Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Universidade Federal do ABC

PROFMAT

DENIS MARTINS

ASPECTOS LÓGICOS DA AXIOMÁTICA DA GEOMETRIA PLANA

Santo André, 2018

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

DENIS MARTINS

ASPECTOS LÓGICOS DA AXIOMÁTICA DA GEOMETRIA PLANA

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DENIS MARTINS, E ORIENTADA PELO PROF. DR. VINICIUS CIFÚ LOPES.

SANTO ANDRÉ, 2018

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Martins, Denis
Aspectos lógicos da axiomática da geometria plana / Denis Martins. — 2018.

67 fls. : il.

Orientador: Vinicius Cifú Lopes

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, SÃO PAULO, 2018.

1. Geometria. 2. Lógica. I. Lopes, Vinicius Cifú. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2018. III. Título.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 28 **de** fevereiro **de 20**18.

Assinatura do autor: ______________________

Assinatura do orientador: ______________________

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

RIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal do ABC
de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
acional
tados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
) · Fone: (11) 4996-0017
.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Denis Martins, realizada em 10 de janeiro de 2018:

Prof.(a) Dr.(a) **Vinicius Cifú Lopes** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Ricardo Bianconi** (Universidade de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Eduardo Guéron** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Hugo Luiz Mariano** (Universidade de São Paulo) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Daniel Miranda Machado** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Universidade Federal do ABC

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Dedico este trabalho a minha esposa **Natália** e aos bons amigos que esse mestrado me proporcionou.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha esposa Natália Mroczinski Miele, por todo amor, paciência, companheirismo e compreensão. Não só está sempre ao meu lado, como faz cada momento mais feliz. Sem você tudo seria mais difícil. Amo você!

Agradeço a minha família Paula Martins, Mario Eduardo e Heidi Martins Matielo; meus avós Maria Helena, Swami, Leônia e Roque; meus tios Maurício, Regiane, Milena, Cláudia, Armando, Celso, Regina e Claúdio e meus sogros Paulo e Ana; os quais me deram base para que tudo isso fosse possível. Deram-me apoio, suporte e tentaram me mostrar o caminho certo quando algo não caminhava bem.

Agradeço muito aos meus colegas de mestrado e de profissão Ana Claudya, Andressa Lima, Carlos Oliveira, Diego Cosis, Eloy Nicotera, Felipe Fugita, Giovanna Vizzotto, Hugo Fulone, Michel Gaspar, Tiago Dias e William Balla que me ajudaram, incentivaram e principalmente trouxeram mais alegria a essa fase.

Agradeço a cada um dos professores que tive no PROFMAT. Todos muito gentis e compreensíveis as dificuldades de nossa turma, principalmente com relação a disponibilidade de horários, além de nos ensinar o conteúdo com maestria, paciência e empatia.

Agradeço a banca pela disponibilidade de participar e pelas contribuições.

Por fim, quero agradecer ao Dr. Vinicius Cifú Lopes por ter me orientado atenciosamente com muito conhecimento da área, apesar da minha demora para desenvolver o trabalho.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

RESUMO

Esse trabalho apresenta o desenvolvimento do método axiomático a partir de Euclides e sua obra os *Elementos*. Apresenta as discussões sobre eventuais erros lógicos, sobre o postulado das paralelas e como essa reflexão levou matemáticos a chegarem nas geometrias não euclidianas e independência de axiomas. A consolidação do método axiomático na matemática vem com David Hilbert e sua magistral obra *Fundamentos de Geometria*, a qual nos deu suporte para elaborar uma nova axiomática para a geometria euclidiana plana, mais moderna e sem apresentar erros lógicos cometidos por Euclides. Ao formalizar tais axiomas com uma linguagem de primeira ordem, deparamo-nos com alguns problemas com os axiomas de continuidade, que não são formalizáveis em primeira ordem. Por fim, apresentamos um modelo para a geometria euclidiana e um modelo para uma geometria não euclidiana.

Palavras-chave: geometria, postulado, paralelas, Euclides, Hilbert, axioma

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

ABSTRACT

This study presents the development of the axiomatic method based on Euclides and his work Elements. It discusses possible logical errors, the postulate of parallels and how those led mathematicians to conceive non-euclidean geometries and the independence of axioms. The consolidation of the axiomatic method in mathematics is attributed to David Hilbert and his magistral work Foundations of Geometry. It established a new axiomatic for the plane euclidean geometry, more modern and without logical errors as seen in Euclid's work. By formalizing such axioms in a first order language, we find issues with the continuity axioms as they are not formalizable in that order. Lastly, we present a model for the euclidean geometry and another for the non-euclidean geometry.

Keywords: geometry, postulate, parallels, Euclid, Hilbert, axiom

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

CONTEÚDO

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

INTRODUÇÃO

Em algum momento da vida de um estudante de matemática, ele tem contato com a história sobre os postulados de Euclides. Nesse primeiro contato, aprende-se que Euclides organizou toda a geometria plana partindo de apenas 5 postulados, os quais serviram como argumento para demonstrar 465 proposições. Esse fato já torna o estudo interessante e enche os olhos dos mais curiosos e amantes de geometria, mas a história não pára por aí. Aprende-se também que, por cerca de dois mil anos essa obra foi altamante estudada e analisada. Estudiosos posteriores a Euclides desconfiaram que o 5º postulado não precisava ser de fato um postulado, ou seja, que poderia ser demonstrado através dos outros quatro, tornando-o uma proposição e diminuindo para apenas 4 postulados. Passaram suas vidas tentando tal demonstração, mas todas elas falharam. Isso desperta ainda mais o interesse do estudante: "Dois mil anos? Quem será que conseguiu demonstrar?". E o desfecho dessa história é ainda mais curioso. Ninguém conseguiu demonstrar! Dois mil anos depois demonstrou-se que é impossível demonstrar. Isso, provavelmente, deixa a cabeça do estudante um pouco confusa, mas desperta ainda mais a curiosidade. "Como? Como provar que é impossível de provar?". Essa confusão se deve ao fato de que esse estudante ainda não teve um contato significativo com a lógica matemática. O presente trabalho contará melhor o desenrolar dessa história e apresentará também uma axiomatização mais moderna, corrigindo algumas falhas lógicas cometidas por Euclides.

O primeiro capítulo trata da lógica de primeira ordem e será apresentado de forma a dar suporte lógico ao desenvolvimento dos outros capítulos. Primeiramente, apresentaremos a *sintaxe*, que trata dos símbolos utilizados e da regra de formação das fórmulas. A seguir, apresentaremos a *semântica*, que trata de como interpretar e validar as fórmulas da linguagem em um dado domínio. Apresentaremos também os axiomas lógicos e não lógicos comuns a todas as linguagens de primeira ordem. Por fim, apresentaremos alguns teoremas importantes da lógica de primeira ordem, como *Teorema da Dedução*, *Teorema da Correção*, *Teorema da Completude* e *Teorema da Compacidade*. Já nesse capítulo, aproveitando as definições e teoremas, apresentamos a discussão sobre independência de axiomas de uma teoria.

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

[illegible]sentando uma breve contextualização histórica de como a geometria se desenvolveu até chegar a Euclides. Ao chegar em Euclides, apresentamos um pouco de sua história, sua brilhante obra os *Elementos*, a discussão a respeito do postulado das paralelas e o que isso significou para o desenvolvimento da matemática. Após dois mil anos de profunda análise, algumas falhas lógicas na obra de Euclides são reveladas. O método axiomático ganha força, são descobertas as geometrias não euclidianas e novas tentativas de axiomatização aparecem. Hilbert em sua magistral obra *Fundamentos de Geometria* apresenta uma nova axiomática para a geometria plana e espacial.

Ainda no segundo capítulo, baseado na obra de Hilbert, de forma informal do ponto de vista da lógica, apresentamos uma axiomatização da geometria euclidiana plana, divididos em axiomas de *incidência*, *ordem*, *congruência*, *paralelas* e *continuidade*. Para finalizar o capítulo, fizemos uma breve apresentação de um modelo não euclidiano, o Disco de Klein.

No terceiro capítulo, utilizando as definições feitas no primeiro capítulo, apresentamos uma linguagem de primeira ordem para a geometria plana e apresentamos uma sentença dessa linguagem para cada axioma apresentado no segundo capítulo. Porém, deparamo-nos com problemas ao formalizar os axiomas de continuidade. O axioma de continuidade 1 não é formalizável em primeira ordem, por não haver quantificadores para relações, funções e constantes, apenas para variáveis. É feita uma demonstração do porquê esse axioma não ser formalizável em primeira ordem e logo depois, formalizamo-lo em segunda ordem. Outro problema aparece ao formalizar o axioma de continuidade 2. Por se tratar de um axioma que diz respeito aos modelos dessa teoria, é impossível formalizar esse axioma.

No quarto capítulo, apresentamos o início da demonstração de que os axiomas de primeira ordem dessa teoria têm modelo. Para comparação, fizemos a demonstração do axioma de incidência 1 utilizando as técnicas usuais de geometria analítica e fizemos também a demonstração formal do mesmo axioma utilizando as definições de satisfação apresentadas no primeiro capítulo. Deixamos as considerações finais para um eventual futuro trabalho de alguém que possa se interessar pelo assunto.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

1

LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM

Usaremos como base desse trabalho a geometria. Para descrever relações entre o objetos do nosso domínio, a linguagem da lógica proposicional não é a mais adequada. Por exemplo, se fôssemos usar a linguagem proposional para representar "Q é um ponto do plano α , mas não é um ponto do plano β " usaríamos duas letras sentenciais diferentes para expressar ideias semelhantes. Por exemplo, A para "Q é um ponto do plano α" e B para "Q é um ponto do plano β". Teríamos então a fórmula $A \wedge \neg B$ e não estaríamos captando com esta representação o fato de que as duas frases falam sobre o mesmo ponto e a mesma relação de um ponto pertencer ou não a um plano. Outro exemplo do limite do poder de expressão da linguagem proposicional é sua incapacidade de representar instâncias de uma propriedade geral. Por exemplo, se quiséssemos representar em linguagem proposicional "Como qualquer segmento é congruente a si mesmo, então o segmento AB é congruente ao segmento AB", usaríamos letras sentenciais distintas para representar cada uma das frases. Teríamos algo da forma $P \rightarrow Q$, sem captar que a segunda frase é uma instância particular da primeira.

A linguagem de primeira ordem apresenta algumas ferramentas mais sofisticadas com relação à linguagem da lógica proposicional. Essa linguagem nos permitirá captar relações entre os indivíduos de um mesmo domínio. Poderemos também concluir particularizações e generalizações.

Usando os exemplos acima, podemos definir a propriedade "o ponto P pertence ao plano α" como Pert(P,α). Com isso, a frase "Q é um ponto do plano α , mas não é um ponto do plano β" ficaria representada como Pert(Q,α) $\wedge$ $\neg$Pert(Q,β). Para o segundo exemplo, podemos definir a propriedade "O segmento X é congruente ao segmento Y" como $Cong(X, Y)$. Com isso, a frase "Como qualquer segmento é congruente a si mesmo, então o segmento AB é congruente ao segmento AB" ficaria representada por $\forall$X $Cong(X, X) \rightarrow Cong(AB, AB)''$.

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

tem pontos que pertecem à reta AB". Esta sentença fala de uma propriedade (a de pertencer a uma reta) que vale para alguns (pelo menos um dos) indivíduos do universo sem, no entanto, falar no ponto A ou P ou Z em particular. Para expressar propriedades gerais (que valem para todos os indivíduos) ou existenciais (que valem para alguns indivíduos) de um universo são utilizados os quantificadores $\forall$ (universal) e $\exists$ (existencial), respectivamente. Estes quantificadores virão sempre seguidos de um símbolo de variável, captando, desta forma, a idéia de estarem simbolizando as palavras "para qualquer" e "para algum".

Portanto, nesse capítulo, baseado em obras como Fajardo [6] (2017), Sant'anna [12] (2003) e Mortari [10] (2001) apresentaremos o que é uma linguagem de primeira ordem e algumas de suas ferramentas, para nos dar base teórica para desenvolver os demais capítulos desse trabalho. Nesses capítulos faremos a formalização dos axiomas da geometria plana e apresentaremos uma estrutura que satisfaça tais axiomas.

1.1 LINGUAGEM

Diferentemente da lógica proposicional, a linguagem da lógica de primeira ordem não é única. Há alguns símbolos comuns a todas as linguagens e outros específicos. Por isso, quando tratamos de lógica de primeira ordem, precisamos estabelecer a linguagem à qual estamos nos referindo.

O Alfabeto de uma linguagem de primeira ordem é constituído dos seguintes símbolos:

Linguagem: Uma linguagem é uma coleção $\mathcal{L} = ((R_i)_{i \in I}, (F_j)_{j \in J}, (c_k)_{k \in K})$ onde:

- R_i é um símbolo relacional n_i-ário para todo $i \in I$;
- F_j é um símbolo funcional n_j-ário para todo $j \in J$;
- c_k é um símbolo de constante.

Variáveis: representadas pelas letras minúsculas: x, y, z, ...
Eventualmente, são indexadas pelos números naturais: x_1,x_2,x_3,... Denotaremos o conjunto das variáveis por Var.

Conectivos: $\neg$ (negação), $\rightarrow$ (condicional), $\wedge$(conjunção), $\vee$ (disjunção), $\leftrightarrow$ (bicondicional). Nesse trabalho usaremos apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ como básicos. Os outros três podem ser definidos a partir desses dois.

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

(existencial). Nesse trabalho usaremos o quantificador $\forall$ como básico. O $\exists$ pode ser definido através do $\forall$ e dos conectivos acima.

Delimitadores: Parênteses esquerdo e direito: "(" e ")".

Símbolo de igualdade: $=$.

Exemplo 1.1. A linguagem da Aritmética de Peano é dada por $\mathcal{L}_{PA} = (+, \cdot, s, 0)$, onde $+$ e $\cdot$ são símbolos funcionais binários que designam a soma e o produto, respectivamente, s é um símbolo funcional unário que designa o sucessor de um número e 0 é uma constante.

Exemplo 1.2. A linguagem dos corpos ordenados é dada por $\mathcal{L}_F = (+, \cdot, 0, 1, <)$, onde $+$ e $\cdot$ são símbolos funcionais binários que designam soma e produto, respectivamente, 0 e 1 são símbolos de constantes e $<$ é um símbolo relacional binário que designa a ordem do corpo.

Exemplo 1.3. A linguagem da Geometria Elementar de Tarski é dada por $\mathcal{L}_{GT} = (E, \equiv)$, onde E é uma relação ternária que designa "estar entre", e $\equiv$ é uma relação quaternária que designa congruência de segmentos. Essas relações também aparecem na geometria que consideraremos nesse texto.

Definição 1.1 (Termo)**.** Termos são sequências finitas de símbolos do alfabeto que seguem as seguintes regras:

- As variáveis são termos;
- As constantes são termos;
- Se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e F é um símbolo funcional n-ário, então $F(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo;
- Todos os termos têm uma das formas acima.

O conjunto dos termos será denotado por Ter.

$\dashv$

Exemplo 1.4. Se x e y são variáveis, então $x + 1$, $x \cdot y + 0$, $(0 + 1) + (1 + 0)$ são exemplos de termos de $\mathcal{L}_F$.

Definição 1.2 (Variáveis de um termo)**.** $Var(t)$ é o conjunto formado pelas variáveis de um termo.

Seja t um termo:

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$= \emptyset$;

- Se t é uma variável, $Var(t) = \{t\}$;
- Se t é da forma $F(t_1, \ldots, t_n)$ com $t_1, \ldots, t_n$ termos e F é um símbolo funcional n-ário, então $Var(t) = Var(t_1) \cup \ldots \cup Var(t_n)$.

$\dashv$

Definição 1.3 (Fórmula)**.** Fórmulas são sequências finitas de símbolos do alfabeto que seguem as seguintes regras:

- Se t_1 e t_2 são termos, então $(t_1 = t_2)$ é uma fórmula;
- Se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e R é um símbolo relacional n-ário, então $R(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula;
- Se A e B são fórmulas, então $(\neg A)$ e $(A \wedge B)$ são fórmulas. Além disso, escrevemos $t_1 \neq t_2$ para indicar $\neg(t_1 = t_2)$;
- Se A é fórmula e x é uma variável, então $(\forall x A)$ é fórmula;
- Todas as fórmulas têm uma das formas acima.

$\dashv$

Exemplo 1.5.

- $0 = 1$, $\forall x(x + y = 0)$, $(z + w = 1) \wedge \forall x(x + y = 0)$ são exemplos de fórmulas de $\mathcal{L}_{PA}$.
- $x + 1 < 0$, $0 < 1$, $x + 0 + 0 = 1$ são exemplos de fórmulas de $\mathcal{L}_F$.
- $E(x, y, z)$ e $\equiv (x, y, z, w)$ são exemplos de fórmulas de $\mathcal{L}_{GT}$. Por não ter constantes, qualquer outra fórmula dessa linguagem é combinação usando conectivos e quantificadores dessas duas fórmulas atômicas, a menos da escolha das variáveis.

Nos exemplos anteriores, nós não declaramos as variáveis x, y, z e w. Por exemplo, na fórmula "$\forall x(x + y = 0)$" fica implícito que x e y são variáveis sem precisar declará-las. Convencionaremos que isso será feito sempre que as variáveis não forem declaradas.

Definição 1.4 (Subfórmula)**.** Seja A uma $\mathcal{L}$-fórmula, definimos $Sub(A)$ o conjunto de subfórmulas de A como segue:

- Se A é da forma $t_1 = t_2$, então $Sub(A) = \{A\}$;

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

, então $Sub(A) = \{A\}$;

- Se A é da forma $B \land C$, então $Sub(A) = \{A\} \cup Sub(B) \cup Sub(C)$;
- Se A é da forma $\neg B$, então $Sub(A) = \{A\} \cup Sub(B)$;
- Se x é variável e A é da forma $\forall x B$, então $Sub(A) = \{A\} \cup Sub(B)$.

⊣

Exemplo 1.6.

- Considere a fórmula $(z + w = 1) \land \forall x(x + y = 0)$ de $\mathcal{L}_{PA}$. Suas subfórmulas são
  - $(z + w = 1) \land \forall x(x + y = 0)$;
  - $z + w = 1$;
  - $\forall x(x + y = 0)$;
  - $x + y = 0$.
- Considere a fórmula $\forall w(E(x,y,z) \land \equiv (x,y,z,w))$ de $\mathcal{L}_{GT}$. Suas subfórmulas são
  - $\forall w(E(x,y,z) \land \equiv (x,y,z,w))$;
  - $E(x,y,z) \land \equiv (x,y,z,w)$;
  - $E(x,y,z)$;
  - $\equiv (x,y,z,w)$.

Definição 1.5 (Variáveis livres de uma fórmula)**.** Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem e A uma $\mathcal{L}$-fórmula. $VL(A)$ é o conjunto formado pelas variáveis livres de uma fórmula, definido assim:

Seja A uma $\mathcal{L}$-fórmula:

- Se A é da forma $t_1 = t_2$, então $VL(A) = Var(t_1) \cup Var(t_2)$;
- Se A é da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$ com $t_1, \ldots, t_n$ termos e R é um símbolo relacional n-ário, então $VL(A) = Var(t_1) \cup \ldots \cup Var(t_n)$;
- Se A é da forma $B \land C$, então $VL(A) = VL(B) \cup VL(C)$;
- Se A é da forma $\neg B$, então $VL(A) = VL(B)$;
- Se A é da forma $\forall x B$, então $VL(A) = VL(B) \setminus \{x\}$.

⊣

Exemplo 1.7.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$) \wedge (y+0=y))$ de $\mathcal{L}_{PA}$, y é a única variável livre, mas só na segunda e terceira ocorrências. É fácil verificar isso usando a definição.

- Na fórmula $\forall w(B(x,y,z) \wedge \exists x \equiv (x,y,z,w))$ de $\mathcal{L}_{GT}$, x,y e z são todas as variáveis livres, no caso de x, só na primeira ocorrência.

Definição 1.6 (Sentença)**.** Se A é uma $\mathcal{L}$-fórmula e $VL(A) = \emptyset$ então dizemos que A é uma $\mathcal{L}$-sentença.

$\dashv$

Exemplo 1.8.

- A fórmula $\forall x(\forall y(x+y=0) \wedge \exists y(y+0=y))$ é uma sentença de $\mathcal{L}_{PA}$, pois não tem variáveis livres.
- A fórmula $\forall w(B(x,y,z) \wedge \exists x \equiv (x,y,z,w))$ não é uma sentença de $\mathcal{L}_{GT}$, pois x,y e z são variáveis livres.

Definição 1.7 (Substituição de variável por termo)**.** Sejam t, s termos e x variável, definimos $t|_{x=s}$ da seguinte forma:

- Se t é a variável x, então $t|_{x=s}$ é o termo s;
- Se t é a variável y distinta de x, então $t|_{x=s}$ é y;
- Se t é a constante c, então $t|_{x=s}$ é c;
- Se t é $F(t_1,\ldots,t_n)$, então $t|_{x=s}$ é $F(t_1|_{x=s},\ldots,t_n|_{x=s})$.

$\dashv$

Definição 1.8. Sejam x uma variável, t um termo e A uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem, dizemos que x **é presa em** t **para** A, se existe $B \in Sub(A)$ tal que t ocorre em B, x ocorre em t e existe uma variável v que ocorre em t tal que:

$\forall vB \in Sub(A)$ ou $\exists vB \in Sub(A)$

Caso contrário, dizemos que x **é livre em** t **para** A.

$\dashv$

Exemplo 1.9. Considere a fórmula $\forall y(0 < x+y) \wedge (1 < z+y)$ da linguagem dos corpos ordenados. Note que x é presa no termo $x+y$ nessa fórmula, pois x ocorre no termo $x+y$ e a variável y está no escopo do quantificador $\forall$ na subfórmula $\forall y(0 < x+y)$. Por outro lado, z ocorre livre para o termo $z+y$ nessa fórmula.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

...órmula, x uma variável e t um termo. Definimos $A|_{x=t}$ da seguinte forma:

- Se A é da forma $t_1 = t_2$, então $A|_{x=t}$ é $t_1|_{x=t} = t_2|_{x=t}$;
- Se A é da forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, então $A|_{x=t}$ é $R(t_1|_{x=t}, \ldots, t_n|_{x=t})$;
- Se A é da forma $B \wedge C$, então $A|_{x=t}$ é $B|_{x=t} \wedge C|_{x=t}$;
- Se A é da forma $\neg B$, então $A|_{x=t}$ é $\neg B|_{x=t}$;
- Se A é da forma $\forall y B$ com y distinta de x, então $A|_{x=t}$ é $\forall y B|_{x=t}$;
- Se A é da forma $\forall x B$, então $A|_{x=t}$ é A .

$\dashv$

Exemplo 1.10. Se A é a fórmula $s(x) = 0 \wedge \forall x(x + 0 = 0)$, se t é o termo $y + 1$, $A|_{x=t}$ é a fórmula $s(y+1) = 0 \wedge \forall x(x + 0 = 0)$.

A seguinte abreviação será útil ao longo do texto:

Definição 1.10. Se A é uma $\mathcal{L}$-fórmula e x é uma variável, escrevemos $\exists! x A$ para

$$\exists x A \wedge \forall y(A^{'}_{x=y} \to x = y)$$

em que y é uma nova variável que não ocorre em A.

$\dashv$

1.2 SEMÂNTICA

Já apresentada a linguagem de primeira ordem, apresentaremos agora como interpretar o significado das fórmulas. Precisamos, primeiro, estabelecer o universo a que se refere a linguagem. Depois, interpretamos as constantes como elementos do universo, os símbolos relacionais como relações nesse mesmo universo, e os símbolos funcionais como funções. A estrutura formada por todas essas componentes é chamada de modelo para uma linguagem de primeira ordem, e apresentaremos como determinar se uma fórmula é verdadeira ou falsa em um dado modelo.

Definição 1.11 (Estrutura)**.** Uma $\mathcal{L}$-estrutura para uma linguagem é uma quádrupla

$$\mathcal{M} = (D, (R_i^{\mathcal{M}})_{i \in I}, (F_j^{\mathcal{M}})_{j \in J}, (c_k^{\mathcal{M}})_{k \in K})$$

onde:

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

- $c_k^{\mathcal{M}} \in D$ para todo $k \in K$;
- Se R_i é um símbolo relacional n-ário, então $R_i^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$;
- Se F_j é um símbolo funcional n-ário, então $F_j^{\mathcal{M}} : D^n \to D$;

$\dashv$

O conjunto D acima é o que chamamos de *domínio* da estrutura, que é o lugar onde as variáveis assumem certos valores. Podemos pensar que essa estrutura *interpreta* todos os elementos relevantes dessa linguagem (i.e., as constantes, relações e funções), de modo bastante natural. Observe que a estrutura da linguagem é puramente sintática, não faz referência a nenhum "objeto" específico. A estrutura é o que dá sentido, ou interpretação, para essa linguagem, relativizando as variáveis, constantes, relações e funções para o seu domínio. Por isso, chamamos essa parte de semântica.

Definição 1.12 (Valoração)**.** Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura. Uma valoração para $\mathcal{M}$ é uma função qualquer $\sigma : Var \to D$, que se estende de modo único a $\sigma^* : Ter \to D$ tal que:

- Se c é símbolo de constante, então $\sigma^*(c) = c^{\mathcal{M}}$;
- Se x é variável, então $\sigma^*(x) = \sigma(x)$;
- Se $t_1, \ldots, t_n$ são termos e F é um símbolo funcional n-ário, então $\sigma^*(F(t_1, \ldots, t_n)) = F^{\mathcal{M}}(\sigma^*(t_1), \ldots, \sigma^*(t_n))$

$\dashv$

Definição 1.13 (Satisfação)**.** Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, σ uma valoração e A uma $\mathcal{L}$-fórmula. Definimos a relação de satisfação $\models$ fazendo uma recursão na complexidade de A da seguinte forma:

- Se t_1, t_2 são $\mathcal{L}$-termos e A é da forma $t_1 = t_2$, então
  $(\mathcal{M}; \sigma) \models A$ se, e somente se, $\sigma^*(t_1) = \sigma^*(t_2)$;
- Se $t_1, ..., t_n$ são $\mathcal{L}$-termos, R é um símbolo relacional n-ário e A é da forma $R(t_1, ..., t_n))$, então
  $(\mathcal{M}; \sigma) \models A$ se, e somente se, $R^{\mathcal{M}}(\sigma^*(t_1), ..., \sigma^*(t_n))$;
- Se A é da forma $\neg B$, então
  $(\mathcal{M}; \sigma) \models A$ se, e somente se, $(\mathcal{M}; \sigma) \not\models B$;
- Se A é da forma $B \wedge C$, então
  $(\mathcal{M}; \sigma) \models A$ se, e somente se, $(\mathcal{M}; \sigma) \models B$ e $(\mathcal{M}; \sigma) \models C$;

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$(\mathcal{M};\sigma) \models A$ se, e somente se, para toda valoração θ que coincide com σ exceto talvez em x, tem-se $(\mathcal{M};\theta) \models B$.

Nessas condições, dizemos que $\mathcal{M}$ satisfaz A sob a valoração σ.

$\dashv$

O seguinte lema segue imediatamente da definição de satisfação e das definições dos conectivos $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ e do quantificador $\exists$ a partir dos conectivos e quantificadores básicos.

Lema 1.14. *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, σ uma valoração e A, B $\mathcal{L}$-fórmulas. Então*

- *$(\mathcal{M},\sigma) \models A \vee B$ se, e somente se, $(\mathcal{M},\sigma) \models A$ ou $(\mathcal{M},\sigma) \models B$.*
- *$(\mathcal{M},\sigma) \models A \rightarrow B$ se, e somente se, $(\mathcal{M},\sigma) \models A$ implica $(\mathcal{M},\sigma) \models B$.*
- *$(\mathcal{M},\sigma) \models A \leftrightarrow B$ se, e somente se, $(\mathcal{M},\sigma) \models A \rightarrow B$ e $(\mathcal{M},\sigma) \models B \rightarrow A$.*
- *$(\mathcal{M},\sigma) \models \exists x A$ se, e somente se, existe uma valoração τ que coincide com σ exceto talvez em x tal que $(\mathcal{M},\tau) \models A$.*

Definição 1.15. Sejam Γ um conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e σ uma valoração, dizemos que $\mathcal{M}$ é modelo para Γ se $(\mathcal{M};\sigma) \models A$ para qualquer $A \in \Gamma$.
Notação: $(\mathcal{M};\sigma) \models \Gamma$.

$\dashv$

Definição 1.16. Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e A uma $\mathcal{L}$-fórmula, dizemos que $\mathcal{M} \models A$ se $(\mathcal{M};\sigma) \models A$; para qualquer valoração σ.

$\dashv$

Definição 1.17 (Teoria)**.** T é uma $\mathcal{L}$-teoria se T é um conjunto de $\mathcal{L}$-sentenças, chamadas axiomas não lógicos da teoria.

$\dashv$

Exemplo 1.11. Considere a linguagem $\mathcal{L}_{PA}$ da Aritmética de Peano, a teoria PA da Aritmética de Peano é composta pelos seguintes axiomas:

- $s(0) \neq 0$;
- $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$;
- se A é uma fórmula da linguagem qualquer, é um axioma:

$$A|_{x=0} \wedge \forall x(A \rightarrow A|_{x=s(x)}) \rightarrow \forall x A.$$

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

de axiomas. Isto é, para cada fórmula associamos um outro axioma da Aritmética de Peano. Note que isso significa que temos uma lista infinita de axiomas para PA.

Para o próximo exemplo, considere a linguagem $\mathcal{L}_G = (*, e)$ a linguagem da Teoria dos Grupos, onde $*$ denota a operação do grupo e e é uma constante que chamamos de "unidade". A Teoria dos Grupos é a Teoria T_G dada pelos seguintes axiomas:

- $\forall x \forall y \forall z((x * y) * z = x * (y * z))$;
- $\forall x(x * e = e * x = x)$;
- $\forall x \exists y(x * y = y * x = e)$.

Exemplo 1.12. Exemplos de grupos são o grupo aditivo $(\mathbb{Z}_n, +, 0)$, onde n é um natural qualquer ou o grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot, 1)$, onde p é primo. Isso significa que cada uma dessas estruturas satisfaz os axiomas de grupo que listamos anteriormente, para interpretações adequadas das operações e unidades. Formalmente, isso significa:

- A $\mathcal{L}_G$-estrutura $(\mathbb{Z}_n, *^{\mathbb{Z}_n}, e^{\mathbb{Z}_n})$ é um modelo para T_G, com $e^{\mathbb{Z}_n} = 0$ e $*^{\mathbb{Z}_n} = +$, a operação de soma dada pela tabela da adição em $\mathbb{Z}_n$, como vimos em Álgebra (i.e., soma módulo n).
- A $\mathcal{L}_G$-estrutura $(\mathbb{Z}_p^*, *^{\mathbb{Z}_p^*}, e^{\mathbb{Z}_p^*})$ com $e^{\mathbb{Z}_p^*} = 1$ e $*^{\mathbb{Z}_p^*} = \cdot$ é dada pela tabela da multiplicação em $\mathbb{Z}_p$.

Para ilustrar como funciona a relação de satisfação, considere a estrutura $(\mathbb{Z}_4, +, 0)$ descrita acima para $n = 4$ e a fórmula

$$\exists x(x * x = e \land x \neq e).$$

Se σ é uma valoração qualquer, vamos mostrar que

$$(\mathbb{Z}_4, \sigma) \models \exists x(x * x = e \land x \neq e).$$

Pelo Lema 1.14, deve existir τ uma valoração que coincide com σ exceto talvez em x, tal que

$$(\mathbb{Z}_4, \tau) \models x * x = e \land x \neq e.$$

A seguir, usaremos somente a Definição 1.13, de satisfação. Temos que $(\mathbb{Z}_4, \tau) \models x * x = e \land x \neq e$ se, e somente se, $(\mathbb{Z}_4, \tau) \models x * x = e$ e $(\mathbb{Z}_4, \tau) \models x \neq e$.

Além disso, $(\mathbb{Z}_4, \tau) \models x * x = e$ se, e somente se $\tau^*(x * x) = \tau^*(e)$ e $(\mathbb{Z}_4, \tau) \models x \neq e$ se, e somente se, $\tau(x) \neq \tau^*(e)$.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$+ \tau(x)$ e $\tau^*(e) = 0$. Assim, se tomarmos $\tau(x) = 2$ e $\tau(v) = \sigma(v)$ se v não é x, temos que $\tau(x) + \tau(x) = 2 + 2 = 0 = \tau^*(e)$ e $\tau(x) \neq \tau^*(e)$, como queríamos.

Lema 1.18. *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, σ e θ valorações e A uma $\mathcal{L}$-fórmula tais que $\sigma(v) = \theta(v)$ sempre que $v \in VL(A)$, então*

$$(\mathcal{M};\sigma) \models A \text{ se, e somente se, } (\mathcal{M};\theta) \models A.$$

Lema 1.19. *Sejam x uma variável que ocorre livre em A, t um termo, σ e θ valorações tais que $\sigma(v) = \theta(v)$ sempre que v é uma variável diferente de x que ocorre livre em A e $\sigma^*(t) = \theta(x)$, então*

$$(\mathcal{M};\theta) \models A \text{ se, e somente se, } (\mathcal{M};\sigma) \models A|_{x=t}.$$

1.3 SISTEMAS FORMAIS DE AXIOMAS E SINTAXE.

Axiomas lógicos são certas fórmulas escolhidas por serem válidas em qualquer estrutura, com qualquer atribuição de valores às variáveis, mas a sua característica mais importante é que codificam em si regras básicas do raciocínio lógico. A escolha não é única e depende do gosto de cada autor. A escolha feita aqui é a de um conjunto de fórmulas, a saber, os conjuntos I, II, III, IV e V a seguir, que de certo modo descrevem as propriedades de cada símbolo lógico da linguagem de primeira ordem.

I **Axiomas proposicionais.**

Os chamados axiomas proposicionais são aqueles que descrevem o comportamento dos símbolos proposicionais $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ e $\neg$.

Fixada $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem, se A, B e C são $\mathcal{L}$-fórmulas, são axiomas:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
4. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
5. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$
6. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

8. $(A \wedge B) \to B$
9. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C))$
10. $A \to (A \vee B)$
11. $B \to (A \vee B)$
12. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
13. $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$
14. $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
15. $A \leftrightarrow \neg(\neg A)$

Lema 1.20. *Se $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}$-estrutura então para cada A, B e C $\mathcal{L}$-fórmulas os 14 axiomas acima são verdadeiros em $\mathcal{M}$.*

$\mathcal{M} \models$ *Axiomas proposicionais*

Demonstração. Faremos apenas as demonstrações dos dois primeiros itens. As demais são análogas.

1. $\mathcal{M} \models A \to (B \to A)$

   Suponha que $\mathcal{M} \not\models A \to (B \to A)$. Então existe $\sigma : Var \to D$ valoração de $\mathcal{M}$ tal que $(\mathcal{M};\sigma) \not\models A \to (B \to A)$. Isto é, $(\mathcal{M};\sigma) \models A$ e $(\mathcal{M};\sigma) \not\models B \to A$. Isto é, $(\mathcal{M};\sigma) \models A$; $(\mathcal{M};\sigma) \models B$ e $(\mathcal{M};\sigma) \not\models A$. Absurdo! Portanto

$$\mathcal{M} \models A \to (B \to A).$$

2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

   Suponha que $\mathcal{M} \not\models (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$. Então existe $\sigma : Var \to D$ valoração de $\mathcal{M}$ tal que

$$(\mathcal{M},\sigma) \not\models (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)).$$

   Ou seja:

   $(\mathcal{M},\sigma) \models (A \to (B \to C))$ e $(\mathcal{M},\sigma) \not\models ((A \to B) \to (A \to C))$.

   Como $(\mathcal{M},\sigma) \not\models ((A \to B) \to (A \to C))$, então $(\mathcal{M},\sigma) \models (A \to B)$ e $(\mathcal{M},\sigma) \not\models (A \to C)$.

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$)$, então $(\mathcal{M},\sigma) \models A$ e $(\mathcal{M},\sigma) \not\models C$.

Como $(\mathcal{M},\sigma) \models (A \to B)$, então $(\mathcal{M},\sigma) \not\models A$ ou $(\mathcal{M},\sigma) \models B$.

Como $(\mathcal{M},\sigma) \models A$, então $(\mathcal{M},\sigma) \models B$.

Como $(\mathcal{M},\sigma) \models (A \to (B \to C))$, então $(\mathcal{M},\sigma) \not\models A$ ou $(\mathcal{M},\sigma) \models (B \to C)$.

Como $(\mathcal{M},\sigma) \models A$, então $(\mathcal{M},\sigma) \models (B \to C)$.

Como $(\mathcal{M},\sigma) \models (B \to C)$, então $(\mathcal{M},\sigma) \not\models B$ ou $(\mathcal{M},\sigma) \models C$. Absurdo! Pois $(\mathcal{M},\sigma) \models B$ e $(\mathcal{M},\sigma) \not\models C$.

$\square$

II **Axioma do $x = x$.**

Para cada variável x, é axioma:

$$x = x.$$

Lema 1.21. *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e x uma variável, então*

$$\mathcal{M} \models (x = x).$$

Demonstração. Suponha que não. Então existe $\sigma : Var \to D$ em $\mathcal{M}$ tal que $(\mathcal{M},\sigma) \not\models (x = x)$, ou seja, $(\mathcal{M},\sigma) \models \neg(x = x)$. Logo $\sigma(x) \neq \sigma(x)$. Absurdo! $\square$

III **Axioma do deslocamento do quantificador.**

Seja A e B $\mathcal{L}$-fórmulas e x uma variável tal que $x \notin VL(A)$, então é axioma:

$$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$$

Lema 1.22. *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, A e B $\mathcal{L}$-fórmulas e x uma variável tal que $x \notin VL(A)$ então*

$$\mathcal{M} \models \forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B).$$

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

não. Então existe $\sigma : Var \to D$ em $\mathcal{M}$ tal que:

$(\mathcal{M};\sigma) \not\models (\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B))$, isto é:

$(\mathcal{M};\sigma) \models \forall x(A \to B)$ e $(\mathcal{M};\sigma) \not\models (A \to \forall x B)$, ou seja:

$(\mathcal{M};\sigma) \models \forall x(A \to B)$; $(\mathcal{M};\sigma) \models A$ e $(\mathcal{M};\sigma) \not\models (\forall x B)$, ou seja:

$(\mathcal{M};\sigma) \models \forall x(A \to B)$; $(\mathcal{M};\sigma) \models A$ e $(\mathcal{M};\sigma) \models \neg(\forall x B)$

Como $(\mathcal{M};\sigma) \models \neg(\forall x B)$, então existe uma valoração θ tal que $\theta(v) = \sigma(v)$ sempre que v não é x e $(\mathcal{M};\theta) \models \neg B$.

Como x é não livre para A e $\theta(v) = \sigma(v)$ sempre que v não é x, então, em particular, $\theta(v) = \sigma(v)$ para todas as variáveis livres de A. Assim, pelo Teorema 1.18, $(\mathcal{M};\theta) \models A$.

Como $(\mathcal{M};\sigma) \models (\forall x(A \to B)$, então para toda $\gamma : Var \to D$ em $\mathcal{M}$ tal que $\gamma(v) = \sigma(v)$ se v não é x, $(\mathcal{M},\gamma) \models A \to B$.

Em particular: $(\mathcal{M};\theta) \models A \to B$. então
ou $(\mathcal{M};\theta) \models \neg A$ (contradição)
ou $(\mathcal{M};\theta) \models B$ (contradição). □

IV **Axioma da substituição de variável por termo.**

Sejam A uma $\mathcal{L}$-fórmula, t um termo e x uma variável livre em t para A, é axioma:

$$\forall x A \to A|_{x=t}.$$

Lema 1.23. *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, A uma $\mathcal{L}$-fórmula, t um termo e x uma variável livre em t para A, então*

$$\mathcal{M} \models \forall x A \to A|_{x=t}.$$

Demonstração. Suponha que $\mathcal{M} \not\models \forall x A \to A|_{x=t}$, isto é, existe uma valoração $\sigma : Var \to D$ tal que $(\mathcal{M};\sigma) \models \neg(\mathcal{M} \models \forall x A \to A|_{x=t})$.

Assim, $(\mathcal{M};\sigma) \models \forall x A$ e $(\mathcal{M};\sigma) \models \neg A|_{x=t}$. Ou seja, $(\mathcal{M};\theta) \models A$; $(\mathcal{M};\sigma) \models \neg A|_{x=t}$, para toda $\theta : Var \to D$ uma valoração tal que $\theta(v) = \sigma(v)$ se v não é x.

De todas as possíveis valorações θ, seja a valoração θ tal que $\theta(x) = \sigma^*(t)$.

Como x é uma variável que ocorre livre para t em A; $\theta(x) = \sigma^*(t)$ e $\theta(v) = \sigma(v)$ se v não é x, pelo teorema 1.19, temos:

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$(\mathcal{M};\sigma) \models (\mathcal{M} \models \forall x A \to A|_{x=t})$.

Contradição! ◻

V **Axioma da substituição de variáveis iguais.**

Sejam x e y variáveis, A e B são $\mathcal{L}$-fórmulas tais que B é obtida substituindo zero ou mais ocorrências livres de x por y, se também x é livre para y em A, é axioma:

$$(x = y) \to (A \to B).$$

Lema 1.24. *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, x e y variáveis, A e B são $\mathcal{L}$-fórmulas tais que B é obtida substituindo zero ou mais ocorrências livres de x por y, se também x é livre para y em A, temos:*

$$\mathcal{M} \models (x = y) \to (A \to B).$$

Demonstração. Suponha $\mathcal{M} \models (x = y)$, isto é, fixe $\sigma : Var \to D$ tal que $(\mathcal{M};\sigma) \models (x = y)$. Note que: $\sigma(x) = \sigma(y)$. Queremos provar $\mathcal{M} = (A \to B)$.

Faremos indução na complexidade de A. Mas antes precisamos da seguinte afirmação, cuja demonstração é uma indução na complexidade do termo t.

Afirmação: Sejam t e $s = t|_{x=y}$ termos. Se $\sigma(x) = \sigma(y)$, então $\sigma^*(t) = \sigma^*(s)$.

Agora a indução na complexidade de A:

- Se A é da forma $t_1 = t_2$ e B obtida substituindo x por y em algum dos termos, por exemplo, B é da forma $t_1|_{x=y} = t_2|_{x=y}$.

  Se $(\mathcal{M};\sigma) \models (t_1 = t_2)$, então $\sigma^*(t_1) = \sigma^*(t_2)$. Pela Afirmação acima, temos que $\sigma^*(t_1|_{x=y}) = \sigma^*(t_2|_{x=y})$. Ou seja, $(\mathcal{M};\sigma) \models (t_1|_{x=y} = t_2|_{x=y})$.

- Se A é da forma $A_1 \wedge A_2$ e B obtida substituindo x por y em algum dos termos, por exemplo, B é da forma $A_1|_{x=y} \wedge A_2|_{x=y}$.

  Se $(\mathcal{M};\sigma) \models (A_1 \wedge A_2)$, então $(\mathcal{M};\sigma) \models A_1$ e $(\mathcal{M};\sigma) \models A_2$.

  Com isso, $(\mathcal{M};\sigma) \models A_1|_{x=y}$ e $(\mathcal{M};\sigma) \models A_2|_{x=y}$.

  Assim, $(\mathcal{M};\sigma) \models A_1|_{x=y} \wedge A_2|_{x=y}$

- Se A é da forma $\neg A_1$. Análogo ao anterior

- Se A é da forma $\forall z A_1$ e $B = A|_{x=y}$:

  * Se z é x ou z é y então $A \to B$ é $A \to A$, que é uma tautologia.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
PDF Complete
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

é y então B é da forma $\forall z A_1|_{x=y}$.

Suponha $(\mathcal{M};\sigma) \models \forall z A_1$. Queremos mostrar que $(\mathcal{M};\sigma) \models \forall z A_1|_{x=y}$.

Seja θ uma valoração tal que $\theta(v) = \sigma(v)$ se v não é z.

Temos que $(\mathcal{M};\sigma) \models A_1$, mas $\theta(x) = \sigma(x) = \sigma(y) = \theta(y)$, Assim $\theta(x) = \theta(y)$ e pela hipótese de indução $(\mathcal{M};\theta) \models B_1$, então $(\mathcal{M};\theta) \models \forall z A_1|_{x=y}$.

□

Além dos axiomas lógicos, os sistemas formais de primeira ordem possuem também duas regras de inferência. Essas regras de inferência nos permitem deduzir teoremas de uma teoria de primeira ordem a partir dos axiomas ou de teoremas antes já provados. Denotamos estas regras por **G** (Generalização) e **MP** (Modus Ponens).

G **Generalização.**

Se A é teorema e se x é uma variável, então $\forall x A$ é teorema.

A princípio, esse axioma parece dizer que conseguimos deduzir um caso geral a partir de um caso particular. Isto é, se vale para "um" caso, então vale para "todos", o que seria obviamente errado. Mas na verdade, o que esse axioma está dizendo, é que se conseguimos provar ou validar uma fórmula sem atribuir valores específicos para suas variáveis (i.e., provar ou validar a fórmula usando variáveis *arbitrárias*), então podemos concluir as generalizações dessas fórmulas. Por exemplo, na Aritmética de Peano, conseguimos provar a fórmula $s(x) \neq 0$. Na prática, fazemos isso "fixando" x e usando os Axiomas Lógicos. Como x é arbitrário, podemos concluir $\forall x(s(x) \neq 0)$. Introduzimos esse procedimento que é rotineiro em Matemática através do Axioma da Generalização.

Lema 1.25. *Se $\mathcal{M} \models A$, então $\mathcal{M} \models \forall x A$.*

Demonstração. Se $\mathcal{M} \models A$, então $(\mathcal{M};\sigma) \models A$, para qualquer valoração σ. Seja θ uma valoração tal que $\theta(v) = \sigma(v)$ se v não é x. Com isso, $(\mathcal{M};\sigma) \models \forall x A$. □

MP **Modus Ponens.**

Se A é teorema e $A \rightarrow B$ é teorema, então B é teorema.

Lema 1.26. *Se $\mathcal{M} \models A$ e $\mathcal{M} \models A \rightarrow B$, então $\mathcal{M} \models B$.*

Demonstração. Temos $\mathcal{M} \models A$ e $\mathcal{M} \models A \rightarrow B$.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

B.

Com isso, $\mathcal{M} \models (A \wedge (\neg A \vee B))$,

$\mathcal{M} = (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B))$

Como $\mathcal{M} \not\models (A \wedge \neg A)$, temos $\mathcal{M} \models (A \wedge B)$

Logo, $\mathcal{M} \models B$. $\square$

Desenvolvidos os axiomas lógicos e não lógicos dos sistemas formais, ainda precisamos capturar a noção de prova (ou dedução) dentro do sistema formal, de modo que isto seja puramente sintático (i.e., não envolva validar as fórmulas em modelos), já que esta é uma atividade matemática básica.

Quando executamos uma prova matemática, através de um conjunto finito de passos encadeados, chegamos na afirmação que queremos. Isto é, obtemos uma cadeia de implicações de modo que a última fórmula na implicação é a fórmula que queremos e as anteriores podem ser justificadas.

Outro tipo de prova que fazemos envolve usar variáveis arbitrárias. Quando provamos sintaticamente alguma fórmula sem usar valores específicos para as variáveis desta fórmula, conseguimos concluir que a fórmula vale não importando os valores das variáveis. Isto é, vale para todas as possíveis instâncias das variáveis. Um exemplo:

Se provamos que $x + y = y + x$, usando algum conjunto de fórmulas para uma linguagem que tenha o símbolo funcional binário $+$, podemos concluir $\forall x \forall y (x + y = y + x)$.

Por conta disto, queremos também que se um conjunto de fórmulas provar uma fórmula, então este conjunto prova a generalização dela.

Capturamos essa discussão acima com a seguinte:

Definição 1.27 (Dedução formal)**.** Seja Γ um conjunto de fórmulas e A uma fórmula, dizemos que A é consequência sintática de Γ ($\Gamma \vdash A$) se existe $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ onde A_n é A e, para cada $i \leq n$ vale algum dos seguintes casos:

- A_i é axioma lógico;
- $A_i \in \Gamma$;
- existem $j, k < i$ tais que A_k é $A_j \to A_i$;
- existe $j < i$ tal que A_i é $\forall x A_j$ e $x \notin \bigcup_{B \in \Gamma} VL(B)$.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$\dashv$

Teorema 1.28 (Teorema da Dedução). *Se T é uma teoria, A é uma sentença e B é uma fórmula, então*

$$T \cup \{A\} \vdash B \text{ se, e somente se, } T \vdash A \rightarrow B.$$

Demonstração. $(\Leftarrow)$

Temos $T \cup \{A\} \rightarrow A$ (pois $A \in T \cup \{A\}$) e também $T \vdash A \rightarrow B$ (por hipótese), de modo que $T \cup \{A\} \vdash A \rightarrow B$. Por Modus Ponens, obtemos: $T \cup \{A\} \vdash B$.

$(\Rightarrow)$

Suponha $T \cup \{A\} \vdash B$ e sejam $n \in \mathbb{N}$ e $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ uma prova de B a partir de $T \cup \{A\}$

Tese: $T \vdash A \rightarrow B$

A demonstração é por indução no número de fórmulas da sequência que compôe a dedução de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$.

- Caso 1. B é axioma.

  Note que $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ é axioma proposicional, logo: $T \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ (axioma proposicional), assim como $T \vdash B$ (B é axioma). Por Modus Ponens: $T \vdash A \rightarrow B$.

- Caso 2. $B \in T \cup \{A\}$

  - Se $B \in T$, temos $T \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ (axioma proposicional) e também $T \vdash B$ (pois $B \in T$). Por Modus Ponens: $T \vdash A \rightarrow B$.
  - Se B é A, isto é, $A \rightarrow B$ é da forma $A \rightarrow A$, que é axioma proposicional. Logo: $T \vdash A \rightarrow B$.

- Caso 3. B é obtida por Modus Ponens.

  Então, existem $i, j < n$ tais que A_i é $A_j \rightarrow B$. Note: $(A_1; ...; A_i)$ e $(A_1; ...; A_j)$ são deduções de A_j e $A_j \rightarrow B$ a partir de $T \cup \{A\}$.

  Pela hipótese de indução, para qualquer fórmula B' e $m < n$, se existe dedução de B' a partir de $T \cup \{A\}$, então $T \vdash A \rightarrow B'$.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

ção, temos $T \vdash A \to (A_j \to B)$ e temos $T \vdash A \to A_j$.

Temos também:

$T \vdash (A \to A_j) \to ((A \to (A_j \to B)) \to (A \to B))$ (axioma proposicional)

Assim, usando Modus Ponens duas vezes:

$T \vdash A \to B$

- Caso 4. B é obtido por Generalização

  Existem $m < n$ e x variável tais que B é $\forall x A_m$. $(A_i)_{i \leq m}$ é dedução de A_m a partir de $T \cup \{A\}$. Logo, pela hipótese de indução:

  $T \vdash A \to A_m$. Além disso: $T \vdash (A \to A_m) \to \forall x(A \to A_m)$.

  Logo, por Modus Ponens, $T \vdash \forall x(A \to A_m)$.

  Como A é sentença, x não ocorre livre em A, então $T \vdash \forall x(A \to A_m) \to (A \to \forall x A_m)$

  Por Modus Ponens, $T \vdash A \to \forall x A_m$, ou seja:

  $T \vdash A \to B$.

□

Como vimos, uma teoria é simplesmente um conjunto de sentenças que, a princípio, poderiam ser selecionadas arbitrariamente. Assim, poderíamos ter teorias cujas sentenças implicam sintaticamente em contradições ou, equivalentemente, que provam que $x \neq x$. Queremos descartar estas teorias:

Definição 1.29. Seja Γ um conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, dizemos que Γ é inconsistente se $\Gamma \vdash \neg(x = x)$. Caso contrário, dizemos que Γ é consistente.

⊣

Note que, como toda estrutura $\mathcal{M}$ satisfaz $x = x$, então uma teoria inconsistente não pode ter modelo.

Lema 1.30. *Sejam T uma $\mathcal{L}$-teoria e A uma $\mathcal{L}$-sentença tais que $T \cup \{A\}$ é inconsistente. Então $T \vdash \neg A$. Como consequência, se T é consistente então para qualquer sentença A, ou $T \cup \{A\}$ é consistente ou $T \cup \{\neg A\}$ é consistente.*

Demonstração. Como $T \cup \{A\}$ é inconsistente, temos $T \cup \{A\} \vdash \neg(x = x)$.

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$T \vdash A \to \neg(x = x)$.

Pelo axioma I.14, temos que $T \vdash (A \to \neg(x = x)) \to ((x = x) \to \neg A)$. Por Modus Ponens, $T \vdash (x = x) \to \neg A$.

Como $T \vdash (x = x)$ e $T \vdash (x = x) \to \neg A$, por Modus Ponens $T \vdash \neg A$.

Agora, se $T \cup \{A\}$ e $T \cup \{\neg A\}$ não são consistentes, então $T \vdash A \wedge \neg A$. Logo, T é inconsistente, usando-se I.1 e I.6 para deduzir $\neg(x = x)$.

$\square$

Definição 1.31. Sejam T uma $\mathcal{L}$-teoria e A uma $\mathcal{L}$-sentença. Dizemos que A é independente de T se $T \cup \{A\}$ e $T \cup \{\neg A\}$ são ambas teorias consistentes. Equivalentemente, $T \nvdash A$ e $T \nvdash \neg A$.

$\dashv$

Em diversas teorias há sentenças que são independentes. Nosso objetivo é mostrar que na Teoria da Geometria Euclidiana, o Postulado das Paralelas é independente dos outro postulados. Mas como é possível mostrar que uma sentença é independente de uma teoria? Discutiremos mais a frente uma forma viável de fazer isso.

Definição 1.32. Seja Γ conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas e A uma $\mathcal{L}$-fórmula, dizemos que A é consequência semântica de Γ ($\Gamma \models A$) se, para toda $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$ vale:

$$\text{Se } \mathcal{M} \models \Gamma \text{ então } \mathcal{M} \models A$$

$\dashv$

Agora temos as noções de consequência sintática e consequência semântica. A forma como construímos estas noções aqui deve ser de tal modo que estas duas noções sejam equivalentes.

Por exemplo, quando vamos falar da teoria dos anéis, pensamos que temos um conjunto de elementos onde estão definidas duas operações e listamos axiomas que falam de certas propriedades destas operações. Na verdade, não temos de fato um conjunto com elementos, o que temos é uma linguagem e sentenças compondo a teoria dos anéis.

Frequentemente provamos uma determinada propriedade sobre a teoria dos anéis (por exemplo, que existe um único elemento neutro aditivo) usando somente os axiomas desta teoria. Depois consideramos uma estrutura que chamamos de anel, e isto

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

modelo para a teoria dos anéis, e então queremos garantir que esta estrutura satisfaz a propriedade que provamos sintaticamente na teoria dos anéis. Parece óbvio que se provamos uma propriedade na teoria dos anéis, sintaticamente, então esta estrutura, que sabemos ser um anel, terá esta mesma propriedade. No entanto, é exatamente disto que se trata o Teorema da Correção. Se tivéssemos desenvolvido as noções de consequências sintática e semântica de modo que, em algumas teorias pudéssemos provar algumas propriedades, mas seus modelos não tivessem estas propriedades, então estas noções não teriam capturado essa essência básica da atividade matemática: se provamos uma propriedade, então ela é verdadeira para todas as estruturas com estas propriedades.

Teorema 1.33 (Teorema da Correção)**.**

$$\textit{Se } \Gamma \vdash A\textit{, então } \Gamma \models A$$

Isto é, toda consequência sintática de uma teoria é também uma consequência semântica dessa teoria.

Demonstração. Suponha que $\Gamma \vdash A$ e seja $\mathcal{M} \models \Gamma$. Queremos mostrar que $\mathcal{M} \models A$. Faremos indução no comprimento da prova de A a partir de Γ

- Se $A \in \Gamma$, imediado: $\mathcal{M} \models A$.
- Se A é axioma. Já demonstrado em 1.20; 1.21; 1.22; 1.23 e 1.24.
- Se A foi obtido por Generalização:

  Suponha que A é da forma $\forall x B$ e $\Gamma \vdash B$ de modo que $\mathcal{M} \models B$, por hipótese de indução. Queremos mostrar que $\mathcal{M} \models \forall x B$.

  Mas $\mathcal{M} \models B$ se, e somente se $(\mathcal{M};\sigma) \models B$ para qualquer valoração σ. Assim, se θ é valoração, $(\mathcal{M};\theta) \models B$ sempre que $\theta(v) = \sigma(v)$ se v não é x.

  Assim, $(\mathcal{M};\sigma) \models \forall x B$.

- Se A foi obtida por Modus Ponens

  Como A foi obtido por Modus Ponens, existem $i < n$ e $j < n$ tais que A_i é $A_j \to A$ e ambas pertencem a dedução de A a partir de Γ. Pela hipótese de indução:

  $\mathcal{M} \models A_j$ e $\mathcal{M} \models A_j \to A$. Então, $\mathcal{M} \models \neg A_j \vee A$. ASsim, $\mathcal{M} \models A_j \wedge (\neg A_j \vee A)$, donde $\mathcal{M} \models (A_j \wedge \neg A_j) \vee (A_j \wedge A)$. Como $\mathcal{M} \not\models (A_j \wedge \neg A_j)$, temos $\mathcal{M} \models (A_j \wedge A)$. Logo, $\mathcal{M} \models A$.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$\square$

Vamos voltar à nossa discussão sobre independência de sentenças (ou seja, axiomas). O Teorema da Correção nos dá um critério para verificar a independência de uma determinada sentença, da seguinte forma: se para T uma $\mathcal{L}$-teoria e para A uma $\mathcal{L}$-sentença conseguimos *dois* modelos, $\mathcal{M} \models T \cup \{A\}$ e $\mathcal{N} \models T \cup \{\neg A\}$ (nesse caso, $T \not\models A$ nem $T \not\models \neg A$), então temos que $T \nvdash A$ e $T \nvdash \neg A$ e, portanto, A é independente de T. Por exemplo, se T é a teoria com os Axiomas de Euclides, sem o Axioma das Paralelas, e A é o Axioma das Paralelas, um modelo para $T \cup \{A\}$ é um modelo Euclidiano, enquanto um modelo para $T \cup \{\neg A\}$ é um modelo não Euclidiano (por exemplo, o Modelo de Klein (2.9)). Como existem dois modelos com essas propriedades, então o Axioma das Paralelas é independente dos outros axiomas da teoria.

Nosso objetivo agora é provar os Teoremas da Completude e Compacidade. Para isto, antes faremos algumas definições e alguns Lemas.

A técnica chave no Teorema da Completude envolve o **método de Henkin da adição das constantes**. Este método consiste em construir um modelo para um teoria maximal consistente (Definição 1.34) a partir das constantes que testemunham fórmulas existenciais. Primeiro vamos definir estas propriedades e depois vamos mostrar que toda teoria consistente pode ser estendida para uma teoria com as propriedades que queremos (maximal e saturada de constantes).

Definição 1.34 (Teoria Maximal Consistente)**.** Uma $\mathcal{L}$-teoria T é **maximal consistente** se T é consistente e para qualquer $\mathcal{L}$-sentença A, $A \in T$ ou $\neg A \in T$.

$\dashv$

Definição 1.35. Uma $\mathcal{L}$-teoria T é Henkin se para qualquer $\mathcal{L}$-sentença A tal que A é da forma $\exists x B$ para B alguma $\mathcal{L}$-fórmula, então existe c uma constante de $\mathcal{L}$ tal que

$$T \vdash A \to B|_{x=c}.$$

$\dashv$

Exemplo de uma teoria que não é Henkin. Se $\mathcal{L}_{PA} = (+, \cdot, 0, 1, <)$ a linguagem de aritmética de Peano (PA) e $T = \text{PA}$. Esta teoria não é Henkin. De fato, seja A a $\mathcal{L}$-sentença $\exists x(1+1=x)$. Não existe c uma constante de $\mathcal{L}$ tal que $T \vdash 1+1=c$.

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e considere $\mathcal{L}_{\mathbb{N}} = (+, \cdot, \mathbb{N}, <)$ a linguagem de PA em que cada natural é um símbolo de constante. Agora $T = \text{PA}$ é uma $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$-teoria Henkin.

Lema 1.36. *Se T é uma $\mathcal{L}$-teoria consistente e $\mathcal{L}$ enumerável (i.e., temos apenas uma quantidade enumerável de símbolos de constantes, funções e relações), então existe $T^* \supseteq T$ maximal consistente Henkin.*

Demonstração. Seja $\mathcal{D} = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ novos símbolos de constantes que não estão em $\mathcal{L}$. Se $\mathcal{L} = ((R_i)_{i\in I}; (F_j)_{j\in J}; (c_k)_{k\in K})$ defina $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = ((R_i)_{i\in I}; (F_j)_{j\in J}; (c_k)_{k\in K} \cup \mathcal{D})$.

Como $\mathcal{L}$ é enumerável, então $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ é enumerável também.

Enumere as $\mathcal{L}(\mathcal{D})$-sentenças: $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Recursivamente, defina:

- $T_0 = T$
- Definimos T_{n+1} como sendo
  - T_n, se $T_n \cup \{A_n\}$ for inconsistente
  - $T_n \cup \{A_n\}$, se $T_n \cup \{A_n\}$ for consistente e A_n não é da forma $\exists v B$
  - $T_n \cup \{B|_{v=d_{j_n}}\} \cup \{A_n\}$, se $T_n \cup \{A_n\}$ for consistente, A_n é da forma $\exists v B$ e $j_n = min\{j \in \mathbb{N} \mid d_j$ não ocorre em uma fórmula de $T_n\}$
- $T^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$

Note que $T \subseteq T^*$. Para mostrar que T^* é consistente, precisamos garantir que cada T_{n+1} construída acima continua consistente, o que, compete notar, não é trivial. T^* é Henkin pois na nossa recursão adicionamos uma única constante para testemunhar cada fórmula existencial. Além disso, essa teoria é consistente pois na recursão tomamos o cuidado de não adicionar as sentenças inconsistentes. Agora, se A_n é uma $\mathcal{L}(\mathcal{D})$-sentença (lembre que enumeramos todas as $\mathcal{L}(\mathcal{D})$-sentenças), então ou $T_n \cup \{A_n\}$ é consistente, e pela nossa construção $A_n \in T_{n+1} \subseteq T^*$, ou $T_n \cup \{A_n\}$ é inconsistente, e então pelo Lema anterior, $T_n \cup \{\neg A_n\}$ é consistente, e portanto $\neg A_n$ é algum $A_R \in T_R \subseteq T^*$. Em qualquer caso, $A_n \in T^*$ ou $\neg A_n \in T^*$, então T^* é maximal. $\square$

Teorema 1.37 (Primeiro Teorema da Completude). *Seja T uma $\mathcal{L}$-teoria e $\mathcal{L}$ enumerável, T é consistente se, e somente se, T tem modelo.*

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Suponha T inconsistente. Assim, $T \vdash \neg(x = x)$

Como existe $\mathcal{M} \models T$, então, pelo Teorema da Correção, $\mathcal{M} \models \neg(x = x)$.

Absurdo!

$(\Rightarrow)$

Como T é consistente e $\mathcal{L}$ enumerável , podemos considerar, pelo Lema 1.36, $T^* \supseteq T$ maximal consistente Henkin. Note que se $\mathcal{M} \models T^*$ então $\mathcal{M} \models T$.

Defina $\sim$ em $\mathcal{D}$ (conjunto dos símbolos de novas constantes) da seguinte maneira:

Seja $c, d \in \mathcal{D}$, $c \sim d$ se, e somente se, $(c = d) \in T^*$. Observe que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{D}$, isso porque a igualdade é trivialmente uma relação de equivalência.

Defina $D = \mathcal{D}/\sim = \{[c] \mid c \in \mathcal{D}\}$, onde $[c] = \{d \in \mathcal{D} \mid c \sim d\}$ é a classe de equivalência de c.

Este será o domínio da $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$ que queremos construir.

Agora, como interpretar:

Seja $c \in \mathcal{D}$, então $c^{\mathcal{M}} = [c]$.

Afirmação. Sejam $c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n$ tais que $c_1 \sim d_1, ..., c_n \sim d_n$. Então:

$$R(c_1, ..., c_n) \in T^* \Leftrightarrow R(d_1, ..., d_n) \in T^*$$

De fato, como $c_1 \sim d_1, ..., c_n \sim d_n$, então $(c_1 = d_1), ..., (c_n = d_n) \in T^*$.

Assim, se $R(c_1, ..., c_n) \in T^*$ temos:

$$(c_1 = d_1), ..., (c_n = d_n), R(c_1, ..., c_n) \vdash R(d_1, ..., d_n)$$

Como T^* é maximal e consistente, $R(d_1, ..., d_n) \in T^*$. A recíproca é análoga.

Assim, podemos definir:

$$R^{\mathcal{M}}([c_1], ..., [c_n]) \Leftrightarrow R(c_1, ..., c_n) \in T^*$$

Queremos interpretar F um símbolo funcional n-ário.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

Note que $T^* \vdash \exists x(F(c_1, ..., c_n) = x)$. Como T^* é Henkin, então existe $c_{n+1} \in \mathcal{D}$ tal que

$$T^* \vdash (F(c_1, ..., c_n) = c_{n+1})$$

Como T^* é maximal consistente

$$F(c_1; ...; c_n) = c_{n+1} \in T^*$$

Afirmação. Sejam $c_1, ..., c_n, c_{n+1}, d_1, ..., d_n, d_{n+1} \in \mathcal{D}$ tais que $c_1 \sim d_1, ..., c_n \sim d_n$ então

$F(c_1, ..., c_n) = c_{n+1} \in T^*$ se, e somente se, $F(d_1, ..., d_n) = d_{n+1} \in T^*$ e ainda $c_{n+1} \sim d_{n+1}$

De fato, se

$$(c_1 = d_1), ..., (c_n = d_n), (F(c_1, ..., c_n) = c_{n+1}) \in T^*$$

e se

$$\Gamma = \{(c_1 = d_1), ...(c_n = d_n), (F(c_1, ..., c_n) = c_{n+1})\}$$

então

$$\Gamma \vdash c_{n+1} = F(c_1, ..., c_n) = F(d_1, ..., d_n) = d_{n+1}$$

Logo, $\Gamma \vdash c_{n+1} = d_{n+1}$ e então, como T^* é maximal consistente

$$\{(c_{n+1} = d_{n+1}), F(d_1, ..., d_n) = d_{n+1}\} \subseteq T^*$$

e então $c_{n+1} \sim d_{n+1}$.

Assim, definimos $F^{\mathcal{M}} : D^n \to D$ como

$$F^{\mathcal{M}}([c_1], ..., [c_n]) = [c_{n+1}] \text{ se, e somente se, } F(c_1, ..., c_n) = c_{n+1} \in T^*$$

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$\mathcal{L}$, existe $c_n \in \mathcal{D}$ tal que $c = c_n \in T^*$ e $c^{\mathcal{M}} = [c_n]$ está bem definido.

Assim, definimos a estrutura:

$$\mathcal{M} = (D, (R_i^{\mathcal{M}})_{i \in I}, (F_j^{\mathcal{M}})_{j \in J}, (c_k^{\mathcal{M}})_{k \in K})$$

Falta verificar que de fato $\mathcal{M}$ é um modelo para T^* ($\mathcal{M} \models T^*$).

Por indução na complexidade das fórmulas de T^*:

Fixe $\sigma : Var \to D$.

Afirmação. Sejam t um termo com $Var(t) \subseteq \{x_1; ...; x_n\}, c_1, ..., c_n, d \in \mathcal{C}$. Então:

$$(t|_{x_1=c_1,...,x_n=c_n} = d) \in T^* \Leftrightarrow \sigma^*(t)|_{x_1=[c_1],...,x_n=[c_n]} = [d]$$

Notação: $t(c_1, ..., c_n) = d \in T^*$ se, e somente se, $\sigma^*(t)([c_1], ..., [c_n]) = [d]$.

Prova por indução na complexidade do termo:

- Se t é um símbolo de constante c:

$$c = d \in T^* \Leftrightarrow c \sim d \Leftrightarrow [c] = [d]$$

- Se t é a variável x_i:

  $t(c_1, ..., c_n)$ é c_i. Assim, $c_i = d \in T^* \Leftrightarrow c_i \sim d \Leftrightarrow [c_i] = [d] \Leftrightarrow \sigma^*(t) = [d]$.

- ($\Rightarrow$) Suponha a afirmação verdadeira para os termos $t_1, ..., t_n$ e seja t o termo $F(t_1, ..., t_n)$.

  Note: $Var(t) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ então $Var(t_i) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$

  Para cada i: $T^* \vdash \exists x(t_i(c_1, ..., c_n) = x)$, e como T^* é Henkin, então $T^* \vdash t_i(c_1, ..., c_n) = d_i$, para alguma constante d_i. Isto é, $(t_i(c_1, ..., c_n) = d_i) \in T^*$, pois T^* é maximal.

  Além disso,

$$F(t_1(c_1, ..., c_n), ..., t_m(c_1, ..., c_n)) = d \in T^*$$

  Assim, $\{F(d_1, ..., d_m) = d\} \in T^*$

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

portanto,

$$\sigma^*(t) = \sigma^*(F(t_1, ..., t_m)) =$$
$$F^{\mathcal{M}}(\sigma^*(t_1), ..., \sigma^*(t_m) =$$
$$F^{\mathcal{M}}([d_1], ..., [d_m]) = \sigma^*(d) = [d]$$

($\Leftarrow$) Agora, suponha $\sigma^*(t) = [d]$;

Existe $e \in \mathcal{C}$ tal que $t(c_1, ..., c_n) = e \in T^*$

Por ($\Rightarrow$), $\sigma^*(t) = [e]$. Assim, $[d] = [e]$ e, portanto, $d \sim e$ ($d = e \in T^*$). Assim, $t(c_1, ..., c_n) = d$.

$\square$

Afirmação. Se $\sigma : Var \to D$, então $(\mathcal{M}, \sigma) \models T^*$

Demonstração. Prova por indução na complexidade das sentenças de T^*.

Seja $A \in T^*$. Considere B $\mathcal{L}$-fórmula com $VL(B) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ onde A é $B(c_1, ..., c_n)$ e $c_1, ..., c_n \in \mathcal{C}$.

- Se A é $t_1(c_1, ..., c_n) = t_2(c_1, ..., c_n)$, então existem $c, d \in \mathcal{C}$ tais que $t_1(c_1, ..., c_n) = c \in T^*$ e $t_2(c_1, ..., c_n) = d \in T^*$. Com isso, $c = d \in T^* \Rightarrow [c] = [d]$.

  Logo, pela afirmação anterior, $\sigma^*(t_1) = [c] = [d] = \sigma^*(t_2)$.

  Logo, $(\mathcal{M}, \sigma) \models t_1 = t_2$.

- Se A é da forma $R(t_1, ..., t_m)$

  Novamente, como T^* é Henkin maximal consistente, sejam $d_1, ..., d_m \in \mathcal{C}$ tais que

  $t_1(c_1, ..., c_n) = d_1 \in T^*$

  $\vdots$

  $t_m(c_1, ..., c_n) = d_m \in T^*$

  Assim, pela afirmação anterior, $\sigma^*(t_i) = [d_i], \forall i = 1, 2, ..., n$

  Logo, $([d_1], ..., [d_n]) \in R^{\mathcal{M}}$ e então $(\mathcal{M}, \sigma) \models R(d_1, ..., d_m)$.

- Se A é da forma $\neg B$ e suponha que vale para B, isto é, $B \in T^* \Leftrightarrow (\mathcal{M}; \sigma) \models B$.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$\neg B \Leftrightarrow (\mathcal{M};\sigma) \not\models B$, pela hipótese de indução: $\in T^* \Leftrightarrow A \in T^*$.

- Se A é da forma $B \wedge C$ e a afirmação vale para B e C:

  $(\mathcal{M};\sigma) \models A \Leftrightarrow (\mathcal{M};\sigma) \models B \wedge C \Leftrightarrow (\mathcal{M};\sigma) \models B$ e $(\mathcal{M};\sigma) \models C$, pela hipótese de indução: $(\mathcal{M};\sigma) \models B$ e $(\mathcal{M};\sigma) \models C \Leftrightarrow B \in T^*$ e $C \in T^* \Leftrightarrow B \wedge C \in T^* \Leftrightarrow A \in T^*$.

- Se A é da forma $\exists x B$ e a afirmação vale para B.

  Queremos θ uma valoração tal que $\theta(v) = \sigma(v)$ se v não é x.

  Como $\exists x B \in T^*$ e T^* é Henkin, existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $B(c) \in T^*$. Assim, tomando θ com $\theta(v) = \sigma(v)$ se v não é x e $\theta(v) = c$. Por hipótese de indução: $(\mathcal{M};\theta) \models B$ Logo, $(\mathcal{M};\sigma) \models \exists x B$, e então $(\mathcal{M};\sigma) \models A$.

□

Teorema 1.38 (Segundo Teorema da Completude). *Seja T uma $\mathcal{L}$-teoria, $\mathcal{L}$ enumerável, se $T \models A$ então $T \vdash A$.*

Demonstração. Suponha $T \nvdash A$. Temos, pelo Lema 1.30, $T \cup \{\neg A\}$ é consistente. Pelo Teorema da Completude, existe $\mathcal{M} \models T \cup \{\neg A\}$. Mas, por hipótese, se $\mathcal{M} \models T$, então $\mathcal{M} \models A$. Absurdo, pois $\mathcal{M} \models \neg A$. □

Teorema 1.39 (Teorema da Compacidade). *Seja T uma $\mathcal{L}$-teoria, $\mathcal{L}$ enumerável. Temos que T tem modelo se, e somente se, toda parte finita $\Sigma \subseteq T$ tem modelo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{M} \models T$ então $\mathcal{M} \models \Sigma$, se $\Sigma \subseteq T$.

($\Leftarrow$) Suponha que T não tenha modelo. Por completude, T é inconsistente. Isto é, $T \vdash \neg(x = x)$. Pela definição de $\vdash$, existe $\Sigma \subseteq T$ finito, consistindo das fórmulas em T numa prova de $\neg(x = x)$, tal que $\Sigma \vdash \neg(x = x)$. Segue que Σ é inconsistente. Logo, Σ não tem modelo.

□

Teorema 1.40 (Teorema da Finitude). $\Gamma \models A \Leftrightarrow$ *existe* $\Sigma \subseteq \Gamma$ *finito, tal que* $\Sigma \models A$.

Demonstração. ($\Rightarrow$)

Pelo teorema da completude, $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

, consistindo das fórmulas de Γ na dedução de A. Com isso, $\Delta \models A$.

($\Leftarrow$) Imediato.

$\square$

Como exemplo de aplicação do teorema da compacidade, contruiremos um corpo ordenado não arquimediano. Uma referência para os diversos conceitos de corpo, corpo ordenado e propriedades de corpo ordenado é a dissertação de Custódio [2] (2016).

Definição 1.41. Sejam $\mathcal{L} = ((F_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J}, (c_k)_{k \in K})$ uma linguagem e T uma $\mathcal{L}$-teoria. Definimos o fecho de T em $\mathcal{L}$ (ou o conjunto das consequências de T) como sendo

$$Conseq_{\mathcal{L}}(T) = \{A \mid A \text{ é } \mathcal{L}\text{-sentença e } T \models A\}$$

$\dashv$

Usaremos a seguinte versão da propriedade arquimediana para corpos:

Definição 1.42. Um corpo ordenado K contendo $\mathbb{N}$ (isto é, $\mathbb{N} \subseteq K$) é dito arquimediano se $\mathbb{N}$ é ilimitado em K. Ou seja: $\forall x \in K \ \ \exists n \in \mathbb{N}(x < n)$.

$\dashv$

Teorema 1.43. *Existe um corpo ordenado não arquimediano.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L} = (+, \cdot, <, 0, 1)$ a linguagem dos corpos ordenados e T a teoria dos corpos ordenados. Temos que $\mathbb{Q} \models T$.

Acrescentamos o símbolo de constante α à linguagem $\mathcal{L}$, definindo a linguagem $\mathcal{L}_\alpha$. Além disso, defina o termo $t_1 = 1$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n + 1$. Assim, t_n é o termo $1 + 1 + \cdots + 1$, n vezes.

- $T_0 = T$;
- $T_1 = T_0 \cup \{t_1 < \alpha\}$;
- $T_2 = T_1 \cup \{t_2 < \alpha\}$;
- $T_3 = T_2 \cup \{t_3 < \alpha\}$;

  $\vdots$

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

- $T^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

Note que $Conseq_{\mathcal{L}}(T^*) = Conseq_{\mathcal{L}}(T)$. Isto é, T^* e T têm as mesmas consequências semânticas na linguagem $\mathcal{L}$.

Afirmação: T^* tem modelo.

De fato, seja $\Sigma \subseteq T^*$ finito. Como $T_n \subseteq T_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Sigma \subseteq T_n$. Vamos mostrar que cada T_n tem modelo:

De fato, seja $\mathbb{Q}_n$ o modelo $\mathbb{Q}$ interpretando o novo símbolo de constante como sendo $\alpha^{\mathbb{Q}_n} = n + 1$. Temos que $\mathbb{Q}_n \models T_n$ pois $T_n = T \cup \{t_1 < \alpha\} \cup \{t_2 < \alpha\} \cup \cdots \cup \{t_n < \alpha\}$, $\mathbb{Q}_n \models T$ e, claramente, $\mathbb{Q}_n \models \{t_1 < \alpha\} \cup \{t_2 < \alpha\} \cup \cdots \cup \{t_n < \alpha\}$.

Portanto, pelo teorema da compacidade, existe $\mathbb{Q}^* \models T^*$.

Assim, $\mathbb{Q}^*$ é corpo ordenado. Além disso, $\mathbb{Q}^* \models \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$

Isto é:

$\forall n \in \mathbb{N}\ \mathbb{Q}^* \models t_n < \alpha$

Ou seja, informalmente:

$\exists x \in \mathbb{Q}^*\ \forall n \in \mathbb{N}\ \mathbb{Q}^* \models t_n < x$

Portanto, $\mathbb{Q}^*$ é não arquimediano.

$\square$

Corolário 1.44. *Se um corpo ordenado $\mathbb{F}$ é não arquimediano, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ positivo.*

Demonstração. Se $\mathbb{F}$ é não arquimediano, então existe $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $n < \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, tomando-se $\varepsilon = 1/\alpha$, segue o que queremos. $\square$

No caso em que $\mathbb{F} = \mathbb{Q}^*$, isso significa que ε é menor que todos os racionais positivos. Se considerarmos a extensão para os reais e tomarmos a respectiva extensão não-standard $\mathbb{R}^*$, o mesmo vale para todos os reais positivos.

Corolário 1.45. *A propriedade arquimediana para corpos não pode ser formalizada em linguagem de primeira ordem.*

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

priedade arquimediana é equivalente a uma sentença de primeira ordem, digamos, **Arq**. Considere T o conjunto dos axiomas de corpo ordenado. Nesse caso, $T \cup \{\textbf{Arq}\}$ é o conjunto dos axiomas de corpo arquimediano. Seguindo a demonstração feita no teorema, com $T \cup \{\textbf{Arq}\}$ no lugar de T, cada $\mathbb{Q}_n$ é modelo de $T \cup \{\textbf{Arq}\}$, porque o corpo $\mathbb{Q}$ é arquimediano. Então obtemos $\mathbb{Q}^*$ corpo não arquimediano e modelo de **Arq**, contradição. $\square$

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

2

AXIOMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA PLANA

Nesse capítulo apresentaremos, de forma informal do ponto de vista da lógica, baseado no trabalho de Hilbert [9] (1902, cap. 1), os axiomas da geometria euclidiana plana. Antes, baseado em obras como Eves [4](cap. 5-2) e Roque [11] (2012), contaremos brevemente um histórico de como a geometria se desenvolveu. Passando por Euclides e os Elementos, que foi uma das primeiras e mais brilhantes obras que utilizaram o método postulacional, até chegar a geometrias não euclidianas, a Hilbert e sua magistral obra, a qual dá luz ao presente trabalho. As imagens que servem como ilustração aos axiomas são de autoria do autor e foram feitas utilizando o software Geogebra.

2.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Ao fazer uma introdução à obra de Fetissov [7] (1995, parte 1), Hygino H. Domingues descreve a história da Geometria, dividindo-a em 3 fases: *geometria subconsciente*, *geometria científica* e *geometria demonstrativa*.

Até mesmo o homem mais primitivo tinha necessidade de noções básicas de geometria. Entre essas noções estão a de distância, figuras geométricas básicas para demarcação de terras, vertical e horizontal para construções. O homem neolítico representava, através de desenhos, elementos do seu dia a dia, criava utensílios e instrumentos se valendo de simples observações que contavam com um certo senso geométrico inato. Essa fase é chamada de *geometria subconsciente* e tem como característica o fato de lidar somente com situações concretas.

Com o tempo, o homem passou a relacionar entre si observações geométricas que tinham em comum alguma propriedade, o que exigia um certo grau de abstração. Por

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

...m o comprimento de uma circunferência qualquer como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual a circunferência respectiva. Essas e muitas outras conclusões da época são resultados de um processo empírico.

Essa fase é chamada de *geometria científica* pelo fato de a metodologia empregada lembrar o método científico moderno: observação, ensaio e erro.

Depois, o homem começou a se perguntar o porquê de afirmações que eram explicadas simplesmente por processos empíricos, caracterizando o início da fase chamada de *geometria demonstrativa*. Foi nessa época que surgiram as primeiras demonstrações em geometria.

Esses primeiros passos da dedução lógica teriam surgido com Tales de Mileto (623? - 546? a.C.) Os seguintes teoremas e suas demonstrações são atribuídos a ele:

- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
- Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais;
- Todo diâmetro bissecciona o círculo;
- Os ângulos inscritos numa semi circunferência são retos;
- Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente congruentes, então esses triângulos são congruentes.

O valor de Tales não se deve ao conteúdo dos teoremas acima, mas sim pelo fato de ter inaugurado o método dedutivo em geometria, baseando suas demonstrações em resultados preliminares mais simples e mais intuitivos. O que representou um grande avanço no desenvolvimento da matemática.

Outro que contribuiu com o desenvolvimento da matemática demonstrativa foi Pitágoras de Samos (570 - 495 a.C.) com sua Escola Pitagórica. Nas obras pitagóricas é possível observar algumas cadeias de teoremas, uns deduzidos de outros através de raciocínios lógicos, mas não partindo de axiomas bem explicados.

Foi-se, aos poucos, aperfeiçoando o discurso lógico como uma sequência de deduções rigorosas a partir de algumas suposições iniciais explicitamente enunciadas. A primeira tentativa de organizar logicamente a geometria num sistema dedutivo, teria sido feita por Hipócrates de Quio, no sec. V a.C. Seguiram-se algumas tentativas mais bem sucedidas de Lêon, Teúdio e outros, todos na Grécia. Mas o auge dessa organização veio com os *Elementos* de Euclides, III a.C.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

De acordo com Eves [4](cap. 5-2), os Elementos de Euclides (300 a.C.) não tratam apenas de geometria, contém também teoria dos números e álgebra elementar, contendo no total 465 proposições distribuídas em treze livros. Os Elementos de Euclides não são uma obra de total autoria do autor, mas sim uma compilação altamente bem sucedida e um arranjo sistemático de trabalhos anteriores. Além de acrescentar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras, o seu grande mérito foi a ótima escolha de proposições e seu arranjo em uma sequência lógica a partir de poucas afirmações iniciais.

No livro 1 dos Elementos de Euclides, inicia-se o estudo da geometria plana, hoje conhecida como Geometria Euclidiana Plana, em sua homenagem. Inicialmente ele define os objetos geométricos cujas propriedades deseja-se estudar. São 23 definições, entre as quais encontramos as definições de ponto, reta, círculo, triângulo, retas paralelas, etc. Em seguida, ele enuncia 5 noções comuns, que são afirmações admitidas como verdade óbvias, chamadas de axiomas. São elas:

Axioma 1 Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais.

Axioma 2 Se iguais são adicionados a iguais, os totais obtidos são iguais.

Axioma 3 Se iguais subtraídos de iguais, os totais obtidos são iguais.

Axioma 4 Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.

Axioma 5 O todo é mais do que qualquer uma de suas partes.

O que Euclides faz é construir axiomaticamente a geometria plana. O trabalho de Euclides destaca-se pelo fato de que com apenas 5 postulados ele foi capaz de deduzir 465 proposições.

A seguir, os 5 postulados de Euclides:

Postulado 1. Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.

Postulado 2. Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

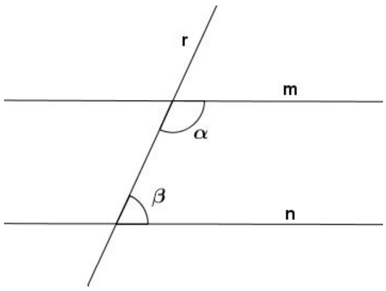
Postulado 3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

Postulado 4. Todos os ângulos retos são iguais.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
PDF Complete
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

ostulado 5 merecem atenção. Com apenas estes 4 postulados, Euclides provou 28 proposições. Nos postulados 1 e 2 os termos entre parênteses não foram empregados por Euclides; porém, pela forma como ele os aplica, deduz-se que estes termos foram implicitamente assumidos. Euclides define ângulos sem falar em medida e define ângulo reto como um ângulo que é igual ao seu suplementar. Daí a necessidade do Postulado 4.

Analisaremos a proposição 28 do livro I. **Proposição 28**. Sejam duas retas m e n cortadas por uma terceira reta r.



Se a soma dos ângulos formados é 180 graus, então m e n são paralelas. Na simbologia atual podemos representar a Proposição 28 da seguinte maneira:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow m \cap n = \emptyset$$

E a recíproca é verdadeira? Ou seja, é verdade que

$$m \cap n = \emptyset \rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ?$$

A resposta a essa pergunta é complexa e levou mais de dois mil anos para ser entendida completamente. De fato, esta recíproca é exatamente o conteúdo do Postulado 5.

Postulado 5. Se uma reta, cortando duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Esta sentença é equivalente a dizer que:

Dada uma reta e um ponto não incendente sobre a mesma, existe somente uma reta paralela à reta dada que passa pelo ponto dado.

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

dos *Elementos* de Euclides, o método axiomático se estabeleceu de vez na matemática e em outras áreas como uma poderosa ferramenta de sistematização do conhecimento científico. Como dito por Sant'anna [12](2003, cap.1) exemplo disso, são as célebres Leis de Newton (sec. XVII), a partir das quais podemos deduzir, em particular, as Leis de Kepler das órbitas planetárias. Outros exemplos são as leis da termodinâmica e as leis da teoria da evolução das espécies.

Era inevitável que a obra passasse por inúmeras análises e críticas ao longo do tempo. Revelaram-se algumas falhas lógicas na obra, as mais comuns e mais graves dessas falhas foram suposições feitas por Euclides sem base em nenhum postulado. Por exemplo, em algumas ocasiões, o autor admite a infinitude da reta, mas seus postulados só garantem que a reta não é limitada.

De acordo com Sant'anna [12](2003, cap. 1), entre inúmeras análises, o quinto postulado, também conhecido como *postulado das paralelas* chamou a atenção dos matemáticos. Muitos acreditavam que quando Euclides chegou no Postulado 5 não soube como demonstrá-lo e então resolveu deixá-lo como postulado, pois parece muito mais com um teorema que com uma simples afirmação que podemos aceitá-la sem demonstração. Durante dois mil anos, foram feitas muitas tentativas de provar o quinto postulado usando os demais.

Veremos em 2.9 uma estrutura que satisfaz os 4 primeiros postulados, mas que viola o postulado das paralelas, o Disco de Klein. Isso mostra que o postulado das paralelas é independente dos outros 4 postulados, sendo impossível demonstra-lo usando como premissa os 4 postulados.

As geometrias não euclidianas mostraram que a geometria não precisava ter um caráter material e intuitivo. Dizer que uma afirmação é verdadeira não implica nenhuma conotação material, mas simplesmente que esse resultado é consequência lógica do conjunto de axiomas. Os discursos lógicos que seguem essa linha são chamados de *axiomáticas formais*, contrária às *axiomáticas materiais*, como a de Euclides. A primeira sistematização formal da geometria surgiu em 1899, no *Fundamentos de Geometria*, de David Hilbert (1862 - 1943).

Moritz Pasch, em 1882, também publicou um livro que tratava de forma sistemática a geometria euclidiana, essa obra foi uma das fontes de inspiradoras de Hilbert, que acabou ficando bem mais famosa. Outro que se destacou nos primórdios do método axiomático foi o italiano Giuseppe Peano, em 1889, com os axiomas de Peano para a aritmética, inclusive o princípio de indução.

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

s de Geometria

Hilbert publicou os *Fundamentos de Geometria* (Grundlagen der Geometrie) em 1899, traduzido em vários idiomas e apresentado no Congresso Internacional de Matemática de Paris (1900). Tomando como primitivos os conceitos de *ponto*, *reta* e *plano* e, ainda, com vistas a manifestar as interligações fundamentais entre esses elementos e alguns conceitos básicos, as relações de incidência, *estar entre* e *congruente* e apoiando-se em 21 axiomas, divididos em 5 grupos (incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade), Hilbert construiu formalmente, evitando assim as armadilhas da intuição, um sistema geométrico euclidiano grandemente aprimorado. As falhas lógicas de Euclides, particularmente as suposições tácitas, estavam por fim preenchidas.

Posteriormente à publicação de *Fundamentos de Geometria*, David Hilbert criou a escola formalista. A tese do formalismo é que a matemática é, essencialmente, o estudo dos símbolos formais. De fato, o formalismo considera a matemática como uma coleção de desenvolvimentos abstratos em que os termos são meros símbolos e as afirmações são apenas fórmulas envolvendo esses símbolos.

2.2 AXIOMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA PLANA

Baseado no trabalho de Hilbert [9](1902, cap. 1), apresentaremos um conjunto de axiomas que serão suficientes para demonstrar todos os resultados conhecidos desde o ensino fundamental. O programa de Hilbert apresenta axiomas para geometria linear (1 dimensão), geometria plana (2 dimensões) e geometria espacial (3 dimensões). Como faremos a axiomatização da geometria plana, adaptaremos essse conjunto de axiomas de forma a retirar o que for relativo apenas à geometria espacial.

Consideraremos dois conjuntos distintos de elementos. Chamaremos os elementos que compõem o primeiro conjunto de pontos e usaremos como notação letras maiúsculas de nosso alfabeto: A, B, C,... Chamaremos os elementos que compõe o segundo conjunto de retas e usaremos como notação letras minúsculas de nosso alfabeto: r, s, t,...

Existem relações, primitivas ou não, entre os elementos desses dois conjuntos, que indicaremos por meio de palavras como “estão situados”, “entre”, “paralelo”, “congruente”, etc. A descrição completa e exata segue como consequência dos axiomas da geometria.

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

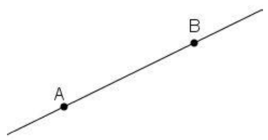
... o desenvolvimento feito no capítulo 1 também se aplica a este caso, em que não há um único domínio de elementos na estrutura, ou um único tipo de variáveis. As linguagens de tipos múltiplos utilizam conjuntos de variáveis diferentes para referirem-se às entidades distintas como pontos e retas. Todos os teoremas que vimos ainda valem com as mesmas demonstrações.

2.2.1 *Axiomas de Incidência*

Pontos e retas do plano satisfazem a cinco grupos de axiomas. O primeiro grupo é constituído pelos *axiomas de incidência*.

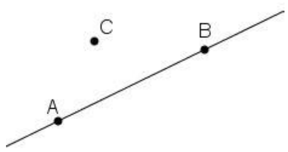
Nos livros de matemática do ensino básico, geralmente, encontramos apenas os dois primeiros.

Axioma de Incidência 1: *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.*



Axioma de Incidência 2: *Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos.*

Axioma de Incidência 3: *Existem três pontos distintos com a propriedade que nenhuma reta passa pelos três pontos.*

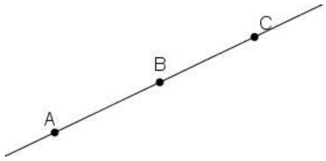


2.2.2 *Axiomas de Ordem*

Dissemos anteriormente que a noção de "estar entre" é uma noção primitiva. Nesta seção iremos apresentar o segundo grupo de axiomas que rege as leis para esta noção, os *axiomas de ordem*.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

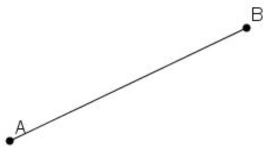
B está entre A e C, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A.



Axioma de Ordem 2: *Para quaisquer dois pontos distintos A e C, existe pelo menos um ponto B pertencente à reta $\overleftrightarrow{AC}$ tal que B está entre A e C.*

Aplicando esse axioma a dois pontos de uma reta (que existem em virtude do segundo axioma de incidência), depois a cada par de pontos formado por um antigo e o novo ponto e assim sucessivamente, concluímos que entre dois pontos quaisquer de uma reta há uma infinidade de pontos dessa reta.

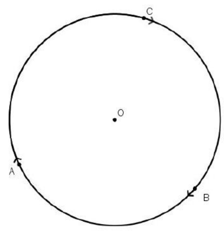
Definição 2.1. Dados dois pontos distintos A e B de uma reta, o *segmento de reta $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$)* é, por definição, a parte da reta formada por A, B e todos os pontos dessa reta situados entre A e B.



$\dashv$

Axioma de Ordem 3: *Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.*

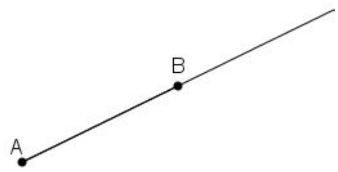
Este axioma assegura que uma reta não é um círculo, onde não temos a noção bem clara de um ponto estar entre outros dois.



Definição 2.2. Dados dois pontos distintos A e B, a semirreta de origem em A contendo B é o conjuntos dos pontos do segmento $\overline{AB}$ unido com todos os pontos C tais

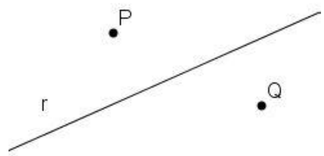
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

ta de origem em A contendo B será denotada por AB.



$\dashv$

Definição 2.3. Considere uma reta r e dois pontos distintos P e Q não pertecentes a r, dizemos que os pontos P e Q *estão em um mesmo lado* da reta r se o segmento $\overline{PQ}$ não a intercepta. Caso contrário, dizemos que P e Q *estão em lados opostos* da reta r

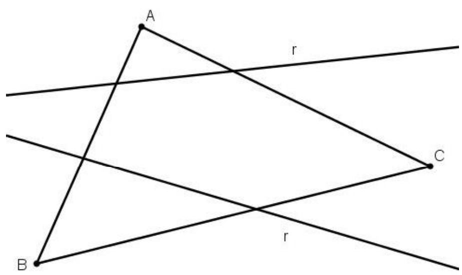


$\dashv$

Definição 2.4. Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, o *semiplano* determinado por r contendo P é o conjunto de todos os pontos Q tais que P e Q estão do mesmo lado de r unido aos pontos de r.

$\dashv$

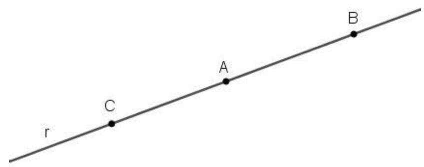
Axioma de Ordem 4 (Separação do plano): *Sejam A, B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja r uma reta que não contém nenhum dos três pontos. Então se r intercepta o segmento $\overline{AB}$, ela também intercepta o segmento $\overline{AC}$ ou o segmento $\overline{BC}$.*



Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

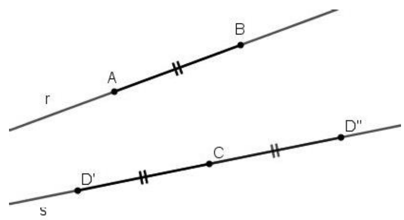
Faremos uso de duas noções (primitivas) de congruência: de segmento e de ângulos. A congruência de triângulos pode ser definida usando congruência de segmentos e de ângulos. Qualquer que seja a noção de congruência, usamos o símbolo $\equiv$.

Definição 2.5 (lado da reta em relação a um ponto)**.** Dado um ponto A pertencente a uma reta r, diremos que dois pontos B e C estão na reta, mas em lados opostos em relação ao ponto A se, e somente se, B e C pertencem a reta r e A está entre B e C.

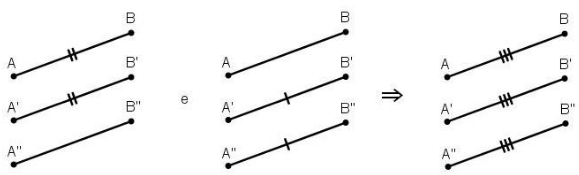


⊣

Axioma de Congruência 1: *Se A e B são dois pontos distintos de uma reta r e C é um outro ponto de uma reta s, não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar dois pontos D' e D'' em s e em lados opostos em relação ao ponto C, tal que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD'}$ e $\overline{CD''}$ sejam congruentes.*

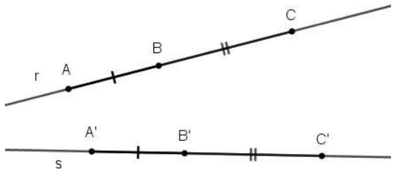


Axioma de Congruência 2: *Se um segmento $\overline{AB}$ e um segmento $\overline{A'B'}$ são congruentes a um mesmo segmento $\overline{A''B''}$, então os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são congruentes entre si.*



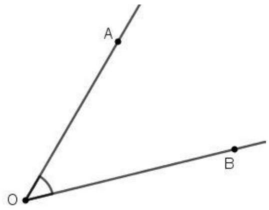
PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

B e C são pontos colineares, com B entre A e C, e A', B' e C' também são colineares, com B' entre A' e C', e se, ainda, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.



Isto é: se a segmentos congruentes somarmos segmentos congruentes, então as somas também serão congruentes.

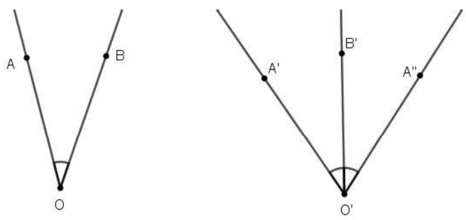
Definição 2.6. Ângulo é uma figura geométrica formada pela união de duas semirretas de mesma origem.



⊣

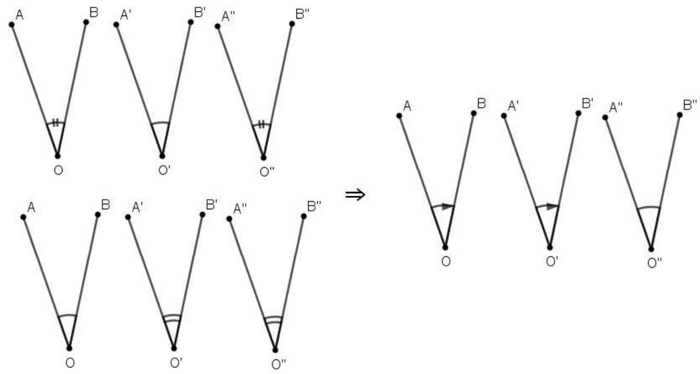
As semirretas são chamadas de *lados* do ângulo e a origem em comum é o *vértice* do ângulo. Se os lados são semirretas opostas, esse ângulo é chamado de *ângulo raso*. Caso os lados sejam semirretas coincidentes, chamamos o ângulo de *ângulo nulo*. Denotaremos como $A\widehat{O}B$ (ou $B\widehat{O}A$) o ângulo de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e vértice O.

Axioma de Congruência 4: *Seja $A\widehat{O}B$ um ângulo não raso e não nulo e $\overrightarrow{O'B'}$ uma semirreta. Existe exatamente uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ em cada lado de $\overleftrightarrow{O'B'}$ tal que $A\widehat{O}B \equiv A'\widehat{O'}B'$.*



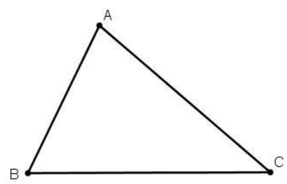
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
PDF Complete
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

ângulo $A\hat{O}B$ e um ângulo $A'\widehat{O'}B'$ são congruentes a um mesmo ângulo $A''\widehat{O''}B''$, então os ângulos $A\hat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$ são congruentes entre si.



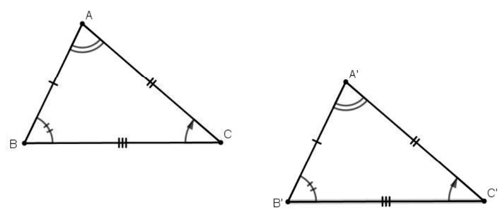
A seguir, introduziremos a definição de triângulo e congruência de triângulos antes de enunciar o Axioma de Congruência 6 que relaciona congruência de segmentos e ângulos.

Definição 2.7. Dados A, B e C três pontos não pertencentes simultaneamente a uma mesma reta, chamaremos de triângulo $\triangle ABC$ a união de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.



⊣

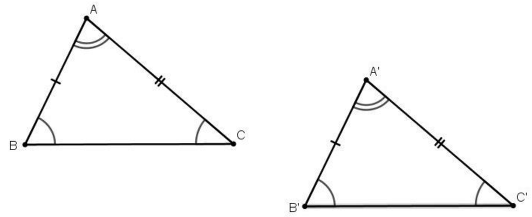
Definição 2.8. Dizemos que dois triângulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ são congruentes, e denotamos por $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $B\hat{A}C \equiv B'\widehat{A'}C'$, $A\hat{B}C \equiv A'\widehat{B'}C'$ e $B\hat{C}A \equiv B'\widehat{C'}A'$.



⊣

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

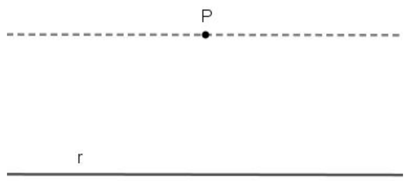
a dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ as congruências $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $B\widehat{A}C \equiv B'\widehat{A'}C'$ são válidas, então a congruência $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ é satisfeita.



2.2.4 *Axioma das paralelas*

Na geometria plana, definimos que duas retas distintas são paralelas se não se interceptam.

Axioma das Paralelas: *Seja r uma reta e P um ponto não pertencente a essa reta r. Existe uma, e somente uma, reta paralela a r que contém P.*

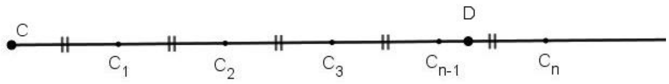


2.2.5 *Axiomas de Continuidade*

Os axiomas de continuidade não envolvem uma terceira relação primitiva, mas garantem que certas construções são possíveis. Tais construções vão permitir medir distâncias entre pontos utilizando números reais.

Axioma de Continuidade 1 (Axioma de Arquimedes): *Dados dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, existe na semirreta $\overrightarrow{CD}$ uma sucessão $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$ de pontos tais que C_1 está entre C e C_2, C_2 está entre C_1 e C_3, ..., e $\overline{CC_1} \equiv \overline{C_1C_2} \equiv \overline{C_2C_3} \equiv \ldots \equiv \overline{AB}$ e D está entre C_n e C_{n+1} para algum $n \geqslant 1$.*

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features



Curiosamente, o Axioma de Arquimedes tem relação com o axioma das paralelas e versões usualmente equivalentes, já que implica que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $\leq 180^\circ$ (teorema de Legendre). A esse respeito, veja o trabalho de Max Dehn discutido nas p. 83-86 de Hilbert, 1902.

A seguir, enunciaremos o Axioma de Continuidade 2 de Hilbert, fazendo uma tradução literal de seu enunciado original [9] (1902, cap. 1), adaptado para o contexto da geometria plana.

Axioma de Continuidade 2: *A uma estrutura de pontos e retas, é impossível adicionar outros elementos de modo que essa estrutura estendida forme uma nova geometria obedecendo esses cinco grupos de axiomas. Em outras palavras, os elementos da geometria formam uma estrutura que não é suscetível a extensão, se considerarmos válidos esses cinco grupos de axiomas.*

Esse axioma diz que para *qualquer* modelo para os outros axiomas, não é possível adicionar mais elementos ao seu domínio de modo que essa nova estrutura com as interpretações adequadas satisfaça esses mesmos axiomas. Agora, é importante observar que essa "quantificação" sobre *todos* os modelos, é impossível de ser formalizada dentro da linguagem de primeira ordem da geometria, exatamente por fazer referência aos seus modelos.

No próximo capítulo, faremos a formalização lógica dos Axiomas de Hilbert descritos acima. Veremos que é possível formalizar em primeira ordem os Axiomas de Incidência, Ordem, Congruência e o Axioma das Paralelas. Entretanto, o Axioma de Continuidade 1 não é um axioma de primeira ordem (veremos por quê) e o Axioma de Continuidade 2 nem mesmo é possível de ser formalizado nessa linguagem, pelo que comentamos anteriormente.

Faremos uma breve descrição (informal) do modelo Euclidiano: esse modelo é simplesmente o modelo com os pontos do $\mathbb{R}^2$ e as retas do $\mathbb{R}^2$, denotaremos esse modelo simplesmente por $\mathbb{R}^2$. As relações de "estar entre", congruência, pertinência são as usuais da Geometria Analítica. É possível ilustrar o papel do Axioma da Continuidade 2 com esse modelo se considerarmos a subestrutura $\mathbb{Q}^2$ formada por pontos racionais e

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

...tações das relações restritas a $\mathbb{Q}^2$. Como é possível estender $\mathbb{Q}^2$ para $\mathbb{R}^2$, o Axioma da Continuidade 2 exclui $\mathbb{Q}^2$ como modelo.

(Observação: Encontra-se uma dificuldade ao usar $\mathbb{Q}^2$ como um modelo da geometria euclideana plana, mesmo na ausência do Axioma da Continuidade 2, porque os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ tem distância $\sqrt{2}$ entre si, que não pode ser remarcada (com o compasso por exemplo) a partir da origem ao longo do eixo das abscissas. Ou seja, os axiomas de congruência não são válidos em $\mathbb{Q}^2$. Para realizar todos os axiomas de incidência, congruência e ordem, requerendo realmente o Axioma de Continuidade 2, substitua $\mathbb{Q}$ por seu fecho pitagórico, isto é, o menor corpo ordenado contendo os racionais e também fechado sob a operação $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. Ele ainda é menor que $\mathbb{R}$ (por exemplo, não contém os transcendentes).)

Construiremos em detalhes esse modelo Euclidiano $\mathbb{R}^2$, mas como mencionamos anteriormente, existem modelos de Geometria não Euclidiana, isto é, que não satisfazem o Axioma das Paralelas. O *Disco de Klein* (ou modelo de Klein, ou Beltrami-Klein) é um desses exemplos. Baseado na descrição feita por Greenberg [8] (1993, cap. 7), faremos uma breve descrição desse modelo aqui.

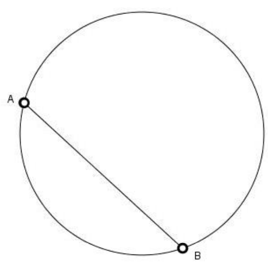
Definição 2.9 (Disco de Klein)**.** Considere $R > 0$ um número real e $O = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. O conjunto dos pontos do *Disco de Klein de raio R e centro (a,b)* é dado por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2\}.$$

Será importante considerar também o bordo do disco, que é:

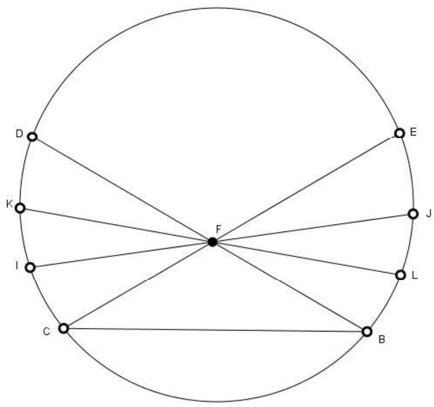
$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\}.$$

O conjunto das retas é formado pelas *cordas abertas*. Isto é, se $A, B \in \partial D$ são pontos distintos no bordo, associamos uma reta determinada por A e B como sendo o segmento de reta $\overline{AB}$ do plano Euclidiano, sem os pontos A e B.



Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

As relações de "pertencer" e "estar entre" são as mesmas relações do plano Euclidiano restritas aos conjuntos de pontos e retas do Disco de Klein. As relações de congruência, por outro lado, não são tão simples. A relação de congruência de segmento depende de uma fórmula de distância entre pontos do domínio (isto é, de uma métrica), e a relação de congruência de ângulo não é conforme (isto é, não coincide com o ângulo euclidiano), no entanto, é simples de ver como o Axioma das Paralelas falha, como na seguinte figura:



Com o modelo de Klein, é possível fazer uma segunda ilustração do Axioma da Continuidade 2: de fato, o disco de Klein é uma subestrutura do plano euclideano (os elementos primitivos restantes na subestrutura desempenham os mesmos papéis e mantém as mesmas relações entre si). Então, essa subestrutura não pode satisfazer todos os axiomas, falhando justamente no das paralelas.

Agora, se D_1 e D_2 são dois dicos de Klein concêntricos, eles satisfazem os mesmos axiomas e se $i : D_1 \to D_2$ é a imersão canônica de D_1 em D_2, existem retas r, s em D_1 que não se interceptam, mas $i(r), i(s)$ se interceptam em D_2, e então a imersão de um disco no outro não é *elementar* (i.e., não preserva propriedades ou, na terminologia do capítulo 1, as fórmulas com parâmetros).

Agora, uma breve discussão sobre "uniões" de modelos:

Considere, uma origem O em $\mathbb{R}^2$ fixada e para cada $n \in \mathbb{N}$ um disco de Klein D_n, de raio n e origem O (com as interpretações das relações primitivas descritas como acima). Obtemos uma família $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de modelos para Geometria não Euclidiana. Agora, $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Interpretarmos um ponto de $\mathbb{R}^2$ como sendo um ponto de algum disco. Dizemos que r é uma reta de $\mathbb{R}^2$ se $r \cap D_n$ é uma reta em D_n,

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

o modelo Euclidiano. Logo, união de modelos para uma teoria não necessariamente é um modelo para essa teoria.

(Observação: Ignoramos os axiomas de congruência ao visualizar um disco de Klein dentro do outro, segundo a noção de subestrutura. As relações de incidência e ordem são respeitadas, mas as medidas (como comprimentos) dentro do menor disco não são as mesmas com referência ao maior; de fato, em ambos, as retas devem ser infinitas e ilimitadas.)

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

3

FORMALIZAÇÃO NA LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM

A seguir, introduziremos uma linguagem de primeira ordem, e escreveremos os primeiros axiomas da geometria de Hilbert nessa linguagem, com exceção dos axiomas de continuidade. Como mencionado anteriormente, os axiomas de Hilbert não são formalizáveis em primeira ordem, e provaremos isso usando o teorema da compacidade, construindo uma geometria não-arquimediana (i.e., um modelo que é uma extensão elementar dos axiomas de Hilbert sem continuidade e que satisfaz a negação do axioma da continuidade). Enfim, para formalizar a geometria de Hilbert em linguagem lógica, precisaremos fazer uma digressão e introduzir a linguagem de segunda ordem, que vem a ser uma extensão para a linguagem de primeira ordem.

A linguagem da geometria (de primeira ordem) de Hilbert é dada por

$$\mathcal{L} = (P, R, \in, E, \equiv_1, \equiv_2).$$

Onde

- P : Símbolo relacional unário. Indica que é um ponto. Exemplo: $P(a)$, significa que a é um ponto.
- R : Símbolo relacional unário. Indica que é uma reta. Exemplo: $R(s)$, significa que s é uma reta.

Convencionaremos que a discriminação entre pontos e retas será feita usando variáveis maiúsculas para pontos e minúsculas para retas, a fim de facilitar a leitura. Por exemplo, o **Axioma de Incidência 1** ficaria escrito, usando os predicados unários, da seguinte forma:

$$\forall a\, \forall b\, (P(a)\ \wedge P(b) \wedge a \neq b\ \rightarrow \exists! r\ (R(r)\ \wedge\ (a \in r)\ \wedge\ (b \in r))$$

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

maiúsculas e minúsculas, fica escrito da seguinte forma:

$$\forall A\ \forall B\ (A \neq B \rightarrow \exists! r\ ((A \in r)\ \wedge\ (B \in r))),$$

e provavelmente concordamos que a última forma de escrever é muito mais simples. Isso é análogo a dizer que existem tipos de variáveis: uma metavariável para ponto, e uma metavariável para reta. Entretanto, caso se usem os predicados para um único domínio, em vez de domínios distintos, é preciso acrescentar o axioma $\forall x(P(x) \vee R(x)) \wedge \neg\exists x(P(x) \wedge R(x)) \wedge \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)$.

- $\in$: Símbolo relacional binário. Indica que um ponto pertence a uma reta. Exemplo: $\in (A, r)$. Significa que o ponto A pertence à reta r. Para facilitar o entendimento e leitura usaremos a notação $A \in r$.
- E : Símbolo relacional ternário. Indica que um ponto está entre outros dois. Exemplo: $E(A, B, C)$, significa que B está entre A e C. Para facilitar o entendimento e leitura usaremos a notação $A * B * C$.
- $\equiv_1$: Símbolo relacional quaternário. Indica que dois segmentos de retas (delimitados pelos quatro pontos) são congruentes. Exemplo: $\equiv_1 (A, B, A', B')$, para facilitar o entendimento e leitura usaremos a notação $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Significa que o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{A'B'}$.
- $\equiv_2$: Símbolo relacional 6-ário. Indica que dois ângulos (determinados pelos seis pontos) são congruentes. Exemplo: $\equiv_2 (A, O, B, A', O', B')$, para facilitar o entendimento e leitura usaremos a notação $A\hat{O}B \equiv A'\widehat{O'}B'$. Significa que o ângulo $A\hat{O}B$ é congruente ao ângulo $A'\widehat{O'}B$.

Axioma de Incidência 1

$$\forall A\ \forall B\ (A \neq B \rightarrow \exists! r\ ((A \in r)\ \wedge\ (B \in r))),$$

Notação: podemos chamar essa reta r, de $\overleftrightarrow{AB}$.

Axioma de Incidência 2

$$\forall r\ \exists A\ \exists B\ ((A \neq B)\ \wedge\ (A \in r)\ \wedge\ (B \in r))$$

Definição 3.1 (pontos colineares)**.** Sejam A, B e C pontos, se existe uma reta r tal que $A \in r$, $B \in r$ e $C \in r$, diremos que A, B e C são pontos colineares e denotaremos por $Col(A, B, C)$. Ou seja:

$$\forall A\ \forall B\ \forall C\ (Col(A, B, C)\ \leftrightarrow\ \exists r\ ((A \in r) \wedge (B \in r) \wedge (C \in r)))$$

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$\dashv$

Axioma de Incidência 3

$$\exists A\ \exists B\ \exists C\ (\neg Col(A,B,C))$$

Axioma de Ordem 1

$$\forall A\ \forall B\ \forall C\ ((A*B*C) \rightarrow (Col(A,B,C) \wedge (A \neq B) \wedge (A \neq C) \wedge (B \neq C) \wedge (C*B*A)))$$

Axioma de Ordem 2

$$\forall A\ \forall C\ ((A \neq C) \rightarrow \exists B\ (A*B*C))$$

Definição 3.2 (segmento de reta). Dados dois pontos A e B, definiremos o segmento de reta $\overline{AB}$ como a união de A, B e todos os pontos que estão entre A e B. Ou seja:

$$\forall A\ \forall B\ \forall C\ (C \in \overline{AB} \leftrightarrow ((C = A) \vee (C = B) \vee (A*C*B)))$$

$\dashv$

Axioma de Ordem 3

$$\forall A\ \forall B\ \forall C\ (((A \neq B) \wedge (A \neq C) \wedge (B \neq C)) \rightarrow (((A*B*C) \vee (A*C*B) \vee (B*A*C)) \wedge ((A*B*C) \rightarrow \neg((A*C*B) \vee (B*A*C))) \wedge ((A*C*B) \rightarrow \neg((B*A*C) \vee (A*B*C))) \wedge ((B*A*C) \rightarrow \neg((A*C*B) \vee (A*B*C)))))$$

Definição 3.3 (semirreta). Definimos semirreta $\overrightarrow{AB}$ como a união dos pontos pertencentes ao segmento $\overline{AB}$ e dos pontos C tais que $(A*B*C)$. Ou seja:

$$\forall C\ ((C \in \overrightarrow{AB}) \ \leftrightarrow\ ((C \in \overline{AB}) \vee (A*B*C)))$$

$\dashv$

Axioma de Ordem 4

$$\forall A\ \forall B\ \forall C\ ((\neg Col(A,B,C) \wedge \forall r\ (\neg((A \in r) \vee (B \in r) \vee (C \in r)))) \rightarrow (\exists D\ ((D \in r) \wedge (D \in \overline{AB})) \rightarrow (\exists E\ ((E \in r) \wedge (E \in \overline{AC})) \vee (\exists F\ ((F \in r) \wedge (F \in \overline{BC})))))))$$

Definição 3.4 (lado da reta em relação a um ponto). Dado um ponto A pertencente a uma reta r, diremos que dois pontos B e C estão na reta, mas em lados opostos em relação ao ponto A (notação: $OP_1(A,r,B,C)$) se, e somente se, B e C pertencem a reta r e A está entre B e C. Ou seja:

$$\forall r\ \forall A\ \forall B\ \forall C\ ((OP_1(A,r,B,C) \leftrightarrow ((B \in r) \wedge (C \in r) \wedge (B*A*C))$$

$\dashv$

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$\forall A\ \forall B\ \forall A'\ \forall r\ \forall s\ (((A \in r) \wedge (B \in r) \wedge (A' \in s)) \to \exists! B'\ \exists! B''\ ((B' \in s) \wedge (B'' \in s) \wedge OP_1(A', s, B', B'') \wedge (\overline{AB} \equiv_1 \overline{A'B'}) \wedge (\overline{AB} \equiv_1 \overline{A'B''})))$

Axioma de Congruência 2

$\forall A\ \forall B\ \forall A'\ \forall B'\ \forall A''\ \forall B''\ (((\overline{AB} \equiv_1 \overline{A'B'}) \wedge (\overline{A'B'} \equiv_1 \overline{A''B''})) \to (\overline{AB} \equiv_1 \overline{A''B''}))$

Axioma de Congruência 3

$\forall A\ \forall B\ \forall C\ \forall A'\ \forall B'\ \forall C'\ (((A * B * C) \wedge (A' * B' * C') \wedge (\overline{AB} \equiv_1 \overline{A'B'}) \wedge (\overline{BC} \equiv_1 \overline{B'C'})) \to (\overline{AC} \equiv_1 \overline{A'C'}))$

Definição 3.5 (Ângulo)**.** Chamaremos de ângulo $A\hat{O}B$ a união das duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Ou seja:

$$\forall C((C \in A\hat{O}B) \leftrightarrow (C \in \overrightarrow{OA} \vee \overrightarrow{OB}))$$

⊣

Definição 3.6 (Lado de um plano em relação a uma reta)**.** Dada uma reta r e pontos A e B não pertencentes a r, diremos que A e B estão em lados opostos em relação à reta r (notação: $OP_2(r, A, B)$) se existe intersecção entre o segmento $\overline{AB}$ e a reta r. Ou seja:

$\forall A\ \forall B\ \forall r\ ((OP_2(r, A, B)) \leftrightarrow (\neg(A \in r) \wedge \neg(B \in r) \wedge \exists C\ ((C \in r) \wedge (C \in AB))))$

⊣

Axioma de Congruência 4

$\forall A\ \forall O\ \forall B\ \forall O'\ \forall B'\ \exists! A'\ \exists! A''\ ((OP_2(\overleftrightarrow{O'B'}, A', A'')) \wedge (A\hat{O}B \equiv_2 A'\widehat{O'}B') \wedge (A\hat{O}B \equiv_2 A''\widehat{O'}B') \wedge (\overline{O'B'} \equiv \overline{O'A'}) \wedge (\overline{O'B'} \equiv \overline{O'A''}))$

Axioma de Congruência 5

$\forall A\ \forall O\ \forall B\ \forall A'\ \forall O'\ \forall B'\ \forall A''\ \forall O''\ \forall B''\ (((A\hat{O}B \equiv_2 A'\widehat{O'}B') \wedge (A'\widehat{O'}B' \equiv_2 A''\widehat{O''}B'')) \to (A\hat{O}B \equiv_2 A''\widehat{O''}B''))$

Definição 3.7 (Triângulo)**.** Sejam pontos A, B e C pontos distintos, o triângulo $\triangle ABC$ é a união dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Ou seja:

$$\forall D\ ((D \in \triangle ABC) \leftrightarrow ((D \in \overline{AB}) \vee (D \in \overline{BC}) \vee (D \in \overline{AC})))$$

⊣

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

ngulos). Dados pontos A, B, C, A', B', C', dizemos que $\triangle ABC \equiv_\triangle \triangle A'B'C'$ se, e somente se $AB \equiv_1 A'B'$, $BC \equiv_1 B'C'$, $AC \equiv_1 A'C'$, $A\widehat{B}C \equiv_2 A'\widehat{B'}C'$, $A\widehat{C}B \equiv_2 A'\widehat{C'}B'$ e $B\widehat{A}C \equiv_2 B'\widehat{A'}C'$. Ou seja:

$$\forall A\ \forall B\ \forall C\ \forall A'\ \forall B'\ \forall C'\ ((\triangle ABC \equiv_\triangle \triangle A'B'C') \leftrightarrow ((\overline{AB} \equiv_1 \overline{A'B'}) \wedge (\overline{BC} \equiv_1 \overline{B'C'}) \wedge (\overline{AC} \equiv_1 \overline{A'C'}) \wedge (A\widehat{B}C \equiv_2 A'\widehat{B'}C') \wedge (A\widehat{C}B \equiv_2 A'\widehat{C'}B') \wedge (B\widehat{A}C \equiv_2 B'\widehat{A'}C')))$$

$\dashv$

Axioma de Congruência 6

$$\forall A\ \forall B\ \forall C\ \forall A'\ \forall B'\ \forall C'\ (((\overline{AB} \equiv_1 \overline{A'B'}) \wedge (\overline{AC} \equiv_1 \overline{A'C'}) \wedge (B\widehat{A}C \equiv_2 B'\widehat{A'}C')) \rightarrow (\triangle ABC \equiv_\triangle \triangle A'B'C'))$$

Definição 3.9 (Retas paralelas)**.** Dadas r e s retas, dizemos que r é paralela a s, quando não há um ponto em comum as duas. Notação: $r \parallel s$. Ou seja:

$$\forall r\ \forall s\ (r \parallel s\ \leftrightarrow\ \neg\exists A\ ((A \in r) \wedge (A \in s)))$$

$\dashv$

Axioma das Paralelas

$$\forall r\ \forall A\ (\neg(A \in r) \rightarrow \exists! s\ ((A \in s) \wedge (s \parallel r)))$$

Como mencionado anteriormente, os axiomas de continuidade não podem ser formalizados em lógica de primeira ordem, usando essa linguagem que estamos utilizando. A seguir, vamos construir uma $\mathcal{L}$-estrutura e assumiremos que é um modelo para os axiomas de Hilbert descritos até aqui. A demonstração de que essa estrutura é de fato um modelo é feita no capítulo seguinte (ver 4.1). A partir desse modelo iremos construir uma extensão elementar que satisfaz a negação do primeiro axioma da continuidade, e veremos como isso implica que não é possível descrever esse axioma em primeira ordem.

Nossa $\mathcal{L}$-estrutura é da forma $\mathcal{M} = (D, E^{\mathcal{M}}, \in^{\mathcal{M}}, \equiv_1^{\mathcal{M}}, \equiv_2^{\mathcal{M}})$, onde $D = D_1 \cup D_2$.

No D_1 estão os elementos do domínio referentes aos pontos, assim, D_1 será o $\mathbb{R}^2$, e no D_2 estão os elementos do domínio referentes as retas, que por sua vez são conjuntos de pontos no $\mathbb{R}^2$. Portanto, como o conjunto dos pontos e o conjunto das retas do domínio são disjuntos, podemos particionar o domínio e definir nosso modelo da seguinte forma:

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\mathcal{M} = (D_1, D_2, E^{\mathcal{M}}, \in^{\mathcal{M}}, \equiv_1^{\mathcal{M}}, \equiv_2^{\mathcal{M}})$$

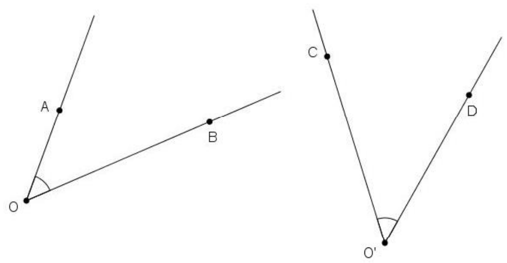
- $D_1 = \mathbb{R}^2$

Uma reta é determinada por uma tripla (a,b,c) com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ tomando os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem $ax + by + c = 0$. Assim, para cada tripla (a,b,c) como acima, consideraremos $[(a,b,c)] \subseteq \mathbb{R}^2$, a reta determinada por essa tripla:

$$[(a,b,c)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}.$$

- $D_2 = \{[(a,b,c)] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \mid a \neq 0 \vee b \neq 0\}$
- $\in^{\mathcal{M}} = \{((x,y), [(a,b,c)]) \in D_1 \times D_2 \mid ax + by + c = 0\}$
- $E^{\mathcal{M}} = \{((x,y), (x',y'), (x'',y'')) \in D^3 \mid \exists\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3(((x,y) \in [(a,b,c)]) \wedge ((x',y') \in [(a,b,c)]) \wedge (b \neq 0 \rightarrow (x < x' < x'' \vee x'' < x' < x)) \wedge (b = 0 \rightarrow (y < y' < y'' \vee y'' < y' < y))\}$
- $\equiv_1^{\mathcal{M}} = \{((x,y), (x',y'), (x'',y''), (x''',y''')) \in D_1^4 \mid (x - x')^2 + (y - y')^2 = (x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2\}$

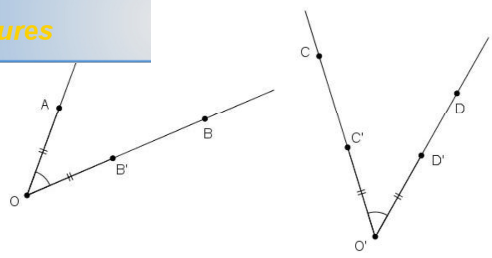
Falta interpretar a congruência $\equiv_2$. Porém, em Geometria Euclidiana, a relação $\equiv_2$ pode ser definida a partir da relação $\equiv_1$. Isso ocorre devido ao caso de congruência LLL.



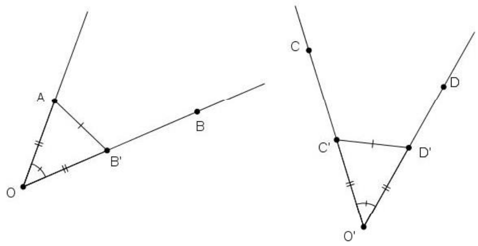
Informalmente, se queremos mostrar que dois ângulos $A\hat{O}B$ e $C\widehat{O'}D$ são congruentes, podemos prosseguir da seguinte forma: fixamos um ponto na semirreta $\overrightarrow{OA}$, que pode ser o próprio A, então pelo Axioma de Congruência 1, tomamos o único ponto B' na semirreta $\overrightarrow{OB}$ tal que $\overline{OB'} \equiv_1 \overline{OA}$. Agora, novamente pelo Axioma de Congruência 1, tomamos os únicos pontos C' na semirreta $\overrightarrow{O'C}$ e D' na semirreta $\overrightarrow{O'D}$ tais que $\overline{OA} \equiv_1 \overline{O'C'} \equiv_1 \overline{O'D'}$.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features



Se $\overline{AB'} \equiv_1 \overline{C'D'}$, então $A\widehat{O}B \equiv_2 C\widehat{O'}D$. Logo, é suficiente interpretar o símbolo $\equiv_1$.



Mesmo não sendo necessária a interpretação da relação de congruência de ângulos, mostraremos como medir um ângulo qualquer sabendo as coordenadas do vértice e de um ponto em cada lado desse ângulo. Sabendo isso, teremos como corolário a forma de decidir se dois ângulos são congruentes.

Definição 3.10 (Medida de ângulo)**.** Sejam (x_A, y_A), (x_O, y_O) e (x_B, y_B) três pontos distintos e não colineares do $\mathbb{R}^2$. Calculamos a medida do ângulo $A\widehat{O}B$ (notação: $m(A\widehat{O}B)$) utilizando a seguinte expressão:

$$m(A\widehat{O}B) = \arccos\left(\frac{(x_A - x_O).(x_B - x_O) + (y_A - y_O).(y_B - y_O)}{\sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}.\sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2}}\right)$$

Explicação: usamos o produto interno dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

$\dashv$

Definição 3.11 (Congruência de ângulos)**.** Eves [5] (1997, p. 94) Sejam (x_A, y_A), (x_O, y_O) e (x_B, y_B) três pontos distintos e não colineares do $\mathbb{R}^2$ e sejam (x'_A, y'_A), (x'_O, y'_O) e (x'_B, y'_B) três pontos distintos e não colineares do $\mathbb{R}^2$, diremos que os ângulos $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$ são congruentes (notação: $A\widehat{O}B \equiv_2 A'\widehat{O'}B'$) se, e somente se:

$$\frac{(x_A - x_O).(x_B - x_O) + (y_A - y_O).(y_B - y_O)}{\sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}.\sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2}} =$$

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

$$\frac{\ldots - x'_O) + (y'_A - y'_O).(y'_B - y'_O)}{\sqrt{(x'_A - x'_O)^2 + (y'_A - y'_O)^2}.\sqrt{(x'_B - x'_O)^2 + (y'_B - y'_O)^2}}$$

$\dashv$

Definição 3.12. A estrutura que construímos acima será dita modelo usual da geometria euclidiana (veja o Teorema 4.1). Denotaremos esse modelo simplesmente por $\mathbb{R}^2$ (embora nosso domínio seja o $\mathbb{R}^2$ unido com o conjunto das retas em $\mathbb{R}^2$).

$\dashv$

Agora usaremos o teorema da compacidade para construir uma geometria não arquimediana.

Teorema 3.13. *Seja T a teoria apenas com os axiomas de incidência, ordem, congruência e paralelas (i.e., sem os axiomas de continuidade). Existe um modelo para T onde vale a negação do Axioma 1 de continuidade.*

Demonstração. Seja $\mathbb{R}^2$ usual. Considere a linguagem expandida $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$, com um novo símbolo de constante para cada ponto do $\mathbb{R}^2$, e considere P_∞ um símbolo novo de constante. Considere a semirreta real $r = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}_+\}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $A_n = (n,0) \in r$. Recursivamente, vamos construir uma teoria $T^* \supseteq T$ consistente da seguinte forma:

- $T_0 = T$;
- $T_1 = T_0 \cup \{\neg(A_0 * P_\infty * A_1)\}$;
- $T_2 = T_1 \cup \{\neg(A_1 * P_\infty * A_2)\}$;
- $T_3 = T_2 \cup \{\neg(A_2 * P_\infty * A_3)\}$;

  $\vdots$
- $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg(A_{n-1} * P_\infty * A_n)\}$;

$T^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$

Observe que toda parte finita de T^* está em algum T_n. E além disso, $Conseq_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}}(T) = Conseq_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}}(T^*)$.

Note que cada T_n tem modelo: se $\sigma : Var \to \mathbb{R}^2$ tal que $\sigma^*(P_\infty) = A_{n+1}$ temos que $(\mathbb{R}^2; \sigma) \models T_n$.

Assim, T^* tem um modelo que, por construção, é não arquimediano. $\square$

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

tinuidade 1 não pode ser formalizado em lógica de primeira ordem.

Por conta disso, faremos uma breve análise da sintaxe e da semântica da lógica de segunda ordem.

LÓGICA DE SEGUNDA ORDEM

Na linguagem de 2ª ordem temos os seguintes tipos de variáveis e quantificadores:

- variáveis para indivíduos: $x, y, z, \ldots$ com quantificadores $\forall$ $\exists$;
- para cada $n \in \mathbb{N}$ temos variáveis para as relações e funções n-árias e quantificadores $\forall^n$ $\exists^n$, que denotaremos simplesmente por $\forall$ $\exists$ e n ficará implícito pelo contexto.

Exemplo 3.1 (Axiomas de Peano). Considere a linguagem $\mathcal{L}_{PA} = (+, \cdot, 0, s)$ da aritmética de Peano. Em primeira ordem, o Axioma de Indução é, na verdade, um Esquema de Axiomas. Assim, se A é uma fórmula, é axioma:

- $(A|_{x=0} \wedge \forall x\ (A \rightarrow A|_{x=s(x)})) \rightarrow \forall x A$

Já em segunda ordem, podemos escrever como um único Axioma:

- $\forall A\ (A(0) \wedge \forall x\ (A(x) \rightarrow A(s(x))) \rightarrow \forall x\ A(x))$

Note que, no exemplo anterior, em primeira ordem só conseguimos escrever um axioma se, e somente se, é nos dada uma fórmula. Isto é, precisamos, a priori, de uma fórmula. Por outro lado, em segunda ordem, podemos quantificar sobre *todas* as fórmulas de uma vez e também sobre conjuntos que não são dados por fórmulas, uma vez que podemos quantificar também sobre relações e funções.

Axioma de Continuidade 1

$\forall A\ \forall B\ \forall C\ \forall D\ \exists n \exists P_1 \ldots \exists P_n \rightarrow ((P_1 = C) \wedge (P_2 \in \overrightarrow{CD}) \wedge \ldots \wedge P_n \in \overrightarrow{CD} \wedge P_1P_2 \equiv \ldots \equiv P_{n-1}P_n \equiv AB \wedge (P_{n-1} * D * P_n))$

Note que o axioma acima quantifica sobre uma relação n-ária. Gostaríamos de escrever “existe $n \in \mathbb{N}$ e uma relação n-ária X tal que...”, mas não podemos fazer isso em primeira ordem, porque cada n natural está na metalinguagem usada pra construir os símbolos relacionais e funcionais n-ários e para indexação. Para incluirmos a cláusula existencial $\exists n$, portanto, precisamos que n seja variável, ou seja, incluir $\mathbb{N}$ como domínio. Para eliminarmos as elipses “...”, precisamos considerar $P_1, \ldots, P_n$ como um

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

[illegible]s. Para garantir que n e esse subconjunto são finitos, também é necessária a segunda ordem, conforme o Teorema 1.43. (Com segunda ordem, não é necessário ter $\mathbb{N}$ como domínio para identificar n finito, já que um subconjunto, como o de $P_1, \ldots, P_n$, é finito se e somente se toda injeção dele nele mesmo é sobrejetora.)

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

4

GEOMETRIA ANALÍTICA COMO REALIZAÇÃO

No capítulo anterior fizemos a formalização dos axiomas de incidência, ordem, congruência e das paralelas usando linguagem de primeira ordem. Para os axiomas de continuidade, mostramos que o primeiro axioma de continuidade não é formalizável em primeira ordem, mas sim, em segunda ordem e o segundo axioma de continuidade não é formalizável por se tratar de um metaaxioma. Nesse capítulo apresentaremos o começo da demonstração de uma estrutura que satisfaz todos os axiomas de primeira ordem da geometria plana de Hilbert.

Teorema 4.1. *A estrutura $\mathbb{R}^2$ definida no capítulo anterior (Definição 3.12, veja também Eves [5], 1997, p.94) é modelo para os axiomas de primeira ordem da geometria de Hilbert.*

Para demonstrar esse teorema teríamos que provar que a estrutura $\mathbb{R}^2$ satisfaz a cada um dos axiomas de primeira ordem descritos no capítulo anterior. Nesse trabalho apresentaremos apenas a demonstração do primeiro axioma de congruência. Para comparação, faremos duas demonstrações desse axioma, uma demonstração utilizando as noções usuais de geometria analítica e uma demonstração formal utilizando as definições de satisfação apresentadas no primeiro capítulo.

Comecemos pela demonstração utilizando ferramentas usuais de geometria analítica.

Lema 4.2. *Sejam $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $a' \neq 0$ ou $b' \neq 0$. Se existem A, B distintos tais que $A, B \in [(a,b,c)] \cap [(a',b',c')]$ então existe $k \in \mathbb{R}^*$ tal que $(a',b',c') = (ak, bk, ck)$ e, portanto, $[(a,b,c)] = [(a',b',c')]$.*

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

...) e $B = (x_B, y_B)$ pontos que estão em $[(a,b,c)] \cap$ $[(a',b',c')]$. Ou seja, valem as equações $ax_A + by_A + c = 0$, $ax_B + b.y_B + c = 0$, $a'x_A + b'y_A + c' = 0$ e $a'x_B + b'y_B + c' = 0$.

Das duas primeiras equações, temos que

$$a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0.$$

Das outras duas equações, temos que

$$a'(x_B - x_A) + b'(y_B - y_A) = 0.$$

- Se $x_A = x_B$, então $y_A \neq y_B$, pois $A \neq B$. Obtemos, nesse caso, que $b = b' = 0$. Logo, tanto a como a' são não nulos. Assim,

$$x_A = x_B = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}.$$

  Logo, podemos definir $k = \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$. E, como $b = b' = 0$, então $b' = bk$.

- Se $y_A = y_B$, por raciocínio análogo, chegaremos ao mesmo resultado.

- Se $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$. Temos que

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{a'}{b'} = -\frac{a}{b}$$

  Logo, definindo $k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, temos:

$$ck = (-ax_A - by_A)k = -(ak)x_A - (bk)y_A = -a'x_A - b'y_A = c'$$

Agora, para ver que $[(a,b,c)] = [(a',b',c')]$, sejam k não nulo como acima e $(x,y) \in [(a,b,c)]$ então $ax + by + c = 0$ e, portanto, $0 = (ak)x + (bk)y + ck = a'x + b'y + c'$, segue que $(x,y) \in [(a',b',c')]$. A outra inclusão é análoga.

□

Note que esse lema diz que existe uma única reta que passa pelos pontos distintos A, B. Denotaremos essa única reta por $\overleftrightarrow{AB}$:

Definição 4.3. Sejam $A = (x_A, y_A) \in \mathbb{R}^2$, $B = (x_B, y_B) \in \mathbb{R}^2$ e $A \neq B$, definimos

$$\overleftrightarrow{AB} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

PDF Complete
Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

uma equação da forma $ax + by + c = 0$, onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Mais precisamente,

$$\overleftrightarrow{AB} = [(y_A - y_B, x_B - x_A, x_A y_B - x_B y_A)].$$

$\dashv$

Note que o Lema 4.2, que nos permite definir a reta $\overleftrightarrow{AB}$ determinada por A e B é exatamente a afirmação de que o Axioma da Incidência 1 vale no modelo $\mathbb{R}^2$. Isto é, provamos que dados pontos A, B distintos, existe uma única reta que contém A e B. Mas como seria escrever essa afirmação formalmente usando a definição de satisfação apresentada no Capítulo 1? Mais precisamente, como provar formalmente

$$\mathbb{R}^2 \models \forall A\ \forall B\ (P(A) \wedge P(B) \wedge A \neq B \rightarrow \exists! r\ (R(r)\ \wedge\ A \in r\ \wedge\ B \in r))?$$

Aqui, é importante a utilização dos predicados unários P (para ponto) e R (para reta), pois são eles que irão permitir que uma dada valoração particione o domínio em D_1 e D_2. Para entender a dificuldade em executar uma demonstração formal, ilustraremos como validar esse axioma.

Seja $\sigma : Var \rightarrow D$. Queremos provar que

$$(\mathbb{R}^2, \sigma) \models \forall A\ \forall B\ (P(A) \wedge P(B) \wedge A \neq B \rightarrow \exists! r\ (R(r)\ \wedge\ A \in r\ \wedge\ B \in r))$$

Assim, seja $\tau : Var \rightarrow D$ tal que $\tau(v) = \sigma(v)$ se v não é A. Agora queremos provar que

$$(\mathbb{R}^2, \tau) \models \forall B\ (P(A) \wedge P(B) \rightarrow \exists! r\ (R(r)\ \wedge\ A \in r\ \wedge\ B \in r))$$

Seja $\theta : Var \rightarrow D$ tal que $\theta(v) = \tau(v)$ se v não é B. Queremos mostrar que

$$(\mathbb{R}^2, \theta) \models (P(A) \wedge P(B) \rightarrow \exists! r\ (R(r)\ \wedge\ A \in r\ \wedge\ B \in r))$$

O que é equivalente a mostrar que se $(\mathbb{R}^2, \theta) \models (P(A) \wedge P(B))$ então $(\mathbb{R}^2, \theta) \models \exists! r\ (R(r)\ \wedge\ A \in r\ \wedge\ B \in r)$. Agora, basta mostrar que existe uma única valoração $\rho : Var \rightarrow D$ com $\rho(v) = \theta(v)$ se v não é r, tal que

$$(\mathbb{R}^2, \rho) \models R(r)\ \wedge\ A \in r\ \wedge\ B \in r$$

Isto é

i. $R^{\mathbb{R}^2}(\rho(r))$

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

iii. $\rho(B) \in^{\mathbb{R}^2} \rho(r)$

Como $(\mathbb{R}^2, \theta) \models (P(A) \wedge P(B))$, então $P^{\mathbb{R}^2}(\theta(A))$ e $P^{\mathbb{R}^2}(\theta(B))$. Como $\rho(v) = \theta(v)$ se v não é r, em particular, $\rho(A) = \theta(A)$ e $\rho(B) = \theta(B)$, com isso $P^{\mathbb{R}^2}(\rho(A))$ e $P^{\mathbb{R}^2}(\rho(B))$.

Assim, defina

- $\rho(v) = \theta(v)$ se v não é r
- $\rho(r) = \overleftrightarrow{\rho(A)\rho(B)}$

Note que ρ está bem definida e satisfaz os itens i., ii. e iii. acima.

Informalmente, que o que provamos anteriormente é:

$$\forall A \in D_1 \; \forall B \in D_1 \; (A \neq B \to \exists! r \in D_2 \; (A \in r \wedge B \in r)).$$

A parte crucial do argumento foi, na verdade, o Lema 4.2, que usamos para tomar $\rho(r)$ como sendo a única reta determinada por $\rho(A)$ e $\rho(B)$.

Perceba que é possível fazer todas as demonstrações usando as noções de geometria analítica que conhecemos, e fica convencionado que qualquer demonstração desse tipo pode ser convertida em uma demonstração usando a noção formal de satisfação e modelo que conhecemos.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

A seguir faremos uma breve descrição de "conjuntos definíveis", assunto que é correlato com o presente trabalho e fica como indicação para maiores estudos a respeito. Para maior profundidade no assunto, tem-se como referência Van den Dries [3] (1998, cap. 1, seções 1 e 2).

Lugares geométricos (círculo, parábola, cone etc.) são conjuntos de pontos que satisfazem propriedades dadas. Essas propriedades podem ser consideradas aquelas descritas pelas fórmulas como desenvolvidas no primeiro capítulo. Os conjuntos correspondentes são chamados "conjuntos definíveis".

Como temos conjunção, disjunção e negação de fórmulas, as famílias de conjuntos definíveis são fechadas sob intersecção, produto cartesiano, união (em número finito) e complemento. Além disso, os conjuntos vazio e universo sempre são definíveis (fórmulas $x \neq x$ e $x = x$). Portanto, essas famílias são álgebras de Boole. Temos um sistema de álgebras de Boole, uma para cada produto cartesiano ou potência dos domínios da estrutura considerada.

Esse sistema também tem a seguinte propriedade: diagonais (fórmulas $x = y$) e projeções de conjuntos definíveis são definíveis, em decorrência da quantificação existencial. Por exemplo, se A é o domínio e D é um subconjunto definível de A^3, então

$$\{(x,z) \in A^2 \mid \text{ existe } y \text{ em } A \text{ de modo que } (x,y,z) \text{ em } A^3\}$$

é definível também.

Um sistema de álgebras de Boole em todos os produtos cartesianos e potências do domínio e sujeito a tais propriedades pode ser postulado assim como sistema de conjuntos definíveis.

As relações primitivas constróem os conjuntos definíveis mais simples: $\{(x,y) \mid x \in y\}$, $\{(x,y,u,v) \mid xy \equiv uv\}$ etc. Entretanto, conjuntos definíveis não têm hierarquia entre si. Podemos nos perguntar se um outro grupo de conjuntos tomados como "simples" gera o mesmo sistema de álgebras de Boole. Isso implica haver outros entes primitivos e outros axiomas equivalentes aos da estrutura original, no sentido de que esses entes primitivos e axiomas são interdefiníveis.

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.
Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

euclideana plana, Blumenthal [1] (1980) apresenta definições diferentes de reta em um espaço Λ:

Definição 4.4. Sejam P e Q dois pontos distintos de um espaço Λ, a reta $L(P,Q)$ determinada por P e Q é o conjunto de todos os pontos X tais que $Col(P,Q,X)$ (ou seja, P,Q e X são colineares). Claramente, $P,Q \in L(P,Q)$. Blumenthal [1] (cap. VII, seção 4).

Definição 4.5. Sejam P e Q dois pontos distintos de um espaço Λ, a reta $L(P,Q)$ consiste em P, Q e todos os pontos X tais que $(X * P * Q)$ ou $(P * X * Q)$ ou $(P * Q * X)$. Blumenthal [1] (cap. VII, seção 6).

Essas definições substituem o ente primitivo "reta" por outro, a partir do qual as retas tornam-se conjuntos definíveis.

Outro exemplo pode ser encontrado em Tarski e Givant [13] (1999, p. 177 e 188).

Your complimentary use period has ended. Thank you for using PDF Complete.

Click Here to upgrade to Unlimited Pages and Expanded Features

BIBLIOGRAFIA

[1] Blumenthal, L. M.: *A modern view of geometry*. Dover, 1980.

[2] Custódio, K.: *Introdução ao estudo dos corpos ordenados*. Dissertação PROFMAT, UFABC, 2016.

[3] Dries, L. Van den: *Tame topology and o-minimal structures*, vol. 248. Cambridge University Press, 1998.

[4] Eves, H.: *Introdução à história da matemática*. Tradução Hygino H. Domingues, vol. 3. Editora da Unicamp, 1995.

[5] Eves, H.: *Foundations and fundamental concepts of mathematics*. Dover, 3ª ed., 1997.

[6] Fajardo, R.: *Lógica Matemática*. Versão preliminar (distribuição pessoal). No prelo, 2017.

[7] Fetissov, A. e P. T. e Lima: *A demonstração em geometria*. Atual Editora, 1995.

[8] Greenberg, M. J.: *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. Macmillan, 3ª ed., 1993.

[9] Hilbert, D.: *The foundations of geometry*. Open Court Publishing Company, 1902.

[10] Mortari, C. A.: *Introdução à lógica*. SciELO-Editora UNESP, 2001.

[11] Roque, T.: *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar, 2012.

[12] Sant'anna, A. S.: *O que é um axioma*. Manole, 2003.

[13] Tarski, A e Givant, S.: *Tarski's system of geometry*. Bulletin of Symbolic Logic, 5(2):175–214, 1999.