Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Arturo León Fernandes

Uma Abordagem no Estudo das Funções Quadráticas, Exponenciais e Logarítmicas Utilizando o Software Geogebra

Juiz de Fora

2018

Arturo León Fernandes

Uma Abordagem no Estudo das Funções Quadráticas, Exponenciais e Logarítmicas Utilizando o Software Geogebra

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Professor Nelson Dantas Louza Junior

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fernandes, Arturo.
Uma Abordagem no Estudo das Funções Quadráticas, Exponenciais e Logarítmicas Utilizando o Software Geogebra / Arturo León Fernandes. – 2018.
59 f. : il.

Orientador: Professor Nelson Dantas Louza Junior
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

1. Geogebra. 2. Funções. 3. Tecnologia. I. Dantas, Nelson, orient. II. Título.

Arturo León Fernandes

Uma Abordagem no Estudo das Funções Quadráticas, Exponenciais e Logarítmicas Utilizando o Software Geogebra

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 26 de Julho de 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Junior - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Willian Versolati França
Universidade Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Marcelo Leonardo dos Santos Rainha
Universidade Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

À Deus pelo dom da vida, amparo e proteção.

Ao Professor Doutor Nelson Dantas pela atenção, dedicação e contribuição na orientação deste trabalho.

À minha amável e querida esposa Ana Lúcia Rezende Damasceno León pelo amor e compreensão durante todos os momentos.

Aos meus queridos pais Nilda Fernandes de Albuquerque León e Fortunato Alfredo León Castro pela vida, pelo amor e por sempre incentivarem meus estudos.

Às minhas queridas e companheiras irmãs Gina León Fernandes, Giselle León Fernandes e Giane León Fernandes além dos meus sobrinhos Luis Victor Leon Henriquez, Cristofer Antonio Leon Henriquez e Kevin Ângelo Leon Henriquez que sempre estão torcendo por mim em todos os momentos.

À todos os familiares, cunhados, sogros que acompanharam toda a minha trajetória sempre apoiando.

Aos meus amigos pela torcida, compreensão, carinho e o companheirismo de sempre, em especial à Maika Som Machado e Renata Gomes pela contribuição na organização final deste trabalho.

À todos os colegas de turma que compartilharam os momentos de estudo no Profmat.

À CAPES pelo financiamento dos meus estudos através da bolsa.

RESUMO

Apresentamos nesta pesquisa uma análise das potencialidades do software GeoGebra como uma das Tecnologias da Informação e Comunicação aplicadas à Educação (TICEs), auxiliando à aprendizagem das funções quadráticas, exponenciais e logarítmicas para o Ensino Fundamental e Médio, a partir da construção e análise das representações gráficas destas funções. Abordamos neste trabalho a importância das Tecnologias da Informação e Comunicação aplicadas à Educação (TICEs) no ensino e a manipulação do software GeoGebra.

Palavras-chave: Geogebra. Funções. Tecnologia.

ABSTRACT

We present in this research an analysis of the potential of GeoGebra software as one of the Information and Communication Technologies applied to Education (TICEs), helping the learning of quadratic, exponential and logarithmic functions for Elementary and Middle School, from the construction and analysis of representations graphs of these functions. We discuss the importance of Information and Communication Technologies applied to Education (TICEs) in the teaching and manipulation of GeoGebra software.

Key-words: Geogebra. Functions. Tecnology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
TICEs	Tecnologias da Informação e Comunicação aplicadas à Educação
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
UNIFOR	Universidade de Fortaleza
PA	Progressão Aritmética
PG	Progressão Geométrica
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{R}_+^*$	Conjuntos dos Números Reais Positivos

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presença de aplicativos e softwares se faz presente na comunicação, na localização, em compras, em informações e em outras vertentes. Desta forma, o ensino da matemática não pode ficar distante e a análise da presença da tecnologia como complemento do ensino motivou a investigação para a construção desta pesquisa.

Inicialmente, pesquisamos sobre o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação aplicadas à Educação (TICEs) e analisamos a importância do uso destas tecnologias como complemento do ensino em diversas áreas de ensino no campo da matemática.

A partir da análise da importância das TICEs, procuramos observar as dificuldades apresentadas pelos alunos no ensino da matemática. Dentre as dúvidas mais frequentes, percebemos a existência da dificuldade de associar as funções às suas representações gráficas bem como a interpretação de seus dados. Dessa forma, decidimos fazer uma abordagem das funções quadráticas, exponenciais e logarítmicas, apresentando os conceitos e as propriedades, aplicando em suas representações gráficas.

Após a motivação inicial deste trabalho, pesquisamos qual seria o software ideal para a aplicação neste trabalho. Dentre os softwares pesquisados, optamos pelo GeoGebra, pois além de ser gratuito, suas propriedades foram satisfatórias para as análises desejadas.

Pesquisamos para este trabalho a origem deste software e suas funções, especificando o funcionamento do GeoGebra e como se faz a utilização de seus recursos para a construção de gráficos.

Nas funções estudadas, apresentamos os conceitos e suas propriedades, aplicando juntamente com as definições, exemplos construídos através do GeoGebra como forma de facilitar a visualização e compreensão do conteúdo apresentado. Ao final do estudo de cada uma das funções, buscamos exercícios apresentados em exames de admissão em faculdades para analisar a aplicação destas situações-problemas nos gráficos, construídos através do software estudado.

Ao final deste trabalho o objetivo é fazer uma análise da contribuição das TICEs no ensino das funções quadrática, exponencial e logarítmica como complemento do estudo das definições e propriedades.

2 A UTILIZAÇÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A matemática é uma disciplina que contribui para o desenvolvimento do raciocínio em diversos campos do conhecimento, contribuindo para compreensão de resultados em diversas áreas como o da medicina, o da administração, da engenharia. A forma de abordagem do conteúdo é de suma importância, pois os processos didáticos a serem utilizados, tornam a disciplina mais atraente aos discentes e, por consequência, permite criar uma afinidade pela disciplina. Em particular, o professor deve estar atento não somente as questões afetivas ao conteúdo, mas a outros aspectos que também interferem, como as diferenças entre o nível de conhecimento dos alunos. PALIS (2009) citando HOLTON (2000), já alertava:

> Os departamentos de matemática devem estar atentos às necessidades discentes e levar o ensino e a aprendizagem de Matemática mais a sério; precisam aceitar que, para algumas das dificuldades dos alunos, há causas epistemológicas e pedagógicas; os problemas não se reduzem aos chavões “o aluno é fraco”, “o aluno está desmotivado” (HOLTON, 2000, apud PALIS, 2009, p.206).

Desta forma, o docente, em sua prática pedagógica, deve buscar elementos que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio e conhecimento matemático do aluno, pois a abordagem do conteúdo enriquece o processo de ensino e aprendizaem. Tendo em vista a importância de motivar os alunos para o desenvolvimento do raciocínio matemático, entra em questão o uso de aparatos tecnológicos que podem, de certa forma, contribuir para o despertar do raciocínio perante a disciplina lecionada, bem como, contribuir para a construção do raciocínio. Zuchi (2009, p.240) assinala para a importância do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação aplicadas à Educação (TICEs): “Com a interação das TICEs, novos elementos aparecem, em especial, a necessidade de desenvolver recursos didáticos para a implementação das atividades em sala de aula [...]”. A compreensão e o entendimento do manuseio dessas tecnologias, fazem com que o professor utilize ao máximo as propriedades dessas ferramentas tecnológicas, sendo assim, trazendo para o aluno uma forma de desenvolvimento do raciocínio matemático, bem como, visão complementar do que é apresentado nas disciplinas. Zuchi (2009, p. 240) completa mostrando que “O desenvolvimento dos recursos está diretamente relacionado às análises das especificidades e às potencialidades do instrumento utilizado.”. Várias pesquisas na área de educação matemática, com relação às TICEs estão sendo realizadas pesquisas, trazendo resultados relevantes em relação ao engrandecimento das aulas e também relativo ao aproveitamento dos alunos em vários segmentos da educação, inclusive no ensino superior. No Boletim de Educação Matemática (2011) encontram-se artigos que exemplificam sobre o uso de tecnologias no ensino superior, sendo que podemos destacar:

> Scucuglia (2006) pesquisou como estudantes-com-calculadoras-gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo. [...] A análise dos dados coletados revelou que a utilização da calculadora gráfica em atividades exploratórias, acerca de conceitos do Teorema Fundamental do Cálculo, condicionou o pensamento das estudantes na investigação dos conceitos de Soma de Riemann e Integração, e propiciou o envolvimento gradativo das estudantes em discussões matemáticas com argumentos que visam uma dedução. (MALTEMPI, JAVORONI e BORBA, 2011, p. 54,55).

Esta análise também é considerada por Borba, Malheiros e Zulatto (2008, p. 102) quando citam "Borba e Villareal (2005) indicaram como papel ativo da tecnologia na produção do conhecimento, ao defenderem que esse é realizado por coletivos de seres-humanos-com-mídias." Desta forma, uma TCIE quando bem utilizada e direcionada, contribui para o processo de aprendizagem.

3 O GEOGEBRA

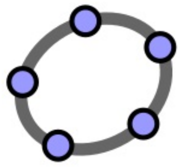

Figura 1 – GeoGebra

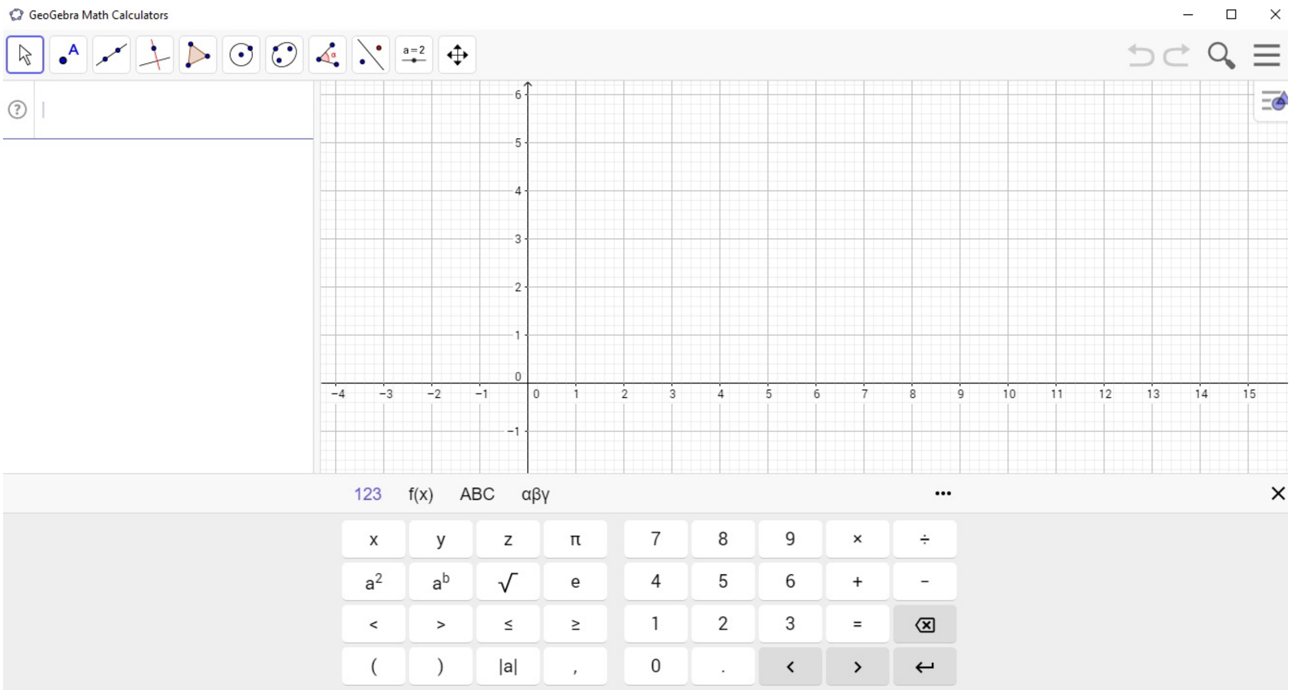

Figura 2 – Calculadora Gráfica GeoGebra

3.1 O que é o Geogebra

O GeoGebra é um sofware gratuito de Matemática dinâmica criado por Markus Hohenwarter que permite desenvolver em um laboratório de informática conceitos matemáticos que envolvem campos como da álgebra e da geometria.

O desenvolvimento deste aplicativo ocorreu inicialmente na Universität Salzburg(2001) e tendo sua continuidade na Florida Atlantic University(2006 a 2008).

Este sofware permite construir um elo entre a geometria e a álgebra. Faz com que a matemática se torne mais palpável aos alunos, deixando com que investiguem, explorem e criem tornando -a mais interativa, contribuindo para a construção do raciocínio matemático.

A instalação do Geogebra é realizada acessando o site *www.geogebra.org*, no qual encontraremos a versão em português. Este software é encontrado para o sistema operacional Windows e Linux, além de existir a versão na forma de aplicativo para smartphones, que podem ser encontrados nas lojas de aplicativos, também gratuitos.

3.2 Comandos e funções do Geogebra

Ao abrir o geogebra deparamos com a Barra de ferramentas.

Figura 3 – Barra de Ferramentas do GeoGebra

Ao clicarmos em cada um desses itens abrirá as opções de cada uma das ferramentas que apresentará através ilustrações o que pode ser feito com cada destes. Além disso, é possível configurar os eixos coordenados, tanto para a mudança de escala quanto aos valores, podendo optar em utilizar a escala em radianos.

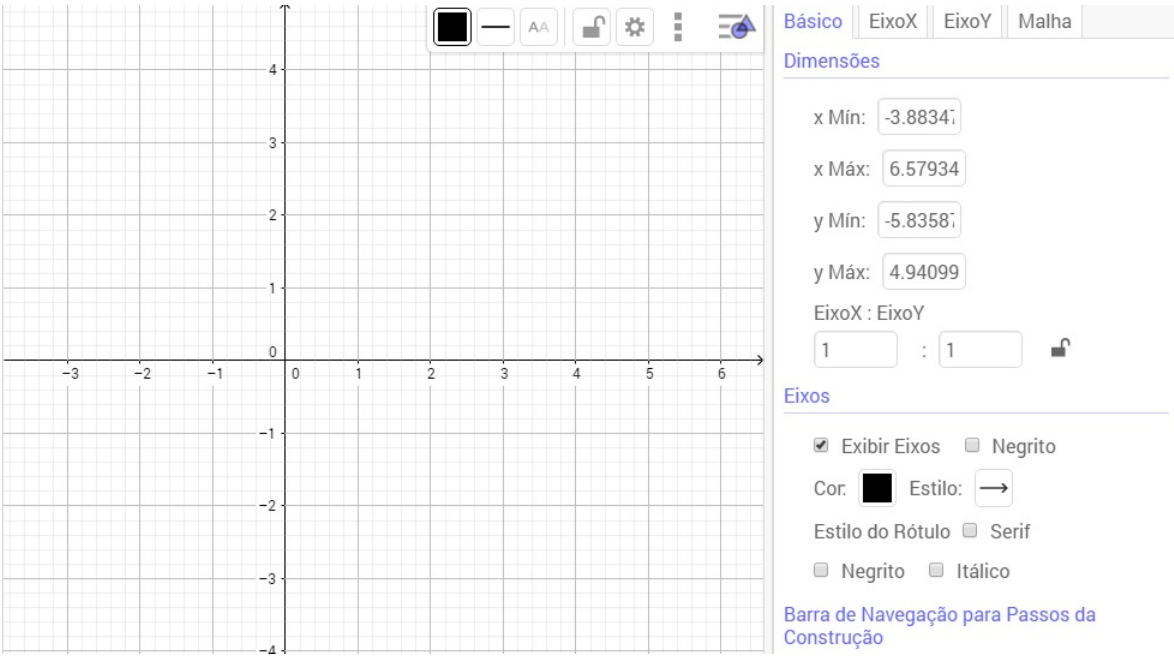

Figura 4 – Janela de Formatação dos Eixos Coordenados

Além disso, o software oferece os seguintes itens para construções e configuração dos gráficos:

Arquivo: neste item encontramos as opções Novo, Abrir, Gravar, Compartilhar, Exportar, Visualização da Impressão, Editar, Desfazer e Refazer, Copiar, Colar, Opções e Selecionar Tudo. Este subitens contribuem para a formatação do gráfico.

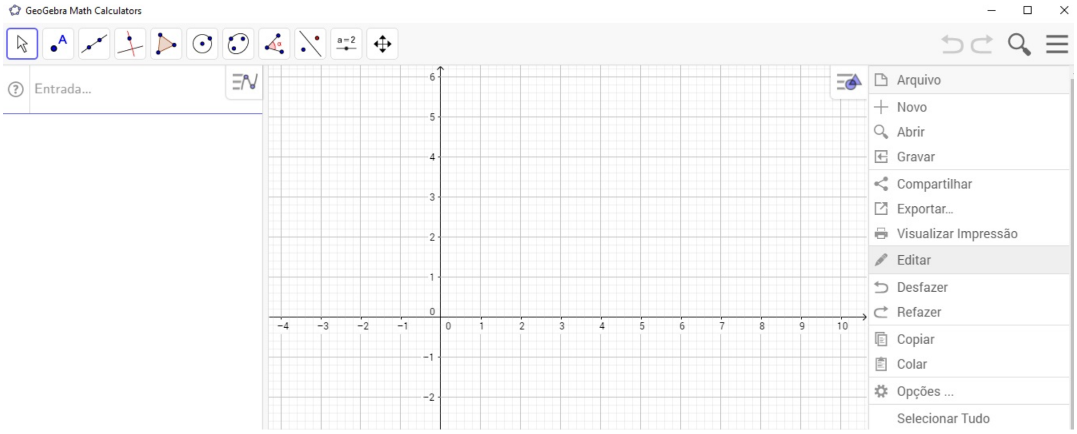

Figura 5 – Aba Arquivo

Editar: Neste item temos acesso às ferramentas: Desfazer, Refazer, Copiar, Colar, Opções e Selecionar tudo.

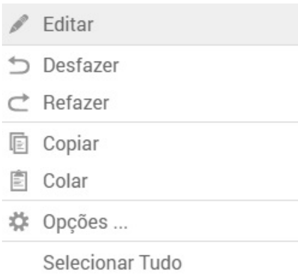

Figura 6 – Aba Editar

Clicando no item Opções, abrimos uma nova janela que possibilita a edição dos eixos coordenados.

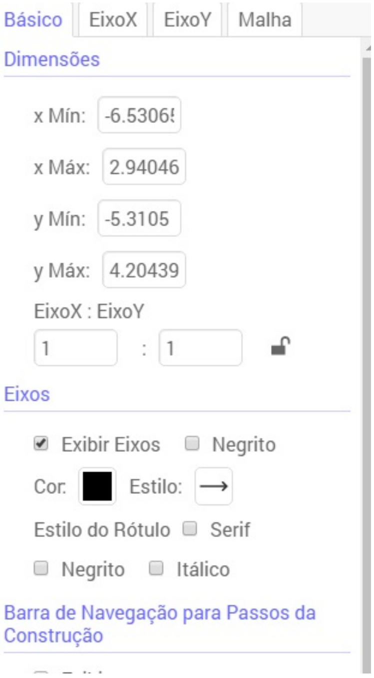

Figura 7 – Aba Edições

Exibir: Neste item temos a possibilidade de selecionarmos o tipo de janela de exibição gráfica de acordo com a construção gráfica desejada.

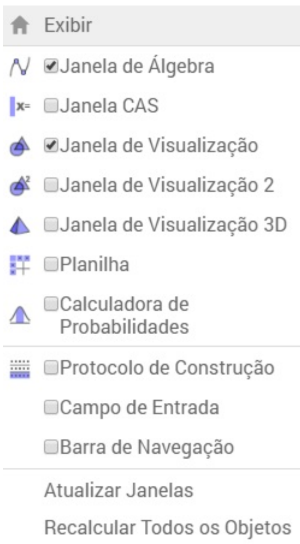

Figura 8 – Aba Exibir

Opções: Habilita as opções Casas decimais, Continuidade, Estilo do Ponto, Coordenadas, Rotular, Tamanho da fonte, Idioma, Salvar configurações e Restaurar a configuração padrão.

Figura 9 – Aba Opções

Ferramentas: Nesta opção temos a possibilidade de Criar uma nova ferramenta, Ferramentas de controle e Configurar a caixa de ferramenta.

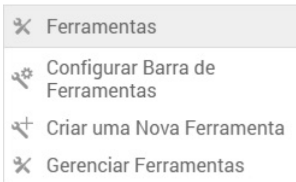

Figura 10 – Aba Ferramentas

Ajuda: Neste item o software disponibiliza endereços de páginas web para consulta ao tutorial e fóruns de discussão de usuários do software. Contém as opções Ajuda, www.geogebra.org, GeoGebra Fórum, GeoGebrawiki e Sobre/Licença.

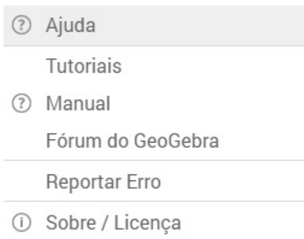

Figura 11 – Aba Ajuda

Abaixo da barra de ferramentas, temos a ENTRADA, onde será digitada a função desejada para que o gráfico seja exibido no espaço ao lado.

4 AS FUNÇÕES E SUAS APLICAÇÕES NO GeoGebra

4.1 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definimos como Função Quadrática ou Função Polinomial do segundo grau, toda função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que os parâmetros a, b e c são números reais, com a diferente de zero.

As funções quadráticas podem ser aplicadas em diversas situações no campo da matemática, como cálculo de diagonais de um polígono, na física, no cálculo da função horária dos espaços no Movimento Uniformemente Variado, na Administração em problemas que envolvem custos e lucros máximos e mínimos.

Para construção gráfica da função quadrática, faremos algumas definições bem como as orientações para a construção dos gráficos da função quadrática através do software GeoGebra.

4.1.1 Orientação para a construção dos gráficos da Função Quadrática

Com o software Geogebra instalado, clicamos no ícone para abrirmos o programa. Observamos que na página inicial teremos os eixos coordenados junto com a malha quariculada. Na parte superior à esquerda encontramos a caixa de ENTRADA onde deveremos digitar a função quadrática desejada. Usaremos ao invés de $f(x)$ o y e em seguida digitaremos a função. Devemos observar que para digitar o termo x^2 da função devemos digitar x depois o símbolo de acento circunflexo do teclado do computador e finalmente o número 2. Após o término da digitação, o gráfico aparecerá automaticamente na malha quadriculada.

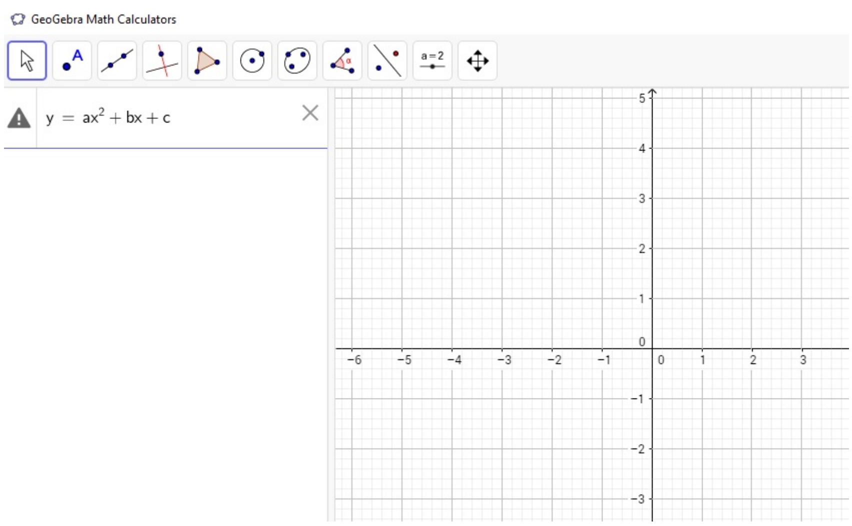

Figura 12 – Construção da Parábola

4.1.2 A Parábola

O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada parábola. A parábola possui a sua concavidade definida de acordo com o parâmetro a da função $f(x) = ax^2+bx+c$, em que quando a é positivo a concavidade da parábola será voltada para cima e quando a é negativo a concavidade será voltada para baixo. Observe os seguintes exemplos:

Exemplo 1:$y = x^2 - 5x + 6$

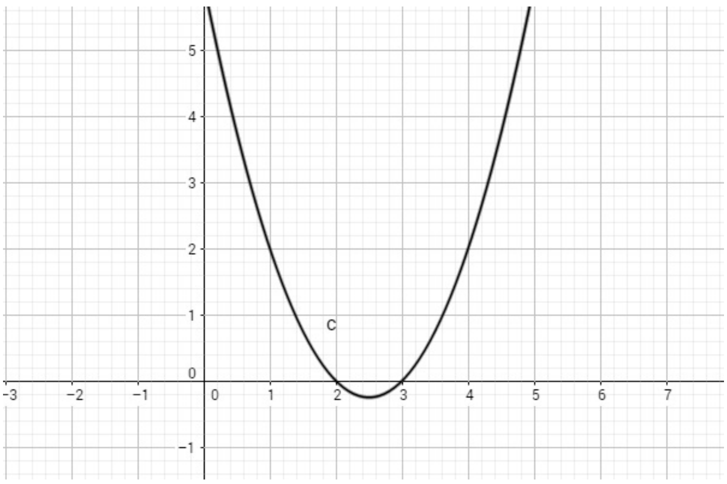

Figura 13 – Exemplo 1

Exemplo 2: $y = -x^2 + 8x - 12$

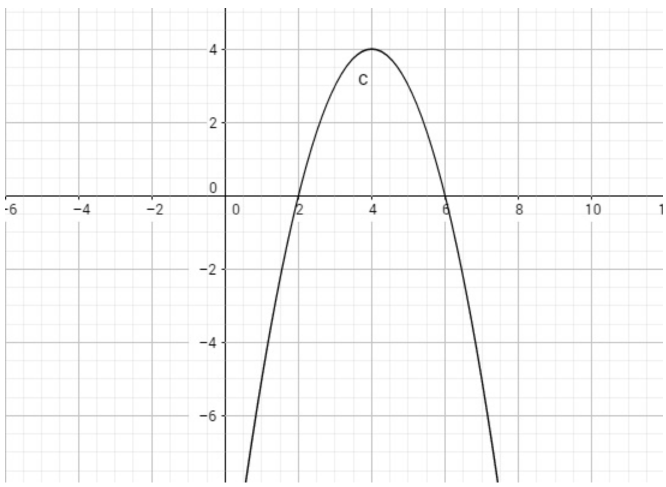

Figura 14 – Exemplo 2

4.1.3 Zero de uma função

É o ponto em que o gráfico de uma função intercepta o eixo das abscissas. Para determinar este (ou estes) pontos faremos f(x) = 0, pois assim definiremos o ponto $(x_o, 0)$. A determinação da quantidade de zeros de uma função quadrática depende do cálculo do discriminante da equação ($\Delta = b^2 - 4ac$) do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

A resolução da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é realizada através da fórmula de Bhaskara:

BhasKara, também conhecido como Bhaskaracharya, era indiano e viveu entre 1114 e 1185. Foi um dos mais importantes matemáticos do século XII, com estudos e avanços direcionados à álgebra, no estudo de equações e na compreensão do sistema numérico. Em suas obras, Bhaskara trabalhou as equações do 2º grau e formulou uma expressão utilizando raízes quadradas, pois sabia que as equações possuiam duas raízes. O termo "Fórmula de Bhascara", aparentemente ocorre somente no Brasil, não se encontrando esta nomenclatura em literaturas internacionais. Isto se justifica pois, problemas relacionados às equações do 2º grau foram encontrados há 4000 anos aproximadamente, em textos escritos pelos Babilônios nas tábuas cuneiformes. Nestes escritos existiam textos em prosa, sem utilização de expressões matemáticas, que ensinavam a determinar as raízes de equações em problemas concretos, geralmente ligados à geometria.

Demonstração:

Sejam a, b e c termos da equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \in \mathbb{R}^*$ e b e $c \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que as raízes desta equação podem ser definidas atráves da relação matemática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, conhecida como fórmula de Bhaskara.

Seja a equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$, sendo $a \neq 0$

Dividindo a equação por a, temos: $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$

Para utilizarmos o método de completar quadrados, adicionaremos o termo $-\frac{c}{a}$ em ambos dos membros da igualdade, e assim obtemos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Adicionando o termo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os membros:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

segue que:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

O termo $b^2 - 4ac$ é denominado discriminante e é simbolizado pela letra grega $\Delta\,(delta)$.

Caso o discriminante seja positivo, teremos duas raízes diferentes para a equação do segundo grau, neste caso gráfico da função quadrática interceptará o eixo das abscissas em dois pontos. Porém se o discriminante encontrado for igual a zero, a equação do segundo apresentará uma única raiz, deste modo o gráfico interceptará o eixo das abscissas em um único ponto. Caso a equação tenha um discriminante negativo, a equação não terá raízes reais. Como a função quadrática é definida no campo dos reais, o gráfico da função não interceptará o eixo das abcissas.

Exemplo 3: $y = x^2 - 4x + 3$

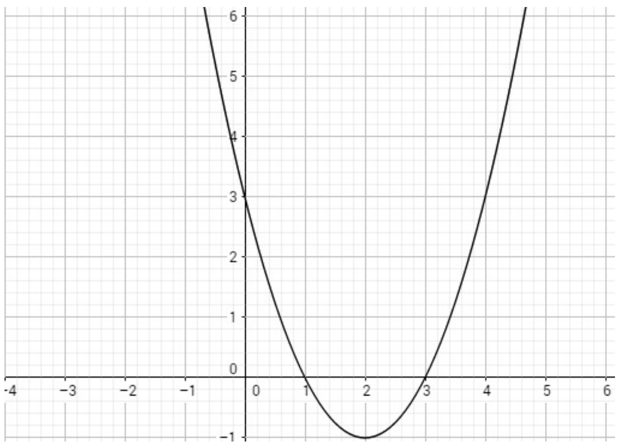

Figura 15 – Exemplo 3

Neste caso, nota-se que o valor do discriminante da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ é positivo, desta forma a parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos: $(1, 0)$ e $(3, 0)$.

Exemplo 4: $y = -x^2 + 2x - 1$

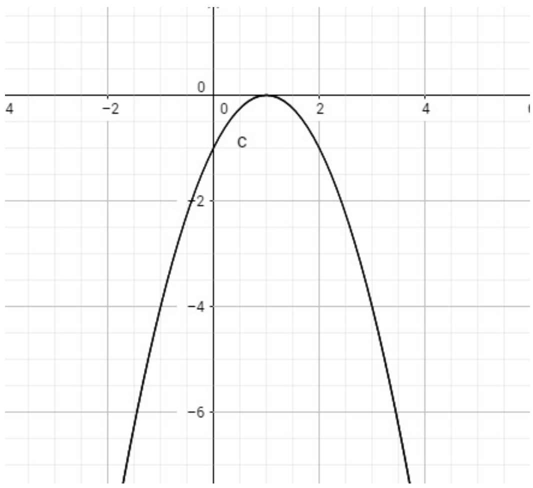

Figura 16 – Exemplo 4

Neste caso, nota-se que o valor do discriminante da equação $-x^2 + 2x + 1 = 0$ é nulo, desta forma a parábola intercepta o eixo das abscissas em um único ponto: (1,0).

Exemplo 5: $y = x^2 + 2x + 3$

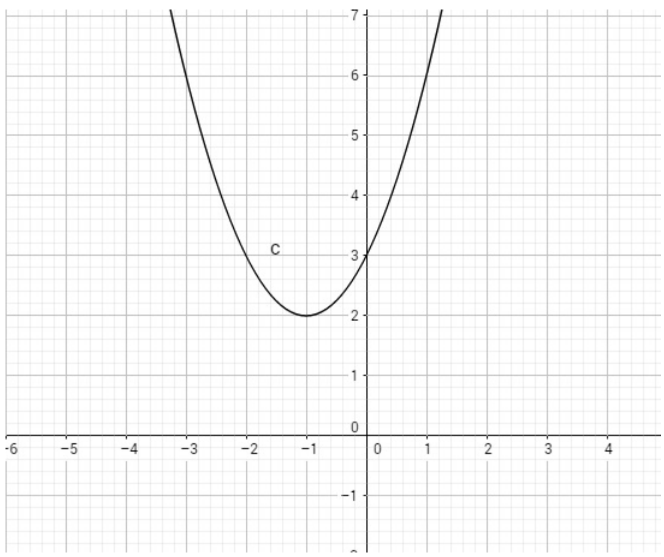

Figura 17 – Exemplo 5

Neste caso, nota-se que o valor do discriminante da equação $x^2 + 2x + 3 = 0$ é negativo, desta forma a parábola não intercepta o eixo das abscissas.

4.1.4 Vértice da parábola

Sendo a reta perpendicular à diretriz, baixada a partir de seu foco o eixo da parábola, o ponto mais próximo da diretriz será o vértice da parábola. O vértice de uma parábola é indicado por um ponto de coordenandas (x_v, y_v) que indica o ponto de máximo, para o parâmetro a da função quadrática negativo e mínimo para o parâmetro a positivo. Pelo vértice da parábola passa o eixo de simetria da parábola. Observe a seguir a demonstração das equações que definem as coordenadas do vértice da parábola.

Dados uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e x_v a abscissa do vértice da parábola e y_v a ordenada do vértice da parábola, provemos a relação entre os coeficientes da função e as coordenadas do vértice da parábola.

Dada a função $y = ax^2 + bx + c$, colocaremos a como fator comum em evidência:

$$y = a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right)$$

Somaremos e subtrairemos um mesmo valor arbitrário de uma função, sendo assim a função não sofrerá alterações. Utilizaremos um valor conveniente de $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$y = a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a}\right)$$
$$y = a\left[\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{c}{a}\right)\right]$$
$$y = a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$
$$\text{Substituíndo } b^2 - 4ac \text{ por } \Delta, temos:$$
$$y = a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

Ao analisarmos esta equação concluímos que se $a < 0$ o valor de y será tanto maior quanto o menor for o valor da diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)$. Dessa diferença temos que o valor de $-\left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)$ é uma constante e que o valor de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ será sempre positivo. Portanto a função assumirá o maior valor possível para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, $x = -\frac{b}{2a}$ e consequentemente $y = -\left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)$. De maneira análoga, teremos para $a > 0$,desta forma temos que as coordenandas do vértice são:

$$x_v = -\tfrac{b}{2a} \; y_v = -\tfrac{\Delta}{4a}$$

Com o vértice da parábola podemos resolver problemas que envolvem máximos e mínimos, pois quando o parâmetro a for positivo, o vértice da parábola indicará o ponto mínimo para a função quadrática, enquanto quando o parâmetro a for negativo, indicará o ponto mínimo que a função quadrática atingirá. As coordenadas do vértice também exercem uma importância para compreensão e interpretação dos gráficos da função:

- X_v

A coordenada x do vértice indica por onde passará o eixo de simetria da parábola, ou seja, indica o ponto de passagem da reta paralela ao eixo das ordenadas, que dividirá a parábola em duas partes simétricas que constribuem para análise e definição do ponto de crescimento e decrescimento do gráfico.

- Y_v

A coordenada y do vértice, além de indicar os valores máximos e mínimos da parábola, contribui para a análise e determinação da imagem da função quadrática. No caso em que o parâmetro a seja positivo, a imagem será $Im = \{y \in \mathbb{R} | y \geq y_v\}$ e no caso de a negativo a imagem será $Im = \{y \in \mathbb{R} | y \leq y_v\}$.

4.1.5 Definição de função Crescente e Decrescente

Dada uma função $f(x)$ e quaisquer $x^{'}$ e $x^{''}$ números reais contidos no domínio da função $f(x)$, com $x^{'} < x^{''}$. Se $f(x^{'}) < f(x^{''})$, a função $f(x)$ será crescente em todo o domínio. Se $f(x^{'}) > f(x^{''})$, então a função $f(x)$ será decrescente. Caso $f(x^{'}) = f(x^{''})$, a função será denominada constante.

4.1.6 Crescimento e Decrescimento da Parábola

Para analisarmos o crescimento da função quadrática, verificaremos primeiramente o valor do parâmetro a. Caso $a > 0$, para valores de $x < X_v$, teremos a função descrescente e para valores de $x > X_v$, teremos a função crescente. Caso $a < 0$, para valores de $x < X_v$, teremos a função crescente e para valores de $x > X_v$, teremos a função decrescente.

4.1.7 Estudo do sinal da função quadrática

Estudar o sinal de uma função quadrática, significa determinar os valores reais para os quais $f(x)$ se anula($f(x) = 0$), $f(x)$ é positiva ($f(x) > 0$) e $f(x)$ é negativa($f(x) < 0$). O estudo do sinal desta função vai depender do discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e do parâmetro a. Analisando os casos, temos:

1º.Caso : $\boldsymbol{\Delta > 0}$

Neste caso a equação $ax^2 + bx + c = 0$ apresenta duas raízes reais e diferentes $x^{'}$ e $x^{''}$, sendo assim o gráfico interceptando o eixo das abscissas em dois pontos.

No caso de $a > 0$

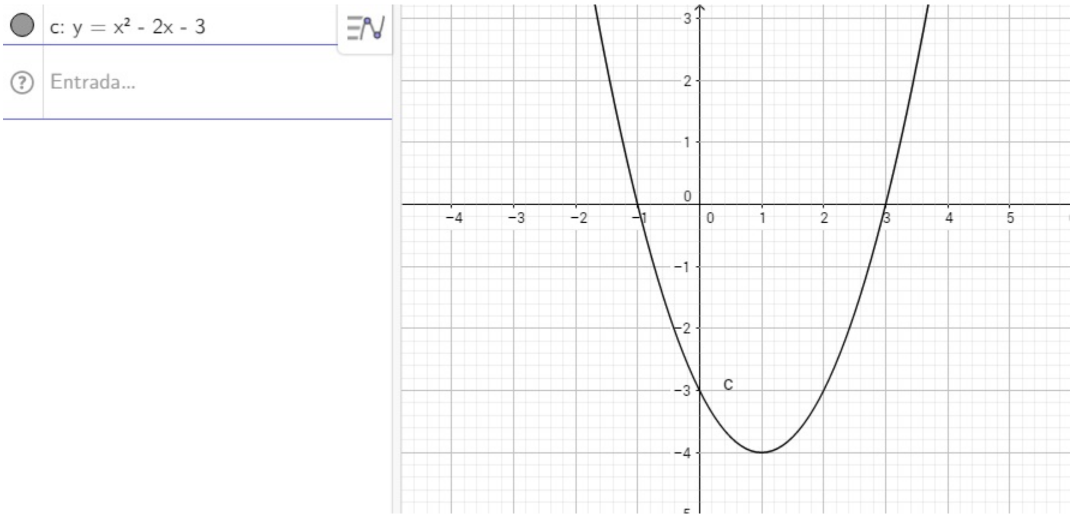

Figura 18 – Gráfico função quadrática 1º caso - $a > 0$

Analisando o gráfico, temos:

$f(x) = 0$, para $x = x^{'}$ ou $x = x^{''}$

$f(x) > 0$, para $x < x^{'}$ ou $x > x^{''}$

f(x)<0, para $x^{'}$ < x < $x^{''}$

No caso de $a < 0$

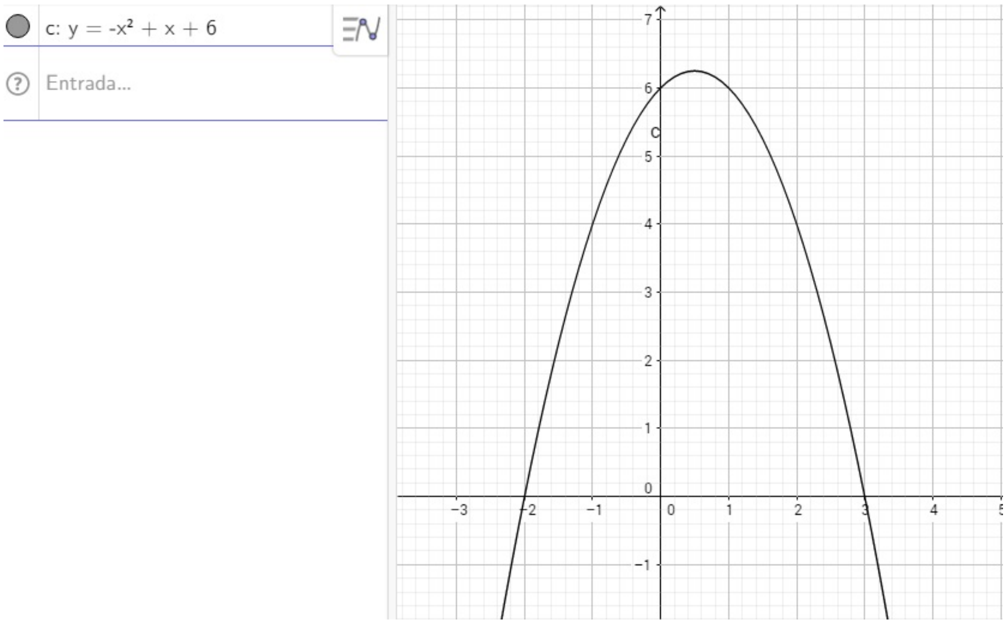

Figura 19 – Gráfico função quadrática 1º caso - $a < 0$

Analisando o gráfico, temos:

$f(x) = 0$, para x $= x^{'}$ ou $x = x^{''}$

$f(x) > 0$, para $x^{'} < x < x^{''}$

$f(x) < 0$, para $x < x^{'}$ ou $x > x^{''}$

2º.Caso : $\mathbf{\Delta = 0}$

Neste caso a equação $ax^2 + bx + c = 0$ apresenta duas raízes reais e iguais $x^{'} = x^{''}$, sendo assim o gráfico interceptando o eixo das abscissas em um único ponto.

No caso de $a > 0$

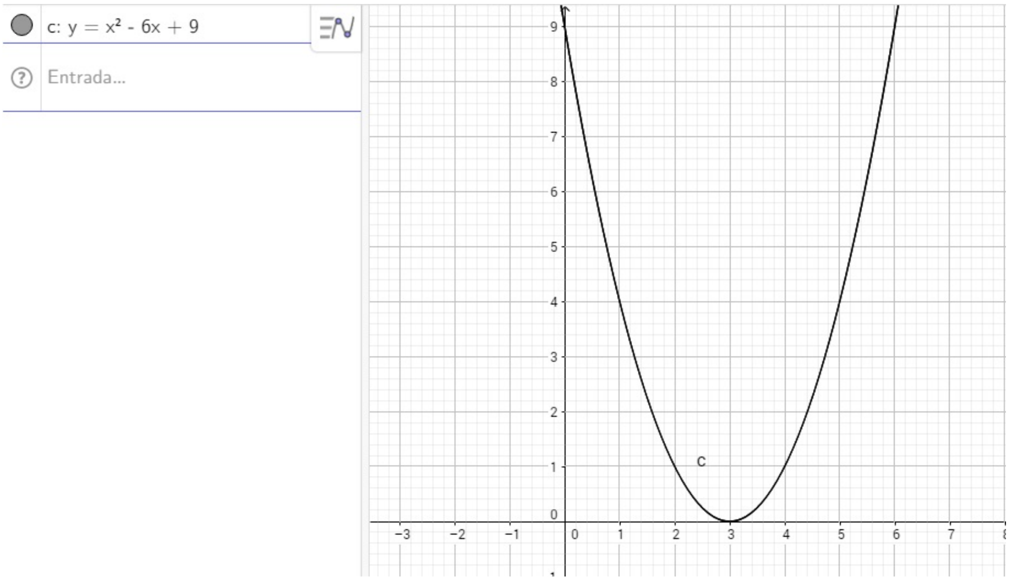

Figura 20 – Gráfico função quadrática 2º caso - $a > 0$

Analisando o gráfico, temos:

$f(x) = 0$, para $x = x' = x''$

$f(x) > 0$, para $x \neq x'$

No caso de $a < 0$

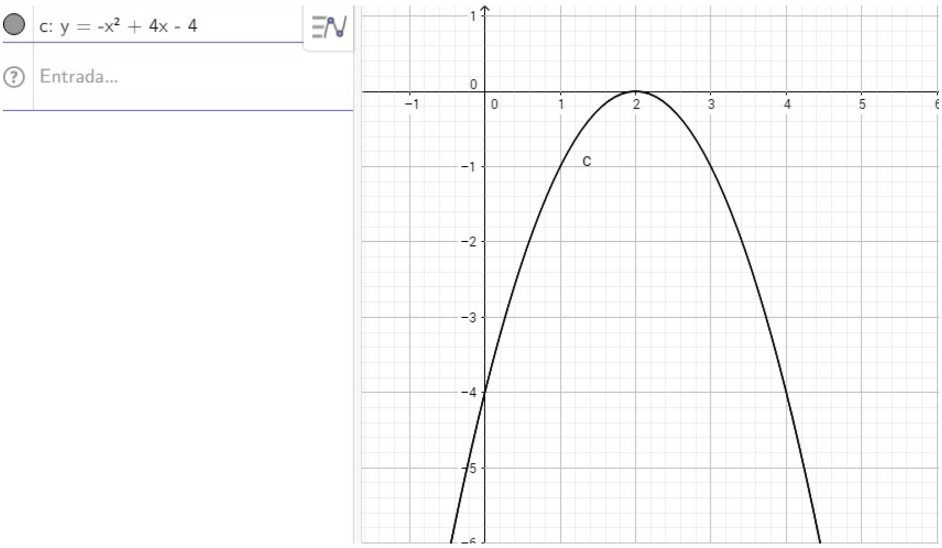

Figura 21 – Gráfico função quadrática 2º caso - $a < 0$

Analisando o gráfico, temos:

$f(x) = 0$, para $x = x' = x''$

$f(x) < 0$, para $x \neq x'$

3º.Caso : $\boldsymbol{\Delta < 0}$

Neste caso a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não apresenta raízes reais, sendo assim o gráfico não intercepta o eixo das abscissas.

No caso de $a > 0$

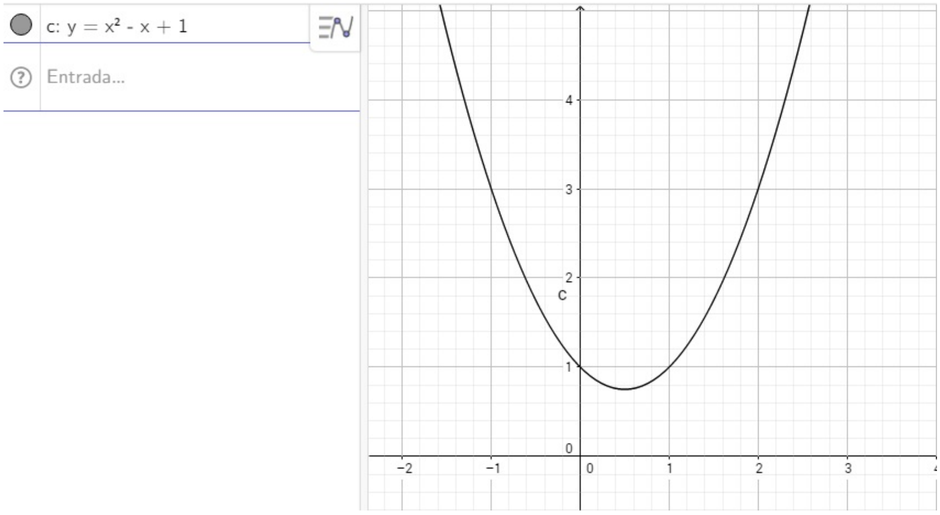

Figura 22 – Gráfico função quadrática 3º caso - $a > 0$

Analisando o gráfico, temos:

f(x)>0, para todo x real

No caso de $a < 0$

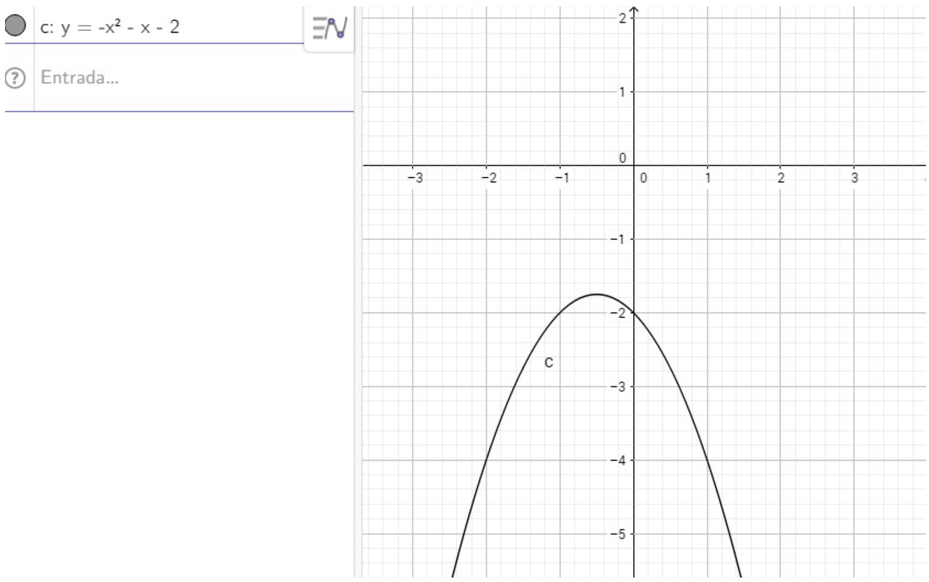

Figura 23 – Gráfico função quadrática 3º caso - $a < 0$

Analisando o gráfico, temos:

f(x)<0, para todo x real.

- ATIVIDADE 1

A finalidade desta atividade é desenvolver a percepção do aluno com relação a variação dos coeficiente a, b e c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, bem como suas aplicações gráficas.

Orientações: Com a utilização do software GeoGebra, seguir os seguintes passos:

a) Criar os controles deslizantes. Para a criação dos controles deslizantes, devemos clicar no ícone localizado na barra de ferramentas. Em seguida, clicamos na malha quadriculada e assim abrirá uma janela na qual selecionaremos a variação desejada para o controle deslizante. Faremos este procedimento três vezes para a criação dos coeficientes a, b e c da função quadrática.

b) Escrever a função $y = ax^2 + bx + c$.

c) Movimentar os coeficientes a,b e c passando por valores positivos, negativos e zero.

d) Anotar as conclusões.

Após as orientações acima, podemos aplicar o questionário sugerido a seguir como norte das conclusões dos alunos.

Sugestão de questionario:

1- Quais as principais diferenças entre os gráficos quando você fez o coeficiente a positivo, negativo e zero?

2- O que você observou no gráfico quando variou os valores de do coeficiente b entre positivo, negativo e zero?

3- Qual a função do termo c na construção do gráfico?

4- O GeoGebra contribuiu para o entendimento dos conceitos da função quadrática? Por que?

Conclusões: Ao realizar esta atividade, o docente deve observar a relação entre o coeficiente a e a concavidade da parábola, posição do vértice da parábola e o ponto de interseção entre os eixos e a parábola. Além disso, é importante salientar que ao tornar o coeficiente a igual a zero, a função deixa de ser quadrática e passa a ser uma função afim, desta forma a necessidade do coeficiente a ser diferente de zero para definirmos uma função quadrática.

- ATIVIDADE 2

A finalidade desta atividade é desenvolver com o aluno questões relacionadas ao estudo do sinal da função quadrática, bem como a influência da variação do discriminante da função.

Orientações: Dadas as seguintes funções, construa os gráficos utilizando o software GeoGebra. Em seguida, indique para quais valores a função se torna positiva, negativa e nula.

a) $f(x) = x^2 + 7x + 10$

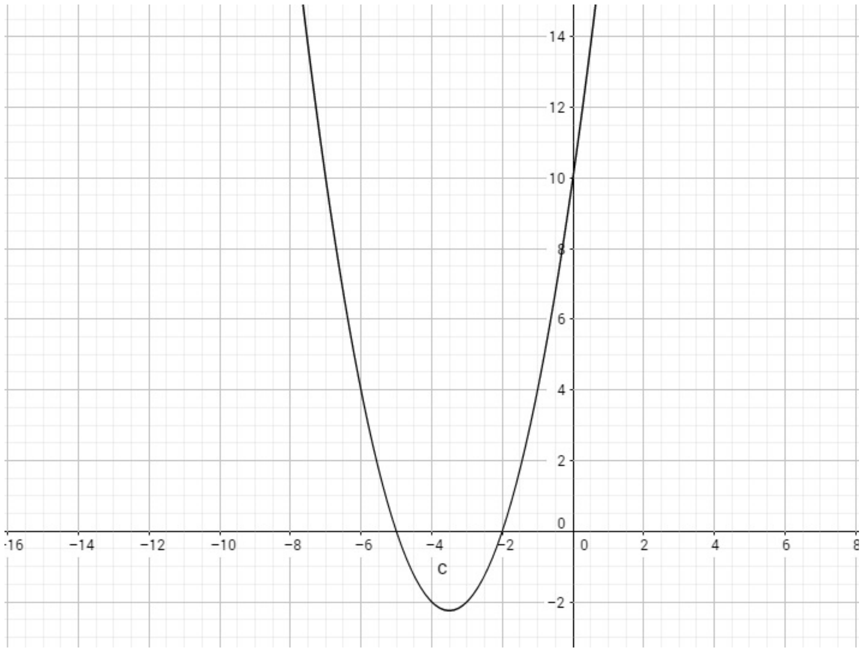

Figura 24 – Gráfico (a)

b)$f(x) = x^2 - 2x + 1$

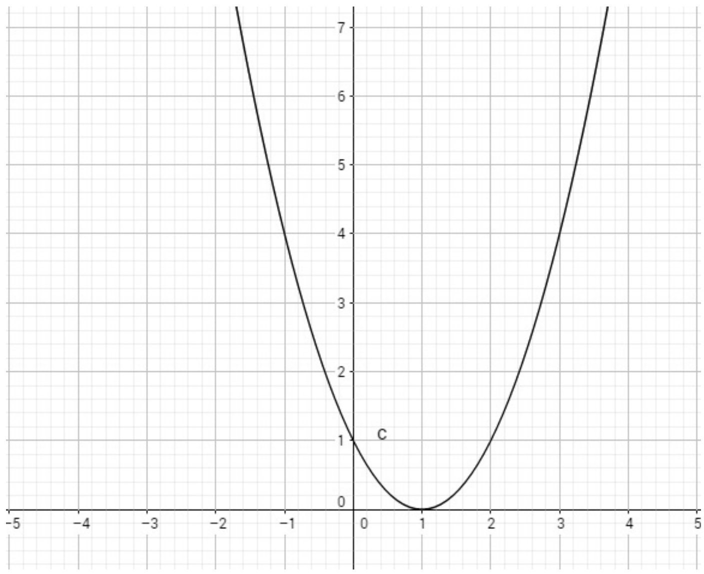

Figura 25 – Gráfico (b)

c)$f(x) = x^2 - x + 1$

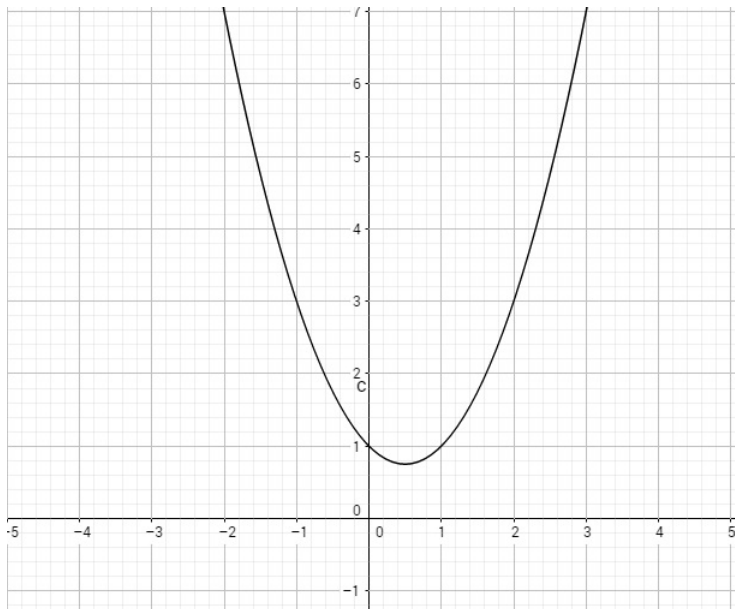

Figura 26 – Gráfico (c)

d)$f(x) = -x^2 + 2x$

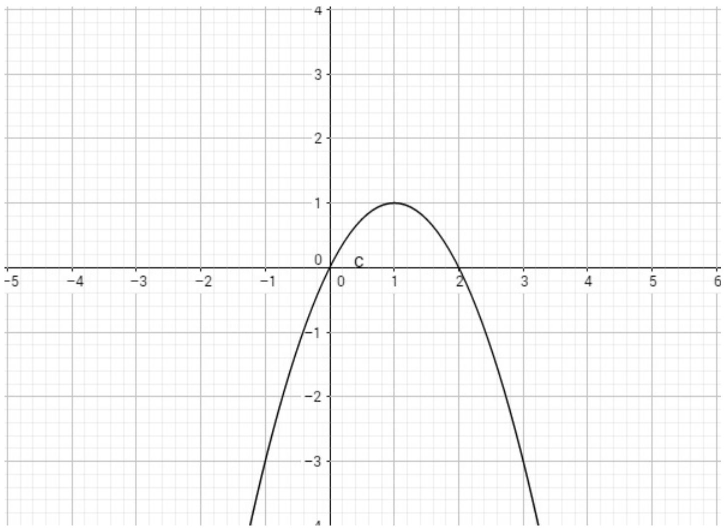

Figura 27 – Gráfico (d)

e)$f(x) = -x^2 + 4x - 4$

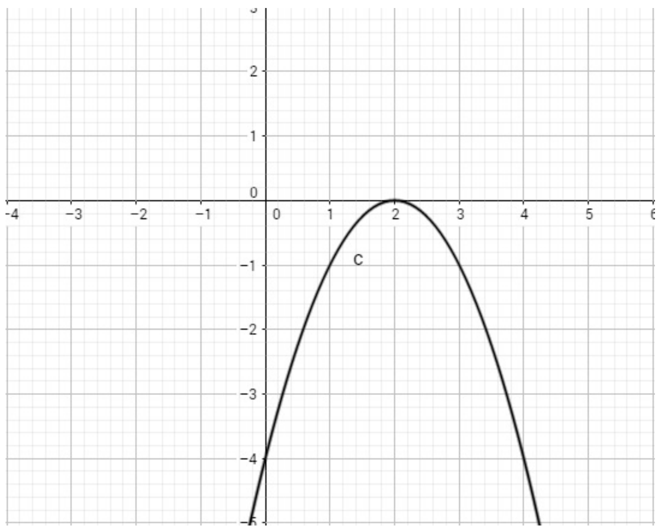

Figura 28 – Gráfico (e)

f)$f(x) = -x^2 + x - 4$

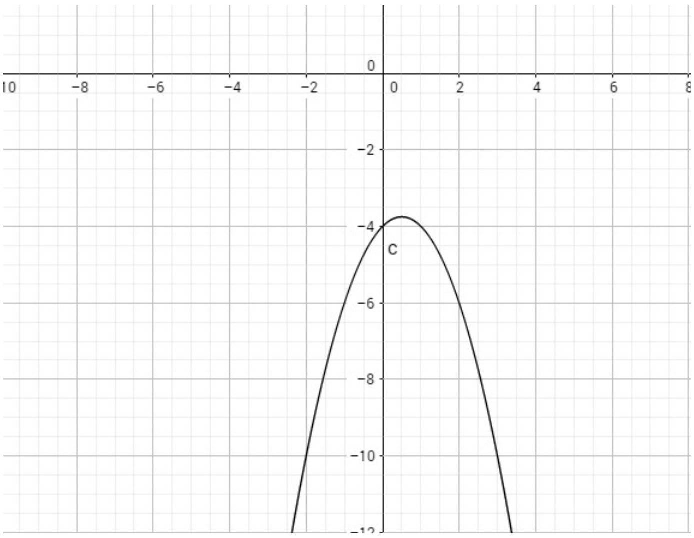

Figura 29 – Gráfico (f)

Conclusões: Após o desenvolvimento da atividade, o aluno deverá estar atento à variação do discriminante da equação da equação do 2º grau e sua influência na construção dos gráficos da função quadrática. Complementando, pode se explorar o estudo do sinal da função quadrática, dando ênfase na influência do coeficiente a da função $f(x) = ax^2+bx+c$, bem como a participação do discriminante da equação do 2ºgrau para este estudo. Um comentário complementar para esta atividade é a relação do coeficiente c na construção dos gráficos, verificando que este parâmetro da função indica o ponto de interseção da parábola com o eixo das ordenadas.

- ATIVIDADE 3

O Objetivo desta atividade é mostrar graficamente ao aluno que o y_v definem os pontos de máximos e mínimos aplicados em problemas.

Orientações: Um aluno resolveu adotar a função $f(x) = -t^2 + 14t - 33$ para determinar o número de horas por dia que ele deveria estudar no t-ésimo mês do ano, com $3 \leq t \leq 11$. Em vista disso, é correto afirmar que:

a) ele iniciou estudando duas horas por dia.

b) o número máximo de horas estudadas por dia ocorreu no mês de julho.

c) o número máximo de horas estudadas por dia nunca ultrapassou 7 horas.

d) o número de horas/dia estudadas em outubro foi maior que em setembro.

Comentários: Este exercício pode ser analisado através do software GeoGebra. Na opção a, após a construção do gráfico, observamos que o gráfico intercepta o eixo das abscissas nos pontos $(3, 0)$ e $(11, 0)$ sendo assim, é incorreta a afirmação. Para analisarmos as opções b e c marcamos voltamos ao gráfico e pela barra de ferramentas selecionamos o ícone de otimização, desta forma será indicado o ponto de máximo para função $(7, 16)$, desta forma concluímos que no mês 7, julho, será o mês em que ocorreu o número máximo de horas estudadas. No item d observamos que é falsa a afirmação pois, a partir do mês de julho, onde se localiza o Xv, a parábola se torna decrescente , concuindo que o número de horas estudadas no mês de setembro é maior que o número de horas estudadas no mês de outubro.

4.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definimos com uma função exponencial, toda função na forma $f : \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Uma história que auxilia na compreensão das funções exponenciais é a lenda da criação do jogo de xadrez, descrita na obra de Malba Tahan, O Homem que Calculava. Diz a história que o rajá indiano Balhait, entendiado com jogos em que a sorte prevalecia pediu a um sábio da corte chamado Sissa que inventasse um jogo que prevalecia qualidades como diligência, lucidez e sabedoria. Passado um tempo Sissa lhe apresentou um tabuleiro quadriculado com peças de diferentes formatos que representavam elementos do exército indiano e cada uma destas peças com movimentos característicos. O rajá ficou encantado com o jogo e assim decidiu gratificar Sissa com uma recompensa. Desta forma Sissa fez o seguinte pedido: desejava o tabuleiro cheio de grãos de trigo, sendo que na primeira casa deveria ter um grão de trigo, a segunda casa dois, a terceira três, a quarta oito e assim sucessivamente, dobrando a quantidade de grãos a cada casa até encher todas as casas do tabuleiro. Sendo assim, o rajá ordenou que os matemáticos calculassem a quantidade de grãos da recompensa. Para a surpresa este número foi a soma da seguinte série : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1.024 + 2.048 + 4.096 + ... + 9.223.372.036.854.775.808 = 18.446.744.073.709.551.615$ grãos de trigo, o que seria impagável. Esta lenda nos mostra a aplicação da função exponencial $f(x) = 2^x$, em que x representa o número da casa do tabuleiro de xadrez e f(x) representa a quantidade de grãos correspendente a cada casa. O somatório da quantidade de grãos pode ser calculada pela fórmula geral das progressões geométricas, $S_n = \frac{a_1(q^{n-1})}{q-1}$. Observamos através deste exemplo, que as funções exponenciais possuem um crescimento e um decrescimento muito rápido. Esta função possui diversas aplicações que exemplificaremos a seguir.

Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

As Progressões Aritméticas (PA), são sequências numéricas em que cada termo a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante real. Esta constante é definida como razão da PA. O termo geral desta PA pode ser definido da seguinte forma:

Dada a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ como uma Progressão Aritmética, na qual r é a razão $(r = a_n - a_{n-1})$ temos que:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_1 + 2r$, sendo assim,

$a_n = a_1 + (n-1)r$

A soma dos termos de uma PA é definida de acordo com a propriedade que afirma que a soma dos termos equidistantes de uma PA é um valor constante, dessa forma temos que a soma dos n termos de uma PA (S_n) é dada por:

$S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$, em que a_n é o último termo de uma soma de n termos.

As Progressões Geométricas (PG), são sequências numéricas em que cada termo a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante real. Esta constante é definida como razão da PG. O termo geral desta PG pode ser definido da seguinte forma:

Dada a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ como uma Progressão Geométrica, na qual q é a razão $\left(q = \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$ temos que:

$a_2 = a_1.q$

$a_3 = a_1.q^2$, sendo assim,

$a_n = a_1.q^{n-1}$

A soma dos termos uma PG é definida da seguinte forma:

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma PG de razão q, $q \neq 0$ e a soma de seus termos representada por:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$

Multiplicando por q os dois membros da igualdade acima, vem:

$q.S_n = q.\left(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n\right)$

$q.S_n = a_1.q + a_2.q + a_3.q + ... + a_{n-1}.q + a_n.q$

$q.S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n.q$

Subtraindo $q.S_n$ por S_n, temos:

$q.S_n - S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n.q - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n)$

$S_n.\left(q - 1\right) = a_n.q - a_1$, como $a_n = a_1.q^{n-1}$, vem:

$S_n.\left(q - 1\right) = a_1.q^{n-1}.q - a_1$, sendo assim,

$S_n.\left(q - 1\right) = a_1.q^n - a_1$

$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, em que n representa a quantidade de termos da PG.

4.2.1 Orientação para a construção dos gráficos da Função Exponencial

Para a construção dos gráficos da função exponencial, inicialmente devemos abrir o software GeoGebra e clicarmos na caixa de ENTRADA à esquerda no lado superior. Digitaremos y ao invés de $f(x)$ e em seguida a base da função expoencial. Devemos observar que para digitar a sentença da função no expoente devemos digitar o símbolo de acento circunflexo do teclado do computador e logo após a sentença desejada para a formação da função exponencial. Logo o término da digitação, o gráfico aparecerá automaticamente na malha quadriculada.

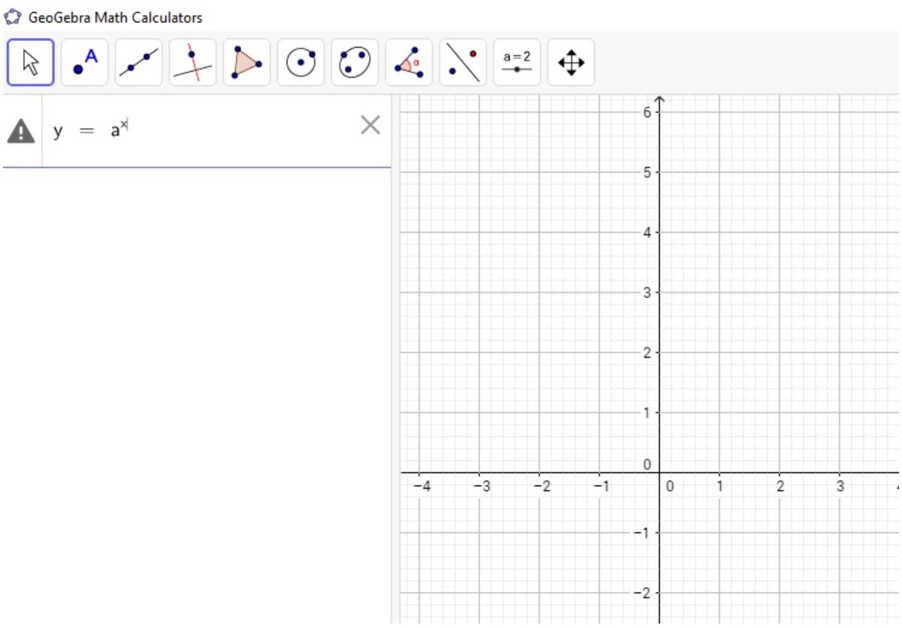

Figura 30 – Construção da função Exponencial

1. Na biologia podemos verificar que o crescimento da população de determinados tipos de organismos é feita de forma exponencial, com retradado no exercício a seguir:

   - (ENEM-2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por uma bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população: $p(t) = 40.2^{3t}$ em que t é o tempo, em hora, $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias. Em relação à quantidade de bactérias, em 20 minutos,a população será:

   a) reduzida a um terço.

   b) reduzida à metade.

   c) reduzida a dois terços.

   d) duplicada.

   e) triplicada.

   Esta questão pode ser resolvida algebricamente da seguinte forma:

   Transformamos t= 20 min em $t = \frac{1}{3}$, pois t é dado em horas.

   Substituindo na expressão da função $t = \frac{1}{3}$, temos:

$$p(t) = 40.2^{3\frac{1}{3}}$$

$$p\left(t\right) = 40.2^{1}$$

$$p\left(t\right) = 40.2$$

$$p\left(t\right) = 80$$

   Como a população inicial t = 0, foi de 40, em milhares de bactérias, concluímos que a população dobrou em 20 minutos. Esta constatação pode ser feita através da construção do gráfico através do sofware Geogebra.

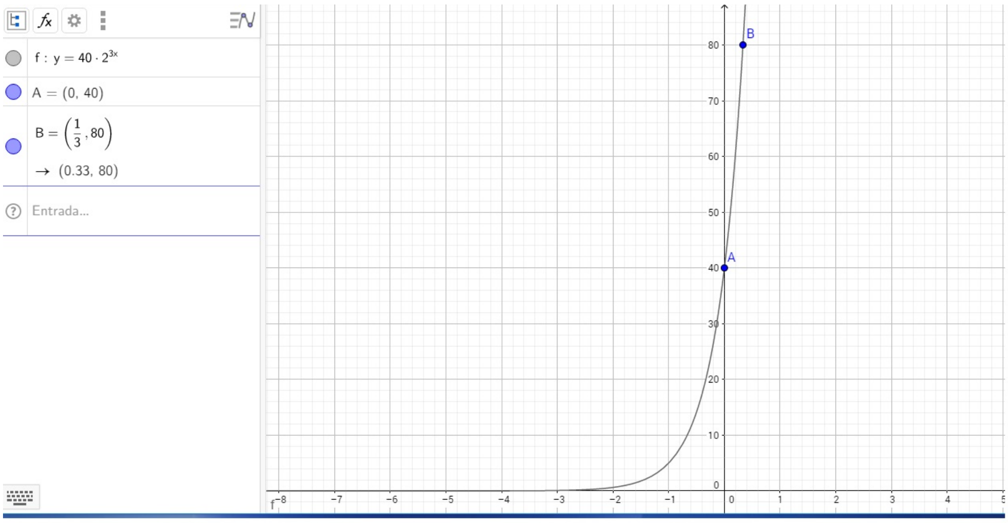

Figura 31 – Gráfico - Atividade ENEM/2016

2. Na química podemos observar a desintegração e decomposição de determinadas substâncias de forma exponencial. No exercício seguinte temos a aplicação da desintegração de uma substância radioativa na função exponencial.

   - (UNIFOR-CE) Certa substância radioativa de massa M_o (no instante t=0) se desintegra (perde massa) ao longo do tempo. Em cada instante $t \geq 0$ em segundos, a massa $M(t)$ da subtância restante é dada por $M\,(t) = M_o.3^{-2t}$. O tempo transcorrido, em segundos, para que a massa desintegrada da substância seja dois terços da massa inicial M_o é:

   a) 0,5

   b) 1

   c) 1,5

   d) 2

   e) 4

   Para resolver este problema temos que observar que a função dada representa a massa restante, sendo assim, como o problema deseja que a massa desintegrada seja equilavente a $\frac{2}{3}$ da massa incial, devemos fazer $M(t) = \frac{1}{3}M_o$, sendo assim teremos:

$$M(t) = M_o.3^{-2t}$$

$$\tfrac{1}{3}M_o = M_o.3^{-2t}, \text{ dividindo os membros da equação por } M_o$$

$$\tfrac{1}{3} = 3^{-2t}$$

$$\tfrac{1}{3} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2t}, \text{ dessa forma, comparando os expoentes temos:}$$

$$1 = 2t, \text{ temos que } t = 0,5$$

3. Na matemátca financeira, observamos que a fórmula dos juros compostos se dá por uma função exponencial, pois a variável que é o tempo está localizada no expoente. A análise do crescimento do montante aplicada aos juros compostos tem uma representação gráfica referente a curva de uma função exponencial.

   - Calcular o montante de um capital de $10.000,00$ aplicado durante 4 anos à taxa de 12% ao ano.

     A fórmula para obter o motante nos juros compostos é: $M(n) = C.(1+i)^n$, em que, n representa o tempo, C o capital investido, i a taxa e $M(n)$ o montante.

     Substituindo os dados na função, temos:

$$M(4) = 100000.(1+0,12)^4$$
$$M(4) = 100000.(1,12)^4$$
$$M(4) = 100000.1,57352$$
$$M(4) = 15735,20$$

Vamos observar graficamente a representação desta função:

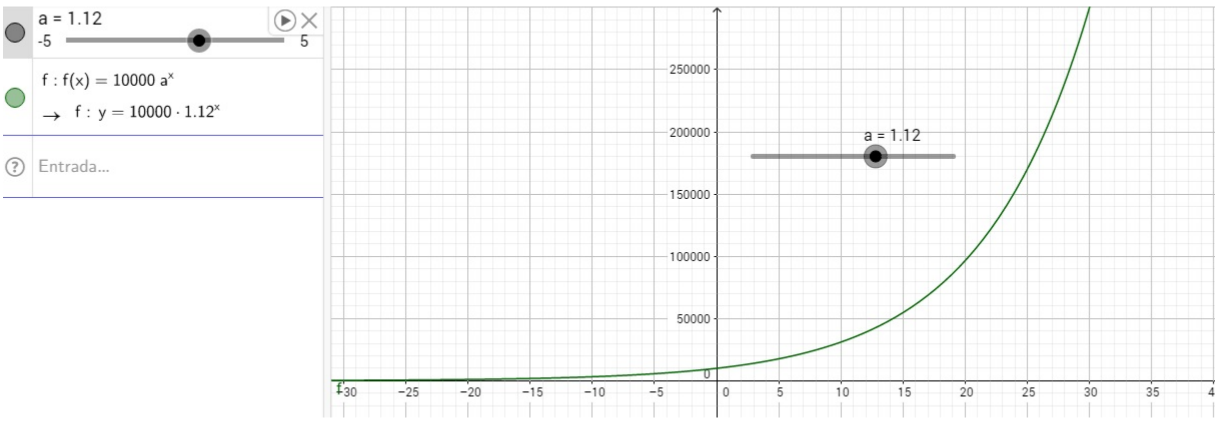

Figura 32 – Gráfico (3)

4.2.2 Crescimento e Decrescimento da Função Exponencial

A função exponencial $f(x) = a^x$, pode ser classificada como crescente ou decrescente. A base da potência é o termo que define o crescimento ou decrescimento da função.

A função $f(x) = a^x$ será crescente quando a base da potenciação for maior que 1, como no exemplo a seguir:

$$f\left(x\right)=2^{x}$$

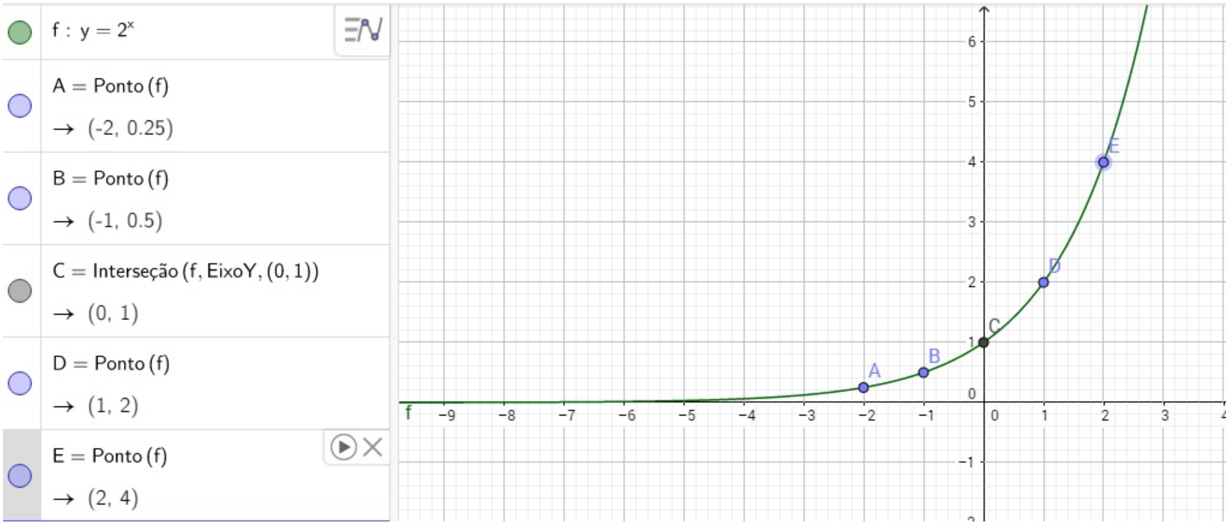

Figura 33 – Gráfico Função Crescente

Observando o gráfico temos que se $x^{'}<x^{''}$ então $f\left(x^{'}\right)<f\left(x^{''}\right)$. Além disso, podemos observar outra característstca em que o gráfico intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0,1)$, isso devido ao fato do expoente zero, em qualquer base, gerar o resultado igual a 1. Uma característica presente nas funções na forma $f(x)=a^{x}$, é o fato de que o gráfico não intercepta o eixo das abscissas, pois não há como uma base positiva gerar um resultado negativo ou igual a zero.

A função $f(x)=a^{x}$ será decrescente a base da potenciação for maior que 0 e menor que 1, como no exemplo a seguir:

$$f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

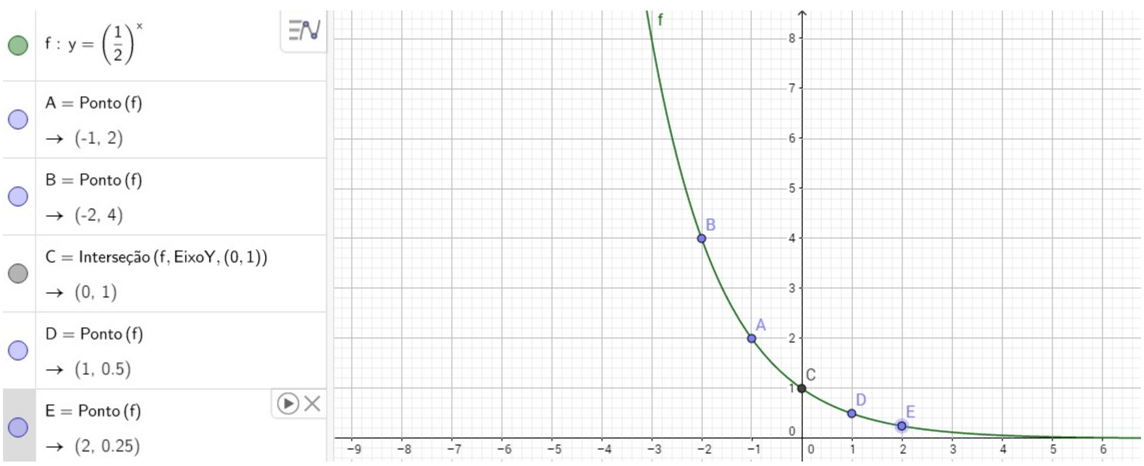

Figura 34 – Gráfico Função Decerescente

Observando o gráfico temos que se $x^{'} < x^{''}$ então $f\left(x^{'}\right) > f\left(x^{''}\right)$. A função exponencial crescente e decrescente apresentam características semelhantes, como o fato de ambas interceptarem o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$ e que não interceptam o eixo das abscissas.

4.3 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

4.3.1 Logaritmos

Definição: Sejam a e b números reais positivos, com $a \neq 1$. Definimos como logarítmo de b na base a o expoente real x que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b.

De acordo com a definição, temos: $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Os logaritmos surgiram como instrumento de cálculo, realizando simplificações, uma vez que transfomavam operações de multiplicação e divisão em simples adições e subtrações. Os logaritmos surgiram a partir de estudos do matemático Jonh Napier $(1550 - 1617)$, com a publicação da obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.* Napier baseou-se na associação de termos de uma progressão geométrica $(b, b^2, b^3, b^4, ..., b^n, ...)$ aos termos de uma progressão aritmética $(1, 2, 3, 4, ..., n, ...)$ em que o produto de dois termos da progressão geométrica $b^m.b^p$, está associados a soma $m + p$ da progressão aritmética. Temos, por exemplo:

Progressão Aritmética (PA)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Progressão Geométrica (PG)

2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048 4096 8192 16394

Para efetuar, por exemplo, 256 x 32, basta observar que o 256 está associado ao número 8 da PA e que o número 32 está associado ao número 5 da PA, desta forma, a soma de 8+5 resulta em 13 que está asssociado ao número 8192 da PG, que corresponde a 256 x 32.

Desta forma, para que os termos da PG estivessem bem próximos, afim de que as lacunas entre os termos fossem preenchidas, evitando assim margens de erros muito grandes, Jonh Napier escolheu para a razão o termo b em que $b = 1 - \frac{1}{10^7}$ que torna este valor igual a 0,9999..., valor bem próximo de 1. Para evitar os decimais, Napier multiplicava cada potência por 10^7. Sendo assim, dado $N = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, onde L era o logaritmo do número N.

Anteriormente se ensinava a fazer cálculos utilizando logaritmos em escolas de nível médio e superior, sendo utilizadas as tábuas de logaritmos. Com a evolução tecnológica e o acesso com maior facilidade as calculadoras, o uso das tábuas de logarítmos foram abandonadas. Por outro lado, as funções logarítmicas continuam tendo uma grande importância em diversas áreas, como da química, biologia, geografia, matemática financeira, por exemplo.

Retomando a definição $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, é necessário que $a > 0$ para manter a existência do termo a^x para $x \in \mathbb{R}$, e ainda o termo a tem que ser diferente de zero, pois caso ao contrário teríamos $1^x = b$, o que tornaria b sempre igual a zero. Esta definição de logaritmos nos reflete algumas consequências.

4.3.2 Consequências da definição de logaritmo

(i) Dado $log_a a$, temos que:

$$log_a a = x$$
$$a^x = a, \text{ desta forma, } x = 1, \text{ sendo assim, } log_a a = 1$$

(ii) Dado $log_a 1$, temos que:

$$log_a 1 = x$$
$$a^x = 1$$
$$a^x = a^0, \text{ desta forma, } x = 0, \text{ sendo assim } log_a 1 = 0$$

(iii) Dado $log_a a^k$, temos que:

$$log_a a^k = x$$
$$a^x = a^k, \text{ desta forma, } x = k, \text{ sendo assim, } log_a a^k = k$$

(iv) Dado $a^{log_a b}$, temos que:

Consideremos que $a^{log_a b} = x$ (1), que $log_b a = y$ (2).

De (2), temos como consequência da definição de logaritmos que $a^y = b$ (3).

Substituindo (2) em (1), obtemos $a^y = x$ (4).

Igualando as relações (3) e (4), temos que $x = b$, sendo assim, $a^{log_a b} = b$

Para o cálculo de logaritmos, bem como para a análise das funções logarítmicas, se faz necessária a compreensão das propriedades operatórias dos logaritmos.

4.3.3 Propriedades operatórias dos logaritmos

(I) Logaritmo do Produto:

Devemos provar que dados a um número real positivo e diferente de 1 e ainda b e c reais positivos, então $log_a\,(b.c) = log_a b + log_a c$.

Consideremos a relação $a^b.a^c = a^{b+c}$, para b e c positivos quaisquer. Desta forma usaremos que

$$x = log_a b \text{ e } y = log_a c, \text{ logo } a^x = b \text{ e } a^y = c.$$
$$b.c = a^x.a^y$$
$$log_a\,(a^x.a^y) = log_a a^{x+y}$$

Utilizando a consequência da definição $log_a a^k = k$, temos que:

$$log_a\,(a^x.a^y) = x + y, \text{ substituindo,}$$
$$log_a\,(b.c) = log_a b + log_a c$$

Esta transformação de produto em somas foi o cálculo primordial para o desenvolvimento dos logaritmos no século XVII, tornando-se essencial para os cálculos, devido a não existência de calculadoras na época.

(II) Logaritmo do Quociente:

Devemos provar que dados a um número real positivo e diferente de 1 e b e c reais positivos, então $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$.

A demonstração desta propriedade pode ser feita de forma análoga ao logaritmo do produto pois, podemos escrever que $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a\,(b.c^{-1})$. Consideremos a relação $a^b.a^{-c} = a^{b+(-c)} = a^{b-c}$, para b e c positivos quaisquer. Sejam $x = log_a b$ e $y = log_a c$, logo $a^x = b$ e $a^y = c$.

Observe que:

$\left(\frac{b}{c}\right) = b.\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{a^x}{a^y}$, pela propriedade de potência, obtemos:

$log_a(\frac{a^x}{a^y}) = log_a a^{x-y}$

Utilizando a consequência da definição $log_a a^k = k$, temos que:

$log_a(\frac{a^x}{a^y}) = x - y$, substituindo,obtemos que:

$log_a(\frac{b}{c}) = log_a b - log_a c$

(III) Logaritmo da Potência:

Consideraremos x um número real tal que $log_ab = x$, assim $a^x = b$.

$$log_ab^n = log_a\left(a^x\right)^n$$

$$log_ab^n = log_a\left(a^{xn}\right)$$

$$log_ab^n = xn$$

Substituindo x por log_ab , temos:

$$log_ab^n = \left(log_ab\right).n$$

$$log_ab^n = n.\left(log_ab\right)$$

Desta forma, concluímos que $log_ab^n = n.log_ab$

(IV) Logaritmo de um Radical:

Devemos provar que dados a um número real positivo e diferente de 1, b real positivo e n um número real positivo, então $log_a\sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}.log_ab$

Utilizando as propriedades de potência, em que $\sqrt[n]{a} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)}$, temos que:

$log_a\sqrt[n]{b} = log_ab^{\left(\frac{1}{n}\right)}$, utilizando a propriedade de logaritmo de uma potência, concluímos que:

$log_a\sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}.log_ab$

4.3.4 Mudança de base de um Logaritmo

Consideremos a e b são números reais positivos e diferentes de 1, c um número real positivo e que x, y e z são números reais $log_bc = x$, $log_ac = y$ e $log_ab = z$, devemos provar que $log_bc = \frac{log_ac}{log_ab}$.

Observe que:

$b^x = c$, $a^y = c$ e $a^z = b$

Comparando, obtemos:

$c = a^y = b^x$, sendo assim, como $a^z = b$ então podemos afirmar que:

$c = b^x = \left(a^z\right)^x = a^{zx}$

Concluíndo, como $c = a^y = b^x$, temos que:

$a^y = a^{zx}$, logo,

$y = z.x$, e assim $x = \frac{y}{z}$

Substituindo, $log_bc = x$, $log_ac = y$ e $log_ab = z$, obtemos que:

$log_bc = \frac{log_ac}{log_ab}$

4.3.5 Cologaritmo

Sejam a e b números reais positivos e $a \neq 0$, definimos como cologaritmo do número b, sendo b em uma base a, o logaritmo do inverso de b na base a.

$colog_a b = log_a\left(\frac{1}{b}\right) = log_a b^{-1} = -log_a b$

4.3.6 Sistemas de Logaritmos Decimais

Esse sistema desenvolvido pelo matemático inglês Henry Briggs $(1561 - 1630)$ foi o primeiro a mostrar as vantagens e facilidades de trabalhar com logaritmos na base 10 como instrumento auxiliar de cálculos numéricos. Briggs foi também quem publicou a primeira tábua de logaritmos de 1 a 1000 em 1617. A representação deste logaritmo é feita na forma $log_{10}b$ ou simplesmente, $logb$.

$logb = x \Leftrightarrow b = 10^x$, sendo b um número real positivo.

4.3.7 Sistema de Logaritmo Natural

O logaritmo Natural é definido como o logaritmo de um número b real e positivo em uma base e, onde e é um número irracional e uma constante matemática, conhecida como número de Euler. O número de Euler, uma homenagem ao matemático *Leonhard Euler*, foi criado a partir do limite descrito a seguir:

$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ em que $e = 2,718281828....$

Desta forma a representação de um logaritmo Natural pode ser feita na forma $log_e b$ ou simplesmente lnb.

Existe uma certa confusão entre os termos logaritmo Natural e logaritmo Neperiano. Esta difereciação pode ser feita observando a base do logaritmo. Enquanto a base do logaritmo Natural é e, no logaritmo Neperiano, desenvolvido por John Napier, a base utilizada é $\frac{1}{e}$.

4.3.8 Função Logarítmica

A função Logarítmica é a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_a x$, em que x é um número real positivo e a é um número real positivo e diferente de zero.

4.3.9 Orientação para a construção dos gráficos da Função Logarítmica

Para construir o gráfico da função Logarítmica através do software GeoGebra temos que ir à caixa de ENTRADA e utilizar y ao invés de $f(x)$. Ao digitar o termo log, aparecerá o ícone $log(< b >, < x >)$, clicamos e onde está a letra b sustituímos pela base desejada e em seguida retiramos os símbolos $<$ e $>$ e acionamos a tecla enter do computador. Dessa forma o gráfico aparecerá automaticamente.

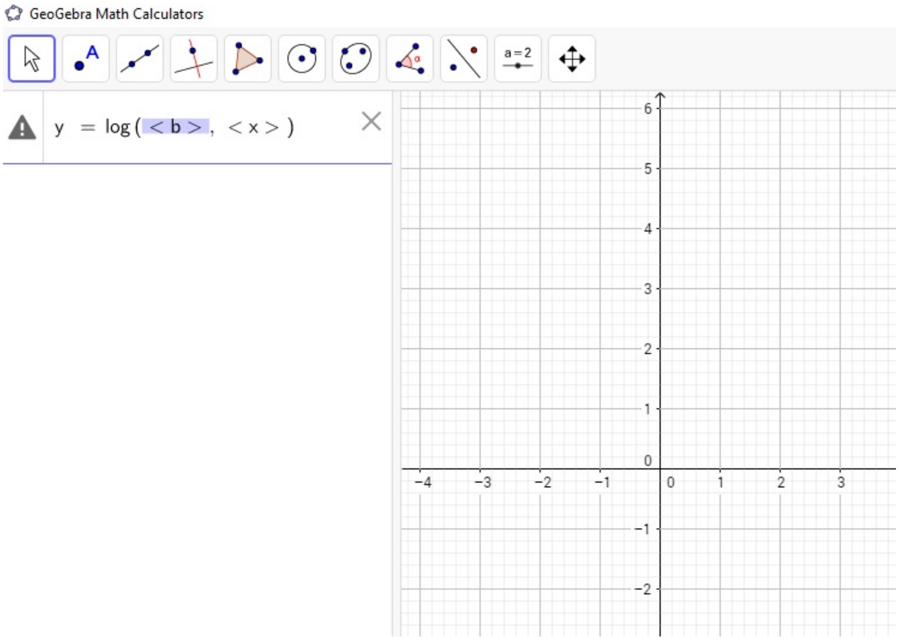

Figura 35 – Construção da Função Logarítmica

Analisando o comportamento do gráfico da função Logarítmica, temos os seguintes casos:

1º caso: Neste caso, analisaremos o comportamento de uma função crescente. Para que isto ocorra é necessário que a da função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de $f(x) = log_a x$ seja maior que 1.

Exemplo: $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_2 x$

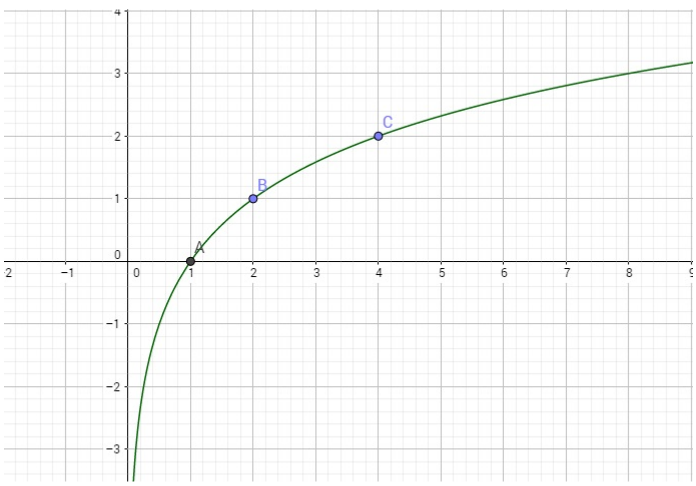

Figura 36 – Exemplo Função Logarítmica Crescente

2º caso: Neste caso, analisaremos o comportamento de uma função decrescente. Para que isto ocorra é necessário que a da função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de $f(x) = log_a x$ seja maior que 0 e menor que 1.

Exemplo: $f : \mathbb{R}_{+}^{*} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_{\frac{1}{2}}x$

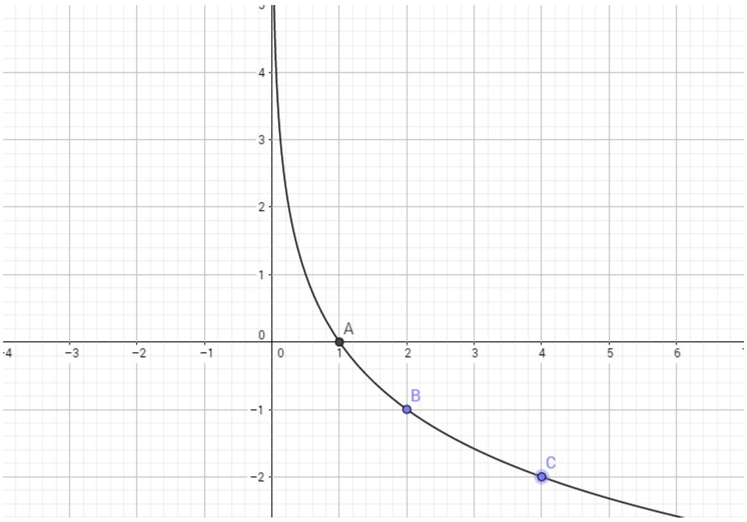

Figura 37 – Exemplo Função Logarítmica Decrescente

A partir destes gráficos podemos fazer algumas observações sobre os gráficos da função Logarítmica:

(I) A função é injetora pois cada uma das imagens corresponde a um único domínio.

(II) É uma função sobrejetora, pois a imagem é igual ao contradomínio, Im = CD = $\mathbb{R}$. Desta forma, concluímos que a função é bijetora, o que faz com que a função admita a função inversa.

(III) A função está toda à direita do eixo das ordenadas pois o domínio da função é dado por D = $\mathbb{R}_{+}^{*}$. O eixo das ordenadas passa a ser assíntota desta curva, pois a curva aproxima-se infinitamente do eixo das ordenadas porém não o toca.

(IV) O gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$.

4.3.10 Relação entre Função Exponencial e Função Logarítmica

Como analisado anteriormente, a função Logarítmica possui função inversa que é a função Exponencial. Se representarmos os respectivos gráficos no mesmo plano cartesiano, observaremos que os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

1º caso: Consideremos como exemplo as seguintes funções:

$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$ e $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_2 x$

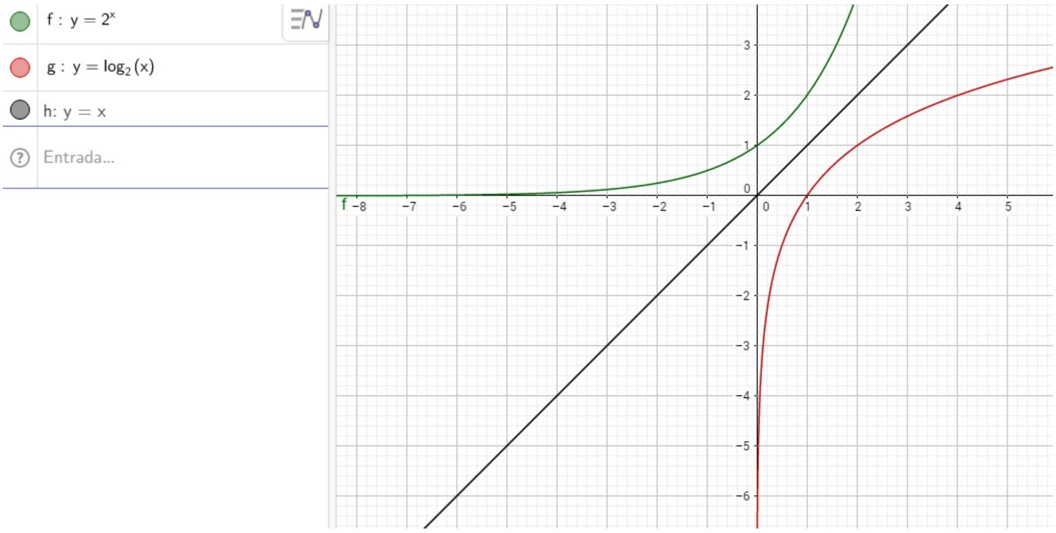

Figura 38 – Exemplo Funções Exponencial e Logarítmica Crescentes

2º caso: Consideremos como exemplo as seguintes funções:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$.

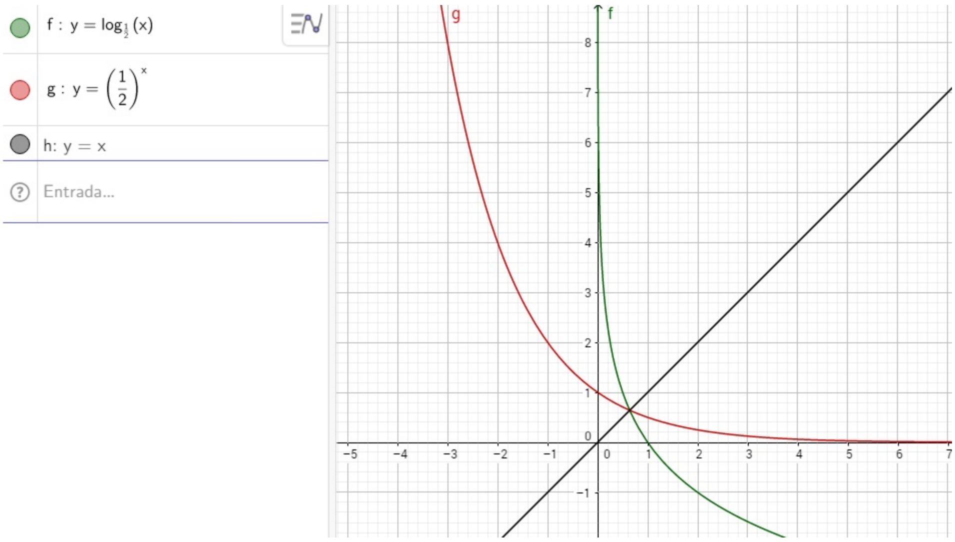

Figura 39 – Exemplo Funções Exponencial e Logarítmica Decrescentes

4.3.11 Aplicação do software GeoGebra em problemas de funções Logarítmicas

- ATIVIDADE 1- (UNICAMP-SP) As populações de duas cidades, A e B, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = log_8(1+t)^6$ e $B(t) = log_2(4t+4)$, em que a variável t representa o tempo em anos.

  a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes $t = 1$ e $t = 7$?

  b) Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a outra. Determine o valor mínimo desse instante t e especifique a cidade cuja a população é maior a partir desse instante.

  Resolvendo algebricamente, temos:

  a)

$$A(t) = log_8(1+t)^6$$

$$A(1) = log_8(1+1)^6$$

$$A(1) = log_8 2^6 = x$$

$$8^x = 2^6$$

$$2^{3x} = 2^6$$

$A(1) = 2$, ou seja, 2000 habitantes.

$$A(7) = log_8(1+7)^6$$

$$A(7) = log_8(8)^6$$

$$A(7) = 6.log_8 8$$

$A(7) = 6$, ou seja, 6000 habitantes.

$$B(t) = log_2(4t+4)$$

$$B(1) = log_2(4.1+4)$$

$$B(1) = log_2 8$$

$$B(1) = log_2 2^3$$

$$B(1) = 3.log_2 2$$

$B(1) = 3$, ou seja, 3000 habitantes.

$$B(7) = log_2(4.7+4)$$

$$B(7) = log_2 32$$

$$B(7) = log_2 2^5$$

$$B(7) = 5.log_2 2$$

$B(7) = 5$, ou seja, 5000 habitantes

b) Inicialmente calcularemos o ponto em que a população dos dois países são iguais. Para isto, faremos $A(t) = B(t)$

$$log_8(1+t)^6 = log_2(4t+4). \text{ Igualando as bases dos logaritmos teremos:}$$

$$\frac{log_2(1+t)^6}{log_2 8} = log_2(4t+4)$$

$$\frac{log_2(1+t)^6}{3} = log_2(4t+4)$$

$$log_2\,(1+t)^6 = 3.log_2(4t+4)$$

$$log_2\,(1+t)^6 = 3.log_2 4(t+1)$$

$$log_2\,(1+t)^6 = 3.(log_2 4 + log_2(t+1))$$

$$log_2\,(1+t)^6 = 3.(2 + log_2(t+1))$$

$$6.log_2\,(1+t) = 6 + 3log_2(t+1))$$

$$log_2\,(1+t) = 2$$

$$1+t = 4$$

$$t = 3$$

Concluíndo, temos que as populações se igualam no tempo igual a 3 anos. Analisando os resultados do item a, no tempo igual a 1 obtivemos os $A(1) = 2000$ e $B(1) = 3000$, enquanto no tempo igual a 7, após o tempo de encontro das duas funções, obtivemos $A(7) = 6000$ e $B(7) = 5000$. Desta forma, temos que a função $A(t)$ cresce mais que a $B(t)$ após o valor mínimo de $t = 3$ anos.

Analisando graficamente este exercício, temos:

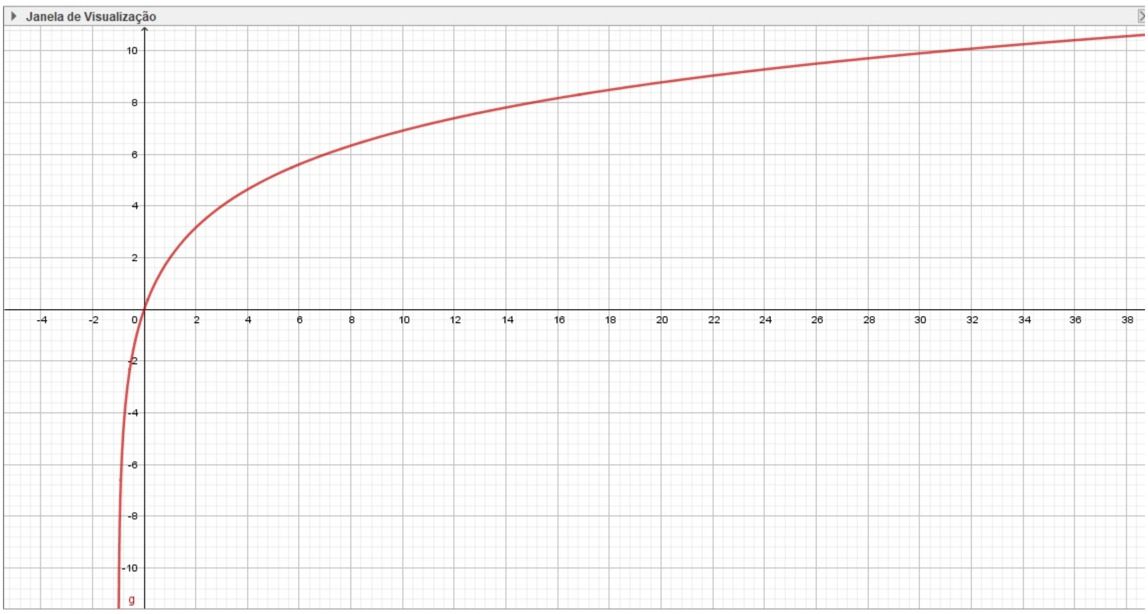

Figura 40 – Atividade 1 - Função $A(t)$

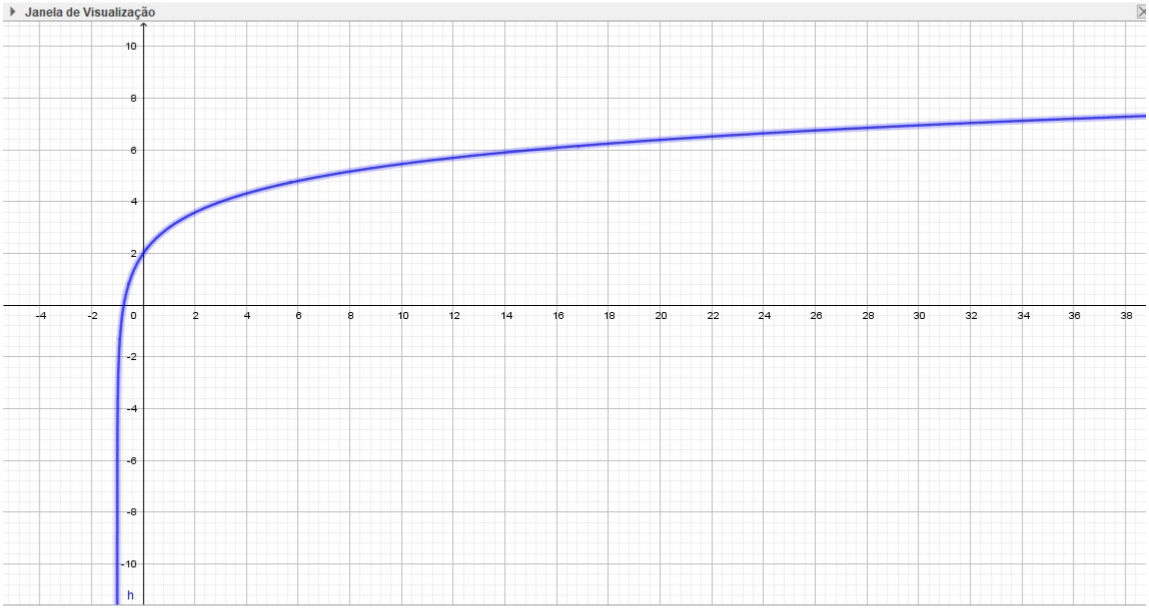

Figura 41 – Atividade 1 - Função $B(t)$

- ATIVIDADE 2- (UNESP - adaptado) O altímetro dos aviões é um instrumento que mede a pressão atmosférica e transfoma esse resultado em altitude. Suponha que a altitude h acima do nível do mar, em quilômetros, detectada pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica p, em atm, por $h(p) = 20.log(\frac{1}{p})$. Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,4 atm. Considerando a aproximação $log2 = 0,3$, determine a altitude h do avião nesse instante, em quilômetros.

  Resolvendo algebricamente, temos:

$$h(p) = 20.log(\tfrac{1}{p})$$
$$h(0,4) = 20.log(\tfrac{1}{0,4})$$
$$h(0,4) = 20.log(\tfrac{10}{4})$$
$$h(0,4) = 20.(log10 - log4)$$
$$h(0,4) = 20.(1 - log2^2)$$
$$h(0,4) = 20.(1 - 2.log2)$$
$$h(0,4) = 20.(1 - 2.0,3)$$
$$h(0,4) = 20.(1 - 0,6)$$
$$h(0,4) = 20.0,4$$
$$h(0,4) = 8km$$

Analisando o gráfico desta função, temos:

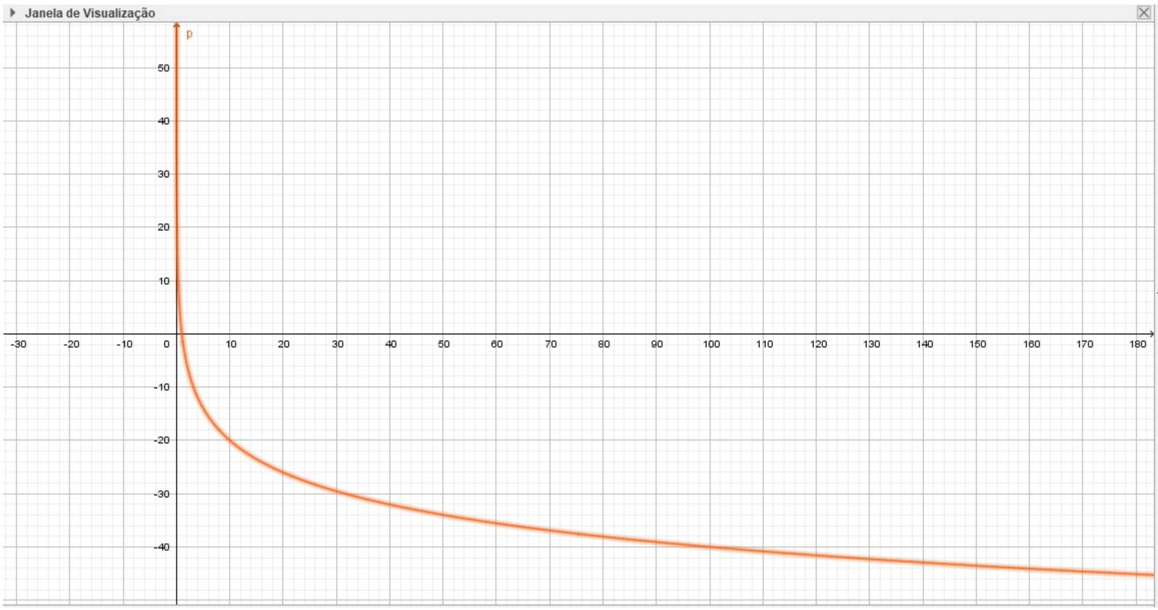

Figura 42 – Atividade 2 - Função $h(p)$

- ATIVIDADE 3- (ENEM) A escala e Magnitude de Momento (abreviadas como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substtitui a Escala Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_o se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}.log M_o$$

Onde M_o é o momento sísmico (usualmente estimado a partir de registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja a unidade é o dina.cm. O terremoto Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$.

U.S GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes. Disponível em:<http://earthquake.usgs.gov>Acesso em: 1 maio 2010(Adaptação).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_o do terremoto Kobe(em dina.cm)?

$M_w = -10,7 + \frac{2}{3}.logM_o$

$7,3 = -10,7 + \frac{2}{3}.logM_o$

$7,3 + 10,7 = \frac{2}{3}.logM_o$

$18 = \frac{2}{3}.logM_o$

$18.\frac{3}{2} = logM_o$

$27 = logM_o$

$M_o = 10^{27}$

Analisando o gráfico desta função, temos:

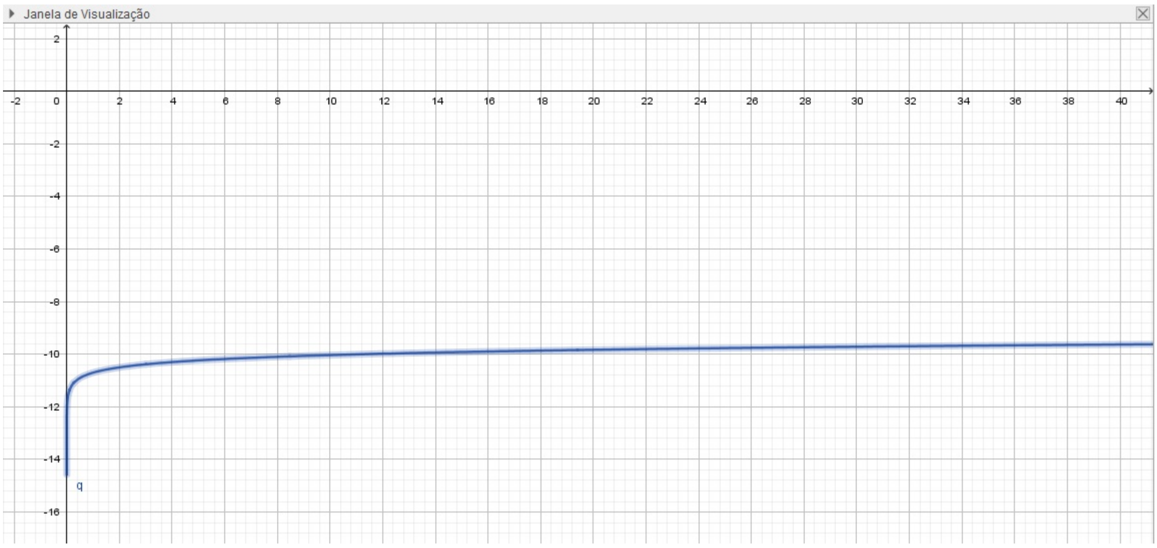

Figura 43 – Atividade 3 - Função $M(w)$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É inegável que a presença das tecnologias no mundo contemporâneo. Os softwares e aplicativos foram desenvolvidas com finalidade de auxiliar, agilizar e facilitar a vida das pessoas. Desde de um simples uso de coletivo urbano até mesmo compras sem sair de casa, as tecnologias de informação tornaram a vida das pessoas mais dinâmica e mais informatizada.

Por esta perspectiva, a relação ensino aprendizagem não pode fechar os olhos para o mundo moderno, e sendo assim, a presença das tecnologias no ensino motivou a investigação desta pesquisa.

Para iniciarmos a pesquisa, procuramos referências sobre a questão do uso das tecnologias no ensino, analisando sobre a importância e a forma de abordagem destas tecnologias em sala de aula. Após esta abordagem, concluímos que é possível o uso e que pode sim contribuir para o processo de ensino aprendizagem.

A escolha do tema se fez através da observação em sala de aula. Durante vários anos lecionando para alunos da Educação Básica, percebemos a dificuldade da correlação e entre as funções, indicadas por suas leis de formação e suas representações gráficas. Partindo desta observação, analisamos a importância de abordamos as funções quadráticas, exponenciais e logarítmicas através de um software.

Após pesquisarmos sobre softwares que possibilitariam a utilização em sala de aula, optamos pelo software GeoGebra, pois este recurso tecnológico oferece as ferramentas necessárias para a sua aplicação além de ter sua versão para smartphones.

O estudo desenvolvido das funções, possibilitou a associarmos a teoria a exemplos construídos através do GeoGebra, criando a possibilidade do aluno visualizar e construir um raciocínio gráfico das leis de formação e características de cada uma das funções.

O desenvolvimento desta pesquisa nos fez refletir sobre a importância do professor estar atualizado e a par das possibilidades de metodologia de ensino. O uso das tecnologias é importante, porém a presença do professor como elo de ligação para o conhecimento é essencial.

REFERÊNCIAS

[1] BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Curso de Matemática*, São Paulo: Moderna, 1998. V. Único.

[2] BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; ZULATTO, R. B. A. *Modelagem e EaDonline: o Centro Virtual de Modelagem.* Educação a Distância Online. Belo Horizonte: Autêntica, 2008

[3] DANTE, L. R. *Matemática* Volume Único, 1 ed. São Paulo: Ática, 2005. V. Único.

[4] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria Analítica*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[5] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM,2013.

[6] MALTEMPI, Marcus Vinícius; JAVARONI, Sueli Liberatti; BORBA, Marcelo de Carvalho. *Calculadoras, Computadores e Internet em Educação Matemática: dezoito anos de pesquisa*. Bolema: Boletim de Educação Matemática. v. 25, n. 41, dez., 2008. 43-72.

[7] PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 1997.

[8] ZUCHI, I. *A integração de ambientes tecnológicos no ensino: uma perspectiva instrumental e colaborativa*. In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian. (Org.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 1996.

[9] <http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/a-informatica-no-ensino-matematica.htm> Acesso em 11 março de 2018.

[10] <http://pt.scribd.com/doc/17380953/GeoGebra-Aplicacoes-ao-Ensino-da-Matematica> Acesso em 11 março de 2018.

[11] <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em 11 março de 2018.

[12] <https://www.ime.usp.br/ martha/numeroE.pdf> Acesso em 08 maio de 2018.

ANEXO A – Parâmetros Curriculares Nacionais: Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática Representação e Comunicação

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
- Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Produzir textos matemáticos adequados.
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho. Investigação e compreensão
- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes. Contextualização sociocultural.
- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.

- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.