, após o dígito decimal é **um**, são maiores que $0,1\dots = (0,1)_3$ e menores que $0,2\dots = (0,2)_3$. Esses números estão no intervalo aberto $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ que é eliminado na construção geométrica do conjunto de cantor. Os números cuja a expansão ternária contém o dígito **um**, como segundo dígito após o dígito decimal e que são da forma $0,01\dots$ e $0,21\dots$ são maiores que $(0,01)_3$ e menores que $(0,02)_3$. Estes números estão no intervalo $(\frac{1}{9}; \frac{2}{9})$ que foi removido na construção geométrica do conjunto de Cantor. Seguindo com esta linha de raciocínio, os números contendo um no k -ésimo dígito, após o dígito decimal, são exatamente os números eliminados no k -ésimo estágio. Isso significa que a expansão ternária dos elementos conjunto de Cantor podem ser representados apenas usando os dígitos 0 e 2.

Os números que estão em $[0, 1]$ e cuja expansão ternária não contém o dígito **um**, estão nos intervalos $[0; \frac{1}{3}]$ $[\frac{2}{3}; 1]$, exceto o número $\frac{1}{3} = (0,1)_3$. Os números reais contidos no intervalo $[0, 1]$ e cujo primeiro dígito depois da primeira casa decimal é **dois**, e que podem ser representados sem o dígito **um**, são os números que estão no conjunto

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right]$$

Seguindo com essa recorrência, podemos mostrar que os números reais contidos no intervalo $[0, 1]$ e cuja representação ternária pode ser expressa sem o dígito **um** são os números que estão

no conjunto \mathcal{C} dado em (3.13).

3.1.2 Construção Analítica do Conjunto de Cantor

Nesta construção, encontraremos uma fórmula explícita para cada conjunto \mathcal{C}_n dado em (3.13). Uma primeira propriedade que podemos observar em cada \mathcal{C}_n é a seguinte:

Proposição 2. \mathcal{C}_n é a união de 2^n intervalos fechados, para $n \geq 1$.

Prova : Vamos fazer a prova por indução matemática.

- i) \mathcal{C}_1 está formado por $2 = 2^1$ intervalos fechados (ver (3.1)).
- ii) Em nossa hipótese de indução, suponhamos que \mathcal{C}_n é formado por 2^n intervalos fechados.
- (iii) Cada intervalo do conjunto \mathcal{C}_n , dividimo-lo em três intervalos de mesmo comprimento, em seguida removemos o intervalo médio. Assim, o conjunto \mathcal{C}_{n+1} é obtido a partir de \mathcal{C}_n . Então, de cada intervalo de \mathcal{C}_n originam-se dois novos intervalos que são subconjuntos de \mathcal{C}_{n+1} . De modo que, \mathcal{C}_{n+1} tem o dobro da quantidade de intervalos que tinha o conjunto \mathcal{C}_n . Como por hipótese de indução, a quantidade de intervalos de \mathcal{C}_n é 2^n , denotando com $\#$ essa quantidade, temos que

$$\#(\mathcal{C}_{n+1}) = 2 \cdot \#(\mathcal{C}_n)$$

$$\#(\mathcal{C}_{n+1}) = 2 \cdot 2^n \tag{3.4}$$

$$\#(\mathcal{C}_{n+1}) = 2^{n+1} \text{ intervalos fechados.}$$

■

A Proposição 2 nos diz que a quantidade de intervalos que formam \mathcal{C}_n é 2^n para $n \geq 1$. Então, uma maneira prática de enumerá-los será tomar o conjunto de índices $j \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\} \subset \mathbb{N}$. Por construção, vemos que cada intervalo em \mathcal{C}_n é fechado e estes intervalos são dois a dois disjuntos.

Agora, vamos descrever uma maneira de construir o extremo esquerdo de j -ésimo intervalo de \mathcal{C}_n .

- Seja $j \in \mathbb{N}$. Se $j = 0$, definiremos $a_0 = 0$.

- Se $j \neq 0$ então, escrevemos o j em sua notação binária da seguinte forma

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_n \cdot 2^n$$
, donde $b_n = 1$ e $b_i \in \{0, 1\}$, com $0 \leq i \leq n - 1$.
- Definimos $a_j = b_0 \cdot 2 \cdot 3^0 + b_1 \cdot 2 \cdot 3^1 + \dots + b_n \cdot 2 \cdot 3^n$.
- Então, dado $j \in \mathbb{N}$, escrevemos sua representação binária, transformando-o em grupos de dois e pensamos este número expressado na base ternária. Por exemplo:
 Se $j = 10$ então $j = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$ por construção:

$$\begin{aligned} a_j &= a_{10} = 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 \\ a_{10} &= 0 + 6 + 0 + 54 \\ a_{10} &= 60. \end{aligned}$$

Esta descrição aparece resumida na próxima observação.

Observação 5. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sua representação na escala binária é dada por

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_n \cdot 2^n$$

e a_j que é o correspondente de j na escala ternária é dada por

$$a_j = b_0 \cdot 2 \cdot 3^0 + b_1 \cdot 2 \cdot 3^1 + \dots + b_n \cdot 2 \cdot 3^n.$$

Lema 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a função $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $\psi(n) = a_{2^n}$. Então $\psi(n) = 2 \cdot 3^n$.

Prova: Na Observação 5 tomamos $j = 2^m$, então,

$$2^m = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + \dots + 1 \cdot 2^m,$$

calculando a_{2^m} teremos

$$a_{2^m} = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3^m,$$

ou seja

$$a_{2^m} = 2 \cdot 3^m. \quad \blacksquare$$

O Teorema seguinte nos dá uma maneira muito simples e útil para calcular a_j .

Teorema 1. Seja $j \in \mathbb{N}$. Expressamos o j em sua notação binária, isto é,

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_n \cdot 2^n.$$

Então

$$a_j = a_{(b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_n \cdot 2^n)} = b_0 \cdot a_{2^0} + b_1 \cdot a_{2^1} + b_2 \cdot a_{2^2} + \dots + b_n \cdot a_{2^n}.$$

Prova: Seja $j \in \mathbb{N}$ um número arbitrário, supondo $b_n = 1$, sua representação binária é dada por

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_n \cdot 2^n.$$

Usamos a definição de a_j dada na Observação 5, ou seja

$$a_j = 2 \cdot b_0 \cdot 3^0 + 2 \cdot b_1 \cdot 3^1 + \dots + 2 \cdot b_n \cdot 3^n,$$

agora, segue do Lema 1 que $a_{2^n} = 2 \cdot 3^n$. Assim,

$$a_j = b_0 \cdot a_{2^0} + b_1 \cdot a_{2^1} + b_2 \cdot a_{2^2} + \dots + b_n \cdot a_{2^n},$$

ou seja

$$a_{(b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_n \cdot 2^n)} = b_0 \cdot a_{2^0} + b_1 \cdot a_{2^1} + b_2 \cdot a_{2^2} + \dots + b_n \cdot a_{2^n}.$$

■

Como exemplo, calculemos a_j para $j \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ isto é,

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \cdot 2 \cdot 3^0 = 2 \\ a_2 &= 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 = 0 + 6 = 6 \\ a_3 &= 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 = 2 + 6 = 8 \\ a_4 &= 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 0 + 0 + 18 = 18 \\ a_5 &= 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 2 + 0 + 18 = 20 \\ a_6 &= 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 0 + 6 + 18 = 24 \\ a_7 &= 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 2 + 6 + 18 = 26 \\ a_8 &= 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 0 + 0 + 0 + 54 = 54 \\ a_9 &= 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 2 + 0 + 0 + 54 = 56 \\ a_{10} &= 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 0 + 6 + 0 + 54 = 60 \end{aligned}$$

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_j	0	2	6	8	18	20	24	26	54	56	60

Os Lemas a seguir serão úteis para encontrar uma expressão analítica para o conjunto \mathcal{C}_n dado em (3.13).

Lema 2. Para cada $j \in \{0, 1, \dots\}$, $a_j + 1 < a_{j+1}$.

Prova: Esta prova está dividida em $j \in \mathbb{N}$ par ou ímpar.

- Se j for um número natural par, seu primeiro dígito, na escala binária é o zero, então, j será representado por

$$j = 0.2^0 + b_1.2^1 + \dots + b_n.2^n.$$

Assim,

$$a_j = 2.0.3^0 + 2.b_1.3^1 + \dots + 2.b_n.3^n.$$

Como

$$j + 1 = 1.2^0 + b_1.2^1 + \dots + b_n.2^n,$$

Calculando a_{j+1} teremos

$$a_{j+1} = 2.1.3^0 + 2.b_1.3^1 + \dots + 2.b_n.3^n.$$

Observamos que a_j e a_{j+1} são diferentes, apenas no primeiro dígito, sendo que o primeiro dígito em a_j é zero e em a_{j+1} é dois. Desta maneira temos que $a_{j+1} = 2 + a_j$. Portanto, $a_{j+1} > 1 + a_j$.

- Se j for um número natural ímpar, seu primeiro dígito na escala binária é o um, então, j será representado por

$$j = 1.2^0 + 1.2^1 + \dots + 1.2^i + 0.2^{i+1} + b_{i+2}.2^{i+2} + \dots + b_n.2^n.$$

Se não ocorrer nenhum dígito zero, $i = n$. Mas pela definição de j , $i \geq 0$.

$$a_j = 1.2.3^0 + 1.2.3^1 + \dots + 1.2.3^i + 0.2.3^{i+1} + 2.b_{i+2}.3^{i+2} + \dots + 2.b_n.3^n.$$

Ainda,

$$j + 1 = 0.2^0 + 0.2^1 + \dots + 0.2^i + 1.2^{i+1} + b_{i+2}.2^{i+2} + \dots + b_n.2^n.$$

Por outro lado,

$$a_{j+1} = 0.2.3^0 + 0.2.3^1 + \dots + 0.2.3^i + 1.2.3^{1+i} + 2.b_{i+2}.3^{i+2} + \dots + 2.b_n.3^n.$$

Como a última parte das somas em a_j e a_{j+1} coincidem, para provar o Lema, temos que verificar que

$$1.2.3^0 + 1.2.3^1 + \dots + 1.2.3^i + 0.2.3^{1+i} + 1 < 0.2.3^0 + 0.2.3^1 + \dots + 0.2.3^i + 1.2.3^{1+i}.$$

Vemos que o membro da esquerda contém uma progressão geométrica cuja soma é igual a 1.3^{1+i} . Como $3^{1+i} < 2.3^{1+i}$, a prova está completa. ■

Lema 3. Para cada $j \in \{0, 1, \dots\}$, $3a_j = a_{2j}$.

Prova : Se

$$j = b_0.2^0 + b_1.2^1 + \dots + b_n.2^n,$$

multiplicando ambos os membros por dois teremos

$$2j = b_0.2^1 + b_1.2^2 + \dots + b_n.2^{n+1}.$$

Calculando a_{2j} teremos

$$\begin{aligned} a_{2j} &= 2.0.3^0 + 2.b_0.3^1 + 2.b_1.3^2 + \dots + 2.b_n.3^{n+1} \\ &= 3(2b_0.3^0 + 2b_1.3^1 + \dots + 2b_n.3^n) = 3a_j. \end{aligned}$$

Assim, a prova do lema está completa. ■

Lema 4. Para cada $j \in \{0, 1, \dots\}$, $3a_j + 2 = a_{2j+1}$.

Prova : Como

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_n \cdot 2^n,$$

$$\begin{aligned} 2j + 1 &= (b_0 \cdot 2^1 + b_1 \cdot 2^2 + \dots + b_n \cdot 2^{n+1}) + 1 \\ &= 1 \cdot 2^0 + b_0 \cdot 2^1 + b_1 \cdot 2^2 + \dots + b_n \cdot 2^{n+1}, \end{aligned}$$

Calculando a_{2j+1} teremos

$$\begin{aligned} a_{2j+1} &= 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot b_0 \cdot 3^1 + 2 \cdot b_1 \cdot 3^2 + \dots + 2 \cdot b_n \cdot 3^{n+1} \\ &= 2 + 3(2b_0 + 2b_1 \cdot 3^1 + \dots + 2b_n \cdot 3^n) = 2 + 3a_j. \end{aligned}$$

Portanto, $3a_j + 2 = a_{2j+1}$. ■

Agora, com os Lemas 2, 3 e 4, estamos em boas condições para descrever, analiticamente, cada conjunto C_n para $n \in \mathbb{N}$, dado em (3.13).

Definição 15. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja B_n o conjunto dado por

$$B_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n} \right] \quad (3.5)$$

com j e a_j dados na observação 5.

Exemplo 11.

$$B_1 = \left[\frac{a_0}{3}, \frac{a_0+1}{3} \right] \cup \left[\frac{a_1}{3}, \frac{a_1+1}{3} \right] = \left[\frac{0}{3}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{2+1}{3} \right] = \left[0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1 \right].$$

Agora, vamos verificar que a forma analítica dada aos extremos de cada intervalo B_n (ver definição 15) coincide com a forma geométrica descrita na definição 13.

Teorema 2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \mathcal{C}_n$.

Prova : A prova será desenvolvida por indução.

- É fácil ver que B_1 , no exemplo 11, é igual ao \mathcal{C}_1 em (3.2).
- Suponhamos que $B_n = \mathcal{C}_n$. Então, segue de (3.5) que

$$\mathcal{C}_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n} \right]. \quad (3.6)$$

Segue da proposição 2 que os intervalos

$$\left[\frac{a_0}{3^n}, \frac{a_0+1}{3^n}\right]; \left[\frac{a_1}{3^n}, \frac{a_1+1}{3^n}\right]; \dots; \left[\frac{a_{2^n-1}}{3^n}, \frac{a_{2^n-1}+1}{3^n}\right]$$

são disjuntos entre si. Seguindo o procedimento da Proposição 2, vamos dividir cada um desses intervalos em três intervalos de mesmo comprimento, e o intervalo central será suprimido para obtermos \mathcal{C}_{n+1} , ou seja, vamos dividir o intervalo

$$\left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n}\right]$$

em três subintervalos que são dados por

$$\left[\frac{3a_j}{3^{n+1}}, \frac{3a_j+1}{3^{n+1}}\right]; \left(\frac{3a_j+1}{3^{n+1}}, \frac{3a_j+2}{3^{n+1}}\right) \text{ e } \left[\frac{3a_j+2}{3^{n+1}}, \frac{3a_j+3}{3^{n+1}}\right].$$

Assim,

$$\mathcal{C}_{n+1} = \left[\frac{3a_j}{3^{n+1}}, \frac{3a_j+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{3a_j+2}{3^{n+1}}, \frac{3a_j+3}{3^{n+1}}\right].$$

Agora, segue dos Lemas 3 e 4 que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n+1} &= \bigcup_{j=0}^{2^n-1} \left(\left[\frac{a_{2j}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2j}+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{a_{2j+1}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2j+1}+1}{3^{n+1}}\right] \right) \\ &= \left(\left[\frac{a_{2 \cdot 0}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2 \cdot 0}+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{a_{2 \cdot 0+1}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2 \cdot 0+1}+1}{3^{n+1}}\right] \right) \\ &\quad \cup \left(\left[\frac{a_{2 \cdot 1}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2 \cdot 1}+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{a_{2 \cdot 1+1}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2 \cdot 1+1}+1}{3^{n+1}}\right] \right) \\ &\quad \cup \dots \cup \left(\left[\frac{a_{2 \cdot (2^n-1)}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2 \cdot (2^n-1)}+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{a_{2 \cdot (2^n-1)+1}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2 \cdot (2^n-1)+1}+1}{3^{n+1}}\right] \right) \\ &= \left(\left[\frac{a_0}{3^{n+1}}, \frac{a_0+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{a_1}{3^{n+1}}, \frac{a_1+1}{3^{n+1}}\right] \right) \cup \left(\left[\frac{a_2}{3^{n+1}}, \frac{a_2+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{a_3}{3^{n+1}}, \frac{a_3+1}{3^{n+1}}\right] \right) \\ &\quad \cup \dots \cup \left(\left[\frac{a_{2^{n+1}-2}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2^{n+1}-2}+1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{a_{2^{n+1}-1}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2^{n+1}-1}+1}{3^{n+1}}\right] \right) \\ &= \bigcup_{j=0}^{2^{n+1}-1} \left[\frac{a_j}{3^{n+1}}, \frac{a_j+1}{3^{n+1}}\right] = B_{n+1}. \end{aligned}$$

■

Observação 6. Portanto, segue do Teorema 2 que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a construção geométrica e a construção analítica do conjunto \mathcal{C}_n coincidem, ou seja

$$\mathcal{C}_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_j}{3^n}; \frac{a_j+1}{3^n} \right]. \quad (3.7)$$

Agora, estamos em condições de mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ o extremo direito, do último intervalo de \mathcal{C}_n , é igual a um. Como

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

para $j = 2^n - 1$ aplicamos a observação 5 e obtemos

$$a_{2^n-1} = 1.2.3^0 + 1.2.3^1 + \dots + 1.2.3^{n-1} = 2(3^0 + 3^1 + \dots + 3^{n-1}) = 3^n - 1,$$

então, segue de (3.7) que

$$\frac{a_j+1}{3^n} = \frac{a_{2^n-1}+1}{3^n} = \frac{3^n-1+1}{3^n} = \frac{3^n}{3^n} = 1.$$

Proposição 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, cada intervalo que compõe o conjunto \mathcal{C}_n tem comprimento igual a $\frac{1}{3^n}$.

Prova : Seja $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$. Tomemos o intervalo $I_n = \left[\frac{a_k}{3^n}; \frac{a_k+1}{3^n} \right]$ na união dada em (3.7). Segue, da Proposição 2 que os intervalos de \mathcal{C}_n são, dois a dois, disjuntos. O comprimento $\ell = \ell(I_n)$ é dado por

$$\ell(I_n) = \frac{a_k+1}{3^n} - \frac{a_k}{3^n} = \frac{1}{3^n}. \quad \blacksquare$$

Proposição 4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma dos comprimentos dos intervalos que compõem o conjunto \mathcal{C}_n é igual a $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Prova : Para cada $n \in \mathbb{N}$, segue da Proposição 2 que \mathcal{C}_n é composto por 2^n intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Então, a soma é dada por

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3} \right)}_{2^n \text{-parcelas}} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1+1+1+\dots+1}{3^n} \right)}_{2^n \text{-parcelas}} = \left(\frac{2}{3} \right)^n. \end{aligned}$$



Proposição 5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto \mathcal{C}_{n+1} é subconjunto de \mathcal{C}_n , ou seja, $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$.

Prova : Seja $x \in \mathcal{C}_{n+1}$ onde

$$\mathcal{C}_{n+1} = \bigcup_{j=0}^{2^{n+1}-1} \left[\frac{a_j}{3^{n+1}}; \frac{a_j+1}{3^{n+1}} \right].$$

Então, existe $k \in \{1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ tal que $x \in \left[\frac{a_k}{3^{n+1}}; \frac{a_k+1}{3^{n+1}} \right]$. Segue dos Lemas 3 e 4 que para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_j}{3^n} = \frac{3a_j}{3^{n+1}} \stackrel{\text{Lema 3}}{=} \frac{a_{2j}}{3^{n+1}}$$

e

$$\frac{a_j+1}{3^n} = \frac{3a_j+3}{3^{n+1}} = \frac{3a_j+2+1}{3^{n+1}} \stackrel{\text{Lema 4}}{=} \frac{a_{2j+1}+1}{3^{n+1}}.$$

Como, por hipótese,

$$\frac{a_k}{3^{n+1}} \leq x \leq \frac{a_k+1}{3^{n+1}},$$

- se $k \in \{1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ for um número par, então, existe $i \in \mathbb{N}$, tal que $k = 2i$. Como $0 \leq k \leq 2^{n+1} - 2$, então, $0 \leq i \leq 2^n - 1$.

Assim

$$\frac{a_k}{3^n} = \frac{3a_{2i}}{3^{n+1}} \leq x \leq \frac{a_{2i}+1}{3^{n+1}} = \frac{a_{2i}}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{3a_i}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^n} = \frac{a_i+1}{3^n},$$

portanto,

$$x \in \left[\frac{a_i}{3^n}; \frac{a_i+1}{3^n} \right] \subset \bigcup_{j=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_j}{3^n}; \frac{a_j+1}{3^n} \right] = \mathcal{C}_n.$$

- se $k \in \{1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ for um número ímpar, então, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $k = 2i + 1$. Como $1 \leq k \leq 2^{n+1} - 1$, então, $1 \leq 2i + 1 \leq 2^{n+1} - 1$ e assim, $0 \leq 2i \leq 2^{n+1} - 2$. Então, $0 \leq i \leq \frac{2^{n+1} - 2}{2} = 2^n - 1$, ou seja, $0 \leq i \leq 2^n - 1$. Segue, do Lema 2, que $a_{2i} + 1 < a_{2i+1}$, conseqüentemente, $a_{2i} < a_{2i+1}$. Como $3a_i = a_{2i}$,

$$\frac{a_i}{3^n} = \frac{a_{2i}}{3^{n+1}} < \frac{a_k}{3^{n+1}} \leq x \leq \frac{a_k+1}{3^{n+1}} = \frac{a_{2i+1}+1}{3^{n+1}} = \frac{a_i+1}{3^n},$$

portanto,

$$x \in \left[\frac{a_i}{3^n}, \frac{a_i+1}{3^n} \right] \subset \bigcup_{j=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n} \right] = \mathcal{C}_n.$$

■

Lema 5. Dado $n \in \mathbb{N}$, se $0 \leq k \leq 2^n - 1$, então $\left\{ \frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n} \right\} \subset \mathcal{C}_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Prova : Seja $n \in \mathbb{N}$, e tomemos \mathcal{C}_n que é dado por

$$\mathcal{C}_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n} \right].$$

Se $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ os extremos que correspondem ao k -ésimo intervalo são

$$\frac{a_k}{3^n} \text{ e } \frac{a_k+1}{3^n} \text{ que são elementos de } \mathcal{C}_n.$$

Segue da Proposição 5 que

$$\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n-1} \subset \mathcal{C}_{n-2} \subset \dots.$$

Assim, os extremos esquerdo e direito de cada intervalo são elementos de $\mathcal{C}_{n-1}; \mathcal{C}_{n-2}; \dots; \mathcal{C}_1$, ou seja, os extremos esquerdo e direito de cada intervalo são elementos \mathcal{C}_n para $n \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Vamos mostrar que os extremos esquerdo e direito de cada intervalo são elementos de \mathcal{C}_n para $n \geq n$. Segue do Lema 3 que

$$\frac{a_k}{3^n} = \frac{a_{2k}}{3^{n+1}} = \frac{a_{4k}}{3^{n+2}} = \frac{a_{8k}}{3^{n+3}} = \dots.$$

Como $0 \leq k < 2^m$, então $0 \leq 2k < 2^{m+1}$. Assim, $0 \leq 4k < 2^{m+2}$, então $0 \leq 8k < 2^{m+3}$ e assim sucessivamente. Portanto, $\frac{a_k}{3^n}$ é um extremo para $\mathcal{C}_{n+1}; \mathcal{C}_{n+2}; \mathcal{C}_{n+3} \dots$.

Para finalizar, segue do Lema 4 que

$$\frac{a_k+1}{3^n} = \frac{a_{2k+1}+1}{3^{n+1}} = \frac{a_{2(2k+1)+1}+1}{3^{n+2}} = \frac{a_{2(2(2k+1)+1)+1}+1}{3^{n+3}} = \dots.$$

Como $0 \leq k \leq 2^n - 1$, então $1 \leq 2k+1 \leq 2^{n+1} - 1$. Daí temos que $1 \leq 2(2k+1)+1 \leq 2^{n+2} - 1$, e assim sucessivamente. Portanto, $\frac{a_k+1}{3^n}$ é um extremo para $\mathcal{C}_{n+1}; \mathcal{C}_{n+2}; \mathcal{C}_{n+3} \dots$.

■

Vamos mostrar agora que o conjunto de Cantor não é um conjunto discreto.

Proposição 6. Seja \mathcal{C} o conjunto da Definição 13. Dado $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathcal{C}$, existe $y \in \mathcal{C}$, $y \neq x$ tal que $|x - y| < \varepsilon$.

Prova : Seja $\varepsilon > 0$. Como $\frac{1}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^\ell} < \varepsilon$ se $n \geq \ell$ (ver Exemplo 5). Por hipótese, $x \in \mathcal{C}$, então $x \in \mathcal{C}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Em particular $x \in \mathcal{C}_\ell$. Por outro lado, existe $k \in \{1, 2, \dots, 2^\ell - 1\}$ tal que

$$x \in \left[\frac{a_k}{3^\ell}, \frac{a_k + 1}{3^\ell} \right],$$

agora, segue do Lema 5, que $\frac{a_k}{3^\ell} \in \mathcal{C}$ e $\frac{a_k + 1}{3^\ell} \in \mathcal{C}$. Tomamos $x = \frac{a_k}{3^\ell}$ e $y = \frac{a_k + 1}{3^\ell}$ e vemos que $y \neq x$. Então,

$$|x - y| < \left| \frac{a_k}{3^\ell} - \frac{a_k + 1}{3^\ell} \right| = \frac{1}{3^\ell} < \varepsilon.$$

■

A Proposição 6 mostra que cada elemento x_0 do conjunto de Cantor é limite de uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \in \mathcal{C}$, $x_n \neq x_0$. Isso mostra que o conjunto de Cantor não contém pontos isolados. O teorema a seguir ilustra como proceder para determinar os termos da sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, o que consiste em expressar cada elemento do conjunto de Cantor na sua base ternária.

Observação 7. (ver (COORNAERT, 2015a) Cap. 2) Também a prova do Lema 6 ilustra que se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que o intervalo $J_k \subset [0; 1] \cap \mathcal{C}_k$ tenha comprimento $r > 0$, podemos usar o exemplo 5 e tomar $\ell \in \mathbb{N}$ não nulo tal que $0 < \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^\ell} < r$, se $n \geq \ell > k$. Isso significa que após a ℓ -ésima interação na formação do conjunto \mathcal{C} existirá um intervalo $J_n \subset J_k$ que será removido. Portanto, o intervalo J_k não pode ser subconjunto do conjunto de Cantor.

Segue da construção analítica, acima, que o conjunto de Cantor \mathcal{C} é um subconjunto de uma união contável de subconjuntos fechados e contidos no intervalo $[0; 1]$.

Teorema 3. Um número real x é elemento de \mathcal{C} da Definição 13 se e somente se existe uma sequência $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2\}$ com $f(n) = e_n$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{3^n} \quad (3.8)$$

Prova : Se $x \in \mathcal{C}$, então, $x \in \mathcal{C}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Faremos uma construção geral de números $e_n^{(m)}$ com $m \in \mathbb{N}$ e $0 \leq n \leq m$. Dado $m \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathcal{C}$, existe $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\}$ tal que

$$x \in \left[\frac{a_k}{3^m}, \frac{a_k + 1}{3^m} \right],$$

e a expansão binária de k é dada por

$$k = b_0 2^0 + b_1 2^1 + b_2 2^2 + \cdots + b_r 2^r \text{ com } b_r = 1.$$

Como

$$2^r = b_r 2^r \leq b_r 2^r + \cdots + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0 = k$$

e $k \leq 2^m - 1$, temos

$$2^r < 2^m - 1 < 2^m.$$

Então, $r < m$. Completando com zeros em lugar de alguns b_i , se necessário, teremos

$$k = b_0 2^0 + b_1 2^1 + b_2 2^2 + \cdots + b_{m-1} 2^{m-1}.$$

Segue da Observação 5, que a_k é dado por

$$a_k = 2b_0 3^0 + 2b_1 3^1 + 2b_2 3^2 + \cdots + 2b_{m-1} 3^{m-1}.$$

Assim,

$$\frac{a_k}{3^m} = \frac{2b_0}{3^m} + \frac{2b_1}{3^{m-1}} + \frac{2b_2}{3^{m-2}} + \cdots + \frac{2b_{m-1}}{3}. \quad (3.9)$$

Definindo

$$e_m^{(m)} = 2b_0 + e_{m-1}^{(m)} = 2b_1 + e_{m-2}^{(m)} = 2b_2 + \cdots + e_1^{(m)} = 2b_{m-1},$$

teremos $e_n^{(m)}$ definidos para $n \in \{1, 2, \dots, m\}$. Os valores de $e_n^{(m)}$, que acabamos de definir, dependem de x , m e n . Mas vamos mostrar que $e_n^{(m)}$ não depende de m .

Segue, do Teorema 2, que a construção analítica e a geométrica do conjunto \mathcal{C} são equivalentes. Então,

$$\mathcal{C}_{n+1} \cap \left[\frac{a_k}{3^m}; \frac{a_k + 1}{3^m} \right] = \left[\frac{a_{2k}}{3^{m+1}}; \frac{a_{2k} + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2k+1}}{3^{m+1}}; \frac{a_{2k+1} + 1}{3^{m+1}} \right]$$

$$\text{Então } x \in \left[\frac{a_{2k}}{3^{m+1}}; \frac{a_{2k} + 1}{3^{m+1}} \right] \text{ ou } x \in \left[\frac{a_{2k+1}}{3^{m+1}}; \frac{a_{2k+1} + 1}{3^{m+1}} \right].$$

- Se $x \in \left[\frac{a_{2k}}{3^{m+1}} ; \frac{a_{2k+1}}{3^{m+1}} \right]$, segue, do Lema 3, que

$$a_{2k} = 2b_03^1 + 2b_13^2 + 2b_23^3 + \cdots + 2b_{m-1}3^m,$$

e portanto,

$$e_m^{(m+1)} = 2b_0, e_{m-1}^{(m+1)} = 2b_1, e_{m-2}^{(m+1)} = 2b_2, e_{m-3}^{(m+1)} = 2b_3, \cdots, e_1^{(m+1)} = 2b_{m-1}.$$

é fácil ver que

$$e_m^{(m+1)} = e_m^{(m)}, e_{m-1}^{(m+1)} = e_{m-1}^{(m)}, \cdots, e_1^{(m+1)} = e_1^{(m)}.$$

- Se $x \in \left[\frac{a_{2k+1}}{3^{m+1}} ; \frac{a_{2k+2}}{3^{m+1}} \right]$, segue, do Lema 4, que

$$a_{2k+1} = 2.3^0 + 2b_0.3^1 + 2b_1.3^2 + \cdots + 2b_{m-1}3^m,$$

e, portanto,

$$e_{m+1}^{(m+1)} = 2, e_m^{(m+1)} = 2b_0, e_{m-1}^{(m+1)} = 2b_1, e_{m-2}^{(m+1)} = 2b_2, \cdots, e_1^{(m+1)} = 2b_{m-1}.$$

Logo, é fácil ver que

$$e_m^{(m+1)} = e_m^{(m)}, e_{m-1}^{(m+1)} = e_{m-1}^{(m)}, \cdots, e_1^{(m+1)} = e_1^{(m)}.$$

Assim, $e_n^{(m+1)} = e_n^{(m)}$ para todo $n \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Analogamente, podemos mostrar que $e_n^{(m+3)} = e_n^{(m+2)} = e_n^{(m+1)} = \cdots$ para todo $n \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

Agora, vamos provar que

$$0 < x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{3^n} < \varepsilon \text{ com } \varepsilon \text{ positivo e arbitrário.}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\frac{1}{3^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{3^m} \leq \frac{1}{3^\ell} < \varepsilon$ para todo $m > \ell$ (ver Exemplo 5). Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \ell$. Observamos que $\frac{e_n}{3^n} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$0 \leq x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{3^n}.$$

Vamos provar que

$$x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{3^n} < \varepsilon.$$

Dado $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^m - 1\}$ e $x \in \left[\frac{a_k}{3^m}; \frac{a_k + 1}{3^m}\right]$ segue de (3.9), que

$$x - \sum_{n=1}^m \frac{e_n}{3^n} = x - \sum_{n=1}^m \frac{e_n^{(m)}}{3^n} < x - \frac{a_k}{3^m} \leq \frac{1}{3^m} \leq \frac{1}{3^\ell} < \varepsilon.$$

Recíproca : Suponhamos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{3^n}$$

com $e_n \in \{0, 2\}$, vamos provar que $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{C}_m$. Segue da denificação de interceção de conjuntos que é suficiente provar que $x \in \mathcal{C}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ ou equivalentemente, existe $j \in \{1, 2, 3, \dots, 2^m - 1\}$ tal que

$$x \in \left[\frac{a_j}{3^m}; \frac{a_j + 1}{3^m}\right] \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, vamos supor que a expansão binária de j é dada por

$$b_0 = \frac{e_m}{2}; \quad b_1 = \frac{e_{m-1}}{2}; \quad \dots; \quad b_{m-1} = \frac{e_1}{2}.$$

Como $e_m \in \{0, 2\}$, então $b_i \in \{0, 1\}$ para $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Vamos provar que se

$$j = b_0 2^0 + b_1 2^1 + \dots + b_{m-1} 2^{m-1}, \text{ então } j \in \{1, 2, 3, \dots, 2^m - 1\}.$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $e_n \leq 2$ temos

$$b_n \cdot 2^n < 2^n \text{ para todo } n \in \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Então, se

$$j = b_0 2^0 + b_1 2^1 + \dots + b_{m-1} 2^{m-1},$$

teremos

$$b_0 2^0 + b_1 2^1 + \dots + b_{m-1} 2^{m-1} \leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{m-1} = 2^m - 1,$$

portanto, $j \in \{1, 2, 3, \dots, 2^m - 1\}$.

- Assim,

$$\frac{a_j}{3^m} = \frac{2b_0 3^0 + 2b_1 3^1 + \dots + 2b_{m-1} 3^{m-1}}{3^m} = \frac{e_m}{3^m} + \frac{e_{m-1}}{3^{m-1}} + \dots + \frac{e_1}{3} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{3^n} = x.$$

- Por outro lado,

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{3^n} < \frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{3^2} + \cdots + \frac{e_m}{3^m} + \frac{2}{3^{m+1}} + \frac{2}{3^{m+2}} + \cdots \\
&= \frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{3^2} + \cdots + \frac{e_m}{3^m} + \frac{2}{3^{m+1}} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} \cdots \right] \\
&= \frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{3^2} + \cdots + \frac{e_m}{3^m} + \frac{2}{3^{m+1}} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{3^\ell} \right] \\
&= \frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{3^2} + \cdots + \frac{e_m}{3^m} + \frac{2}{3^{m+1}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{3^2} + \cdots + \frac{e_m}{3^m} + \frac{1}{3^m} = \frac{a_j + 1}{3^m},
\end{aligned}$$

então, $\frac{a_j}{3^m} \leq x \leq \frac{a_j + 1}{3^m}$ e

$$x \in \left[\frac{a_i}{3^m}, \frac{a_i + 1}{3^m} \right] \subset \bigcup_{i=0}^{2^m - 1} \left[\frac{a_i}{3^m}, \frac{a_i + 1}{3^m} \right] = \mathcal{C}_m.$$

Portanto, $x \in \mathcal{C}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. ■

Uma consequência importante do Teorema 3 é que, o conjunto de Cantor contém todos os seus pontos limites (ver Definição 6). No Corolário a seguir, apresentamos um prova deste resultado usando a diagonalização de Cantor.

Corolário 1. Dada $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que $x_p \in \mathcal{C}$ e $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} x_0$. Então, $x_0 \in \mathcal{C}$.

Prova: Como para cada $p \in \mathbb{N}$, $x_p \in \mathcal{C}$, segue, do Teorema 3, que

$$x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n(p)}{3^n}. \quad (3.10)$$

Para cada $p \in \mathbb{N}$, seja $\{s_n(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência das somas parciais da série (3.10) (ver (SHILOV, 1996) seção 6.4). Segue do Teorema 6.42 em (SHILOV, 1996), que $\{s_n(p)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_p$. Então, aplicando o Teorema 3 para todo $p \in \mathbb{N}$, teremos

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc} s_1(1) & s_2(1) & s_3(1) & s_4(1) & s_5(1) & s_6(1) & \cdots & s_n(1) & \cdots & \longrightarrow & x_1 \\ s_1(2) & s_2(2) & s_3(2) & s_4(2) & s_5(2) & s_6(2) & \cdots & s_n(2) & \cdots & \longrightarrow & x_2 \\ s_1(3) & s_2(3) & s_3(3) & s_4(3) & s_5(3) & s_6(3) & \cdots & s_n(3) & \cdots & \longrightarrow & x_3 \\ s_1(4) & s_2(4) & s_3(4) & s_4(4) & s_5(4) & s_6(4) & \cdots & s_n(4) & \cdots & \longrightarrow & x_4 \\ s_1(5) & s_2(5) & s_3(5) & s_4(5) & s_5(5) & s_6(5) & \cdots & s_n(5) & \cdots & \longrightarrow & x_5 \\ s_1(6) & s_2(6) & s_3(6) & s_4(6) & s_5(6) & s_6(6) & \cdots & s_n(6) & \cdots & \longrightarrow & x_6 \\ \vdots & \vdots \\ s_1(p) & s_2(p) & s_3(p) & s_4(p) & s_5(p) & s_6(p) & \cdots & s_n(p) & \cdots & \longrightarrow & x_p \\ \vdots & \downarrow \\ & & & & & & & & & & x_0 \end{array} \right]$$

Agora, é fácil ver que cada termo $s_p(p)$ da sequência $\{s_n(p)\}_{n=p \in \mathbb{N}}$, aparece na diagonal da matriz acima. Cada um destes termos podem ser rearranjados se necessário, para tornar-se soma parcial de uma série dada no Teorema 3, sequência $\{s_p(p)\}_{p \in \mathbb{N}}$ formada com os possíveis rearranjos é convergente e $\{s_p(p)\}_{p \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Portanto, segue, do Teorema 3 que $x_0 \in \mathcal{C}$. A ideia dessa prova segue o método de prova que pode ser encontrado em (CANTOR, 1965) pp23.

■

Observação 8. O Corolário 1 mostra que o conjunto \mathcal{C} dado na Definição 13 é fechado. Isso também pode ser provado usando a Proposição 5, uma vez que para cada $n \in \mathbb{N}$ a inclusão $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$ produz sequências de intervalos encaixantes. Esses intervalos são todos fechados. O conjunto \mathcal{C} é a interseção de uma sequência de intervalos fechados encaixantes (ver Proposição 5). Como \mathcal{C} é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$, ele é um conjunto limitado, portanto compacto.

Definição 16. Um subconjunto \mathcal{G} de um espaço métrico (M, d) , é um subconjunto magro se $\text{Int}(\mathcal{G}) = \emptyset$.

Segue da Definição 13 que \mathcal{C} é interseção enumerável de conjuntos fechados. Além disso, segue da Obsevação 7 que o conjunto \mathcal{C} não pode conter um intervalo aberto. Isso implica que $\text{int}(\mathcal{C}) = \emptyset$. Portanto, \mathcal{C} é um conjunto magro.

Observação 9. Dado (\mathbb{X}, d) um espaço métrico, $A \subset B \subset \mathbb{X}$. Então, a dimensão topológica de A é menor ou igual à dimensão topológica de B , $\text{Dim}_T(B) \in \{-1\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Se em (\mathbb{R}, d) , a dimensão topológica do intervalo $[a, b]$ com $a \neq b$ é um. A prova destas propriedades pode ser encontrada em (COORNAERT, 2015b). Como o conjunto de Cantor é magro, ele não contém intervalos e, assim, a dimensão topológica do conjunto de Cantor $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ é zero. Então, o conjunto de Cantor é de primeira categoria (ver (ENGELKING, 1978)).

Um conjunto com uma quantidade infinita de elementos que não podem ser dispostos em uma correspondência *um a um* com o conjunto dos números naturais é denominado conjunto não

contável ou não enumerável. Essa denominação foi dada por Cantor em 1874. Cantor também mostrou que o conjunto dos *números transcendent*es, conjunto dos números que não podem ser raízes de um polinômio com coeficientes racionais, é um conjunto não enumerável (ver (CANTOR, 1965)).

Lema 6. O conjunto de Cantor \mathcal{C} que é dado pela Definição 13 não é enumerável.

Prova : Suponhamos que existe um conjunto $\mathcal{H} = \{x^1, x^2, x^3, \dots, x^i, \dots\} = \mathcal{C}$ que é dado pela Definição 13. Segue do Teorema 3 que existe uma sequência $\{d_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $d_k^i \in \{0, 2\}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$x^i = 0, d_1^i d_2^i d_3^i d_4^i d_5^i \dots \quad (3.11)$$

ou seja

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = 0, d_1^1 d_2^1 d_3^1 d_4^1 d_5^1 \dots d_k^1 \dots \\ x^2 = 0, d_1^2 d_2^2 d_3^2 d_4^2 d_5^2 \dots d_k^2 \dots \\ x^3 = 0, d_1^3 d_2^3 d_3^3 d_4^3 d_5^3 \dots d_k^3 \dots \\ x^4 = 0, d_1^4 d_2^4 d_3^4 d_4^4 d_5^4 \dots d_k^4 \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x^i = 0, d_1^i d_2^i d_3^i d_4^i d_5^i \dots d_k^i \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array} \right.$$

Agora, definindo a sequência $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $d_k \in \{0, 2\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$d_k = \begin{cases} = 0 & \text{se } d_k^{i=k} = 2, \\ = 2 & \text{se } d_k^{i=k} = 0. \end{cases}$$

Se $x^* = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots$, como para cada $k \in \mathbb{N}$, $d_k \neq d_k^k$, x^* não aparece na lista (3.11). Isto implica que $x^* \notin \mathcal{H}$. Por outro lado, segue da Definição 14 que

$$x^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{3^k}. \quad (3.12)$$

Agora, segue do Teorema 3 que $x^* \in \mathcal{C}$. Portanto, o conjunto \mathcal{C} dado pela Definição 13 é diferente de \mathcal{H} e, por isso, não pode ser enumerável. A ideia dessa prova segue o método de prova que pode ser encontrado em (CANTOR, 1965) pp23.

■

Apresentamos agora uma outra argumentação que nos faz concluir que o conjunto de Cantor é compacto e tem interior vazio.

Lema 7. O conjunto \mathcal{C} é compacto e tem interior vazio.

Prova : ((COORNAERT, 2015a) p28) Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto \mathcal{C}_n pelo Teorema 2 é união disjunta de 2^n intervalos fechados de comprimento de $[0; 1]$. Então, \mathcal{C}_n compacto. Se I for um intervalo de \mathcal{C} , como todo intervalo é conexo, I é subconjunto de algum dos 2^k intervalos fechados que compõem \mathcal{C}_k . Isso implica que existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $I \subset \mathcal{C}_k$. Segue, da Proposição 3, que o comprimento de I é menor que $\frac{1}{3^k}$. Como $\frac{1}{3^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, o comprimento de I é zero. Segue, da Definição 13 e da 3.8, respectivamente, que se

$$x \in \mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n \text{ então } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{3^i}$$

com $e_i \in \{0, 2\}$. Verificamos, facilmente, que para cada $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{C}_n é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ que consiste de todos os números que são reais, triádico (expansão ternária) onde não aparecem o dígito 1 como j -ésimo dígito para $j \leq n$, e \mathcal{C}_n não contém nenhum intervalo de comprimento 3^{-n} . Isso mostra que \mathcal{C} não contém nenhum intervalo, ou seja $\text{Int}(\mathcal{C}_n) = \emptyset$ (ver (ENGELKING, 1978) p11).

■

Nosso foco agora é a medida *Fractal* de conjuntos.

3.2 Medida de Hausdorff

Definição 17. Dado um subconjunto U , não vazio de \mathbb{R}^n , definimos o diâmetro de U como

$$|U| = \sup\{\text{dist}(x, y), \text{ para todo } x, y \in U\},$$

Como exemplo, podemos ver facilmente que

$$|[0, 1]| = 1, |\mathbb{Q} \cap [0, 1]| = 1, |\mathbb{Q} \cap (0, 1)| = 1 \text{ e } |(2, 3] \cup [4, 7)| = 5.$$

Se $i \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ e $A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ com $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada $i \in \mathcal{I}$, dizemos que $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ é uma δ -cobertura de A .

Definição 18. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e s um número real não negativo. Para cada $\delta > 0$ definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, \text{ para } \{U_i\}_{i \in \mathcal{I}} \text{ é } \delta\text{-cobertura de } A \right\},$$

e $d_H(A) = \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$ é a medida de Hausdorff do conjunto A . Se existir um valor $s_0 > 0$, tal que o limite é um número real positivo, então s_0 é a dimensão fractal ou a dimensão de Hausdorff do conjunto A (ver (EDGAR, 2000; FALCONER, 1985) $p-7$).

Definição 19. Chama-se **Partição** de $[a, b]$ a qualquer conjunto $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ cujos elementos $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ e $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$. Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Denomina-se *tamanho* de P_n , o maior valor Δx_i entre todos os possíveis, e denota-se o tamanho de P_n por $\|P_n\|$.

Em particular se

$$P = \left\{ x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, x_{(k-1)} = a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n}, x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{n} = b \right\}, \text{ então,}$$

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k] \quad (3.13)$$

Exemplo 12. Agora aplicaremos a definição de medida de Hausdorff para $A = [a, b]$. Veja que se $U_k = [x_{k-1}, x_k]$, $|U_k| = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Temos em (3.13), uma cobertura finita do intervalo $[a, b]$. Mas, temos interesse em uma cobertura com uma quantidade infinita de conjuntos, por esta razão consideremos a família $C = \{U_k\}_{k=0}^{\infty}$, onde $U_k = \emptyset$ para $k > n$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s = \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \right)^s = \sum_{k=1}^n (b-a)^s \left(\frac{1}{n} \right)^s = \sum_{k=1}^n (b-a)^s \frac{1}{n^s} = (b-a)^s \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^n 1 = (b-a)^s \frac{1}{n^{(s-1)}}$$

Mas, calcular o ínfimo na definição de medida de Hausdorff é equivalente a calcular o limite.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b-a)^s \frac{1}{n^{(s-1)}} = (b-a)^s \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{(s-1)}} \begin{cases} \infty & \text{se } s < 1, \\ b-a & \text{se } s = 1 \\ 0 & \text{se } s > 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Se $0 < \delta \leq \frac{1}{n}$, e $|U_i| = (b-a)\delta < (b-a)\frac{1}{n}$, temos

$$\mathcal{H}_\delta^s([a, b]) = \inf_\delta \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, \text{ para } \{U_i\}_{i \in \mathcal{I}} \text{ é } \delta\text{-cobertura de } [a, b] \right\},$$

e calcular este infimo é equivalente a calcular o limite em (3.14).

Se $A = [a, b]$ e s um número real, para cada $\delta > 0$ temos que $d_H(A) = b - a$ que é a medida de Hausdorff do conjunto A . Como existe o valor $s_0 = 1$, tal que o limite é um número real positivo, então s_0 é a dimensão fractal ou a dimensão de Hausdorff do conjunto A .

Exemplo 13. Dado $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, então

$$d_H(X) = \mathcal{H}^s(X) = \begin{cases} \infty & \text{se } s < 1, \\ 1 & \text{se } s = 1, \\ 0 & \text{se } s > 1. \end{cases}$$

E assim, a dimensão fractal de X é $s_0 = \mathcal{D}im(A) \in \mathbb{R}$.

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência $\{U_k\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ onde $U_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ cobre o conjunto X . Vemos que $0 < |U_k| \leq \frac{1}{n} = \delta$, $X \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_k$ e $U_k = \emptyset$ para $k > n$. Então

$$\mathcal{H}_\delta^s(X) = \inf_\delta \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s = \sum_{k=1}^n |U_k|^s = \sum_{k=1}^n \left| \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \right|^s = \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{n} \right|^s = \frac{n}{n^s}.$$

Portanto,

$$d_H(X) = \mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_\delta \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left| \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \right|^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{n} \right|^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^s} = \begin{cases} \infty & \text{se } s < 1, \\ 1 & \text{se } s = 1, \\ 0 & \text{se } s > 1. \end{cases}$$

Ainda, $s_0 = \mathcal{D}im(A) \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 14. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, se X for contável, $dim_H(X) = 0$.

Prova : Seja $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dados $\varepsilon > 0$ e $s > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$, nós escolhemos $0 < \varepsilon_k < \varepsilon$, suficientemente pequeno tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^s \leq \varepsilon.$$

Agora, consideremos a cobertura $\{U_k\}_{i \in \mathcal{I} \subset \mathbb{N}}$ de X onde cada $\{U_k\} = B_d(x_k, \frac{\varepsilon_k}{2})$. Como cada uma destas bolas tem raio $\frac{\varepsilon_k}{2}$, então $|U_k| = |B_d(x_k, \frac{\varepsilon_k}{2})| = \varepsilon_k$. Segue da Definição 18 que

$$\mathcal{H}_{\varepsilon_k}^s(X) = \inf_{\varepsilon_k} \sum_{k=1}^{\infty} |U_i|^s = \inf_{\varepsilon_k} \sum_{k=1}^{\infty} \left| B_d\left(x_k, \frac{\varepsilon_k}{2}\right) \right|^s = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^s \leq \varepsilon$$

$\mathcal{H}_{\varepsilon_k}^s(X) \leq \varepsilon$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Então, $\mathcal{H}^s(X) \leq \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\varepsilon_k}^s(X) < \varepsilon$, para qualquer $\varepsilon > 0$. Como $\delta > 0$ é arbitrário, segue da Definição 18 que $d_H(X) = 0$.

■

DIMENSÃO DE HAUSDORFF

4.1 Dimensão de Hausdorff e Dimensão Fractal

Observamos que uma cobertura de um conjunto pode conter conjuntos fechados, abertos ou conjuntos que não são nem abertos, nem fechados. Geralmente, não é uma tarefa fácil determinar a dimensão de Hausdorff de um conjunto, mas, nós temos um exemplo relativamente simples. Para todo $s > 0$, o limite na Definição 18 é não negativo, mas ele pode ser infinito. Há autores que introduzem a medida de Hausdorff, tal como na Definição 18 e interpretam ela como um indicador da pequenez de um conjunto. O Lema a seguir define a dimensão de Hausdorff.

Lema 8. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e s, t números reais não negativos. Para cada $\delta > 0$ se $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ for como dado na Definição 18 e $0 \leq s < t < \infty$, então $\mathcal{H}^s(A) \geq \mathcal{H}^t(A)$.

Prova Se $\{U_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ uma δ -cobertura de A , então

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(A) &= \inf_{\delta} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, \text{ para } \{U_i\}_{i \in \mathcal{J}} \delta\text{-cobertura de } A \right\} \\ &\geq \inf_{\delta} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t, \text{ para } \{U_i\}_{i \in \mathcal{J}} \delta\text{-cobertura de } A \right\} = \mathcal{H}_\delta^t(A). \end{aligned}$$

A desigualdade resulta do fato que o ínfimo é tomado sobre o mesmo conjunto de δ -coberturas e assumimos que $\delta < 1$. Como a desigualdade não depende de δ ,

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^t(A) = \mathcal{H}^t(A). \quad \blacksquare$$

O Lema 8 implica que para todo A , $\mathcal{H}^s(A)$ é não crescente em s , quando $s \in (0, \infty)$. Além disso, se $s < t$,

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(A) \quad (\text{ver(FALCONER, 1985) p7}).$$

Se $\mathcal{H}_\delta^t(A) > 0$, segue de $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{s-t} = \infty$ e da última desigualdade que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(A) = \infty.$$

Portanto, existe um único valor $s_0 = \mathcal{D}im(A) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{H}^s(A) = \infty \quad \text{se } 0 \leq s \leq s_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^s(A) = 0 \quad \text{se } s_0 \leq s < \infty.$$

Figura 5 – Dimensão de Hausdorff

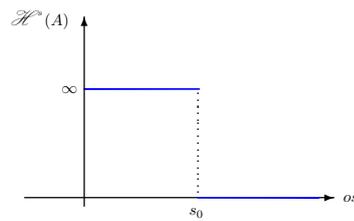


Figura 1

Definição 20. O número real s_0 é denominado *DIMENSÃO DE HAUSDORFF* do conjunto A .

Escolhemos uma prova para o próximo Teorema que dá ênfase aos comprimentos dos intervalos que constituem \mathcal{C}_n e às distâncias entre eles, o que nos faz concluir que para o conjunto de cantor \mathcal{C} , $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) = 1$ exatamente.

Teorema 4. A dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor \mathcal{C} é um, e a dimensão fractal do conjunto de Cantor é $s_0 = \frac{\log 2}{\log 3}$.

- (i) Dado $n \in \mathbb{N}$, pela Proposição 2 que, \mathcal{C}_n dado no Teorema 2, é constituído por 2^n intervalos fechados e que cada \mathcal{C}_{n+1} é obtido de \mathcal{C}_n removendo o intervalo aberto médio de cada um dos intervalos fechados que compõem \mathcal{C}_n e vamos nos referir a cada um deles como intervalo de \mathcal{C}_n . Pela Proposição 3 que cada intervalo fechado de \mathcal{C}_n tem comprimento 3^{-n} e da Proposição 4 segue que a soma dos comprimentos de tais intervalos é $\frac{2^n}{3^n}$. Como a Proposição 5 implica que $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$, então podemos considerar a cobertura $\{U_k\}$, $k \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$ de \mathcal{C}_{n+1} dada pelos 2^n intervalos fechados de comprimento igual a 3^{-n} . Se necessário, a adaptamos a sequência $\{U\}_{k=1}^{2^n}$ à Definição 18 usando $U_k = \emptyset$ para $k > 2^n$. Para qualquer $\delta > 3^{-n}$ e lembrando que $a^p = a^{p \log a}$, teremos

$$\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) = \inf_{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s \leq \sum_{k=1}^{2^n} (3^{-n})^s = 2^n (3^{-n})^s = (2 \cdot 3^{-s})^n = e^{n(\log 2 - s \log 3)}.$$

Então $\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se e somente se $2 \cdot 3^{-s} \leq 1$.

- (ii) Vamos provar que $\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) \geq 1$. Seja $\{U_k\}_{k \in \Omega}$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}$, uma cobertura de intervalos de \mathcal{C} . Então,

$$1 \leq \sum_{k \in \Omega} |U_k|^s.$$

Podemos expandir ligeiramente cada intervalo da cobertura $\{U_k\}_{k \in \Omega}$ de modo que esta cobertura seja uma cobertura aberta. Segue do Lema 7 que \mathcal{C} é compacto. Então podemos extrair da cobertura aberta $\{U_k\}_{k \in \Omega}$ uma cobertura de \mathcal{C} com uma quantidade finita de intervalos U_k ou seja $\mathcal{C} \subset \{U_k\}_{k \in \Omega_0}$ onde Ω_0 é um conjunto finito. Agora, tomamos na coleção finita com $\{U_k\}_{k \in \Omega_0}$ um intervalo \mathcal{I} que contém dois intervalos J e J^* tais que aparecem na formação dos \mathcal{C}_n e que compõem o conjunto \mathcal{C} . Observamos que não é necessário que J e J^* sejam intervalos que aparecem na composição do mesmo \mathcal{C}_n . Suponhamos que J e J^* são os intervalos de maior comprimento entre os possíveis, então segue das Proposições (2-5) que o intervalo \mathcal{I} é composto por J , seguido de \mathcal{H} que é o complemento de \mathcal{I} em \mathcal{C} e o intervalo J^* . Da construção de \mathcal{I} temos

$$|J|, |J^*| \leq |\mathcal{K}| \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(|J| + |J^*|) \leq |\mathcal{K}|.$$

Aqui usamos o Exemplo 3 e concluímos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}|^s &\geq (|J| + |J^*| + |\mathcal{K}|)^s \geq 3^s \left(\frac{1}{2}|J| + \frac{1}{2}|J^*| \right)^s \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}|J| + \frac{1}{2}|J^*| \right)^s \geq 2 \left(\frac{1}{2}|J|^s + \frac{1}{2}|J^*|^s \right). \end{aligned}$$

Então $|\mathcal{J}|^s \geq |J|^s + |J^*|^s$. Como Ω_0 é finito, podemos repetir este procedimento para outros intervalos do tipo \mathcal{J} até alcançar todos os intervalos U_k que têm comprimento 3^{-k} e compõem cobertura finita $\{U_k\}_{k \in \Omega_0}$ de \mathcal{C} . Se $s > 0$ for tal que $1 = 2 \cdot 3^{-s}$, então para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 1 &= 2^n (3^{-n})^s = \sum_{k=1}^{2^n} (3^{-n})^s \leq \sum_{k \in \Omega_0} 2 \left(\frac{1}{2}|J|^s + \frac{1}{2}|J^*|^s \right) \\ &\leq \sum_{k \in \Omega_0} |\mathcal{J}|^s \leq \sum_{k \in \Omega_0} |U_k|^s \leq \sum_{k \in \Omega} |U_k|^s. \end{aligned}$$

Então, se $|U_k| \leq 3^{-n} < \delta$, segue da Definição 18 que $1 \leq \inf \left\{ \sum_{k \in \Omega} |U_k|^s \right\} = \mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C})$.

Como $\delta > 3^{-n}$, $\delta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot 3^{-s})^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 2 \cdot 3^{-s} < 1, \\ 1 & \text{se } 2 \cdot 3^{-s} = 1, \\ \infty & \text{se } 2 \cdot 3^{-s} > 1. \end{cases}$$

Portanto, segue da Definição 18 que $d_H(\mathcal{C}) = 1$ e a dimensão fractal do conjunto de Cantor \mathcal{C} é o valor s tal que $2 \cdot 3^{-s} = 1$ e assim, $s_0 = \mathcal{D}im(\mathcal{C}) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

■

A importância de se fazer uma abordagem sobre o estudo dos fractais como um saber científico, estudando suas características, classificações e principais propriedades, nos faz entender como eles podem ser trabalhados dentro da sala de aula. Desse modo, ao introduzirmos o estudo da Geometria Fractal na sala de aula, os alunos têm, por meio dele, a oportunidade e a capacidade de investigar tópicos da Matemática Tradicional por um novo ângulo, possibilitando aos alunos fazer conexões dentro da própria Matemática entre o mundo geométrico da Natureza e do Homem, explorando a Matemática por caminhos não-analíticos (ver (MANDELBROT, 1977) cap. 9). Fractais são objetos que podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente,

através de processos recursivos apresentando determinadas características que são encontradas em formas da natureza. Essas características são: auto-semelhança, escala, complexidade e dimensão (ver (MANDELBROT, 1977) cap. 6) .

- Auto-semelhança

Uma figura auto-semelhante se apresenta sempre com o mesmo aspecto visual a qualquer escala que seja ampliada ou reduzida, ou seja, a figura se repete infinitamente e qualquer parte da figura se assemelha ao todo.

- Estrutura fina em qualquer escala

A estrutura fina consiste em detalhamento infinito. Sucessivas ampliações de um fractal levam a mais e mais detalhes, indefinidamente.

- Complexidade infinita

O objeto fractal pode ser ampliado tantas vezes quanto se queira, nunca se obtendo uma imagem final. O fractal será a figura limite do seu processo gerador e não qualquer um dos passos finitos presentes nesse mesmo processo.

- Dimensão (ver (MANDELBROT, 1977) cap. 6)

A dimensão de um fractal pode ser um número fracionário. Ela representa o grau de ocupação deste no espaço, estando relacionado com o grau de irregularidade. Sendo assim, dimensão de uma curva fractal é um número que caracteriza a maneira no qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida que a escala diminui. Quanto mais irregular um objeto for, maior será sua dimensão.

A dimensão fractal de um conjunto é um valor que diz o quão distante um conjunto ocupa o espaço métrico em que ele existe.

Os fractais não podem ser medidos apenas por dimensão topológica (dimensão Euclidiana). Segundo Mandelbrot e outros autores, a dimensão Fractal de um conjunto pode ser calculada através dos métodos a seguir, entre outros:

- Dimensão de Homotetia ou de Auto-similaridade;
- Dimensão de Contagem de Caixas ou de Cobertura;
- Dimensão de Hausdorff-Besicovitch (ver (FALCONER, 1985)p7).

Para os fractais que abordaremos a seguir, e considerando que serão trabalhados com alunos do Ensino Médio a dimensão de Homotetia ou de Auto-similaridade é a mais interessante a ser trabalhada, portanto detalharemos o seu cálculo.

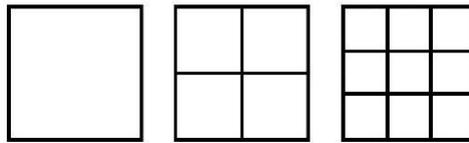
- Retas divididas em $N = 1; 2; 3e4$ partes iguais.

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 1.$$



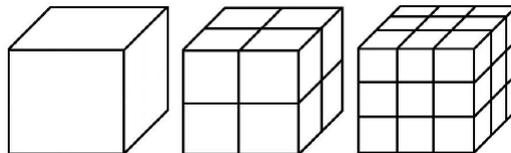
- Quadrados divididos em N^2 partes iguais, com $N = 1;2e3$.

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 2.$$



- Cubos divididos em N^3 partes iguais, com $N = 1;2e3$.

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 3.$$



Assim, a dimensão de um fractal pode ser expressa através da fórmula:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}}$$

onde:

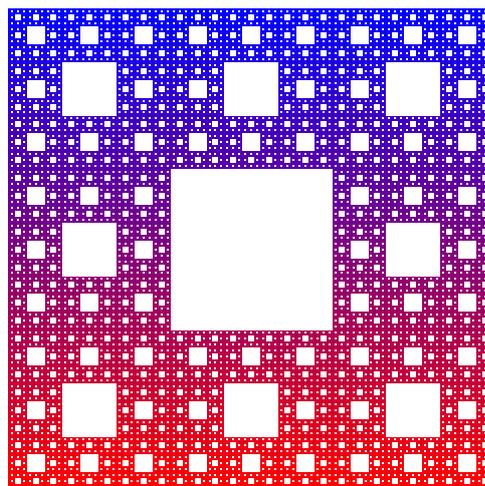
- D é a dimensão;
- N é o número de partes em cada etapa da divisão;
- L é o comprimento inicial (ou lado) do objeto ou figura a que foi dividido em N partes iguais
- U é o comprimento de cada segmento obtido através da divisão.

Segue da Observação 9 e da Definição 13 que o conjunto de Cantor \mathcal{C} é um conjunto fractal. ■

APLICAÇÕES

Fractal em latim *Fractus* palavra cunhada por Mandelbrot para abrigar no conjunto de axiomas e teorias da Matemática pura uma grande classe de objetos que pode ter ou tem em sua formação regras particulares de similaridade. O termo Fractal é usado para descrever conjuntos que têm forma *irregular* ou que exibem propriedades que apresentam dificuldades especiais ao se tentar descrever com a geometria clássica ou mesmo não podem ser descritos apenas por ferramentas de análise geométrica. Entre os exemplos mais eloquentes de *Fractal* destacam-se o tapete de Sierpinski,

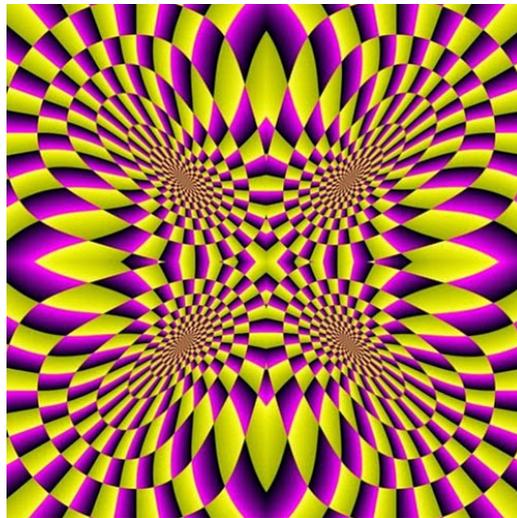
Figura 6 – Tapete de Sierpinski



a curva de von Koch ou *floco de neve* e o conjunto de Cantor que é construído com um método iterativo onde a partir da divisão de um intervalo em três intervalos, dois fechados e um aberto, remove-se o intervalo aberto médio e a recorrência acontece aplicando este procedimento nos

intervalos restantes. Mandelbrot afirma que *teoria fractal* provocou uma revolução no conjunto de ideias tradicionais e que foi capaz de separar a Matemática Clássica do século XIX da Matemática Moderna do século XX. Os Matemáticos da era clássica tinham suas raízes fincadas nas estruturas regulares da geometria de Euclides e das envolventes estruturas contidas na estrutura da dinâmica de Newton. Para Mandelbrot, não seria pretensão afirmar que a Matemática Moderna tem seu início com a teoria dos conjuntos descrita por George Cantor e com a curva de *enchimento de espaços* de Peano. Ao abordar os *Fractals* é importante ter a noção dos tamanhos de conjuntos com um especial modelo de medir, diferente daquelas medidas padrões de comprimento, área e volume.

Figura 7 – Imagem fractal



A teoria dos conjuntos formulada por Cantor (ver (CANTOR, 1965)) permite que os estudos científicos causem a revolução forçada com estruturas descobertas em fenômenos da Natureza e que não encontravam adaptações aceitáveis nem na geometria de Euclides e nem na teoria dinâmica que havia sido apresentada com as ideias de Newton. As novas estruturas descritas pelos Matemáticos modernos chegaram a ser consideradas, por Leopoldo Kronecker, *estruturas patológicas*, até mesmo *galeria de monstros*, etc...(ver (PIERPONT, 1928)pp. 39 – 40). Mas os Matemáticos modernos, que criaram as tais estruturas *monstros*, as consideravam importantes, pois estas estruturas estavam presentes em uma vasta gama de fenômenos naturais que são inerentes à natureza familiar que os rodeavam. Como exemplo, podem ser citadas, a distribuição de estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias que tanto fascinavam e fascinam amadores e especialistas.

A Matemática moderna mostrou que os tais fenômenos podem ser observados com rigor Matemático ao investigar conjuntos interessantes, mas em escalas de diferentes tamanhos (ver (BARNSELY, 2012; MANDELBROT, 1977)). Nas palavras de Mandelbrot, *a geometria Fractal revela um dos capítulos mais austeros contidos nas entrelinhas da Matemática: um mundo de beleza plástica pura e insuspeito* (ver (MANDELBROT, 1977), p4).

Figura 8 – Galáxias



A geometria fractal permite a integração de diversos temas da matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais à econômico-sociais e à tecnologia. Os elementos da Geometria dos Fractais, suas características, propriedades e relações quando incluídas no ensino, permitem desenvolver o espírito experimental nos alunos, levando-os a entender conceitos matemáticos e a entender a geometria de objetos não tradicionais que os auxiliarão nos estudos dos fenômenos naturais. O quadro abaixo destaca algumas das principais relações entre a visão da Geometria Euclidiana e Geometria Fractal.

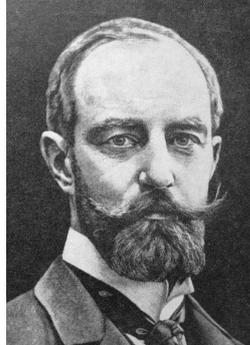
Geometria Euclidiana	Geometria Fractal
Tradicional (mais de 2000 anos)	Moderna (45 anos)
Baseada em tamanho ou escala definida	Sem tamanho ou escala definida
Apropriada a objetos feitos pelo homem	Apropriadas a formas naturais
dimensão discreta: 1, 2 ou 3	dimensão contínua: de zero a três
Descrita por fórmulas e equações	Uso de algoritmos recursivos

5.1 Curva de Koch

Niels Fabian Helge Von Koch nasceu no dia 25 de janeiro de 1870 em Estocolmo e deu seu nome ao famoso fractal conhecido como o "flocos de neve Koch", que foi um dos primeiros fractais de curvas a ser descrito. Estudou na Universidade de Estocolmo a partir de 1888. Publicou diversos livros sobre Sistemas Lineares e Equações Diferenciais. Em 1911, iniciou sua carreira de professor na Universidade onde estudou. Koch ficou famoso através de um artigo por ele publicado em 1904, sobre uma curva sem tangentes, que atualmente é conhecida como curva de

Koch. Ele morreu em 11 de março de 1924, na cidade onde nasceu.

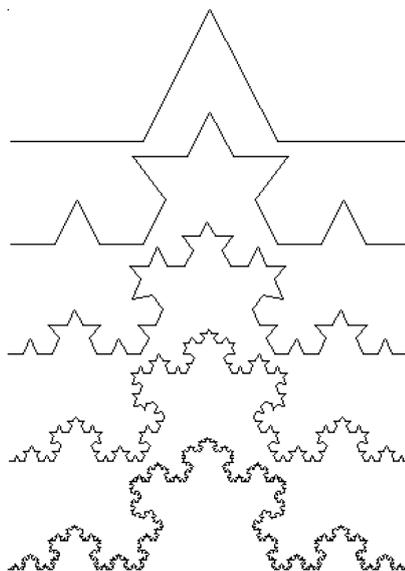
Figura 9 – Niels Fabian Helge Von Koch



5.1.1 Obtenção da curva

A curva será obtida à partir de um segmento. Divida-o em três partes iguais e retire o terço médio. Em seguida, substitua o terço médio retirado por um triângulo equilátero sem a sua base. Com isso teremos quatro novos segmentos com o comprimento de um terço do original. Repete-se esse mesmo procedimento novamente, agora, com os quatro segmentos restantes. Assim, com um processo infinito, vai surgindo a curva de Koch, conforme a figura abaixo.

Figura 10 – Curva de Koch



A tabela a seguir, nos permite analisar o comprimento da curva de Koch.

Nível	0	1	2	3	...	n
Número de segmentos	1	4	16	64	...	4^n
Comprimento de cada segmento	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$...	$\frac{1}{3^n}$
Comprimento total da curva	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{64}{27}$...	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$

5.1.2 Estudo da curva

Analisando a tabela e a figura acima, percebemos que cada um dos itens da tabela pode ser representado através de uma função, onde a variável é o nível de construção, ou seja, o número de iterações. Mostraremos a veracidade destas funções por indução finita.

Provaremos que o comprimento total da curva C_n em um nível $n \geq 0$ é:

$$C_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (5.1)$$

Na primeira iteração, ou seja, para $n = 0$ temos:

$$C_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1 \quad (5.2)$$

Suponhamos por hipótese de indução que o comprimento total de C_k da curva no nível k com $k \geq 0$ é:

$$C_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k. \quad (5.3)$$

Considerando que em cada nível um segmento é substituído por 4 segmentos reduzidos de $\frac{1}{3}$, conclui-se que a cada novo nível a curva possui $\frac{4}{3}$ do comprimento da curva do nível anterior. Sendo assim, a cada nível multiplicamos o comprimento por $\frac{4}{3}$. Logo:

$$C_{k+1} = \frac{4}{3}C_k = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k = \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} \quad (5.4)$$

completando assim a demonstração.

As demais fórmulas podem ser provadas de forma análoga (ver (MANDELBROT, 1977) pp37 – 40).

■

Como já vimos, o fractal é o resultado de um número infinito de iterações, sendo assim, temos o fractal quando $n \rightarrow \infty$. com isso, podemos obter algumas propriedades, sendo elas:

- O número de segmentos tende para infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = \infty$$

- O comprimento de cada segmento tende para zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

- O comprimento total da curva tende para infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Sendo assim, concluímos que, apesar do comprimento de cada segmento tender para zero, o comprimento total da curva tende para infinito.

5.1.3 Dimensão da Curva de Koch

A curva de Koch possui dimensão fractal, que pode ser calculada por auto-similaridade. Analisando a curva, verifica-se que um segmento desta curva é substituído por quatro, reduzidos a $\frac{1}{3}$, sendo assim, aplicando a fórmula temos que a dimensão da curva é:

$$D = -\frac{\log(4)}{\log\frac{1}{3}} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1,261859\dots \quad (5.5)$$

Sendo assim, a dimensão da curva é de aproximadamente 1,26, o que significa que ela não ocupa toda a porção do plano (dimensão 2) que a contém e que é necessário mais do que uma reta (dimensão 1) para contê-la.

5.1.4 Construção da curva de Koch no Geogebra

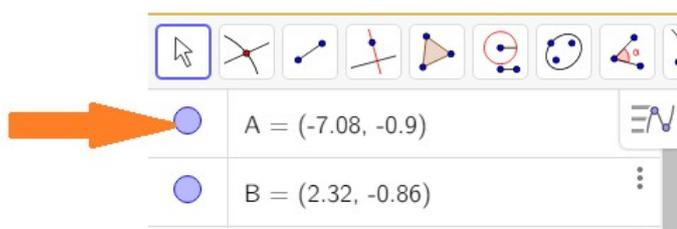
O Geogebra utilizado, foi a versão 6.0.432 cuja tela inicial é a seguinte:

Figura 11 – Construção Geogebra



Esconder objetos: Para esconder os objetos que aparecem durante a construção, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto e depois clicar em Exibir Objeto. Tem também a opção de clicar sobre a bolinha que representa o objeto, na Janela de Álgebra (canto esquerdo). Ao clicar nela o objeto esconderá (não aparecerá na Janela de Visualização), se quiser que o objeto reapareça, basta clicar sobre a bolinha novamente.

Figura 12 – Construção Geogebra



Esconder os nomes dos objetos: Para esconder os nomes de pontos, segmentos, retas e figuras, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto e depois clicar em Exibir Rótulo.

Esconder Eixos e Malha: Ao abrir o Geogebra, a Janela de Visualização aparece com os Eixos e com a Malha, para escondê-los, basta clicar com o botão direito na tela de construção (Janela de visualização) e clicar em Eixos. Faça o mesmo procedimento e clique em Malha.

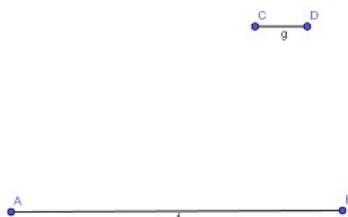
Iniciando a construção da Curva de Koch:

1º) Coloque um segmento AB na tela: Clique no 3º ícone → Clique em Segmento → Clique em dois lugares distintos onde deseja colocar o segmento. Vai formar o segmento $f = AB$.

Obs.: Não faça segmento muito pequeno para facilitar a construção dos fractais que serão feitos dentro deste segmento.

2º) Constua outro segmento CD na parte superior que servirá como unidade de medida. Este não precisa ser grande. Construção da Curva de Koch:

Figura 13 – Construção Geogebra



3º) Agora temos que dividir o segmento AB em três partes iguais:

I. Construa uma reta que passe apenas pelo ponto A:

Clique no 3º ícone → Clique em Reta → Clique no ponto A → Clique em algum lugar, desde que seja diferente de B. Vai formar a reta h, com os pontos A e E.

Observação.: O ponto E será utilizado no final, porém, se preferir pode escondê-lo agora e no final exibi-lo novamente.

II. Construa uma circunferência de qualquer raio sobre a reta h:

Clique no 6º ícone → Clique em Círculo dados Centro e Um de seus Pontos → Clique no ponto A → Clique em algum lugar da reta. Vai formar a circunferência c de centro A e raio AF.

III. Coloque a segunda circunferência de raio igual a primeira, sobre a reta, agora utilize o comando Compasso:

Clique no 6º ícone → Clique em Compasso → Clique no ponto A → Clique no ponto F → Clique no ponto F novamente, para fixar a circunferência. Vai formar a circunferência d de centro F e raio AF.

IV. Marque a intersecção da circunferência d com a reta:

Clique no 2º ícone → Clique em Ponto → Clique sobre a intersecção, vai formar o ponto G.

V. Coloque a terceira circunferência de mesmo raio, sobre a reta:

Clique no 6º ícone → Clique em Compasso → Clique no ponto A → Clique no ponto F → Clique no ponto G para fixar a circunferência. Vai formar a circunferência e de centro em G e raio $FG = AF$.

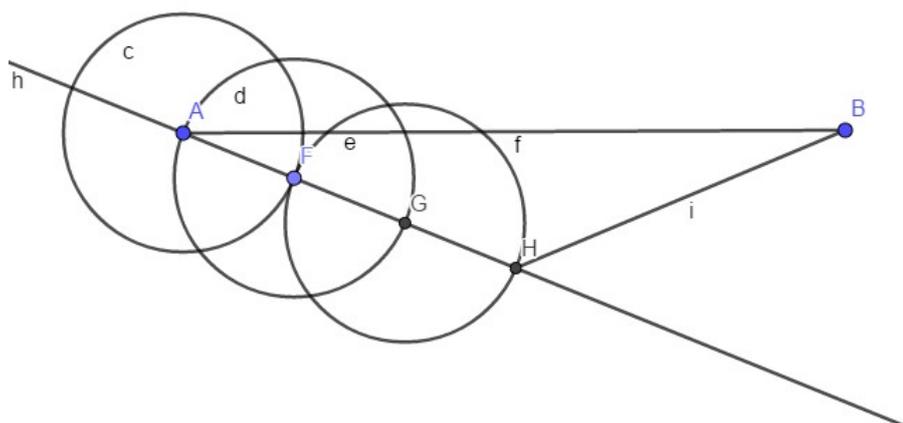
VI. Marque a intersecção da circunferência e com a reta:

Clique no 2º ícone → Clique em Ponto → Clique sobre a intersecção, vai formar o ponto H.

VII. Agora ligue o ponto H com o ponto B:

Clique no 3º ícone → Clique em Segmento → Clique no ponto H → Clique no ponto B. Vai formar o segmento $i = HB$.

Figura 14 – Construção Geogebra



VIII. Esconda as três circunferências c, d e e.

IX. Agora coloque paralelas ao segmento HB, que passam pelos pontos F e G. Clique no 4º ícone → Clique em Reta Paralela → Clique no segmento HB → Clique no ponto G. Faça o mesmo procedimento descrito acima, porém, agora clique no ponto F. Serão formadas as retas paralelas j e k.

X. Marque a intersecção da Paralela formada com o segmento AB: Clique no 2º ícone → Clique em Ponto → Clique sobre a intersecção da primeira paralela com o segmento AB. Faça o mesmo procedimento com a outra paralela. Serão formados os pontos I e J.

Pronto o segmento AB foi dividido em três partes iguais $AJ = JI = IB$

4º) Agora esconda as duas paralelas, a reta h, os pontos F, G e H e os segmentos i (HB) e f (AB).

5º) Coloque segmentos entre AJ e IB:

I. Clique no 3º ícone → Clique em Segmento → Clique no ponto A → Clique no ponto J. II. Clique no 3º ícone → Clique em Segmento → Clique no ponto I → Clique no ponto B.

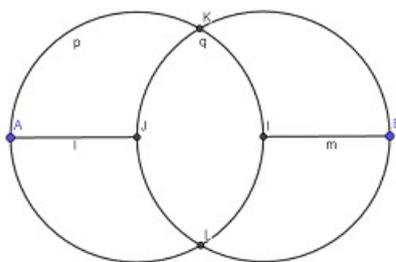
6º) Tem que substituir a parte central por um triângulo equilátero sem um lado e, para isso, desenhe um círculo de centro em J e raio AJ e outro de mesmo raio e centro em I. Marque o ponto de intersecção dessas duas circunferências:

I. Clique no 6º ícone → Clique em Compasso → Clique no ponto A → Clique no ponto J → Clique no ponto J novamente para fixar a circunferência. Vai formar a circunferência p de centro em J e raio AJ.

II. Faça o mesmo procedimento, mas no final clique no ponto I para fixar a circunferência. Vai formar a circunferência q de centro em I e raio $IB = AJ$.

III. Marque as intersecções das duas circunferências: Clique no 2º ícone → Clique em Intersecção de Dois Objetos → Clique sobre a circunferência p → Clique sobre a circunferência q. Formarão os pontos K e L.

Figura 15 – Construção Geogebra

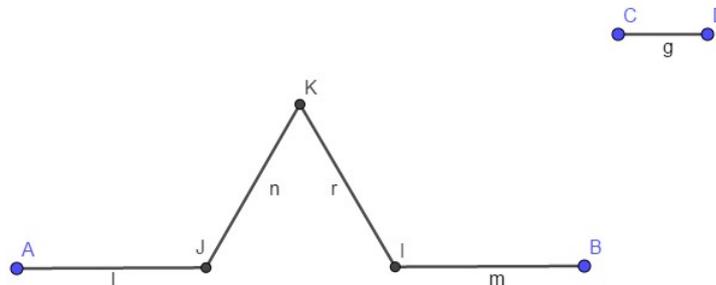


7º) Esconda as duas circunferências e o ponto L que não serão utilizados.

8º) Ligue com segmento JK e KI:

- I. Clique no 3º ícone → Clique em Segmento → Clique no ponto J → Clique no ponto K.
 K. II. Clique no 3º ícone → Clique em Segmento → Clique no ponto K → Clique no ponto I.

Figura 16 – Construção Geogebra

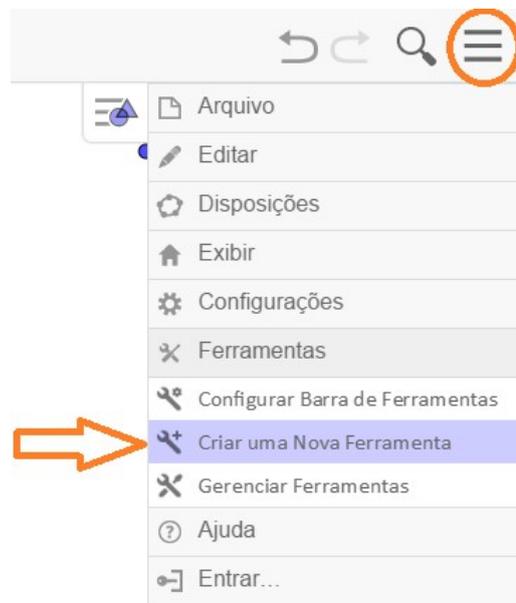


Agora precisamos repetir entre cada segmento (AJ, JK, KI, etc), o mesmo processo realizado anteriormente, esse processo é chamado iteração e, através dele, obteremos a Curva de Koch. Mas fazer esta repetição em cada segmento é muito trabalhoso, contudo no Geogebra tem como criar uma ferramenta para repetir os procedimentos já realizados, por isso a utilização deste software é uma grande vantagem.

Para isso:

- 9º) Clique no ícone Menu (canto superior direito) → Clique em Ferramentas → Clique em Criar uma Nova Ferramenta

Figura 17 – Construção Geogebra



Vai abrir uma janela com abas que contêm as seguintes informações: Objetos finais, Objetos iniciais, Nome e ícone.

- I. Objetos finais: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros. No nosso caso são os pontos J, K, I e também os segmentos l, segmento n, segmento r, segmento m.

Para inseri-los na construção: Clique sobre esses objetos com o botão esquerdo do mouse. Obs.: Se a janela estiver em cima da construção, basta arrastá-la para o canto da tela com o mouse.

II. Objetos iniciais: são objetos que foram informados inicialmente dos quais dependem toda a construção. No nosso exemplo, correspondem aos pontos A, B, C, D, e E (se tiver escondido o ponto E, basta clicar sobre a bolinha que o representa na Janela de Álgebra no canto esquerdo). Obs.: Alguns desses objetos já aparecem automaticamente, então basta clicar sobre os que faltam.

III. Nome e ícone: é o nome dado ao novo ícone conforme desejado, podemos colocar “Curva de Koch”. Em Nome da ferramenta escreva: Curva de Koch. Após a nomeação dessa ferramenta, clique em concluído. Irá aparecer um novo ícone com a ferramenta construída na barra de ferramentas (parte superior) do Geogebra.

Figura 18 – Construção Geogebra



10º) Utilizar a nova ferramenta (Curva de Koch):

Formaremos novos triângulos sem a base entre cada segmento, para tirar a base teremos que escondê-la. Obs.: Em cada nova construção aparecerão na tela muitas letras de pontos e segmentos e o desenho estará um pouco menor, então para não confundir, utilize a Janela de Álgebra para esconder os objetos, clicando sobre a bolinha que o representa, ao invés de clicar sobre o objeto.

I. Vamos fazer sobre o segmento l (AJ): Clique na nova ferramenta Curva de Koch → Clique nos pontos A, J, C, D, E. Ao construir essa nova parte da Curva, teremos que esconder o segmento l para eliminar o segmento central

II. Vamos repetir esse processo novamente, mas agora no segmento n: Clique na nova ferramenta Curva de Koch → Clique nos pontos J, K, C, D, E. Ao construir essa nova parte da Curva, teremos que esconder o segmento n para eliminar o segmento central.

III. Agora sobre o segmento r (KI): Clique na nova ferramenta Curva de Koch → Clique nos pontos K, I, C, D, E. Ao construir essa nova parte da Curva, teremos que esconder o segmento r para eliminar o segmento central.

IV. E agora no segmento m: Clique na nova ferramenta Curva de Koch → Clique nos pontos I, B, C, D, E. Ao construir essa nova parte da Curva, teremos que esconder o segmento m para eliminar o segmento central.

Após estas iterações obteremos a seguinte figura:

Figura 19 – Construção Geogebra

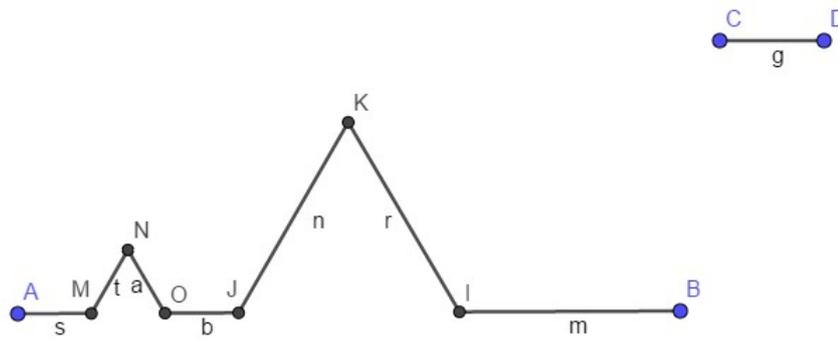
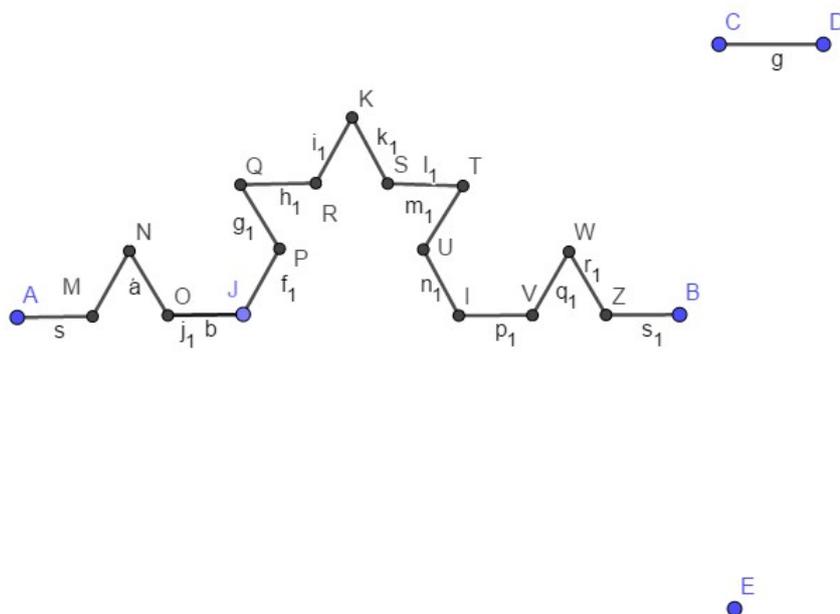


Figura 20 – Construção Geogebra

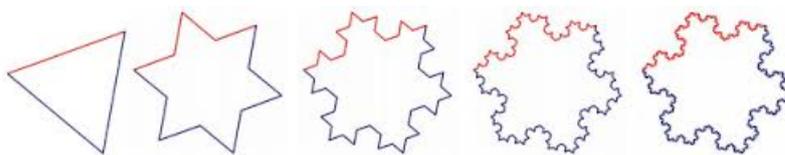


5.2 Floco de Neve de Koch

A curva do floco de neve, cujo nome se deve a semelhança que este possui com as representações geométricas feitas na curva de Koch, é construída a partir de um triângulo equilátero aplicando sucessivamente as seguintes regras:

- divide-se cada lado do triângulo em três segmentos de reta de mesmo comprimento.
- desenha-se um triângulo equilátero tendo como base o segmento do meio.
- remove-se o segmento da base do triângulo construído.

Figura 21 – Floco de neve de Koch

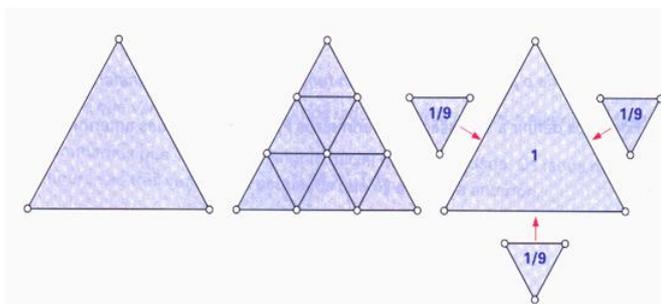


A curva de Koch é o limite para o qual tende esta construção, repetindo os passos referidos, sucessivamente, para cada segmento.

5.2.1 Estudo do Floco de Neve

Vamos calcular a área delimitada pela curva de Koch. Para isso, consideremos inicialmente que o triângulo equilátero tem lado ℓ , assim, sua área é igual a $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$. Na primeira iteração, dividimos o triângulo em nove pequenos triângulos e, assim, temos que o lado de cada pequeno triângulo é igual a $\ell/3$, e cada pequeno triângulo tem uma área igual a $\frac{(\ell/3)^2\sqrt{3}}{4}$, ou seja, $\frac{1}{9} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$, então a área desse pequeno triângulo é $\frac{1}{9}$ da área do anterior. Após n iterações, a área do n -ésimo pequeno triângulo será $\frac{1}{9^n}$ do anterior.

Figura 22 – Área do floco de neve



Após cada iteração depois da primeira, acrescentamos em triângulos, 4 vezes a quantidade da iteração anterior. Como na primeira iteração adicionamos 3 triângulos, teremos que na n -ésima iteração adicionaremos $3 \cdot 4^{n-1}$ triângulos.

Etapa	1	2	3	4	...	n
Número de triângulos	3	12	48	192	...	$3 \cdot 4^{n-1}$

Combinando essas duas informações, temos que a área da figura após $n + 1$ iterações será dada por:

$$A_{n+1} = A_n + \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n} A_0 \quad \text{quando } n \geq 1. \quad (5.6)$$

A fórmula acima nos diz que a área é igual a área da iteração anterior mais a área de uma certa quantidade de triângulos menores expresso pela segunda parcela à direita da igualdade.

Definimos A_0 como sendo a área do triângulo equilátero inicial e :

$$A_1 = \frac{4}{3} A_0 \quad (5.7)$$

Podemos expressar a fórmula de recursão como a seguinte soma:

$$A_{n+1} = \frac{4}{3} A_0 + \sum_{k=2}^n \frac{3 \cdot 4^{k-1}}{9^k} A_0. \quad (5.8)$$

Assim,

$$A_{n+1} = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^n 3 \frac{4^{k-1}}{9^k} \right) A_0 = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^n \frac{9 \cdot 4^{k-1}}{9^k} \right) A_0 \quad (5.9)$$

$$A_{n+1} = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{4^k}{9^k} \right) A_0.$$

Assim, a área do Floco de Neve Koch será o limite de A_{n+1} quando $n \rightarrow \infty$, logo:

$$A_{Koch} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n+1} = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{9^k} \right) A_0. \quad (5.10)$$

Note que o seguinte somatório é a soma dos infinitos termos de um Progressão Geométrica de razão $|q| < 1$, de fato,

$$q = \frac{4}{9} < 1 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{9^k} = \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \dots = \frac{4/9}{1 - 4/9}, \quad (5.11)$$

assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{9^k} = \frac{4}{5}, \quad (5.12)$$

portanto,

$$A_{Koch} = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) A_0 = \frac{8}{5} A_0, \quad (5.13)$$

lembrando que:

$$A_0 = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}, \quad (5.14)$$

então,

$$A_{Koch} = \frac{2\ell^2 \sqrt{3}}{5}. \quad (5.15)$$

Deste modo, o Floco de Neve Koch possui uma área finita.

Agora, vamos calcular o comprimento do floco de neve. Na construção do Floco de Neve Koch vamos nos valer do mesmo processo que já observamos acima na construção da curva de Koch. Tomamos um triângulo equilátero de lado ℓ , assim seu perímetro é igual à $P_0 = 3\ell$. Na primeira iteração, temos uma figura com 12 segmentos iguais de comprimento $\ell/3$, e o perímetro dessa figura será igual à $P_1 = 3 \cdot 4 \frac{\ell}{3} = 4\ell$. Na n -ésima iteração, temos uma figura com $3 \cdot 4^n$ segmentos iguais de comprimento $\frac{\ell}{3^n}$, essa figura tem um perímetro igual a

$$P_n = 3\ell \left(\frac{4}{3}\right)^n. \quad (5.16)$$

Como o floco de neve Koch é obtido quando fazemos essas iterações infinitamente, temos que o seu perímetro será o limite de P_n quando $n \rightarrow \infty$.

$$P_{Koch} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3\ell \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

Logo, o perímetro do Floco de Neve Koch é infinito.

Dessa forma, demonstramos que o Floco de Neve de Koch possui uma característica incomum porque ele delimita uma área finita, porém seu perímetro é infinito.

5.3 O Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski foi um matemático polonês, nasceu em 14 de março de 1882, em Varsóvia e faleceu em 21 de outubro de 1969. Foi professor na Polônia, nas cidades de Lvov e Varsóvia. Seus estudos de pesquisas tiveram predominância na Teoria dos Números e Teoria dos Conjuntos. Publicou 724 artigos e 50 livros. Sierpinski apresentou, em 1916, um dos monstros matemáticos famosos, o triângulo de Sierpinski.

Figura 23 – Waclaw Sierpinski



Para a construção do triângulo de Sierpinski existem diferentes processos. O mais comum deles é a construção por remoção de triângulos, utilizando um triângulo equilátero como figura inicial. O processo de construção do triângulo de Sierpinski por remoção de triângulos segue os seguintes passos:

- Partirmos de uma superfície delimitada por um triângulo equilátero totalmente preenchido no plano, sobre o qual aplicamos sistemas repetitivos de iterações.
- Marcamos os pontos médios de cada um dos três segmentos do triângulo, obtendo-se um novo triângulo central de vértices nos pontos médios do triângulo maior.
- Obtermos quatro triângulos congruentes cujo lado é a metade do lado do triângulo original e a área é $\frac{1}{4}$ da área deste triângulo.
- Retiramos o triângulo central, ficando com três novos triângulos equiláteros.
- Repetiremos continuamente o processo em todos os triângulos equiláteros que não forem removidos.

O Triângulo de Sierpinski é o limite do processo recursivo descrito acima.

Figura 24 – Triângulo Sierpinski



5.3.1 Números de triângulos

O número de triângulos que compõem a figura em cada nível de construção pode ser demonstrado por indução finita. Observemos a tabela:

Nível	0	1	2	3	...	k
Número de triângulos	1	3	9	27	...	3^k

Podemos notar que no nível $k \geq 0$ da construção do triângulo de Sierpinski, o número de triângulos, denotado por N_k , é dado por:

$$N_k = 3^k.$$

- No nível inicial, para $k = 0$ temos:

$$N_0 = 3^0 = 1$$

- Por hipótese de indução, assumimos que no nível k o número de triângulos é dado por $N_k = 3^k$.
- Como em cada nível de construção um triângulo dá origem a outros três triângulos, ou seja, de um nível para o outro o número de triângulos é triplicado. Sendo assim:

$$N_{k+1} = 3N_k = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}.$$

completando, assim, a demonstração. ■

Como na construção do triângulo de Sierpinski o número de níveis tende a infinito, o número de triângulos também tende a infinito, sendo assim:

$$N = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 3^k = \infty.$$

Explorar o Triângulo de Sierpinski possibilita ao aluno determinar tanto o perímetro e a área desta figura fractal em cada nível da iteração, como também trabalhar com progressão geométrica e função exponencial.

5.3.2 Perímetro do triângulo

Vamos considerar o perímetro de cada triângulo obtido nas k iterações do triângulo de Sierpinski. Partimos de um triângulo equilátero, apenas por praticidade, de lado ℓ . A cada nível de iteração a medida de cada lado, do novo triângulo equivale a metade do anterior. Observemos a tabela:

Nível	0	1	2	3	...	k
Comprimento do lado	ℓ	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{\ell}{4}$	$\frac{\ell}{8}$...	$\frac{\ell}{2^k}$
Perímetro do triângulo	3ℓ	$\frac{3\ell}{2}$	$\frac{3\ell}{4}$	$\frac{3\ell}{8}$...	$\frac{3\ell}{2^k}$

O perímetro de cada triângulo no nível k é dado por $P_k = \frac{3\ell}{2^k}$. Como já vimos acima, a quantidade de triângulos no nível k é dada por 3^k . Sendo assim, a soma dos perímetros dos triângulos no nível k é:

$$P_k = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^k \ell.$$

O Triângulo de Sierpinski é o limite do processo recursivo descrito para quando k tender a infinito. Sendo assim, a soma dos perímetros dos triângulo é:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{3}{2}\right)^k \ell = \infty.$$

pois $\frac{3}{2} > 1$ e $\ell > 0$ é um número finito fixo. Logo o perímetro aumenta indefinidamente à medida que avançamos nos níveis de construção do triângulo de Sierpinski.

5.3.3 Área do triângulo de Sierpinski

Como já mencionado, é possível iniciar com um triângulo qualquer, mas optou-se pelo triângulo equilátero, de comprimento de lado ℓ . Assim, tem-se que a área do triângulo inicial é:

$$A_0 = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}.$$

No primeiro nível de construção, teremos a área do triângulo inicial dividida em quatro novos triângulos semelhantes. Sendo assim, a área do novo triângulo neste nível será de:

$$A_1 = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{16} = \left(\frac{1}{4}\right) \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} A_0.$$

e ao retirarmos o triângulo central, a área total neste nível é de:

$$A_T = \left(\frac{3}{4}\right) \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}A_0.$$

No nível dois, temos cada um dos triângulos anteriores divididos em quatro novos triângulos. Sendo assim, a área do novo triângulo neste nível será de:

$$A_2 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{64} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{16}A_0.$$

e ao retirarmos o três novos triângulos centrais, a área total neste nível é de:

$$A_T = \frac{3}{4}A_0 - \frac{3}{16}A_0 = \frac{9}{16}A_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0.$$

Nos próximos níveis, repetimos o mesmo processo, a cada um dos novos triângulos equiláteros e, assim iterativamente. Analisemos a tabela abaixo.

Nível	0	1	2	3	4	...	k
Área de cada triângulo	A_0	$\frac{1}{4}A_0$	$\frac{1}{16}A_0$	$\frac{1}{64}A_0$	$\frac{1}{256}A_0$...	$\left(\frac{1}{4}\right)^k A_0$
Área total do triângulo	A_0	$\frac{3}{4}A_0$	$\frac{9}{16}A_0$	$\frac{27}{64}A_0$	$\frac{81}{256}A_0$...	$\left(\frac{3}{4}\right)^k A_0$

Podemos verificar na tabela acima, que a cada nível de iteração o número de triângulos aumenta e o comprimento do lado diminui à medida que o número de iterações cresce. Sendo assim, a área total do triângulo de Sierpinski para quando k tende para o infinito será zero.

$$A_T = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k A_0 = 0. \quad (5.17)$$

pois $\frac{3}{4} < 1$ e $A_0 > 0$ é um número finito fixo.

Concluimos então que a área total de todos os triângulos tende para zero enquanto que o perímetro aumenta indefinidamente.

5.3.4 Dimensão do triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski possui dimensão fractal que pode ser calculada por auto-similaridade. Analisando o triângulo, verifica-se que um triângulo é substituído por quatro novos, reduzidos à metade do comprimento do lado do anterior e retira-se o central ficando assim a

quantidade de triângulo a cada iteração o triplo da anterior. Desta forma, aplicando a fórmula temos que a dimensão do triângulo é:

$$D = -\frac{\log(3)}{\log\frac{1}{2}} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1,58496\dots \quad (5.18)$$

Sendo assim, a dimensão do triângulo é de aproximadamente 1,59, o que significa que ele não ocupa toda a porção do plano (dimensão 2) que o contém e que é necessário mais do que uma reta (dimensão 1) para contê-lo.

5.4 Curvas de Enchimento

Figura 25 – Giuseppe Peano



Giuseppe Peano nasceu em 27 de agosto de 1858 em Cuneo, Sardenha. Estudou matemática na Universidade de Turim, onde foi professor desde 1890 até sua morte, que correu em 20 de abril de 1932. Tornou-se conhecido pelo profundo interesse pela lógica matemática. Os axiomas de Peano, formulados pela primeira vez em 1889 na *Arithmetices principia nova methodo exposita*, representam a mais notável tentativa de reduzir a aritmética comum a puro simbolismo formal. Peano mostrou até que ponto a matemática podia insultar o senso comum quando construiu curvas contínuas que preenchem o plano em 1890. Trata-se de uma curva que passa, pelo menos uma vez, por cada um dos pontos de um quadrado. A descoberta desta curva chocou os matemáticos do século passado, conduzindo a uma crise acerca do conceito de curva. Depois de muito estudo e experiências efetuadas, concluiu-se que a curva de Peano passa por cada um dos pontos do quadrado pelo menos uma vez.

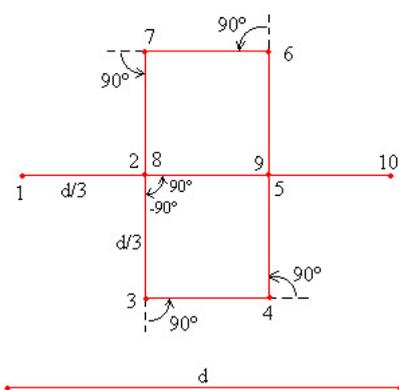
5.5 Construção da Curva de Peano

A curva de Peano é construída por um processo iterativo. Vejamos os passos de construção:

- O processo iterativo inicia-se com um segmento de reta.

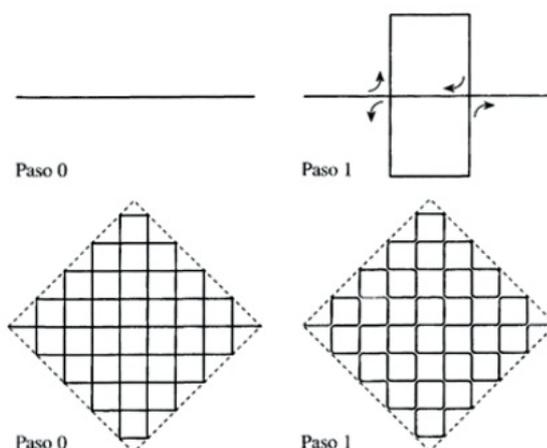
- Divide-se esse segmento em três sub-segmentos iguais.
- Sobre o subsegmentos do meio, constrói-se um retângulo, formando assim, dois quadrados com lado igual a cada um dos sub-segmentos. Obtendo, assim, uma curva geradora com 9 sub-segmentos. Conforme figura abaixo:

Figura 26 – Construção da curva Peano



- Em cada segmento dos nove restantes, repetem-se os passos acima, sucessivamente.
- A curva de Peano, sendo um fractal, só é obtida quando o número de níveis tende para o infinito.

Figura 27 – Curva Peano



5.5.1 Estudo da curva

Analisemos a tabela abaixo para melhor compreensão da curva.

Nível	0	1	2	3	4	...	k
Número de segmentos	1	9	81	729	6561	...	9^k
Comprimento de cada segmento	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$...	$\frac{1}{3^k}$
Comprimento total da curva	1	3	9	27	81	...	3^k

Se aplicarmos o limite quando $k \rightarrow \infty$ podemos notar que o número de segmentos tende para o infinito, ou seja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 9^k = \infty.$$

Embora o comprimento de cada segmento tenda para zero, ou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0,$$

o comprimento total desta curva tende para o infinito, isto é

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3^k = \infty.$$

5.5.2 Dimensão da Curva

Suponhamos que o segmento original tem comprimento $\ell = 1$. Na iteração k , obteremos 9^k segmentos. Os segmentos possuem comprimento $(\frac{1}{3})^k$. Portanto, a dimensão da curva de Peano é:

$$D = -\frac{\log(9)}{\log\frac{1}{3}} = \frac{\log(9)}{\log(3)} = 2 \quad (5.19)$$

Isto quer dizer, que a curva de Peano ao levarmos a construção até uma infinidade de iterações, abrange uma superfície completamente preenchida, ou seja, ela preenche a área do plano na qual é traçada.

5.6 Curva de Hilbert

Brilhante matemático alemão nascido em Königsberg no dia 23 de janeiro de 1862, na Prússia Oriental, hoje cidade de Kaliningrado, Rússia, famoso e renomado professor de geometria euclidiana em Göttingen. Doutor pela Universidade de Königsberg (1884), onde também foi

Figura 28 – David Hilbert



professor (1886 – 1895), depois mudou-se para a Universidade de Gottingen (1895 – 1930), onde deu continuidade à brilhante tradição matemática de Gauss, Dirichlet e Riemann e transformou a universidade em foco permanente de atenção por suas idéias inovadoras nesse campo de estudos. Notável na teoria dos números reais, geometria, topologia, equações diferenciais, cálculo de variações e outros campos, sua consagração definitiva veio com a publicação *Grundlagen der Geometrie* (1899), traduzido em vários idiomas, a apresentada no Congresso Internacional de Matemática de Paris (1900), uma coleção de vinte e três postulados conhecidos como axiomas de Hilbert, reduzindo a geometria a uma série de axiomas e dando uma contribuição crucial para os fundamentos formalísticos da matemática. Divulgou um importante trabalho sobre equações integrais (1909) de grande importância para o desenvolvimento da matemática do século XX, criando a análise funcional. Também desenvolveu o espaço infinito-dimensional, hoje chamado espaço de Hilbert, e contribuiu para o desenvolvimento da teoria cinética dos gases e a teoria da radiação. Foi premiado com o Mittag-Leffler da Swedish Academy (1939) e morreu em Gottingen, Alemanha. A curva de Hilbert foi estudada por ele no ano 1891.

5.6.1 Construção da curva

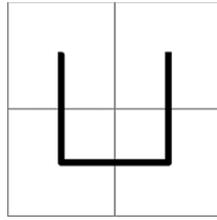
A curva de Hilbert é construída através de um processo recursivo, assim como a curva de Peano, mas com algumas particularidades.

- A curva tem início a partir de um quadrado de lado $\ell > 0$ e a figura geradora consiste em dividir este quadrado inicial em quatro quadrados congruentes, unindo, convenientemente os pontos centrais de cada um destes quadrados. Os pontos da curva são dados pelos segmentos de reta formados pela união destes pontos centrais. Esta é a curva geradora ou a primeira unidade geradora da curva de Hilbert.

No segundo passo dividimos cada quadrado em quatro novos quadrados congruentes e descrevemos a nova curva geradora com seguinte critério:

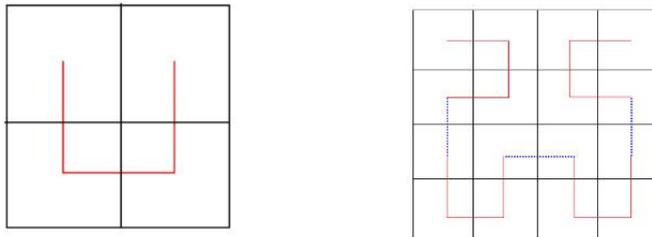
- 1 passo: rotação de 90 graus - sentido anti-horário;

Figura 29 – Geradora



- 2 passo: rotação de 90 graus - sentido horário;
- 3 passo: simetria de reflexão;
- 4 passo: rotação de 90 graus - sentido anti-horário.

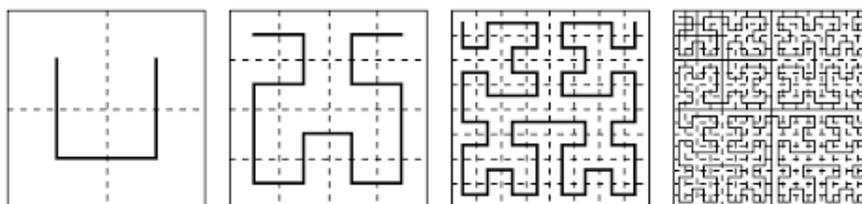
Figura 30 – Construção da curva de Hilbert



Após realizar as construções descritas acima, basta conectarmos as extremidades dos segmentos para obtermos uma nova geradora para o passo seguinte da obtenção da curva de Hilbert, conforme segunda ilustração da figura acima.

Observando a figura abaixo, fica fácil perceber, que os passos sucessivos são construídos utilizando o processor anterior.

Figura 31 – Curva de Hilbert



Observe que, em nossa construção da curva de Hilbert, verificamos que os pontos de início e fim da curva de Hilbert sempre estão posicionados nos cantos superiores esquerdo e direito, respectivamente.

Na tabela abaixo, podemos verificar o estudo da curva em relação ao número de segmentos, comprimento de cada segmento, comprimento total da curva e lado do quadrado auxiliar em cada passo do processo recursivo até o n -ésimo termo.

Nível	1	2	3	4	...	n
Número de segmentos	3	15	63	255	...	$4^n - 1$
Comprimento de cada segmento	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$...	$\frac{1}{2^n}$
Comprimento total da curva	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{63}{4}$	$\frac{255}{8}$...	$\frac{4^n - 1}{2^n}$

Podemos verificar que no n -ésimo passo tem-se 4^n quadrados, sendo que o lado de cada um deles mede $\frac{1}{2^n}$. A curva de Hilbert tem comprimento infinito, mas ela está contida no quadrado de lado ℓ . Como,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 1}{2^n} = \infty,$$

podemos concluir que o comprimento de cada segmento que compõe a curva de Hilbert tem comprimento infinitamente pequeno, por outro lado o comprimento total desta curva de Hilbert tende para infinito.

5.6.2 Dimensão da Curva

Suponhamos que o segmento original tem comprimento ℓ . Na iteração n , obteremos $4^n - 1$ segmentos. Os segmentos possuem comprimento $\frac{1}{2^n}$. Portanto, a dimensão da curva de Hilbert é calculada da seguinte forma

$$D = -\frac{\log(4^n - 1)}{\log \frac{1}{2^n}} = -\frac{1}{n} \frac{\log(4^n - 1)}{\log 2^{-n}} = \frac{\log(4^n - 1)}{n \log 2} = \tag{5.20}$$

$$\frac{1}{n} \frac{\log 4^n (1 - 4^{-n})}{\log 2} = \frac{\log [4^n (1 - 4^{-n})]^{\frac{1}{n}}}{\log 2} = \frac{\log 4 [(1 - 4^{-n})]^{\frac{1}{n}}}{\log 2}.$$

Segue do Exemplo 6 que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 4^{-n})^{\frac{1}{n}} = 1$, $D = \frac{\log 2^2}{\log 2} = 2$.

$$D = -\frac{\log(15)}{\log \frac{1}{4}} = \frac{\log(15)}{\log(4)} \sim 2 \tag{5.21}$$

Isto quer dizer, que a curva de Hilbert ao executarmos na construção uma infinidade de iterações, abrange uma superfície completamente preenchida, ou seja, ela preenche a área do plano na qual é traçada.

5.7 Por que trabalhar com fractais na Educação Básica

- Pela possibilidade de despertar e desenvolver o senso estético e enriquecer a imaginação.
- Porque a geometria Euclidiana se mostra insuficiente para o estudo de formas da natureza.

- Pelo fato da dimensão fractal estar muito presente na natureza, o seu estudo motiva professores e alunos e pode desenvolver a capacidade de fazer a leitura do mundo em que vive.
- Pela aplicabilidade cada vez mais crescente dos fractais em diferentes áreas da ciência e da tecnologia, proporcionando a conexão com várias ciências e, portanto, a possibilidade de realização de um trabalho interdisciplinar.
- Por possibilitar a difusão e o acesso aos computadores e às tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização.
- Para estudar as relações numéricas de seus elementos, conforme as iterações sucessivas.
- Porque o estudo dos fractais poderá dar maior significação aos conceitos matemáticos.

5.8 Conteúdos de Matemática que podem ser trabalhados com o estudo dos Fractais, na Educação Básica

- Auto semelhança
- Forma
- Rugosidade e Dimensão ver (GEHR; BACHOFEN; WEIBEL, 1978)
- Polígonos e sólidos geométricos
- Ângulos internos e externos
- Áreas, volumes e perímetros
- Trigonometria
- Números complexos
- Funções (afim, quadráticas, trigonométricas)
- Transformações Geométricas (translação, rotação, simetria, homotetias)
- Semelhança de Figuras (razão de semelhança, ampliação, redução, razão entre áreas e volumes de figuras semelhantes)
- Sucessões (termos, termo geral e generalização, limite, sucessão limitada, infinitésimo, infinitamente grande, noção de infinito)
- Operações com conjuntos.
- Iteração de funções.

5.9 Atitudes, Valores e Competências

- Mostrar confiança em si próprio no confronto com situações novas.
- Revelar curiosidade e gosto de aprender, de pesquisar e de investigar.
- Reconhecer o contributo da matemática para a compreensão do mundo e para a evolução do mesmo.
- Ter hábitos de trabalho e de persistência, procurando realizar o trabalho até ao fim de forma organizada e apresentá-lo com a devida qualidade.

- Ser crítico relativamente aos resultados obtidos na realização de determinada tarefa e relativamente à qualidade do seu trabalho.

REFERÊNCIAS

- BARNESLEY, M. F. **Fractals Everywhere**. [S.l.]: Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2012. Citado nas páginas 29, 30, 31 e 66.
- CANTOR, G. On a property of the class of all real algebraic numbers. **Crelle's Journal for Mathematics: Translated by Christopher P. Grant**, v. 77, n. 1, p. 258–262, 1874. Citado na página 34.
- _____. **Contributions to the Founding of the Theory of transfinite Numbers: Translation of [1895] and [1897] abo ve with introduction and notes, by Philip E.B. Jourdain, Open Court, Chicago 1915**. [S.l.]: Dover Publication, 1965. Citado nas páginas 26, 33, 34, 52, 53, 54 e 66.
- COORNAERT, M. **Topological Dimension, In: Topological Dimension and Dynamical Systems**. [S.l.]: Publisher Name Springer, Cham, New York, 2015. Citado nas páginas 34, 35, 36, 47 e 54.
- _____. **Topological Dimenson and Dynamical Systems**. [S.l.]: Spinger, Heindelberg, 2015. Citado na página 52.
- EDGAR, G. Integral, probability, and fractal measures. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 37, n. 4, p. 481–498, 2000. Citado nas páginas 36 e 55.
- ENGELKING, R. **Dimension Theory**. [S.l.]: Polish Scientific Publichers, Warszawa, 1978. Citado nas páginas 19, 52 e 54.
- FALCONER, K. **The Geometry of Fractal Sets**. [S.l.]: Cambridge Univesity Press, New York, 1985. Citado nas páginas 55, 60 e 63.
- GEHR, P.; BACHOFEN, M.; WEIBEL, E. R. The normal human lung: Ultrastructure and morphometric estimation of diffusion capacity. **Respiration Physiology**, v. 32, n. 1, p. 121–140, 1978. Citado nas páginas 20 e 90.
- HUREWICZ, W.; WALLMAN, H. **Dimension Theory**. [S.l.]: Princeton University Press, Oxfrod, 1948. Citado na página 19.
- KANAMORI, A. The mathematical development of set theory from cantor to cohen. **Bulletin of Symbolic Logic**, v. 2, n. 1, p. 1–71, 1996. Citado na página 34.
- LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, Rio de Janeiro, 1970. Citado nas páginas 26, 29 e 32.
- MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. [S.l.]: W.H. Freeman and Company, New York, 1977. Citado nas páginas 62, 63, 66 e 69.
- PIERPONT, J. Mathematical rigor, past and present. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 34, n. 1, p. 23–53, 1928. Citado nas páginas 34 e 66.
- ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. M. **Real Analysis**. [S.l.]: Pearson Education, Hong Kong, 2010. Citado na página 31.
- SHILOV, E. **Elementary Real and Complex Analysis**. [S.l.]: Dover Publication, New York, 1996. Citado nas páginas 26 e 51.

