

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

Claudir Dias Barbieri

CÔNICAS E SUAS PROPRIEDADES REFLETORAS

Santa Maria - RS
2018

Claudir Dias Barbieri

CÔNICAS E SUAS PROPRIEDADES REFLETORAS

Dissertação de conclusão de curso de Mestrado Profissional submetido ao programa de Pós-graduação em Matemática em rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Santa Maria, como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE** em **MATEMÁTICA**.

Orientador: Prof. Dr. Denilson Gomes

Santa Maria - RS

2018

Ficha gerada com os dados fornecidos pelo autor.

Barbieri, Claudir Dias
Cônicas e suas Propriedades refletoras / Barbieri,
Claudir Dias - 2018
90p.; 30 cm

Orientador: Prof. Dr. Denilson Gomes

Dissertação Mestrado - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-graduação em Matemática em REDE NACIONAL - PROFMAT,
Santa Maria - 2018.

1. Cônicas 2. História 3. Elipse 4. Hipérbole 5. Pa-
rábola 6. Excentricidade 8. Aplicações, I. Barbieri,
Claudir Dias II. Cônicas e suas propriedades refletoras.

©2018

Todos os direitos autorais reservados a CLAUDIR DIAS BARBIERI. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

Endereço: Rua Teixeira de Freitas, n. 305

Fone (0xx) 51 98475 6169; End. Eletr.: cbfisica@gmail.com

CLAUDIR DIAS BARBIERI

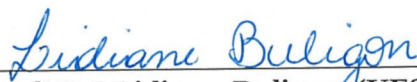
CÔNICAS E SUAS PROPRIEDADES REFLETORAS

Dissertação de conclusão de curso de Mestrado Profissional submetido ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Maria, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em MATEMÁTICA.

Aprovado em 20 de agosto de 2018



Prof. Dr. Denilson Gomes , (UFSM)
(Presidente/Orientador)



Profª Drª Lidiane Buligon, (UFSM)



Prof. Dr. Vinicius Abreu de Oliveira, (UNIPAMPA)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho, em especial a mais nova integrante da família, minha neta Giovana Presa Barbieri, aos meus filhos, esposa e uma homenagem “post mortem” aos meus pais pela dedicação e incentivo aos estudos dos seus filhos. Finalizando gostaria de agradecer ao meu irmão, Claudio Dias Barbieri, pela logística disponibilizada.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a minha família por entender minhas pretensões.

Também aos colegas do Profmat, em especial às colegas Daniela Haas e Bernarda de Souza pelas horas de estudo em parceria, bem como pelas viagens Porto Alegre - Santa Maria, Santa Maria - Porto Alegre, ora com muita emoção, outras nem tanto.

Agradecimentos ao corpo docente do Profmat por sua dedicação e atenção, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Denilson Gomes pela paciência, apoio, atenção e sugestões para a conclusão desta dissertação.

“Se você tivesse dado ouvidos as minhas brincadeiras de dizer verdades, você teria escutado as verdades que eu insistia em dizer brincando.”

(Adaptado de Charles Chaplin)

RESUMO

CÔNICAS E SUAS PROPRIEDADES REFLETORAS

AUTOR: Claudir Dias Barbieri
ORIENTADOR: Denilson Gomes

O objetivo deste trabalho é apresentar e demonstrar as propriedades refletoras das cônicas, bem como entender o porquê destas figuras geométricas fascinarem os matemáticos desde a antiguidade. Foram priorizadas as demonstrações matemáticas com o auxílio da Geometria e Álgebra. Evitou-se a utilização de recursos do cálculo diferencial e integral, haja vista que este trabalho é voltado aos alunos do ensino Médio, os quais não possuem conhecimento desses recursos matemáticos. Em um primeiro momento analisamos os motivos de estas figuras geométricas receberem tão pouca atenção no currículo do ensino Médio. Foi oportuno analisarmos uma pequena coletânea de livros recomendados pelo Ministério da Educação (MEC), constantes no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). É possível perceber uma abordagem muito superficial em relação às cônicas, especialmente a hipérbole e a elipse, embora a parábola, em alguns livros, seja estudada com mais profundidade, normalmente representando o gráfico de uma função quadrática. Em seguida, apresentamos uma breve exposição sobre as origens históricas das cônicas, onde destacamos os quatro principais protagonistas do tema: Pitágoras, Euclides, Arquimedes e Apolônio. Estudamos, separadamente, cada cônica a partir de sua definição, seguido de um desenvolvimento algébrico para encontrarmos a equação que a define. Ressaltamos suas propriedades refletoras e como usá-las na criação de equipamentos tecnológicos que ajudem na evolução científica do homem. Dando continuidade apresentamos exemplos de equipamentos que usam tecnologia utilizando os princípios das cônicas. Os softwares Geogebra, Paint.net, Google Sketcup 8.0 e Gimp 2.0, foram utilizados como ferramentas computacionais para a elaboração das figuras neste trabalho.

Palavras-chave: Propriedade das Cônicas. Elipse. Hipérbole. Parábola. História da Matemática. Ensino Médio.

ABSTRACT

CONICAL AND ITS REFLECTIVE PROPERTIES

AUTHOR: Claudir Dias Barbieri

ADVISOR: Denilson Gomes

The objective of this work is to present and demonstrate the reflective properties of the conics, as well as to understand why these geometric figures have fascinated mathematicians since antiquity. Mathematical demonstrations were prioritized with the help of Geometry and Algebra. The use of differential and integral calculus resources was avoided, since this work is aimed at the students of the Middle School, who do not have knowledge of these mathematical resources. In a first moment we analyzed the reasons why these geometric figures receive so little attention in the curriculum of Middle School. It was opportune to analyze a small collection of books recommended by the Ministry of Education (MEC), listed in National Textbook Program (PNLD). It is possible to perceive a very superficial approach to conics, especially hyperbole and ellipse, although the parable in some books is studied in more depth, normally representing the graphic of a quadratic function. Next we present a brief exposition on the historical origins of the conics, where we highlight the four main protagonists of the theme: Pythagoras, Euclid, Archimedes and Apollonius. We study, separately, each conic from its definition, followed by an algebraic development to find the equation that defines it. We emphasize their reflective properties and how to use them in the creation of technological equipment that helps in the scientific evolution of man. Following are examples of equipment that use technology using the principles of conics. The software Geogebra, Paint.net, Google Sketchup 8.0 and Gimp 2.0, were used as computational tools to elaborate the figures in this work.

Keywords: Property of the Conics. Ellipse. Hyperbole. Parable. History of Mathematics. High school.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Poliedros de Platão.	19
Figura 5.1 – Posicionamento dos focos da elipse na reta focal.	25
Figura 5.2 – Posicionamento dos vértices em relação aos focos da elipse na reta focal.	26
Figura 5.3 – Determinação da distância dos vértices aos focos da elipse.	26
Figura 5.4 – Posicionamento dos focos, vértices e centro da elipse na reta focal.	26
Figura 5.5 – Posicionamento dos focos, vértices e centro da elipse nas retas focal e não-focal.	27
Figura 5.6 – Simetria da elipse em relação à reta focal.	28
Figura 5.7 – Simetria da elipse em relação à reta não-focal.	29
Figura 5.8 – Simetria da elipse em relação ao centro.	29
Figura 5.9 – Traçando uma elipse com lápis e barbante.	30
Figura 5.10 – Traçado da elipse.	30
Figura 5.11 – Elipse horizontal centrada em $O(0,0)$	32
Figura 5.12 – Relação de Pitágoras na elipse.	34
Figura 5.13 – Elipse eixo maior vertical.	36
Figura 5.14 – Deslocamento do eixo de coordenadas da elipse.	37
Figura 6.1 – Semi-retas que contêm apenas um dos focos.	39
Figura 6.2 – F_2 entre F_1 e P	40
Figura 6.3 – F_1 entre P e F_2	40
Figura 6.4 – Posicionamento dos vértices em relação aos focos da hipérbole na reta focal.	41
Figura 6.5 – Posicionamento dos focos, vértices e centro da hipérbole na reta focal.	41
Figura 6.6 – Pontos do eixo não-focal não pertencem à hipérbole.	42
Figura 6.7 – Relação dos comprimentos a, b, c	42
Figura 6.8 – Assíntotas e retângulo de base.	43
Figura 6.9 – Simetria da hipérbole em relação à reta focal.	44
Figura 6.10 – Simetria da hipérbole em relação à reta não-focal.	45
Figura 6.11 – Simetria da hipérbole em relação ao centro.	46
Figura 6.12 – Traço da hipérbole.	47
Figura 6.13 – Medidas em uma hipérbole.	48
Figura 6.14 – Relação entre a, b e c na hipérbole horizontal.	50
Figura 6.15 – Hipérbole transladada.	51
Figura 6.16 – Hipérbole traçada com interligação de pontos.	52
Figura 6.17 – Assíntotas de uma hipérbole.	53
Figura 7.1 – Posição de V em relação à F e r	55
Figura 7.2 – Simetria da parábola em relação à m	56
Figura 7.3 – Traço da parábola com régua e esquadro.	57
Figura 7.4 – Equação da parábola, concavidade para cima.	58
Figura 7.5 – Parábola com concavidade voltada para baixo.	59
Figura 7.6 – Parábola com concavidade voltada para a esquerda e direita.	61
Figura 7.7 – Construção da parábola com interligação dos pontos geométrico.	61
Figura 7.8 – Parábola com eixo principal horizontal e centro deslocado da origem.	62
Figura 7.9 – Triângulo fundamental da parábola.	63
Figura 8.1 – Elipses com variações da excentricidade.	64
Figura 8.2 – Hipérbolos com variações da excentricidade.	65

Figura 8.3 – Excentricidade da Parábola.	66
Figura 9.1 – Região focal e não-focal em uma elipse.	68
Figura 9.2 – Reta tangente à elipse.	69
Figura 9.3 – Região focal e não-focal em uma hipérbole.	70
Figura 9.4 – Reta tangente à hipérbole.	71
Figura 9.5 – Propriedade 9.2.3 da hipérbole.	73
Figura 9.6 – Regiões do plano que contém uma parábola.	73
Figura 9.7 – Reta tangente à parábola.	74
Figura 9.8 – Reta tangente à parábola.	75
Figura 10.1 – Reta normal à elipse no ponto P.	76
Figura 10.2 – Reta normal à hipérbole no ponto P.	77
Figura 10.3 – Propriedades da reta normal à parábola.	78
Figura 11.1 – Propriedade Refletora das Cônicas.	79
Figura 11.2 – Figura de um elipsoide.	80
Figura 11.3 – Lente elíptica para refletor odontológico.	81
Figura 11.4 – Litotritor.	82
Figura 11.5 – Figura de um hiperboloide de duas folhas.	83
Figura 11.6 – Esquema de um telescópio usando espelhos parabólico e hiperbólico. .	84
Figura 11.7 – Fotografia da catedral de Brasília.	85
Figura 11.8 – Figura de um parabolóide.	85
Figura 11.9 – Esquema de um farol de automóvel.	86
Figura 11.10 – Forno solar usando dispositivo parabólico.	86
Figura 11.11 – Sistema de radios-telescópios terrestre.	87
Figura 11.12 – Esquema de um telescópio Newtoniano.	87

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	AS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO	14
3	UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE CÔNICAS	17
4	CÔNICAS	24
5	ELIPSE	25
5.1	DEFINIÇÃO	25
5.2	TERMINOLOGIA	25
5.2.1	Construção mecânica do traço da elipse	30
5.2.2	Proposta didática: traçando a elipse	31
5.3	EQUAÇÃO DA ELIPSE	32
5.3.1	Elipse com centro na origem e eixo maior horizontal	32
5.3.2	Elipse com centro na origem e eixo maior vertical	36
5.3.3	Deslocamento do centro da elipse e eixo maior horizontal	37
5.3.4	Deslocamento do centro da elipse e eixo maior vertical	38
6	HIPÉRBOLE	39
6.1	DEFINIÇÃO	39
6.1.1	Considerações	39
6.2	TERMINOLOGIA	41
6.2.1	Construção mecânica do traço da hipérbole	46
6.2.2	Proposta didática: traçando a hipérbole	48
6.3	EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE	48
6.3.1	Hipérbole com eixo principal horizontal e centro deslocado da origem	50
6.4	ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE	52
7	PARÁBOLA	55
7.1	TERMINOLOGIA	55
7.1.1	Construção mecânica do traço da parábola	56
7.1.2	Proposta didática: traçando a parábola	57
7.2	EQUAÇÃO DA PARÁBOLA	58
7.2.1	Vértice na origem e concavidade para cima	58
7.2.2	Vértice na origem e concavidade para baixo	59
7.2.3	Vértice na origem e concavidade para a direita	60
7.2.4	Vértice na origem e concavidade para a esquerda	60
7.2.5	Parábola com eixo principal horizontal e centro deslocado da origem	62
7.3	TRIÂNGULO FUNDAMENTAL DA PARÁBOLA	63
8	EXCENRICIDADE DAS CÔNICAS	64
8.1	EXCENRICIDADE DA ELIPSE	64
8.2	EXCENRICIDADE DA HIPÉRBOLE	65
8.3	EXCENRICIDADE DA PARÁBOLA	66
9	RETA TANGENTE ÀS CÔNICAS	68
9.1	ELIPSE - RETA TANGENTE	68
9.2	HIPÉRBOLE - RETA TANGENTE	70
9.3	PARÁBOLA - RETA TANGENTE	73
10	RETA NORMAL ÀS CÔNICAS	76
10.1	ELIPSE - RETA NORMAL	76
10.2	HIPÉRBOLE - RETA NORMAL	77

10.3	PARÁBOLA - RETA NORMAL	78
11	PROPRIEDADE REFLETORA E APLICAÇÕES PRÁTICAS DAS CÔNICAS....	79
11.1	PROPRIEDADE REFLETORA DA ELIPSE	80
11.2	APLICAÇÕES PRÁTICAS	81
11.3	PROPRIEDADE REFLETORA DA HIPÉRBOLE	83
11.4	APLICAÇÕES PRÁTICAS	84
11.5	PROPRIEDADE REFLETORA DA PARÁBOLA	85
11.6	APLICAÇÕES PRÁTICAS	86
12	CONCLUSÃO	89
13	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	90

1 INTRODUÇÃO

As cônicas são importantes em várias áreas da ciência, tais como Arquitetura, Engenharia Civil, Astronomia, Ótica, Acústica e outros. Nas pontes suspensas constatamos a formação de uma parábola pelo cabo de sustentação da mesma, onde a Golden Gate Bridge é um belo exemplo. Em telescópios são usados espelhos parabólicos e hiperbólicos para direcionar os raios luminosos ao foco. Um exemplo é o telescópio Hubble colocado em órbita da Terra na década de 90. Atualmente operadoras de TV a cabo utilizam antenas parabólicas para receber sinais via satélite. Há uma infinidade de áreas onde é possível utilizar a teoria das cônicas ficando à mercê da própria criatividade humana. Interessante observar que Apolônio, principal nome vinculado a este tema, desenvolveu suas teorias sem se preocupar se haveria ou não aplicações práticas para seus estudos. Porém, sabemos que teve influência marcante em gerações de estudiosos nos séculos vindouros.

Embora a importância destas curvas para a ciência retrate uma realidade esse conteúdo quase inexistente dentro das escolas brasileiras. Essa posição, é muito bem colocada por Neto (2008, p.1 e 2)

“No ensino Fundamental, apenas a parábola faz parte do programa. É ensinada na última série sob a forma de função quadrática ou do Segundo Grau.”

Em outro momento acrescenta

“Na primeira série do ensino Médio, a parábola volta a ser objeto de estudo dentro de um contexto mais amplo e aprofundado no estudo de funções. Novamente nenhum vínculo com as cônicas é sequer mencionado pela maioria dos professores. A habilidade na manipulação das equações analíticas e o entendimento dos papéis de cada parâmetro é o foco desse conteúdo.”

Em uma última reflexão finaliza

“a terceira e última série do ensino médio, finalmente as cônicas aparecem no programa escolar. Mas vale frisar que, por uma série de motivos, esse tópico sequer chega a ser ensinado por boa parte dos professores. Quando acontece, se restringe normalmente a um curto período (uma a duas semanas) ... ”

Pelo que foi exposto surgiu a proposta desta dissertação em apresentar um estudo detalhado e original a respeito das cônicas. com um enfoque não usual, permitindo aos alunos e professores usufruírem de uma abordagem diferenciada, trazendo à tona as propriedades refletoras das cônicas e suas aplicações em diversas áreas tecnológicas da vida cotidiana do homem. Assim, decidiu-se incluir um resumo histórico (BOYER, 1991) onde

se procura explorar a origem das cônicas e sintetizar a vida dos quatro grandes geômetras que deram origem a chamada Idade Áurea (300 a 200 a.C.) da matemática grega. Arquimedes, Euclides, Pitágoras e Apolônio de Perga representam o ápice do pensamento matemático. Aborda-se um resumo de suas descobertas e obras publicadas. Dando prosseguimento, analisamos as três cônicas, em capítulos separados, a partir de suas definições como lugares geométricos, dando ênfase no desenvolvimento algébrico das equações que as definem. Utilizando-se figuras geométricas demonstram-se a simetria das cônicas, sua excentricidade, as propriedades das retas tangentes e normais a essas curvas.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: no Capítulo 2, por meio da investigação de alguns livros didáticos recomendados pelo Ministério da Educação (MEC) em seu sítio na internet e que constam no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) através do *Guia do Livro Didático*, busca-se compreender de que modo tal conteúdo é disponibilizado para os alunos do ensino Médio. No Capítulo 3 (BOYER, 1991), faz-se um breve relato das origens históricas das cônicas e abordam-se os quatro principais matemáticos da época que estudaram essas curvas, ressaltando-se a importância da cidade de Alexandria e sua famosa biblioteca, sendo por isso considerada em sua época, o berço da sabedoria mundial. Nos Capítulos 5, 6 e 7 (DELGADO, 2011) analisamos as três cônicas, elipse, hipérbole e parábola, respectivamente, e a partir de suas definições como lugar geométrico elabora-se o desenvolvimento algébrico das equações que as definem. No Capítulo 8 (VENTURI, 2011) abordamos a excentricidade das cônicas. No estudo das propriedades refletoras das cônicas utilizam-se as propriedades das retas tangentes e normais às curvas, apresentadas nos Capítulos 9 e 10 (BOULOS, 2005). No Capítulo 11 ilustram-se com figuras e imagens diversas aplicações práticas baseadas nas propriedades das cônicas, mostrando como foi possível desenvolver tecnologias que ajudam o homem em seu dia a dia. No Capítulo 12 apresentam-se as conclusões deste trabalho.

2 AS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

O motivo do estudo das cônicas pelos matemáticos, desde há muito tempo, foi devido à beleza que essas curvas apresentam, não ocorrendo a eles, de imediato, sua aplicação prática. Com o passar dos tempos, houve inúmeras descobertas importantes em matemática pura e na ciência em geral que estavam ligadas às cônicas. Pode-se citar dois exemplos clássicos: Johannes Kepler, em 1605, publica sua descoberta de que a órbita do planeta Marte, ao redor do sol, era uma *elipse*, defendendo a hipótese de que todos os planetas mover-se-iam em órbitas elípticas, fato este comprovado por Isaac Newton décadas mais tarde; Galileu Galilei, em 1609, descobriu que um projétil lançado do alto de uma torre executava uma trajetória em forma de *parábola*, se considerarmos somente a atuação da força da gravidade.

Na ciência em geral, as características das cônicas foram utilizadas em diversos projetos, em diferentes áreas do conhecimento. Na engenharia suas propriedades físicas foram decisivas para a solução estrutural de grandes e importantes obras, e sua beleza plástica contemplada em monumentos e imponentes estruturas. Também muito utilizada nas artes visuais, especialmente em marketing e desenvolvimento de produtos, onde símbolos embasados nas cônicas frequentemente identificam produtos e seus respectivos fabricantes. É muito amplo o campo de estudos referentes a estas curvas. Suas propriedades refletoras, tratadas nesta dissertação, são muito utilizadas na indústria (automobilística, de telecomunicações, etc ...), e muito importantes na área de pesquisa científica e explorações espaciais.

Atualmente, nos livros didáticos do ensino médio, a parábola recebe um tratamento privilegiado em detrimento das outras cônicas. Mesmo assim, só na sua forma geral, do tipo $ax^2 + bx + c = 0$. Essa equação é apresentada como um polinômio do segundo grau e, para encontrar as raízes solução da equação, devemos empregar a fórmula resolvente da equação do segundo grau. No entanto, é perfeitamente possível apresentar aos alunos, no final do ensino médio, um estudo das cônicas empregando o método da geometria analítica. Uma abordagem dessa natureza pode encorajar alunos no aprendizado da matemática com aplicação direta ao cotidiano das pessoas. O próprio MEC na publicação do PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) em 2000, página 15, enfatiza esse ponto de vista, afirmando:

“Privilegiar a aplicação da teoria na prática e enriquecer a vivência da ciência na tecnologia e destas no social passa a ter uma significação especial no desenvolvimento da sociedade contemporânea.”

Para um trabalho nesse sentido, um importante instrumento de apoio que o professor possui é o livro didático. Com o objetivo de preencher essa lacuna, o MEC disponibiliza

o PNLD, um programa executado em ciclos trienais alternados. É apresentada uma resenha de livros didáticos onde o professor poderá escolher alternativas que melhor atenda os conteúdos programáticos da sua escola. Aqui propomos realizar uma breve análise de alguns livros no que diz respeito às cônicas. Alguns constam no PNLD 2015.

Livro 1 - Matemática: contexto e aplicações

Autor - Luis Roberto Dante

É um livro de volume único voltado ao ensino médio. Há uma breve introdução e através da figura de um cone duplo, cortado por um plano, mostra as origens das três curvas. Apresenta a demonstração da equação reduzida das cônicas. Faz uma breve menção às assíntotas da hipérbole. Relata como construir as curvas utilizando régua e compasso, embora a descrição seja pobre em detalhes. Para um aluno do ensino médio desenvolver essa atividade, necessitará de um apoio do professor. Define hipérbole equilátera e a relaciona com a lei de *Boyle*, lei esta que trata da relação entre pressão e volume de um gás perfeito à temperatura constante. São citadas aplicações das cônicas em função de suas propriedades refletoras, embora sem analisá-las matematicamente. Apresenta exemplos e uma lista de exercícios ao final do capítulo.

Livro 2 - Matemática: Ciência e Aplicações

Autores - Gelson Iezzi *et al*

No Volume 1, os autores se limitam a apresentar a equação do segundo grau como uma função quadrática, representando uma parábola. Apresentam alguns exemplos e definições. No volume 3, capítulo 4, as cônicas são retomadas com um pouco mais de detalhes, apresentando suas definições e desenvolvimento de suas equações reduzidas, bem como seus elementos principais. As propriedades refletoras das cônicas não são abordadas.

Livro 3 - Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia

Autores - Jackson Ribeiro.

No Volume 1, é apresentada a definição de função e introduz-se um gráfico da função quadrática baseado em uma tabela de pares ordenados. Existe um enfoque predominante

na parábola. Sobre hipérbole e elipse há alguns comentários e são deixadas para serem estudadas no Volume 3. Neste volume, é mencionada a concavidade da parábola e sua relação com o coeficiente a da equação que define essa curva, com alguns exemplos. Há uma descrição do gráfico de uma equação quadrática em função do deslocamento vertical e horizontal, com vértice na origem. Não é realizada nenhuma demonstração dessas descrições. Em relação as outras duas curvas (hipérbole e elipse), são mencionadas algumas características porém, declinando de um maior aprofundamento. As propriedades refletoras das cônicas não são abordadas.

Livro 4 - Matemática Fundamental: uma nova abordagem

Autores - José Rui Giovanni *et al*

Este é um livro volume único para o ensino médio. Faz demonstrações do desenvolvimento da equação reduzida das cônicas. Desenvolve alguns exemplos e apresenta uma lista de exercícios no final do capítulo. Não menciona as propriedades refletoras das cônicas. Deixa de relatar exemplos práticos de uso das curvas no cotidiano.

Livro 5 - Matemática para o Ensino Médio

Autores - Miguel Jorge *et al*

Este é o Volume 3 da coleção para o ensino Médio. Trata das cônicas como os outros livros analisados, desenvolvendo as demonstrações para encontrar a equação reduzida das cônicas. Traz exemplos após deduzir as equações e no final do capítulo traz uma coletânea de exercícios para que o aluno possa exercitar o aprendizado.

Síntese

De uma maneira geral percebe-se que os livros seguem uma diretriz básica em relação ao conteúdo. Quase sempre a parábola é apresentada no Volume 1 e relacionada a uma função quadrática. É apresentado o gráfico da função e mencionada a concavidade da mesma. Nesse volume não são tratadas a elipse e a hipérbole. Essas curvas são abordadas no Volume 3 onde é retomado o estudo da parábola com uma abordagem mais geral. Demonstra-se como obter a equação reduzida das cônicas. Poucos livros fazem menção as suas propriedades refletoras e sua ligação com o cotidiano.

3 UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE CÔNICAS

Desde os mais remotos tempos quando o homem buscava incessantemente melhores condições de vida, viu-se envolvido em problemas relacionados ao provimento e armazenamento de comida para enfrentar os tempos difíceis que, via de regra, eram cíclicos. Em função disso, surgiu a necessidade de saber contar e avaliar seus estoques. Condições naturais e suficientes para o surgimento de uma nova ciência como a Matemática. Concomitante com a evolução do homem, temos a evolução da Matemática.

Uma civilização que muito contribuiu para o desenvolvimento da ciência foi a grega, pois esse povo possuía uma curiosidade altamente intelectual. Um representante profícuo desse povo foi Anaxágoras, mais um filósofo da natureza do que um matemático. Porém, muito inquiridor deixou várias contribuições, dentre elas, o problema da quadratura do círculo. Esse problema fascinou os matemáticos por mais de 2000 anos. Entenda-se quadratura do círculo como a tentativa de encontrar um quadrado que tenha exatamente a mesma área de um círculo usando somente régua e compasso.

Anaxágoras foi professor de Péricles. Este faleceu de peste que assolou Atenas e aniquilou um quarto da população dessa cidade. Talvez esta epidemia tenha dado origem a um segundo problema matemático famoso. Conta-se que uma delegação tenha sido enviada ao oráculo de Apolo em Delos, após a morte de Péricles, para obter uma resposta de como combater a epidemia. O oráculo respondeu que o altar de Apolo, de formato cúbico, deveria ser duplicado. E assim, os atenienses duplicaram as dimensões do altar, porém a peste não foi debelada. Obviamente, ao duplicarem as arestas do cubo seu volume foi multiplicado por oito e não por dois. Resolver esse problema só usando régua e compasso passou a ser conhecido como *problema deliano*. Outro problema famoso que circulava em Atenas, quase na mesma época do problema deliano, era a *trisseccção de um ângulo*. Isto consistia em encontrar, somente usando régua e compasso, a divisão de um ângulo em três partes exatamente iguais.

Esses três problemas, *quadratura do círculo*, *duplicação do cubo* e *trisseccção de um ângulo* são conhecidos como os *três famosos ou clássicos problemas da antiguidade*. Mais de 2200 anos depois seria provado que é impossível resolvê-los usando somente régua e compasso (BOYER, 1991).

Aparentemente, somos levados a pensar em quanto tempo gasto na tentativa de solucionar esses problemas sem obter fruto algum. Na verdade, o esforço e a sagacidade despendidos na busca de uma solução são muito maiores do que o exigido pelos problemas corriqueiros, cujo encanto costuma desaparecer com a primeira solução encontrada. Assim, ao perceber que devemos penetrar mais profundamente, buscando uma investigação mais cuidadosa e quando enfim se evidencia a insolubilidade, ela não deixou de trazer múltiplos frutos. No caso do problema de Delos, por exemplo, levou à descoberta de um

sem número de curvas até então desconhecidas e que se encontravam fora da orientação das pesquisas normais.

Foi, aproximadamente, no primeiro século da Idade Helenística (período que iniciou com a morte de Alexandre Magno em 323 a.C, finalizando próximo ao início da era cristã) que destacaram-se quatro matemáticos de forma incontestável dos demais da época, bem como de seus predecessores e sucessores. Esses matemáticos foram Pitágoras (560 - 500 a.C.), Euclides (325 - 265 a.C.), Arquimedes (287 - 212 a.C.) e Apolônio (262 - 190 a.C.). Não por acaso, o período entre 300 a 200 a.C. foi denominado *Idade Áurea* da matemática grega em virtude das obras escritas por esses homens. Pode-se dizer que nesse período a matemática estava em atraso quando comparada às artes e à literatura. Durante todo o período helenístico a cidade de Alexandria foi o destaque na área da matemática (BOYER, 1991).

Pitágoras nasceu na Ásia Menor, na ilha de Samos. Por mais de 30 anos percorreu o Egito, Babilônia, Síria, Fenícia e talvez, Índia e Pérsia. Dessas andanças acumulou conhecimentos de Astronomia, Matemática, Ciência, Filosofia, Música, Misticismo e Religião. Cabe lembrar que Pitágoras foi contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-Tsé.

Ao retornar a Samos, indispôs-se com o tirano Polícrates e foi para o sul da Itália, em Crotona. Aí fundou a escola Pitagórica, dita por muitos como a *primeira universidade do mundo*. Estudava-se Matemática, Astronomia, Música e Religião. Havia centenas de estudantes e era considerada uma entidade secreta.

Foi a escola Pitagórica que realizou a classificação aritmética dos números em pares, ímpares, primos e fatoráveis. Também elaborou ideias inovadoras na Astronomia, afirmando que a Terra era esférica e que os planetas giravam ao redor da Terra com diferentes velocidades. Provavelmente, aos pitagóricos, deve-se a construção do cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e a *seção áurea*. Na Música, a notável descoberta de que os intervalos musicais obedecem relações através de proporções aritméticas: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$.

A própria palavra Matemática (**Mathematike**, em grego) surgiu com Pitágoras, que foi o primeiro a concebê-la como um sistema de pensamento totalmente embasado em provas dedutivas. Inclusive, a prova do *teorema de Pitágoras* quem apresentou foi Pitágoras, embora haja indícios de que os Babilônios já o conheciam, empiricamente, em 1600 a.C. e ele tenha acumulado esse conhecimento em suas viagens.

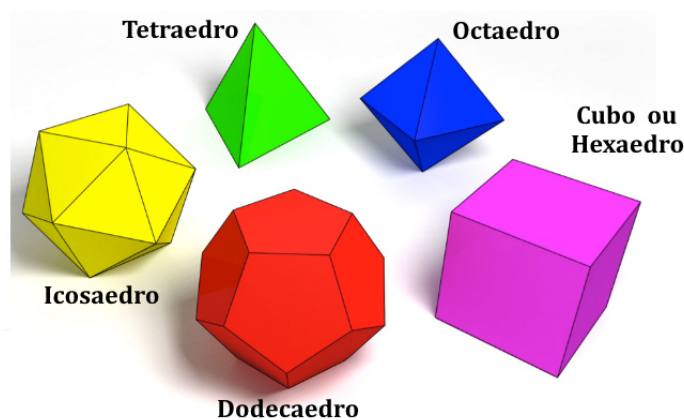
Tudo que sabemos sobre Pitágoras deve-se à tradição oral. Assim, devemos ser cautelosos quanto à precisão das histórias envolvendo-o. Mas, claramente, deve-se aos pitagóricos o papel primordial para o estabelecimento da Matemática como disciplina racional.

Outro grande nome, posterior a Pitágoras, foi Euclides. Foi o fundador da Escola de Matemática, junto à Biblioteca de Alexandria. Biblioteca esta que, por muitos séculos, foi considerada o berço da sabedoria. Dali, emanavam grandes descobertas e divulgação do saber, além de possuir um acervo de centenas de milhares de papiros que, lamenta-

velmente, o homem teve a capacidade insana de destruí-los sob as mais diversas razões, principalmente religiosas. Euclides mudou de Atenas para Alexandria, durante o reinado de Ptolomeu I, general favorito de Alexandre, O Grande, morto em 323 a.C.. Alexandria, a partir de Euclides até o século IV d.C., reinou quase absoluta como principal centro de produção matemática. A obra mais importante de Euclides, *Os Elementos*, é um texto introdutório de toda a matemática *elementar*, ou seja, aritmética no sentido de teoria dos números, geometria sintética, tratando de pontos, retas, círculos e esferas, e por último álgebra, dotada de uma roupagem geométrica. É uma compilação metódica e ordenada de 465 proposições reunidas em 13 livros. Desses 13 livros, os 6 primeiros tratam da Geometria Plana Elementar; os 3 seguintes, da Teoria dos Números e o livro 10 trata dos Incomensuráveis (números Irracionais) e os 3 últimos, da Geometria no Espaço.

O livro 13 de *Os Elementos* aborda exclusivamente as propriedades dos 5 sólidos regulares, denominados **Poliedros de Platão** (BOYER, 1991). Há 5 poliedros regulares: o tetraedro (4 faces triangulares), o cubo ou hexaedro (6 faces quadradas), o octaedro (8 faces triangulares), o dodecaedro (12 faces pentagonais) e o icosaedro (20 faces triangulares). Estes poliedros são ilustrados na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Poliedros de Platão.



Fonte: <https://solidplatom.wordpress.com>.

Além deste, Euclides escreveu *Os Dados*, *Divisão de Figuras*, *Os Fenômenos* e *Óptica*. Este último caracteriza-se por ser um dos primeiros trabalhos sobre perspectiva, ou a geometria da visão direta. Sabe-se que Euclides escreveu outras obras, inclusive um tratado sobre cônicas, porém estão totalmente perdidas.

Outro gênio da Matemática e Física, Arquimedes, nasceu na atual Sicília (BOYER, 1991). Ainda jovem estudou em Alexandria com os discípulos de Euclides. Suas obras são vastas incluindo Geometria Plana e Sólida, Astronomia, Aritmética, Mecânica e Hidrostática. Uma das histórias mais contundente de Arquimedes, eternizada até os dias de hoje, diz respeito ao pedido do rei Herão, solicitando a Arquimedes que descobrisse se sua coroa de ouro não havia sido adulterada pelo ourives que a confeccionou. Conta-se que

Arquimedes ao entrar na banheira para tomar banho percebeu a elevação do nível d'água e a partir daí elaborou um método para desvendar a dúvida do rei Herão. Hoje na Física, estuda-se o *Princípio de Arquimedes*, o qual preconiza

“Todo corpo mergulhado num fluído em repouso sofre, por parte do fluído, uma força vertical para cima, cuja intensidade é igual ao peso do volume do fluído deslocado pelo corpo”.

Por outro lado, Arquimedes também se destacou como um grande inventor bélico. São atribuídas a ele, invenções como a alavanca, roldana móvel, catapultas, guindastes e tantas outras invenções. Conta-se que durante a Segunda Guerra Púnica, contra a Marinha e Exército Romano, comandados pelo Cônsul Marcelo, o espírito inventivo de Arquimedes conseguiu criar aparatos bélicos de extrema destruição como: catapultas gigantes que lançavam enormes pedras sobre as galeras romanas, afundando-as; enormes guindastes que conseguiam içar a proa dos navios, afundando-os pela popa. Conta Plutarco, que as tropas romanas estavam tão aterrorizadas que qualquer objeto que surgisse nas muralhas de Siracusa, era considerado uma diabólica artimanha de Arquimedes.

Talvez uma invenção, da mais lendária atribuída a Arquimedes, é um jogo de espelhos côncavos que utilizou para concentrar os raios solares e incendiar as galeras romanas. Muito se tem pesquisado para provar a veracidade dessa estória, mas devido ao baixo índice de reflexão dos espelhos da época de Arquimedes, a conclusão mais plausível é que não passa de uma lenda.

Em relação ao uso de roldanas, cordas e alavancas, conta-se que de certa vez Arquimedes foi chamado para solucionar um problema que surgiu na construção de um navio para o rei. O navio era tão pesado que não conseguiam lançá-lo ao mar. Mas Arquimedes, com uma combinação de alavancas e polias, conseguiu realizar o feito. Talvez tenha sido este acontecimento que o fez proferir a célebre frase: *Dê-me um ponto de apoio e moverei o mundo*.

Especula-se que, provavelmente, foi em Alexandria que Arquimedes ficou interessado em como trazer água do rio Nilo para irrigar as terras aráveis do vale. Para tanto, ele inventou um mecanismo, chamado *parafuso de Arquimedes*, feito de tubos em hélice presos a um eixo inclinado com uma manivela para fazê-lo girar.

Apesar de todas essas invenções, Arquimedes não dava muita importância a isso, pois para ele o importante era o desenvolvimento da Matemática. Por isso escreveu inúmeros livros tratando de diversos assuntos. Quase todos se perderam ou foram destruídos. Hoje, o que se sabe sobre Arquimedes é baseado em anotações de pessoas, que de uma forma ou outra, acabaram registrando seus feitos e sua história. Podemos listar alguns livros que Arquimedes (BOYER, 1991) escreveu:

- 1- Sobre o equilíbrio dos planos, Livro I (De planorum aequilibriis I)

- 2- Quadratura da parábola (Quadratura parabolae)
- 3- Sobre o equilíbrio dos planos, Livro II (De planorum aequilibriis II)
- 4- O método dos teoremas mecânicos (Mechanicis propositionibus)
- 5- Sobre a esfera e o cilindro, Livros I e II (De sphaera et cylindro)
- 6- Sobre as espirais (De lineis spiralibus)
- 7- Sobre conóides e esferóides (De conoidibus et sphaeroidibus)
- 8- Sobre os corpos flutuantes, Livros I e II (De corporibus fluitantibus)
- 9- Medida do círculo (Dimensio circuli)
- 10- O contador de areia (Arenarius)

Além destes trabalhos, sabe-se que Arquimedes escreveu outras obras, que hoje existem apenas em fragmentos.

Não podemos deixar de mencionar os estudos que Arquimedes fez sobre um círculo dado, onde inscreveu e circunscreveu um polígono de 96 lados e obteve a fórmula para o cálculo da área do círculo e, por muitos séculos, o mais acertado valor para π :

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{10}{70}$$

Grande contribuição à matemática foram as obras de Apolônio. Embora pouco se saiba sobre sua vida, era conhecido como Apolônio de Perga. Escreveu uma obra (agora perdida) chamada *Resultado Rápido* que parece tratar de processos rápidos de calcular. Menciona-se que o autor obteve uma aproximação de π mais precisa que a dada por Arquimedes, provavelmente o valor que conhecemos como 3,1416. Na verdade, a maioria das obras de Apolônio desapareceram. No século XVII, estava no auge a reconstrução de obras perdidas sobre geometria, sendo que os tratados de Apolônio encontravam-se entre os favoritos. Seis das obras de Apolônio estavam incluídas junto com dois dos tratados mais avançados (hoje perdidos) de Euclides, numa coleção chamada *Tesouro da Análise*. Pappus descreveu como uma coleção especial destinado aos que, depois de adquirir os conhecimentos básicos, queriam obter a capacidade de resolver problemas envolvendo curvas. Essa obra, deve ter incluído muito do que hoje conhecemos por *geometria analítica*. Em função dessas obras, Apolônio mereceu dos antigos o título de *O Grande Geômetra*, e não Euclides.

Além de tudo, Apolônio também se destacou como um célebre astrônomo. O modelo matemático favorito da antiguidade para a representação do movimento dos planetas aparentemente deve-se a ele. Na época, Eudoxo tinha proposto o modelo das esferas concêntricas, enquanto Apolônio propôs dois sistemas alternativos: um composto por movimentos epicíclicos; outro envolvendo movimentos excêntricos. Durante cerca de 1 800 anos os dois modelos, o de Eudoxo e o outro de Apolônio, foram rivais disputando a preferência dos estudiosos.

Apesar de várias obras de Apolônio terem sido perdidas, uma em especial foi subs-

tancialmente preservada, certamente sua obra prima, *As Cônicas*. Dessa obra famosa só metade (os quatro primeiros dos oito livros que compõem a obra) existe ainda em grego. Felizmente, um matemático árabe, Thabit ibn Qurra, tinha traduzido os três livros seguintes, e essa versão se preservou. Em 1710 Edmund Halley apresentou uma tradução latina dos sete livros, e daí então surgiram várias edições em muitas línguas.

É verdade que as seções cônicas já eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. Assim como *Os Elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, em nível mais avançado o tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das seções cônicas, inclusive *As Cônicas* de Euclides. Claramente podemos afirmar que, mantido seus campos de atuação, *Os Elementos* de Euclides e *As Cônicas* de Apolônio, foram as melhores obras escritas na época.

Anteriormente a Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como seções de três tipos bem diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Um dos méritos de Apolônio foi mostrar que não necessariamente precisamos realizar um corte perpendicular a um elemento do cone e que, de um único cone, podem ser obtidas todas as três espécies de seções cônicas, bastando variar a inclinação do plano que corta o cone. Esse passo foi muito importante para mostrar a relação entre os três tipos de curvas. Além disso, Apolônio provou que o cone não precisa ser reto, isto é, um cone cujo eixo é perpendicular à base circular, mas pode também ser um cone oblíquo ou escaleno. Assim, parece que Apolônio foi o primeiro geômetra a mostrar que as propriedades das curvas não são diferentes conforme sejam cortadas de cones oblíquos ou retos.

Com isso, Apolônio conseguiu trazer as antigas curvas para mais perto do ponto de vista moderno, inclusive definindo o cone circular como usamos atualmente. O cone de uma só folha (como um cone de sorvete) pode ser substituído por um cone de folha dupla, tal como dois cones de sorvete colocados em sentidos opostos e indefinidamente estendidos, de modo que seus vértices coincidam e os eixos estejam sobre uma mesma reta.

Os gregos promoveram um extraordinário desenvolvimento da Geometria. Entretanto, como não dispunham de uma notação algébrica adequada, a Matemática grega iniciou seu declínio.

Pelo excelente trabalho de Apolônio sobre as cônicas, a matemática seguiu evoluindo em diversos outros ramos como a trigonometria, estudos das relações em triângulos, círculos, cálculo de áreas de figuras geométricas, aritmética e principalmente o desenvolvimento da Álgebra. Esta foi de extrema importância para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Após muitos séculos, as cônicas voltam à discussão com o matemático Johannes Kepler.

No final do século XVI, o matemático Johannes Kepler (1571 - 1630) tinha muito

interesse em astronomia. No início de 1597 publicou seu primeiro livro denominado *Mysterium Cosmographicum* (Mistérios do Universo) onde defendia o heliocentrismo de Copérnico além de propor um método para calcular o tamanho de cada órbita planetária. Enviou cópias de sua obra para Tycho Brahe e Galileu Galilei.

Tycho Brahe (1546 - 1602) era de uma família nobre da Dinamarca. Em virtude de seu trabalho na área de astronomia, em 1575 já era famoso em toda a Europa. O Imperador Rudolph II, ofereceu-lhe uma ilha, chamada Hveen, onde a Dinamarca pagaria a construção de um observatório. Brahe, devido ao seu alto poder aquisitivo, encomendou a construção de equipamentos com a mais alta precisão de medida para a época, inclusive um sextante com braços de 1,6 metros, o maior já construído até então. Isso permitiu-lhe reduzir a imprecisão na medida de arco para um minuto (dez vezes menor que a imprecisão no tempo de Ptolomeu). Foi o primeiro astrônomo a calibrar, verificar a precisão de seus instrumentos periodicamente e corrigir as observações por refração atmosférica, além de instituir observações diárias. Com todo instrumental a seu dispor, durante 16 anos, realizou medidas sobre as posições dos planetas, em especial Marte. Até então, havia convicção que os planetas possuíam órbitas circulares. Aplicando as equações do círculo aos dados coletados não obteve sucesso. Então, em 1600, contratou Johannes Kepler para ajudá-lo, pois este tinha experiência e conhecimentos matemáticos, exatamente o que faltava a Tycho Brahe. Mas Kepler só obteve acesso aos dados de Brahe, após sua morte em 24 de Outubro de 1601. Dois dias depois o imperador nomeou Kepler como matemático imperial. Imediatamente Kepler começou a trabalhar no cálculo da órbita de Marte, e em 1602 descobriu a *Lei das Áreas* mas não conseguiu determinar a forma da órbita. Foi em 1605 que Kepler descobriu que a órbita era elíptica, estando o sol em um dos focos. Em 1609 publicou seus resultados no *Astronomia Nova*.

Embora esses autores tenham feito um nobre trabalho, todos eles eram baseados na Geometria conhecida na época. Prescindiam de uma notação algébrica que mostrasse de uma forma clara e objetiva seus teoremas. Neste sentido, destacaram-se dois matemáticos que deram um impulso à notação algébrica: **Diofanto de Alexandria**, que viveu no século III d.C., período conhecido como *Idade de Prata*; e **al-Khowarizmi** que viveu por volta dos anos 800 d.C. na cidade de Bagdá, cidade esta considerada a nova Alexandria.

A principal obra de **Diofanto de Alexandria**, foi a obra intitulada *Aritmética*, originalmente formada por 13 livros, onde só os 6 primeiros se preservaram. Foi uma das primeiras obras onde foi utilizada uma notação com uma linguagem simbólica para a Matemática.

Por sua vez, a principal obra de **al-Khowarizmi** foi *Al-Jabr* a qual recebeu a denominação latinizada de *Algebrae* (Álgebra). Foi através da obra de **al-Khowarizmi** que a Europa demonstrou extremo interesse pelos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Provavelmente, foi a partir daí que receberam a denominação de *algarismos arábicos*, embora o próprio autor não escondia o fato de que esses símbolos eram de origem *hindu*.

4 CÔNICAS

Pierre de Fermat (1601 - 1665), teve uma educação privilegiada, inicialmente no mosteiro franciscano de Grandseve e depois na Universidade de Toulouse. Ingressou o serviço público em 1631 e em 1652 foi promovido a Juiz Supremo, na Corte Criminal Soberana do Parlamento de Toulouse (BOYER, 1991).

Considerado o "Príncipe dos Amadores", Pierre de Fermat nunca teve formalmente a matemática como principal atividade de sua vida. Jurista e magistrado por profissão, dedicava à Matemática apenas as suas horas de lazer e, mesmo assim, foi considerado por Blaise Pascal o maior matemático de seu tempo. Na Matemática, encontrou um fervoroso opositor, Descartes. Como um estrangeiro, Fermat não conhecia o monumental egoísmo e disposição melindrosa de Descartes, e com calma e cortesia o demoliu em todas as ocasiões.

Fermat inventou a Geometria Analítica em 1629 e descreveu as suas ideias num trabalho não publicado intitulado *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*, que circulou apenas na forma de manuscrito. Neste trabalho Fermat introduziu a ideia de eixos perpendiculares e descobriu as equações gerais da reta, circunferência e equações mais simples para parábolas, elipses e hipérbolas. Depois demonstrou que toda equação de primeiro e segundo grau pode ser reduzida a um desses tipos. Nada disto está no ensaio de Descartes, apesar deste ter tido acesso à *Introdução* vários meses antes de publicar a sua obra intitulada *Geometria*, de 1637.

As cônicas são curvas planas descritas, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, por uma equação de segundo grau em duas variáveis.

Fixado um sistema ortogonal de coordenadas, chama-se **cônica** o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ que satisfazem uma equação do segundo grau $f(x, y) = 0$, em que:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

A condição sobre o grau implica que ao menos um dos números a, b, c seja diferente de zero.

Desta forma, vamos apresentar a dedução das equações da elipse, hipérbole e parábola, bem como suas propriedades fundamentais.

5 ELIPSE

5.1 DEFINIÇÃO

Uma elipse, \mathbf{E} , é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 do mesmo plano, denominados *focos*, é uma constante e igual a $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$$

$$0 \leq c < a; \quad d(F_1, F_2) = 2c$$

5.2 TERMINOLOGIA

Vamos definir os termos utilizados no estudo da elipse e analisar a simetria em relação à reta focal, a reta não-focal e seu eixo (DELGADO, 2011).

- Como foi dito na definição, os pontos F_1 e F_2 são os *focos* da elipse.
- A reta r que contém os focos é a *reta focal* (ver Figura 5.1).

Figura 5.1 – Posicionamento dos focos da elipse na reta focal.



Fonte: Próprio autor.

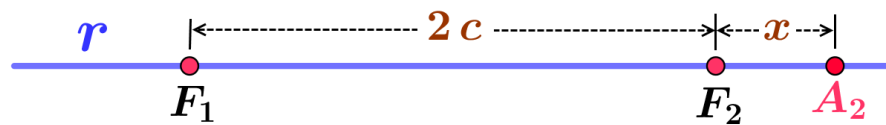
- A interseção da elipse \mathbf{E} com a reta r consiste de dois pontos, A_1 e A_2 , chamados *vértices* da elipse sobre a reta focal.

Observemos inicialmente que a elipse não pode interseccionar o segmento de reta F_1F_2 , pois se um ponto $A \in \mathbf{E}$ é um ponto desse segmento, por um lado temos

$$d(A, F_1) + d(A, F_2) = d(F_1, F_2) = 2c$$

por outro, como A é um ponto da elipse, temos que $d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a$, o que implica que $a = c$, o que contradiz $a > c$.

Figura 5.2 – Posicionamento dos vértices em relação aos focos da elipse na reta focal.

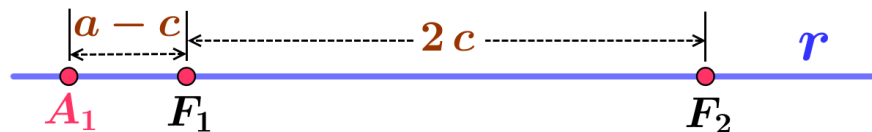


Fonte: Próprio autor.

Agora consideremos a possibilidade da interseção da elipse com a reta focal ocorra fora do segmento focal F_1F_2 . Vamos considerar que a interseção se dê à direita do foco F_2 , conforme Figura 5.2. Seja A_2 este ponto, e seja $x = d(A_2, F_2)$.

Como $2a = d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = x + 2c + x$, pois $A_2 \in \mathbf{E}$, temos que $x = a - c$. Portanto, o ponto A_2 pertencente a $r - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_2 , pertence à elipse \mathbf{E} . Analogamente, temos que o ponto A_1 pertencente a $r - F_1F_2$ que dista $a - c$ do foco F_1 , pertence à elipse \mathbf{E} (ver Figura 5.3).

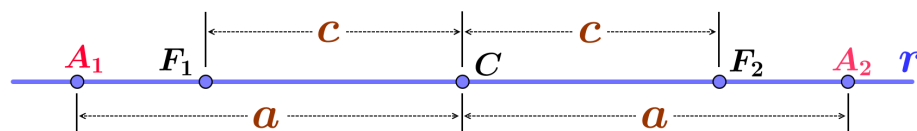
Figura 5.3 – Determinação da distância dos vértices aos focos da elipse.



Fonte: Próprio autor.

- O segmento A_1A_2 , cujo comprimento é $2a$, é denominado *eixo focal* da elipse.

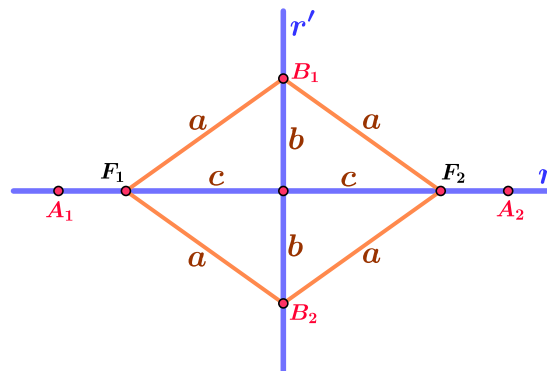
Figura 5.4 – Posicionamento dos focos, vértices e centro da elipse na reta focal.



Fonte: Próprio autor.

- O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o *centro* da elipse. Esse ponto é, também, o ponto médio do segmento F_1F_2 , delimitado pelos focos (ver Figura 5.4).
- A reta r' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal r , é denominada *reta não-focal*.
- A elipse intersecta a reta não-focal r' em exatamente dois pontos, B_1 e B_2 , denominados *vértices da elipse sobre a reta não-focal* (ver Figura 5.5).

Figura 5.5 – Posicionamento dos focos, vértices e centro da elipse nas retas focal e não-focal.



Fonte: Próprio autor.

De fato, como r' é mediatriz do segmento F_1F_2 , temos que $B \in r' \cap \mathbf{E}$ se, e somente se, $d(B, F_1) = d(B, F_2) = a$. Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos que $r' \cap \mathbf{E}$ consiste de dois pontos, B_1 e B_2 , em r' que distam $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C da elipse.

- O segmento B_1B_2 é denominado *eixo não-focal* da elipse e seu comprimento é $2b$ onde $b^2 = c^2 - a^2$.

Em relação à simetria da elipse podemos afirmar que a elipse \mathbf{E} é simétrica em relação à reta focal, à reta não-focal e ao centro.

- **Simetria em relação à reta focal**

Observe que, se $P \in \mathbf{E}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então:

$$\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q$$

e

$$\triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q$$

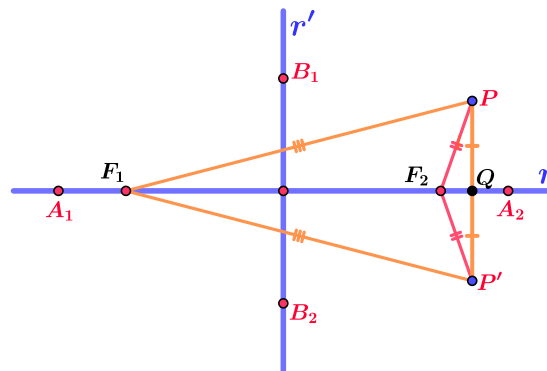
onde Q é o pé da perpendicular à reta focal que passa por P . De fato, temos o segmento F_2Q comum aos dois triângulos, os segmentos PQ e $P'Q$ congruentes e os ângulos $F_2\hat{Q}P$ e $F_2\hat{Q}P'$ retos, assim fica estabelecida a congruência dos dois triângulos. Analogamente temos os triângulos F_1QP e F_1QP' congruentes (ver Figura 5.6).

Em particular, $F_1P \equiv F_1P'$ e $F_2P \equiv F_2P'$.

Logo,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P', F_1) + d(P', F_2) \implies P' \in \mathbf{E}$$

Figura 5.6 – Simetria da elipse em relação à reta focal.



Fonte: Próprio autor.

- **Simetria em relação à reta não-focal**

Seja P um ponto da elipse que não pertence a r' e seja P' seu simétrico em relação à reta não-focal r' . Seja Q o ponto médio de PP' , ou seja $PQ \equiv P'Q$.

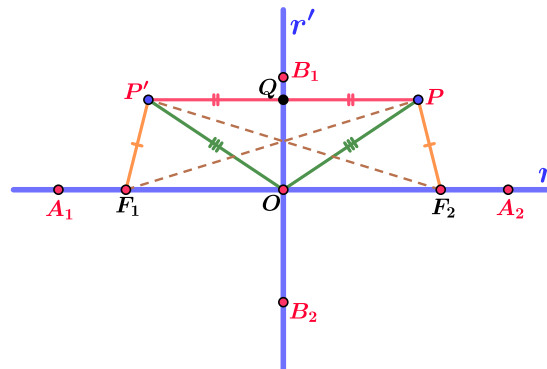
Pela definição de ponto simétrico temos que Q é o pé da perpendicular a r' que passa por P , o que é equivalente aos ângulos \widehat{PQO} e $\widehat{P'QO}$, onde O é o centro da elipse, serem ângulos retos (ver Figura 5.7).

Considere inicialmente os triângulos $\triangle OP'Q$ e $\triangle OPQ$, como ambos são retângulos em Q , $P'Q \equiv PQ$ e OQ comum aos dois triângulos, temos $\triangle OP'Q \equiv \triangle OPQ$, assim $P'O \equiv PO$ e os ângulos $\widehat{QOP'} \equiv \widehat{QOP}$. Desta última decorre que os ângulos $\widehat{P'OF_1}$ e $\widehat{POF_2}$ são congruentes, pois r e r' são perpendiculares entre si.

Agora considere os triângulos $\triangle P'F_1O$ e $\triangle PF_2O$. Temos $OF_1 \equiv OF_2$, $OP' \equiv OP$ e $\widehat{P'OF_1} \equiv \widehat{POF_2}$, logo $\triangle P'F_1O \equiv \triangle PF_2O$ e portanto $P'F_1 \equiv PF_2$ e $\widehat{P'F_1O} \equiv \widehat{PF_2O}$.

Considere ainda os triângulos $\triangle P'F_1F_2$ e $\triangle PF_2F_1$, como $P'F_1 \equiv PF_2$, $\widehat{P'F_1F_2} \equiv \widehat{PF_2F_1}$, esta decorre de $\widehat{P'F_1O} \equiv \widehat{PF_2O}$, temos $\triangle P'F_1F_2 \equiv \triangle PF_2F_1$ e portanto $P'F_2 \equiv PF_1$. Decorre de $P'F_1 \equiv PF_2$ e $P'F_2 \equiv PF_1$ que a elipse é simétrica em relação à reta não-focal r' .

Figura 5.7 – Simetria da elipse em relação à reta não-focal.



Fonte: Próprio autor.

- **Simetria em relação ao centro**

Se $P \in \mathbf{E}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1$$

e

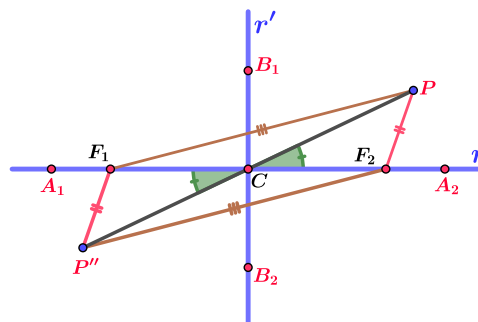
$$\triangle PCF_1 \equiv \triangle P''CF_2.$$

Em particular, $F_1P \equiv F_2P''$ e $F_2P \equiv F_1P''$ (ver Figura 5.8).

Portanto,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P'', F_2) + d(P'', F_1) \implies P'' \in \mathbf{E}$$

Figura 5.8 – Simetria da elipse em relação ao centro.

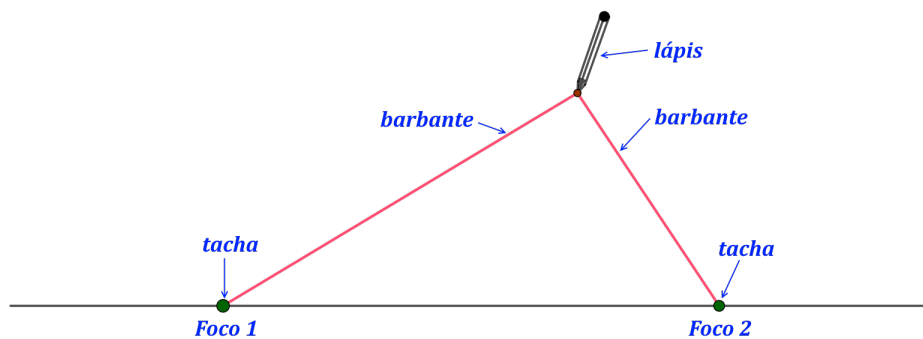


Fonte: Próprio autor.

5.2.1 Construção mecânica do traço da elipse

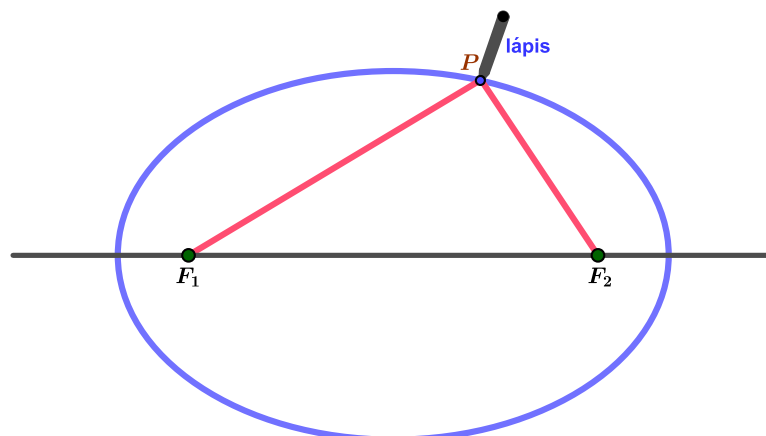
Um método possível de ser utilizado para traçar uma elipse é fixando duas tachas em uma prancha onde está fixada uma folha de papel. As duas tachas representam os focos da elipse. Amarramos um barbante às duas tachas com um tamanho maior que a distância entre elas, conforme esquema mostrado na Figura 5.9. Com um lápis, mantemos o barbante bem esticado e, deslizando o lápis até dar uma volta completa temos o traçado de uma elipse. O tamanho do barbante representa a soma das distâncias da ponta do lápis ao *Foco 1* e ao *Foco 2*.

Figura 5.9 – Traçando uma elipse com lápis e barbante.



Fonte: Próprio autor.

Figura 5.10 – Traçado da elipse.



Fonte: Adaptado de ??).

Na Figura 5.10 é possível notar o desenho do traço da elipse após o lápis dar uma volta completa mantendo o barbante esticado.

5.2.2 Proposta didática: traçando a elipse

Pode-se propor um plano de aula para alunos do terceiro ano do ensino Médio a fim de demonstrar como traçar uma elipse utilizando material de fácil obtenção, tais como barbante, lápis, régua, folha de papel A4 e dois percevejos.

Orientação ao professor - Peça aos alunos para traçarem uma reta no meio da folha (preferencialmente na posição paisagem). Sobre a reta marcar dois pontos F_1 e F_2 . Prender um percevejo em F_1 junto com uma das pontas do barbante. Deixe os alunos concluírem que o tamanho do barbante deve ser um pouco maior que a distância entre F_1 e F_2 , bem como perceberem que a outra ponta do barbante deve ser presa no ponto F_2 com o outro percevejo. Após a montagem do sistema peça aos alunos para traçarem a elipse com o lápis, verificando se os alunos percebem que devem manter o barbante esticado enquanto traçam a elipse.

Conduta do professor - Após o término da construção da elipse peça aos alunos para marcarem os dois pontos onde a elipse intercepta a reta traçada. Estimule os alunos a perceberem que esses pontos são os vértices do eixo maior da elipse A_1 e A_2 . Os alunos podem comprovar com a régua que $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$. Peça aos alunos para escolherem um ponto P qualquer sobre a elipse e que comprovem a definição da elipse $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ onde $2a = d(A_1, A_2)$. A partir desse momento o professor pode desenvolver a equação reduzida da elipse partindo da equação que define a distância entre dois pontos, conforme pode ser revista na seção 5.3 desta dissertação.

5.3 EQUAÇÃO DA ELIPSE

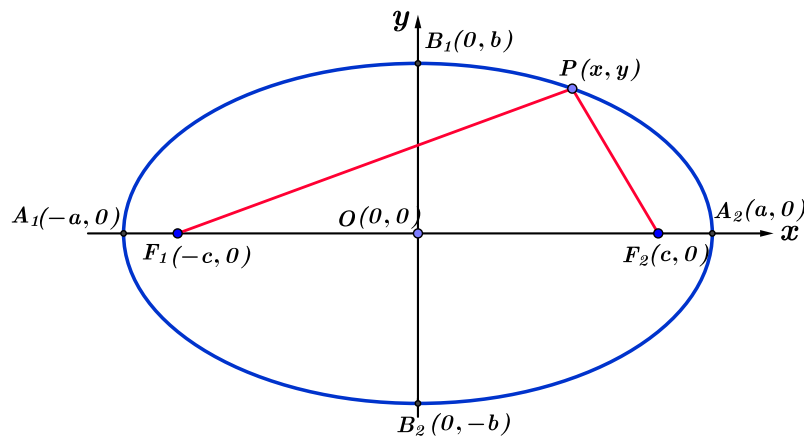
A equação que descreve os pontos de uma elipse depende de sua posição em relação ao sistema de coordenadas adotado (BALDIN, p. 237, 2011). A seguir será discutido a equação da elipse com centro na origem do sistema de coordenadas e os focos sobre os eixos coordenados.

5.3.1 Elipse com centro na origem e eixo maior horizontal

Consideremos uma elipse de eixo maior horizontal de comprimento $2a$ e centro na origem $O(0,0)$ conforme a Figura 5.11. Usando as medidas convencionadas anteriormente, temos:

- os vértices são os pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$;
- os focos são os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$;
- as extremidades do eixo não-focal são os pontos $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$.

Figura 5.11 – Elipse horizontal centrada em $O(0,0)$.



Fonte: Próprio autor.

Conforme a definição de elipse como lugar geométrico, o ponto $P(x, y)$ pertence à elipse se, e somente se, a soma da distância $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$, denominadas raios focais, é igual a $2a$.

Aplicando a fórmula da distância, $d(P, F_1) + d(P, F_2)$ se escreve como:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (5.1)$$

Trabalhando algebricamente a equação acima, deixando uma raiz em um dos membros e posteriormente elevando os dois membros ao quadrado, encontramos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (5.2)$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Resolvendo, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Cancelando os termos comuns em ambos os membros e agrupando os termos restantes, obtemos:

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Vamos, mais uma vez, elevar ao quadrado e simplificar. Assim:

$$\left(a^2 - cx\right)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

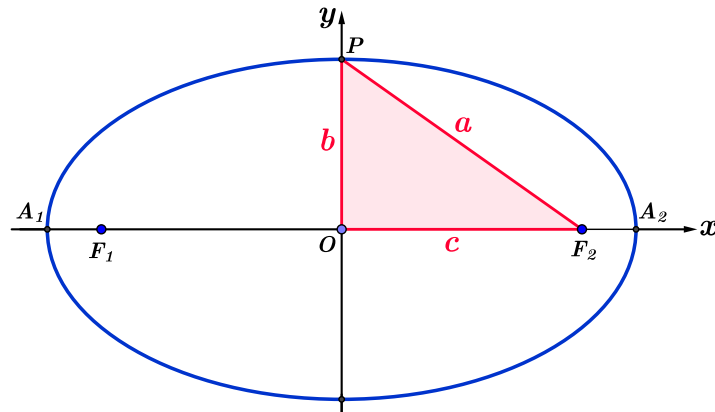
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (5.3)$$

Na Figura 5.12 vemos que as medidas a , b e c formam um triângulo retângulo.

Logo, aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{donde} \quad b^2 = a^2 - c^2$$

Figura 5.12 – Relação de Pitágoras na elipse.



Fonte: Próprio autor.

Usando esta relação na Equação 5.3, podemos escrever:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e finalmente, dividindo ambos os membros da equação por $a^2b^2 \neq 0$, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.4)$$

que é a **equação reduzida** da elipse. Observando a particularidade de $a = b$, vemos que a elipse se reduz a uma circunferência.

Por outro lado, devemos verificar se todo ponto $P(x, y)$ que satisfaz a Equação 5.4, realmente pertence à elipse. Devido ao fato de termos elevado ao quadrado duas vezes a equação de partida Equação 5.2 poderia acontecer de surgirem pontos que não pertencem à elipse, porém satisfazem a Equação 5.4. Certifiquemo-nos de que isso não acontece, verificando que, se $P(x, y)$, é tal que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Manipulando algebricamente a Equação 5.4, obtemos:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
[d(P, F_1)]^2 &= (x + c)^2 + y^2 \\
&= x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} \\
&= \frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^2} + 2cx + c^2 + b^2
\end{aligned}$$

da equação $a^2 = b^2 + c^2$, temos

$$\begin{aligned}
&= \frac{c^2 x^2}{a^2} + 2cx + a^2 \\
&= \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2
\end{aligned}$$

De forma similar, obtemos:

$$[d(P, F_2)]^2 = \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2$$

Como estamos interessados na distância entre o ponto P e os focos, extraindo a raiz temos

$$d(P, F_1) = \left|\frac{cx}{a} + a\right| \quad (5.5)$$

$$d(P, F_2) = \left|\frac{cx}{a} - a\right| \quad (5.6)$$

Pela hipótese $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ decorre que $x^2/a^2 \leq 1$, que é equivalente a $|x| \leq a$. Multiplicando os dois membros dessa igualdade por c/a (que é um número positivo), concluímos que:

$$\frac{c|x|}{a} \leq c < a$$

Logo,

$$-a < \frac{cx}{a} < a \quad \text{e, portanto} \quad \frac{cx}{a} + a > 0 \quad \text{e} \quad \frac{cx}{a} - a < 0$$

Agora, desfazendo-nos dos módulos das Equações 5.5 e 5.6, podemos escrever:

$$d(P, F_1) = a + \frac{cx}{a} \quad (5.7)$$

$$d(P, F_2) = a - \frac{cx}{a} \quad (5.8)$$

Somando as Equações 5.7 e 5.8, obtemos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

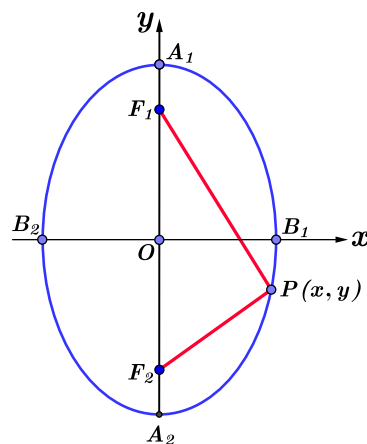
Desta forma concluímos que todo ponto $P(x, y)$ que satisfaz a Equação 5.4 pertence à elipse.

5.3.2 Elipse com centro na origem e eixo maior vertical

Consideremos uma elipse de eixo maior vertical de comprimento $2a$ e centro na origem $O(0, 0)$ conforme a Figura 5.13. Usando as medidas convencionadas anteriormente, temos:

- os vértices são os pontos $A_1(0, a)$ e $A_2(0, -a)$;
- os focos são os pontos $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$;
- as extremidades do eixo menor são os pontos $B_1(b, 0)$ e $B_2(-b, 0)$.

Figura 5.13 – Elipse eixo maior vertical.



Fonte: Próprio autor.

Usando o mesmo procedimento do caso da elipse com eixo maior horizontal e aplicando a definição de elipse como lugar geométrico, podemos demonstrar que a **equação reduzida** da elipse mostrada na Figura 5.13 é dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (5.9)$$

Observe que esta equação difere da anterior pela permutação das constantes a e b no denominador.

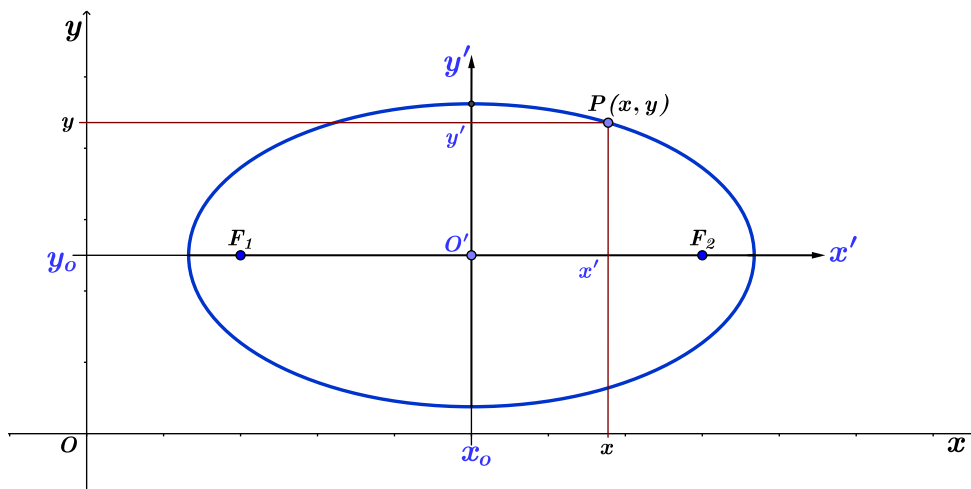
5.3.3 Deslocamento do centro da elipse e eixo maior horizontal

Dados dois sistemas de eixos de coordenadas no plano cartesiano que se encontram transladados um em relação ao outro, isto é, cujos eixos correspondentes são paralelos, podemos relacionar as coordenadas de um ponto em um dos sistemas com a coordenada do mesmo ponto no outro sistema (SIQUEIRA, 2012).

A Figura 5.14 ilustra um sistema de coordenadas $x'y'$ com origem no ponto $O'(x_0, y_0)$ do sistema de coordenadas xy . Para um ponto P qualquer da elipse, podemos assinalá-lo no sistema $x'y'$ com as coordenadas $P(x', y')$ e no sistema xy suas coordenadas são $P(x, y)$. Logo, pela Figura 5.14 podemos observar a relação entre as coordenadas do sistema xy e as coordenadas do sistema $x'y'$, dadas por:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Figura 5.14 – Deslocamento do eixo de coordenadas da elipse.



Fonte: Próprio autor.

Observe que a equação da elipse referenciado ao sistema $x'y'$ é dada por:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Fazendo a substituição $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, na equação acima, obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (5.10)$$

Esta é a **equação reduzida** da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo maior paralelo ao eixo central.

5.3.4 Deslocamento do centro da elipse e eixo maior vertical

De forma similar, a equação reduzida de uma elipse **E** com eixo maior na vertical e centro em $C'(x_0, y_0)$ é dada num sistema de coordenadas $x' y'$ transladado em relação ao sistema original $x y$ com origem $O'(x_0, y_0)$ por

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$$

Então fazendo a substituição $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, temos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \quad (5.11)$$

6 HIPÉRBOLE

6.1 DEFINIÇÃO

Uma hipérbole, \mathbf{H} , de focos F_1 e F_2 , é o lugar geométrico de todos os pontos P de um plano cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$.

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$0 \leq a < c; \quad d(F_1, F_2) = 2c$$

6.1.1 Considerações

Para todo ponto P do plano, temos que (DELGADO, 2011)

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| \leq d(F_1, F_2)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, P pertence à semirreta de origem F_1 que não contém F_2 , ou a semirreta de origem F_2 que não contém F_1 . Em particular, como $2a < 2c$, nenhum ponto sobre essas semirretas pertence à hipérbole \mathbf{H} (ver Figura 6.1).

Figura 6.1 – Semi-retas que contêm apenas um dos focos.



Fonte: Próprio autor.

De fato, pela desigualdade triangular, temos que

$$d(P, F_1) \leq d(P, F_2) + d(F_2, F_1)$$

e

$$d(P, F_2) \leq d(P, F_1) + d(F_1, F_2).$$

Logo,

$$-d(F_1, F_2) \leq d(P, F_1) - d(P, F_2) \leq d(F_1, F_2),$$

ou seja,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| \leq d(F_1, F_2)$$

Além disso, temos que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = d(F_1, F_2)$$

se, e somente se,

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = d(F_1, F_2) \implies d(P, F_1) = d(P, F_2) + d(F_1, F_2)$$

ou

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = -d(F_1, F_2) \implies d(P, F_2) = d(P, F_1) + d(F_1, F_2).$$

Se $d(P, F_1) - d(P, F_2) = d(F_1, F_2)$, temos que $F_2 \in F_1P$, ou seja, P pertence à semi-reta de origem F_2 que não contém F_1 (ver Figura 6.2).

Figura 6.2 – F_2 entre F_1 e P .



Fonte: Próprio autor.

Se $d(P, F_2) - d(P, F_1) = d(F_1, F_2)$, temos que $F_1 \in F_2P$, ou seja, P pertence à semi-reta de origem F_1 que não contém F_2 (ver Figura 6.3).

Figura 6.3 – F_1 entre P e F_2 .



Fonte: Próprio autor.

Por isso, tomamos $c > a$ na definição da hipérbole, pois se $c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, o conjunto

$$\{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

representaria o conjunto vazio, e se $c = a$, o conjunto acima representaria a união da semi-reta de origem F_1 que não contém F_2 com a semi-reta de origem F_2 que não contém F_1 .

6.2 TERMINOLOGIA

- Os pontos F_1 e F_2 são os *focos* da hipérbole.
- A reta r que contém os focos é a *reta focal* (ver Figura 6.4).
- A interseção da hipérbole com a reta focal r consiste de exatamente de dois pontos, A_1 e A_2 , chamados *vértices* da hipérbole. De fato, pela seção 6.1.1, temos que se $A \in \mathbf{H} \cap r$, então $A \in F_1F_2$. Seja $A_1 \in F_1F_2 \cap \mathbf{H}$ tal que $d(A_1, F_1) = x$, sendo $x < c$.

Figura 6.4 – Posicionamento dos vértices em relação aos focos da hipérbole na reta focal.



Fonte: Próprio autor.

Como $d(F_1, F_2) = 2c$, temos

$$|d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = 2a \iff |x - (2c - x)| = 2a \iff |2x - 2c| = 2a$$

E daí, concluímos que

$$2c - 2x = 2a \iff x = c - a.$$

Logo o ponto A_1 de F_1F_2 distante $c - a$ de F_1 pertence à hipérbole \mathbf{H} .

De modo análogo, o ponto A_2 de F_1F_2 distante $c - a$ de F_2 pertence à hipérbole \mathbf{H} (ver Figura 6.5).

- O segmento A_1A_2 é chamado *eixo focal* da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$.
- O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o *centro* da hipérbole. Esse ponto é, também, o ponto médio do segmento F_1F_2 delimitado pelos focos: $C = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{F_1 + F_2}{2}$

Figura 6.5 – Posicionamento dos focos, vértices e centro da hipérbole na reta focal.

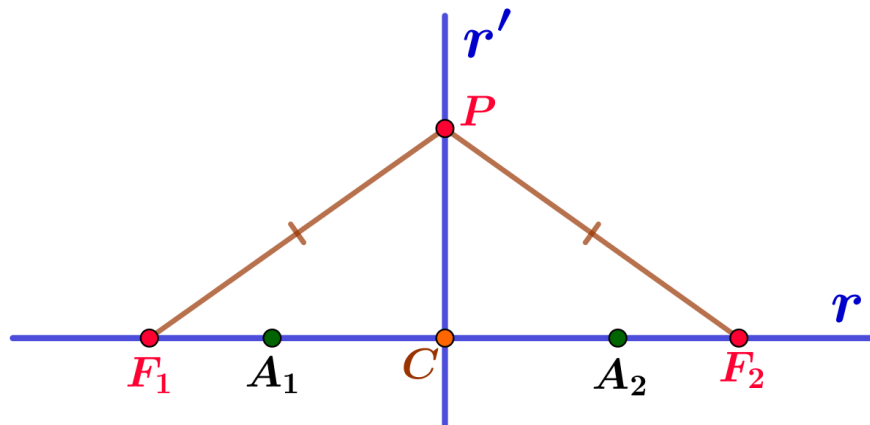


Fonte: Próprio autor.

Observe que $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ e $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$.

- A reta r' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal r é a *reta não-focal* da hipérbole. Como r' é a mediatriz do segmento F_1F_2 , a hipérbole não intersecta a reta não-focal r' , pois se $P \in r'$, temos que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a$ (ver Figura 6.6).

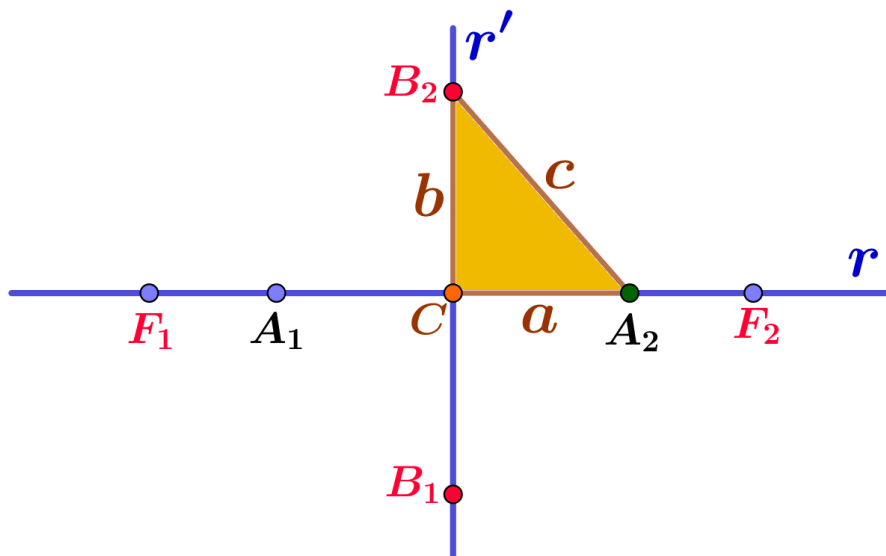
Figura 6.6 – Pontos do eixo não-focal não pertencem à hipérbole.



Fonte: Próprio autor.

- O segmento B_1B_2 perpendicular ao eixo focal que tem C como ponto médio e comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado *eixo não-focal* da hipérbole, sendo B_1 e B_2 os vértices imaginários da hipérbole (ver Figura 6.7).

Figura 6.7 – Relação dos comprimentos a , b , c .

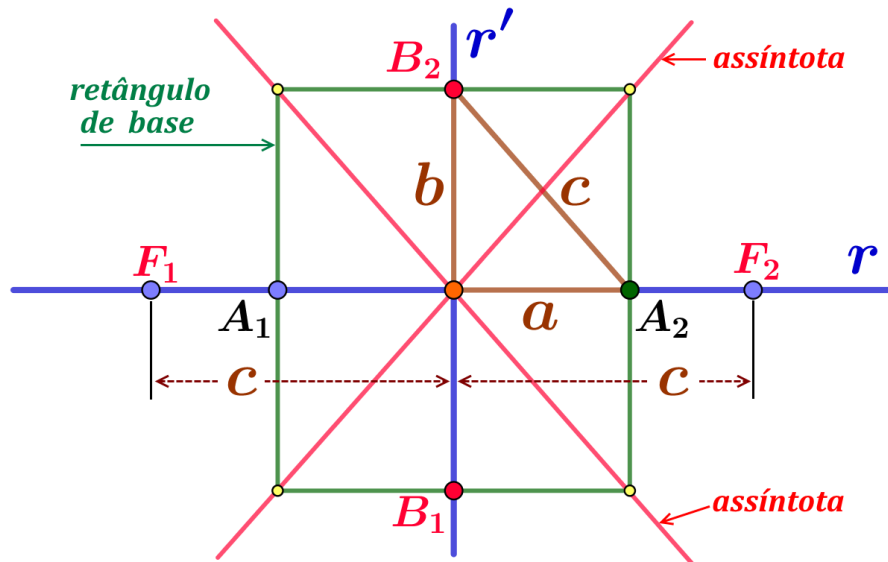


Fonte: Próprio autor.

- O *retângulo de base* da hipérbole H é o retângulo que tem os pontos A_1 , A_2 , B_1 e B_2

como pontos médios de seus lados e as retas que contêm as diagonais do retângulo de base da hipérbole \mathbf{H} são as *assíntotas* de \mathbf{H} .

Figura 6.8 – Assíntotas e retângulo de base.



Fonte: Próprio autor.

Portanto as assíntotas da hipérbole \mathbf{H} são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação à reta focal.

Pelo Teorema de Pitágoras, as diagonais do retângulo de base de \mathbf{H} têm comprimento $2c$ e a distância do centro de \mathbf{H} a qualquer vértice do retângulo de base é igual a c . A Figura 6.8 ilustra essas propriedades.

- Dizemos que uma hipérbole é *equilátera* se o comprimento do eixo focal é igual ao comprimento do eixo não-focal, isto é, $a = b$.

Então, o retângulo de base de uma hipérbole equilátera é, na realidade, um quadrado. Em particular, as retas que contêm suas diagonais, isto é, suas assíntotas, intersectam-se perpendicularmente.

- Duas hipérboles tais que o eixo focal de cada uma é igual ao eixo não-focal da outra são denominadas *hipérboles conjugadas*. Como os retângulos de base de duas hipérboles conjugadas são iguais, elas têm o mesmo centro, mesmas assíntotas e os focos a uma mesma distância do centro.

A hipérbole apresenta as mesmas simetrias da elipse, a seguir examinamos cada uma delas.

- **Simetria em relação à reta focal**

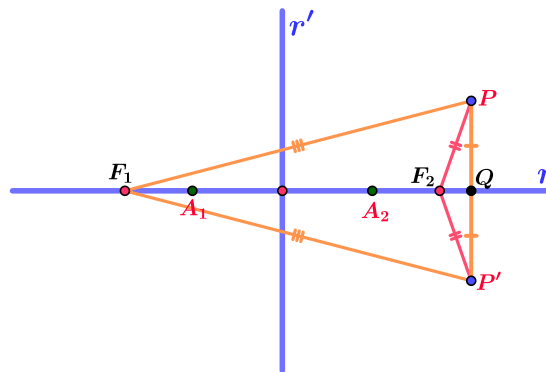
A hipérbole \mathbf{H} é simétrica em relação a reta focal. De fato, se $P \in \mathbf{H}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então

$$\triangle F_2 P Q \equiv \triangle F_2 P' Q$$

e

$$\triangle F_1 P Q \equiv \triangle F_1 P' Q.$$

Figura 6.9 – Simetria da hipérbole em relação à reta focal.



Fonte: Próprio autor.

onde Q é o pé da perpendicular à reta focal que passa por P . De fato, temos o segmento F_2Q comum aos dois triângulos, os segmentos PQ e $P'Q$ congruentes e os ângulos $F_2\hat{Q}P$ e $F_2\hat{Q}P'$ retos, assim fica estabelecida a congruência dos dois triângulos. Analogamente temos os triângulos F_1QP e F_1QP' congruentes.

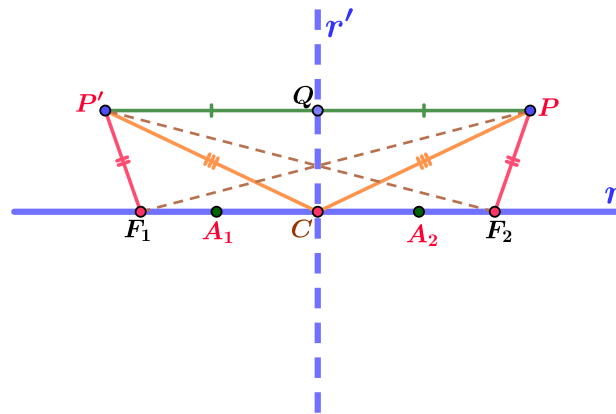
Em particular, $F_2P \equiv F_2P'$ e $F_1P \equiv F_1P'$ (ver Figura 6.9). Logo

$$2a = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P', F_1) - d(P', F_2)| \implies P' \in \mathbf{H}.$$

- **Simetria em relação à reta não-focal**

A hipérbole H é simétrica em relação à reta não-focal. De fato, seja P um ponto da hipérbole e seja P' seu simétrico em relação à reta não-focal r' . Seja Q o ponto médio de PP' , ou seja $PQ \equiv P'Q$.

Figura 6.10 – Simetria da hipérbole em relação à reta não-focal.



Fonte: Próprio autor.

Pela definição de ponto simétrico temos que Q é o pé da perpendicular a r' que passa por P , o que é equivalente aos ângulos $P\hat{Q}C$ e $P'\hat{Q}C$, onde C é o centro da hipérbole, serem ângulos retos (ver Figura 6.10).

Considere inicialmente os triângulos $\triangle CQP'$ e $\triangle CQP$, como ambos são retângulos em Q , $P'Q \equiv PQ$ e CQ comum aos dois triângulos, temos $\triangle CQP' \equiv \triangle CQP$, assim $P'C \equiv PC$ e os ângulos $Q\hat{C}P' \equiv Q\hat{C}P$. Desta última decorre que os ângulos $P'\hat{C}F_1$ e $P\hat{C}F_2$ são congruentes, pois r e r' são perpendiculares.

Agora considere os triângulos $\triangle P'F_1C$ e $\triangle PF_2C$. Temos $CF_1 \equiv CF_2$, $CP' \equiv CP$ e $P'\hat{C}F_1 \equiv P\hat{C}F_2$, logo $\triangle P'F_1C \equiv \triangle PF_2C$ e portanto $P'F_1 \equiv PF_2$ e $P'\hat{F}_1C \equiv P\hat{F}_2C$.

Considere agora os triângulos $\triangle P'F_1F_2$ e $\triangle PF_2F_1$. Como $P'F_1 \equiv PF_2$, $P'\hat{F}_1F_2 \equiv P\hat{F}_2F_1$, esta decorre de $P'\hat{F}_1C \equiv P\hat{F}_2C$, temos $\triangle P'F_1F_2 \equiv \triangle PF_2F_1$ e portanto $P'F_2 \equiv PF_1$.

Decorre de $P'F_1 \equiv PF_2$ e $P'F_2 \equiv PF_1$ que a hipérbole é simétrica em relação à reta não-focal r' .

- **Simetria em relação ao centro**

Se $P \in \mathbf{H}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1$$

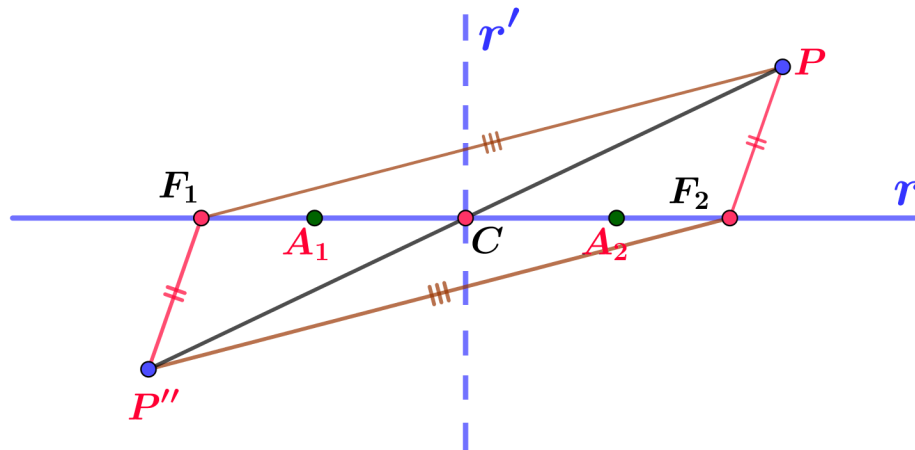
e

$$\triangle F_1CP \equiv \triangle P''CF_2.$$

Em particular, $F_2P \equiv F_1P''$ e $F_1P \equiv F_2P''$ (ver Figura 6.11). Logo

$$2a = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P'', F_1) - d(P'', F_2)| \implies P'' \in \mathbf{H}.$$

Figura 6.11 – Simetria da hipérbole em relação ao centro.



Fonte: Próprio autor.

6.2.1 Construção mecânica do traço da hipérbole

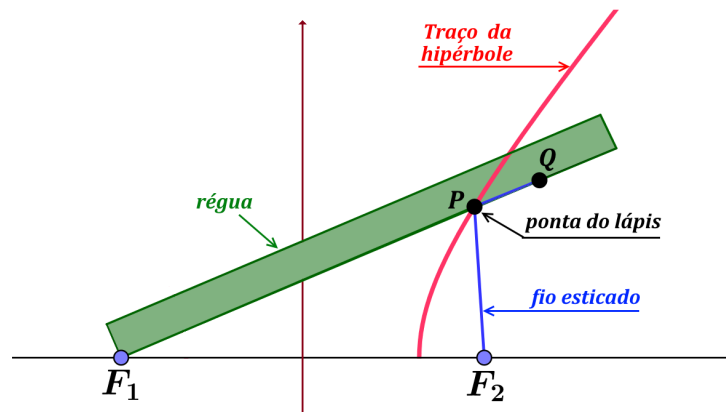
A hipérbole pode ser traçada com o emprego de uma régua e um fio esticado. Para efeitos práticos consideramos aqui a régua como sendo um segmento de reta, que pode ser pensado como a parte graduada de uma régua escolar.

Para isso, tome uma régua de comprimento l maior que a distância entre os focos F_1 e F_2 da hipérbole e um fio de comprimento m , sendo $m < l$.

Num dos focos é fixada uma das extremidades da régua de modo que ela possa girar em torno dele. No outro foco, é fixada uma das extremidades do fio e sua outra extremidade é fixada na outra extremidade da régua.

A ponta de um lápis, em contato com a régua, prende junto à esta o fio de modo a mantê-lo esticado. Na figura abaixo é mostrado a régua fixada no foco F_1 e o fio fixado no foco F_2 .

Figura 6.12 – Traço da hipérbole.



Fonte: Próprio autor.

Girando a régua em torno do foco F_1 , a ponta P do lápis se desloca junto à régua para manter o fio esticado, desenhando assim uma curva. Denotando Q a extremidade que é mantida fixa na régua, temos

$$m = d(F_2, P) + d(P, Q)$$

e

$$l = d(F_1, P) + d(P, Q)$$

de onde segue

$$d(F_2, P) = m - l + d(F_1, P)$$

e portanto

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = l - m$$

Observe que nesta última igualdade, o lado direito não depende de P . Isto mostra que P é ponto de uma hipérbole com $2a = l - m$, isto é, conforme P se desloca ele descreve os pontos de uma hipérbole.

Em virtude das simetrias que a hipérbole apresenta, basta traçar, por exemplo, apenas os pontos que estão acima da reta focal. Os pontos que estão abaixo da reta focal são obtidos pela simetria em relação à reta focal, enquanto que a simetria em relação à reta não-focal resulta no outro ramo da hipérbole, o qual pode ser ainda obtido trocando a função dos dois focos na construção apresentada.

6.2.2 Proposta didática: traçando a hipérbole

Similar ao que foi feito para a elipse é possível propor um plano de aula com o objetivo de traçar uma hipérbole utilizando materiais, tais como, uma régua, barbante, lápis, folha A4 e percevejos.

Orientação ao professor - Peça aos alunos para traçarem uma reta horizontal no meio da folha (preferencialmente na posição paisagem). Sobre a reta marcar dois pontos F_1 e F_2 . Prende-se uma das pontas da régua em F_1 , por exemplo. Uma das pontas do barbante prende-se em F_2 e a outra ponta na régua (ponto Q , Figura 6.12). Deixe os alunos concluírem que o tamanho do barbante deve ser menor que a distância entre F_1 e F_2 . Após o sistema montado peça aos alunos que tracem a hipérbole.

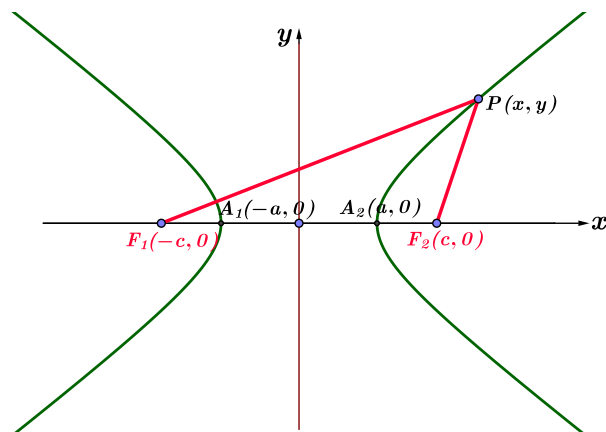
Conduta do professor - Após o término da construção da curva peça aos alunos que marquem os pontos onde a hipérbole intersecta a reta traçada. Avalie se os alunos perceberam que esses dois pontos são os vértices da hipérbole assinalados por A_1 e A_2 . Peça aos alunos escolherem um ponto P qualquer sobre a curva da hipérbole e verificar se a definição de hipérbole se aplica, onde $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, sendo $2a = d(A_1, A_2)$. A seguir, utilizando o conceito de distância entre dois pontos desenvolva a equação reduzida da hipérbole conforme seção 6.3 deste trabalho.

6.3 EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE

Pela definição de hipérbole (BALDIN, 2011) temos

$$\left| d(P, F_1) - d(P, F_2) \right| = 2a \quad (6.1)$$

Figura 6.13 – Medidas em uma hipérbole.



Fonte: Próprio autor.

Por outro lado, pela Figura 6.13, sabemos que:

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad e \quad d(P, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Rearranjando os termos da Equação 6.1 e substituindo $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ pelos valores acima, temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (6.2)$$

elevando ambos os membros ao quadrado e reagrupando os termos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Cancelando os termos comuns em ambos os membros e agrupando os termos restantes, obtemos:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Vamos, mais uma vez, elevar ao quadrado e simplificar. Assim:

$$(cx - a^2)^2 = (a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

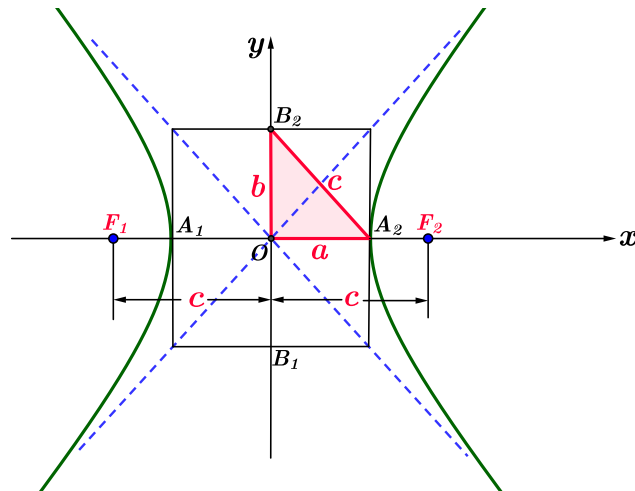
$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (6.3)$$

Usamos que $b^2 = c^2 - a^2$ (ver Figura 6.14). Então, substituindo esta igualdade na Equação 6.3, obtemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Figura 6.14 – Relação entre a , b e c na hipérbole horizontal.



Fonte: Próprio autor.

e finalmente dividindo ambos os membros da equação por $a^2b^2 \neq 0$, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.4)$$

que é a **equação reduzida** da hipérbole **H**.

Naturalmente poderíamos ter escolhido outro sistema de coordenadas para desenvolver a equação da hipérbole. Por exemplo, se escolhermos o eixo O_y como eixo principal e o centro da hipérbole for escolhido como origem, de modo que $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, então vamos obter uma equação com uma permuta entre x e y e chegaremos a outra equação reduzida da hipérbole, qual seja:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (6.5)$$

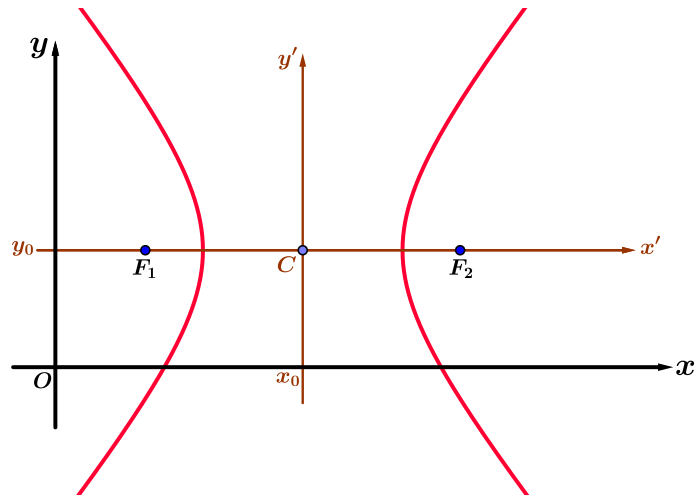
Comparando as Equações 6.4 e 6.5 percebemos que o termo que contém o sinal + no primeiro membro da equação reduzida indica o eixo que contém os focos. Além disso, em qualquer dos dois casos, o denominador é a^2 . Na hipérbole, a pode ser maior, menor ou igual a b .

6.3.1 Hipérbole com eixo principal horizontal e centro deslocado da origem

Na Figura 6.15 vemos uma hipérbole com a reta focal na horizontal e centro no ponto $C(x_0, y_0)$.

Usando raciocínio análogo ao caso da elipse, a equação da hipérbole referenciada ao sistema de eixos $x' y'$ é

Figura 6.15 – Hipérbole transladada.



Fonte: Próprio autor.

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Para um ponto P qualquer da hipérbole, podemos assinalá-lo no sistema $x'y'$ com as coordenadas $P(x', y')$. A relação entre as coordenadas do sistema xy e as coordenadas do sistema $x'y'$, são dadas por:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Assim, fazendo a substituição $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, na equação acima, obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Esta é a **equação reduzida** da hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) em relação ao sistema xy e eixo principal horizontal.

Considerando que na hipérbole a distância entre os vértices é igual a $2a$ e entre os focos é igual a $2c$, temos em relação ao sistema xy :

- os focos são os pontos $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$
- os vértices são os pontos $A_1(x_0 - a, y_0)$ e $A_2(x_0 + a, y_0)$

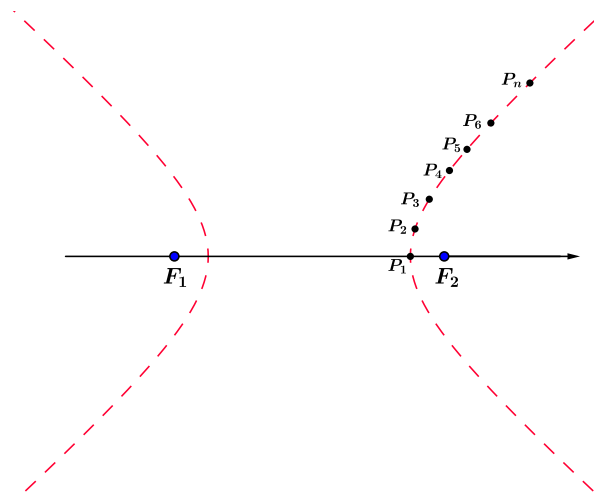
No caso do eixo focal estar na vertical, a equação da hipérbole com centro $C(x_0, y_0)$ é

$$-\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

- os focos são os pontos $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$
- os vértices são os pontos $A_1(x_0, y_0 - a)$ e $A_2(x_0, y_0 + a)$

Cabe ressaltar que a equação reduzida da hipérbole determina o lugar geométrico de todos os pontos P que satisfazem a definição de hipérbole. Podemos determinar vários pontos pertencentes à hipérbole oportunizando diferentes valores para x ou y e assim, com um conjunto de pontos podemos interligá-los e traçarmos a curva da hipérbole. Na Figura 6.16 vemos uma representação possível.

Figura 6.16 – Hipérbole traçada com interligação de pontos.



Fonte: Próprio autor.

6.4 ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE

Uma reta é dita assíntota de uma curva se a distância de um ponto que se move sobre a parte extrema da curva à reta se aproxima de zero (BOULOS, 2 005).

A figura abaixo mostra as assíntotas de uma hipérbole. Podemos perceber o retângulo caracterizado pelas seguintes desigualdades:

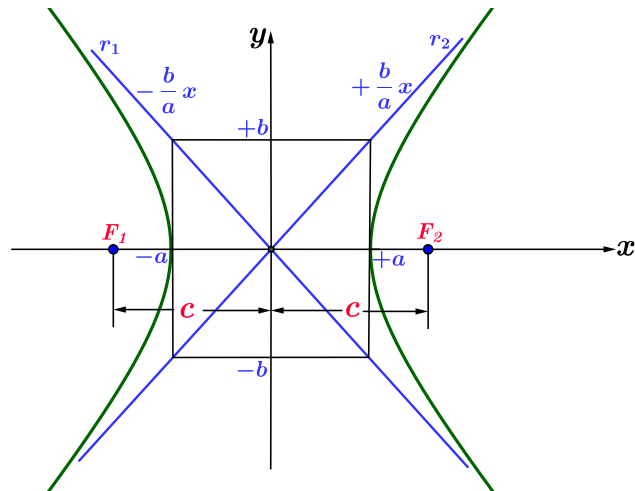
$$-a \leq x \leq a \quad \text{e} \quad -b \leq y \leq b$$

o chamado **retângulo de base** da hipérbole. Este retângulo possui diagonais contidas nas retas com coeficiente angular $\pm \frac{b}{a}$, e recebem o nome de **assíntotas**. Devido essas retas serem concorrentes na origem, suas equações são:

$$\text{assíntota descendente} \quad \mapsto \quad r_1 : y = -\frac{b}{a}x$$

$$\text{assíntota ascendente} \quad \mapsto \quad r_2 : y = \frac{b}{a}x$$

Figura 6.17 – Assíntotas de uma hipérbole.



Fonte: Próprio autor.

De modo análogo, as assíntotas de uma hipérbole com eixo principal vertical possuem coeficiente angular $\pm \frac{a}{b}$ e, como tais retas concorrem na origem, temos:

$$\text{assíntota descendente} \mapsto r_1 : y = \frac{-a}{b} x$$

$$\text{assíntota ascendente} \mapsto r_2 : y = \frac{+a}{b} x$$

Podemos reforçar o caráter assintótico da hipérbole em relação às retas fazendo uma breve análise da equação da hipérbole quando $x \rightarrow +\infty$. Partindo da equação da hipérbole, temos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vamos, inicialmente, isolar y nesta equação

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \implies y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \therefore y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

Se considerarmos apenas o primeiro quadrante, a distância vertical da hipérbole à reta cuja equação é $y = \frac{b}{a} x$, é dada por:

$$\frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)} - \frac{b}{a} x$$

trabalhando algebricamente essa equação e simplificando, vamos encontrar:

$$\frac{b}{a} (\sqrt{(x^2 - a^2)} - x) = \frac{b}{a} \left(\frac{(\sqrt{(x^2 - a^2)} - x)(\sqrt{(x^2 - a^2)} + x)}{(\sqrt{(x^2 - a^2)} + x)} \right)$$

$$= \frac{b}{a} \left(\frac{(x^2 - a^2 - x^2)}{(\sqrt{(x^2 - a^2)} + x)} \right) = \frac{-ab}{(\sqrt{(x^2 - a^2)} + x)}$$

Como devemos tomar o limite desta distância quando $x \rightarrow +\infty$, fazemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ab}{\left(\sqrt{x^2(1 - \frac{a^2}{x^2})} + x\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ab}{\left(|x| \sqrt{(1 - \frac{a^2}{x^2})} + x\right)} = 0$$

Assim, percebemos claramente o comportamento assintótico da hipérbole.

O mesmo argumento se aplica a hipérbole com reta focal na vertical, porém neste caso as assíntotas são as retas

$$y = +\frac{a}{b} x \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{b} x$$

7 PARÁBOLA

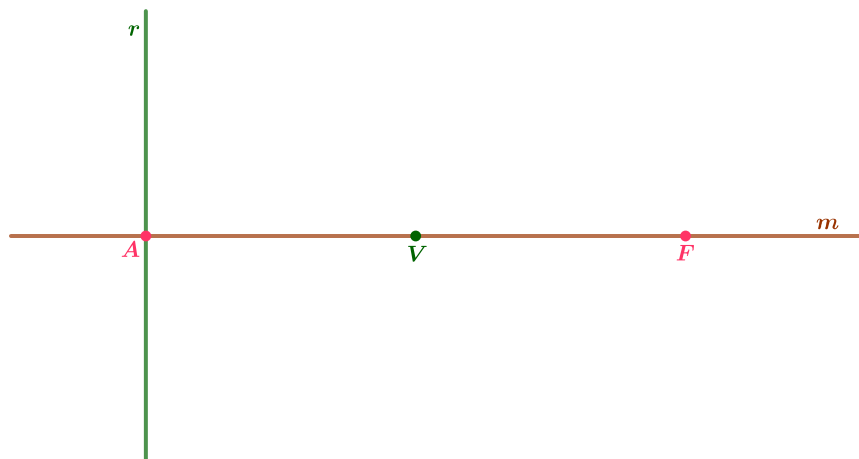
Seja um plano β , um ponto F e uma reta r que não contém F . Denominamos *parábola* \mathbf{P} de foco F e diretriz r ao lugar geométrico dos pontos P do plano β equidistantes do ponto F e da reta r .

$$\mathbf{P} = \{P \mid d(P, F) = d(P, r)\}$$

7.1 TERMINOLOGIA

- Como foi dito na definição, o ponto F é o *foco* e a reta r é a *diretriz* da parábola.
- A reta m que contém o foco e é perpendicular à diretriz r é chamada *reta focal* da parábola (DELGADO, 2011).

Figura 7.1 – Posição de V em relação à F e r .



Fonte: Próprio autor.

- O *vértice* da parábola é o ponto V da reta focal que equidista de F e de r . Em particular $V \in \mathbf{P}$ (ver Figura 7.1).
- Se A é o ponto onde r intersecta m , então V é o ponto médio do segmento AF , ou seja,

$$\frac{A + F}{2}$$

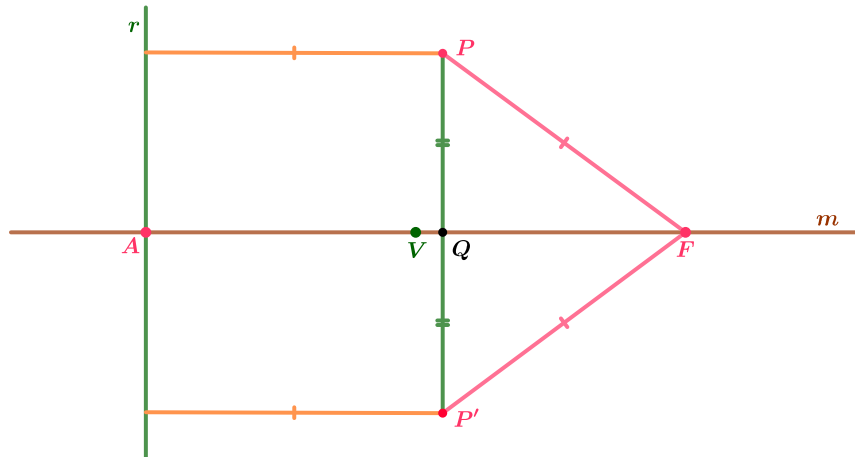
- O número $2p = d(F, r)$ é o *parâmetro* da parábola. Observe que

$$d(V, F) = d(V, r) = p$$

A parábola apresenta simetria em relação à reta focal. A seguir vamos analisar essa simetria.

- Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal. De fato, seja \mathbf{P} uma parábola de foco F , vértice V , diretriz r e reta focal m . Seja $P \in \mathbf{P}$ e seja P' o ponto simétrico de P em relação à reta focal m (ver Figura 7.2).

Figura 7.2 – Simetria da parábola em relação à m .



Fonte: Próprio autor.

O segmento PP' é perpendicular a m e intersecta a reta focal m em um ponto Q que é o ponto médio do segmento PP' , ou seja $PQ \equiv P'Q$.

Os triângulos $\triangle PQF$ e $\triangle P'QF$ são congruentes, pois $d(P, Q) = d(P', Q)$, o lado QF é comum, e os ângulos $\hat{P}QF$ e $\hat{P}'QF$ são retos. Em particular, $d(P, F) = d(P', F)$.

Além disso, $d(P, r) = d(Q, A) = d(P', F)$.

Como $P \in \mathbf{P}$, temos que $d(P, F) = d(P, r)$. Portanto, $d(P', F) = d(P', r)$, isto é, $P' \in \mathbf{P}$.

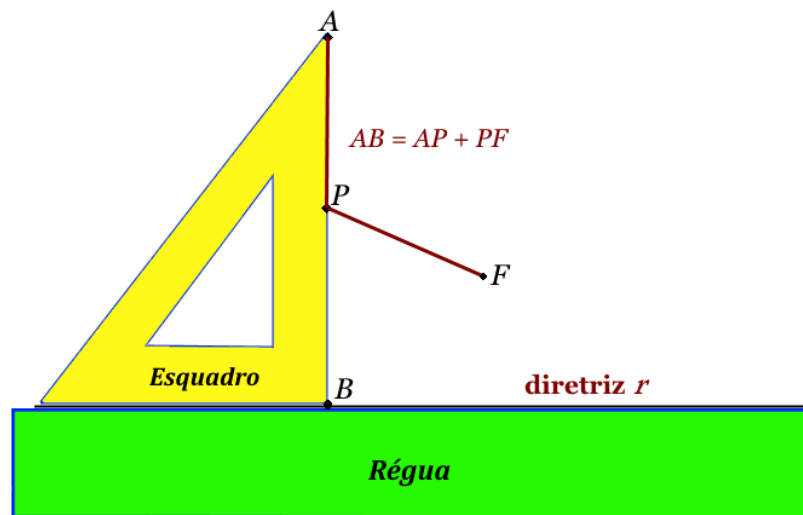
7.1.1 Construção mecânica do traço da parábola

Podemos elaborar o traçado de uma parábola utilizando um esquadro e uma régua. Preparamos um barbante de comprimento AB . Fixamos uma das pontas no ponto A e a outra ponta no ponto F , onde F não pertence à diretriz r . Um lápis mantém o barbante esticado no ponto P , ponto este localizado junto ao esquadro. A Figura 7.3 ilustra essa montagem. Deslocando-se o esquadro ao longo da régua traçamos uma parábola de diretriz r e foco F .

Assim, $d(P, F) = PF = AB - AP$. Por outro lado, $d(r, P) = PB$; como $AB = AP + PB$, temos $PB = AB - AP$. Portanto

$$d(P, F) = d(r, P)$$

Figura 7.3 – Traço da parábola com régua e esquadro.



Fonte: Próprio autor.

7.1.2 Proposta didática: traçando a parábola

Finalizando com a parábola propõe-se um plano de aula para os alunos praticarem o traçado dessa curva usando uma folha A4, lápis, barbante, percevejos, uma régua e um esquadro. O professor deve incentivar os alunos a montarem o sistema para efetuar o traçado da parábola.

Orientação ao professor - Peça aos alunos usarem a régua e traçarem uma reta abaixo do meio da folha A4, sendo esta, a reta diretriz da parábola. Escolhendo um ponto acima da reta, prender uma ponta do barbante com o percevejo nesse ponto. Será o foco da parábola. A outra ponta do barbante será presa no esquadro. Após o término da montagem do sistema os alunos poderão traçar a parábola.

Conduta do professor - Depois do término da construção da curva peça aos alunos escolherem um ponto P qualquer sobre a curva traçada e verificar se a definição de parábola se aplica, onde $d(F, P) = d(F, r)$. A seguir, utilizando o conceito de distância

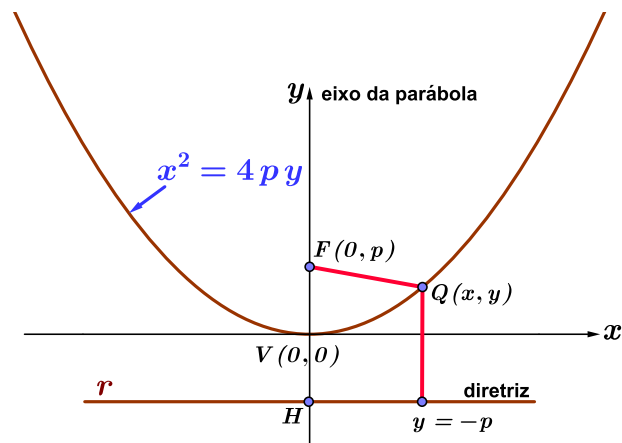
entre dois pontos desenvolva a equação reduzida da parábola conforme seção 7.2 deste trabalho.

7.2 EQUAÇÃO DA PARÁBOLA

7.2.1 Vértice na origem e concavidade para cima

Para obter uma equação da parábola \mathbf{P} , vamos usar um sistema ortogonal de coordenadas cuja origem é o vértice $V(0, 0)$ de \mathbf{P} , tal que o foco pertença ao semieixo positivo das ordenadas conforme ilustra a Figura 7.4 (BOULOS, 2011).

Figura 7.4 – Equação da parábola, concavidade para cima.



Fonte: Próprio autor.

Em relação a este sistema, temos:

- Foco: $F(0, p)$
- Diretriz: é a reta r tal que $y = -p$

Se $Q(x, y)$, então temos que:

$$d(Q, r) = |y + p| \quad \text{e} \quad d(Q, F) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} \quad (7.1)$$

Logo, o ponto Q pertence à parábola se, e somente se,

$$|y + p| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} \quad (7.2)$$

Como os dois membros desta igualdade são não-negativos, elevando-os ao quadrado obtemos a igualdade:

$$|y + p|^2 = (x)^2 + (y - p)^2$$

$$y^2 + 2py + p^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2$$

E simplificando esta igualdade, obtemos:

$$x^2 = 4py \quad (7.3)$$

Esta equação é chamada **equação reduzida** da parábola **P**.

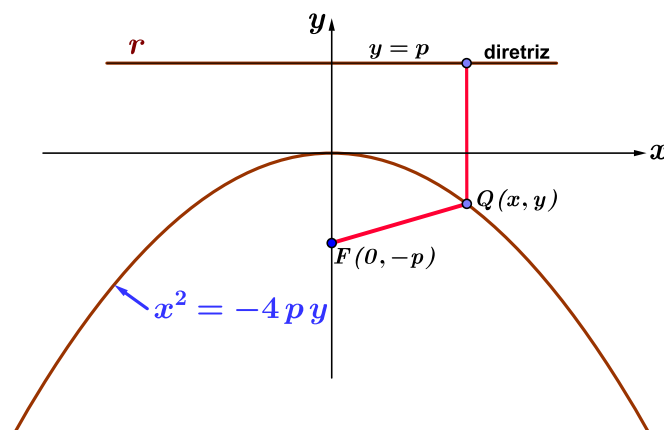
7.2.2 Vértice na origem e concavidade para baixo

Tomando o vértice V como origem e se o foco pertence ao semieixo negativo das ordenadas, então:

- Foco: $F(0, -p)$
- Diretriz: é a reta r tal que $y = +p$

conforme ilustra a Figura 7.5.

Figura 7.5 – Parábola com concavidade voltada para baixo.



Fonte: Próprio autor.

Logo, um ponto $Q(x, y)$ pertence à parábola se, e somente se, $d^2(Q, F) = d^2(Q, r)$, isto é:

$$x^2 + (y + p)^2 = |y - p|^2$$

Da mesma forma que foi feito anteriormente, desenvolvendo os quadrados e simplificando, vamos obter

$$x^2 = -4py \quad (7.4)$$

que é outra **equação reduzida** da parábola **P**.

7.2.3 Vértice na origem e concavidade para a direita

Para encontrarmos a equação da parábola sendo a concavidade voltada para a direita, tomamos o vértice V como origem e o foco pertencendo ao semieixo positivo das abscissas. Então:

- Foco: $F(p, 0)$
- Diretriz: é a reta r tal que $x = -p$

conforme ilustra a Figura 7.6. Logo, um ponto $Q(x, y)$ pertence à parábola se, e somente se, $d^2(Q, F) = d^2(Q, r)$, isto é:

$$(x - p)^2 + y^2 = |x + p|^2$$

Da mesma forma que foi feito anteriormente, desenvolvendo os quadrados e simplificando, vamos obter

$$y^2 = +4px \quad (7.5)$$

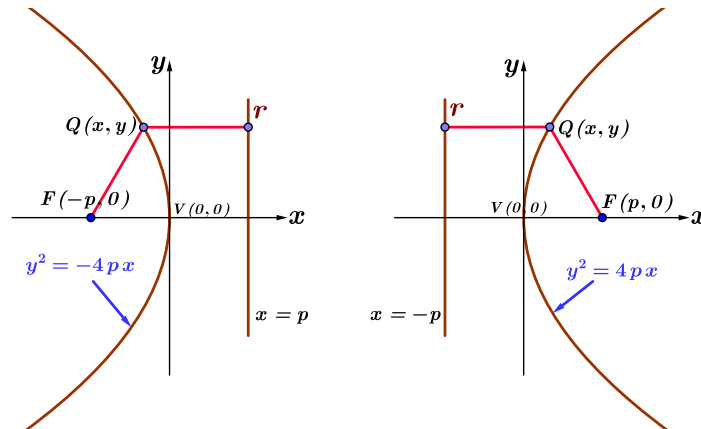
que é outra **equação reduzida** da parábola **P**.

7.2.4 Vértice na origem e concavidade para a esquerda

Optando por outros sistemas de coordenadas podemos encontrar outras equações de parábolas. Tomando o vértice V como origem e se o foco pertence ao semieixo negativo das abscissas, então:

- Foco: $F(-p, 0)$
- Diretriz: é a reta r tal que $x = +p$

Figura 7.6 – Parábola com concavidade voltada para a esquerda e direita.



Fonte: Próprio autor.

conforme ilustra a Figura 7.6. Logo, um ponto $Q(x, y)$ pertence à parábola se, e somente se, $d^2(Q, F) = d^2(Q, r)$, isto é:

$$(x + p)^2 + y^2 = |x - p|^2$$

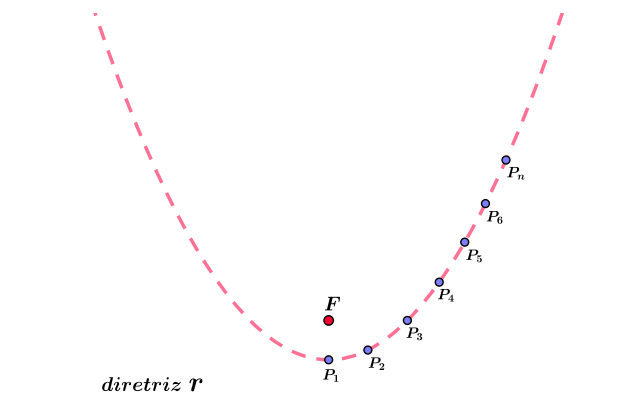
Da mesma forma que foi feito anteriormente, desenvolvendo os quadrados e simplificando, vamos obter

$$y^2 = -4px \quad (7.6)$$

que é outra **equação reduzida** da parábola **P**.

Baseado na definição da parábola, podemos determinar vários pontos conforme seu lugar geométrico e ligando-os teremos o traço da parábola, conforme mostra a Figura 7.7.

Figura 7.7 – Construção da parábola com interligação dos pontos geométrico.



Fonte: Próprio autor.

7.2.5 Parábola com eixo principal horizontal e centro deslocado da origem

A Figura 7.8 mostra uma parábola com a concavidade voltada para cima e com vértice no ponto $V(x_0, y_0)$. A equação dessa parábola no sistema de eixos $x'y'$ é

$$x'^2 = 4p y' \quad (7.7)$$

Para um ponto P qualquer da parábola, podemos assinalá-lo no sistema $x'y'$ com as coordenadas $P(x', y')$. Então, pela Figura 7.8 podemos observar a relação entre as coordenadas do sistema xy e as coordenadas do sistema $x'y'$, dadas por:

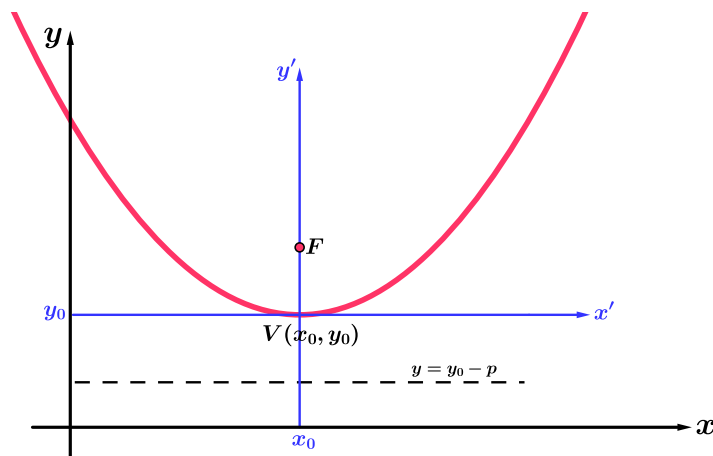
$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Assim, fazendo a substituição $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, na Equação 7.7, obtemos:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \quad (7.8)$$

Esta é a **equação reduzida** da parábola com centro no ponto (x_0, y_0) em relação ao sistema xy e diretriz paralela ao eixo coordenado x .

Figura 7.8 – Parábola com eixo principal horizontal e centro deslocado da origem.



Fonte: Próprio autor.

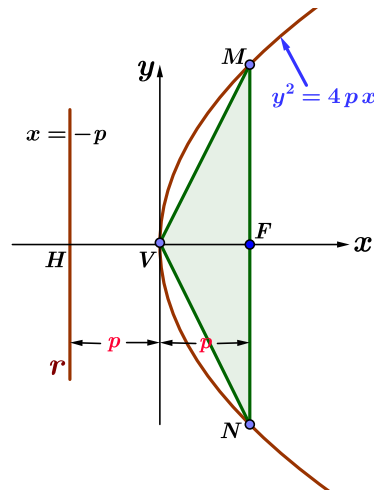
Ainda para essa parábola, observamos que em relação ao sistema xy

- o foco é o ponto $F(x_0, y_0 + p)$;
- seu eixo é a reta vertical $x = x_0$;
- a diretriz é a reta horizontal $y = y_0 - p$.

7.3 TRIÂNGULO FUNDAMENTAL DA PARÁBOLA

Com relação à Figura 7.9, temos as extremidades da corda representadas pelas letras M e N , corda esta que contém o foco da parábola e é perpendicular ao seu eixo. Desta forma, o triângulo VMN é chamado de **triângulo fundamental** da parábola (BOULOS, 2005). É um triângulo isósceles de base igual à amplitude focal e altura igual ao parâmetro p .

Figura 7.9 – Triângulo fundamental da parábola.



Fonte: Próprio autor.

Ainda considerando a Figura 7.9, acrescentamos algumas informações com base na Equação 7.3.

- Se (x, y) satisfaz a equação, então $x \geq 0$, isto é, nenhum ponto da parábola P possui abscissa negativa. Quanto à ordenada, não há restrições, logo a parábola não é limitada.
- A parábola é simétrica somente em relação ao eixo x .
- O vértice V é o único ponto de interseção da parábola com seu eixo, pois pela Equação 7.3, se $y = 0$ então $x = 0$.

8 EXCENTRICIDADE DAS CÔNICAS

As cônicas possuem uma característica própria chamada *excentricidade*. Será apresentado um estudo da excentricidade de cada cônica, iniciando pela elipse (BOULOS, 2005).

8.1 EXCENTRICIDADE DA ELIPSE

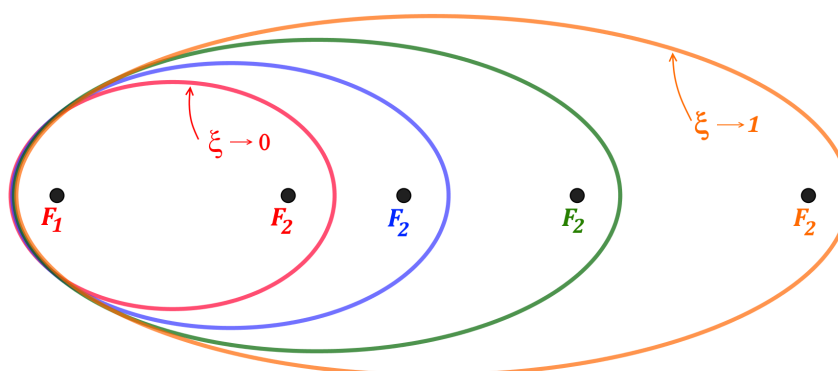
Uma característica importante da elipse é sua excentricidade, representada pela letra grega ξ que é definida como:

$$\xi = \frac{c}{a}$$

Como as constantes a e c que definem a excentricidade da elipse são números positivos e $a > c$, temos que $0 < \xi < 1$.

Da equação conclui-se que quanto mais próximo de **zero** for o valor de ξ , mais a elipse tende a uma circunferência e menor a distância entre os focos. E se ξ se aproxima de **um**, mais a elipse é achatada e maior a distância entre os focos, como ilustra a Figura 8.1.

Figura 8.1 – Elipses com variações da excentricidade.



Fonte: Próprio autor.

8.2 EXCENTRICIDADE DA HIPÉRBOLE

Devido ao modo como a hipérbole **H**, definida na seção 6.1, se posiciona em relação às suas assíntotas, as inclinações dessas retas tem estreita ligação com a forma de **H**. As inclinações são determinadas pelo número b/a , que está associado também à forma do retângulo fundamental (BOULOS, 2005): valores de b/a próximos de **um** indicam que o retângulo se assemelha a um quadrado; valores muito maiores que **um** ou muito próximos de **zero** indicam que ele é mais alongado (alto e estreito, ou baixo e largo). Conhecendo a relação $c^2 = a^2 + b^2$ e dividindo membro a membro por $a^2 \neq 0$, obtemos

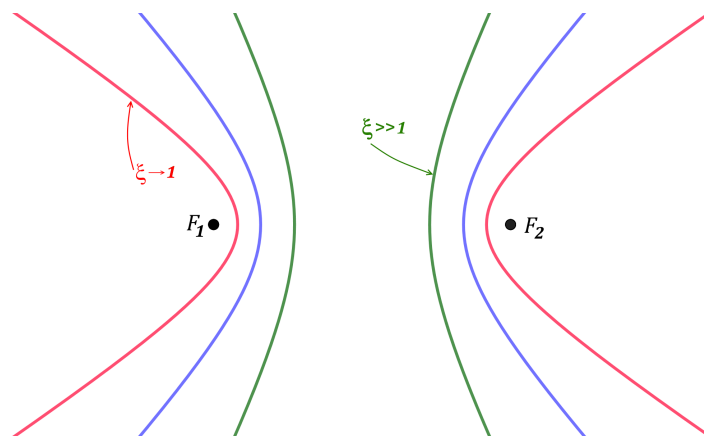
$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

Analisando esta equação percebemos que podemos usar o número

$$\xi = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

como indicador de sua forma e definido como **excentricidade** da hipérbole. Devemos estar atentos que $\xi > 1$, ao contrário da excentricidade da elipse, que pertence ao intervalo $[0,1]$. Assim, quando ξ é um número muito próximo de **um**, b/a é muito próximo de **zero**, indicando que a altura do retângulo fundamental é muito menor que sua base. Os ramos da hipérbole são, portanto, mais fechados nas proximidades dos vértices, e abrem-se lentamente à medida que $|x|$ cresce. Se, por outro lado, ξ é muito maior que **um**, b/a também é, e o retângulo fundamental tem altura muito maior que a base. Neste caso, na vizinhança dos vértices os ramos da hipérbole quase se confundem com as retas de equações $x = a$ e $x = -a$, e seus pontos afastam-se lentamente delas à medida que $|x|$ cresce, como ilustra a Figura 8.2

Figura 8.2 – Hipérboles com variações da excentricidade.



Fonte: Próprio autor.

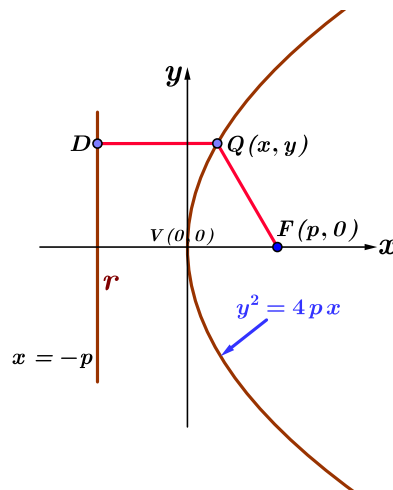
Conclusões análogas podem ser retiradas da hipérbole com os focos no eixo O_y .

8.3 EXCENTRICIDADE DA PARÁBOLA

Pela construção da parábola, conforme Figura 8.3, podemos definir sua excentricidade pela seguinte relação:

$$\xi = \frac{FQ}{QD}$$

Figura 8.3 – Excentricidade da Parábola.



Fonte: Próprio autor.

Por outro lado, podemos considerar a parábola como o caso limite da elipse.

Vamos considerar uma elipse com eixo focal de comprimento $2a$ e distância focal $2c$. Sabemos que o eixo não tem comprimento $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$. Denotemos $p = a - c$ como a distância do vértice sobre a reta focal ao foco mais próximo e $q = c/a$ a excentricidade da elipse. Vamos supor que o eixo focal da elipse esteja no eixo das abscissas e seu centro em $(a, 0)$. Assim, a equação da elipse é

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

E temos que

$$b^2 = a^2 - c^2 = (a - c)(a + c) = p(a + aq) = ap(1 + q)$$

Então a equação da elipse fica

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{ap(1+q)} = 1$$

multiplicando ambos os lados por a , resulta

$$\frac{(x-a)^2}{a} + \frac{y^2}{p(1+q)} = a$$

expandindo os quadrados e simplificando chegamos a

$$\frac{(x^2 - 2ax)}{a} + \frac{y^2}{p(1+q)} = 0$$

Observe que a excentricidade da elipse q , pode ser escrita como

$$q = \frac{c}{a} = \frac{a-p}{a}$$

então fazendo $a \rightarrow \infty$ de modo que $p = a - c$ seja uma constante (observe que c também tende a infinito) as duas últimas equações resultam

$$q = 1 \quad \text{e} \quad -2x + \frac{y^2}{2p} = 0$$

e isto equivale a

$$y^2 = 4px$$

que é exatamente a equação da parábola.

Então, uma parábola de parâmetro p pode ser vista como o limite de uma sucessão de elipses cujos termos a e c são tais que $a - c = p$. Desta forma, tomando o limite podemos afirmar que a excentricidade dessas elipses é igual a um. Assim, é natural definir a excentricidade de qualquer parábola como sendo igual a um.

9 RETA TANGENTE ÀS CÔNICAS

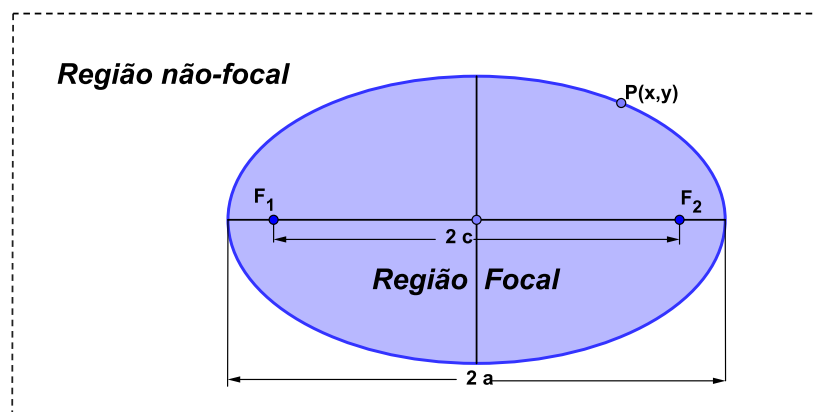
Nesta seção vamos estudar as propriedades da reta tangente com respeito às curvas elipse, hipérbole e parábola. Vamos analisar separadamente cada uma delas. Começamos com a reta tangente a uma elipse.

9.1 ELIPSE - RETA TANGENTE

Seja **E** uma elipse com focos F_1 e F_2 e com comprimento do eixo focal $2a$, onde $2a$ é um valor real, positivo e maior que o comprimento do segmento F_1F_2 . Sabemos que, se $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, então o ponto P pertence à elipse. Assim, o plano pode ser separado em duas regiões pela elipse **E**, conforme ilustra a Figura 9.1.

- **Região focal** onde $d(P, F_1) + d(P, F_2) < 2a$ é satisfeita para cada ponto considerado.
- **Região não-focal** onde $d(P, F_1) + d(P, F_2) > 2a$ é satisfeita para cada ponto considerado.

Figura 9.1 – Região focal e não-focal em uma elipse.



Fonte: Próprio autor.

Definição 9.1.1 - Uma reta r é tangente à elipse em um ponto P se, e somente se, todos os pontos da reta r , exceto o ponto P , pertencerem à região não focal desta curva.

A seguir apresentamos como determinar a reta tangente a uma elipse em um dado ponto. Seja P um ponto da elipse sobre a semirreta com origem no foco F_1 que passa

por P . Marcamos o ponto F'_2 de modo que P está entre F_1 e F'_2 e $d(P, F'_2) = d(P, F_2)$. Observe que F'_2 está na região não focal da elipse.

Propriedade 9.1.1 - A reta r mediatriz do segmento $F_2F'_2$ é tangente à elipse no ponto P .

Demonstração - É fácil ver que o ponto P pertence à reta r . Há necessidade de demonstrar que os pontos da reta r , exceto o ponto P , estão contidos na região não-focal da curva. Consideremos um ponto Q , diferente do ponto P , e que pertença à reta r . Como a reta r é mediatriz do segmento $F_2F'_2$, então $QF_2 = QF'_2$. Logo, podemos escrever que $QF_1 + QF_2 = QF_1 + QF'_2$. Desta forma, aplicando a desigualdade triangular ao triângulo $F_1QF'_2$ encontramos a seguinte relação:

$$QF_1 + QF'_2 > F_1F'_2$$

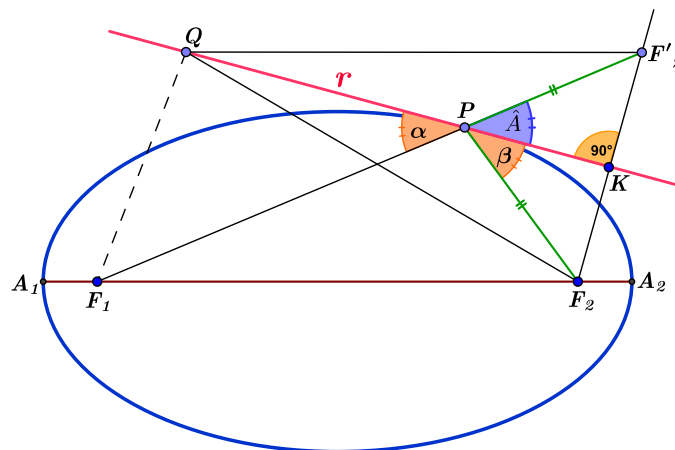
Porém, sabemos que $F_1F'_2 = F_1P + PF'_2 = F_1P + PF_2 = 2a$. Assim, concluímos que:

$$QF_1 + QF_2 > 2a$$

Então, pela **definição 9.1.1**, o ponto Q pertence a região não-focal da elipse. Portanto, dessa definição, a reta r é tangente à elipse no ponto P .

A **definição 9.1.1** e a **propriedade 9.1.1** estão ilustradas na Figura 9.2

Figura 9.2 – Reta tangente à elipse.



Fonte: Próprio autor.

Propriedade 9.1.2 - A reta tangente r à elipse no ponto P forma ângulos iguais com os segmentos PF_1 e PF_2 .

Demonstração - Sejam os ângulos determinados pela reta r com os segmentos PF_1 e PF_2 representados, respectivamente, por α e β , conforme ilustra a Figura 9.2. Considerando o triângulo F_2PF_2' , a reta r é mediatriz do lado F_2F_2' no ponto K e passa pelo vértice P . Logo, a altura PK do triângulo F_2PF_2' é bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}F_2'$. Então os ângulos β e \hat{A} são congruentes. Porém, como os ângulos \hat{A} e α são opostos pelo vértice, provamos que $\alpha = \beta$ ou

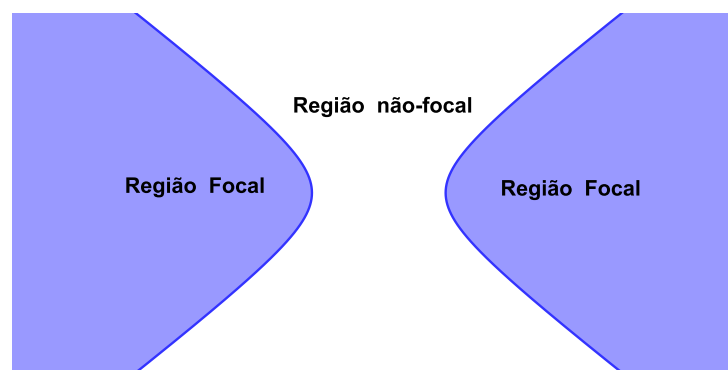
$$F_1\hat{P}Q = F_2\hat{P}K$$

9.2 HIPÉRBOLE - RETA TANGENTE

Seja H uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e comprimento do eixo focal $2a$, onde $2a$ é um valor real, positivo e menor que o comprimento do segmento F_1F_2 . Sabemos que, se $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, então o ponto P pertence à hipérbole. Assim, o plano fica dividido pelos ramos da hipérbole H em três regiões, conforme ilustra a Figura 9.3. As regiões são as seguintes:

- **Região não-focal** fica situada entre os dois ramos da hipérbole onde cada ponto P' satisfaz a equação $|P'F_1 - P'F_2| < 2a$.
- **Região focal que contém F_1** onde $P'F_2 - P'F_1 > 2a$ é satisfeita para cada ponto P' .
- **Região focal que contém F_2** onde $P'F_1 - P'F_2 > 2a$ é satisfeita para cada ponto P' .

Figura 9.3 – Região focal e não-focal em uma hipérbole.



Fonte: Próprio autor.

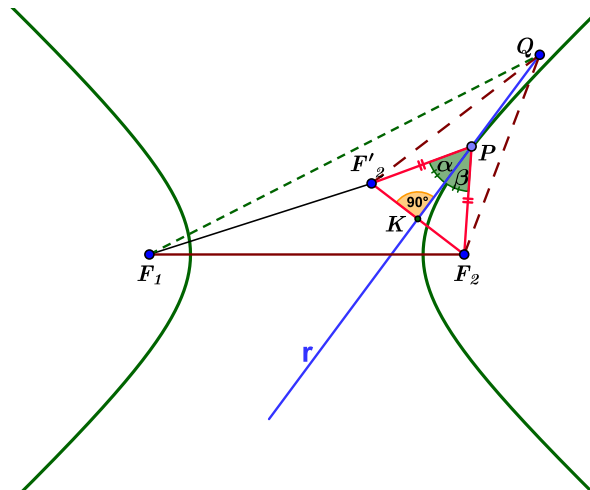
Definição 9.2.1 - Uma reta r é tangente a um ramo da hipérbole em um ponto P se, e somente se, todos os pontos da reta r , exceto o ponto P , pertencer à região não focal da hipérbole.

A seguir apresentamos como determinar a reta tangente a uma hipérbole em qualquer de seus pontos.

Seja P um ponto da hipérbole mais próximo do foco F_2 que do foco F_1 , isto é, satisfaz a equação $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$. Sobre o segmento de reta PF_1 marcamos o ponto F'_2 , de modo que $d(P, F_2) = d(P, F'_2)$. Para um ponto mais próximo do foco F_1 que o foco F_2 , o correspondente ponto F'_1 é marcado de forma análogo.

Propriedade 9.2.1 - A mediatriz r do segmento $F_2 F'_2$ é tangente à hipérbole no ponto P .

Figura 9.4 – Reta tangente à hipérbole.



Fonte: Próprio autor.

Demonstração - É fácil ver que o ponto P pertence à reta r . Seja Q outro ponto sobre a reta r distinto de P . Assim, temos o triângulo $F'_2 Q F_1$, conforme Figura 9.4. Segue da desigualdade triangular aplicada a este triângulo que

$$QF'_2 < QF_1 + F_1F'_2 \quad \text{ou} \quad QF'_2 - F_1F'_2 < QF_1$$

e

$$QF_1 < QF'_2 + F_1F'_2$$

ou seja,

$$QF'_2 - F_1F'_2 < QF_1 < QF'_2 + F_1F'_2$$

da qual, subtraindo QF'_2 membro a membro, resulta

$$-F_1F'_2 < QF_1 - QF'_2 < F_1F'_2$$

Como a reta é mediatriz do segmento $F_2F'_2$, temos $QF_2 = QF'_2$. Então

$$-F_1F'_2 < QF_1 - QF_2 < F_2F'_2 \quad \text{ou} \quad |QF_1 - QF_2| < F_1F'_2$$

Por outro lado F'_2 é um ponto do segmento F_1P , assim temos

$$F_1F'_2 = PF_1 - PF'_2 = PF_1 - PF_2$$

pois $PF'_2 = PF_2$. Além disso, $PF_1 - PF_2 = 2a$, pois P é um ponto da hipérbole. E, finalmente obtemos

$$|QF_1 - QF_2| < 2a$$

Portanto, com exceção de P , todos os pontos de r pertencem à região não focal da hipérbole. Assim, r é reta tangente à hipérbole no ponto P .

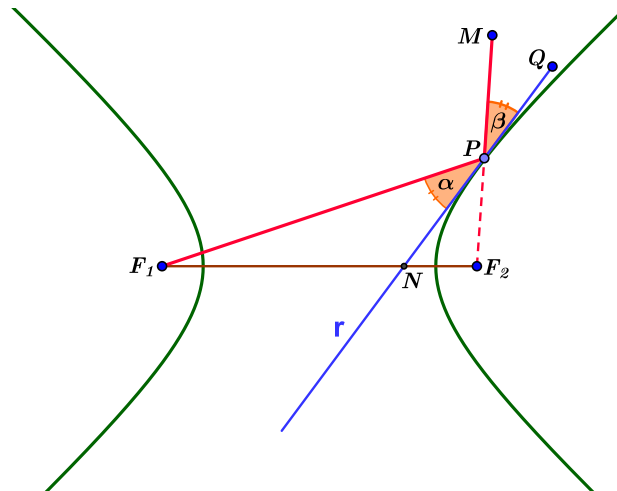
Propriedade 9.2.2 - A reta r tangente à hipérbole no ponto P é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$.

Demonstração - No triângulo F'_2PF_2 , sabe-se que $F'_2P = F_2P$ pois P pertence à mediatriz do segmento $F_2F'_2$. Então, o triângulo F'_2PF_2 é isósceles, onde PK é a altura desse triângulo em relação a sua base $F_2F'_2$, conforme ilustra a Figura 9.4. Das propriedades de triângulos sabemos que a altura de um triângulo isósceles é bissetriz do ângulo oposto à base. Dessa forma, concluímos que a altura PK é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$. E como a reta r contém o segmento PK implica que r é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$.

Propriedade 9.2.3 - As retas que passam pelos focos e pelo ponto P , ponto este pertencente à hipérbole, fazem ângulos iguais com a reta tangente à hipérbole no ponto P .

Demonstração - Devemos provar a congruência entre os ângulos $F_1\hat{P}N$ e $M\hat{P}Q$. Vamos denominar o ângulo $F_1\hat{P}N$ de α e o ângulo $M\hat{P}Q$ de β , conforme ilustra a Figura 9.4. A congruência destes ângulos pode ser demonstrada utilizando a **propriedade 9.2.2** apresentada anteriormente. Com o auxílio da Figura 9.4, vimos que a reta r , tangente à hipérbole no ponto P , é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$. Logo, os ângulos $F_1\hat{P}N$ e $F_2\hat{P}N$, são congruentes. Como o ângulo $F_2\hat{P}N$ é oposto pelo vértice ao ângulo $M\hat{P}Q$, representado por β na Figura 9.5, então os ângulos α e β são congruentes.

Figura 9.5 – Propriedade 9.2.3 da hipérbole.

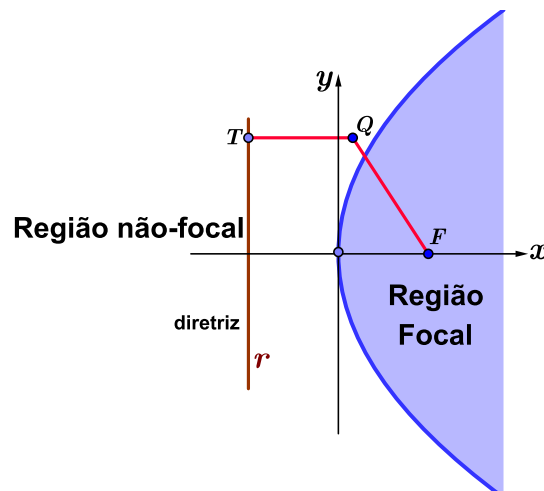


Fonte: Próprio autor.

9.3 PARÁBOLA - RETA TANGENTE

O plano que contém uma parábola é dividido em duas regiões, conforme ilustra a Figura 9.6.

Figura 9.6 – Regiões do plano que contém uma parábola.



Fonte: Próprio autor.

As regiões são as seguintes:

- **Região não-focal** para que um ponto Q pertença à região não-focal, sua distância até o foco da parábola deve ser maior que sua distância à diretriz, isto é, deve satisfazer a desigualdade $QF > QT$.
- **Região focal** para que um ponto Q pertença à região focal, sua distância até o foco da parábola deve ser menor que sua distância à diretriz, isto é, deve satisfazer a desigualdade $QF < QT$.

Definição 9.3.1 - Uma reta t é tangente à parábola em um ponto P se, e somente se, todos os pontos da reta t , exceto o ponto P , pertencer à região não-focal da parábola.

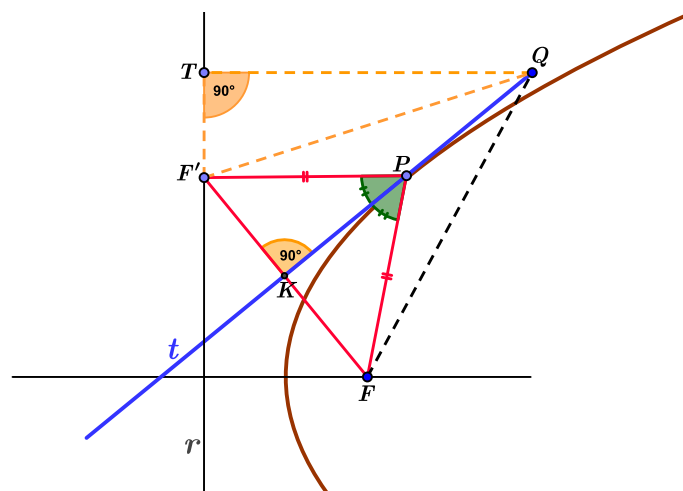
A seguir apresentamos como determinar a reta tangente a uma parábola em qualquer um de seus pontos.

Seja P um ponto da parábola. Traçamos por P uma reta perpendicular à reta diretriz r . A interseção desta reta com a diretriz determina o ponto F' . Observe que a distância do ponto P à reta diretriz é o comprimento do segmento PF' , isto é, $d(P, r) = d(P, F')$.

Propriedade 9.3.1 - A reta t , mediatriz do segmento FF' , é tangente à parábola no ponto P .

Demonstração - É fácil ver que o ponto P pertence à reta t . . Vamos considerar um outro ponto Q , distinto de P , sobre a reta t . Como t é mediatriz do segmento FF' , então $QF = QF'$. Consideremos T o ponto de interseção da reta diretriz com a reta perpendicular a r que passa pelo ponto Q , conforme ilustra a Figura 9.7. Logo QT é a distância entre o ponto Q e a diretriz r . O triângulo QTF' é reto em T e o lado QF' é oposto ao ângulo $Q\hat{T}F'$. Então $QF' > QT$ para qualquer ponto Q escolhido sobre a reta t . Analisando as relações $QF = QF'$ e $QF' > QT$, conclui-se que a distância do ponto Q ao foco é maior que a distância do mesmo em relação à diretriz r . Logo, Q pertence a região não-focal da parábola e pela **definição 9.3.1** concluímos que a reta t é tangente à parábola em P .

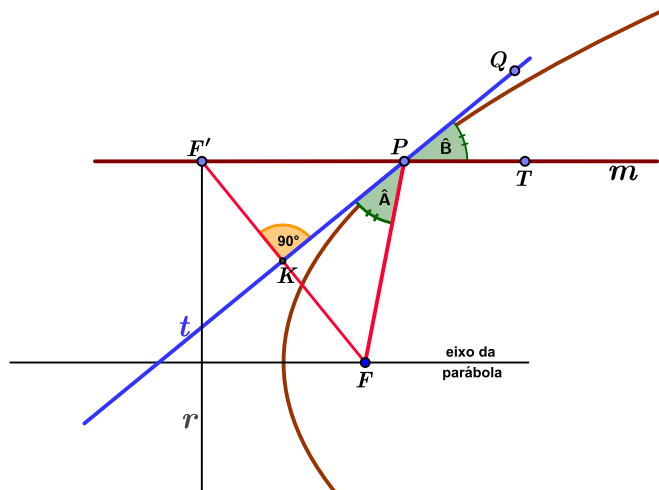
Figura 9.7 – Reta tangente à parábola.



Fonte: Próprio autor.

Propriedade 9.3.2 - A reta t tangente à parábola em um ponto P qualquer forma ângulos iguais com o segmento PF e com a reta m que passa por P e paralela ao eixo da parábola.

Figura 9.8 – Reta tangente à parábola.



Fonte: Próprio autor.

Demonstração - Sejam t a reta tangente à parábola no ponto P e m a reta que passa por P e paralela ao eixo da parábola. O ponto de interseção da reta m com a diretriz r da parábola determina o ponto F' . O ponto de interseção entre a reta t e o segmento FF' determina o ponto K , conforme ilustra a Figura 9.8. Denotemos por \hat{A} o ângulo $K\hat{P}F$ e por \hat{B} o ângulo $Q\hat{P}T$. Vamos mostrar que $\hat{A} = \hat{B}$. No triângulo FPF' , o vértice P pertence à mediatriz do segmento FF' . Logo, $FP = F'P$ e o triângulo FPF' é isósceles. Desta forma, a altura PK do triângulo FPF' em relação ao vértice P é também bissetriz do ângulo $F\hat{P}F'$. Logo, o ângulo $F\hat{P}K$ é congruente ao ângulo $K\hat{P}F'$, ou seja, a medida do ângulo $K\hat{P}F'$ é igual a \hat{A} . Porém, os ângulos $K\hat{P}F'$ e $Q\hat{P}T$ são opostos pelo vértice. Portanto, concluímos que $\hat{A} = \hat{B}$.

10 RETA NORMAL ÀS CÔNICAS

Da mesma forma como apresentamos na seção anterior, vamos estudar as propriedades da reta normal às curvas elipse, hipérbole e parábola, analisando separadamente cada uma delas. Cabe ressaltar que uma reta normal a uma curva num ponto é a reta perpendicular à tangente da curva naquele ponto.

10.1 ELIPSE - RETA NORMAL

Propriedade 10.1.1 - Considerando um ponto P qualquer em uma elipse e os segmentos que ligam o ponto P aos focos representados por PF_1 e PF_2 , então a reta normal n no ponto P é bissetriz do ângulo $F_1 \hat{P} F_2$. A Figura 10.1 mostra essa propriedade.

Demonstração - Sejam dois pontos Q e K , distintos de P , sobre a reta tangente. Seja o ponto M , distinto do ponto P , sobre a reta normal n . Pela **propriedade 9.2.2** sabemos que o ângulo formado pelo segmento F_1P e a reta tangente é igual ao ângulo formado pelo segmento F_2P e a reta tangente. Denominemos o ângulo $F_1 \hat{P} M$ de ângulo \hat{A} e o ângulo $F_2 \hat{P} M$ de ângulo \hat{B} . Como a reta tangente r forma um ângulo de 90 com a reta normal n , podemos escrever que:

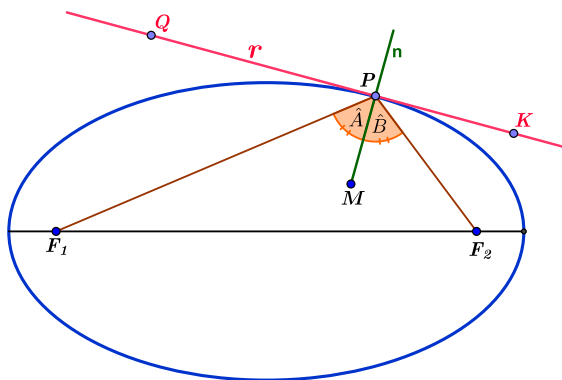
$$\hat{A} = 90 - F_1 \hat{P} Q \quad \text{e} \quad \hat{B} = 90 - F_2 \hat{P} K$$

Porém, como $F_1 \hat{P} Q = F_2 \hat{P} K$, então fica demonstrado que:

$$\hat{A} = \hat{B}$$

Portanto, a reta normal n é bissetriz do ângulo $F_1 \hat{P} F_2$.

Figura 10.1 – Reta normal à elipse no ponto P .



10.2 HIPÉRBOLE - RETA NORMAL

Propriedade 10.2.1 - Considerando um ponto P qualquer em uma hipérbole e os segmentos que ligam o ponto P aos focos representados por PF_1 e MP , então a reta normal n no ponto P é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}M$. A Figura 10.2 mostra essa propriedade.

Demonstração - Sejam K um ponto sobre a reta normal n e M um ponto sobre o prolongamento do segmento de reta PF_2 . Pela **propriedade 9.2.3** da hipérbole sabemos que o ângulo formado pelo segmento F_1P e a reta tangente é igual ao ângulo formado pelo segmento MP e a reta tangente. Como a reta tangente r forma um ângulo de 90 com a reta normal n , e denominando o ângulo $F_1\hat{P}K$ de \hat{A} e o ângulo $M\hat{P}K$ de \hat{B} , podemos escrever que:

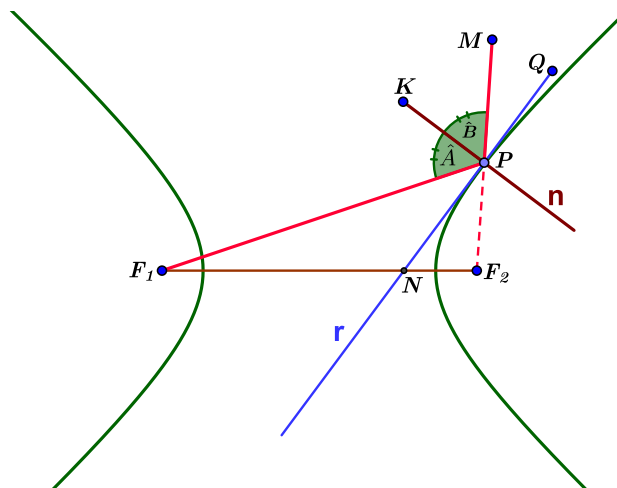
$$\hat{A} = 90 - F_1\hat{P}N \quad \text{e} \quad \hat{B} = 90 - Q\hat{P}M$$

Porém, como demonstrado na **propriedade 9.2.3**, $F_1\hat{P}N = Q\hat{P}M$. Logo, fica demonstrado que:

$$\hat{A} = \hat{B}$$

Portanto, a reta normal n é bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}M$.

Figura 10.2 – Reta normal à hipérbole no ponto P.

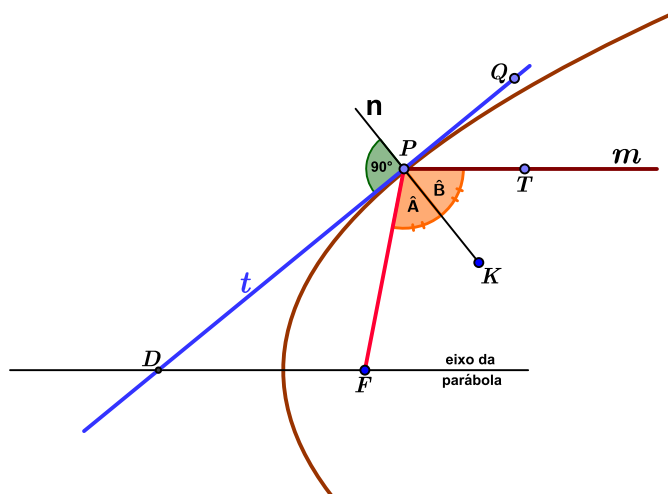


Fonte: Próprio autor.

10.3 PARÁBOLA - RETA NORMAL

Propriedade 10.3.1 - Seja P um ponto qualquer da parábola, sendo PF o segmento que interliga o ponto P ao foco e n a reta normal à parábola passando pelo ponto P . Consideremos a reta m que passa por P e é paralela ao eixo da parábola, conforme ilustra a Figura 10.3. Então, a reta normal n é bissetriz do ângulo formado por PF e a reta m .

Figura 10.3 – Propriedades da reta normal à parábola.



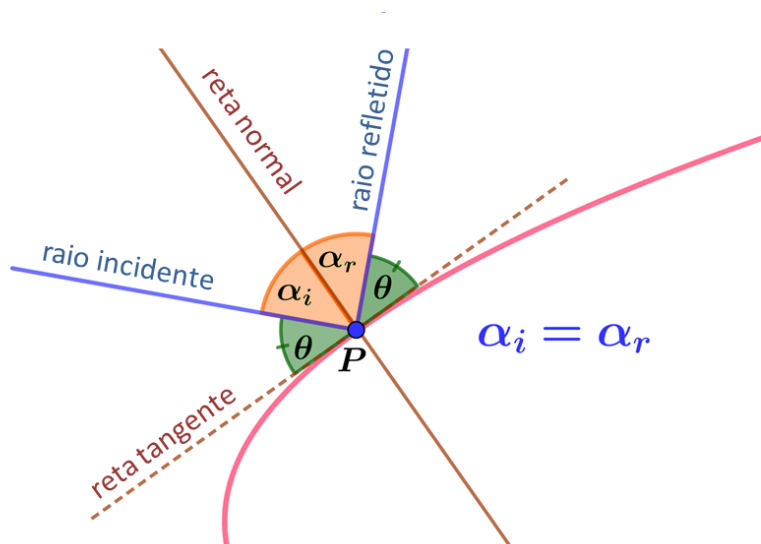
Fonte: Próprio autor.

Demonstração - Denotemos por \hat{A} o ângulo $K\hat{P}F$ e por \hat{B} o ângulo $K\hat{P}T$. Vamos mostrar que $\hat{A} = \hat{B}$. Como a reta normal n faz um ângulo de 90 com a reta tangente t então $K\hat{P}D = 90$. Dessa forma, temos que $\hat{A} + D\hat{P}F = 90$ e $\hat{B} + Q\hat{P}T = 90$. Mas de acordo com a **propriedade 9.3.2** os ângulos $D\hat{P}F$ e $Q\hat{P}T$ são iguais. Assim, concluímos que $\hat{A} = \hat{B}$. Então, a reta normal n é bissetriz do ângulo formado pelo segmento PF e a reta m .

11 PROPRIEDADE REFLETORA E APLICAÇÕES PRÁTICAS DAS CÔNICAS

Sabemos que tanto o som como a luz se propagam no espaço como ondas. Porém para uma ampla quantidade de situações, esse movimento pode ser descrito como uma trajetória em linha reta, chamado de raio, que parte da fonte onde foi produzido até um ponto de observação. Em termos geométricos é o segmento de reta no espaço que tem início na fonte e final no ponto de observação. A reflexão da luz ou do som é um fenômeno físico bem conhecido e se deve a mudança na direção de sua propagação, causada pela encontro dos seus raios com uma superfície refletora. Um dos postulados da reflexão é que o raio incidente, o raio refletido e a reta normal à superfície são coplanares, isto é, estão contidos num mesmo plano. A Figura 11.1 ilustra esta situação.

Figura 11.1 – Propriedade Refletora das Cônicas.



Fonte: Próprio autor.

Assim, vamos nos restringir a discutir a reflexão no plano que contém os raios incidente e refletido. Observamos inicialmente que a interseção deste plano com a superfície refletora é uma curva. Além disso, a reta normal à curva e a reta normal à superfície coincidem. Portanto não existe perda de generalidade em considerar a reflexão dos raios produzida por esta curva ao invés da superfície como um todo. Um segundo postulado da reflexão impõe que os ângulos de incidência e de reflexão são iguais, que restrito ao plano que ocorre a reflexão pode ser colocada de forma mais precisa como:

“O ângulo que o raio de incidência faz com a normal à curva no ponto de reflexão, o chamado ângulo de incidência, é igual ao ângulo que o raio refletido faz com a normal à curva no ponto de reflexão, o chamado ângulo de reflexão. Além disso os raios incidente e refletidos estão do mesmo lado do semiplano determinado pela reta tangente à curva no ponto de reflexão.”

Observamos ainda que o ângulo que o raio incidente e o raio refletido faz com a reta tangente à curva no ponto de reflexão são iguais (ângulo θ na Figura 11.1) e assim, a reflexão por uma curva plana pode ser reformulada para exigir apenas a igualdade deste dois ângulos sem qualquer menção à reta normal da curva.

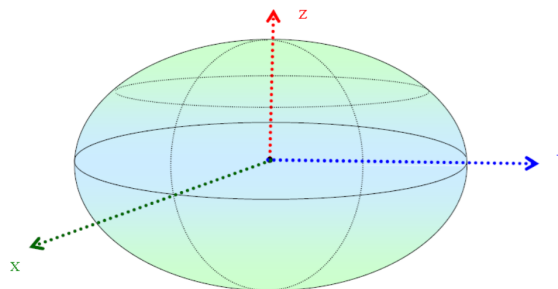
As cônicas tem importantes propriedades refletoras que decorrem diretamente das propriedades geométricas relacionadas com suas retas tangentes ou às normais mostradas anteriormente. A seguir consideramos estas propriedades para cada uma das cônicas.

11.1 PROPRIEDADE REFLETORA DA ELIPSE

Como visto anteriormente na **propriedade 10.1.1**, o par de retas que passam, cada uma, por um dos focos e por um ponto P em comum da elipse formam ângulos iguais com a normal à elipse em P . Logo, um raio produzido por uma fonte em um dos seus focos será refletido num ponto da elipse em um raio que passa pelo outro foco. Se de um dos focos partem raios em diversas direções, todos serão refletidos em pontos da elipse retornando ao outro foco.

Fazendo a rotação da elipse em torno do seu eixo focal, obtemos uma superfície de revolução chamada elipsoide, ou superfície elíptica, como ilustrado na Figura 11.2. Obviamente a interseção deste elipsoide por cada um dos planos que passam pelo eixo de revolução são elipses idênticas que têm seus focos em comum. O efeito da reflexão observada anteriormente é válido em cada uma dessas elipses e portanto os raios produzidos por uma fonte em um dos focos serão refletidos pelo elipsoide fazendo-os passar pelo outro foco.

Figura 11.2 – Figura de um elipsoide.



11.2 APLICAÇÕES PRÁTICAS

Superfícies refletoras elípticas são usadas na confecção de refletores odontológico, onde a lâmpada está em um foco da elipse e os raios luminosos convergem para o outro foco que é ajustado para localizar-se dentro da boca do paciente. Na Figura 11.3 vemos um desses refletores.

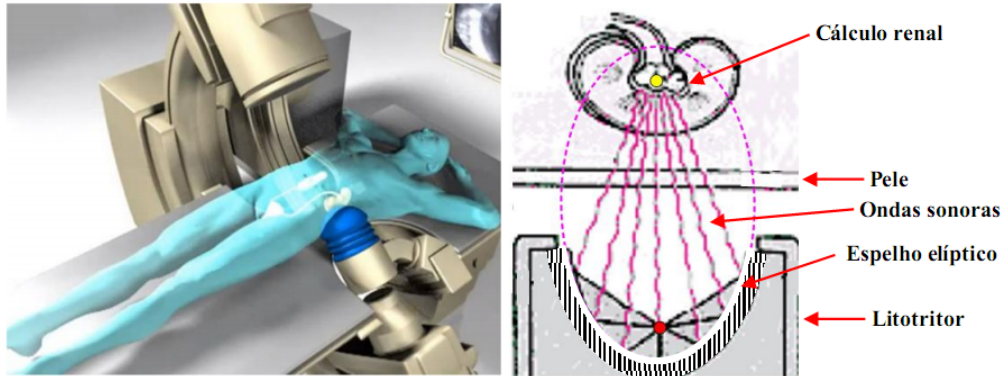
Figura 11.3 – Lente elíptica para refletor odontológico.



Fonte: <http://www.dabiatlante.com.br/site>

Na medicina há vários tipos de equipamentos utilizados em tratamentos que empregam os princípios da reflexão na elipse. Um deles, o *Litotritor*, emite certos tipos de raios direcionados para a região de interesse através de uma lente elíptica para o tratamento de cálculos renais. Nesse procedimento, as ondas de choque produzidas externamente pelo aparelho são direcionadas, com grande precisão, para a região de interesse, passando pela pele e tecidos do paciente atingindo e pulverizando o cálculo renal. Na Figura 11.4 vemos uma ilustração desse aparelho medicinal.

Figura 11.4 – Litotritor.



Fonte: <https://portuguese.alibaba.com/g/extracorporeal-shock-wave-lithotripter.html>

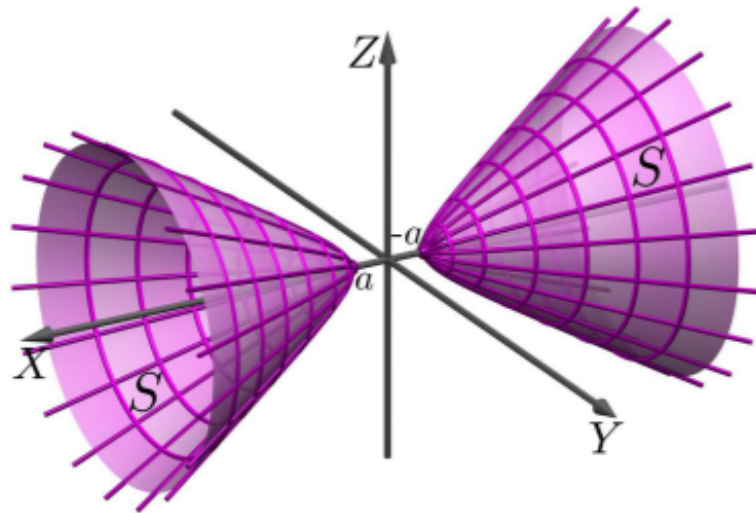
Em arquitetura há muitos exemplos de superfícies elípticas sendo usadas com sua propriedade refletora como, por exemplo, a *sala dos sussurros*. Se duas pessoas estiverem posicionadas nos focos da sala em formato elíptico, as ondas sonoras que saem de um foco em todas as direções, percorrerão distâncias iguais chegando ao outro foco com nível sonoro levemente atenuado. Na galeria de sussurros da catedral de Saint Paul, em Londres, um sussurro em um dos pontos, que não pode ser ouvido num raio de cinco metros, pode ser ouvido num outro ponto a cerca de trinta metros (BALDIN, p. 246, 2011). Os pontos em questão são focos de elipses formadas por seções do teto em forma de concha tipo elipsoide de revolução em torno do eixo dos focos.

Em tratamentos radioterápicos, usando a propriedade refletora da elipse, podemos concentrar o feixe de raios somente nas células cancerosas, preservando as boas.

11.3 PROPRIEDADE REFLETORA DA HIPÉRBOLE

A hipérbole tem sua propriedade refletora também baseada na propriedade geométrica vista anteriormente, **propriedade 9.2.1**, onde foi estabelecido que o par de retas que passam, cada uma delas, pelos focos da hipérbole e por um ponto comum P da hipérbole formam ângulos iguais com a reta normal à hipérbole em P . Assim um feixe de raios que convergem para um dos focos da hipérbole será refletido pelo ramo da hipérbole mais próximo a este foco, num feixe que converge para o outro foco. Fazendo a rotação de um dos ramos da hipérbole em torno do seu eixo focal, obtemos uma superfície de revolução chamada hiperboloide (de duas folhas), ou superfície hiperbólica, como ilustrado na Figura 11.5. De modo similar à elipse e à parábola esta superfície tem as propriedades refletoras da hipérbole que a originou.

Figura 11.5 – Figura de um hiperboloide de duas folhas.

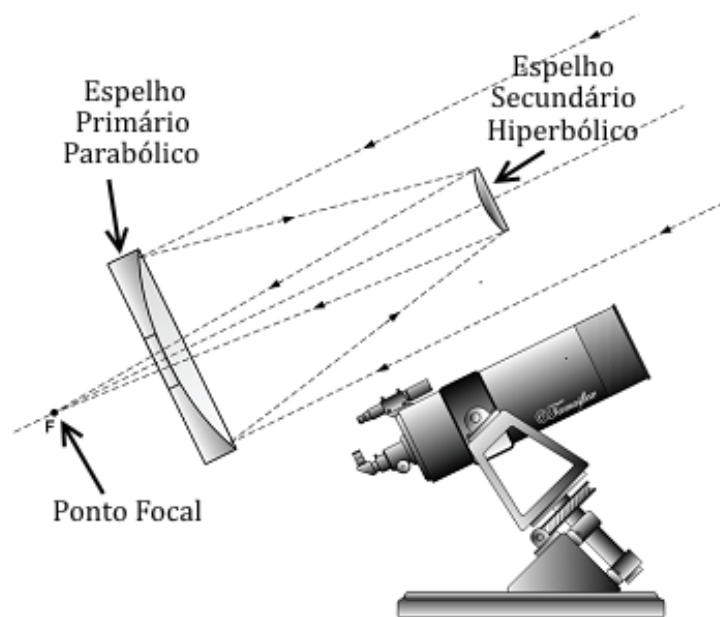


Fonte: Superfícies Quádricas, CEDERJ, p.213

11.4 APLICAÇÕES PRÁTICAS

Uma aplicação da propriedade refletora da hipérbole, em conjunto com a parábola, está na construção do telescópio refletor Cassegrain. Desenvolvido por Laurent Cassegrain em 1672, o mesmo consiste de um espelho refletor primário parabólico e um refletor secundário hiperbólico. No espelho primário há um orifício em seu centro o qual permite a passagem do raio refletido até o observador. Na Figura 11.6 tem-se o esquema desse tipo de telescópio. Os raios de luz das estrelas distantes, chegando praticamente paralelos à Terra, são refletidos inicialmente por um espelho parabólico em direção ao foco da parábola. Posicionado entre a parábola e o seu foco está um espelho hiperbólico que tem um dos seus focos coincidente com o foco da parábola. Este segundo espelho reflete os raios para o outro foco da hipérbole onde está o ponto de observação.

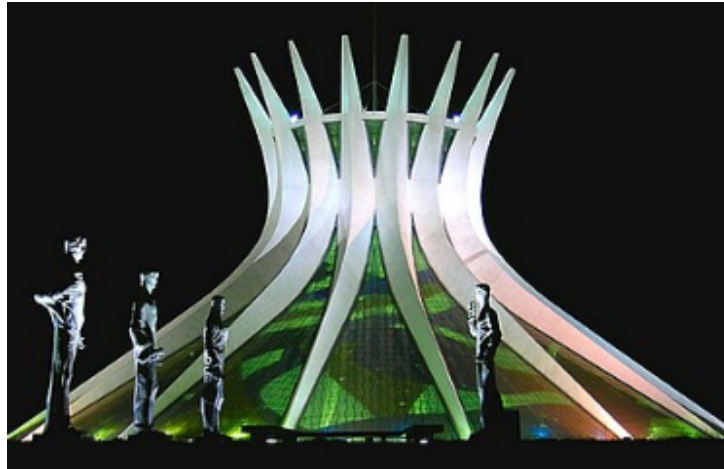
Figura 11.6 – Esquema de um telescópio usando espelhos parabólico e hiperbólico.



Fonte: <https://www.google.com/search?q=telescopio+cassegrain>.

Na engenharia civil há uma profusão de arquiteturas baseadas em formatos hiperbólicos. Um exemplo é a catedral de Brasília, conforme Figura 11.7, onde destacam-se seus arcos com aproximadamente 42 metros de comprimento e peso de 90 toneladas cada um.

Figura 11.7 – Fotografia da catedral de Brasília.



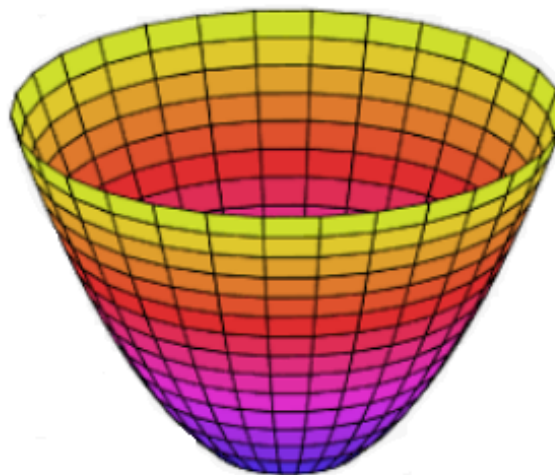
Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Catedral-Metropolitana-de-Brasilia.

11.5 PROPRIEDADE REFLETORA DA PARÁBOLA

A propriedade refletora da parábola está baseada na **propriedade 10.3.1** vista anteriormente. Para qualquer ponto P de uma parábola a reta determinada por P , pelo foco da parábola e a reta paralela ao eixo focal que passa por P formam ângulos iguais com a normal à parábola em P . Assim, um raio produzido por uma fonte no foco será refletido em um ponto da parábola e se propagará paralelo ao eixo focal, e vice-versa, ou seja, um raio paralelo ao eixo focal será refletido por um ponto da parábola fazendo-o passar pelo foco.

Rotacionando a parábola em torno do seu eixo focal, obtemos uma superfície de revolução chamada parabolóide elíptico, ou superfície parabólica, como ilustrado na Figura 11.8.

Figura 11.8 – Figura de um parabolóide.



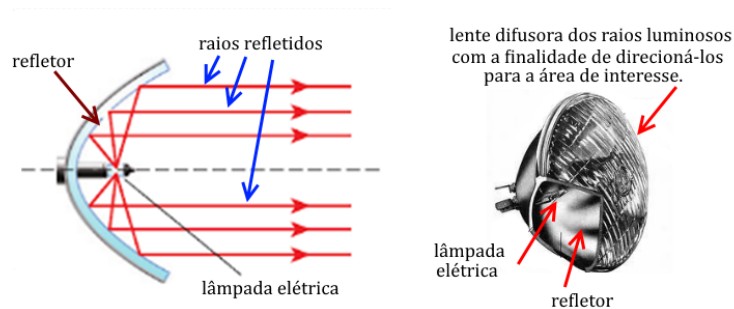
Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=parabolóide+para+farol+de+carro>

De modo similar ao mostrado para a elipse os raios produzidos por uma fonte no foco do paraboloide serão refletidos num feixe de raios paralelos ao eixo focal, e vice-versa, um feixe de raios paralelos ao eixo focal será refletido para o foco.

11.6 APLICAÇÕES PRÁTICAS

A propriedade refletora da parábola permite-nos construir diversos equipamentos interessantes. Um deles é a lanterna, onde temos o filamento de uma lâmpada colocado no foco da parábola e seus raios de luz, refletindo-se em sua superfície, são direcionados paralelamente ao eixo da parábola. Daí deriva-se o holofote, faróis de automóveis (ver Figura 11.9) e outros.

Figura 11.9 – Esquema de um farol de automóvel.



Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=paraboloide+para+farol+de+carro>

Podemos inverter o sentido dos raios de luz e usarmos uma superfície parabólica para concentrarmos em seu foco os raios provenientes do sol, por exemplo. E assim, temos um forno solar, cujo um exemplo comercial pode ser observado na Figura 11.10.

Figura 11.10 – Forno solar usando dispositivo parabólico.



Fonte: <http://www.gettyimages.pt>

Outra aplicação interessante é na área eletro-eletrônica onde podemos usar uma parabólica como antena para captar sinais de rádio frequência. Muito utilizada para manter comunicação na área de telefonia via satélite. Seguindo a mesma linha de ação temos o rádio-telescópio, equipamento capaz de sintonizar frequências emanadas pelas estrelas e outros corpos celestes. A Figura 11.11 é uma fotografia de um arranjo de rádios-telescópios terrestres.

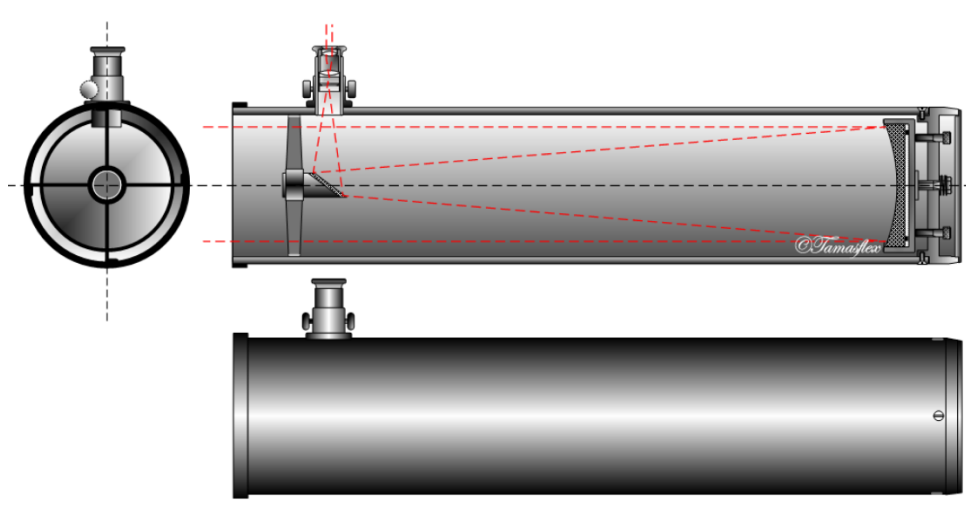
Figura 11.11 – Sistema de radios-telescópios terrestre.



Fonte: <http://www.istockphoto.com.br>

Em 1689 Sir Isaac Newton (1643 - 1727) inventou o chamado telescópio Newtoniano, que consistia de um espelho primário parabólico e um espelho secundário plano com a finalidade de desviar os raios para o observador. Este tipo de telescópio corrige a aberração cromática existente nos telescópios refratores. Na Figura 11.12 é possível ver o esquema interno desse tipo de telescópio.

Figura 11.12 – Esquema de um telescópio Newtoniano.



Fonte: <http://www.siteastronomia.com/telescopio-refletor>

Portanto há inúmeros exemplos da utilização das propriedades das cônicas nas mais diversas áreas tecnológicas.

12 CONCLUSÃO

Em um primeiro momento abordamos como estas curvas são incorporadas ao estudo da matemática no ensino Médio. Destacamos uma breve avaliação dos livros recomendados pelo Ministério da Educação (MEC) e que contemplam o aluno com o estudo da elipse, hipérbole e parábola. Foi apresentada uma breve história a respeito das cônicas, abordando seus precursores, tais como, Pitágoras, Euclides, Apolônio e Arquimedes. Posteriormente, foi mostrado o desenvolvimento das equações que regem estas curvas na sua forma cartesiana, partindo da definição da distância entre dois pontos. Apresentamos suas propriedades refletoras a partir das propriedades da reta tangente e normais às curvas. Dedicamos um capítulo para tratarmos aplicações das cônicas à nossa realidade tecnológica. O assunto *cônicas* é vasto e profuso, admitindo os mais variados tipos de abordagem, podendo ser bastante extenso e complexo. A intenção foi apresentar um trabalho voltado ao ensino Médio e por isso limitado em sua extensão e profundidade. Naturalmente, não houve um esgotamento de tópicos que podem ser explorados a respeito das cônicas e que poderiam ser incluídos em um trabalho deste tipo em um futuro. Pode-se explorar a definição das cônicas através da forma quadrática, um estudo das cônicas no espaço tridimensional, cônicas sob o ponto de vista da geometria projetiva e não podemos deixar de mencionar um estudo das cônicas com um apoio computacional, enriquecedor sob o ponto de vista das TIC's (Tecnologias de Informação e Comunicação), bem como outras abordagens possíveis..

13 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOYER, C., **História da Matemática**, 2nd edição, ed. Edgard Blucher Ltda., 1991.
- BALDIN, Y.;FURUYA, Y., **Geometria Analítica - para todos**, ed. Edufscar,São Carlos, 2011.
- SIQUEIRA, P., COSTA, A., **Cônicas**, 2nd edição, ed. UFPR, 2012.
- CAMARGO, I., BOULOS, P., **Geometria Analítica - um tratamento vetorial**, 3rd edição, ed. Prentice Hall, 2005.
- FRENSEL, K., e DELGADO, J., **Geometria Analítica**, ed. UFMA, 2011.
- VENTURI, Jacir J., **Cônicas e Quádricas**, 5th edição, ed. Unificado, 2003.
- DANTE, L., **Matemática: contexto e aplicações**, 3rd edição, ed. Ática, 2002.
- IEZZI, G. et al., **Matemática: Ciência e Aplicações**, Volume 1, 6th edição, ed. Saraiva, São Paulo, 2010.
- IEZZI, G. et al., **Matemática: Ciência e Aplicações**, Volume 3, 6th edição, ed. Saraiva, São Paulo, 2010.
- RIBEIRO,J., **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**, Volume 1, 1st edição, ed. Scipione, São Paulo, 2010.
- RIBEIRO,J., **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**, Volume 3, 1st edição, ed. Scipione, São Paulo, 2010.
- GIOVANNI, J. et al., **Matemática Fundamental: uma nova abordagem**, Volume Único, 1st edição, Coleção Delta, ed. FTD.
- JORGE, M. et al., **Matemática para o Ensino Médio**, Volume 3, ed. FGV, 2011.