



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL PARA JOVENS E  
ADULTOS EM UM CURSO TÉCNICO EM SANEAMENTO

ACÉLIO RODRIGUES SOUZA

Salvador - Bahia  
ABRIL DE 2013

# ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL PARA JOVENS E ADULTOS EM UM CURSO TÉCNICO EM SANEAMENTO

ACÉLIO RODRIGUES SOUZA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientadora:** Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ana Lucia Pinheiro Lima.

**Salvador-Bahia**

Abril de 2013

# ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL PARA JOVENS E ADULTOS EM UM CURSO TÉCNICO EM SANEAMENTO

ACÉLIO RODRIGUES SOUZA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 09 de abril de 2013

## Banca Examinadora:

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ana Lucia Pinheiro Lima (Orientadora)  
UFBA

---

Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes  
UFBA

---

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva  
UFAL

*A todos aqueles que ainda  
acreditam na educação e,  
de forma especial, à minha  
família.*



# Agradecimentos

Agradeço à Santíssima Trindade e à Virgem Maria pelas graças que foram derramadas sobre a minha vida e a vida de todos os meus familiares e, de forma especial, por ter me dado condições de superar as dificuldades que enfrentei durante este curso de mestrado.

Agradeço à minha mãe Alice Rodrigues Souza e a meu pai Antônio da Conceição Souza que, embora diante das dificuldades, souberam fazer com que eu e meus irmãos entendêssemos que seguir o caminho de Deus e dos estudos é que nos tornam pessoas profundamente felizes.

A José Gabriel Andrade Rodrigues Souza, meu filho, que mesmo com sua inocência é fonte de forças para que eu continue a investir em minha profissionalização e tente me tornar a cada dia uma pessoa melhor para servi-lo como exemplo.

A Luís Fernando Nunes de Azevedo, pelas suas orações. E a Jacqueline Andrade Ferreira, por ter me ajudado nesta caminhada.

Aproveito a oportunidade e cito, como gratidão, o nome das pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para que hoje eu pudesse ser autor deste humilde trabalho: Alzenir Rodrigues Souza, Andreia Rodrigues Souza de Azevedo, Analice Rodrigues Souza Lima, Acenísia Rodrigues Souza de Azevedo, Acely Rodrigues Souza de Azevedo, Antônio César Rodrigues Souza, Maria Raimunda Caldas Souza, Eduardo José Nunes de Azevedo, Pedro de Brito Lima, Maria Teresa Rodrigues Souza de Azevedo, Mateus Rodrigues Souza de Azevedo, Valfredo Azevedo, Luisa Souza de Azevedo, Lúcia Souza de Azevedo, Bianca Souza Lima, Rafael Souza Lima, Sofia Caldas Rodrigues Souza e Fellipe Antônio.

Agradeço à ilustre Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ana Lucia Pinheiro Lima pela gentileza, disponibilidade e competência ao nortear os rumos da execução deste trabalho.

A todos queridos professores, funcionários e alunos do IFBA/*Campus* Salvador. Aos colegas e professores do PROFMAT, em especial, ao professor Marco Antônio que tomou para si as responsabilidades do PROFMAT dando-me, hoje, condições para que eu seja Mestre em Matemática.

Por fim, quero agradecer à CAPES pelo incentivo e apoio financeiro durante este curso de mestrado.

*“Senhor, fazei-me instrumento de vossa paz.  
Onde houver ódio, que eu leve o amor;  
Onde houver ofensa, que eu leve o perdão;  
Onde houver discórdia, que eu leve a união;  
Onde houver dúvida, que eu leve a fé;  
Onde houver erro, que eu leve a verdade;  
Onde houver desespero, que eu leve a esperança;  
Onde houver tristeza, que eu leve a alegria;  
Onde houver trevas, que eu leve a luz.  
Ó Mestre, Fazei que eu procure mais consolar,  
que ser consolado; compreender, que ser  
compreendido; amar, que ser amado. Pois,  
é dando que se recebe, é perdoando que se é  
perdoado, e é morrendo que se vive para a  
vida eterna”.*

São Francisco de Assis

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia de ensino da Geometria Espacial para a Educação de Jovens e Adultos que estão se profissionalizando como Técnico em Saneamento sendo o mesmo integrado ao ensino médio. O público alvo da Educação de Jovens e Adultos (EJA), são pessoas que não tiveram acesso ou oportunidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria.

Dentre os assuntos abordados na matriz curricular da disciplina matemática, a Geometria Espacial toma uma grande dimensão por ter muita aplicabilidade na área de saneamento básico. Assim, desenvolvemos uma metodologia de ensino da Geometria Espacial que venha facilitar a compreensão dos estudantes ao tempo em que mostramos para eles algumas aplicações.

**Palavras-chave:** Ensino; Educação de Jovens e Adultos; Geometria Espacial; Saneamento.

# Abstract

This paper aims to present a methodology for teaching Geometry Education Space for Youth and Adults that have become professionalized and Sanitation Technician integrated into the school. The target audience of Education Youth and Adult (EYA), are people who do not have access or opportunity for studies in elementary and high school at the right age.

Among the issues addressed in the curriculum of the discipline of mathematics, geometry Space takes a large to have much applicability in the area of sanitation.

Thus, we developed a methodology for teaching Geometry Space that will facilitate students' understanding at the time that they show for some applications.

**Keywords:** Teaching; Education Youth and Adults; Space Geometry; Sanitation

# Índice

Introdução	10
1 A Educação Profissional para Jovens e Adultos	13
2 O Curso de Saneamento no IFBA/ <i>Campus</i> Salvador	18
3 Uma Metodologia para o Ensino da Geometria Espacial para Jovens e Adultos	22
4 Aplicações da Geometria Espacial pelo Técnico em Saneamento	47
Bibliografia	68

# Introdução

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) atende a um público diferenciado, pois tem como clientela jovens e adultos trabalhadores. Muitos destes são pais de família que, por motivos diversos, não cumpriram as etapas escolares no tempo devido, passaram muito tempo longe da escola ou nunca a frequentaram. Com isso, deixaram para trás as práticas dos estudos, como também todo um processo educacional que foi interrompido, impedindo assim o desenvolvimento de importantes competências necessárias para a sua vida social.

Desta forma, encontramos na EJA, alunos com grande dificuldade de aprendizado e daí a idéia, de se pensar numa metodologia de ensino adequada para o aprendizado neste contexto, de tal forma que se consiga minimizar as dificuldades apresentadas.

No Instituto Federal da Bahia/*Campus* Salvador a EJA está presente no ensino médio integrado à educação profissional, oferecendo o curso Técnico em Saneamento, desde 2011, e conta com uma carga horária de 2433 horas, sendo 960 horas para as disciplinas da base nacional comum (Artes, Biologia, Filosofia, Física, Geografia, História, Introdução às Ciências, Língua Portuguesa, Matemática, Química e Sociologia Geral e do Trabalho) 258 horas para parte diversificada (Espanhol, Desenho Técnico, Informática, Inglês, Segurança Meio Ambiente e Saúde (SMS) e Seminários Interdisciplinares) e 1215 horas para formação profissional, Análise de água, Efluentes e Resíduos, Desenho Assistido por Computador, Empreendedorismo, Gestão, Hidrologia, Introdução ao Saneamento, Introdução à Hidráulica, Materiais de Construção, Mecânica dos Solos, Organização, Normas e qualidade (ONQ), Orçamento e Planejamento de Obras, Planejamento Urbano, Projetos de Obras de Saneamento Urbano, Relações Interpessoais e Participação Social, Sistemas de Sanitarismo Ambiental (SSA), Topografia e Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Neste contexto, a Matemática apresenta-se como ferramenta fundamental, pois a sua aplicação é efetivada na maioria das disciplinas técnicas. E, de modo mais específico, as Geometrias Plana e Espacial merecem destaque na formação do técnico, pois as atividades desta profissão exige técnicas de resolução de problemas geométricos. A disciplina Matemática possui uma carga horária de 180 horas, onde 50 horas são destinadas ao ensino deste conteúdo.

A grande importância da Geometria, no curso de Técnico em Saneamento, deve-se ao fato de boa parte das atividades da profissão fazerem uso dela, e isto será exemplificado no capítulo 4 com as aplicações. Isto significa que o aprendizado destes conteúdos será determinante para que o indivíduo formado neste curso seja um bom profissional.

O objetivo principal desta dissertação é apresentar uma metodologia de ensino da Geometria Espacial no Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA) no Curso de Saneamento Básico do Instituto Federal da Bahia/ *Campus* Salvador, visto que, como foi citado acima, o bom aprendizado de tais conteúdos é fundamental para o desenvolvimento profissional desses estudantes nessa área. Esta metodologia será desenvolvida com uso de modelos concretos dos sólidos geométricos, para facilitar a compreensão, bem como protótipos das situações em que a geometria espacial é aplicada pelo profissional da área de saneamento básico.

Nesta metodologia, muitas vezes utilizaremos a intuição do aluno bem como os conhecimentos adquiridos em sua vida cotidiana, abrindo, desta forma, uma possibilidade para a formalização matemática dos conceitos e teoremas, respeitando as características cognitivas dos alunos. A proposta apresentada é fundamentada e confirmada por Huete e Bravo (2006) *“o processo de ensino e aprendizagem da matemática inicia a partir da intuição e progressivamente aproxima-se da educação. Essa forma de construir o conhecimento matemático relega, em parte, qualquer tentativa de se apropriar de modo mecânico de procedimentos e algoritmos para a resolução de problemas reais. Por outro lado, vincula tal procedimento a um planejamento de seu ensino e aprendizagem fundamentados no nível de cognição dos alunos”*. Assim, trazemos como proposta, um material que visa oferecer um suporte didático aos professores de matemática que exercem suas atividades na EJA onde a metodologia de ensino segrega uma linguagem simplificada para teoria da geometria e uma série de aplicações na área de saneamento, tornando o ensino da geometria mais agradável na perspectiva de despertar o interesse do aluno e a elevação do desempenho deles.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. O primeiro capítulo, *“A Educação Profissional de Jovens e Adultos”*, está dividido em três partes: na primeira parte *“A Educação de Jovens e Adultos - EJA”* apresentamos o público da EJA, as funções e bases legais; na segunda parte *“A Educação Profissional - EP”* trazemos os objetivos da EP, seu histórico e suas bases legais, e na terceira parte *“O PROEJA”* trazemos sua definição, seus princípios e bases legais.

No segundo capítulo, *“O Curso de Saneamento Básico no IFBA/Campus Salvador”*, definimos saneamento básico, as atividades desenvolvidas pelos profissionais desta área e as disciplinas estudadas no curso Técnico de Saneamento Básico.

No terceiro capítulo, *“Uma Metodologia para o Ensino da Geometria Espacial para Jovens e Adultos”*, apresentamos uma metodologia para o ensino da geometria espacial baseada em experiências vividas na sala de aula e em estudos realizados por especialistas na área de educação que contribuíram para o processo ensino aprendizagem da EJA.

Por fim, no quarto capítulo, “*Aplicações da Geometria Espacial pelo Técnico de Saneamento*”, apresentamos algumas aplicações, da geometria espacial, feitas por um técnico no desenvolvimento de suas atividades profissionais.



# Capítulo 1

## A Educação Profissional para Jovens e Adultos

Atualmente, estão sendo executados alguns programas governamentais, desde 1996, que contemplam especificamente a Educação Básica de Jovens e Adultos. Entretanto, observou-se que uma quantidade considerável dos estudantes envolvidos nesses programas, quando concluem a Educação Básica, não conseguem avançar no sentido de exercerem uma função específica na sociedade, o que teria como consequência uma melhora significativa nas suas condições de vida. Diante dessa situação, foram criados programas que promoveram a educação profissional para jovens e adultos, e possivelmente, a futura inserção dos mesmos no mercado de trabalho.

Neste capítulo, consideraremos os programas para a Educação de Jovens e Adultos (EJA) bem como para a Educação Profissional (EP). Em seguida, faremos uma abordagem sobre o Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos - PROEJA que, está presente no Instituto Federal da Bahia - IFBA/*Campus* Salvador, fazendo a integração do ensino médio com o Curso Técnico em Saneamento Básico.

### 1.1 - A Educação de Jovens e Adultos

A elaboração de projetos na tentativa de melhorar o nível de escolaridade para jovens e adultos no Brasil é uma prática de muitos anos. Mas, somente no ano de 1996, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB, lei 9394/96 publicada em

20 de dezembro de 1996, estabeleceu, no capítulo II, seção V, a Educação de Jovens e Adultos no artigo 37: “a educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou oportunidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria”. Segundo o Ministério da Educação e Cultura - MEC o senso escolar de 2001 revelou que 7,7 milhões de brasileiros estavam matriculados no ensino fundamental com idade avançada, acima de 15 anos, e 4,5 milhões estavam matriculados no ensino médio com idade acima de 18 anos. Ou seja, existiam 12,2 milhões de estudantes defasados em sua vida escolar o que representava, aproximadamente, 7 % da população brasileira da época. A esta situação ainda acrescentamos a quantidade de estudantes que abandonaram a escola e não retornaram.

Em geral, os alunos da EJA, são da classe baixa, muitos nunca frequentaram a escola e, os que frequentaram quando criança, não tiveram um ensino de qualidade, devido a vários fatores que não serão discutidos ao longo desta dissertação. Muitos jovens e adultos encontraram as portas do mercado de trabalho fechadas por não apresentarem formação adequada para assumirem determinadas atividades numa empresa. Daí a tentativa de muitos deles voltarem a estudar para resgatar os valores sociais perdidos quando outrora deixara de estudar.

A EJA deve ser pensada como um modelo próprio de ensino, pois seu público é justamente este: com idade acima da desejada para o nível escolar e que querem recuperar o tempo perdido de estudos, proporcionando maiores oportunidades de emprego, crescimento profissional e qualidade de vida. Segundo o Conselho Nacional de Educação, o Parecer CNE/CEB 11/2000 publicada no Diário Oficial da União em 9 de junho de 2000, relata que a EJA possui três funções: *reparadora, equalizadora e qualificadora ou permanente*.

A função *reparadora* é o exercício de um direito civil, é o ingresso em uma escola de qualidade visando a igualdade entre os seres humanos. É a busca de um direito negado pela estrutura socioeconômica do país.

A função *equalizadora* é a garantia do resgate do nível da escolaridade do indivíduo, confirmando as competências adquiridas no cotidiano, ou em sua prática profissional.

A função *qualificadora ou permanente* é a função mais forte da EJA, pois segundo o Parecer CNE/CEB 11/200 “*mais do que uma função, ela é o próprio sentido da EJA*”. De fato, após passar pelas funções *reparadora* e *equalizadora*, o indivíduo estará qualificado e aberto para o aprimoramento dos conhecimentos, bem como obter formação para assumir um novo papel social.

Como a EJA possui um público que apresenta muitas dificuldades no aprendizado, então exige-se do corpo docente uma qualificação específica e, além disto, o desejo em trabalhar com esta modalidade, pois o desenvolvimento das atividades na EJA requer um planejamento específico, que considere todas as dificuldades enfrentadas

pelos alunos. A missão principal de um professor na EJA é ser agente de inserção do indivíduo na sociedade resgatando seu valor e, conseqüentemente, elevando a sua contribuição para a comunidade.

## 1.2 - A Educação Profissional

A Educação Profissional (EP) tem como objetivo preparar profissionalmente o indivíduo, oferecendo ao mercado de trabalho pessoas qualificadas. Com a LDB, a EP passou a ser considerada como uma complementação à educação básica ofertada nas escolas, em instituições especializadas ou no próprio ambiente de trabalho.

De modo semelhante à EJA, a EP possui uma história extensa. Em 1909, foram criadas as Escolas de Aprendizes Artífices, pelo decreto 7566 publicado em 23 de setembro de 1909 que em 1930 passa a ser supervisionada pelo MEC, criado no mesmo ano.

A constituição de 1937 tratou, com especificidade, do ensino técnico, profissional e industrial e a lei 378 de 13 de janeiro de 1937 transformou as Escolas de Aprendizes Artífices em Liceus Profissionais. Em 1942, aconteceram algumas transformações no sistema educacional brasileiro que foram chamadas de Reforma Capanema e com esta reforma na educação ensino profissional passa a ser considerado nível médio. Ainda no ano de 1942, as Escolas de Aprendizes Artífices são transformadas, pelo decreto 4127 publicado em 25 de fevereiro de 1942, em Escolas Industriais e Técnicas que, em 1959, passaram a ser autarquias e recebem o nome de Escolas Técnicas Federais. Em 1961, a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional LDB 4024/61 publicada em 20 de dezembro de 1961, equipara o ensino profissional ao acadêmico. Em 1971, acontece uma reformulação da LDB 4024 gerando a LDB 5692 publicada em 11 de agosto de 1971, que torna técnico profissional todo o currículo de segundo grau. Em 1994 através da Lei 8948/94 publicada em 8 de dezembro de 1994, as Escolas Técnicas Federais e Agrotécnicas Federais são transformadas, gradualmente, em Centros Federais de Educação Tecnológica - CEFET.

A LDB 4024/61 foi revogada pela LDB 9394/94 publicada em 20 de dezembro de 1994, que através do decreto 2208 de 17 de abril de 1997, foi complementada descrevendo os níveis da educação profissional: *básico*, *técnico* e *tecnológico*. No nível *básico* o documento afirma que pode ser oferecida qualificação, requalificação e reprofissionalização de trabalhos para pessoas de qualquer nível escolar, o nível *técnico* proporciona habilitação profissional a alunos matriculados ou egresso de ensino médio

e por fim no nível *tecnológico* que são cursos de nível superior na área tecnológica, destinados a egressos do ensino médio e técnico integrado.

Em 2004, com o decreto 5154 de 23 de julho de 2004, o MEC regulamenta a forma de oferta dos cursos técnicos. Nele deixa a critério da instituição escolar a forma de oferta do curso técnico podendo ser concomitante com o ensino médio e assim o estudante ao sair da escola, em um só curso, concluiria o ensino médio e o curso técnico.

O MEC através da Lei 11.892, de 29 de dezembro de 2008, cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia que são instituições de educação superior, básica e profissional, pluricurriculares e multicampi, especializados na oferta de educação profissional e tecnológica nas diferentes modalidades de ensino, com base na conjugação de conhecimentos técnicos e tecnológicos com as suas práticas pedagógicas, nos termos desta Lei.

Em toda a sua história, a Educação Profissional visa oferecer ao cidadão uma formação técnica garantindo a ele uma profissão para exercer, em benefício da sociedade. O Artigo 2 da LDB (Lei 9394/96) cita que:

*“A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho”.* Desta forma, fica instituída a educação profissional que visa *“preparação geral para o trabalho e, facultativamente, a habilitação profissional”.*

## 1.3 - O PROEJA

De modo a integrar a educação profissional à educação básica, o PROEJA, além de oferecer aos jovens e adultos um ensino básico de qualidade, também oferta um curso técnico que garantirá uma futura profissão.

Em 2005, o MEC, através do Decreto 5478 publicado no Diário Oficial da União (DOU) em 24 de junho de 2005, criou o Programa de Integração da Educação Profissional ao Ensino Médio na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos - PROEJA e em 2006, com o Decreto 5840, o PROEJA passou a ser de âmbito nacional assumindo o nome atual e podendo ser adotado por instituições públicas, municipais e estaduais, e por entidades privadas de serviço social.

O projeto político-pedagógico do PROEJA fundamenta-se nos princípios:

- A integração curricular visando a qualificação social e profissional articulada à elevação da escolaridade, construída a partir de um processo democrático e participativo de discussão coletiva;
- A escola formadora de sujeitos articulada a um projeto coletivo de emancipação humana;
- A valorização dos diferentes saberes no processo educativo;
- A compreensão e consideração dos tempos e espaços de formação dos sujeitos da aprendizagem;
- A escola vinculada à realidade dos sujeitos;
- A autonomia e colaboração entre os sujeitos e o sistema nacional de ensino;
- O trabalho como princípio educativo.

A implantação deste programa por uma instituição não é simples, pois torna-se necessário planejar ações articuladas tais como: a formação do professor, organização curricular integrada, práticas pedagógicas, mecanismos de assistência que evitem a evasão e promova a aprendizagem do estudante e organização da infra-estrutura para receber o curso entre outros.

Com o objetivo de formar professores para trabalhar com esse programa, foi criado o Curso de Especialização em Educação Profissional Integrada à Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos - CEPROEJA cujo objetivo geral é: *“formar profissionais para atuar na elaboração de estratégias e no estabelecimento de formas criativas das atividades de ensino-aprendizagem, e para prover pro-ativamente as condições necessárias e as alternativas possíveis para o desenvolvimento adequado da Educação Profissional integrada à Educação Básica na modalidade de Educação de Jovens e Adultos, considerando as peculiaridades, as circunstâncias particulares e as situações contextuais concretas em que programas e projetos deste campo são implementados”*.

A clientela do PROEJA, geralmente, são jovens e adultos que possuem uma jornada diária de trabalho, estão muito tempo afastados das atividades escolares e, além disto, ainda enfrentam problemas familiares, sociais e econômicos.

Para ingressar no curso Técnico em Saneamento do PROEJA no IFBA/*Campus* Salvador, os candidatos são submetidos a um processo de seleção que é dividido em três etapas: *palestra, redação e entrevista*. Fica então claro que não é exigido nenhum conhecimento prévio das disciplinas do ensino básico tais como: matemática, ciências, história, geografia, inglês, desenho, artes, etc. Tal situação nos levar a considerar que o aluno deve ser trabalhado partindo de um nível básico até, gradativamente, chegar a um nível satisfatório.

## Capítulo 2

# O Curso de Saneamento no IFBA/*Campus* Salvador

Iniciaremos esse capítulo falando sobre o que é saneamento e quais as atribuições que estão sob a responsabilidade de um técnico desta área. A seguir, apresentaremos algumas informações sobre o curso Técnico em Saneamento Básico ofertado no IFBA - *Campus* Salvador, que faz parte do programa de educação de Jovens e Adultos.

O saneamento é uma ação de fundamental importância para o bem estar da sociedade. Sanear significa *tornar são, saudável (um ambiente, uma região)*. Assim, podemos dizer que saneamento é toda ação que visa a higiene necessária para uma região. Como exemplos de tais ações, podemos citar o abastecimento de água potável, o manejo de água pluvial, a coleta e tratamento de esgoto, a limpeza urbana, o manejo de resíduos sólidos e o controle de pragas e qualquer tipo de agente patogênico, isto é, organismos capazes de produzir doenças infecciosas. Estas ações convergem para um único ideal, que é garantir a saúde das pessoas que vivem nas comunidades.

A Lei 11.445, publicada em 5 de janeiro de 2007, estabelece diretrizes e políticas federais, nacionais, para o saneamento básico, pois as ações que caracterizam o Saneamento Básico são considerados serviços essenciais, tendo em vista a necessidade imperiosa desses por parte da população, além da importância para a saúde de toda a sociedade e para a preservação do meio ambiente. A falta de saneamento básico aliada a fatores sociais são determinantes para o surgimento de infecções, tendo as crianças como o grupo que apresenta o maior risco em contrair as doenças infecto-contagiosas.

Estes serviços podem ser prestados por empresas públicas ou, em regime de concessão, por empresas privadas. Mas, como o setor de saneamento, também se caracteriza pela necessidade de um elevado investimento em obras e constantes melhora-

mentos, a concessão dos serviços de saneamento a empresas privadas devem ser muito bem fiscalizadas pelo Estado, uma vez que o objetivo de uma companhia privada é sempre o lucro máximo, o que pode inviabilizar um bom serviço.

Os profissionais de saneamento básico são oriundos dos cursos de nível técnico de Infraestrutura Urbana, Saneamento Básico, Estradas e Edificações, e dos cursos, superiores de Engenharia Sanitária, de Engenharia Ambiental, de Saúde Coletiva, de Saúde Ambiental, de Tecnólogo em Saneamento, de Ciências Biológicas e de Tecnólogo em Gestão Ambiental, entre outros. Estes profissionais podem atuar nos serviços públicos, em concessionárias de abastecimento de água e canalização de esgotos/águas pluviais, escritórios e consultorias.

Assim, torna-se necessária a formação de cidadãos competentes para atuarem na área de saneamento básico. Dentre as atividades desenvolvidas por estes profissionais, podemos destacar:

*Atuação na construção de estações de tratamento de água:* Processo de submissão da água, no qual ela é tratada reduzindo a concentração de poluentes de forma que não apresente risco à saúde.

*Atuação na construção de estações de tratamento de esgoto:* A finalidade é remover o material sólido, reduzir a demanda bioquímica de oxigênio; exterminar microorganismos patogênicos e reduzir as substâncias químicas indesejáveis. As diversas unidades da estação convencional podem ser agrupadas em função das eficiências dos tratamentos que proporciona. Assim temos: tratamento preliminar (gradeamento, remoção de gorduras e remoção de areia), tratamento primário (tratamento preliminar, decantação, digestão do lodo e secagem do lodo), tratamento secundário (tratamento primário, tratamento, biológico, decantação secundária e desinfecção).

*Obras de captação:* São obras cuja finalidade é captar as águas das chuvas para aproveitamento. Geralmente estas obras são executadas em lugares cujo índice de chuva é baixo, tornando necessária a reserva de água. Também podemos captar água da chuva para fazer economia da água potável, como exemplo, para usar nos sanitários e lavar ambientes.

*Transporte de águas:* Planejamento para suprimento de água.

*Manutenção de equipamentos e redes:* Redes são as obras realizadas para condução do material em questão (água potável, esgoto e águas pluviais) formadas pelos dutos e equipamentos. Periodicamente os elementos constituintes deste projeto devem passar por manutenção.

*Execução de aterros sanitários:* Espaço destinado à disposição final de resíduos sólidos gerados pela atividade humana.

*Obras para disposição e reciclagem de resíduos:* A reciclagem é o aproveitamento dos resíduos sólidos que foram recolhidos pela “coleta seletiva”.

*Unidade de compostagem:* Local onde são desenvolvidos o conjunto de técnicas aplicadas para controlar a decomposição de materiais orgânicos, com a finalidade de obter, no menor tempo possível, um material estável, rico em húmus e nutrientes minerais com atributos físicos, químicos e biológicos superiores (sob o aspecto agrônômico) àqueles encontrados na(s) matéria(s)-prima(s).

*Análise do consumo de água:* Esta análise visa a eliminação do desperdício de água, redução do consumo de energia elétrica pela redução do volume bombeado para o reservatório superior, identificação de vazamentos de difícil percepção, redução do volume efluente de esgotos, redução das contas água/esgotos das residências.

O Curso Técnico de Saneamento, no IFBA/*Campus* Salvador, teve sua primeira turma no primeiro semestre de 2011 e a escolha deste curso, para o PROEJA, foi motivada pela carência de profissionais qualificados no mercado de trabalho nacional diante da grande demanda de serviços. Embora o curso já esteja em funcionamento, o seu projeto pedagógico, ainda está em fase de ajustes o que impossibilita a sua aprovação e reconhecimento pelo Ministério da Educação e Cultura - MEC.

O curso possui uma carga horária (C.H) de 2433 horas, ditribuídas entre disciplinas da Base Nacional Comum (960h), Parte diversificada (258h) e Formação Profissional (1215h). Sua grade curricular está composta conforme a tabela abaixo:

Disciplina	Carga Horária
Artes	30
Biologia	90
Filosofia	30
Física	90
Geografia	90
História	90
Introdução às Ciências	60
Língua Portuguesa	180
Matemática	180
Química	90
Sociologia Geral e do Trabalho	30
Espanhol	30
Desenho Técnico	90
Informática	30
Inglês	30



Segurança Meio Ambiente e Saúde - SMS	30
Seminários Interdisciplinares - SI	48
Análises de Água, Efluentes e Resíduos	90
Desenho Assistido por Computador	60
Empreendedorismo	30
Gestão	30
Hidrologia	30
Introdução ao Saneamento	30
Introdução à Hidráulica	30
Materiais de Construção	60
Mecânica dos Solos	120
Organização, Normas e Qualidade - ONQ	30
Orçamento e Planelamento de Obras	60
Planejamento Urbano	60
Projetos de Obras de Saneamento Urbano	180
Relações Interpessoais e Participação Social	30
Sistemas de Sanitarismo Ambiental - SSA	210
Topografia	105
Trabalho de Conclusão de Curso - TCC	60

Quanto ao perfil dos alunos do PROEJA do IFBA/*Campus* Salvador, foi constatado que, aproximadamente, 80% dos alunos estão atuando no mercado de trabalho, não necessariamente na área de saneamento. A faixa etária desses estudantes está variando entre 20 e 60 anos de idade. Cerca de 80% destes estudantes ficaram mais de 5 anos sem frequentar a escola, e a maioria residem na periferia. No total, este curso possui atualmente, aproximadamente, 60 alunos.

## Capítulo 3

# Uma Metodologia para o Ensino da Geometria Espacial para Jovens e Adultos

Neste capítulo, vamos apresentar uma metodologia para o ensino de Geometria Espacial que venha a facilitar a compreensão deste conteúdo na Educação de Jovens e Adultos. Como foi citado no Capítulo 1 deste trabalho, os estudantes dos cursos ofertados pela EJA apresentam muitas dificuldades no aprendizado devido a vários fatores. De fato, quando um aluno ingressa no PROEJA, a maioria não domina nem mesmo as operações fundamentais no conjunto dos números reais. Desta forma, é preciso iniciar o curso ensinando as operações básicas. Isso não é um processo simples, pois é neste momento que eles estão saindo da inércia, ou seja, começando a acompanhar o ritmo da vida escolar e relembrando os conteúdos esquecidos.

Imaginemos então a dificuldade e, em muitos casos, a frustração enfrentadas por estes alunos, ao estudarem os conteúdos de geometria espacial, já que eles não tem domínio das operações mais simples. Por outro lado, para o professor também não é fácil transmitir este conhecimento a alunos com tais características por não possuírem uma formação adequada. Daí a importância em desenvolver uma técnica, a mais adequada possível, para que aconteça o processo ensino-aprendizagem, de maneira satisfatória.

O primeiro questionamento que o professor deve fazer é: porque o aluno de determinado curso da EJA, seja técnico ou não, precisa aprender geometria espacial? E a partir daí, trabalhar os conteúdos visando as aplicações cabíveis para tal fim. Torna-se então desnecessário, pelo menos no primeiro momento, o uso padrão da linguagem matemática que poderia interferir na compreensão dos alunos. Pais (2006, p.62 e 70)

afirma que:

*O ensino da linguagem matemática não deve ser priorizado em relação à compreensão das idéias representadas pelos símbolos.*

O segundo ponto a considerar é que, segundo pesquisas (Souza, 2011), a forma de aprendizagem da matemática pelo *método da resolução de problemas* é vista como a mais eficiente tanto pelos alunos como pelos professores. A saber, o método da aprendizagem da matemática por resolução de problemas consiste na exposição de um problema que, durante a tentativa de chegar a uma solução, é solicitado da parte dos estudantes conhecimentos prévios, atenção, boa leitura, interpretação, associação dos dados fornecidos pelo problema com a teoria estudada. Além do que, o método da resolução de problemas, se aproxima do cotidiano dos alunos atraindo a atenção e despertando o seu interesse. No quarto capítulo apresentamos quatro problemas pelos quais poderemos constatar a solicitação das competências descritas acima. Esse interesse é fundamental para despertar nos alunos disposição e iniciativa para ficarem até mais tarde estudando matemática, a reservar um tempo no sábado ou no domingo para praticar os exercícios de matemática, o que fará grande diferença na aprendizagem dos conteúdos. É com esta finalidade que vamos apresentar uma metodologia prática e atrativa para o ensino da geometria espacial.

Para o que vamos tratar a seguir, vamos admitir que os estudantes dominam os principais conteúdos de geometria plana, que por sua baixa carga horária não pode ser visto em sua totalidade. No nosso caso, os principais conteúdos de Geometria Plana são: semelhança de triângulos, Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo, circunferência, perímetros e áreas de figuras planas.

Para que os alunos compreendam bem os conteúdos de geometria espacial é importante que visualizem a situação concretamente, pois nem sempre possuem a capacidade de abstração desenvolvida e assim, não conseguem conceber na imaginação as teorias e problemas propostos. Aqui, listaremos os conteúdos e apresentaremos aos professores uma proposta de ensino que procura conduzir ao bom entendimento dos assuntos de Geometria Espacial que constam na ementa da disciplina Matemática do quarto semestre do Curso de Saneamento oferecido pelo Instituto Federal da Bahia/*campus* Salvador.

De fato, seguiremos uma linha lúdica, com uso de modelos matemáticos, para ensinarmos geometria espacial na EJA, fazendo com que o aluno compreenda o assunto sem recorrer às demonstrações clássicas, mas garantindo o que, poderia ser o mais importante nesse processo: que os alunos do curso técnico saibam aplicar os conteúdos aprendidos em sala no cumprimento das suas futuras tarefas profissionais. Para que as idéias apresentadas aqui possam ser aplicadas, não é indispensável, mas é de fundamental importância que o professor disponha de um laboratório do Ensino

da Matemática para que trabalhe em um ambiente chamativo e agradável e que já possua alguns modelos que proporcione o aprendizado.

Uma observação importante é que as técnicas que apresentaremos aqui podem ser aplicadas numa turma da EJA, independente do curso, pois o que muda são as aplicações do conteúdo na prática dos futuros profissionais. Isso exigirá do professor, uma pesquisa sobre o curso profissionalizante e o desenvolvimento de material didático adequado à situação. Como o IFBA/ *Campus* Salvador oferece o Curso Técnico em Saneamento Básico, no próximo capítulo deste trabalho, vamos direcionar as aplicações para este fim.

### 3.1 - Retas e Planos



Pequena ponte ortogonal ao eixo de um canal de esgoto sanitário.

Entendemos que é importante, para o aluno da EJA, saber identificar as posições relativas entre retas, retas e planos e entre planos, assim como saber o que é um diedro e um triedro. Estes conceitos podem ser trabalhados com uso de modelos construídos segundo a imaginação de cada estudante e ajustados com o desenvolvimento de debates em sala de aula. Como o papel do professor é auxiliar na construção do conhecimento, ele não deve simplesmente apresentar os conceitos, mas ser gerador de discussões e debates com o objetivo de fazer com que os alunos interajam e comecem a entrar na situação raciocinando, e, conseqüentemente, começando a desenvolver uma visão crítica a ponto de chegar a uma definição correta. Por exemplo, no lugar de escrever no quadro “*se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si*” podemos, de fato, tomar três protótipos de reta, canudos por exemplo, onde cada um deles represente as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , colocar a reta  $r$  paralela à

reta  $s$  e a reta  $t$  paralela à reta  $s$  e perguntar qual é a posição relativa entre as retas  $r$  e  $t$ .



As retas  $r, s$  e  $t$  são paralelas entre si

A princípio, ações deste tipo parecem desnecessárias, mas quando se trata de jovens e adultos isto é fundamental, pois eles não absorvem muitas informações simultaneamente, então uma maneira é fazer com que ele entenda e domine o conteúdo, sem recorrer à *decoreba*, apesar de toda dificuldade que encontram na linguagem matemática formal. Veja a figura abaixo (pt.wikipedia.org).

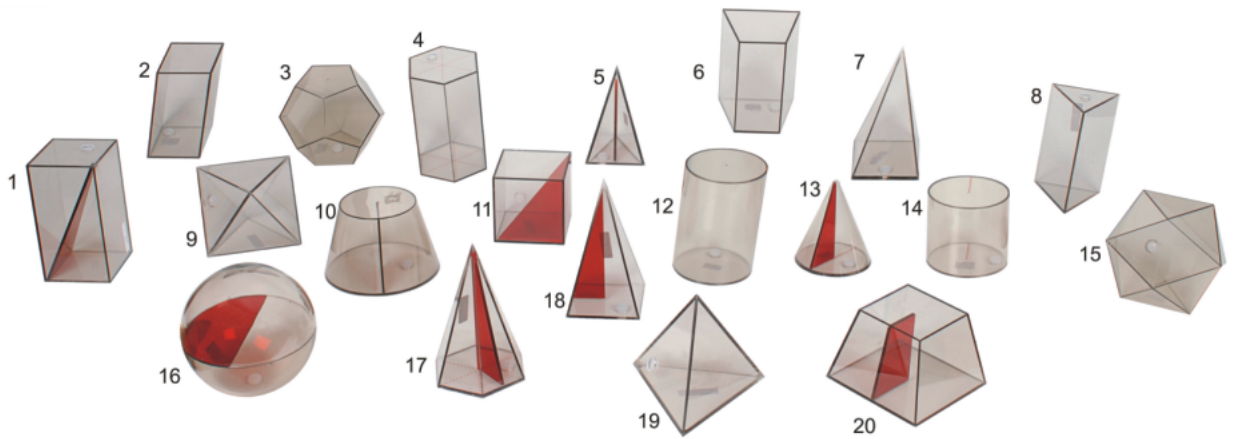
### 3.2 - Prismas



Canal de esgoto sanitário no formato de um paralelepípedo de base quadrada

Uma sugestão para uma abordagem inicial no estudo dos prismas é fazer com que o aluno construa uma noção intuitiva do objeto e, depois, estabeleça uma definição mais formal. Faremos isto de uma forma bem simples dispondo sobre uma mesa vários sólidos geométricos, como por exemplo (*prisma de base triangular, prisma de base hexagonal, cubo, paralelepípedo, pirâmide de base triangular, pirâmide de base quadrada, pirâmide de base hexagonal, cilindro, cone, esfera*) conforme a figura abaixo ([www.lojadoprofessor.com.br](http://www.lojadoprofessor.com.br)) e, em seguida, destacando quais dos sólidos são prismas (na figura são prismas os sólidos de número 1, 2, 4, 6, 8, 11, 12, 14). A seguir perguntamos aos alunos o que os sólidos destacados tem em comum. Em geral, por experiências em sala de aula, as respostas são algumas das seguintes:

- *A parte de baixo é igual à parte de cima!*
- *As laterais são retângulos!*
- *Não tem uma pontinha apontando para cima!*



### Sólidos Geométricos

A partir destas respostas podemos, junto com os alunos, chegar a uma definição que atenda às necessidades, ou seja, uma definição simples e que não cause dúvidas. Devemos dizer que *a parte de baixo e a parte de cima* são chamadas, respectivamente, base inferior e base superior e que as *laterais são sempre paralelogramos*. Com esta visão prática de prismas, partimos para a seguinte definição que consideramos adequada para a EJA:

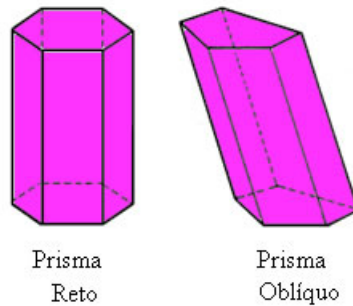
*Prisma é um sólido geométrico que possui como base inferior e base superior figuras planas congruentes e paralelas entre si e paralelogramos como faces laterais.*

Daí, apresentamos alguns prismas tais como um prisma reto, um prisma oblíquo, e um prisma regular. Desta forma, o domínio do conteúdo é assegurado por ser construído em conjunto. E, para finalizar, nos resta apenas dizer quais são os elementos do prisma.

Uma forma interessante para falar dos elementos (*arestas, vértices, faces*) é, mais uma vez, dispor de alguns modelos na forma de prisma e uma foto de um prisma no quadro e depois mostrar nos modelos os elementos e escrever no quadro na linguagem matemática. Assim, eles começam a entender melhor a simbologia matemática na geometria espacial.

Para trabalharmos na EJA com cálculos envolvendo o prisma, e os sólidos em geral, é importante direcionarmos o conteúdo devido à baixa carga horária disponível. Então vamos considerar apenas prismas regulares retos, ou seja, quando as arestas laterais são perpendiculares ao plano da base e a base é um polígono regular. fácil

fazer com que o aluno observe que, para calcular a área da base de um prisma, basta identificar a figura geométrica que a compõe e que a superfície lateral do prisma é formada por retângulos congruentes. Veja a figura abaixo (www.brasilecola.com).



A explicação sobre volume do prisma deve ser abordado de forma simples. Muito comumente é utilizado a *razão entre prismas* para apresentar a noção de volume desses sólidos. Aqui, não seguiremos esse caminho. Daremos uma noção do que é o volume de um prisma tomando como modelo um prisma reto de base retangular com dimensões, por exemplo  $2dm$ ,  $4dm$  e altura  $3dm$ , e 24 cubos com arestas de  $1dm$ .

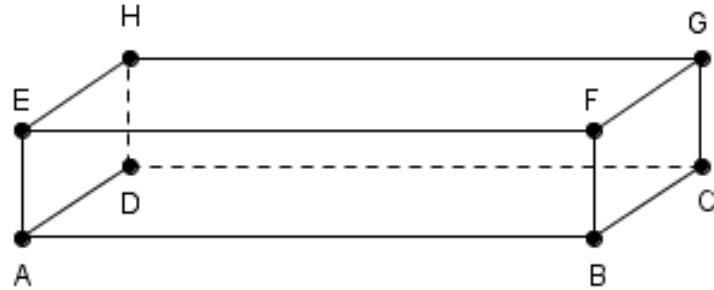
Tomando um cubo com aresta  $1dm$ , apresentamos para os estudantes a unidade de volume, ou seja, o cubo que tem volume igual a  $1dm^3$ . A primeira pergunta que devemos fazer para a classe é: *quantos cubos cabem dentro do prisma dado?* A resposta é 24 e podemos fazer isto colocando os cubos dentro do prisma e chegar à conclusão de que o volume é  $24dm^3$ . A segunda pergunta é: *como podemos chegar à resposta 24 cubos sem utilizar os modelos?* Note que o produto das medidas das arestas é  $2 \times 3 \times 4$  que é igual a 24 e não é um acaso, pois pelo princípio multiplicativo da contagem esse valor expressa a quantidade cubos de  $1dm$  que cabe no paralelepípedo. Logo, o volume do prisma dado é  $V = 2 \times 4 \times 3$ , mas se  $2 \times 4$  é a área da base e  $3$  é a altura então o volume do prisma é  $V = A_b h$  onde  $A_b$  é a área da base e  $h$  é a altura.

Quando um prisma é reto com base retangular o chamamos de *paralelepípedo* de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ . E, ainda mais, quando tivermos  $a = b = c$  chamaremos este paralelepípedo de *cubo*. Observe as figuras abaixo.

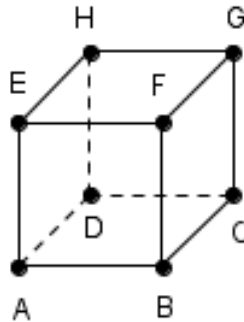
Se a base de um prisma de altura  $c$  é um retângulo de dimensões  $a$  e  $b$ , observe que ele é um paralelepípedo, então teremos

$$A_b = ab. \quad (3.1)$$





Paralelepípedo Reto-Retângulo



Cubo

Para calcular a área lateral do paralelepípedo, devemos mostrar, nos modelos, que essas faces laterais são retângulos e, conseqüentemente, podemos calcular a área de cada face lateral e depois somar os valores. Assim, teremos

$$A_l = ac + ac + bc + bc = 2ac + 2bc = 2c(a + b). \quad (3.2)$$

De forma análoga, devemos mostrar no modelo, que a área total é o dobro da área da base somada com a área lateral.

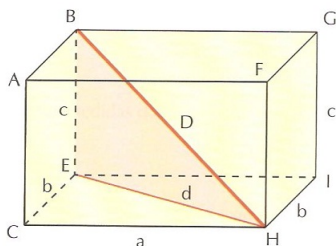
$$A_t = 2A_b + A_l = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc). \quad (3.3)$$

Como o volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura,

então

$$V = abc. \quad (3.4)$$

Consideraremos mais dois elementos importantes do paralelepípedo: *a diagonal das faces, que são seis diagonais distintas, e a diagonal do paralelepípedo propriamente dita*. Podemos definir estes dois elementos usando a própria sala de aula (*em geral, possuem a forma de um paralelepípedo*). Veja a figura ([portaleducarbrasil.com.br](http://portaleducarbrasil.com.br)).



Paralelepípedo Reto Retângulo com sua diagonal  $D$  em destaque

Da geometria plana, eles já sabem o que é a diagonal de um retângulo. Proporemos então o seguinte exercício: *vamos calcular o comprimento da diagonal de todas as paredes da sala de aula, inclusive o da diagonal do chão*. Não é difícil medir as arestas da sala de aula e com posse destas medidas aplicamos o Teorema de Pitágoras. Daí, fica fácil enxergar que o cálculo das diagonais das faces é uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras.

Usando a face lateral de arestas  $a$  e  $b$ , vamos calcular a diagonal  $d_{ab}$ .

$$d_{ab} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.5)$$

Usando a face lateral de arestas  $a$  e  $c$ , vamos calcular a diagonal  $d_{ac}$ .

$$d_{ac} = \sqrt{a^2 + c^2} \quad (3.6)$$

Usando a face lateral de arestas  $b$  e  $c$ , vamos calcular a diagonal  $d_{bc}$ .

$$d_{bc} = \sqrt{b^2 + c^2}. \quad (3.7)$$

Ainda, utilizando a própria sala de aula, podemos definir a diagonal do paralelepípedo da seguinte maneira:

*O segmento que une dois vértices opostos sem que este segmento pertença a algum dos lados, chama-se diagonal do paralelepípedo.*

A princípio não devemos dizer a localização deste segmento, mas deixar que os alunos raciocinem a partir da definição. Em seguida, mostramos a existência de um triângulo retângulo sendo um dos catetos a altura da sala de aula e o outro a diagonal do piso da sala de aula. Assim, eles serão induzidos a aplicarem novamente o Teorema de Pitágoras e encontrarão a medida da diagonal do sólido. Basta agora, formalizar a expressão para calcular o comprimento  $D$  do paralelepípedo usando as medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (3.8)$$

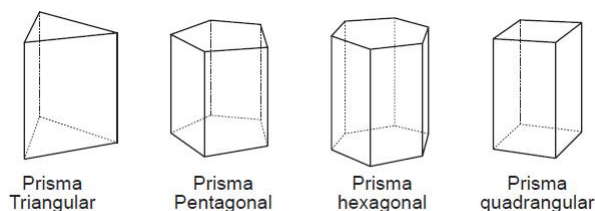
Como o cubo é um paralelepípedo com  $a = b$  e  $a = c$ , para calcular o valor do volume e o comprimento da diagonal, nesse caso, basta considerar as equações (3.1) a (3.8) e substituir  $b$  e  $c$  por  $a$ . Devemos levar os alunos a observarem que um cubo possui as diagonais das faces todas com a mesma medida. Desta forma, num cubo, teremos as seguintes relações

$$\begin{aligned} A_b &= a^2 \\ A_l &= 4a^2 \\ A_t &= 6a^2 \\ V &= a^3 \\ d &= a\sqrt{2} \\ D &= a\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Podemos confirmar estas expressões mostrando as faces quadradas do cubo e, simplesmente contar, ou seja, a área da base é um quadrado logo  $A_b = a^2$ , a área lateral são quatro quadrados logo  $A_l = 4a^2$ , a área total são seis quadrados logo a área total vale  $A_t = 6a^2$ .

A figura a seguir ([matandoamatematica.blogspot.com](http://matandoamatematica.blogspot.com)), mostra quatro prismas um com base triangular regular, um com base pentagonal, um com base hexagonal e outro com base quadrangular. Vamos calcular as áreas e volumes dos prismas com base triangular, quadrada e hexagonal.

Agora, sendo a base de um prisma de altura  $h$ , um triângulo equilátero de lado  $l$  então devemos fazer, usando os modelos, com que os alunos concluam que a área da base é dada pela expressão da área de um triângulo equilátero, ou seja



$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

É importante induzir o aluno a deduzir as expressões, mesmo porque, devemos levá-lo a não praticar o ato de decorar fórmulas. No prisma em estudo, o aluno deve concluir que a face lateral, é composta por três retângulos. Logo calcula a área de deles e depois multiplicamos por três.

$$A_l = 3lh.$$

Para calcular o valor da área total deste prisma, o procedimento é o mesmo utilizado quando foi calculado a área total do paralelepípedo, ou seja, devemos indicar que para calcular a área total devemos somar o valor da área lateral com o dobro da área da base. Fazendo este cálculo com os alunos, encontraremos a expressão.

$$A_t = \frac{l^2\sqrt{3}}{2} + 3lh.$$

Como vimos anteriormente, o volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura então teremos

$$V = \frac{l^2h\sqrt{3}}{4}.$$

É importante que os estudantes saibam quando devemos mudar a expressão para o cálculo da área da base de um prisma, ou seja, que para cada figura plana que compõe a sua base, é aplicada a devida fórmula de área. Podemos fazer isto usando vários modelos de prisma e mostrando a diferença entre o formato de suas bases. Se a base de um prisma de altura  $h$  é um quadrado de lado  $l$  então o valor da área da base é o valor da área do quadrado que a compõe.

$$A_b = l^2.$$

Se a base é um quadrado, novamente, calculamos a área de um dos retângulos que compõe a área lateral e multiplicamos por quatro.

$$A_l = 4lh.$$

E, somando a área lateral com o dobro da área da base teremos a área total

$$A_t = 2l(l + 2h).$$

Fazendo o produto da área da base pela altura teremos o valor do volume do prisma

$$V = hl^2.$$

Repetindo o procedimento utilizado para prismas de base triangular e quadrada, encontramos o volume e as áreas (base, lateral e total) de um prisma de altura  $h$  onde a base é um hexágono regular de lado  $l$ . assim teremos

$$A_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}.$$

A área lateral será dada por

$$A_l = 6lh.$$

E a área total por

$$A_t = 3l^2\sqrt{3} + 6lh.$$

O seu volume será

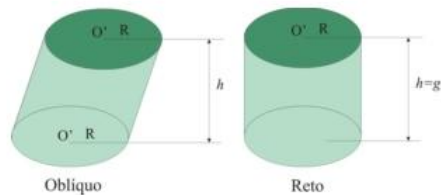
$$V = \frac{3hl^2\sqrt{3}}{2}.$$

### 3.3 - *Cilindro*

Embora as definições que aparecem nos bons livros de matemática sejam completas, se utilizarmos tais definições na EJA é possível que os alunos não as compreendam pois poderão considerá-las um tanto complexa. Tomando modelos de cilindros retos e oblíquos (figura abaixo - [sosmatematica.blogspot.com](http://sosmatematica.blogspot.com)), e mostrando que suas bases, tanto inferior como superior, são círculos podemos introduzir a teoria de cilindros. Assim, considerando que o círculo é um polígono de infinitos lados, como foi visto na parte de geometria plana, podemos dar aos cilindros o mesmo tratamento que demos para os prismas. Podemos então definir para os alunos da EJA que:



Canal de esgoto sanitário no formato de um cilindro



Cilindros

*Cilindro é um caso geral dos prismas, quando a sua base é um polígono de infinitos lados.*

Para fazermos cálculos, usaremos um modelo confeccionado com velcro e emborrachado de espessura de  $10mm$  nas bases e espessura  $2mm$  nas laterais. Assim, podemos mostrar com facilidade, desmontando o cilindro, que sua área lateral é a área do retângulo de base igual ao comprimento da circunferência que delimita a base do cilindro e altura igual à altura do cilindro.

$$A_l = 2\pi r h . \quad (3.9)$$

Para o volume, basta observar que se o prisma é um caso particular dos cilindros e o círculo é um polígono de infinitos lados então o volume do cilindro é determinado de maneira análoga ao feito para determinar o volume do prisma.

Assim, considerando um cilindro reto de altura  $h$  e raio da base  $r$ . Teremos

$$A_b = \pi r^2, \quad (3.10)$$

$$A_t = 2\pi r(r + h), \quad (3.11)$$

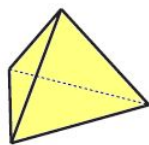
$$V = \pi r^2 h. \quad (3.12)$$

Neste momento, podemos mencionar o cilindro equilátero, ou seja, o que tem a seção meridional (que passa pelo eixo) quadrada. Conseqüentemente, a altura  $h$  é igual ao diâmetro da base. Logo  $h = 2r$  e fazendo as substituições nas equações (3.9), (3.11) e (3.12), chegamos à conclusão que num cilindro equilátero valem as expressões:  $A_b = \pi r^2$ ,  $A_l = 4\pi r^2$ ,  $A_t = 6\pi r^2$  e  $V = 2\pi r^3$ .

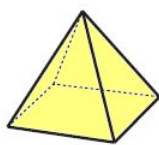
### 3.4 - Pirâmides

A princípio os alunos da EJA sabem identificar se um sólido é ou não uma pirâmide devido à sua experiência cotidiana. Mas, podemos tomar um modelo na forma de pirâmide e pedir que eles definam uma pirâmide (figura abaixo - [matematicacomlaura.blogspot.com](http://matematicacomlaura.blogspot.com)). E, possivelmente, uma das respostas será: *tem uma ponta em cima e a parte de baixo é uma figura plana*. A partir das falas dos alunos, podemos construir a definição

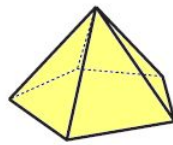
*Uma Pirâmide é a reunião dos segmentos cujas extremidades são o vértice  $V$  e algum ponto pertencente ao polígono da base.*



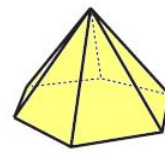
Pirâmide Triangular  
(tetraedro)



Pirâmide  
quadrangular



Pirâmide  
Pentagonal



Pirâmide  
hexagonal

É verdade que o volume de uma pirâmide de base  $A$  e altura  $h$  é a terça parte do volume de um prisma de base  $A$  e altura  $h$ . Se fizermos uma demonstração matemática

deste teorema para um aluno da EJA não conseguiremos alcançar uma aprendizagem satisfatória que atenda aos nossos objetivos, devido à complexidade para o nível deles.

Mas, podemos, experimentalmente, de uma forma bem simples, mostrar aos alunos a validade do resultado, usando dois modelos: um prisma de base  $A$  e altura  $H$ , vazado na parte superior, e uma pirâmide de base  $A$  e altura  $H$  também vazada. Vamos encher o prisma de areia, mas para isto vamos usar a pirâmide como balde. A pergunta que devemos fazer para eles é: *Quantas vezes nós enchemos a pirâmide de areia para completarmos o volume do prisma?* Eles vão verificar que foram três vezes e a conclusão é que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma.

Na EJA, vamos trabalhar apenas com pirâmides regulares. É importante, antes de falarmos sobre pirâmides, fazermos uma pequena revisão de apótemas de polígonos regulares ( $a_{pb}$ ). Isso será de grande importância para a assimilação das relações entre a altura da pirâmide, o apótema da pirâmide e o apótema da base.

Nesta revisão, lembraremos que o apótema do triângulo equilátero é dada por  $a_3 = \frac{l\sqrt{3}}{6}$ , a do quadrado de lado  $l$  por  $a_4 = \frac{l}{2}$  e a do hexágono regular de lado  $l$  é  $a_6 = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ . Em seguida, de posse de um modelo na forma de uma pirâmide transparente, vamos definir apótema de uma pirâmide. Estando destacados todos os elementos de uma pirâmide no modelo, fica fácil dizer que apótema de uma pirâmide é *o segmento que tem por extremidades o vértice da pirâmide e o ponto médio de um dos lados*.

Começemos considerando uma pirâmide regular de base triangular de altura  $h$  e aresta da base  $l$ . Como a base é um triângulo equilátero de aresta  $l$ , então teremos como expressão para o cálculo da área da base

$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Para calcular a área lateral da pirâmide, basta mostrar ao aluno que devemos calcular a área de um dos triângulos que formam a lateral e em seguida multiplicar por três, já que a base é triangular. Um triângulo que forma a lateral tem como base a aresta  $l$  da base da pirâmide e como altura o apótema da pirâmide ( $a_p$ ). Logo teremos como área lateral

$$A_l = \frac{3la_p}{2}. \quad (3.13)$$

A área total será

$$A_t = \frac{l^2\sqrt{3} + 6la_p}{4}. \quad (3.14)$$



O volume, como foi visto, será a terça parte do volume de um prisma com bases e alturas congruentes. Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} h \\ &= \frac{l^2 h \sqrt{3}}{12}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como é observado, a altura, o apótema da base e o apótema da pirâmide formam um triângulo retângulo que tem como hipotenusa o apótema da pirâmide. Assim, encontraremos a relação

$$a_{pb}^2 + h^2 = a_p^2. \quad (3.16)$$

Se a pirâmide em questão possuir todas as arestas iguais a  $l$ , o chamaremos de Tetraedro Regular. A partir de observações, os alunos concluem que todas os triângulos que formam as faces são equiláteros e congruentes. Assim, cada face do tetraedro regular, é um triângulo equilátero cuja área é dada pela expressão

$$A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}.$$

A área lateral são três triângulos equiláteros e é dada por

$$A_l = \frac{3l^2 \sqrt{3}}{4}.$$

A área total são quatro triângulos equiláteros e é dada pela expressão

$$A_t = l^2 \sqrt{3}.$$

Para calcular o volume, vamos usar a equação (3.15), mas para isto devemos primeiro achar uma expressão para a altura do tetraedro regular. Então, tomando a equação (3.16) teremos

$$h^2 = a_p^2 - a_{pb}^2. \quad (3.17)$$

Mas  $a_p$  é o apótema do tetraedro e vale  $a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}$  pois coincide com a altura do triângulo equilátero de lado  $l$ . E  $a_{pb} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$  pois é o apótema da base. Substituindo  $a_p$  e  $a_{pb}$  em (3.17) vem

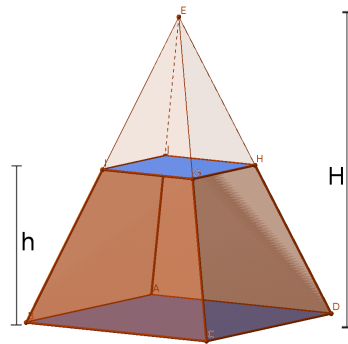
$$\begin{aligned} h^2 &= \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 \\ \Rightarrow h^2 &= \frac{3l^2}{4} + \frac{3l^2}{36} \\ \Rightarrow h^2 &= \frac{30l^2}{36} \\ \Rightarrow h &= \frac{l\sqrt{30}}{6}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para calcular o volume basta substituir (3.18) em (3.15) e daí teremos

$$\begin{aligned} V &= \frac{l^2 \left(\frac{l\sqrt{30}}{6}\right) \sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{l^3 \sqrt{10}}{24}. \end{aligned}$$

#### 3.4.1 - Tronco de Pirâmide

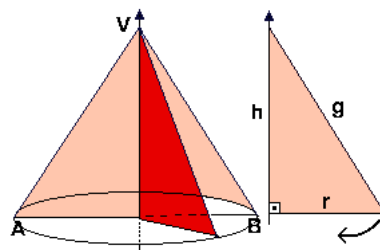
Para definir o tronco de pirâmide usaremos o modelo de um plano que corta uma pirâmide paralelamente ao plano que contém a sua base a uma distancia  $h$ , com  $h < H$ , conforme a figura abaixo ([aulaemvideo1.wordpress.com](http://aulaemvideo1.wordpress.com)). Devemos levar o aluno a concluir que que o volume do tronco de pirâmide é dado pela diferença entre o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide menor que foi gerada pelo corte feito pelo plano considerado.



### 3.5 - Cone

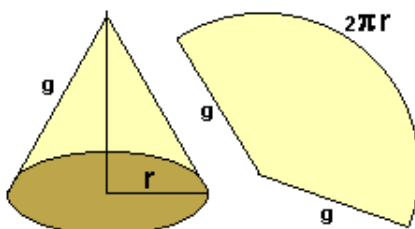
A relação que estabelecemos entre prisma e cilindro poderá ser repetida entre pirâmide e cone. Pois o cone é uma generalização da pirâmide, visto que, sua base é um círculo, que pode ser pensado como um polígono de infinitos lados. Vamos fazer com que o aluno perceba que a altura  $h$  e o raio da base  $r$  são catetos de um triângulo retângulo e que a hipotenusa deste triângulo é um segmento denominado geratriz  $g$  do cone, que está contido na face do cone conforme a figura abaixo([pessoal.sercomtel.com.br](http://pessoal.sercomtel.com.br)). Daí, conseguimos a relação

$$g^2 = h^2 + r^2. \quad (3.19)$$



Como a base do cone é um círculo, os alunos não terão dificuldades para efetuar o cálculo da área de sua base. Mas, para calcular a área lateral ( $A_l$ ) vamos repetir o procedimento dos livros didáticos, ou seja, planificar a face lateral e aplicar uma regra de três simples.

Observe que a face lateral do cone será o setor circular do círculo de raio  $g$  e o comprimento dele é igual ao perímetro da base do cone que é  $2\pi r$  conforme figura abaixo (rafael-conde.blogspot.com) .



À esquerda um cone de raio  $r$  e geratriz  $g$  e à direita a planificação da sua superfície lateral

Assim, as grandezas envolvidas serão área e comprimento. Desta forma, faremos a regra de três:

Área	Comprimento
$A_l$	$2\pi r$
$\pi g^2$	$2\pi g$

Fazendo a proporção, temos

$$\frac{A_l}{\pi g^2} = \frac{2\pi r}{2\pi g} \quad e \quad A_l = \frac{2\pi^2 r g^2}{2\pi g} .$$

Assim, a área lateral do cone é dada por

$$A_l = \pi r g . \quad (3.20)$$

Se a área da base vale  $A_b = \pi r^2$ , então teremos como área total do cone

$$A_t = \pi r(g + r) \quad (3.21) .$$

Para calcular o volume do cone, vamos repetir o procedimentos que utilizamos para calcular o volume das pirâmides. Assim, um cone de área da base medindo  $A$  e altura medindo  $H$  tem volume igual à terça parte do volume de um cilindro de área da base  $A$  e altura  $H$ . Logo, basta fazer

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}. \quad (3.22)$$

Se a geratriz  $g$  do cone for igual ao dobro do raio de sua base, diremos então que o cone é equilátero

$$g = 2r. \quad (3.23)$$

É bom fazer o aluno observar, através dos modelos, que o perfil do cone equilátero é um triângulo equilátero de lado  $g = 2r$ .

Para calcular a área lateral e a área total do cone equilátero devemos substituir (3.23) em (3.20) e (3.21), respectivamente. Assim, teremos

$$\begin{aligned} A_l &= \pi r(2r) = 2\pi r^2 \\ A_t &= \pi r(2r + r) = 3\pi r^2. \end{aligned}$$

Para calcular o volume do cone equilátero, observe que primeiro devemos calcular a altura  $h$  em função de  $r$ . E isto faremos substituindo (3.23) em (3.19), para obtermos

$$\begin{aligned} (2r)^2 &= h^2 + r^2 \\ h^2 &= 4r^2 - r^2 = 3r^2 \\ h &= r\sqrt{3}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Portanto,  $h = r\sqrt{3}$ .

Agora, vamos substituir (3.24) em (3.22) e encontrar a expressão do volume do cone equilátero em função do raio da base

$$V = \frac{\pi r^2 r\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}.$$

### 3.5.1 - Tronco de Cone

Para tronco de cone usamos o mesmo procedimento do tronco de pirâmide.

### 3.6 - Esferas



O forma do planeta Terra se aproxima de uma esfera

Finalizando a parte teórica, vamos definir esferas com uso de objetos esféricos. Podemos levar para a aula uma bola de futebol, uma melancia, um melão, etc (*os mais parecidos possível com a forma esférica*). A princípio, intuitivamente, eles sabem o que é uma esfera, mas o problema é eles definirem *esfera*. Mas a definição usual dos livros é suficiente para a compreensão dos alunos da EJA.

*Tome um ponto  $C$  no espaço. O conjunto de todos os pontos  $P$  do espaço que estão a uma mesma distância  $d > 0$  do ponto  $C$  chamamos de esfera. Veja figura (diario-de-1mulher.blogspot.com).*

Podemos determinar a fórmula para o cálculo do volume da esfera de forma experimental. Para isto, utilizaremos três modelos: um cilindro equilátero de raio da base  $r$ , uma esfera de raio  $r$  e uma semi-esfera de raio  $r$ . O cilindro deve ser aberto na parte superior e a semi esfera deve estar aberta na secção de raio  $r$ . O procedimento do experimento é bastante simples:

*1 - Colocamos a esfera dentro do cilindro. Observe que, se seccionarmos o cilindro*



Duas esferas com medidas de raios iguais

com um plano  $\pi$  paralelo ao plano de sua base a uma distância  $r$ , teremos uma simetria em relação a este plano  $\pi$ .

2 - E em seguida enchamos de água o espaços vazios limitados entre a esfera e o cilindro. A água não passará para a região que fica abaixo do plano  $\pi$

3 - Depois despejamos a água que preencheu esse espaço vazio na semi-esfera.

4 - Repetimos os procedimentos 2 e 3 para compensar a região inferior do plano.

Observa-se que o volume da água dos espaços vazios (inferior e superior ao plano) é igual ao volume da semi-esfera.

Denominando de  $V_c$  o volume do cilindro,  $V_e$  o volume da esfera e  $V_a$  o volume de água, temos que o volume de água no espaço vazio é igual à diferença entre o volume do cilindro e o volume da esfera. Portanto, temos

$$V_a = V_c - V_e. \quad (3.25)$$

Por outro lado, o volume da água é igual ao volume de semi-esfera

$$V_a = \frac{V_e}{2}. \quad (3.26)$$

Igualando as expressões para  $V_a$  das equações (3.25) e (3.26), temos

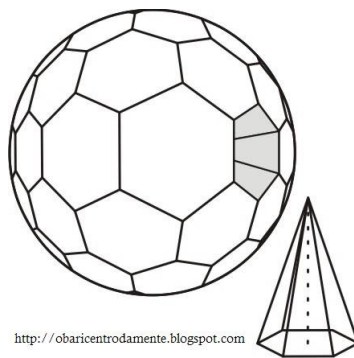
$$\begin{aligned} \frac{V_e}{2} &= V_c - V_e \\ \Rightarrow \frac{V_e}{2} + V_e &= V_c \\ \Rightarrow \frac{3V_e}{2} &= V_c \\ \text{Logo, } V_e &= \frac{2V_c}{3}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Visto que o volume do cilindro equilátero  $V_c$  é igual a  $V_c = 2\pi r^3$  e substituindo em (3.27) vem que

$$V_e = \frac{2(2\pi r^3)}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Desta forma, os alunos conseguem compreender melhor o porquê desta fórmula para o volume da esfera.

Agora, para calcular a área da superfície esférica, podemos fazer usando a expressão do volume da esfera e o fato de que uma esfera pode ser vista como a reunião de infinitas pirâmides de área da base  $B_i$ , com  $i \in \mathbb{N}^*$ , e altura igual ao raio  $r$  da esfera como mostra a figura.



Chamando de  $V_{P_i}$  cada uma dessas pirâmides que compõe a esfera, temos

$$V_{P_1} = \frac{B_1 r}{3}, \quad V_{P_2} = \frac{B_2 r}{3}, \quad V_{P_3} = \frac{B_3 r}{3} \quad \dots \quad V_{P_i} = \frac{B_i r}{3}.$$



Adicionando membro a membro, temos

$$\frac{B_1 r}{3} + \frac{B_2 r}{3} + \frac{B_3 r}{3} + \dots + \frac{B_i r}{3} = V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} + \dots + V_{P_i}.$$

Agora, desenvolvendo a equação acima, encontramos

$$\frac{r}{3}(B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_i) = V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} + \dots + V_{P_i}. \quad (3.28)$$

Como  $(B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_i)$  é igual à área da superfície esférica  $A_e$  e  $V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} + \dots + V_{P_i}$  é igual ao volume  $V_e$  da esfera. Então podemos escrever

$$A_e = B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_i \quad (3.29)$$

e

$$V_e = V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} + \dots + V_{P_i}. \quad (3.30)$$

Portanto, substituindo (3.29) e (3.30) em (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{r A_e}{3} &= V_e, \\ A_e &= \frac{3 V_e}{r}. \end{aligned}$$

Como  $V_e = \frac{4\pi r^3}{3}$ , então  $A_e = \frac{3\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)}{r}$ , logo

$$A_e = 4\pi r^2.$$

### 3.6.1 - *Fuso Esférico e Cunha esférica*

Para falar sobre o fuso esférico e a cunha esférica podemos fazer uso de uma melancia ou de um melão veja figura abaixo ([www.diariodeumaexgordinha.com.br](http://www.diariodeumaexgordinha.com.br)).. Vamos cortar as frutas em gomos, e fazer uma associação, pois o gomo é como se fosse a cunha esférica e depois de comermos as frutas as cascas que sobram é como se fosse o fuso esférico.

Portanto a cunha esférica possui volume e o fuso esférico possui área. Chamamos a atenção de que os planos que contém as faces da cunha esférica formam um ângulo  $\alpha$ . Assim, aplicando uma regra de três simples podemos encontrar a expressão que calcular o volume da cunha esférica  $V_{ce}$  e a área do fuso esférico  $A_f$ .



Podemos comparar a melancia como se fosse uma esfera e o gomo dela como se fosse a cunha esférica

$$\left| \begin{array}{c|c} V & \hat{\text{Ângulo}} \\ \hline \frac{4\pi r^3}{3} & 2\pi \\ V_{ce} & \alpha \end{array} \right|$$

Resolvendo a proporção, temos

$$\frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{V_{ce}} = \frac{2\pi}{\alpha} \quad \therefore V_{ce} = \frac{2\alpha r^3}{3}.$$

Vamos encontrar a expressão para a área do fuso

$$\left| \begin{array}{c|c} A & \hat{\text{Ângulo}} \\ \hline 4\pi r^2 & 2\pi \\ A_f & \alpha \end{array} \right|$$

Resolvendo a proporção, temos

$$\frac{4\pi r^2}{A_f} = \frac{2\pi}{\alpha} \quad \therefore A_f = 2\alpha r^2$$

## Capítulo 4

# Aplicações da Geometria Espacial pelo Técnico em Saneamento

O conhecimento sobre Geometria Espacial é uma ferramenta importante para os alunos do curso de Saneamento, pois no desenvolvimento das funções cotidianas da sua profissão as aplicações são inúmeras. É interessante que o professor de matemática de uma turma da EJA, de um Curso de Saneamento, ao abordar o conteúdo, mostre as aplicações para evidenciar a importância do assunto e também atrair a atenção dos estudantes.

Neste capítulo, vamos mostrar algumas das aplicações da geometria na prática profissional de um Técnico em Saneamento.

### 4.1 - Pavimentação

A primeira aplicação de geometria espacial para o técnico em saneamento básico que vamos tratar aqui é o cálculo do levantamento da quantidade de caçambas necessárias para transportar o asfalto do local de fabricação até a obra.

#### *Problema 1*

*Uma obra de saneamento básico prevê o revestimento asfáltico de uma estrada reta de 9,9 Km. A espessura do asfalto é de 5cm e a largura da estrada mede 5,5m (desprezando a linha d'água). Qual é o número de viagens que uma caçamba deve dar para levar o asfalto até a obra?*



Obra de pavimentação asfáltica

Para resolver este problema ainda necessitamos de mais uma informação que é a capacidade de uma caçamba. No mercado podemos encontrar caçambas com capacidades de  $4 m^3$ ,  $5 m^3$ ,  $6 m^3$ ,  $12 m^3$  e até mesmo  $18 m^3$ . Vamos adotar uma caçamba de volume  $5 m^3$ .

Vamos determinar o volume total de asfalto necessário para a obra. Observe que o asfalto quando colocado na estrada assume o formato de um paralelepípedo e seu volume é dado pelo produto das dimensões, ou seja

$$V = (9900 m)(5,5 m)(0,05 m) = 2722,5 m^3.$$

Este volume calculado,  $2722,5 m^3$ , corresponde ao asfalto compactado, mas quando o asfalto está na caçamba existe um índice de vazios de aproximadamente 3,51%. Como o asfalto que vem para a obra não está compactado, ao comprar o asfalto, deve ser levado em consideração o índice de vazios.

Chamando de  $V_a$  o volume do asfalto a ser comprado montamos a equação

$$\begin{aligned} V_a - 0,0351V_a &= 2722,5 \quad \therefore 0,9649V_a = 2722,5 \\ \Rightarrow V_a &= \frac{2722,5}{0,9649} \\ \Rightarrow V_a &\cong 2821,54 m^3 \end{aligned}$$

Como o volume adotado para a caçamba é de  $5 m^3$ , basta fazer a razão entre  $V_a$  e o volume da caçamba para encontrar o número de viagens:

$$n = \frac{2821,54}{5} \cong 564,31,$$

Ou seja, seriam necessárias aproximadamente 565 viagens.

Imagine uma caçamba dando este número de viagens! Podemos propor uma outra situação: *e, se contratássemos 15 caçambas, qual seria o número de viagens de cada uma?*

Chamando de  $n_c$  o número de viagens de cada caçamba, teremos

$$n_c = \frac{564,31}{15} \cong 37,62 \text{ viagens.}$$

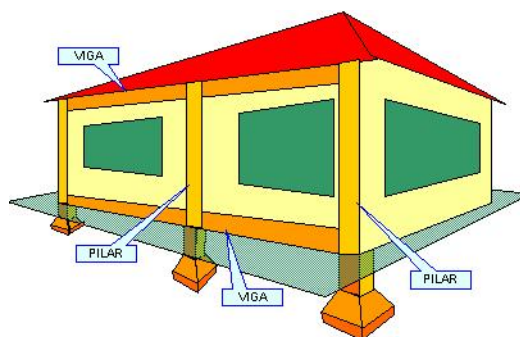
Observe que se cada caçamba leva  $5 m^3$ , então quando cada uma realizar 37 viagens ainda existiria um excedente de 0,62 viagens. Isto significa que teremos então um excedente de  $15 \cdot (0,62) \cdot (5) = 46,50 m^3$  de asfalto para transportar.

Assim, para levar todo o asfalto, necessitamos de mais 10 viagens, onde 9 caçambas estarão cheias e apenas 1 com  $4,5 m^3$ . A conclusão é que 10 caçambas darão 38 viagens e 5 darão 37 viagens, totalizando 565 viagens.

Vemos então a importância da análise feita pelo técnico em saneamento básico, pois se fosse considerado o número de viagens de cada caçamba como 38, existiria um total de 570 viagens, o que resultaria no desperdício de 5 viagens.

#### 4.2 - Fundação Tipo Sapata

O sistema estrutural de uma edificação é composto pela fundação e por lages, vigas e pilares. Os pilares são peças verticais em concreto armado (aço e concreto). A fundação é o elemento responsável para receber as cargas dos pilares transmiti-las para o solo. Existem vários tipos de fundação (*tubulão, sapata, radiers e estacas*). Quando for conveniente, o engenheiro civil poderá adotar uma fundação tipo sapata. Existem sapatas com o formato de um tronco de pirâmide apoiada sobre um paralelepípedo, conforme mostra as figuras abaixo ([www.ebanataw.com.br](http://www.ebanataw.com.br) e <http://www.ebah.com.br>).



Esboço de uma construção mostrando vigas, sapatas e pilares



Fundação Tipo Sapata

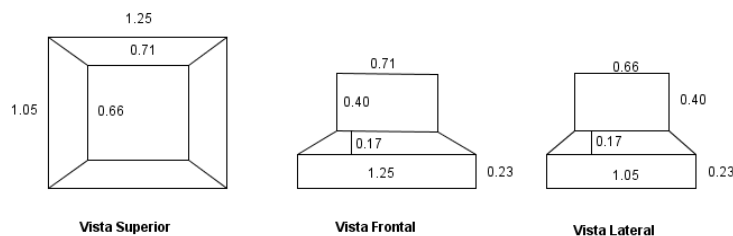
O seu processo construtivo consiste na escavação de um buraco no formato de um paralelepípedo. As dimensões da escavação deve exceder em 10 *cm* para cada lado da sapata e 5 *cm* na profundidade. Em seguida colocamos uma camada de 5 *cm* de

concreto magro (areia, brita e cimento) para proteger as ferragens de contaminações. Depois, fazemos a armação das ferragens em cima do concreto magro e, em seguida colocamos as formas. Colocadas as formas iniciamos a concretagem. Após o tempo estabelecido pelo engenheiro para retirada das formas, colocamos a terra de volta no lugar o que vai resultar na sobra de um volume de terra igual ao volume da sapata junto com o concreto magro.

A segunda aplicação, que apresentamos aqui, é uma situação em que o técnico precisa aplicar os conhecimentos adquiridos sobre paralelepípedos e tronco de pirâmide. Muitas vezes é necessário calcular o volume de concreto para executar uma sapata, bem como, a quantidade de terra que será removida da obra etc. Estes cálculos serão realizados com seis casas decimais para diminuir os erros de aproximação e no final arredondaremos para duas casas decimais.

### Problema 2

Uma estação de tratamento de água será construída e, para a fundação da sua casa de química, serão construídas 16 sapatas conforme o projeto abaixo.



Vistas de uma Fundação Tipo Sapata

Calcule:

- O volume de concreto ( $V_c$ ) necessário para execução das sapatas (incluindo a parte do pilar que fica abaixo da superfície do solo);
- O volume ( $V_m$ ) de concreto magro;
- O volume de terra ( $V_t$ ) que será retirada do terreno sabendo que o desnível entre a base da sapata e a superfície do solo deve ser de 80cm;
- A quantidade de madeira ( $A_m$ ), em  $m^2$ , para fazer as fôrmas usadas para construir as sapatas (incluindo a parte do pilar que ficará abaixo da superfície do solo.)

Como as sapatas são idênticas às do projeto acima, a base da sapata é um retângulo de comprimento 1,25 m e largura 1,05 m. Observe que, para concretar as sapatas é

utilizada uma fôrma, e para colocar esta fôrma, o mestre de obras precisa de uma folga de espaço, no mínimo de  $10\text{ cm}$  para cada lado da sapata. Assim a escavação terá como projeção um retângulo de comprimento  $1,45\text{ m}$  e  $1,25\text{ m}$ .

A profundidade da escavação deve ser de  $85\text{ cm}$  por causa do concreto magro. Logo, será escavado um buraco no formato de um paralelepípedo retângulo com comprimento  $1,45\text{ m}$ , largura  $1,25\text{ m}$  e altura  $0,85\text{ m}$  que vamos de agora em diante de sólido  $P$ .

Para calcular o volume ( $V$ ) de cada sapata, vamos dividi-la em dois sólidos. O primeiro sólido denotado por ( $S_1$ ) é um paralelepípedo com comprimento  $1,25\text{ m}$ , largura  $1,05\text{ m}$  e altura  $0,23\text{ m}$  e o segundo ( $S_2$ ) é um tronco de pirâmide reto que tem como base maior um retângulo de dimensões  $(1,25 \times 1,05)\text{m}^2$ , base menor um retângulo de dimensões  $(0,71 \times 0,66)\text{m}^2$  e altura de  $0,17\text{ m}$ . Assim o volume da sapata  $V$  será a soma do volume ( $V_1$ ) do sólido  $S_1$  com o volume  $V_2$  do sólido  $S_2$ .

$$V = V_1 + V_2.$$

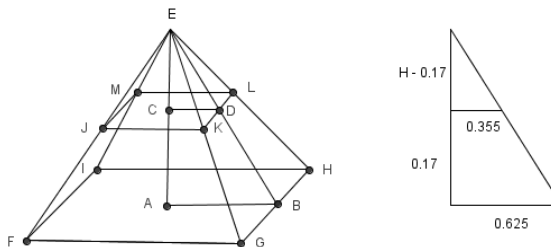
O volume de  $S_1$  será

$$V_1 = (1,25)(1,05)(0,23) = 0,301875\text{ m}^3$$

É de fundamental importância que tenhamos os modelos, tanto do tronco, como a pirâmide menor ( $S_3$ ) que servirá para complementar o tronco formando uma pirâmide maior ( $S_4$ ). Para calcular o volume do tronco ( $V_2$ ), basta calcular o volume  $V_4$  da pirâmide EFGHI e o volume  $V_3$  da pirâmide EJKLM e depois fazer a diferença entre os dois volumes, ou seja,

$$V_2 = V_4 - V_3.$$

A figura abaixo mostra as duas pirâmides e o tronco. Para obter os volumes  $V_4$  e  $V_3$  precisamos das alturas  $\overline{EC}$  que vamos chamar de  $h$  e  $\overline{EA}$  que vamos chamar de  $H$ . A área das bases são conhecidas.



Pirâmide EFGHI (esquerda) e esboço do triângulo ABE (direita)



Observe que os triângulos  $ECD$  e  $EAB$  são semelhantes e, portanto, teremos a relação

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}.$$

Substituindo os valores dados, temos

$$\begin{aligned} \frac{H - 0,17}{H} &= \frac{0,355}{0,625} \\ \Rightarrow 0,625H - 0,10625 &= 0,355H \\ \Rightarrow 0,625H - 0,355H &= 0,10625 \\ \Rightarrow 0,27H &= 0,10625 \\ \Rightarrow H &= 0,393518 \text{ m} \end{aligned}$$

Observe que

$$h = H - 0,17.$$

Daí,

$$\begin{aligned} h &= 0,393518 - 0,17 \\ &= 0,223518 \text{ m}. \end{aligned}$$

Os volumes  $V_4$  e  $V_3$ , que são respectivamente os volumes das pirâmides  $FGHIE$  e  $JKLME$ , serão

$$V_4 = \frac{(1,25)(1,05)(0,393518)}{3} = 0,172164 \text{ m}^3.$$

$$V_3 = \frac{(0,66)(0,71)(0,223518)}{3} = 0,034913 \text{ m}^3.$$

Assim o volume do tronco  $V_2$  será

$$V_2 = V_4 - V_3 = 0,172164 - 0,034913 = 0,137251 \text{ m}^3.$$

Podemos agora calcular o volume da sapata

$$V = V_1 + V_2 = 0,137251 + 0,301875 = 0,439126.$$

Aproximando para duas casas decimais, temos que o valor do volume total da sapata é  $V = 0,44m^3$ .

A parte do pilar que ficará abaixo do solo ( $S_5$ ) tem o formato de um paralelepípedo de dimensões  $(0,66 \times 0,71 \times 0,40)m^3$ . O volume do concreto ( $V_c$ ) será dado por

$$V_c = V + V_5.$$

Assim o volume do concreto é dado por

$$V_c = 0,44 + 0,19 = 0,63 m^3.$$

O concreto magro será colocado na base de  $P$ . Logo seu volume ( $V_m$ ) será

$$V_m = (1,45)(1,25)(0,05)m^3 = 0,09 m^3.$$

O volume de terra ( $V_t$ ) que será retirada do terreno é a diferença entre o volume do sólido  $P$  e a soma do volume do concreto ( $V_c$ ) com o volume de concreto magro  $V_m$ , ou seja

$$\begin{aligned} V_t &= V_P - V_c - V_m \\ \Rightarrow V_t &= 1,54 - 0,63 - 0,09 = 0,82 m^3. \end{aligned}$$

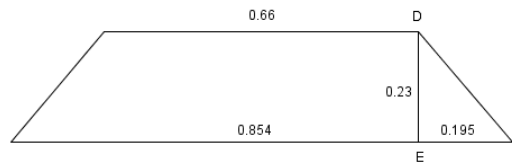
Agora calcularemos a quantidade de madeira ( $A$ ), em  $m^2$ , para armar a forma que será usada para construir a sapata que será igual á soma das áreas laterais dos sólidos  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ . Chamando de  $A_n$  a área lateral do sólido  $S_n$ , teremos:

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

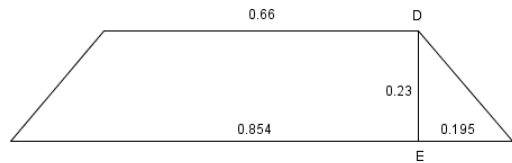
Assim,

$$A_1 = (2)(1,25)(0,23) + (2)(1,05)(0,23) = 1,06 m^2.$$

Para calcular  $A_2$  é preciso esclarecer aos alunos que a cada face lateral do tronco tem a forma de um trapézio isósceles e que as faces laterais opostas são congruentes. Duas faces laterais tem base maior medindo  $1,25\text{ m}$ , base menor  $0,71\text{ m}$  e altura de medida igual à do segmento  $\overline{AC}$  do corte A do tronco e duas faces laterais tem base maior medindo  $1,05\text{ m}$ , base menor  $0,66\text{ m}$  e altura de medida igual a do segmento  $\overline{DF}$  do corte B do tronco. Veja a figura a seguir:



Corte do Tronco - A



Corte do Tronco - B

Assim,

$$\overline{AC} = \sqrt{0,23^2 + 0,27^2} = \sqrt{0,1258} = 0,354683\text{ m}.$$

e

$$\overline{DF} = \sqrt{0,23^2 + 0,195^2} = \sqrt{0,090925} = 0,301538\text{ m}.$$

Podemos calcular  $A_2$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{(2)(1,25 + 0,71)(0,301538) + (2)(1,05 + 0,66)(0,354683)}{2} \\ &= \frac{1,182029 + 1,213016}{2} \\ &= 1,20\text{ m}^2. \end{aligned}$$

Para finalizarmos o cálculo do valor da área lateral, vamos calcular  $A_3$ .

$$A_3 = (2)(0,66)(0,40) + (2)(0,71)(0,40) = 1,10 m^2.$$

Logo a quantidade de madeira  $A$ , será

$$A = 1,06 + 1,20 + 1,10 = 3,36 m^2.$$

Para finalizar os cálculos, observamos que a obra terá 16 sapatas. Os cálculos efetuados até aqui foi para uma única sapata. Para responder aos itens do problema vamos multiplicar, os valores encontrados para cada sapata, por 16.

*Logo, temos as seguintes respostas:*

(a) *O volume de concreto ( $V_c$ ) necessário para execução das sapatas (incluindo a parte do pilar que fica abaixo da superfície do solo) é igual a  $16 \cdot (0,63 m^3) = 10,08 m^3$ ;*

(b) *O volume ( $V_m$ ) de concreto magro será  $16(0,09 m^3) = 1,44 m^3$ ;*

(c) *O volume de terra ( $V_t$ ) que será retirada do terreno, sabendo que o desnível entre a base da sapata e a superfície do solo deve ser de 80cm é igual a  $16(0,82 m^3) = 13,12 m^3$ ;*

(d) *A quantidade de madeira ( $A$ ), em  $m^2$ , para fazer a fôrma, incluindo a parte do pilar que ficará abaixo da superfície do solo será  $16 \cdot (3,36 m^3) = 53,76 m^3$ .*

### 4.3 - *Captação de águas pluviais*

A escassez de chuva é uma realidade em muitas regiões do país, principalmente na Região Nordeste. Quando este problema está aliado à falta de abastecimento de água então a situação é problemática, pois com a falta de água a comunidade fica propícia à desidratação e às contaminações, principalmente por causa da falta de higiene. Os animais também são alvo do problema, pois também ficam desidratados.

Nas regiões que tem um período, mesmo que curto, de chuvas, podemos captar a água e armazenar num reservatório até chegar o período de seca. O processo de captação de água da chuva é simples. Primeiro constroem-se um reservatório (cisterna), geralmente na forma cilíndrica, pois o reservatório retangular exige mais da engenharia já que a água da cisterna exerce forças iguais em todas as direções. Assim, se o reservatório for no formato retangular o custo será elevado. O reservatório é construído perto de alguma construção que tenha uma cobertura de telhas. Toda água de chuva que cair neste telhado é canalizada, através de calhas, para o reservatório. O nível da entrada de água no reservatório deve estar abaixo do nível da saída de água das calhas.

Até agora, entre os tipos diferentes de cisternas usadas para resolver o problema da água potável em áreas rurais do Nordeste, o mais utilizado é a cisterna de placa de concreto com tela de arame (com 50 cm de largura, 60 cm de comprimento e 3 cm de espessura), fortificada com arame galvanizado de aço Nº 12 e rebocada por dentro e por fora.



Construção de uma cisterna para captação de água da chuva

A aderência entre as placas de concreto às vezes é fraca, por isso, a tensão pode causar rachaduras, por onde a água pode vazar. Uma cisterna desse tipo raramente vaza, e se isso acontecer, poderá ser facilmente consertada. É igualmente adequada também para pequenos e grandes programas de construção de cisternas. Por esta

razão, a cisterna de concreto com tela de arame (que utiliza uma fôrma durante a primeira fase de construção) é apropriada para a região.

Um indicativo da importância das cisternas rurais no fornecimento de água para o consumo humano pode ser observado na pesquisa realizada pela Organização Social DIACONIA (1999), revelou-se que os gastos com água de beber, cozinhar e fazer higiene bucal (consumo humano) são, em média, da ordem de  $8,9 \text{ litros/pessoa/dia}$ , ou para uma família com 5 pessoas,  $16.000 \text{ litros/família/ano}$ . Mas, se incluirmos banho a média vai para  $35 \text{ litros/pessoa/dia}$ .

Por curiosidade, vale ressaltar que podemos tratar a água da cisterna para se obter água de qualidade. De acordo com a Articulação no SemiÁrido Brasileiro (ASA), o tratamento da água pode ser feito com uma filtração e, em seguida, a adição de hipoclorito de sódio a 2,5% na proporção de  $1 \text{ ml}$  para cada 10 litros de água. Em casos em que não se use o hipoclorito, recomenda-se ferver a água durante 10 minutos.

Observando esse contexto, propomos a seguinte situação problema.

### *Problema 3*

*Na cidade de Paramirim, situada a 635 km de Salvador, a precipitação pluviométrica é de  $523 \text{ l/m}^2$ , índice considerado baixo, pois em média, durante o ano a cidade fica 6 meses com pouca chuva ou seca. Afim de amenizar o sofrimento da população no tempo de seca, é preciso garantir uma reserva de água para as pessoas e os animais. Uma alternativa é a implantação do sistema de captação de água em época de chuvas.*

*Responda:*

*(a) Dimensione um reservatório cilíndrico para uma residência que tem um telhado como cobertura de área igual a  $150 \text{ m}^2$ .*

*(b) Calcule a quantidade de placas de concreto e tela de arame galvanizado aço para construir a cisterna*

*(c) Caso a cisterna esteja totalmente cheia, calcule a quantidade de hipoclorito de sódio que devemos colocar, para consumo após filtração.*

*Solução:*

Para dimensionar o reservatório é preciso calcular o volume que atenderá às necessidades na época de seca. A Associação Brasileira de normas Técnicas (ABNT) na NBR 15527 fornece os requisitos para o aproveitamento de água de chuva. A NBR 15527 apresenta vários métodos para calcular o volume de água a ser armazenado.



Cisterna para captação de água da chuva

São eles: *Rippl, Azevedo Neto, Prático Alemão, Prático Inglês e Prático Australiano*. Vamos utilizar o Método de Azevedo Neto (*foi engenheiro e professor de saneamento*) que, como resultado de suas pesquisas, chegou à expressão

$$V = (0,042)X(P_a)X(A)X(T),$$

Onde  $V$  é o volume em *litros(l)*,  $P_a$  é a precipitação pluviométrica em *litros por metros quadrados(l/m<sup>2</sup>)*,  $A$  é a área de captação em *metros quadrados(m<sup>2</sup>)*, e  $T$  é o número de meses de pouca chuva ou seca (adimensional).

Observe que o problema fornece estes dados e, portanto, basta fazermos as devidas substituições

Como  $P_a = 523l/m^2$ ,  $A = 150m^2$ ,  $T = 6m$ , então teremos:

$$V = (0,042)X(523)X(150)X(6) = 19769,4 \text{ litros}.$$

Logo, o volume é igual a 19769,4l e, para calcular as dimensões do reservatório vamos transformar a unidade de medida do volume de litros para metros cúbicos. Desta forma, consideraremos  $V = 19,7694 m^3$ .

Como o reservatório é cilíndrico, vamos adotar um raio no valor de 1,8 m. Sabemos que o volume do cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h.$$

Substituindo  $r$  e  $V$ , temos

$$\begin{aligned}\pi r^2 h &= 19,7694 \\ \Rightarrow \pi(1,8)^2 h &= 19,7694 \\ \Rightarrow h &= \frac{19,7694}{\pi(3,24)} \\ &= 1,94 \text{ m}.\end{aligned}$$

Podemos arredondar a altura para  $h = 2,0 \text{ m}$ . Assim o volume de água reservado será  $V = \pi(1,80^2)2 = 20,3472 \text{ m}^3 = 20347,2 \text{ dm}^3 = 20347,2 \text{ litros}$ .

Portanto, um reservatório com raio da base  $r = 1,80 \text{ m}$  e altura  $2,00 \text{ m}$ , é capaz de armazenar água durante seis meses para uma família de 3 pessoas. Para verificar, considere  $n$  o número de pessoas de uma família, basta fazer

$$n = \frac{20347,2}{(183).(35)} = 3,18$$

Para calcular a quantidade de placas de concreto e arame galvanizado é necessário calcular a área lateral a área da base. A área lateral será

$$\begin{aligned}A_l &= 2\pi r h \\ \Rightarrow A_l &= (2)(\pi)(1,80)(2,00) = 22,61 \text{ m}^2.\end{aligned}$$

A área da base será

$$A_b = (\pi)(1,80^2) = 10,17 \text{ m}^2.$$

Assim, a área total será

$$A_t = 22,61 + 10,17 = 32,78 \text{ m}^2.$$

Cada placa terá área ( $A_p$ ) igual a

$$A_p = (0,50)(0,60) = 0,30 \text{ m}^2.$$



Então o número de placas ( $q$ ), será

$$q = \frac{32,78}{0,30} = 109,27.$$

Por questões técnicas, vamos acrescentar 15 % no número de placas devido às perdas. Logo  $109,27 + 16,39$  é igual a 125,66. Então o número de placas será 126. Podemos encontrar, no mercado, rolo de tela 2,10m. Como a altura do reservatório é de 2,0 basta então calcular o perímetro da base que será  $(2)(\pi)(1,8) = 11,30 m$ . Portanto a quantidade de tela a ser comprada é de 12,00 m.

Como sabemos, a capacidade do reservatório é de 20347,2 litros. Temos também a informação de que a proporção de hipoclorito de sódio é de 1 ml para cada 10 litros. Assim, a quantidade ( $m$ ) de hipoclorito deve ser

$$m = \frac{20347,2}{10} = 2034,72 \text{ ml} = 2,04 \text{ litros}.$$

#### *Respostas*

(a) A dimensão de um reservatório cilíndrico para uma residência que tem um telhado, de área igual a  $150 m^2$ , como cobertura deve ser  $r = 1,80 m$  e  $h = 2,00 m$ .

(b) A quantidade de placas de concreto é 126 e de tela de arame galvanizado 12,00 m.

(c) A quantidade de hipoclorito de sódio que devemos colocar no reservatório, para consumo após filtração, é 2,04 litros.

#### 4.4 - Aterro Sanitário

O aterro sanitário é um espaço reservado para depositar os resíduos domésticos, comerciais, de serviços de saúde, da indústria de construção, e também resíduos sólidos retirados do esgoto. Aqui no Brasil, o documento que regulamenta a forma de construção dos aterros é a NBR 8419/1992 intitulada como:

*“Apresentação de projetos de aterros sanitários de resíduos sólidos urbanos”, e define aterro como: “Técnica de disposição de resíduos sólidos urbanos no solo, sem causar danos á saúde pública e à sua segurança, minimizando os impactos ambientais, método este que utiliza princípios de engenharia para confinar os resíduos sólidos à menor área possível e reduzi-los ao menor volume permissível, cobrindo-os com uma camada de terra na conclusão de cada jornada de trabalho, ou a intervalos menores, se necessário”*

A vida útil de um aterro sanitário depende da população atendida, e pode variar entre 10 e 15 anos. É importante observar que este tempo pode diminuir em, aproximadamente, 30 % se na região não houver uma campanha de conscientização para coleta seletiva, pois, quando reaproveitamos o lixo reciclável a tendência é diminuir a vida útil do aterro.

Sua cobertura é constituída por um sistema de drenagem de águas pluviais, que não permita a infiltração de águas de chuva para o interior do aterro. No Brasil, usa-se normalmente uma camada de argila e, além disso, um aterro sanitário deve também possuir um sistema de monitoramento ambiental (topográfico e hidrogeológico) e pátio de estocagem de materiais. Para aterros que recebem resíduos de populações acima de 30 mil habitantes é desejável também muro ou cerca limítrofe, sistema de controle de entrada de resíduos ( balança rodoviária), guarita de entrada, prédio administrativo, oficina e borracharia. Quando atinge o limite de capacidade de armazenagem, o aterro é alvo de um processo de monitorização específico, e se reunidas as condições, pode albergar um espaço verde ou mesmo um parque de lazer, eliminando assim o efeito estético negativo. Existem critérios de distância mínima de um aterro sanitário e um curso de água, uma região populosa e assim por diante. No Brasil, recomenda-se que a distância mínima de um aterro sanitário para um curso de água deve ser de 400m.

Quando o lixo é depositado, dá-se origem a diversas substâncias, que por sua vez devem ter um tratamento diferenciado para evitar contaminações, acidentes e danos para a população. Dentre estas substâncias podemos citar: gás bioquímico - GBQ (conhecido como biogás que é constituído por gás metano, gás carbônico(CO<sub>2</sub>) e vapor d'água), percolados e sumeiro (chorume).

No projeto de um aterro sanitário, devem ser previstos: um *sistema para drenagem e remoção dos líquidos* que percolam através dos resíduos dispostos (quando solici-

tado pelo Órgão Seccional Estadual de Controle da Poluição e Proteção Ambiental - OECPA), uma *impermeabilização inferior (lona plástica e argila) e/ou superior* do aterro sanitário (quando solicitado pelo OECPA), um *sistema para a drenagem de gás* (que pode ser integrado ao sistema de drenagem de líquido percolado). Estes gases podem ser queimados na atmosfera ou aproveitados para geração de energia. No caso de países em desenvolvimento, como o Brasil, a utilização do biogás pode ter como recompensa financeira a compensação por créditos de carbono ou CERs do Mecanismo de Desenvolvimento Limpo, conforme previsto no Protocolo de Quioto.

Existem dois tipos de aterros sanitários:

*Aterro convencional:* formação de camadas de resíduos compactados, que são sobrepostas acima do nível original do terreno resultando em configurações típicas de “escada” ou de “troncos de pirâmide”.

*Aterro em valas:* o uso de trincheiras ou valas visa facilitar a operação do aterramento dos resíduos e a formação das células e camadas, assim sendo, tem-se o preenchimento total da trincheira, que deve devolver ao terreno a sua topografia inicial.

Vamos aplicar os conhecimentos de geometria espacial para dimensionar um aterro sanitário. Considere que cada metro cúbico de lixo compactado tem massa igual a  $700\text{Kg}$ , ou seja, a densidade média do lixo compactado  $\sigma = 0,70\text{t}/\text{m}^3$  e cada pessoa produz, por dia,  $500\text{g}$  de lixo gerando uma contribuição per capita de lixo  $\theta = 0,50\text{Kg}/\text{hab.dia}$ . Sabe-se também que 20% do volume da trincheira corresponde ao volume de argila usado para cobertura das camadas de lixo quando finalizado o dia de trabalho.

#### *Problema 4*

A cidade de Dias D’Ávila possui 57708 habitantes. Num terreno plano retangular de  $(600 \times 700)\text{m}^2$ , deseja-se construir um aterro sanitário, com vida útil de 15 anos, pelo método das trincheiras com valas no formato de um prisma onde a base (do prisma) é um trapézio isósceles.

*Responda :*

- (a) Qual é a massa ( $m$ ) de lixo gerada por dia?
- (b) Qual é o volume de lixo ( $V_d$ ), compactado, gerado por dia?
- (c) Qual é o volume de lixo ( $V_{15}$ ), compactado, gerado em 15 anos?
- (d) Calcule o volume de argila ( $V_a$ ) que será usada em 15 anos.
- (e) Calcule o volume ( $V$ ) do aterro sanitário.

(f) Determine uma possibilidade de dimensões para edificação do aterro, adotando uma altura de 5m e taludes laterais 1 : 1 (considere  $\sqrt{2} = 1,41$ ).

(g) Sabendo que o rolo de lona plástica possui 100m de comprimento e 8m de largura, calcule a quantidade mínima ( $Q_m$ ) de rolos necessários para executar a camada de impermeabilização do aterro sanitário.

Solução:

Para calcular a massa diária de lixo, basta multiplicar o número de pessoas pela massa gerada por cada uma delas, logo teremos

$$m = (57708) \cdot (500) = 28854000 \text{ g} = 28854 \text{ kg}$$

Observe que a massa de lixo gerada por dia é igual 28,854 toneladas. Como a densidade média é igual a  $\sigma = 0,70 \text{ t/m}^3$ , então o volume será dado por

$$V_d = \frac{28,854}{0,70} = 41,22 \text{ m}^3$$

Considerando que o ano tem 366 dias, então o volume de lixo gerado em 15 anos será

$$V_{15} = 366 \cdot 15 \cdot 41,22 = 226297,80 \text{ m}^3$$

Como já vimos, o volume de argila deve ser igual a 20% do volume do lixo. Logo o volume de argila será

$$V_a = \left(\frac{20}{100}\right) \cdot (226297,80) = 45259,56 \text{ m}^3$$

O volume do aterro será

$$\begin{aligned} V &= V_{15} + V_a \\ \Rightarrow V &= 226297,80 + 45259,56 \\ &= 271557,36 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

O aterro tipo trincheiras é construído através de escavações executadas por retro escavadeiras ou escavadeiras hidráulicas. A face lateral do aterro é a base trapezoidal deste prisma e a base do aterro é a menor face retangular entre as que são paralelas, esta forma é conveniente para facilitar a entrada e saída dos tratores e caçambas no

local. Quando o problema informa que os taludes laterais são 1 : 1, quer dizer que a tangente do ângulo formado pela base maior do trapézio e o lado oblíquo é igual a 1 dividido por 1, ou seja, igual a 1. Observa as figuras

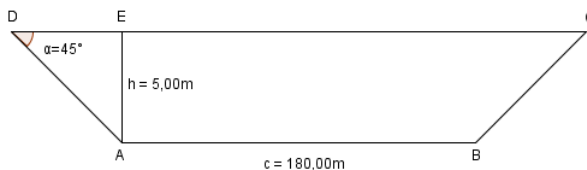


Aterro Sanitário em processo de construção



Vala de um Aterro Sanitário

Para dimensionar o aterro, devemos adotar uma medida para o comprimento de sua base, e usando as informações obtidas, calculamos as demais arestas. Assim, vamos considerar uma largura de  $180\text{ m}$ . Observando a figura abaixo, temos.



Secção meridiana ao longo do comprimento maior do Aterro Sanitário proposto

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \quad \therefore \quad \overline{DE} = \overline{AE} \cdot \operatorname{tg}\alpha = (5) \cdot (1) = 5m.$$

Sabemos, da geometria plana, que

$$\begin{aligned} \overline{DC} &= 2\overline{DE} + \overline{AB}, \\ &= (2) \cdot (5) + (180), \\ &= 190m. \end{aligned}$$

Calculemos o comprimento do talude

$$\begin{aligned} \overline{DA} &= \frac{\overline{DE}}{\cos\alpha}, \\ &= \frac{(5) \cdot (2)}{1,41}, \\ &= 7,09m. \end{aligned}$$

Para calcular a largura (L) do aterro, vamos achar a expressão do seu volume

$$\begin{aligned} V &= (A_b) \cdot (h), \\ \Rightarrow V &= \frac{(\overline{AB} + \overline{DC})\overline{AE}}{2} L, \\ &= \frac{(180 + 190)5}{2} L, \\ &= 925L. \end{aligned}$$

Do item (e), sabemos que o volume do aterro é  $V = 271557,36m^3$ , substituindo em (4,1), temos

$$\begin{aligned} 925L &= 271557,36, \\ \Rightarrow L &= \frac{271557,36}{925}, \\ &= 293,58m. \end{aligned}$$

Podemos aproximar o comprimento de  $293,58\text{ m}$  para  $300,00\text{ m}$ . Logo, para construir um aterro que satisfaça às condições dadas, teremos como sua base inferior um retângulo de  $(180 \times 300)\text{ m}^2$ , base superior um retângulo de  $(190 \times 300)\text{ m}^2$  e comprimento do talude igual a  $7,10\text{ m}$ .

A quantidade mínima de lona é igual à área lateral ( $A_l$ ) do aterro adicionada à área da base ( $A_b$ ) de sua base. Assim, temos

$$A_b = (180) \cdot (300) = 55800\text{ m}^2.$$

A área lateral é dada por

$$\begin{aligned} A_l &= 2 \frac{(180 + 190)5}{2} + (2)(7,10)(300), \\ \Rightarrow A_l &= 1850 + 4260, \\ &= 6110\text{ m}^2. \\ Q_m &= 55800 + 6110 = 61910\text{ m}^2. \end{aligned}$$

Como cada rolo possui  $(8,00)(100,00) = 800\text{ m}^2$ , basta fazer a divisão

$$Q_m = \frac{61910}{800} = 77,38\text{ rolos}.$$

Devemos aproximar este valor para  $78\text{ rolos}$ .

Observe que, na prática, devemos fazer uma paginação para calcularmos a quantidade real de lona e acrescentarmos 10% a esta quantidade devido às perdas. Se planificarmos o aterro sanitário ele estará envolvido no retângulo  $(194,20 \times 310,00)\text{ m}^2$

Assim, qual é a quantidade de tiras ( $t$ ) de  $8,00\text{ m}$  que colocaremos ao longo do lado de  $310\text{ m}$ ?

$$t = \frac{310}{8} = 38,75.$$

Como o outro lado tem  $194,2\text{ m}$ , então serão necessários dois rolos. Assim necessitaremos de  $(38,75)(2) = 77,50\text{ rolos}$ , que, aproximando ficarão  $78\text{ rolos}$ . Colocando 10% acima teremos  $77,5 + \frac{10}{100} \cdot 77,5 = 85,25$ , que podemos aproximar para  $86\text{ rolos}$

# Bibliografia

- [1] Bicudo, M.A.V.; Garnica, A.V.M. *Filosofia da Educação Matemática*. Coleção Tendências em Educação Matemática. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- [2] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília, 1999. Matemática, V.3, p.251 - 269.
- [3] BRASIL, Ministério da Educação. Parecer CEB/CNE 11/2000. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos*, 2000.
- [4] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. *PROEJA - Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e adultos*. Documento Base. Brasília, 2007.
- [5] BRASIL, Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional de Nível Técnico*, Brasília, 2000.
- [6] BRASIL, Ministério da Educação. *Educação Profissional: Referências Curriculares Nacionais da Educação Profissional de Nível Técnico*, Brasília, 2000.
- [7] BRASIL, DECRETO Nº 5478/2005 de 13 de abril de 2005. *Institui, no âmbito dos Centros Federais de Educação Tecnológica, Escolas Técnicas Federais, Escolas Agrotécnicas Federais e Escolas Técnicas Vinculadas às Universidades Federais, o PROEJA*.
- [8] BRASIL, DECRETO Nº 5840/2006 de 13 de julho de 2006. *Institui, no âmbito federal o Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos PROEJA*.



- [9] BRASIL, LEI Nº 11892/2008 de 29 de dezembro de 2008. *Institui, no âmbito do sistema federal de ensino, a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, vinculada ao Ministério da Educação.*
- [10] BRASIL, LEI Nº 9394/96 de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. *Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.*
- [11] CREDER, H. *Instalações Hidráulicas e Sanitárias*. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2003.
- [12] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Geometria Espacial*. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. 5.ed. São Paulo: Atual Editora, 2002.
- [13] GHISI, E. *Métodos de Dimensionamento de Reservatórios de Água Pluvial em Edificações*. Santa Catarina: UFSC - LabEEE, 2002.
- [14] FONSECA, M.C.F.R. *Educação Matemática de Jovens e Adultos: especificidades, desafios e contribuições*. Coleção Tendências em Educação Matemática. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- [15] FRIGOTO, G. et al. *A experiência do trabalho e a Educação básica*. 2.ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2005.
- [16] HELDER, L.; PÁDUA, V.L. *Abastecimento de Água para Consumo Humano*. 2. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2010.
- [17] HUETE, J.C.S.; BRAVO, J. A. F. *O Ensino da Matemática: Fundamentos Teóricos e Bases Psicopedagógicas*. Tradução: Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.
- [18] LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Coleção do Professor de Matemática - SBM. 3.ed. Rio de Janeiro, 1998.
- [19] LIMA, L. M. Q. *Lixo: Tratamento e Biorremediação*. 3. ed. São Paulo: Hemus, 2004.
- [20] MOYSÉS, L. *Aplicações de Vigotsky à Educação Matemática*. 9.ed. Campinas: Papirus, 2006.
- [21] NUVOLARI, A. *Esgoto Sanitário: coleta, transporte, tratamento e reúso agrícola*. 1. ed. São Paulo: Blcher, 2003.

- [22] SOUZA, A. R. *As Formas de Aprendizagem e as Dificuldades em Matemática no Curso Técnico Integrado em Infraestrutura Urbana - Modalidade PROEJA do IFBA /Campus Salvador*. IFBA. Salvador-BA, 2010.