



Universidade Federal do ABC

MARINA MARIANO DE OLIVEIRA

Curvas pedais e Teorema dos Quatro Vértices: uma introdução à geometria diferencial

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Santo André, 2018



Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Marina Mariano de Oliveira

Curvas pedais e Teorema dos Quatro Vértices: uma introdução à geometria diferencial

Orientador: Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELA ALUNA MARINA MARIANO DE OLIVEIRA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MARCUS ANTONIO MENDONÇA MARROCOS.

Santo André, 2018

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Oliveira, Marina Mariano de
Curvas pedais e Teorema dos Quatro Vértices : uma
introdução à geometria diferencial / Marina Mariano de Oliveira. —
2018.

120 fls.

Orientador: Marcus Antonio Mendonça Marrocos

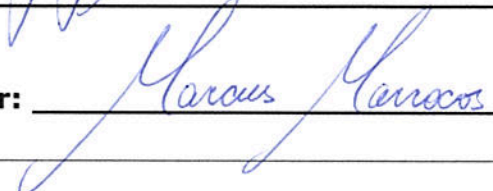
Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC,
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT, Santo André, 2018.

1. geometria diferencial. 2. curvas planas. 3. curva pedal.
4. Teorema dos Quatro Vértices. 5. string art. I. Marrocos,
Marcus Antonio Mendonça. II. Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2018. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 14 de maio de 2018.

Assinatura do autor: 

Assinatura do orientador: 

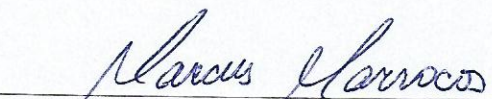


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

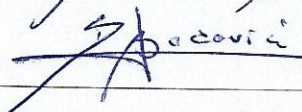
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Marina Mariano de Oliveira, realizada em 23 de fevereiro de 2018:

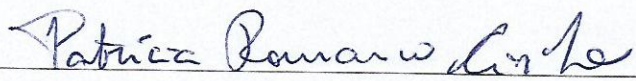


Prof.(a) Dr.(a) **Marcus Antônio Mendonça Marrocos** (Universidade Federal do ABC) – Presidente



Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular



Prof.(a) Dr.(a) **Patricia Romano Cirilo** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Renato Alessandro Martins** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

DEDICATÓRIA

Toda a sociedade é fruto de uma sucessão de esforços e de sacrifícios de nossos antecessores, feitos a fim de promover o desenvolvimento da humanidade. Com nossa vida não é diferente... Por isso, dedico esta dissertação aos meus pais, pois ela também foi, de certa forma, construída por eles.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à toda minha família – pais, avós, tios, primos, irmãs e sobrinhos –, pelo orgulho que sempre sentiram de mim e por, mesmo sem dominarem o conteúdo deste trabalho, muito me incentivarem. Em especial, agradeço aos meus pais, Francisco e Maria Cecília, por acreditarem na Educação como transformação social e pelo grande investimento financeiro que me fizeram em prol disso. A eles, às minhas irmãs – Marília e Júlia – e aos meus sobrinhos – Arthur e Davi –, obrigada pelo apoio incondicional em todos os momentos de minha vida. Amo vocês!

Aos meus amigos e aos meus (ex-)alunos, obrigada pela torcida de sempre e por vibrarem, junto comigo, com minhas conquistas. Aos meus (ex-)colegas de trabalho e aos meus (ex-)professores, obrigada por contribuírem para a minha formação – desde a Educação Infantil até a pós-graduação. Em especial, agradeço ao ex-aluno Vitor Santa Rosa Gomes, por suas muitas colaborações com o GeoGebra e com o LaTeX, e à professora doutora Patrícia Romano Cirilo, por todas as suas contribuições com esta dissertação e por toda a sua disponibilidade, mesmo sem obrigação.

Ao programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, agradeço pela oportunidade de novos conhecimentos e de crescimento acadêmico e, também, pelos amigos proporcionados, os quais tornaram mais leve esta caminhada. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, obrigada pelo investimento e, à Universidade Federal do ABC, obrigada por suas estruturas física e intelectual. Agradeço, também, ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo por me permitir dedicar, integralmente, a esta dissertação no último ano.

Especialmente, agradeço ao meu orientador, professor doutor Marcus Antonio Mendonça Marrocos, por sua disponibilidade, por seus conhecimentos compartilhados, pela paciência, pelos conselhos, críticas e sugestões dados... Enfim, por tudo aquilo que contribuiu para que eu chegasse até aqui. A ele, meu respeito, minha admiração e minha gratidão. Muito obrigada!

“Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas. Mas, ao tocar uma alma humana, seja apenas uma outra alma humana.”
(Carl Gustav Jung)

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos a geometria diferencial das curvas planas de um modo mais acessível para um leitor não especialista no assunto, mas de forma a despertar seu interesse. A Teoria Local das Curvas Planas é desenvolvida por meio de exemplos e, em particular, exibimos a família das curvas pedais. Ilustramos a Teoria Global por meio do Teorema dos Quatro Vértices e apresentamos, também, formas de explorar os conceitos de geometria diferencial na Educação Básica, com resultados geométricos interessantes e visualmente atraentes. Para isso, contamos com o auxílio do GeoGebra, um *software* de matemática dinâmica, e da *string art*, um estilo de arte caracterizado por um arranjo de cordas que formam padrões geométricos. Com isso, buscamos proporcionar ao leitor uma forma diferente de experimentar a geometria diferencial das curvas planas, bem como proporcionar aos alunos do Ensino Médio um aprendizado interessante de geometria analítica.

Palavras-chave: geometria diferencial; curvas planas; curva pedal; Teorema dos Quatro Vértices; *string art*.

ABSTRACT

In this work, we present the differential geometry of the plane curves in an accessible way for not specialized readers in the subject, but in order to arouse their interest. The Local Theory of Plane Curves is developed by means of several examples and, in particular, we bring out the class of pedal curves. In order to illustrate the Global Theory we present the Four-Vertex Theorem and we also present a way to introduce differential geometry concepts to secondary school students with interesting and visually attractive geometric results. To do this, we use the software GeoGebra, a interactive geometry and algebra application, and string art, a sort of art characterized by an arrangement of strings that form geometric patterns. We hope to provide to the readers a practical experience of differential geometry of plane curves, as well as providing them the students of High School with an interesting learning of analytical geometry.

Keywords: differential geometry; plane curves; pedal curve; Four-Vertex Theorem; string art.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre a geometria diferencial das curvas planas e temos como principal objetivo estudá-la de um modo mais acessível, baseando-nos em conceitos fundamentais dos cálculos vetorial e diferencial.

A restrição às curvas planas se deve ao fato de que muitos resultados podem ser obtidos apenas com conceitos básicos de tais cálculos e por nos permitir trabalhar em um ambiente bastante conhecido na Educação Básica, que é o plano euclidiano. Com isso, adquirimos a possibilidade de utilizarmos o computador para obtermos, sem grande dificuldade, representações gráficas que nos auxiliam na exploração de algumas propriedades das curvas planas.

No Capítulo 1, trazemos os principais conceitos do cálculo vetorial, das isometrias no plano e do cálculo diferencial que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Apresentamos, no Capítulo 2, os conceitos fundamentais da geometria diferencial plana, tais como curva parametrizada diferenciável, curva regular, comprimento de arco e reparametrização, além de exemplos de parametrizações de curvas já conhecidas no Ensino Médio, como as cônicas.

No Capítulo 3, introduzimos uma classe particular de curvas planas, as curvas pedais. Definimos suas coordenadas, trazemos exemplos – como as limaçons, a lemniscata de Bernoulli, a cissoide de Diocles e a estrofoide reta –, fornecemos alguns dados históricos e indicamos algumas de suas aplicações.

Passamos a estudar, no Capítulo 4, a geometria local das curvas planas, que trata das propriedades geométricas da curva em uma vizinhança de um ponto de seu traço. Exploramos, principalmente, o conceito de curvatura, com sua interpretação geométrica e com gráficos de função curvatura, que nos permitem identificar pontos de máxima ou de mínima curvatura – os vértices.

Ainda neste capítulo, tratamos de raio de curvatura, de centro de curvatura, de circunferência osculadora e de evoluta de uma curva e demonstramos o Teorema Fundamental das Curvas no Plano, que afirma que a função curvatura de uma curva plana regular a determina completamente, a menos de um movimento rígido no plano.

No Capítulo 5, passamos a investigar algumas propriedades globais das curvas planas, como índice de rotação e curvatura total. Demonstramos, também, o Teorema dos Quatro Vértices, que, em sua primeira versão, afirma que toda curva plana, regular, fechada, simples e convexa possui, pelo menos, quatro vértices.

Exploramos, no Capítulo 6, possibilidades de abordar o assunto na Educação Básica. Trazemos duas propostas de abordagem da curva pedal: a primeira, com a construção geométrica de algumas curvas pedais das cônicas e auxiliados pelo GeoGebra; e a segunda, com a determinação algébrica de suas coordenadas cartesianas, por meio de conceitos de geometria analítica tratados no Ensino Médio. Por fim, trazemos uma proposta de atividade que instiga os alunos sobre a noção de curvatura de uma curva plana, em que trabalhamos com a *string art*, um estilo de arte que se caracteriza por um arranjo de cordas que formam padrões geométricos e que valoriza o sentido e a beleza do objeto em seu contorno.

Com isso, esperamos, ao obtermos resultados geométricos interessantes e visualmente atraentes, despertar o interesse do leitor pelo assunto e favorecer o ensino da geometria analítica no Ensino Médio, ao entrelaçarmos relações de interdependência, linguagem algébrica e objetos geométricos, e proporcionar uma noção de cálculo diferencial para este segmento, ao trabalharmos com noção de taxa de variação, de crescimento e de decréscimo de função, de periodicidade e de estimativa.

CONTEÚDO

1	PRELIMINARES	1
1.1	Cálculo vetorial	1
1.1.1	Isometrias no plano	3
1.2	Cálculo diferencial	4
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	7
2.1	Curva parametrizada diferenciável no plano	7
2.2	Curva regular	16
2.2.1	Comprimento de arco	16
2.3	Reparametrização	19
2.3.1	Reparametrização pelo comprimento de arco	20
3	CURVA PEDAL	25
3.1	Curva pedal da elipse	26
3.1.1	Ovais de Cassini	30
3.1.2	Limaçon	32
3.2	Curva pedal da hipérbole	33
3.2.1	Lemniscata de Bernoulli	35
3.3	Curva pedal da parábola	36
3.3.1	Cissoide de Diocles	38
3.3.2	Estrofoide reta	41
4	TEORIA LOCAL DAS CURVAS NO PLANO	43
4.1	Curvatura	43
4.1.1	Interpretação geométrica da curvatura	47
4.1.2	Gráfico de curvatura	49
4.2	Teorema Fundamental das Curvas no Plano	54
4.3	Evoluta	55
5	TEORIA GLOBAL DAS CURVAS NO PLANO	63

5.1	Propriedades globais	63
5.1.1	Índice de rotação	64
5.1.2	Curvatura total	66
5.2	Teorema dos Quatro Vértices	68
6	POSSIBILIDADES NO ENSINO MÉDIO	75
6.1	Construção geométrica da curva pedal	76
6.2	Determinação algébrica da curva pedal	80
6.2.1	Curva pedal da elipse	80
6.2.2	Curva pedal da hipérbole	83
6.2.3	Curva pedal da parábola	85
6.3	Noção de curvatura	87
6.3.1	Curva de Bézier	87
6.3.2	<i>String art</i>	91
	BIBLIOGRAFIA	98

1

PRELIMINARES

No estudo da geometria diferencial das curvas planas, são utilizados conceitos fundamentais de cálculos vetorial e diferencial. Para isso, apresentamos um breve resumo sobre o assunto, além de comentarmos sobre isometrias.

1.1 CÁLCULO VETORIAL

Nesta seção, vamos ver os conceitos mais relevantes do cálculo vetorial no plano, a serem utilizados neste trabalho, além de algumas isometrias.

Sabemos que o plano euclidiano π , munido de um sistema de eixos ortogonais OXY , pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto \mathbb{R}^2 de duplas ordenadas de número reais $P = (x, y)$, chamadas pontos de \mathbb{R}^2 . Do Teorema de Pitágoras, podemos notar que a distância entre dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, do plano, é dada por

$$d_{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

O segmento orientado do ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ ao ponto $P_2 = (x_2, y_2)$, nesta ordem, determina um vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ que representa o deslocamento em linha reta de P_1 a P_2 . Em termos do sistema de coordenadas ortogonais escolhido, tal vetor (deslocamento) é determinado por $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e o seu comprimento, também chamado norma, é dado por

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Podemos notar que existe um único ponto P , tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_1P_2}$. Com isso, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos de \mathbb{R}^2 e o conjunto dos vetores do plano.

Para quaisquer dois vetores $v_1 = (a_1, b_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2)$ e número real α , definimos as operações

$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2);$$

$$\alpha v_1 = (\alpha a_1, \alpha b_1).$$

Munido de tais operações, o \mathbb{R}^2 torna-se um espaço vetorial.

Dois vetores, v_1 e v_2 , são considerados linearmente dependentes caso existam α_1 e α_2 reais não nulos, tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Em contrapartida, são considerados linearmente independentes caso, para toda combinação linear da forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$, temos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Podemos notar, então, que dois vetores, $v_1 = (a_1, b_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2)$, são linearmente dependentes quando $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$; caso contrário, são linearmente independentes.

Além disso, dois vetores linearmente independentes (suponhamos v_1 e v_2) sempre formam uma base do plano em questão, ou seja, o conjunto de vetores $B = \{v_1, v_2\}$ é uma base do plano se todo vetor dele puder ser expresso, de forma única, como combinação linear dos vetores de B , isto é, $v = av_1 + bv_2$, em que a e b são as coordenadas de v na base B . Uma base natural para o espaço vetorial \mathbb{R}^2 é dada pelos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, também conhecida por base canônica.

O produto interno (ou escalar) dos vetores $v_1 = (a_1, b_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2)$ é definido por

$$\langle v_1, v_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

ou por

$$\langle v_1, v_2 \rangle = |v_1| |v_2| \cos \theta,$$

em que θ é o ângulo entre eles, com $0 \leq \theta \leq \pi$. Podemos notar, facilmente, que $\langle v, v \rangle = |v|^2$.

Para $v = (a, b)$ e α real, são verificadas, também, as seguintes propriedades em relação ao produto interno:

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_2, v_1 \rangle \\ \langle \alpha v_1, v_2 \rangle &= \langle v_1, \alpha v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 + v_3 \rangle &= \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle \\ |\langle v_1, v_2 \rangle| &\leq |v_1| |v_2| \end{aligned}$$

Dois vetores são ditos ortogonais se o produto interno entre eles é nulo. Assim, podemos concluir que dois vetores são ortogonais se, e somente se, um deles é nulo ou o ângulo entre eles é reto.

Se os vetores forem ortogonais e unitários, eles formam uma base do plano, chamada base ortonormal, como é o caso da base canônica $\{e_1, e_2\}$. Uma base ortonormal $\{v_1, v_2\}$, com $v_1 = (a_1, b_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2)$, tem mesma orientação da base canônica se $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$ e orientação oposta se este determinante for negativo.

1.1.1 Isometrias no plano

As isometrias no plano são bijeções que preservam distâncias, como definimos a seguir.

Definição 1.1. *Uma isometria do plano é uma aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva distâncias, ou seja,*

$$|F(p) - F(q)| = |p - q|,$$

para quaisquer pontos p e q do plano.

A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa, para um ponto v fixo do plano,

$$T(p) = v + p$$

é chamada translação por v , que é uma isometria no plano, assim como sua inversa T^{-1} , que é uma translação por $-v$.

A aplicação $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa, para θ fixo,

$$R(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

com $0 < \theta < 2\pi$, é chamada rotação de θ e também é uma isometria no plano.

Da definição, podemos concluir que, se F e G são isometrias no plano, então a composta $F \circ G$ também é. Com isso, ao trabalharmos com curvas planas regulares mais adiante, consideraremos que duas curvas, α e β , são congruentes se existir uma aplicação $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, composta por movimentos de rotação e de translação (isometrias próprias), tal que $\alpha = M \circ \beta$, ou seja, as duas curvas se diferem apenas por suas posições

no plano. Esta aplicação pode ser definida, baseada nas definições supracitadas de translação e de rotação, por

$$M(p) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} p + v$$

Para mais detalhes sobre isometrias, ver [LIMA](#).

1.2 CÁLCULO DIFERENCIAL

Nesta seção, vamos ver os conceitos mais relevantes do cálculo diferencial a serem utilizados neste trabalho.

Uma função vetorial $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, com I um intervalo real aberto, é uma correspondência em que, para cada $t \in I$, associamos um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ do plano, em que as funções $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas funções coordenadas de α .

Se f é uma função real e α e β são funções vetoriais definidas em I , são verificadas as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(t) &= \alpha(t) + \beta(t) \\ (f\alpha)(t) &= f(t) \cdot \alpha(t) \\ \langle \alpha, \beta \rangle(t) &= \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle \end{aligned}$$

Para a função vetorial $\alpha(t)$ com limite L real quando $t \rightarrow t_0$, denotamos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = L,$$

quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $0 < |t - t_0| < \delta$, então $|\alpha(t) - L| < \varepsilon$. Notamos que, se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e $L = (L_1, L_2)$, então $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = L$ se, e somente se, $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = L_1$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = L_2$.

Esta função vetorial é contínua em $t_0 \in I$ se $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0)$ e é diferenciável, se existe

$$\alpha'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}$$

(derivada de primeira ordem de α). Logo, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é contínua se é contínua para todo t e é diferenciável se suas funções coordenadas também forem diferenciáveis, ou seja, se existe $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$, para todo t .

Se α' também for diferenciável, temos uma nova função vetorial, que é a derivada de segunda ordem de α , denotada por α'' . De modo análogo, podemos definir as outras derivadas de ordem superior. Além disso, se uma função vetorial possui, em todos os seus pontos, derivadas de todas as ordens, ela é dita função diferenciável de classe C^∞ .

Se α e β são funções vetoriais diferenciáveis no intervalo real aberto I e f é uma função real também diferenciável em I , então são verificadas as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\frac{d(\alpha + \beta)}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{d(f\alpha)}{dt} &= \frac{df}{dt}\alpha + f\frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{d\langle\alpha, \beta\rangle}{dt} &= \left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \beta \right\rangle + \left\langle \alpha, \frac{d\beta}{dt} \right\rangle\end{aligned}$$

Se α é uma função vetorial diferenciável de classe C^∞ em I , então, para todo natural não nulo n e para $t_0 \in I$, temos o desenvolvimento de α em série de Taylor, em t_0 :

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(t-t_0)^i \cdot \alpha^{(i)}(t_0)}{i!} + R_i(t, t_0),$$

em que $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R_i(t, t_0)}{(t-t_0)^i} = 0$, com $t \in I$.

2

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo, vamos apresentar conceitos fundamentais da geometria diferencial plana, como curva parametrizada diferenciável, curva regular, comprimento de arco e reparametrização de uma curva, que servirão como base para o desenvolvimento da Teoria Local e, posteriormente, para trabalharmos com a Teoria Global das Curvas Planas.

2.1 CURVA PARAMETRIZADA DIFERENCIÁVEL NO PLANO

Uma curva plana é descrita pela determinação das coordenadas de seus pontos como funções de uma variável. Desta forma, definimos uma curva parametrizada diferenciável do plano, que é o objeto básico deste trabalho.

Definição 2.1. *Uma curva parametrizada diferenciável no plano é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ , em que I é um intervalo aberto da reta. O conjunto $\alpha(I) = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$ é chamado traço da curva α e as funções $x(t)$ e $y(t)$ são chamadas funções coordenadas.*

Dizer que a curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é de classe C^∞ é equivalente a dizer que cada uma das funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são funções infinitamente diferenciáveis.

Vejamos alguns exemplos de curvas parametrizadas diferenciáveis.

Em geometria analítica, a reta pode ser caracterizada de diversas formas. Uma delas é simplesmente afirmando que uma reta em \mathbb{R}^2 é o conjunto das soluções de uma equação

cartesiana da forma $ax + by + c = 0$, com a, b, c reais. Contudo, podemos caracterizá-la como uma curva parametrizada diferenciável da seguinte forma:

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt),$$

com t real e em que (x_0, y_0) é uma solução qualquer da equação cartesiana.

Exemplo 2.2. Na Figura 1, podemos observar o traço da reta dada pela curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = (1 + 2t, 1 + 3t)$, com t real, que passa pelo ponto $P = (1, 1)$ e é paralela ao vetor $v = (2, 3)$.

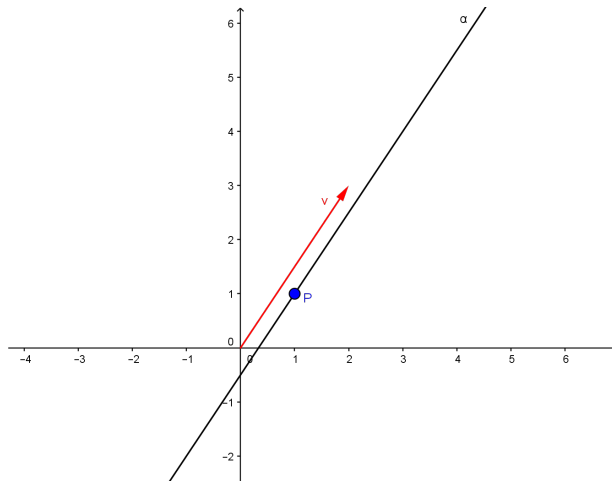


Figura 1: Exemplo de curva parametrizada diferenciável no plano cujo traço é uma reta.

Uma elipse é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante. Uma elipse de centro na origem e de semieixos de medidas a e b , paralelos aos eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente, é dada pela equação cartesiana

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Para parametrizarmos esta equação, vamos considerar duas circunferências de centro também na origem e de raios de medidas a e b e um ponto $P = (x_P, y_P)$ pertencente à elipse, como podemos observar na Figura 2.

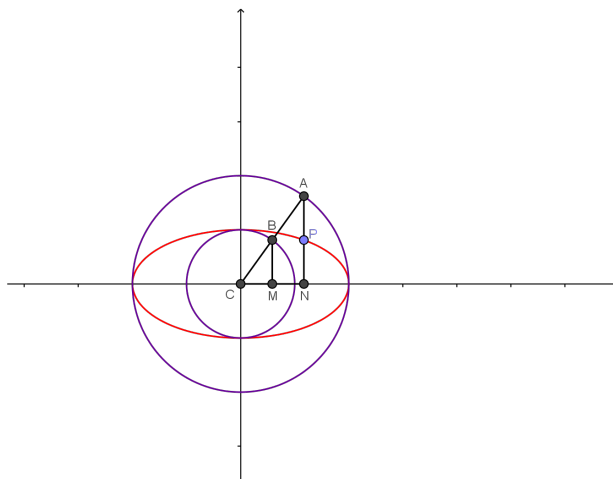


Figura 2: Demonstração de uma equação paramétrica da elipse.

Na figura, temos $N = (x_P, 0)$ e A a interseção da circunferência de raio de medida a com \overrightarrow{NP} , ou seja, $A = (x_P, y_A)$. Como $C = (0, 0)$, o triângulo ANC é retângulo em N . Assim, considerando $\widehat{NCA} = t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos

$$\cos(t) = \frac{\text{med}(\overline{CN})}{\text{med}(\overline{CA})} = \frac{|x_P|}{a},$$

ou seja, $|x_P| = a \cos(t)$. Agora, tomamos B como a interseção da circunferência de raio de medida b com \overrightarrow{CA} , de modo que $B = (x_B, y_P)$, com P pertencente à elipse. Além disso, tomamos $M = (x_B, 0)$ e, conseqüentemente, temos o triângulo BMC retângulo em M . Como $\widehat{MCB} = \widehat{NCA}$, temos

$$\sin(t) = \frac{\text{med}(\overline{BM})}{\text{med}(\overline{CB})} = \frac{|y_P|}{b},$$

ou seja, $|y_P| = b \cos(t)$. Portanto, a elipse em questão tem equação paramétrica

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases},$$

com t real, e pode ser dada pela curva parametrizada diferenciável

$$\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t)).$$

Se a elipse estiver centrada no ponto (x_0, y_0) , temos, por translação, que sua equação cartesiana é

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

e sua paramétrica é

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos(t) \\ y = y_0 + b \sin(t) \end{cases} ,$$

ou seja, ela pode ser dada pela curva parametrizada diferenciável

$$\alpha(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 + b \sin(t)).$$

Exemplo 2.3. Na Figura 3, podemos observar o traço da elipse dada pela curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = (2 \cos(t), 1 + \sin(t))$, com t real, com centro em $(0, 1)$ e semieixos de medidas 2 e 1, respectivamente.

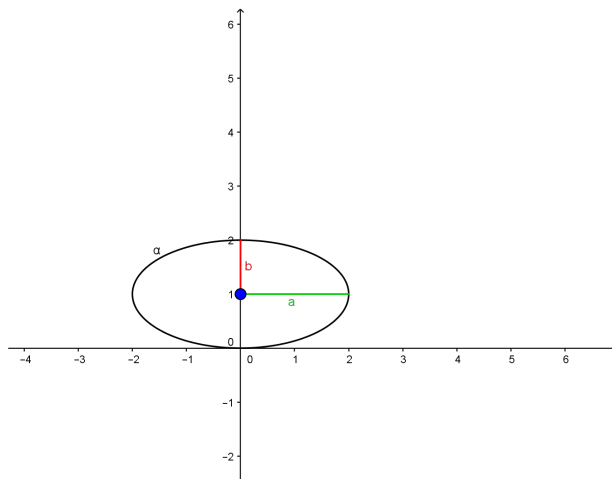


Figura 3: Exemplo de curva parametrizada diferenciável no plano cujo traço é uma elipse.

A circunferência é um caso particular de elipse, em que os semieixos possuem mesma medida, ou seja, é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de um ponto fixo, chamado centro, e esta distância é chamada raio. Logo, suas equações cartesianas e paramétricas podem ser obtidas do caso anterior, assim como a curva parametrizada diferenciável.

Uma hipérbole é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença absoluta das distâncias a dois pontos fixos (focos) deste mesmo plano é constante. Para uma hipérbole de centro na origem (sem perda de generalidade) e de semieixo real de

medida a e semieixo imaginário de medida b , paralelos, respectivamente, aos eixos das abscissas e das ordenadas, a equação cartesiana é dada por

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

com seus focos sobre o eixo das abscissas.

Para parametrizarmos a hipérbole, utilizamos as funções cosseno e seno hiperbólicos definidas por $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, respectivamente, e notamos que $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, para t real. Logo, podemos considerar

$$\cosh(t) = \frac{x}{a};$$

$$\sinh(t) = \frac{y}{b}.$$

Porém, como $\frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$, a parametrização $x = a \cosh(t)$ só nos fornece um dos ramos da hipérbole – o que está contido no semiplano de abscissas positivas. Por reflexão em relação à mediatriz do segmento que une seus focos, a equação paramétrica para tal hipérbole pode ser dada por

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh(t) \\ y = b \sinh(t) \end{cases},$$

cujas curvas parametrizadas diferenciáveis correspondentes são

$$\alpha(t) = (\pm a \cosh(t), b \sinh(t)).$$

Se a hipérbole estiver centrada em (x_0, y_0) , temos, por translação, que sua equação cartesiana é

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

e sua paramétrica é

$$\begin{cases} x = x_0 \pm a \cosh(t) \\ y = y_0 + b \sinh(t) \end{cases},$$

ou seja, ela pode ser dada pela curva parametrizada diferenciável

$$\alpha(t) = (x_0 \pm a \cosh(t), y_0 + b \sinh(t)).$$

Exemplo 2.4. Na Figura 4, podemos observar o traço da hipérbole dada pela curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = \left(2 \pm \cosh(t), 2 + \frac{1}{2} \sinh(t)\right)$, com t real, com centro em $(2, 2)$ e semieixos de medidas 1 e $\frac{1}{2}$, respectivamente.

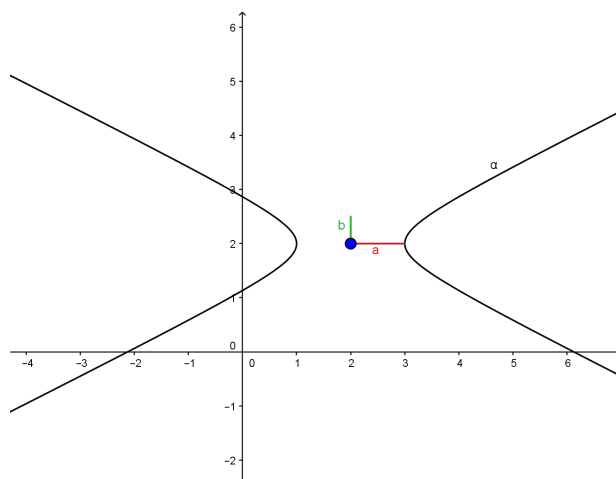


Figura 4: Exemplo de curva parametrizada diferenciável no plano cujo traço é uma hipérbole.

De maneira análoga, chegamos à equação paramétrica e à curva parametrizada diferenciável da hipérbole cuja equação cartesiana é dada por

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1,$$

ou seja, quando seus focos estão sobre o eixo das ordenadas, bem como para o centro em (x_0, y_0) .

A cicloide, apesar de não tão difundida na Educação Básica quanto as cônicas, é uma curva que aparece bastante em nosso dia a dia. De acordo com [Lockwood \(1961, p. 88-89\)](#), ela foi estudada por muitos matemáticos, como Johann Bernoulli (suíço, 1667 – 1748), que propôs o problema da braquistócrona, que consistia em descrever uma curva que ligasse dois pontos, A e B , com este localizado a uma altura menor do que aquele, de modo que tal curva determinasse a trajetória que minimizasse o tempo para que um corpo fosse de A até B , quando submetido apenas à gravidade. Além disso, a cicloide também se relaciona com a solução do problema da tautócrona, que consiste em descrever uma curva em que, não importa de onde certo corpo parta dela, ele demora exatamente o mesmo tempo para deslizar até o ponto mínimo desta curva, também submetido apenas à gravidade.

Para mais detalhes sobre as soluções dos problemas da braquistócrona e da tautócrona, ver [CASTRO \(2014, p. 17-34\)](#).

A cicloide é definida como o lugar geométrico de um ponto P fixado em uma circunferência, que “rola”, sem deslizar, ao longo de uma reta. Para parametrizarmos

uma cicloide, vamos considerar a tal reta como o eixo das abscissas (sem perda de generalidade) e $P = (x_P, y_P)$ inicialmente na origem e pertencente à circunferência de centro C e de raio de medida r , como mostra a Figura 5.

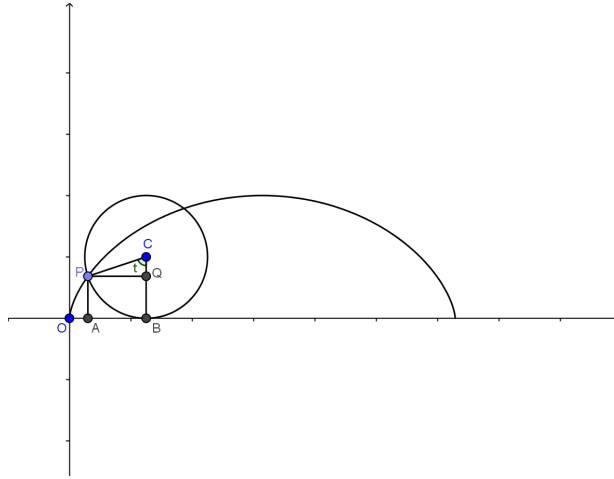


Figura 5: Demonstração da equação paramétrica da cicloide.

Na figura, temos que A é a interseção do eixo das abscissas com a reta perpendicular a este eixo e que passa por P , que B é a interseção deste mesmo eixo com a reta perpendicular a ele e que passa por C e que $Q \in \overline{CB}$ é tal que $\text{med}(\overline{QB}) = |y_P|$, de modo a formar o triângulo PQC retângulo em Q e com $\widehat{QCP} = t$, no sentido horário, com $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Como $\text{med}(\overline{OB}) = \text{med}(\widehat{PB})$, então $|x_P| = \text{med}(\overline{OB}) - \text{med}(\overline{AB}) = rt - \text{med}(\overline{PQ})$ e $|y_P| = \text{med}(\overline{CB}) - \text{med}(\overline{CQ}) = r - \text{med}(\overline{CQ})$. Como $\text{med}(\overline{PC}) = r$, então

$$\text{sen}(t) = \frac{\text{med}(\overline{PQ})}{r};$$

$$\text{cos}(t) = \frac{\text{med}(\overline{CQ})}{r},$$

ou seja, $\text{med}(\overline{PQ}) = r \text{sen}(t)$ e $\text{med}(\overline{CQ}) = r \text{cos}(t)$. Logo, $|x_P| = rt - r \text{sen}(t)$ e $|y_P| = r - r \text{cos}(t)$. Portanto, a cicloide em questão tem equação paramétrica

$$\begin{cases} x = r(t - \text{sen}(t)) \\ y = r(1 - \text{cos}(t)) \end{cases}'$$

com t real, e pode ser dada pela curva parametrizada diferenciável

$$\alpha(t) = r(t - \text{sen}(t), 1 - \text{cos}(t)).$$

Exemplo 2.5. Na Figura 6, podemos observar o traço da cicloide dada pela curva $\alpha(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \text{cos}(t))$, com t real, gerada de uma circunferência de raio de medida 1.

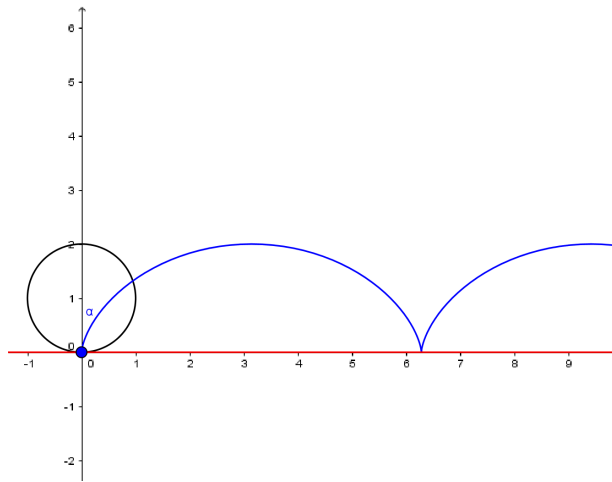


Figura 6: Exemplo de curva cujo traço é uma cicloide.

Podemos observar que, para os pontos em que $t = 2K\pi$, com K inteiro, formam-se cúspides no traço da cicloide, chamadas singularidades da curva.

Localmente, as curvas parametrizadas diferenciáveis no plano podem ser tomadas como uma função diferenciável $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, o gráfico desta função pode ser dado pelo traço da curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = (t, f(t))$, com $t \in I$.

Um exemplo clássico de curva que pode ser dada por uma função é a parábola. Ela é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto fixo (foco) e de uma reta (diretriz), ambos pertencentes a este mesmo plano.

Consideramos a parábola de equação cartesiana

$$y = \frac{x^2}{4p},$$

de vértice na origem e de diretriz paralela ao eixo das abscissas (sem perda de generalidade), cuja distância entre estes dois objetos mede p (esta também é a medida da distância entre o vértice e o foco). Podemos observar que sua equação cartesiana pode ser tomada como uma função diferenciável f , dada por

$$f(t) = \frac{t^2}{4p},$$

para $x = t$ real, ou seja, a parábola é dada pela curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = (t, f(t))$ e o traço de α coincide com o gráfico de f .

Se a parábola tiver vértice em (x_0, y_0) , temos, por translação que sua equação cartesiana é

$$y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{4p}$$

e que ela pode ser dada pela curva parametrizada diferenciável

$$\alpha(t) = \left(x_0 + t, y_0 + \frac{t^2}{4p} \right).$$

Exemplo 2.6. Na Figura 7, podemos observar o traço da parábola dada pela curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = \left(t, 1 + \frac{t^2}{4} \right)$, com t real, de vértice em $V = (0, 1)$ e distância dele à reta diretriz 1.

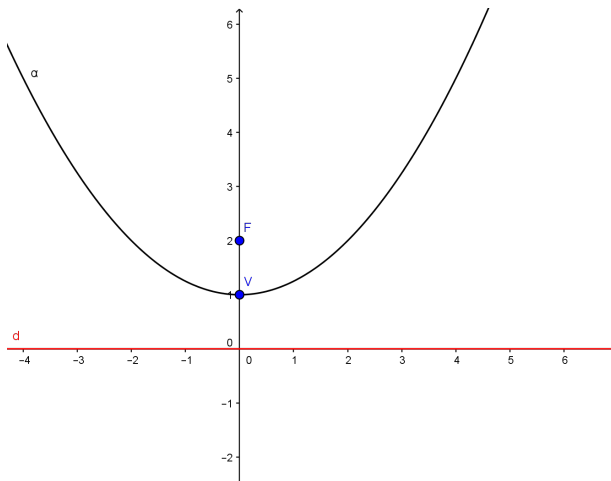


Figura 7: Exemplo de curva parametrizada diferenciável no plano cujo traço é uma parábola.

De maneira análoga, chegamos às curvas parametrizadas diferenciáveis relacionadas às parábolas de equações cartesianas $y = -\frac{x^2}{4p}$ (também com o eixo de simetria sobre o das ordenadas) e $x = \frac{y^2}{4p}$ e $x = -\frac{y^2}{4p}$ (com o eixo de simetria sobre o das abscissas), para vértice na origem.

Podemos notar que os exemplos apresentados até aqui podem ser tratados na Educação Básica, mesmo sem o conhecimento de diferenciabilidade por parte dos alunos, uma vez que, de acordo com [São Paulo](#) (2011, p. 66-69), as aulas de Matemática da 3ª série do Ensino Médio devem contemplar, no primeiro bimestre, o conteúdo de geometria analítica no plano, que trata, de modo geral, de pontos, retas e cônicas e, dentre

as habilidades a serem desenvolvidas, destacamos “saber identificar as equações das cônicas na forma reduzida e conhecer suas propriedades”. Além disso, a trigonometria necessária para as parametrizações apresentadas deve ter sido trabalhada no final da 1ª série e no início da 2ª série do Ensino Médio.

2.2 CURVA REGULAR

Mais adiante, ao desenvolvermos a Teoria Local das Curvas Planas, vamos precisar que exista uma reta tangente à curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, para cada valor do parâmetro t . Para tal, basta que o vetor tangente a $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, definido por $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$, não seja nulo, para todo valor do parâmetro. Deste modo, restringimos grande parte de nosso estudo às curvas que satisfazem esta condição, denominadas regulares.

Definição 2.7. *Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular se, para todo $t \in I$, o vetor tangente é não nulo, ou seja, $\alpha'(t) \neq 0$.*

Para $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, a reta tangente a α , em $t_0 \in I$, é a reta que passa pelo ponto $\alpha(t_0)$ da curva, na direção do vetor tangente neste ponto, ou seja, na direção de $\alpha'(t_0)$. Logo, esta reta pode ser dada por

$$g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0),$$

com r real.

Das curvas parametrizadas diferenciáveis vistas até aqui, somente a cicloide não é regular, pois seu vetor tangente torna-se nulo quando $t = 2K\pi$, com K inteiro. Porém, a cicloide pode ser considerada regular por partes, uma vez que existe uma parametrização (pelo comprimento de arco) diferenciável de classe C^∞ que caracteriza tal curva de maneira regular, como veremos mais adiante.

2.2.1 Comprimento de arco

Consideramos uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, e fixamos o intervalo $[t_0, t] \subset I$, a fim de calcularmos o comprimento desta curva neste intervalo.

Ao partirmos $[t_0, t]$, com $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = t$, e ligarmos, de maneira retilínea, os pontos $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t)$, ordenadamente, obtemos uma linha poligonal, que tem comprimento, como podemos observar na Figura 8.

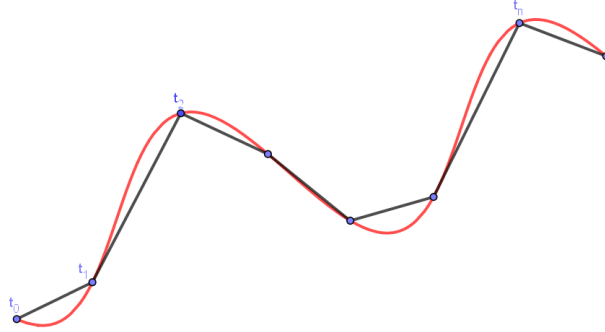


Figura 8: Cálculo do comprimento de arco de uma curva.

Logo,

$$\text{med} \left(\overline{\alpha(t_i) \alpha(t_{i+1})} \right) = \Delta s_i = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$

e o comprimento da curva em tal intervalo pode ser dado, aproximadamente, por

$$\Delta s \approx \sum_{i=0}^n \Delta s_i.$$

Podemos considerar

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta t_i)^2 \left(\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \right)^2 \right)} = \Delta t_i \sqrt{(v_i^x)^2 + (v_i^y)^2},$$

em que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ é a velocidade média de um corpo que se move durante um período Δt de tempo ao percorrer uma distância Δs , ou seja, v é o módulo do vetor velocidade v . Assim, se diminuirmos a norma da partição do intervalo, temos que

$$\Delta s \approx \sum_{i=0}^n \Delta t_i \sqrt{(v_i^x)^2 + (v_i^y)^2}$$

se torna, no limite (ou seja, quando $|t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$),

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

visto que $\Delta s = \int_{t_0}^t v(t) dt$.

Logo, a partir de um ponto $t_0 \in I$, definimos o comprimento de arco da curva α por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

para $t_0 \leq t$. Como $|\alpha'(t)|$ é o módulo do vetor tangente, então $|\alpha'(t)| \geq 0$, mas, como a curva é regular, então $|\alpha'(t)| > 0$, o que torna a função comprimento de arco diferenciável e, portanto, tal integral existe.

Vejam os cálculos de comprimento de arco para uma circunferência e para um arco de cicloide, ambos no intervalo $[0, 2\pi]$.

Exemplo 2.8. Consideramos a curva regular $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, com t real e r real positivo, cujo traço é uma circunferência. O comprimento de arco desta curva, com $t \in [0, 2\pi]$, é dado por

$$s(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} dt.$$

Logo, para tal intervalo, este comprimento é

$$s([0, 2\pi]) = \int_0^{2\pi} r dt = r [t]_0^{2\pi} = 2\pi r,$$

que é, justamente, a expressão mais conhecida na Educação Básica para o cálculo do comprimento de uma circunferência.

Exemplo 2.9. Consideramos a curva regular $\alpha(t) = r(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, com t real e r real positivo, cujo traço é uma cicloide. O comprimento de arco desta curva, com $t \in [0, 2\pi]$, é dado por

$$s(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \left((1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \right)} dt.$$

Das funções trigonométricas do arco duplo, temos $1 - \cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ e, portanto,

$$s(t) = -4r \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8r.$$

Podemos observar que não foi calculado, exatamente, o comprimento de uma cicloide, que é infinito; o que calculamos foi o comprimento de seu arco no intervalo $[0, 2\pi]$, ainda que saibamos que cada um de seus outros arcos, em intervalos $[2K\pi, 2\pi(K+1)]$, com K inteiro, tenham o mesmo comprimento.

Podemos notar que o comprimento de uma hipérbole ou de uma parábola também é infinito, mas isso não nos impede de calcularmos o comprimento de arco de cada uma dessas curvas em algum outro intervalo pré-definido.

2.3 REPARAMETRIZAÇÃO

É intuitivo imaginar que uma curva não precisa ter uma única parametrização. Ao traçarmos, por exemplo, a curva parametrizada diferenciável $\beta : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\beta(t) = \left(-1 + \frac{t^3}{4}, 2 + \frac{3t^3}{8}\right)$, notamos que seu traço é o mesmo da curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (-1 + 2t, 2 + 3t)$, que é um segmento de reta com inclinação $\frac{3}{2}$ e com extremidades em $(-1, 2)$ e $(1, 5)$. Logo, observamos que, de fato, duas curvas podem ter o mesmo traço.

Consideramos $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável de classe C^∞ , chamada mudança de parâmetro, estritamente crescente ou estritamente decrescente, ou seja, $h' \neq 0$ e, portanto, injetiva e, por hipótese, sobrejetiva. A composta $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\beta = \alpha \circ h$, com $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, é uma reparametrização de α por h , visto que seu traço é o mesmo do traço da curva original, como podemos observar na Figura 9.

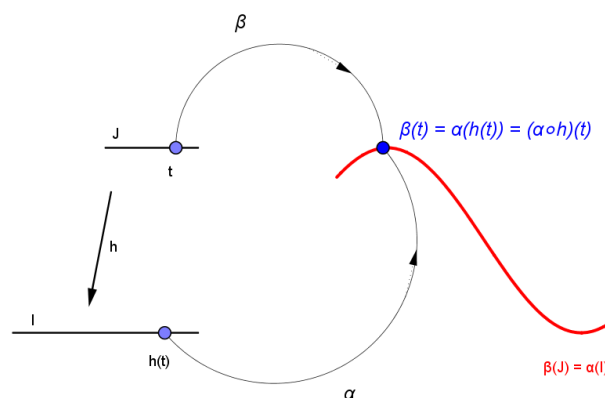


Figura 9: Reparametrização de α por h .

Também podemos considerar a reparametrização de β por h^{-1} , uma vez que, como h é bijetiva, ela é invertível.

Como a reparametrização de uma curva depende da função mudança de parâmetro, que, por sua vez, depende do parâmetro, então podemos notar que, realmente, a reparametrização de uma curva não é única.

Para as curvas α e β citadas, temos $\beta(t) = (\alpha \circ h)(t)$ e $h : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$, com $h(t) = \frac{t^3}{8}$ (ou $h^{-1} : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$, com $h^{-1}(t) = 2\sqrt[3]{t}$).

2.3.1 Reparametrização pelo comprimento de arco

Como vimos, uma curva pode ser reparametrizada desde que sua função mudança de parâmetro seja diferenciável de classe C^∞ e bijetiva. Como a função comprimento de arco respeita tais condições, podemos reparametrizar uma curva pelo comprimento de arco. Assim, segue definição.

Definição 2.10. Dadas uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e sua função comprimento de arco $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$, tais que existe a inversa s^{-1} , definida em $s(I)$, a função composta $\beta = \alpha \circ s^{-1}$ é a reparametrização de α , em que β está parametrizada pelo comprimento de arco (PPCA).

Veamos uma proposição baseada nesta definição.

Proposição 2.11. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está PPCA, ou seja,

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0,$$

para $t_0 \leq t \in I$ se, e somente se, seu vetor tangente é unitário.

Demonstração. (\Leftarrow) Se o vetor tangente da curva é unitário, então seu comprimento de arco é

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^t 1 dt = [t]_{t_0}^t = t - t_0, \text{ para } t_0 \leq t \in I.$$

(\Rightarrow) Se, para $t_0 \leq t$, temos

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0,$$

então

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = \frac{d}{dt} (t - t_0),$$

ou seja, $|\alpha'(t)| = 1$.

□

Reparametrizar uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ pelo comprimento de arco tem a finalidade de fazer o intervalo I passar a ter, exatamente, o mesmo comprimento da curva para tal intervalo e sem deformações, ou seja, para cada $t \in I$, o comprimento do arco, do instante inicial $t_0 \in I$ até t é $s(t) = t - t_0$. Logo, podemos notar que o comprimento de arco é sempre não negativo.

Vejam os exemplos de reparametrização de uma reta e de uma circunferência, pelo respectivo comprimento de arco.

Exemplo 2.12. Consideramos a curva regular $\alpha(t) = (at, bt)$, com t real e a e b reais e simultaneamente não nulos, cujo traço é uma reta. Temos, a partir de $t_0 = 0$,

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \sqrt{a^2 + b^2} [t]_0^t = t\sqrt{a^2 + b^2}$$

e, portanto,

$$s^{-1}(t) = h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

para s real. Logo,

$$\beta(s) = \alpha \circ h(s) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \left(\frac{as}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

é a parametrização desta reta pelo comprimento de arco. De fato,

$$|\beta'(s)| = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2} = 1.$$

Exemplo 2.13. Consideramos a curva regular $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, com t real e r real positivo, cujo traço é uma circunferência. Temos, a partir de $t_0 = 0$,

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = r [t]_0^t = rt$$

e, portanto,

$$s^{-1}(t) = h(s) = \frac{s}{r},$$

para s real. Logo,

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha\left(\frac{s}{r}\right) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

é a parametrização da circunferência pelo comprimento de arco. De fato,

$$|\beta'(s)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{r}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{r}\right)} = 1$$

.

Vejam, a seguir, que toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco, ainda que isso nem sempre seja viável, visto que a inversa de uma função pode não ser obtida facilmente por métodos analíticos.

Proposição 2.14. *Toda curva regular no plano admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, de parâmetro t . Se existir uma curva regular $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, de parâmetro s , tal que $\beta([J]) = \alpha([I])$ – ou seja, se ambas possuírem o mesmo traço – e com β PPCA – ou seja, com $|\beta'(s)| = 1$ –, β deverá satisfazer $\beta = \alpha \circ h$, em que h é estritamente crescente – ou seja, $h' > 0$.

Assim, teríamos $\beta'(s) = (\alpha \circ h)'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot h'(s)$. Daí, temos $|\beta'(s)| = |\alpha'(h(s)) \cdot h'(s)| = h'(s) \cdot |\alpha'(h(s))|$, ou seja,

$$h'(s) = \frac{1}{|\alpha'(h(s))|}.$$

Como α é regular e $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$, então $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ – ou seja, $s(t)$ é estritamente crescente e, portanto, injetiva. Por hipótese, $s(t)$ é sobrejetiva e, portanto, é bijetiva e, conseqüentemente, invertível.

Logo, dada uma curva regular α qualquer, tomamos $h = s^{-1}$. Portanto, pela discussão acima, $t = h(s)$ e

$$h'(s) = \frac{1}{|\alpha'(t)|}.$$

Assim, tomando $\beta = \alpha \circ h$, temos a reparametrização pelo comprimento de arco desejada e, de fato,

$$|\beta'(s)| = |\alpha'(h(s)) \cdot h'(s)| = \left| \alpha'(t) \cdot \frac{1}{|\alpha'(t)|} \right| = 1,$$

para todo $t \in I$. □

Vejamos como parametrizar um arco de cicloide pelo comprimento de arco.

Exemplo 2.15. *Seja $\alpha(t) = r(t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$ uma parametrização de um arco de cicloide, para $t \in [0, 2\pi]$, com r real positivo. Temos*

$$s(t) = 2r \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4r \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^t = 4r \left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

e, portanto,

$$s^{-1}(t) = h(s) = 2\operatorname{arccos}\left(1 - \frac{s}{4r}\right).$$

Logo,

$$\beta(s) = r \left(2\operatorname{arccos}\left(1 - \frac{s}{4r}\right) - \operatorname{sen}\left(2\operatorname{arccos}\left(1 - \frac{s}{4r}\right)\right), 1 - \cos\left(2\operatorname{arccos}\left(1 - \frac{s}{4r}\right)\right) \right)$$

é a parametrização do arco de cicloide pelo comprimento de arco. De fato,

$$|\beta'(s)| = \sqrt{\left(\frac{1}{4r}\right)^2 \left(\left(\sqrt{8rs - s^2}\right)^2 + (4r - s)^2 \right)} = 1.$$

Neste exemplo, encontramos a parametrização de um arco de cicloide pelo comprimento de arco. Podemos notar que, para a ordenada do vetor tangente se anular, precisamos de $s = 4r$. Consequentemente, teríamos $\alpha'(4r) = (1, 0)$, ou seja, o vetor tangente nunca se anula com esta parametrização. Logo, os pontos em que $t = 0$ ou $t = 2\pi$ são singularidades não essenciais da curva, pois existe uma parametrização em que eles não são singularidades.

3

CURVA PEDAL

Neste capítulo, vamos estudar uma interessante classe de curvas planas, as curvas pedais, que são curvas oriundas de outras. De acordo com [Ferreira](#) (2011, p. 292), o primeiro a tratar de uma curva pedal, ainda sem utilizar esse nome, foi Gilles Personne de Roberval (francês, 1602 – 1675), quando estudava a composição de movimentos e alguma maneira de encontrar uma tangente a uma curva.

Vejam, a seguir, a definição de curva pedal, como podemos determinar suas coordenadas e as aplicações de algumas delas.

Definição 3.1. *A curva pedal de uma curva plana regular é descrita pelas interseções das retas tangentes à curva original com as respectivas retas perpendiculares que passam por um ponto fixado do mesmo plano, chamado pedal.*

Consideramos a curva regular $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, com t real e f e g funções reais diferenciáveis de classe C^∞ , a ter sua curva pedal determinada em relação ao pedal $P = (x_P, y_P)$, pertencente ao mesmo plano. O vetor tangente desta curva é $\alpha'(t) = (f'(t), g'(t))$ e, portanto, sua reta tangente é dada por

$$y = \frac{g'(t)}{f'(t)}(x - f(t)) + g(t).$$

Logo, a reta perpendicular a esta e que passa por P é

$$y = -\frac{f'(t)}{g'(t)}(x - x_P) + y_P.$$

A curva pedal $\beta(t) = (x(t), y(t))$ é determinada, então, pela interseção destas duas retas, ou seja,

$$\frac{g'(t)}{f'(t)}(x(t) - f(t)) + g(t) = -\frac{f'(t)}{g'(t)}(x(t) - x_P) + y_P.$$

Daí, concluímos que

$$x(t) = \frac{f'(t)(x_P f'(t) + y_P g'(t)) + g'(t)(f(t)g'(t) - f'(t)g(t))}{(f'(t))^2 + (g'(t))^2};$$

$$y(t) = \frac{g'(t)(x_P f'(t) + y_P g'(t)) - f'(t)(f(t)g'(t) - f'(t)g(t))}{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}.$$

Veamos alguns exemplos interessantes de curvas pedais das cônicas.

3.1 CURVA PEDAL DA ELIPSE

Consideramos a elipse dada pela curva regular $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, com t real, de centro na origem e de semieixos de medidas a e b , respectivamente. Ao substituirmos suas funções (e suas derivadas) coordenadas nas fórmulas, obtemos a curva pedal da elipse, em relação a um ponto $P = (x_P, y_P)$ do mesmo plano, de coordenadas

$$x(t) = \frac{a \sin(t)(a x_P \sin(t) - b y_P \cos(t)) + a b^2 \cos(t)}{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)};$$

$$y(t) = \frac{b \cos(t)(-a x_P \sin(t) + b y_P \cos(t)) + a^2 b \sin(t)}{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}.$$

Para o pedal no centro da elipse (origem), sua curva pedal pode ser parametrizada da forma

$$\beta(t) = \frac{ab}{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} (b \cos(t), a \sin(t)).$$

Se $a > b$, o eixo maior da elipse está sobre o eixo das abscissas e sua curva pedal em relação ao centro é como a apresentada na Figura 10, que é uma oval de Cassini.

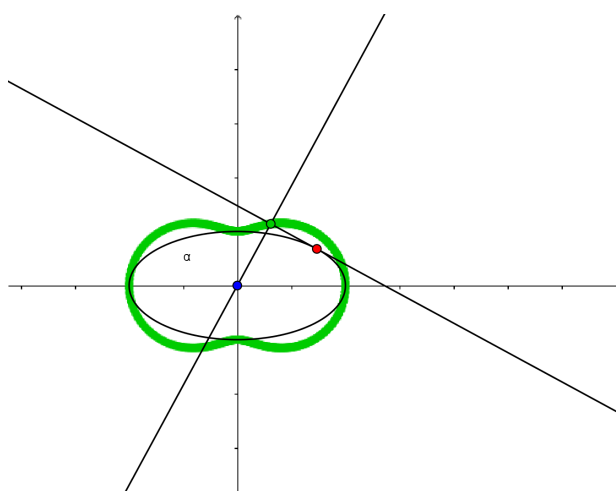


Figura 10: Curva pedal da elipse em relação ao seu centro.

Se $b > a$, o eixo maior está sobre o eixo das ordenadas e sua curva pedal em relação ao centro é uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ da curva anterior. Se $a = b$, a elipse é uma circunferência e sua curva pedal em relação ao centro pode ser parametrizada da forma

$$\beta(t) = r(\cos(t), \sin(t)),$$

que é a própria circunferência de raio de medida r .

Para o pedal em um dos focos, F , da elipse, a curva pedal pode ser, para $a > b$ e $F = (x_F, 0)$, parametrizada da forma

$$\beta(t) = \frac{a}{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} \left(ax_F \sin^2(t) + b^2 \cos(t), b \sin(t)(a - x_F \cos(t)) \right),$$

cujo traço é uma circunferência de mesmo centro da elipse e de raio de medida a (medida de seu semieixo maior), como podemos observar na Figura 11.

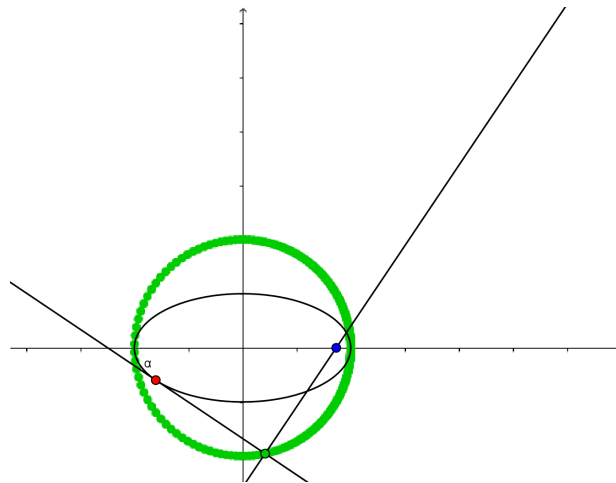


Figura 11: Curva pedal da elipse em relação a um de seus focos.

Se $b > a$ e $F = (0, y_F)$, a curva pedal da elipse em relação a qualquer um de seus focos é uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ da curva anterior, mas de raio de medida b (também medida de seu semieixo maior, neste caso). Se $a = b$, a elipse toma a forma, novamente, de uma circunferência, em que os focos coincidem com o seu centro e, portanto, sua curva pedal continua a ser ela própria. Neste caso, a distância focal da elipse é nula e, conseqüentemente, sua excentricidade (razão entre as medidas da distância focal e do eixo maior) também. Assim, podemos notar que, se a excentricidade da elipse tende a zero, seu traço tende a uma circunferência enquanto, se sua excentricidade tende a um,

seu traço tende a um segmento de reta, cujos focos são os extremos deste segmento, dado que a distância focal passa a coincidir com o seu eixo maior e, conseqüentemente, a medida de seu eixo menor é nula.

Vejamos mais algumas curvas pedais.

Consideramos a circunferência dada pela curva regular $\alpha(t) = r(\cos(t), \sin(t))$, com t real, de centro na origem (sem perda de generalidade) e de raio de medida r . Ao substituírmos suas funções (e suas derivadas) coordenadas nas fórmulas, obtemos a curva pedal da circunferência, em relação a um ponto $P = (x_P, y_P)$ do mesmo plano, de coordenadas

$$x(t) = \sin(t)(x_P \sin(t) - y_P \cos(t)) + r \cos(t);$$

$$y(t) = \cos(t)(-x_P \sin(t) + y_P \cos(t)) + r \sin(t),$$

que recebe, de maneira geral, o nome de limaçon.

Para um pedal externo à circunferência, a limaçon apresenta um laço, isto é, há autointerseção da curva exatamente no pedal, como podemos observar na Figura 12.

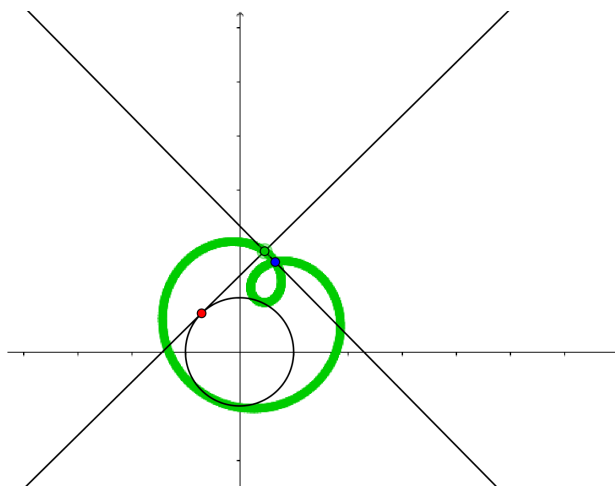


Figura 12: Curva pedal da circunferência em relação a um ponto externo a ela.

Para um pedal pertencente à circunferência, vamos dar o nome de cardioide à limaçon formada, uma vez que sua forma se assemelha à de um coração (alguns autores nomeiam a limaçon anterior também de cardioide). Além disso, podemos observar, na Figura 13, que ela possui uma única cúspide, exatamente no pedal.

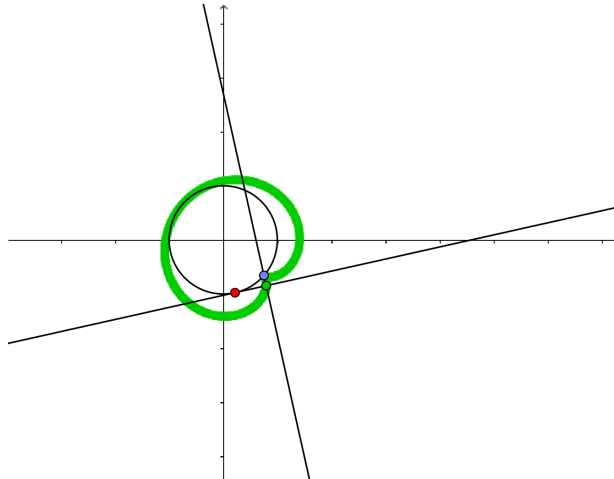


Figura 13: Curva pedal da circunferência em relação a um ponto pertencente a ela.

Podemos notar que, neste caso, uma curva regular (circunferência) gerou uma curva não totalmente regular (cardioide), já que esta possui uma cúspide.

Para um pedal interno à circunferência, a limaçon fica sem autointerseção e sem cúspide e, quanto mais ele se aproxima do centro, mais ele toma a forma da própria circunferência, como podemos observar na Figura 14.

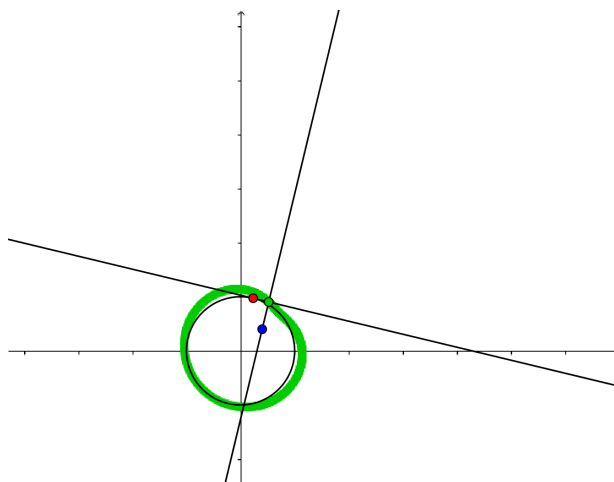


Figura 14: Curva pedal da circunferência em relação a um ponto interno a ela.

3.1.1 Ovais de Cassini

De acordo com [Weisstein](#) ([2017]), as ovais de Cassini foram investigadas inicialmente por Giovanni Domenico Cassini (italiano, 1625 – 1712), em 1680, quando, ao estudar o movimento de corpos celestes, propôs-las como alternativa às trajetórias elípticas de Johannes Kepler (alemão, 1571 – 1630): Kepler considerava constante a soma das distâncias, enquanto Cassini supunha constante o produto das distâncias, como veremos a seguir.

Essas ovais compõem uma família de curvas planas, como vemos a seguir.

Definição 3.2. *As ovais de Cassini são curvas planas descritas pelos pontos, P , do plano, tais que o produto das distâncias de cada um deles a dois pontos fixos F_1 e F_2 (distantes $2m$ entre si) é constante e igual a n^2 .*

Para encontrarmos a equação cartesiana das ovais de Cassini, consideramos $F_1 = (m, 0)$ e $F_2 = (-m, 0)$ (sem perda de generalidade). Podemos observar, na Figura 15, que $P = (x, y)$ em coordenadas cartesianas e $P = (r, \theta)$ em coordenadas polares.

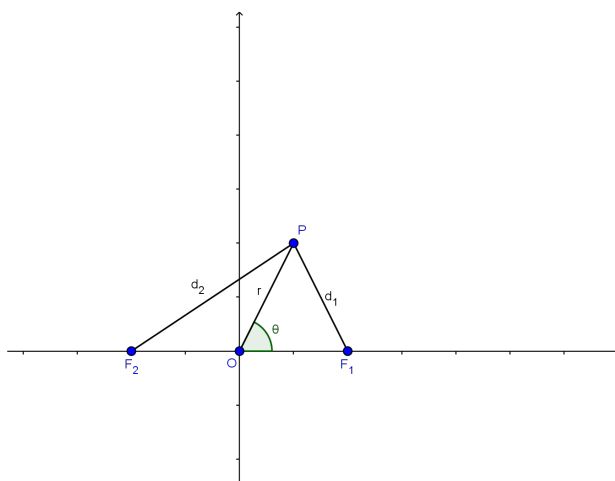


Figura 15: Demonstração da equação cartesiana das ovais de Cassini.

Ao aplicarmos a Lei dos Cossenos, temos, para o triângulo F_1OP ,

$$d_1^2 = m^2 + r^2 - 2mr \cos(\theta)$$

e, para o triângulo POF_2 ,

$$d_2^2 = m^2 + r^2 - 2mrcos(\pi - \theta).$$

Como $med(\overline{PF_1}) \cdot med(\overline{PF_2}) = n^2$, temos

$$(m^2 + r^2 - 2mrcos(\theta))(m^2 + r^2 + 2mrcos(\theta)) = n^4,$$

ou seja,

$$(m^2 + r^2)^2 - 4m^2r^2cos^2(\theta) = n^4.$$

Da relação entre coordenadas polares e cartesianas, temos $r^2 = x^2 + y^2$ e $cos(\theta) = \frac{x}{r}$. Logo, a equação cartesiana de uma oval de Cassini é

$$(x^2 + y^2 + m^2)^2 - 4m^2x^2 = n^4,$$

com o ponto médio de F_1 e F_2 na origem.

Como podemos observar na Figura 16, se $n < m$, a curva é composta por duas curvas desconexas, sem autointerseção, e refletidas em relação ao eixo das ordenadas; se $n = m$, a curva tem uma autointerseção exatamente no ponto médio de F_1 e F_2 , ou seja, ela não é simples; e, se $n > m$, temos uma curva simples e fechada, que tende a uma circunferência, quando $n \rightarrow \infty$.

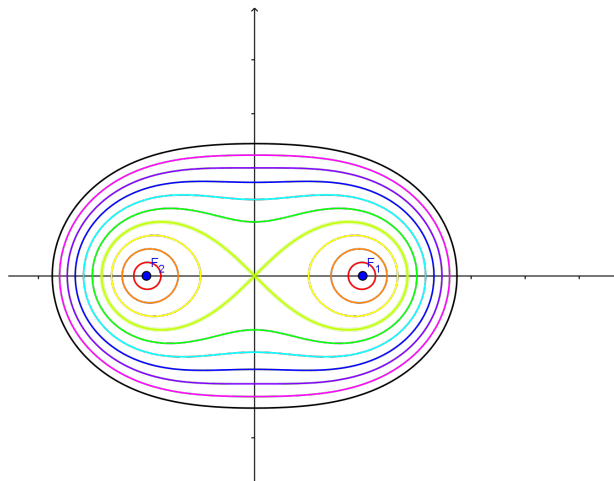


Figura 16: Ovais de Cassini.

Por rotação de $\frac{\pi}{2}$, podemos encontrar a família das ovais de Cassini com F_1 e F_2 no eixo das ordenadas e, por translação, podemos encontrá-la com ponto médio de F_1 e F_2 fora da origem.

Cassini acreditava que o Sol orbitava em torno da Terra sobre uma destas ovais, com a Terra em um dos focos da oval. Porém, foram as trajetórias elípticas propostas por Kepler consideradas as corretas.

3.1.2 Limaçon

De acordo com Weisstein ([2017]), as limaçons foram investigadas, inicialmente, por Albrecht Dürer (alemão, 1471 – 1528), em 1525, quando apresentou um método para desenhar linhas em caracol. Por volta de 1637, ela foi redescoberta por Étienne Pascal (francês, 1588 – 1651), que estudou seu caso mais genérico, e, só em 1650, é que ela foi, realmente, nomeada por Roberval.

Para encontrarmos a equação cartesiana das limaçons, consideramos o pedal na origem e uma circunferência de centro no eixo das abscissas. A curva pedal desta circunferência é uma limaçon de equação polar

$$\rho(\theta) = r + m \cos(\theta),$$

em que m é a medida da distância do pedal ao centro da circunferência e r é a medida de seu raio.

Da relação entre coordenadas polares e cartesianas, temos $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho}$. Logo, a equação cartesiana de uma limaçon é

$$(x^2 + y^2 - mx)^2 = r^2 (x^2 + y^2).$$

Se $r < m$, a limaçon se assemelha à apresentada na Figura 12, pois o pedal é externo à circunferência; se $m = r$, a limaçon é uma cardioide, pois o pedal pertence à circunferência; e, se $m < r$, a limaçon se assemelha à apresentada anteriormente na Figura 14, pois o pedal é interno à circunferência.

De acordo com Pickover (2009, p. 138), em 1674, Ole Christensen Romer (dinamarquês, 1644 – 1710) interpretou a forma da cardioide como rodas dentadas de uma engrenagem. Já em 1708, Philippe de La Hire (francês, 1640 – 1718) determinou seu perímetro e, em 1741, Johann Castillon (italiano, 1708 – 1791) usou, pela primeira vez, o termo “cardioide” para nomeá-la.

Como, para $m = r$, temos uma cardioide na equação geral de uma limaçon, então sua equação polar é

$$\rho(\theta) = r(1 + \cos(\theta))$$

e sua equação cartesiana é

$$(x^2 + y^2 - rx)^2 = r^2 (x^2 + y^2).$$

Para determinarmos seu perímetro, consideramos $\alpha(\theta) = \rho(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$ e, portanto,

$$\alpha'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos(\theta) - \rho(\theta)\sin(\theta), \rho'(\theta)\sin(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta)).$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} s(\theta) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta = 2r \int_0^{2\pi} \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta = \\ &= 4r \left(\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_0^{\pi} - \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = 8r. \end{aligned}$$

ou seja, a cardioide tem perímetro oito vezes maior do que a medida do raio da circunferência que a gera.

Existem várias aplicações da cardioide, como verificar padrões de interferência e de congruência de ondas que irradiam, concentricamente, de um ponto. Com isso, podemos detectar, por exemplo, áreas de maior sensibilidade em um microfone: o microfone cardioide é mais sensível ao som frontal e minimiza o som traseiro.

3.2 CURVA PEDAL DA HIPÉRBOLE

Vamos estudar, agora, algumas curvas pedais da hipérbole. Para isso, consideramos a hipérbole dada pela curva regular $\alpha(t) = (\pm a \cosh(t), b \sinh(t))$, com t real, de centro na origem e de semieixos de medidas a e b , respectivamente. Ao substituírmos suas funções (e suas derivadas) coordenadas nas fórmulas obtidas no início do capítulo, temos a curva pedal da hipérbole, em relação a um ponto $P = (x_p, y_p)$ do mesmo plano, de coordenadas

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a \sinh(t) (a x_p \sinh(t) \pm b y_p \cosh(t)) \pm a b^2 \cosh(t)}{a^2 \sinh^2(t) + b^2 \cosh^2(t)}; \\ y(t) &= \frac{b \cosh(t) (b y_p \cosh(t) \pm a x_p \sinh(t)) - a^2 b \sinh(t)}{a^2 \sinh^2(t) + b^2 \cosh^2(t)}. \end{aligned}$$

Para o pedal no centro (origem) da hipérbole, sua curva pedal pode ser parametrizada da forma

$$\beta(t) = \frac{ab}{a^2 \operatorname{senh}^2(t) + b^2 \operatorname{cosh}^2(t)} (\pm b \operatorname{cosh}(t), -a \operatorname{senh}(t)),$$

que recebe o nome de lemniscata de Bernoulli (mais detalhes na Subseção 3.2.1) e está representada na Figura 17.

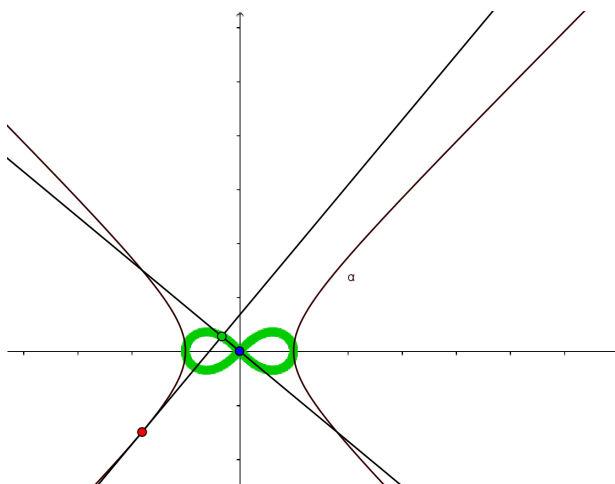


Figura 17: Curva pedal da hipérbole em relação ao seu centro.

Para o eixo real da hipérbole sobre o eixo das ordenadas, ela é uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ da hipérbole anterior, ou seja, a lemniscata de Bernoulli relacionada a ela também é uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ da lemniscata anterior.

Para o pedal em um dos focos, F , da hipérbole, sua curva pedal é, para o eixo real sobre o eixo das abscissas e $F = (x_F, 0)$,

$$\beta(t) = \frac{a}{a^2 \operatorname{senh}^2(t) + b^2 \operatorname{cosh}^2(t)} \left(ax_F \operatorname{senh}^2(t) \pm b^2 \operatorname{cosh}(t), -b \operatorname{senh}(t) (a \mp x_F \operatorname{cosh}(t)) \right),$$

que é uma circunferência de mesmo centro da hipérbole e de raio de medida a (medida do semieixo real), como podemos observar na Figura 18.

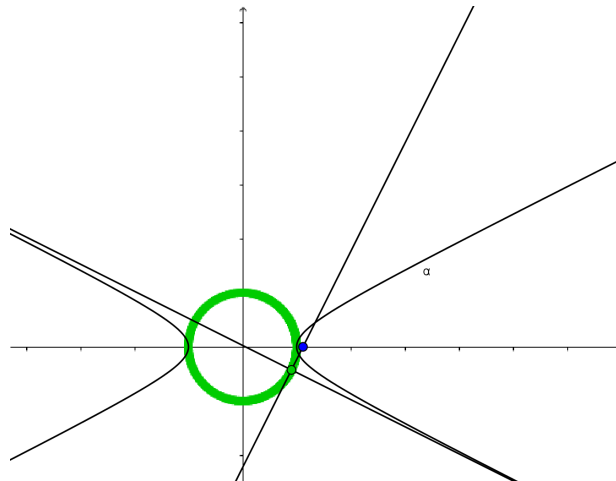


Figura 18: Curva pedal da hipérbole em relação a um de seus focos.

3.2.1 Lemniscata de Bernoulli

De acordo com [Lockwood](#) (1961, p. 117), Jakob Bernoulli (suíço, 1654 – 1705) publicou um artigo, em 1694, em que descrevia uma curva plana denominada lemnisco, cujo traço era um “oito deitado”. Porém, ele não sabia que o que tinha acabado de descrever era um caso particular das ovais de Cassini – descritas cerca de quatorze anos antes –, uma vez que esta curva também pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos P do plano, tais que $med(\overline{PF_1}) \cdot med(\overline{PF_2}) = n^2$, em que F_1 e F_2 são os focos da hipérbole, distantes $2n$ entre si.

Desta forma, a equação cartesiana da lemniscata de Bernoulli é, baseada na demonstração da equação cartesiana das ovais de Cassini,

$$(x^2 + y^2 + n^2)^2 - 4n^2x^2 = n^4,$$

dado que $m = n$. Por rotação de $\frac{\pi}{2}$, podemos obter a lemniscata com F_1 e F_2 no eixo das ordenadas e, por translação, podemos encontrá-la com ponto de autointerseção fora da origem.

De acordo com [Weisstein](#) ([2017]), as propriedades gerais da lemniscata de Bernoulli só foram descobertas em 1750, por Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi (italiano, 1715 – 1797), mas outros matemáticos também estudaram tal curva, como Leonhard Paul Euler (suíço, 1707 – 1783) e Johann Carl Friedrich Gauss (alemão, 1777 – 1855), que investigaram o seu comprimento, o qual mais tarde, viria a contribuir com o desenvolvimento da teoria das funções elípticas.

3.3 CURVA PEDAL DA PARÁBOLA

Vamos, agora, estudar algumas curvas pedais da parábola. Para isso, consideramos a parábola dada pela curva regular $\alpha(t) = \left(t, \frac{t^2}{4p}\right)$, com t real e de vértice na origem. Ao substituirmos suas funções (e suas derivadas) coordenadas nas fórmulas, obtemos a curva pedal da parábola, em relação a um ponto $P = (x_p, y_p)$ do mesmo plano, de coordenadas

$$x(t) = \frac{8px_p + 4ty_p + t^3}{2(4p^2 + t^2)};$$

$$y(t) = \frac{2ptx_p + t^2y_p - pt^2}{4p^2 + t^2}.$$

Para o pedal no foco, F , da parábola, sua curva pedal é uma reta tangente ao vértice, como podemos observar na Figura 19, que pode ser parametrizada da forma

$$\beta(t) = \left(\frac{t(4p + t^2)}{2(4p^2 + t^2)}, 0\right),$$

dados que $F = (0, p)$.

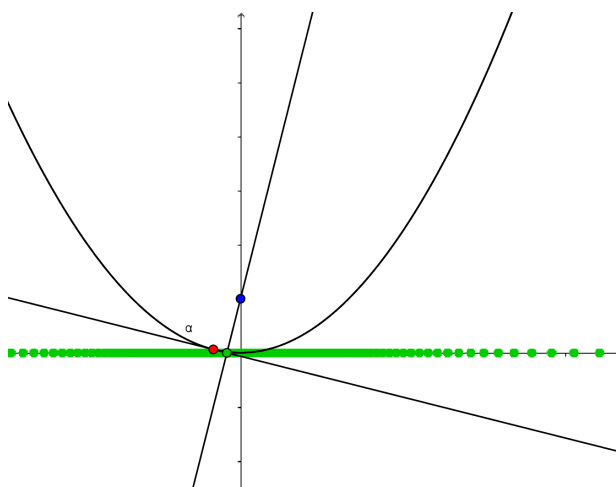


Figura 19: Curva pedal da parábola em relação ao seu foco.

Para o pedal no vértice, a curva pedal da parábola é uma cissoide de Diocles (mais detalhes na Subseção 3.3.1), como podemos observar na Figura 20, que pode ser parametrizada da forma

$$\beta(t) = \frac{t^2}{4p^2 + t^2} \left(\frac{t}{2}, -p\right).$$

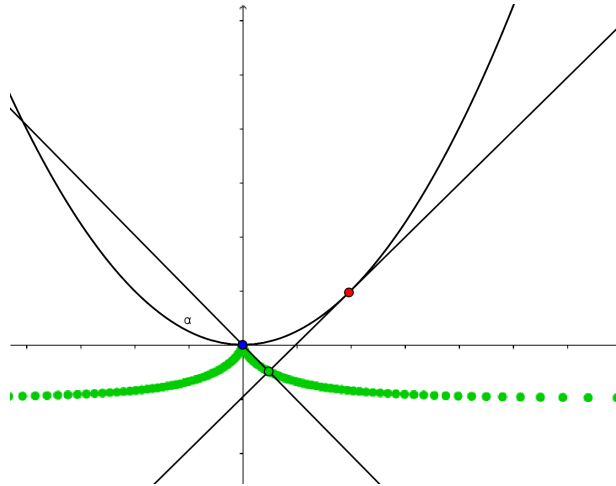


Figura 20: Curva pedal da parábola em relação ao seu vértice.

Podemos notar que a cissoide de Diocles possui cúspide no pedal. De fato, $\beta'(0) = (0,0)$, ou seja, ela não é uma curva totalmente regular. Além disso, esta curva possui uma assíntota na diretriz da parábola, visto que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} -\frac{pt^2}{t^2 + 4p^2} = -p.$$

Agora, para o pedal em qualquer ponto pertencente à diretriz da parábola, sua curva pedal é uma estrofoide, que pode ser parametrizada da forma

$$\beta(t) = \frac{1}{4p^2 + t^2} \left(\frac{8px_p - 4pt + t^3}{2}, 2pt(x_p - t) \right).$$

Se este pedal for exatamente o pé da diretriz, ou seja, também pertencer ao eixo de simetria da parábola, a curva pedal é chamada estrofoide reta (mais detalhes na Subseção 3.3.2), que pode ser parametrizada da forma

$$\beta(t) = -\frac{t}{4p^2 + t^2} \left(\frac{4p - t^2}{2}, 2pt \right),$$

como podemos observar na Figura 21.

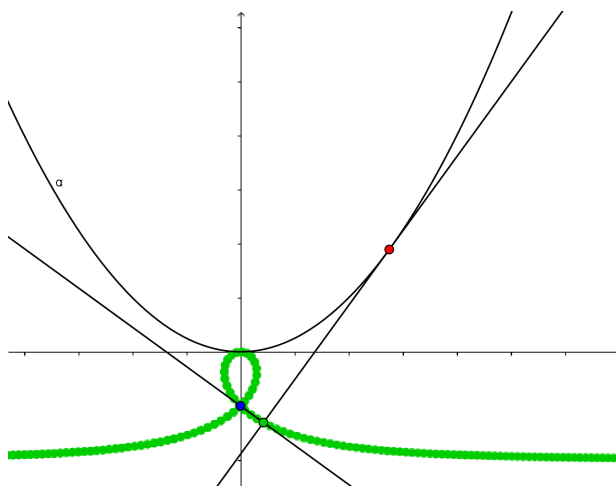


Figura 21: Curva pedal da parábola em relação ao pé da diretriz.

Podemos notar que a estrofoide reta possui assíntota $y = -2p$, uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} -\frac{2pt^2}{t^2 + 4p^2} = -2p.$$

Para qualquer parábola de vértice fora da origem ou de eixo de simetria não coincidente com o eixo das ordenadas, suas curvas pedais podem ser tomadas por movimentos rígidos em relação às apresentadas.

3.3.1 Cissoide de Diocles

De acordo com [Boyer](#) (1974, p. 69), Hipócrates de Quios (grego, 470 a.C. – 410 a.C.) demonstrou que o problema da duplicação do cubo (construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado) podia ser solucionado dados dois segmentos de medidas a e $2a$, tais que se obtivessem outros dois de medidas x e y , de forma que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

pois, daí, podemos concluir que $x^3 = 2a^3$.

Menêmo (grego, 380 a.C. – 320 a.C.) também resolveu este problema, que, de acordo com [Borlin](#) (2008, p. 27-29), fe-lo com a interseção de duas parábolas, $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$, como podemos observar na [Figura 22](#), em que $y_B = x_B \sqrt[3]{2}$.

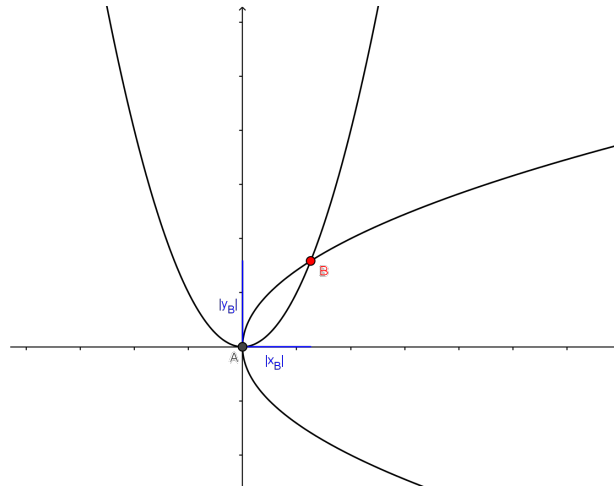


Figura 22: Solução de Menêmo para o problema da duplicação do cubo.

Já Diocles (grego, 240 a.C. – 180 a.C.) criou a cissoide como uma de suas tentativas em resolver tal problema por métodos geométricos, como afirma Almeida & Reis (2008, p. 264), já que tal curva está relacionada com a parábola e também é possível determinar nela os dois meios proporcionais citados por Hipócrates, como podemos observar na Figura 23.

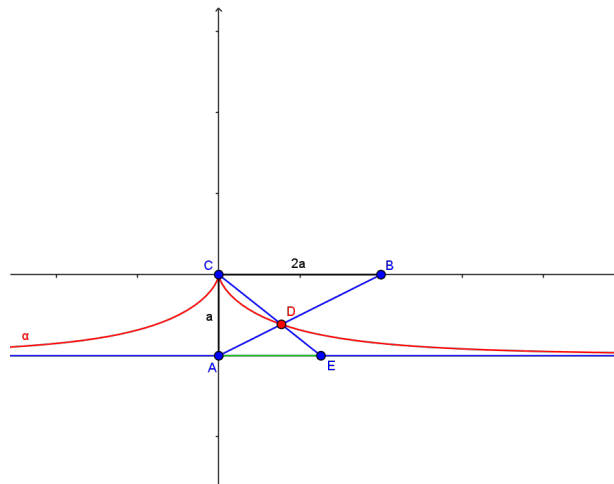


Figura 23: Solução de Diocles para a duplicação do cubo.

Na figura, temos a cúspide C da cissoide, o ponto A pertencente à sua assíntota e ao seu eixo de simetria e o ponto B , tal que $med(\overline{BC}) = 2med(\overline{AC}) = 2a$, além de $\overline{BC} \perp \overline{AC}$. O segmento \overline{AB} intercepta a cissoide em D e, por este ponto, traçamos um

outro segmento, de extremidades em sua cúspide e em sua assíntota, de forma a demarcarmos E , cuja distância ao ponto A é $a\sqrt[3]{2}$.

Podemos verificar tal fato da seguinte maneira: consideramos $A = (0, -a)$, $B = (2a, 0)$, $C = (0, 0)$, $D = (x, y)$, com $x > 0$ e $y < 0$, e $E = (e, -a)$. A reta que passa por C e E é dada por $x - 2y - 2a = 0$ e a que passa por A e B é dada por $ax + ey = 0$. A interseção dessas retas determina D , cuja ordenada é

$$y = -\frac{2a^2}{2a + e}$$

e cuja abscissa é

$$x = \frac{2ae}{2a + e}.$$

Tomando a equação cartesiana dessa cissoide, que é $y^3 = -x^2(a + y)$, e substituindo os valores das coordenadas cartesianas de D , encontramos $e = a\sqrt[3]{2}$.

Podemos notar que os cálculos apresentados para a resolução do problema da duplicação do cubo – tanto de Hipócrates, de Menêmo e de Diocles – foram feitos com conhecimentos adquiridos durante o Ensino Médio (segundo o Currículo do Estado de São Paulo, conforme já citado), o que torna a discussão desse assunto cabível em tal segmento, tal como fizemos nesta subseção.

Vale ressaltar que não foi Diocles quem atribuiu a esta curva o nome de “cissoide”, que só foi mencionado, pela primeira vez, por Geminus de Rodes (grego, 110 a.C. – 40 a.C.), em comentários a uma obra de Arquimedes de Siracusa (grego, 287 a.C. – 212 a.C.), cerca de um século depois da morte de Diocles, como afirma [Lockwood](#) (1961, p. 132-133).

Em 1634, Pierre de Fermat (francês, 1607 – 1665) e Roberval estudaram as tangentes desta curva e, em 1658, Christiaan Huygens (holandês, 1629 – 1695) e John Wallis (inglês, 1616 – 1703) calcularam a área entre a curva e sua assíntota. Já Isaac Newton (inglês, 1643 – 1727), de acordo com [Almeida & Reis](#) (2008, p. 287-291), apresentou um novo método para se desenhar a cissoide de Diocles, que pode ser encontrado nesta referência.

Um fato curioso é que a cardioide, que é a curva pedal da circunferência em relação a um ponto pertencente à ela mesma, também pode ser a curva pedal da cissoide de Diocles, mas em relação a certo ponto em seu eixo de simetria, cuja distância à cúspide é quatro vezes a distância dela à assíntota, no sentido em que aparece na Figura 24.

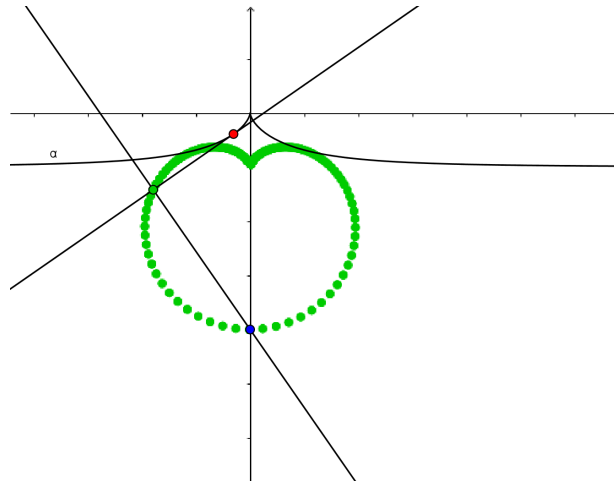


Figura 24: Cardioide como curva pedal da cissoide de Diocles.

De acordo com [Marques, Parra & Suzuki](#) (2006, p. 9), no século XIX, foi constatado, a partir dos estudos de Paolo Ruffini (italiano, 1765 – 1822), Niels Henrik Abel (norueguês, 1802 – 1829) e Évariste Galois (francês, 1811 – 1832), que, apesar dos esforços de Diocles, o problema da duplicação do cubo não podia ser resolvido, de fato, apenas com régua e compasso, ou seja, sua cissoide também não era perfeitamente construtível com apenas instrumentos euclidianos.

3.3.2 Estrofoide reta

Roberval foi, provavelmente, o primeiro a estudar a estrofoide reta, ainda que, de acordo com [Lockwood](#) (1961, p. 97), sua mais antiga referência seja atribuída a Evangelista Torricelli (italiano, 1608 – 1647), que, por volta de 1645, descreveu-a quando ela ainda era chamada pteróide. Esta curva só teve seu nome atual proposto em 1846, por Henry Montucri (francês, 1808 – 1877).

Pelo mesmo método de Newton citado anteriormente para desenhar a cissoide de Diocles, também é possível desenhar a estrofoide reta.

4

TEORIA LOCAL DAS CURVAS NO PLANO

Estudaremos, a partir de agora, a geometria local das curvas planas, isto é, trataremos das propriedades geométricas que uma curva plana possui em uma vizinhança de um de seus pontos.

Para desenvolvermos a Teoria Local das Curvas no Plano, também necessitamos de que a curva parametrizada diferenciável em questão seja regular. Assim, consideraremos, como base para o seu desenvolvimento, a curva regular PPCA $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, com $s \in I$ (como vimos anteriormente, toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco).

Como α é regular e PPCA, temos $\alpha'(s)$ unitário, que denotaremos por $t(s)$, ou seja,

$$t(s) = (x'(s), y'(s)).$$

A partir deste vetor, construímos uma base ortonormal do plano, $\{t(s), n(s)\}$, com mesma orientação da base canônica, em que $n(s)$ é o vetor normal a α em s . Logo,

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)),$$

que, de fato, é unitário, pois $|n(s)| = \sqrt{(-y'(s))^2 + (x'(s))^2} = 1$, e é ortogonal a $t(s)$, pois $\langle t(s), n(s) \rangle = -x'(s)y'(s) + x'(s)y'(s) = 0$.

Para cada s , podemos determinar a base $\{t(s), n(s)\}$, chamada referencial de Frenet, em que t e n são funções diferenciáveis de I em \mathbb{R}^2 , de classe de C^∞ , tais que $t : s \mapsto t(s)$ e $n : s \mapsto n(s)$. Estes vetores formam um diedro ortonormal associado à curva, chamado diedro de Frenet, que é um sistema de referência móvel ao longo da curva.

4.1 CURVATURA

Uma básica noção de curvatura de uma curva plana é tomá-la como uma função que mede, em cada ponto, o quanto a curva deixa de ser uma reta. Deste modo, a curvatura

é uma propriedade local, visto que se trata de uma propriedade geométrica em uma vizinhança de cada um dos pontos do traço da curva.

Ainda considerando a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ citada, sabemos que $|t(s)|^2 = 1$ e, portanto, $(\langle t(s), t(s) \rangle)' = 0$, ou seja, $\langle t'(s), t(s) \rangle + \langle t(s), t'(s) \rangle = 0$. Como $\langle t'(s), t(s) \rangle = \langle t(s), t'(s) \rangle$, então

$$\langle t'(s), t(s) \rangle = 0.$$

Logo, concluímos que $t'(s)$ é perpendicular a $t(s)$ e, como $t(s)$ é perpendicular a $n(s)$, temos que $t'(s)$ é múltiplo de $n(s)$. Assim, podemos relacioná-los por

$$t'(s) = k(s) n(s),$$

em que $k(s)$ é um fator de proporcionalidade, chamado curvatura de α em s , que pode ser interpretado como “o tamanho da projeção de $t'(s)$ em $n(s)$ ”, já que

$$\langle t'(s), n(s) \rangle = \langle k(s) n(s), n(s) \rangle = k(s) \langle n(s), n(s) \rangle = k(s) |n(s)|^2 = k(s) \cdot 1 = k(s).$$

Logo, a curvatura da curva pode ser dada por

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = x'(s) y''(s) - x''(s) y'(s).$$

De maneira análoga, podemos mostrar que $n'(s)$ é perpendicular a $n(s)$ e, portanto, $n'(s)$ é múltiplo de $t(s)$. Como

$$\langle n'(s), t(s) \rangle = \langle (-y''(s), x''(s)), (x'(s), y'(s)) \rangle = x''(s) y'(s) - x'(s) y''(s) = -k(s),$$

podemos relacioná-los por

$$n'(s) = -k(s) t(s).$$

As duas equações que acabamos de determinar, $t'(s) = k(s) n(s)$ e $n'(s) = -k(s) t(s)$, são chamadas equações de Frenet para as curvas planas e elas têm por finalidade determinar a primeira derivada de cada vetor da base do referencial de Frenet em função da própria base.

Medir o quanto uma curva deixa de ser uma reta em determinado ponto também pode ser interpretado como a medida da taxa de variação da direção da reta tangente à curva neste ponto. Notamos que, se $k(s) > 0$, temos

$$|t'(s)| = |k(s) n(s)| = k(s) |n(s)| = k(s) \cdot 1 = k(s)$$

e, se $k(s) < 0$, temos

$$|t'(s)| = |k(s)n(s)| = -k(s)|n(s)| = -k(s) \cdot 1 = -k(s),$$

ou seja,

$$|k(s)| = |t'(s)| = |\alpha''(s)|.$$

Isso nos mostra que o valor absoluto da curvatura indica, de fato, a velocidade com que as retas tangentes à curva mudam de direção.

Vejam os exemplos do cálculo do valor absoluto da curvatura para curvas regulares PPCA, como a reta e a circunferência.

Exemplo 4.1. Consideramos a curva regular PPCA

$$\alpha(s) = \left(\frac{as}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

com a e b reais e simultaneamente não nulos, cujo traço é uma reta. Seu vetor tangente é constante, o que implica em $t'(s) = 0$ e, portanto, $k(s) = 0$. Logo, a curvatura de uma reta é sempre nula.

Exemplo 4.2. Consideramos a curva regular PPCA

$$\alpha(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right)$$

cujo traço é uma circunferência de raio de medida r . O valor absoluto de sua curvatura é

$$|k(s)| = |t'(s)| = \frac{1}{r},$$

ou seja, constante e igual ao inverso da medida de seu raio.

Como o valor absoluto da curvatura de uma circunferência é sempre constante e igual ao inverso da medida de seu raio, notamos que, quanto maior for esta medida, menor será o valor absoluto da curvatura, ou seja, se $r \rightarrow \infty$, temos $k(s) \rightarrow 0$, o que significa que a circunferência se aproxima de uma reta.

Uma outra abordagem para o valor absoluto da curvatura é a que segue.

Dada uma curva regular PPCA $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, com $s \in I$, fixamos $s_0 \in I$ e consideramos os vetores tangentes $t(s_0)$ e $t(s_0 + h)$, com $(s_0 + h) \in I$, tais que $\phi(h)$ é o ângulo formado por eles, com $0 \leq \phi(h) \leq \pi$. Da Lei dos Cossenos, temos

$$\begin{aligned} |t(s_0 + h) - t(s_0)|^2 &= |t(s_0 + h)|^2 + |t(s_0)|^2 - 2|t(s_0 + h)||t(s_0)|\cos(\phi(h)) = \\ &= 2(1 - \cos(\phi(h))) \end{aligned}$$

e, das relações do arco duplo, temos

$$|t(s_0 + h) - t(s_0)|^2 = 4\text{sen}^2\left(\frac{\phi(h)}{2}\right),$$

ou seja,

$$|t(s_0 + h) - t(s_0)| = 2\left|\text{sen}\left(\frac{\phi(h)}{2}\right)\right|.$$

Como a função curvatura mede a velocidade com que as retas tangentes à curva mudam de direção, então

$$|k(s)| = |t'(s)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{t(s+h) - t(s)}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|t(s+h) - t(s)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\left|\text{sen}\left(\frac{\phi(h)}{2}\right)\right|}{h}.$$

Visto que $\lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(h) = h$, então

$$|k(s)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\left|\frac{\phi(h)}{2}\right|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\phi(h)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h)}{h}.$$

Até aqui, a curvatura foi tratada apenas para curvas regulares PPCA. Como nem sempre é fácil encontrar tal parametrização, vamos determinar a função curvatura para uma curva regular com parâmetro real qualquer.

Consideramos a curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(m) = (x(m), y(m))$, parametrizada por um parâmetro real qualquer, m , e β uma reparametrização de α pelo comprimento de arco, ou seja, $\beta(s(m)) = \alpha(m)$.

Ao derivarmos esta última equação, temos $\beta'(s(m))s'(m) = \alpha'(m)$. Sabemos que

$$s(m) = \int_{m_0}^m |\alpha'(m)| dm$$

e, portanto, $s'(m) = |\alpha'(m)|$. Logo, temos

$$\beta'(s(m)) = \frac{\alpha'(m)}{|\alpha'(m)|},$$

ou seja,

$$t(s(m)) = \frac{(x'(m), y'(m))}{\sqrt{(x'(m))^2 + (y'(m))^2}}$$

e, conseqüentemente,

$$n(s(m)) = \frac{(-y'(m), x'(m))}{\sqrt{(x'(m))^2 + (y'(m))^2}}.$$

Como $\beta(s(m)) = \alpha(m)$, então $t(s(m)) = t(m)$ e $n(s(m)) = n(m)$. Logo, a curvatura de α pode ser dada por

$$k(m) = k(s(m)) = \langle t'(s(m)), n(s(m)) \rangle = \frac{x'(m)y''(m) - x''(m)y'(m)}{\left((x'(m))^2 + (y'(m))^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Com isso, concluímos que a curvatura de uma curva, em determinado ponto, não depende de sua parametrização.

4.1.1 Interpretação geométrica da curvatura

O sinal da curvatura de uma curva regular depende de sua orientação, ou seja, do sentido de percurso de seu traço: se a curva estiver se curvando, localmente, para a direita, tem curvatura negativa; se para a esquerda, positiva.

Para melhor visualizarmos esta situação, consideramos a curva regular PPCA $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como $k(s_0) = \langle t'(s_0), n(s_0) \rangle = \langle \alpha''(s_0), n(s_0) \rangle$, então, se $k(s_0) < 0$, temos $\alpha''(s_0)$ e $n(s_0)$ em sentidos opostos e, se $k(s_0) > 0$, temos $\alpha''(s_0)$ e $n(s_0)$ no mesmo sentido, como podemos observar na Figura 25.

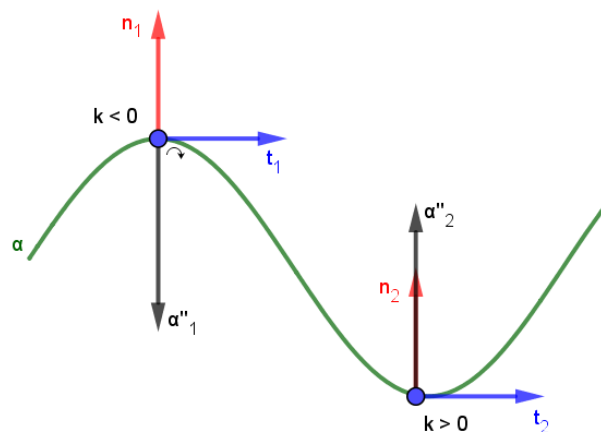


Figura 25: Interpretação do sinal de curvatura.

A reta tangente a α , em $s_0 \in I$, pode ser dada por

$$T(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0) \alpha'(s_0)$$

e ela divide o plano em dois semiplanos. Ao expandirmos $\alpha(s)$ em série de Taylor, em torno de s_0 , temos

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0) \cdot \alpha'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2} \cdot \alpha''(s_0) + R(s),$$

ou seja,

$$\alpha(s) - T(s) = \frac{(s - s_0)^2}{2} \cdot \alpha''(s_0) + R(s),$$

em que $R(s)$ é uma função vetorial, tal que $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R(s)}{(s - s_0)^2} = 0$.

Como $\alpha(s) - T(s)$ é um vetor contido no semiplano que contém o traço da curva e como o vetor $R(s)$ é suficientemente pequeno, então o vetor $\alpha''(s_0)$ está sempre contido no semiplano que contém, localmente, o traço da curva, como podemos observar na Figura 26.

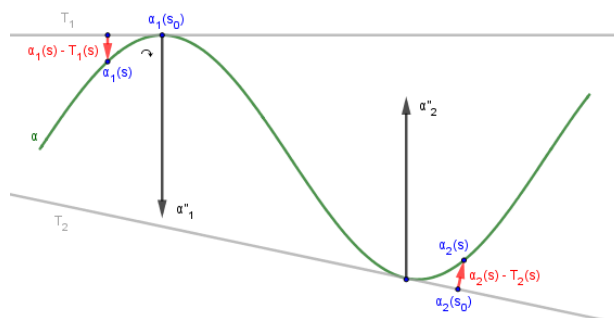


Figura 26: Interpretação geométrica da curvatura.

Também podemos interpretar o sinal da curvatura da seguinte maneira: se a reta tangente à curva, em determinado ponto, mantém a curva à sua direita – no sentido de percurso do traço –, a curva tem curvatura negativa neste ponto; se a reta mantém a curva à sua esquerda, a curvatura é positiva (como podemos observar na figura anterior).

Se a orientação da curva for invertida, seu vetor normal, em determinado ponto, também tem seu sentido invertido, porém o vetor α'' , neste ponto, não, pois ele é intrínseco do traço de α . Podemos observar tal fato na Figura 27, que inverteu a orientação da curva apresentada Figura 25.

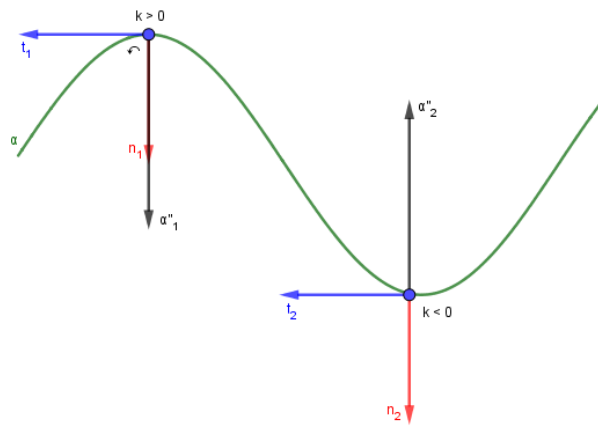


Figura 27: Alteração de orientação.

Deste modo, duas parametrizações de curvas regulares de mesmo traço só têm a mesma orientação se a função mudança de parâmetro preserva a orientação da curva original, ou seja, se esta função é estritamente crescente; se a função for estritamente decrescente, as orientações são contrárias.

4.1.2 Gráfico de curvatura

Para verificarmos o comportamento da função curvatura, de uma maneira mais visual, podemos observar seus gráficos, onde é possível identificar pontos de curvatura máxima ou de curvatura mínima e, até mesmo, pontos singulares da curva.

Inicialmente, vamos analisar o gráfico de curvatura de uma elipse. Para isso, consideramos a curva regular $\alpha(m) = (a \cos(m), b \sin(m))$, com m real e a e b reais não nulos, cujo traço é uma elipse de centro na origem (sem perda de generalidade). Sua função curvatura é dada por

$$k(m) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(m) + b^2 \cos^2(m))^{\frac{3}{2}}}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.3. Consideramos a curva regular $\alpha(m) = (2 \cos(m), \sin(m))$, com m real, cujo traço é uma elipse. Sua função curvatura é dada por

$$k(m) = \frac{2}{(4 \sin^2(m) + \cos^2(m))^{\frac{3}{2}}},$$

cujos gráficos podem ser observados na Figura 28.

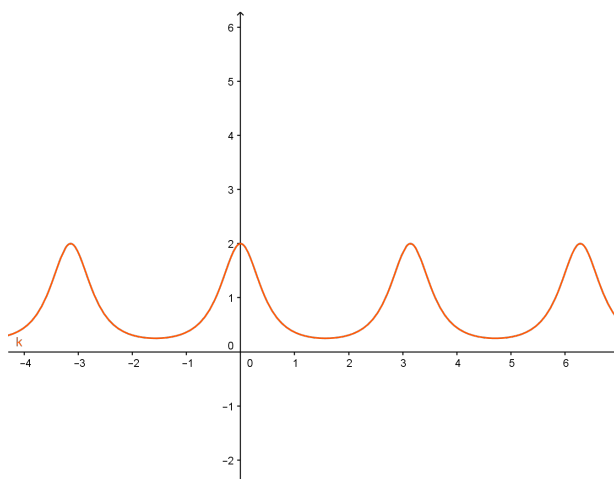


Figura 28: Gráfico de curvatura de uma elipse.

No gráfico, podemos notar que tal elipse tem curvatura máxima (igual a 2) em pontos em que $m = K\pi$ e curvatura mínima em pontos em que $m = \frac{\pi(2K+1)}{2}$, com K inteiro. Neste caso, o eixo maior da elipse encontra-se paralelo ao eixo das abscissas, mas, se estiver paralelo ao das ordenadas, estes pontos de curvatura máxima e de curvatura mínima se invertem.

Sabemos que uma circunferência é uma elipse cujos semieixos possuem mesma medida. Logo, da função curvatura obtida, genericamente, para uma elipse, concluímos que a da circunferência, em que r é a medida de seu raio, é dada por $k(m) = \frac{1}{r}$. Como sua função curvatura é constante, ela possui infinitos pontos críticos.

Consideramos, agora, a curva regular $\alpha(m) = (\pm a \cosh(m), b \sinh(m))$, com m real, cujo traço é uma hipérbole de centro na origem (sem perda de generalidade), de eixo real sobre o eixo das abscissas, e com a e b reais positivos. Sua função curvatura é dada por

$$k(m) = \mp \frac{ab}{(a^2 \sinh^2(m) + b^2 \cosh^2(m))^{\frac{3}{2}}}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.4. Consideramos a curva regular $\alpha(m) = (\pm 2 \cosh(m), \sinh(m))$, com m real, cujo traço é uma hipérbole. Sua função curvatura é dada por

$$k(m) = \mp \frac{2}{(4 \sinh^2(m) + \cosh^2(m))^{\frac{3}{2}}}$$

(negativo para um ramo e positivo para outro), cujo gráfico pode ser observado na Figura 29.

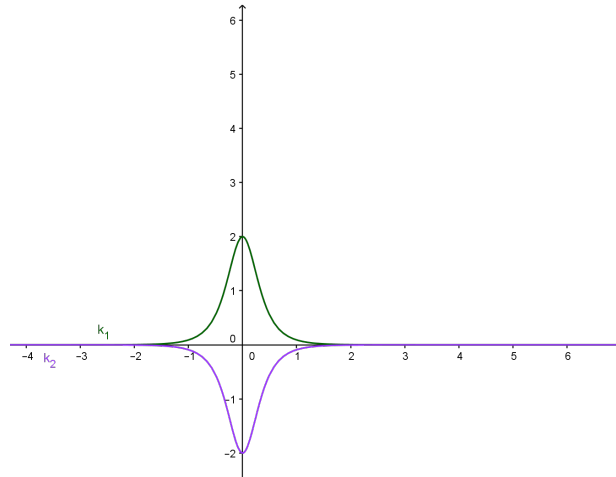


Figura 29: Gráfico de curvatura de uma hipérbole.

A curvatura do ramo da hipérbole que está no semiplano de abscissas negativas está representada por k_1 , ou seja, é positiva. Já a curvatura do ramo que está no semiplano de abscissas positivas está representada por k_2 , ou seja, é negativa. Podemos observar que as curvaturas são exatamente opostas em pontos simétricos dos ramos, em relação ao eixo das ordenadas e que, de fato, a curvatura máxima dessa hipérbole é 2 e a mínima é -2 .

Como $\lim_{m \rightarrow \pm\infty} k(m) = 0$, podemos concluir que a hipérbole se aproxima de duas retas (assíntotas), quando $m \rightarrow \pm\infty$, que se cruzam em seu centro (origem) e que são refletidas em relação ao eixo das ordenadas.

Vamos analisar, agora, o gráfico de curvatura de um gráfico de função. Consideremos a curva regular $\alpha(m) = (m, f(m))$, com m real, cujo traço é o gráfico da função diferenciável f . Sua função curvatura é dada por

$$k(m) = \frac{f''(m)}{\left(1 + (f'(m))^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Logo, o sinal de sua curvatura está diretamente relacionado ao sinal de $f''(m)$.

Da função curvatura de um gráfico de função, podemos concluir que a função curvatura de uma parábola, representada pelo traço da curva regular $\alpha(m) = \left(m, \frac{m^2}{4p}\right)$, com m real, em que p é a medida da distância de seu vértice à diretriz, é dada por

$$k(m) = \frac{4p^2}{(4p^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.5. Consideramos a curva regular $\alpha(m) = \left(m, \frac{m^2}{4}\right)$, com m real, cujo traço é uma parábola. Sua função curvatura é dada por

$$k(m) = \frac{4}{(4 + m^2)^{\frac{3}{2}}},$$

cujo gráfico pode ser observado na Figura 30.

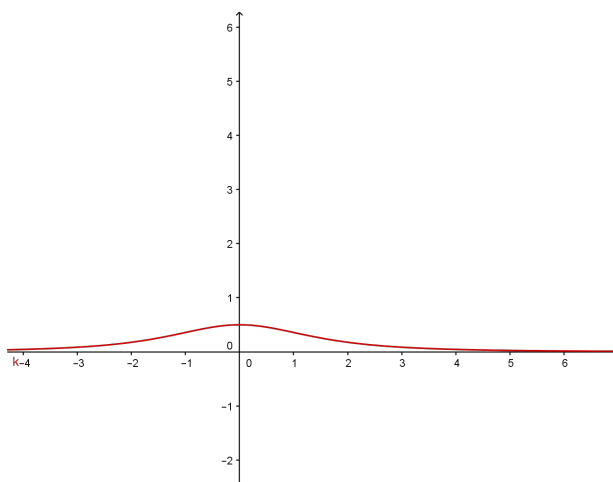


Figura 30: Gráfico de curvatura de uma parábola.

No gráfico, podemos notar que a curvatura dessa parábola é sempre positiva e que a curva possui um único ponto de curvatura máxima, em seu vértice, mas não possui pontos de curvatura mínima. De fato, os vértices de uma curva regular são pontos críticos de sua função curvatura, como definimos a seguir.

Definição 4.6. Um vértice de uma curva plana regular é um ponto em que a primeira derivada de sua função curvatura se anula.

Como muito trabalhado na Educação Básica, sabemos que a parábola possui, realmente, um único vértice.

Apesar de $\lim_{m \rightarrow \pm\infty} k(m) = 0$, a parábola não possui assíntotas como a hipérbole, uma vez que, dado que $\lim_{m \rightarrow \pm\infty} f'(m) = \pm\infty$, as únicas assíntotas possíveis seriam verticais, porém, isso não ocorre na parábola, pois a função f é polinomial.

Vejamos, agora, o gráfico da função curvatura de uma cicloide, que nos permite visualizar não só seus pontos críticos, mas também as singularidades da curva.

Consideramos a curva regular por partes $\alpha(m) = r(m - \text{sen}(m), 1 - \cos(m))$, com m real e r real positivo. Sua função curvatura é dada por

$$k(m) = -\frac{1}{4r \left| \text{sen}\left(\frac{m}{2}\right) \right|}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.7. Consideramos a curva regular por partes $\alpha(m) = (m - \text{sen}(m), 1 - \cos(m))$, com m real, cujo traço é uma cicloide. Sua função curvatura é dada por

$$k(m) = -\frac{1}{4 \left| \text{sen}\left(\frac{m}{2}\right) \right|},$$

cujo gráfico pode ser observado na Figura 31.

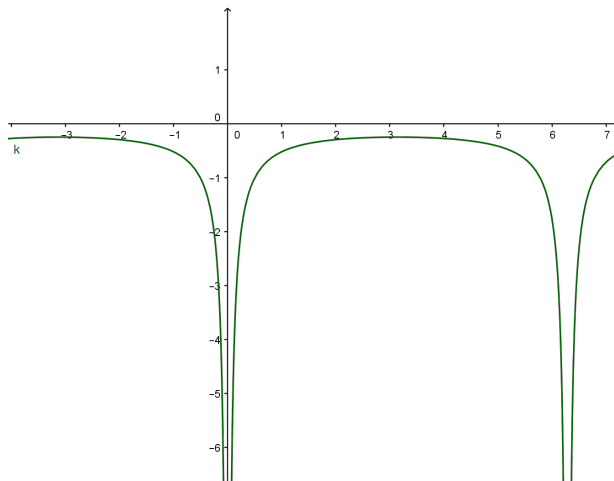


Figura 31: Gráfico de curvatura de uma cicloide.

Podemos observar que esta cicloide possui curvatura máxima em pontos em que $m = \pi(2K + 1)$, para K inteiro, mas não possui pontos de curvatura mínima, pois, quando $m = 2K\pi$, a curvatura tende a $-\infty$, ou seja, são pontos de singularidade da curva e, com isso, ocorrem as cúspides em seu traço.

Se tivéssemos, por exemplo, uma cicloide invertida, sua função curvatura não possuiria pontos de máximo, mas possuiria pontos de mínimo e, em suas cúspides, a curvatura tenderia a ∞ .

4.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS NO PLANO

O Teorema Fundamental das Curvas no Plano nos mostra a importância da curvatura de uma curva regular: a função curvatura de uma curva regular determina completamente, a menos de um movimento rígido no plano.

Enunciamos, a seguir, o teorema e apresentamos uma demonstração para tal.

Teorema 4.8. 1. Dada uma função diferenciável $k(s)$, com $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe, no plano, uma curva regular PPCA $\alpha(s)$, cuja curvatura é $k(s)$.

2. A curva $\alpha(s)$ é única quando fixamos $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, tal que $|v_0| = 1$.

3. Se duas curvas regulares, $\alpha(s)$ e $\beta(s)$, têm a mesma curvatura, então elas se diferem apenas pelas suas posições no plano, ou seja, existe uma rotação, R , e uma translação, T , no plano, tais que $\alpha(s) = (R \circ T)(\beta(s))$.

Demonstração. 1. Consideramos a função

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s) ds,$$

com s_0 fixo, λ real e fixamos um ponto (x_0, y_0) do plano. A curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ pode ser definida por

$$\alpha(s) = \left(x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda) ds, y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(s) + \lambda) ds \right),$$

que está PPCA, visto que $\alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda))$ é unitário. Logo, sua curvatura é dada por

$$\langle t'(s), n(s) \rangle = \theta'(s) = k(s).$$

2. Consideramos a curva regular PPCA $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, de curvatura $k(s)$. Das equações de Frenet, temos $t'(s) = k(s)n(s)$ e, portanto, $(x''(s), y''(s)) = k(s)(-y'(s), x'(s))$, ou seja, $x''(s) = k(s)y'(s)$ e $y''(s) = k(s)x'(s)$. Do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais, segue que, fixados $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, a curva α é única.

3. Consideramos duas curvas regulares, $\alpha(s)$ e $\beta(s)$, de mesma curvatura. Ao fixarmos s_0 , existem, no plano, uma translação T , tal que $T(\beta(s_0)) = \alpha(s_0)$, e uma rotação R , tal que $R(\beta'(s_0)) = \alpha'(s_0)$. Consideramos a curva regular $\gamma(s) = (R \circ T)(\beta(s))$. Logo, $\gamma(s_0) = (R \circ T)(\beta(s_0)) = R \circ (\alpha(s_0)) = \alpha(s_0)$, dada a rotação de um ponto em relação a ele mesmo, ou seja, $\gamma(s_0) = (x_0, y_0)$. Além disso, $\gamma'(s_0) = (R \circ T)(\beta'(s_0)) = R \circ (\beta'(s_0))$, dada a translação de um vetor, ou seja, $\gamma'(s_0) = \alpha'(s_0) = v_0$. Do item anterior, segue que $\gamma \equiv \alpha$ e, portanto, $\alpha(s) = (R \circ T)(\beta(s))$. □

Vejamos uma proposição oriunda deste teorema.

Proposição 4.9. *Uma curva é uma reta se, e somente se, sua curvatura é identicamente nula.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular PPCA, cujo traço é uma reta, então $\alpha(s) = (x_0, y_0) + sv$, em que (x_0, y_0) é um ponto do plano por onde ela passa e v é um vetor unitário, ao qual ela é paralela. Logo, $\alpha''(s) = 0$ e, portanto, sua curvatura $k(s)$ é nula.

(\Leftarrow) Se a curvatura, $k(s)$, de uma curva regular PPCA α , é nula, então $\alpha''(s) = 0$. Ao integrarmos esta equação duas vezes seguidas, podemos obter $\alpha(s) = (x_0, y_0) + sv$, que é uma reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) do plano e é paralela ao vetor unitário v . □

Este teorema também nos será muito útil para a demonstração do Teorema dos Quatro Vértices, no próximo capítulo.

4.3 EVOLUTA

A evoluta de uma curva regular também pode nos ajudar a identificar os vértices da curva. Antes de estudá-la propriamente dita, vamos a alguns conceitos prévios.

Vimos, anteriormente, que o valor absoluto da curvatura de uma circunferência é constante e igual ao inverso da medida de seu raio. Então, ao considerarmos a curva regular PPCA $\alpha(s)$, com $k(s) \neq 0$, a quantidade

$$\rho(s_0) = \frac{1}{|k(s_0)|},$$

chamada raio de curvatura de α em s_0 , é, também, a medida do raio da circunferência que melhor se aproxima de α em s_0 e cujo centro é dado por

$$c(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}n(s_0),$$

chamado centro de curvatura de α em s_0 . A esta circunferência, que possui a mesma curvatura de α em s_0 , damos o nome de circunferência osculadora (ou círculo osculador).

Notamos que o centro de curvatura é um ponto que parte de $\alpha(s_0)$, no sentido de seu vetor normal se a curvatura for positiva neste ponto (ou no sentido oposto de seu vetor normal se a curvatura for negativa), a uma distância igual à do raio. Ou seja, se a curvatura for positiva, o vetor normal está do mesmo lado da circunferência osculadora e, se a curvatura for negativa, ele está do lado oposto, como podemos observar na Figura 32.

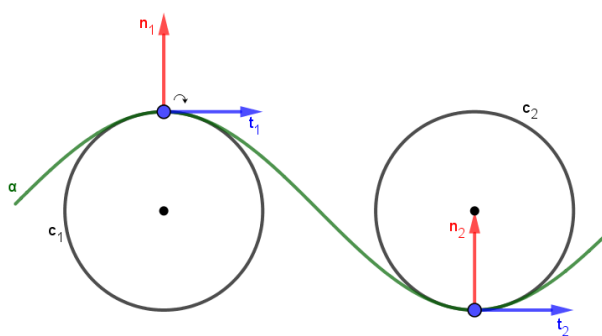


Figura 32: Circunferências osculadoras.

Quando variamos o parâmetro de α , os centros de curvatura passam a descrever uma trajetória β , chamada evoluta de α , que é, justamente, o lugar geométrico dos centros das circunferências osculadoras da curva. Assim, a evoluta da curva regular PPCA α , supracitada, é definida por

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s).$$

Determinemos a evoluta de uma circunferência.

Exemplo 4.10. Consideramos a curva regular PPCA $\alpha(s) = r \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right)$, cujo traço é uma circunferência de centro na origem (sem perda de generalidade) e de raio de medida r . Para todo s , o centro de curvatura da respectiva circunferência osculadora é

$$\beta(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) + \frac{1}{\frac{1}{r}} \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) = (0, 0).$$

Logo, a evoluta de uma circunferência é o seu próprio centro.

Além de a evoluta de uma circunferência ser seu próprio centro, seu raio de curvatura também é o seu próprio raio. Logo, qualquer circunferência osculadora de uma circunferência é ela própria.

Sabemos que nem sempre é fácil encontrar uma parametrização de curva pelo comprimento de arco. Assim, vamos definir a evoluta para uma curva regular parametrizada por um parâmetro real qualquer.

Consideramos uma curva regular $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, parametrizada por um parâmetro, t , real qualquer. Sabemos que $\frac{n(t)}{|\alpha'(t)|}$ é um vetor unitário. Logo, a evoluta é dada por

$$c(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t) |\alpha'(t)|} n(t).$$

Vejamos a evoluta de uma elipse dada por uma curva regular que não está PPCA.

Exemplo 4.11. Consideramos a curva regular $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, com t real e a e b reais positivos, cujo traço é uma elipse. Sua evoluta é dada por

$$\beta(t) = (a^2 - b^2) \left(\frac{\cos^3(t)}{a}, -\frac{\sin^3(t)}{b} \right),$$

cujo traço está representado na Figura 33, para $\alpha(t) = (2 \cos(t), \sin(t))$.

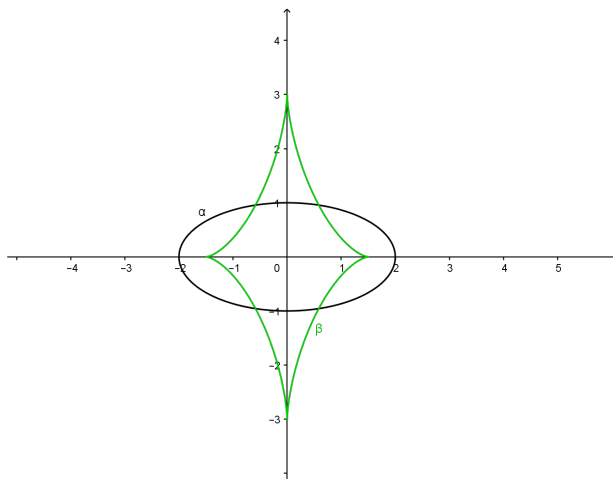


Figura 33: Uma elipse e sua evoluta.

Podemos observar que houve cúspides na evoluta nos pontos em que $t = \frac{K\pi}{2}$, com K inteiro, que são, justamente, os pontos críticos da função curvatura da elipse. Deste modo, a evoluta deixa de ser regular nestes pontos, que são os vértices da curva original.

No gráfico, notamos que a elipse possui quatro vértices, tais que dois são de curvatura máxima e dois de mínima. Nos de curvatura máxima, a circunferência osculadora encontra-se dentro da elipse e, nos de mínima, é a elipse que se encontra dentro da circunferência, como podemos observar na Figura 34.

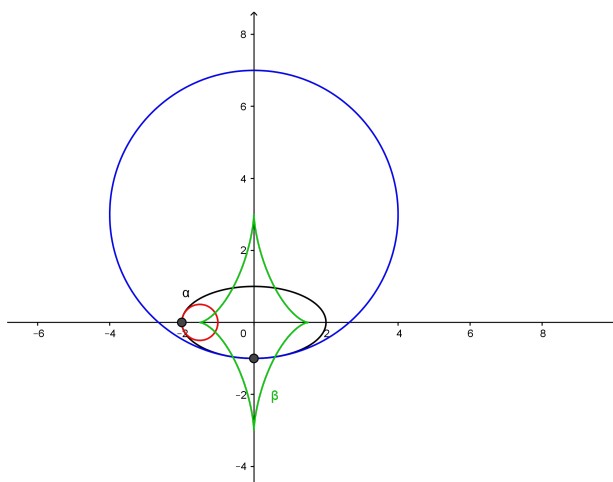


Figura 34: Circunferências osculadoras de uma elipse em um ponto de curvatura máxima e em um de mínima.

Vejamos mais um exemplo de evoluta de uma cônica – no caso, a hipérbole.

Exemplo 4.12. Consideramos a curva regular $\alpha(t) = (\pm a \cosh(t), b \sinh(t))$, com t real e a e b reais positivos, cujo traço é uma hipérbole. Sua evoluta é dada por

$$\beta(t) = \mp \frac{a^2 + b^2}{ab} \left(-b \cosh^3(t), a \sinh^3(t) \right),$$

cujo traço está representado na Figura 35, para $\alpha(t) = (\pm 2 \cosh(t), \sinh(t))$, além da circunferência osculadora em um de seus vértices.

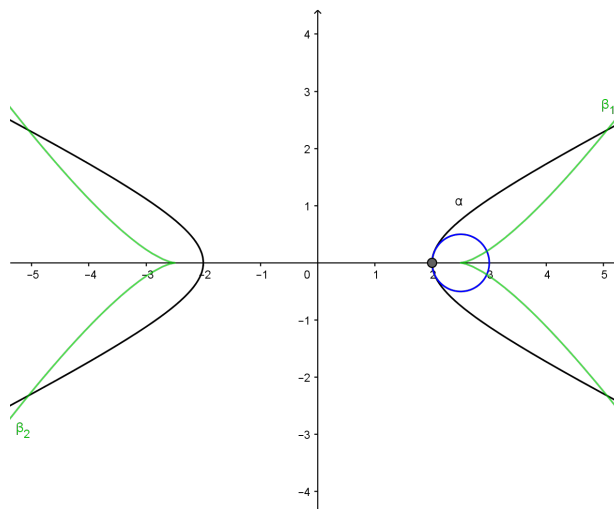


Figura 35: Uma hipérbole, sua evoluta e a circunferência osculadora em um de seus vértices.

No gráfico, notamos que houve cúspides na evoluta somente para os dois pontos críticos da função curvatura da hipérbole: um de curvatura máxima e um de mínima.

Para finalizarmos as evolutas de cônicas, vamos observar a evoluta de uma parábola.

Exemplo 4.13. Consideramos a curva regular $\alpha(t) = \left(t, \frac{t^2}{4p}\right)$, com t real e p real positivo, cujo traço é uma parábola. Sua evoluta é dada por

$$\beta(t) = \frac{1}{4p} \left(-\frac{t^3}{p}, 3t^2 + 8p^2 \right),$$

cujo traço está representado na Figura 36, para $\alpha(t) = \left(t, \frac{t^2}{4}\right)$, além da circunferência osculadora em seu vértice.

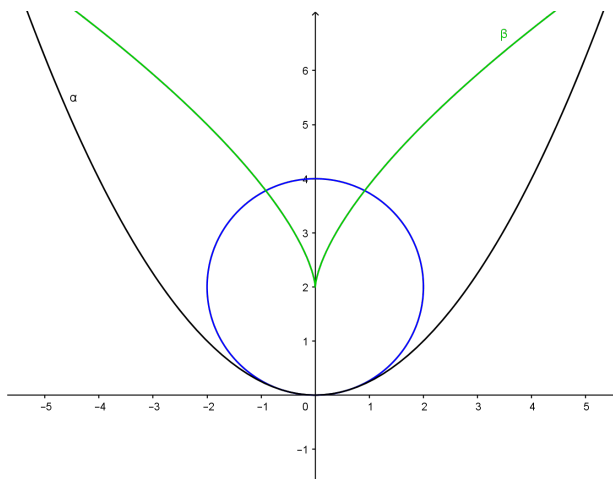


Figura 36: Uma parábola, sua evoluta e a circunferência osculadora em seu vértice.

A evoluta da parábola tem o formato de uma parábola semicúbica, que possui uma única cúspide, exatamente no único ponto crítico da função curvatura da parábola.

Nosso último exemplo de evoluta é para a cicloide, que também é uma cicloide.

Exemplo 4.14. Consideramos a curva regular por partes $\alpha(t) = r(t - \text{sen}(t), 1 - \text{cos}(t))$, com t real e r real positivo, cujo traço é uma cicloide. Sua evoluta é dada por

$$\beta(t) = r(t + \text{sen}(t), -1 + \text{cos}(t)),$$

cujo traço está representado na Figura 37, para $\alpha(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \text{cos}(t))$, além da circunferência osculadora em um de seus vértices.

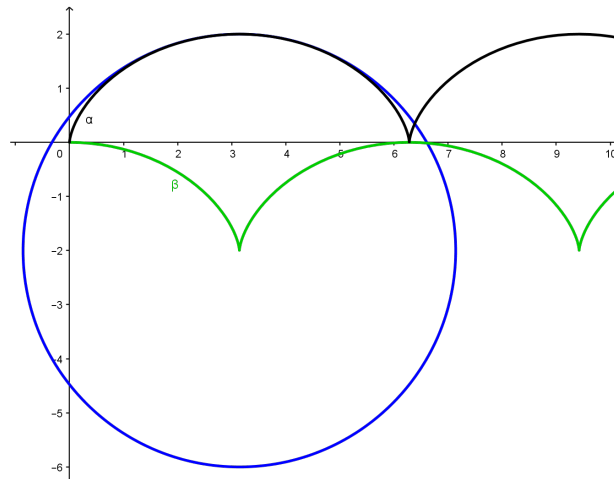


Figura 37: Uma cicloide, sua evoluta e a circunferência osculadora em um de seus vértices.

No gráfico, podemos observar que a evoluta da cicloide tem seu mesmo traço, a menos de um movimento rígido no plano. Como a cicloide possui infinitas cúspides, sua evoluta também possui, ou seja, a cicloide possui infinitos vértices.

5

TEORIA GLOBAL DAS CURVAS NO PLANO

A geometria diferencial das curvas planas se divide em duas partes: a geometria diferencial local, que vimos no capítulo anterior, e a geometria diferencial global, que veremos aqui, onde estudamos as influências das propriedades locais sobre o comportamento da curva como um todo.

A geometria diferencial global é muito rica e, mesmo em seu caso mais simples que envolve somente as curvas planas, ela já nos oferece exemplos de teoremas interessantes, como o Teorema dos Quatro Vértices. Antes de demonstrarmos tal teorema, vamos estudar algumas propriedades globais das curvas planas, regulares e fechadas (para isso, segue definição).

Definição 5.1. *Uma curva plana e regular, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, é fechada se $\alpha(a) = \alpha(b)$ e todas as suas derivadas coincidem em a e em b .*

5.1 PROPRIEDADES GLOBAIS

Consideramos a curva regular, fechada e PPCA $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. A indicatriz tangente de α é a curva diferenciável $t : [0, l] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$, em que S^1 é um círculo de raio unitário, definida por

$$t(s) = (x'(s), y'(s)).$$

O vetor velocidade dessa indicatriz é $t'(s) = (x''(s), y''(s))$, que coincide com a segunda derivada de α , ou seja, $t'(s) = k(s)n(s)$ (das equações de Frenet), em que $k(s)$ é a curvatura de α e $n(s)$ é o seu vetor normal, para cada s .

Na Figura 38, podemos ver a relação entre uma curva e sua indicatriz tangente.

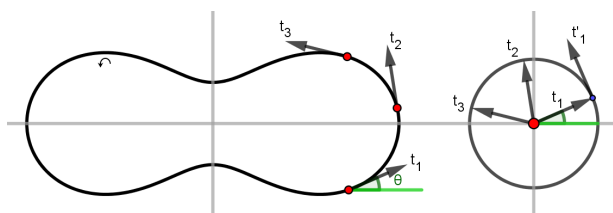


Figura 38: Indicatriz tangente.

Consideramos $\phi(s)$ o ângulo que $t(s)$ faz com o eixo das abscissas, no sentido positivo, com $0 < \phi(s) < 2\pi$. Logo, temos $x'(s) = \cos(\phi(s))$ e $y'(s) = \sin(\phi(s))$. Como

$$\phi(s) = \operatorname{arctg} \left(\frac{y'(s)}{x'(s)} \right),$$

para $\phi(s) \neq \frac{\pi}{2}$ e $\phi(s) \neq \frac{3\pi}{2}$, temos $\phi(s)$ bem definida localmente. Logo, $t'(s) = \phi'(s) (-\sin(\phi(s)), \cos(\phi(s))) = \phi'(s) n(s)$, ou seja,

$$\phi'(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = k(s).$$

Isso nos sugere a definição da função global diferenciável $\phi : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\phi(s) = \int_0^s k(s) ds,$$

que coincide, a menos de constantes, com a função local diferenciável $\theta(s)$ definida na demonstração do Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Se a curva regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ estiver parametrizada por um parâmetro m , real qualquer, a função definida acima será dada por

$$\phi(m) = \int_a^b k(m) |\alpha'(m)| dm.$$

5.1.1 Índice de rotação

Podemos notar que a função $\phi(s)$ mede o ângulo total descrito pelos pontos $t(s)$ da indicatriz tangente, à medida que percorremos α , de 0 a l . Como α é fechada, este ângulo tem que ser um múltiplo inteiro de 2π , ou seja,

$$\int_0^l k(s) ds = 2\pi I,$$

em que I é chamado índice de rotação de α , que tem seu sinal a depender da orientação da curva. Analogamente, temos o índice de rotação para uma curva regular não PPCA:

$$\int_a^b k(m) |\alpha'(m)| dm = 2\pi I.$$

Vejam os o índice de rotação de uma circunferência, com orientação positiva.

Exemplo 5.2. Consideramos a curva regular e fechada $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(m) = r(\cos(Km), \sin(Km))$, parametrizada por um parâmetro m , real qualquer, em que K é um número natural não nulo e cujo traço é uma circunferência de raio de medida r . Seu índice de rotação é

$$I = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \cdot Kr dm}{2\pi} = K.$$

É intuitivo pensar que uma circunferência dada por $\alpha(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, com $t \in [0, 2\pi]$, por exemplo, dá duas voltas em torno de $\alpha(0)$, visto que $\alpha(0) = \alpha(\pi) = \alpha(2\pi)$. Porém, justamente por essa falta de injetividade, não podemos considerá-la uma curva simples.

De fato, o Teorema do Índice de Rotação (uma demonstração pode ser encontrada em [CARMO](#), p. 476-477) afirma que o índice de rotação de uma curva plana, regular, simples e fechada só assume os valores ± 1 , a depender de sua orientação.

Na Figura 39, podemos observar alguns exemplos de índices de rotação.

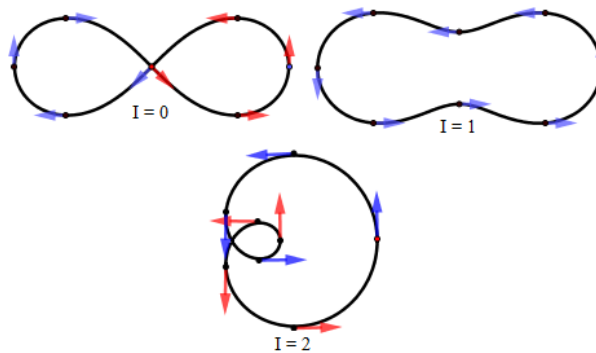


Figura 39: Índices de rotação.

Notamos que o índice de rotação da lemniscata de Bernoulli é nulo, pois, a partir do ponto de interseção, percorremos, completamente, o laço direito em sentido positivo e o esquerdo em sentido negativo. Já o índice de rotação da outra oval de Cassini é facilmente percebido que é igual a 1 e, em valor absoluto, este é o único índice de rotação que uma curva plana, regular, simples e fechada pode assumir. Podemos notar, também, que o índice de rotação da limaçon é 2, pois o vetor tangente dá uma volta (em azul) e, depois, outra (em vermelho).

Notamos que os dois últimos índices foram positivos, pois o sentido de percurso do traço de cada uma dessas curvas era também positivo. Assim, se invertêssemos este sentido, o índice de rotação teria seu valor negativo.

5.1.2 Curvatura total

Como a curvatura de uma curva plana regular, α , mede a mudança de direção das retas tangentes à curva, em cada ponto de seu traço, então, se integrarmos a função curvatura, $k(s)$, de uma curva PPCA, do ponto inicial $\alpha(0)$ ao ponto final $\alpha(l)$, temos sua curvatura total, ou seja,

$$k_{total}(s) = \int_0^l k(s) ds.$$

Caso a curva não esteja PPCA, sua curvatura total é dada por

$$k_{total}(m) = \int_a^b k(m) |\alpha'(m)| dm,$$

com $m \in [a, b]$.

Notamos que a curvatura total mede a rotação total da curva e que, se a curva também for fechada, o índice de rotação é dado pelo quociente entre a curvatura total e 2π . Logo, a curvatura total da lemniscata de Bernoulli é nula, a da outra oval de Cassini apresentada na Figura 39 é 2π e a da limaçon com um laço é 4π .

Vejam os cálculos da curvatura total para o arco de uma cicloide, que é uma curva plana, regular e não fechada.

Exemplo 5.3. Consideramos a curva regular $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = r(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, com r real positivo, cujo traço é um arco de cicloide. A curvatura total desta curva é

$$\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} dt = \left[-\frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -\pi,$$

como podemos observar na Figura 40.

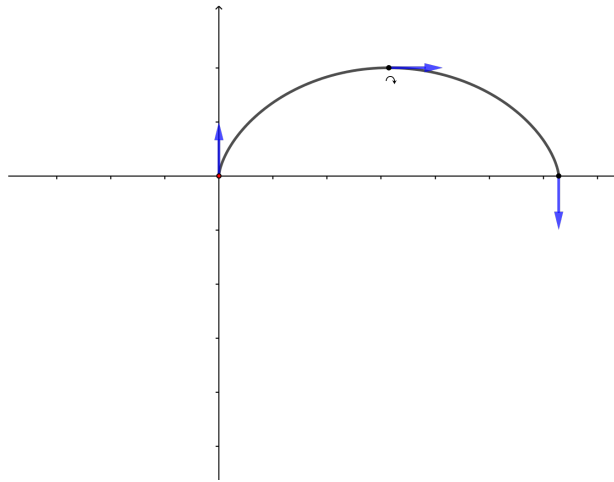


Figura 40: Curvatura total de um arco de cicloide.

Notamos que, como a curva não é fechada, sua curvatura total não é, necessariamente, um múltiplo inteiro de 2π . Além disso, a curvatura total deste arco de cicloide é negativa devido à sua orientação.

A hipérbole também é uma curva plana, regular e não fechada. Porém, se quiséssemos calcular sua curvatura total pela definição, teríamos certa dificuldade em obter a integral de sua função curvatura. Contudo, podemos notar que ela é nula, de maneira análoga à lemniscata de Bernoulli ou, então, ao observarmos o gráfico de sua função curvatura (apresentado no Capítulo 4), visto que a curvatura em um de seus ramos é exatamente oposta, em pontos simétricos, à curvatura no outro ramo. Como a curvatura total é dada pela integral de suas curvaturas pontuais, então, de fato, a curvatura total da hipérbole é nula.

Sabemos que a curvatura da curva regular $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem seu sinal a depender de sua orientação. Assim, para definirmos curvatura absoluta total dessa curva, PPCA,

basta considerarmos o valor absoluto de sua curvatura, ou seja, a curvatura absoluta total é dada por

$$\int_0^l |k(s)| ds.$$

Caso a curva não esteja PPCA, a curvatura absoluta total é dada por

$$\int_a^b |k(m)| |\alpha'(m)| dm,$$

com $m \in [a, b]$.

Assim, para o arco de cicloide do último exemplo, a curvatura absoluta total é π .

5.2 TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

Um exemplo de teorema relevante da geometria diferencial global das curvas planas é o Teorema dos Quatro Vértices (TQV). De acordo com [Carneiro & Garcia \(2017, p. 1\)](#), o TQV, em sua primeira versão – demonstrada, em 1909, por Syamadas Mukhopadhyaya (indiano, 1866 – 1937) –, considerava apenas curvas estritamente convexas.

Vejam os a definição de curva plana, regular e convexa.

Definição 5.4. *Uma curva regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é convexa se, para todo $t \in [a, b]$, seu traço está totalmente contido em um dos semiplanos determinados pela reta tangente em t .*

Com isso, podemos observar, na Figura 41, que são convexas as curvas dos exemplos (a), (b) e (d), sendo que as duas primeiras são, também, estritamente convexas, e que a curva do exemplo (c) não é convexa.

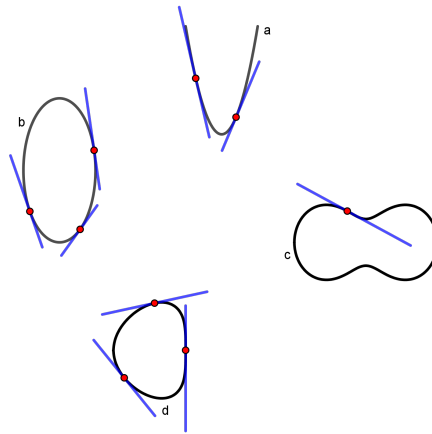


Figura 41: Convexidade de curvas.

Da definição e da figura, podemos intuir que, em uma curva convexa, a curvatura não muda de sinal, visto que ela não possui pontos de inflexão, e que toda curva convexa é simples (não possui autointerseção).

A demonstração de Mukhopadhyaya baseou-se na ideia de contato entre curvas. Porém, trazemos, aqui, uma demonstração que julgamos mais simples do que essa e que pode ser estendida para curvas convexas (não, necessariamente, estritamente convexas).

Vejam os enunciados do TQV, para este caso.

Teorema 5.5. *Toda curva plana, regular, fechada e convexa tem, pelo menos, quatro vértices.*

Para a prova do teorema, vamos considerar o lema a seguir.

Lema 5.6. *Sejam A , B e C reais arbitrários e seja $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, fechada e PPCA, definida por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ e cuja curvatura, $k(s)$, não muda de sinal. Então,*

$$\int_0^l (Ax(s) + By(s) + C) k'(s) ds = 0.$$

Demonstração. Do Teorema Fundamental das Curvas no Plano, temos a função $\theta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $x'(s) = \cos(\theta(s))$ e $y'(s) = \sin(\theta(s))$. Logo, $k(s) = \theta'(s)$ e, também, $x''(s) = -k(s)y'(s)$ e $y''(s) = k(s)x'(s)$. Como α é fechada, então

$$\begin{aligned} \int_0^l Ax(s)k'(s)ds &= A \left([x(s)k(s)]_0^l - \int_0^l k(s)x'(s)ds \right) = \\ &= -A \int_0^l y''(s)ds = -A [y'(s)]_0^l = 0 \end{aligned}$$

e, analogamente, temos

$$\int_0^l By(s)k'(s)ds = 0.$$

Além disso, temos

$$\int_0^l Ck'(s)ds = C[k(s)]_0^l = 0.$$

Logo,

$$\int_0^l (Ax(s) + By(s) + C)k'(s)ds = 0.$$

□

Vamos à demonstração do teorema.

Demonstração. Consideramos $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, fechada e convexa, PPCA, definida por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$.

Se sua curvatura for constante em qualquer subintervalo, todos os pontos deste subintervalo são pontos críticos da função curvatura, ou seja, a curva possui infinitos vértices – o que prova o teorema.

Vamos assumir, adiante, que a curva não contém segmentos de retas nem arcos de circunferências.

Como $k(s)$, função curvatura de α , é contínua em $[0, l]$, ela possui, neste intervalo, um ponto de mínimo e um ponto de máximo e, portanto, a curva tem, no mínimo, dois vértices, $\alpha(s_1)$ (o qual consideramos de curvatura máxima) e $\alpha(s_2)$ (o qual consideramos de curvatura mínima), ou seja, $k'(s_1) = k'(s_2) = 0$.

Tomamos $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$ sobre o eixo das abscissas (sem perda de generalidade). Assim, temos $y(s_1) = y(s_2) = 0$ e este eixo divide a curva em dois arcos, β e γ , com cada um deles em um dos lados do eixo, ou seja, a função $y(s)$ muda de sinal apenas em s_2 , para $0 = s_1 < s_2 < l$, conforme esquematizado na Figura 42.

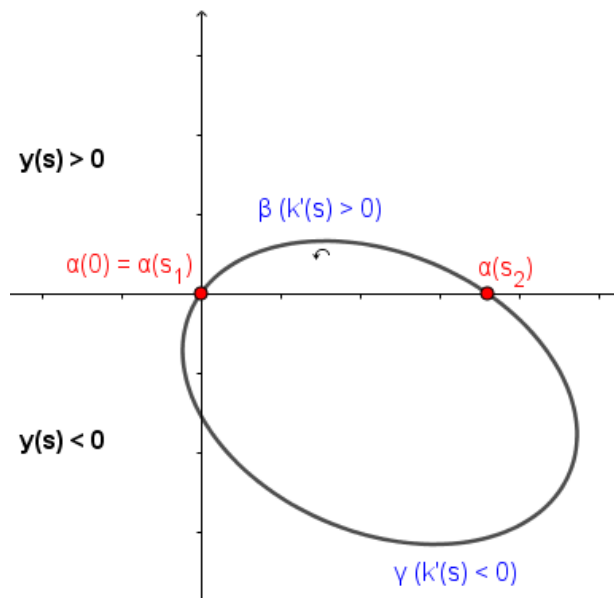


Figura 42: Demonstração do Teorema dos Quatro Vértices.

Suponhamos que a curva intercepte o eixo das abscissas em um ponto intermediário de $\alpha(s_2)$ e $\alpha(l)$ (análogo para $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$). Sua convexidade implicaria em a curva conter o segmento $\overline{\alpha(s_2)\alpha(l)}$ e, conseqüentemente, $k(s_1) = k(s_2) = 0$. Como $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$ são pontos de máxima curvatura e de mínima, respectivamente, isso implicaria em $k(s) = 0$, para todo $s \in [s_2, l]$, o que é uma contradição para a consideração de que esta curva não contém segmento de reta. Logo, a curva não intercepta o eixo das abscissas em um ponto intermediário de $\alpha(s_2)$ e $\alpha(l)$.

Consideramos $By(s) = 0$ a equação do eixo das abscissas, ou seja, um dos arcos está em $By(s) \geq 0$ (vamos supor β) e outro está em $By(s) \leq 0$ (vamos supor γ). Se não houvesse mais vértices além dos dois supracitados, teríamos $k'(s) < 0$ para $0 < s < s_2$ e $k'(s) > 0$ para $s_2 < s < l$, ou seja, $k(s)$ não mudaria de sinal ao longo de cada um dos arcos.

Porém, podemos ajustar o valor de B de modo que

$$\int_0^l B y(s) k'(s) ds \neq 0,$$

pois

$$\int_0^l B y(s) k'(s) ds = B \left(\int_0^{s_2} y(s) k'(s) ds + \int_{s_2}^l y(s) k'(s) ds \right),$$

em que $y(s) k'(s) > 0$ em qualquer um dos arcos (em γ , a curvatura é decrescente e a curva se encontra abaixo do eixo das abscissas; em β , a curvatura é crescente e a curva se encontra acima do eixo das abscissas), o que é uma contradição.

Isso mostra que $k'(s)$ muda de sinal em, pelo menos, um arco (suponhamos γ). Logo, existe um terceiro vértice em γ . Porém, como $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$ são pontos de máxima curvatura e de mínima, respectivamente, então $k'(s)$ deve mudar de sinal duas vezes neste arco, o que implica em existir um quarto vértice. \square

Como a curva em questão é fechada, $k'(s)$ muda de sinal de forma que $k(s)$ sempre possua um número par (se finito) de pontos críticos, os quais são metade de curvatura máxima e outra metade de curvatura mínima.

Um exemplo de curva plana, regular, fechada e convexa é a elipse, que possui, exatamente, quatro vértices, se ela também não for uma circunferência (neste caso, ela possui infinitos vértices), com dois deles de curvatura máxima – interseções com seu eixo maior – e dois de mínima – interseções com seu eixo menor.

Vamos calcular, algebricamente, os vértices de uma elipse.

Exemplo 5.7. Consideramos a curva regular $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, com $t \in [0, 2\pi]$ e a e b reais positivos e distintos entre si, cujo traço é uma elipse. Sua curvatura é dada por

$$k(t) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}}$$

e seus vértices podem ser determinados por

$$k'(t) = \frac{(a^2 + b^2) ab \sin(t) \cos(t)}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} = 0.$$

Logo, seus vértices se encontram em $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$ e $t = \frac{3\pi}{2}$.

Podemos calcular que as curvaturas mínimas e máximas da elipse em questão são dadas por $k(t) = \frac{a}{b^2}$ ou $k(t) = \frac{b}{a^2}$ (a depender da ordenação de a e b). Logo, se $a > b$, a curvatura máxima é $k(t) = \frac{a}{b^2}$ e a mínima é $k(t) = \frac{b}{a^2}$; se $a < b$, a curvatura máxima passa a ser $k(t) = \frac{b}{a^2}$ e a mínima passa a ser $k(t) = \frac{a}{b^2}$.

Muitas extensões do TQV foram feitas ao longo dos anos. Em 1912, por exemplo, Adolf Kneser (alemão, 1862 – 1930) o demonstrou para curvas não necessariamente convexas. Além disso, ele observou, como afirmam [DeTurck et. al.](#) (2007, p. 203), que os vértices de uma curva plana correspondem a pontos de torção nula de sua antiprojeção estereográfica – o que já entraria no estudo da geometria diferencial no espaço, que não é objeto de nosso estudo nesta dissertação.

Em 1937, William Caspar Graustein (estadunidense, 1888 – 1941) passou a estudar tal teorema para curvas não necessariamente simples. Além disso, outras demonstrações foram surgindo, com o uso de propriedades analíticas ou geométricas (algumas delas podem ser encontradas em [CARNEIRO & GARCIA](#), p. 21-35). Em 1985, Robert Osserman (estadunidense, 1926 – 2011) também demonstrou tal teorema, mas baseado na ideia de círculos circunscritos, e ainda obteve uma relação entre o número de vértices e o número de pontos de tangência da curva com o círculo circunscrito.

Também foi provada a recíproca do TQV (algumas demonstrações podem ser encontradas em [CARNEIRO & GARCIA](#), p. 45-57), que tem como ideia central estabelecer as condições necessárias e suficientes para que uma função real, contínua e periódica seja a função curvatura de uma curva plana, regular, simples e fechada: ela tem que ter, pelo menos, dois máximos locais e dois mínimos locais.

Ainda de acordo com [Carneiro & Garcia](#) (2007, p. 1), em 1971, Herman Gluck (estadunidense) provou tal recíproca, motivado pela existência de esferas no espaço euclidiano, mas a prova só considerava curvas estritamente convexas. Em 1997, Björn E. J. Dahlberg (sueco, 1949 – 1998) provou essa recíproca para curvas não necessariamente convexas, com o uso de técnicas de topologia diferencial de dimensão finita para resolver uma equação funcional. Isso ocorreu pouco antes de sua morte, o que fez com que a publicação da demonstração fosse a título póstumo, em 2005.

Podemos observar que o TQV, apesar de sua primeira versão datar de 1909, ainda pode ser considerado atual, pois, a cada nova abordagem que se faz dele, novos aspectos sobre as curvas são revelados.

6

POSSIBILIDADES NO ENSINO MÉDIO

De acordo com [São Paulo](#) (2011, p. 47), o desenvolvimento de inteligências está diretamente relacionado com a capacidade em se fazer perguntas que realmente nos interessam e não em fornecer respostas a perguntas provenientes de interesses que não são nossos. Desta forma, para explorarmos qualquer conteúdo na Educação Básica, é sempre mais eficaz partirmos de situações já percebidas pelos alunos e seguir, daí, para questões específicas, do que iniciar com o próprio conteúdo para, só depois, contextualizá-lo.

Como vimos neste trabalho, as curvas planas estão relacionadas com outras áreas do conhecimento humano, como a Física, quando citamos a relação da cicloide na solução dos problemas da braquistócrona e da tautócrona, a relação da elipse com as órbitas planetárias e a relação da cardioide com a sensibilidade de alguns microfones. Se situações como essas forem apresentadas aos alunos da Educação Básica, de modo a despertar o interesse pelo assunto, as aulas de Matemática na 3ª série do Ensino Médio, por exemplo, podem se tornar mais interessantes, uma vez que, de acordo com o currículo supracitado (p. 69), deve-se contemplar, nesta série, o conteúdo de geometria analítica no plano, que trata, de modo geral, de pontos, retas e cônicas, e, dentre as habilidades a serem desenvolvidas, destacamos “saber identificar as equações das cônicas na forma reduzida e conhecer suas propriedades”.

O problema da duplicação do cubo pode ser trabalhado na Educação Básica da forma como apresentamos no Capítulo 3, mas, também, por dobraduras (a solução pode ser encontrada em [BORLIN](#), p. 36-41) – o que pode tornar a aula de Matemática bastante atrativa, ao se relacionar com a Arte. Além disso, o método de Newton citado para descrever a cissoide de Diocles e a estrofoide reta também pode ser trabalhado com os alunos ao construirmos, em madeira, um “esquadro de Newton” (uma proposta pode ser encontrada em [ALMEIDA & REIS](#), p. 287-292).

Porém, precisamos limitar a abordagem desta seção, para evitarmos o enciclopedismo. Assim, trazemos duas propostas de abordagem de curva pedal (construção geométrica

de algumas curvas pedais das cônicas, auxiliados pelo GeoGebra, e determinação algébrica de suas coordenadas cartesianas, por meio de conceitos básicos de geometria analítica) e uma proposta de atividade que instiga os alunos sobre a noção de curvatura de uma curva plana, em que trabalhamos com a *string art*, uma arte que se caracteriza por um arranjo de cordas que formam padrões geométricos e que valoriza o sentido e a beleza do objeto em seu contorno.

6.1 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DA CURVA PEDAL

A construção geométrica de algumas curvas pedais das cônicas será feita com o auxílio do *software* de matemática dinâmica GeoGebra, desenvolvido por Markus Hohenwarter, uma vez que ele permite o desenvolvimento de atividades investigativas, em um processo de criação e de exploração, como buscamos fazer adiante.

Para isso, precisamos apresentar ao discente a definição de curva pedal, que é a curva descrita pelas interseções das retas tangentes a uma curva plana com as respectivas retas perpendiculares e que passam por um ponto fixo do mesmo plano, chamado pedal. Podemos notar que todos os conceitos que determinam a curva pedal devem ser trabalhados no Ensino Médio.

Para as construções apresentadas adiante, consideramos centro e vértice na origem, o que bastaria a aplicação de uma translação caso estes pontos não estivessem na origem do sistema cartesiano e, se necessário, também poderíamos aplicar uma rotação. A aplicação de tais isometrias são, de fato, razoáveis, pois, de acordo com a proposta de [São Paulo](#) (2011, p. 70), também para a 3ª série do Ensino Médio, este assunto deve ser tratado de forma a desenvolver a habilidade “saber construir gráficos por meio de isometrias”. Porém, nada impede que o aluno refaça o procedimento de construção, com a equação cartesiana pré-determinada que julgar conveniente.

Nas Figuras 10 a 14, mostramos exemplos de curvas pedais da elipse. Agora, vamos mostrar como construí-las geometricamente, utilizando o GeoGebra.

Exemplo 6.1. Consideramos a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, de centro na origem e de semieixos de medidas 2 e 1, respectivamente. Sua curva pedal, em relação ao seu centro, pode ser construída, no GeoGebra, da seguinte maneira:

- Na Entrada, digitamos $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, a fim de aparecer a elipse na Janela de Visualização.
- Ainda na Entrada, digitamos $P = (0, 0)$, a fim de fixarmos o pedal.
- Selecionamos o comando “ponto em objeto” e clicamos sobre a cônica, a fim de marcarmos o ponto A pertencente a ela.
- Selecionamos o comando “reta tangente” e clicamos sobre A e, depois, sobre a cônica, a fim de determinarmos a reta tangente a ela e que passa por este ponto.
- Selecionamos o comando “reta perpendicular” e clicamos sobre P e, depois, sobre a reta tangente, a fim de determinarmos a reta perpendicular a ela e que passa pelo pedal.
- Selecionamos o comando “interseção de dois objetos” e clicamos sobre a reta tangente e, depois, sobre a reta perpendicular, a fim de marcarmos o ponto B , que é a interseção destes dois objetos.
- Na Janela de Álgebra, clicamos com o botão direito do mouse sobre B e, depois, sobre “habilitar rastro”.
- Ainda na Janela de Álgebra, clicamos com o botão direito do mouse sobre A e, depois, sobre “animar”.

Desta forma, construímos, geometricamente, a curva pedal da elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, em relação ao seu centro, que, como vimos, é uma oval de Cassini.

Adquirir conhecimento de algo é sempre conhecer o seu significado, ou seja, precisamos semear conteúdos significativos para o discente. Deste modo, ensinar um tema requer, também, despertar o interesse destes alunos em sua história, pois os significados são vivos e se transformam, como no caso das órbitas dos planetas, citadas anteriormente. É justamente na história onde buscamos uma compreensão mais clara dos significados dos conceitos e do significado das mudanças conceituais. Com isso, esperamos conduzir esta atividade de modo a apresentar o contexto histórico que envolve as curvas aqui trabalhadas.

Se a elipse fosse, também, uma circunferência do tipo $x^2 + y^2 = 1$, de centro na origem e de raio unitário sua curva pedal, em relação ao seu centro, poderia ser construída pelo mesmo procedimento anterior, só alterando a equação a ser digitada na Entrada.

Agora, para o pedal em um ponto externo à circunferência, a curva pedal também pode ser construída pelo mesmo procedimento, mas com a alteração, também, do segundo passo: selecionamos o comando “ponto” e clicamos sobre algum ponto externo à cônica. Desta forma, construímos, geometricamente, a curva pedal de tal circunferência em relação a um ponto externo a ela, que é uma limaçon de um laço.

De maneira análoga, podemos construir a curva pedal da circunferência em relação a um ponto pertencente a ela, que é uma cardioide, ou em relação a um ponto interno a ela (distinto de seu centro), com a também seguinte alteração no segundo passo: selecionamos o comando “ponto em objeto” e clicamos sobre a cônica ou selecionamos o comando “ponto” e clicamos sobre algum ponto interno à cônica e distinto de seu centro, respectivamente.

Neste momento, podemos investigar, junto com os alunos, que, conforme o pedal se aproxima do centro da circunferência, a limaçon começa também a se aproximar do formato da própria circunferência, o que, de fato, ocorre quando o pedal coincide com o seu centro.

Nas Figuras 17 e 18, mostramos exemplos de curvas pedais da hipérbole. Agora, passamos à construção geométrica, utilizando o GeoGebra.

Exemplo 6.2. Consideramos a hipérbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, de centro na origem e de semieixos de medidas 2 e 1, respectivamente. Sua curva pedal, em relação ao seu centro, pode ser construída pelo mesmo procedimento descrito para a curva pedal da elipse, só alterando a equação a ser digitada na Entrada.

Esta curva pedal também é uma oval de Cassini, mais conhecida por lemniscata de Bernoulli. Agora, para o pedal em um dos focos da hipérbole, precisamos determinar, inicialmente, suas coordenadas cartesianas.

Exemplo 6.3. Ainda consideramos a hipérbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Como as medidas dos semieixos são 2 e 1, a metade de sua distância focal é $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Assim, tomamos, por exemplo, o pedal $(\sqrt{5}, 0)$ e, portanto, a curva pedal da hipérbole, em relação a este foco, pode ser construída pelo mesmo procedimento, mas com a alteração do segundo passo: na Entrada, digitamos $(\sqrt{5}, 0)$.

Desta forma, construímos, geometricamente, a curva pedal de tal hipérbole em relação a um de seus focos, que é uma circunferência de raio de medida igual à medida de seu semieixo real. Os alunos podem verificar que, para o outro foco, o resultado é o mesmo.

Nas Figuras 19 , 20 e 21, mostramos exemplos de curvas pedais da parábola. Para finalizarmos, vamos construí-las no GeoGebra.

Exemplo 6.4. *Consideramos a parábola $y = \frac{x^2}{4}$, de vértice na origem e de distância unitária entre seu vértice e sua reta diretriz. Sua curva pedal, em relação ao seu vértice, pode ser construída pelo mesmo procedimento descrito para a curva pedal da elipse, só alterando a equação a ser digitada na Entrada.*

Esta curva pedal é uma cissoide de Diocles.

Agora, para o pedal no foco da parábola, a curva pedal também pode ser construída pelo mesmo procedimento, mas com a alteração do segundo passo: na Entrada, digitamos $(0, 1)$. Desta forma, construímos, geometricamente, a curva pedal de tal parábola em relação ao seu foco, que é uma reta paralela à diretriz e que passa pelo vértice. Por fim, construímos a curva pedal da parábola em relação ao pé de sua diretriz, que é uma estrofoide reta, mas com alteração, também, do segundo passo: na Entrada, digitamos $(0, -1)$.

De maneira geral, esta atividade busca favorecer o aprendizado da geometria analítica na Educação Básica, uma vez que o GeoGebra possibilita diversas explorações de conceitos matemáticos, de maneira atrativa. Com isso, também entramos no âmbito da tecnologia, uma vez que ela está cada vez mais presente em nosso dia a dia e que os recursos digitais se incorporam, cada vez mais rápido, às nossas vidas.

Esperamos, então, desenvolver, como sugere os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2002, p. 12-13), as competências de representação e comunicação, principalmente em relação à habilidade “identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para aperfeiçoamento da leitura e da compreensão”, de investigação e compreensão, principalmente em relação à habilidade “elaborar estratégias de enfrentamento de questões” e de contextualização sociocultural, principalmente em relação à habilidade “reconhecer o sentido histórico da ciência, de forma a perceber seu papel na vida humana em diferentes épocas”.

6.2 DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DA CURVA PEDAL

Sabemos que todo tema matemático pode ser explorado em uma perspectiva histórica, como fizemos aqui, mas também podemos trazer elementos que possibilitem uma abertura para o novo, de forma a contribuir com a imaginação de situações que transcendem os contextos já existentes. Tão importante quanto contextualizarmos é termos a capacidade de abstrair, pois, se nos limitamos aos fatos, condenamo-nos a reproduzir o que já existe. Desta maneira, sugerimos que as curvas pedais também sejam determinadas algebricamente, pois é uma forma de generalizarmos a situação.

Com a resolução de sistemas de equações, por métodos de substituição ou de comparação – trabalhados, também, na Educação Básica –, podemos determinar, algebricamente, as coordenadas cartesianas de algumas curvas pedais das cônicas. Para as determinações apresentadas a seguir, também são considerados centro e vértice na origem, sem perda de generalidade.

6.2.1 Curva pedal da elipse

Consideramos uma elipse de equação cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de centro na origem e de semieixos de medidas a e b , respectivamente. A reta tangente a ela, no ponto $P = (x_P, y_P)$ do mesmo plano, tem equação fundamental

$$y - y_P = m(x - x_P),$$

tal que m é o seu coeficiente angular.

Ao isolarmos y na equação da reta e o substituirmos na equação da elipse, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{m(x - x_P) + y_P}{b} \right)^2 = 1.$$

Então, efetuamos a substituição conveniente

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{(x - x_P + x_P)^2}{a^2},$$

o que resulta em

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x_P x}{a^2} + \frac{x_P^2}{a^2} + \frac{2x_P(x - x_P)}{a^2} + \frac{x_P^2}{a^2} + \frac{m^2(x - x_P)^2}{b^2} + \frac{2y_P m(x - x_P)}{b^2} + \frac{y_P^2}{b^2} = 1.$$

Sabemos que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x_P x}{a^2} + \frac{x_P^2}{a^2} = \frac{(x-x_P)^2}{a^2}$ e que, da equação da elipse, podemos assumir $\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} = 1$. Logo, temos $\frac{(x-x_P)^2}{a^2} + \frac{2x_P(x-x_P)}{a^2} + \frac{m^2(x-x_P)^2}{b^2} + \frac{2y_P m(x-x_P)}{b^2} = 0$, que, ao evidenciarmos o fator comum aos termos, dá-nos

$$(x - x_P) \left(\frac{x - x_P}{a^2} + \frac{2x_P}{a^2} + \frac{m^2(x - x_P)}{b^2} + \frac{2y_P m}{b^2} \right) = 0.$$

Para que tal produto seja nulo, deve ser válido $x - x_P = 0$ ou $\frac{(x-x_P)}{a^2} + \frac{2x_P}{a^2} + \frac{m^2(x-x_P)}{b^2} + \frac{2y_P m}{b^2} = 0$. Da primeira relação, temos $x = x_P$, mas, como P deve ser a única interseção para que a reta seja tangente à elipse, então $x = x_P$ também deve valer para a segunda relação, ou seja,

$$\frac{2x_P}{a^2} + \frac{2y_P m}{b^2} = 0.$$

Daí, concluímos que

$$m = -\frac{x_P b^2}{y_P a^2}$$

e, portanto, a equação fundamental da reta tangente à elipse, em P , é

$$y - y_P = -\frac{x_P b^2}{y_P a^2} (x - x_P)$$

e a equação fundamental da reta perpendicular a esta e que passa pelo centro (origem) da elipse é

$$y = \frac{y_P a^2}{x_P b^2} x.$$

A curva pedal da elipse, em relação ao seu centro, é determinada, então, pela interseção destas duas retas. Desta forma, ao isolarmos y em ambas as equações e compararmos seus resultados, temos

$$\frac{y_P a^2}{x_P b^2} x = -\frac{x_P b^2}{y_P a^2} (x - x_P) + y_P.$$

Daí, concluímos que esta curva pedal é determinada pelos pontos de coordenadas cartesianas

$$x = \frac{x_P a^2 b^4}{x_P^2 b^4 + y_P^2 a^4};$$

$$y = \frac{y_P a^4 b^2}{x_P^2 b^4 + y_P^2 a^4}.$$

Após a determinação das coordenadas cartesianas da curva pedal, ela também pode ser construída no GeoGebra, da seguinte maneira:

- Na Entrada, digitamos a equação cartesiana da cônica a ter sua curva pedal definida, a fim de que a cônica apareça na Janela de Visualização.
- Selecionamos o comando “ponto em objeto” e clicamos sobre esta cônica, a fim de marcarmos o ponto A pertencente a ela.
- Na Entrada, digitamos a dupla ordenada, (x, y) , encontrada e substituímos x_P e y_P por $x(A)$ e $y(A)$, respectivamente, a fim de marcarmos o ponto B .
- Na Janela de Álgebra, clicamos com o botão direito do mouse sobre B e, depois, sobre “habilitar rastro”.
- Na Janela de Álgebra, clicamos com o botão direito do mouse sobre A e, depois, sobre “animar”.

Está construída, então, a curva pedal da elipse em relação ao seu centro, mas a partir da determinação algébrica de suas coordenadas cartesianas.

Agora, consideramos uma circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$, de centro na origem e de raio de medida r . Como a circunferência é uma elipse de semieixos de medidas iguais, então, da demonstração anterior, temos que a curva pedal da circunferência, em relação ao seu centro, é determinada pelos pontos de coordenadas cartesianas

$$x = \frac{x_P r^6}{x_P^2 r^4 + y_P^2 r^4} = \frac{x_P r^2}{x_P^2 + y_P^2} = \frac{x_P r^2}{r^2} = x_P;$$

$$y = \frac{y_P r^6}{x_P^2 r^4 + y_P^2 r^4} = \frac{y_P r^2}{x_P^2 + y_P^2} = \frac{y_P r^2}{r^2} = y_P.$$

Esta é uma forma de mostrarmos para os alunos que a curva pedal da circunferência em relação ao seu próprio centro é ela mesma e que, por conta da nossa generalização nesta determinação algébrica, isso nos mostra que o raio da circunferência não influencia neste resultado.

Agora, para determinarmos as coordenadas cartesianas de limaçons quaisquer, este pedal não pode estar fixo no centro da circunferência. Baseando-nos no início da demonstração das coordenadas cartesianas da curva pedal da elipse, o coeficiente angular da reta tangente à circunferência, no ponto P , é

$$m = -\frac{x_P}{y_P}$$

e, portanto, a equação fundamental desta reta é

$$y - y_P = -\frac{x_P}{y_P}(x - x_P).$$

A equação fundamental da reta perpendicular à supracitada e que passa por um outro ponto do plano (a ser considerado o pedal), $Q = (x_Q, y_Q)$, é

$$y - y_Q = \frac{y_P}{x_P}(x - x_Q).$$

Assim, a curva pedal da circunferência, em relação a este ponto, é determinada pela interseção destas duas retas. Desta forma, ao isolarmos y em ambas as equações e compararmos seus resultados, temos

$$\frac{y_P}{x_P}(x - x_Q) + y_Q = -\frac{x_P}{y_P}(x - x_P) + y_P.$$

Daí, concluímos que esta curva pedal é determinada pelos pontos de coordenadas cartesianas

$$x = \frac{x_P y_P (y_P - y_Q) + x_Q y_P^2 + x_P^3}{r^2};$$

$$y = \frac{x_P (x_P y_Q - y_P x_Q) + y_P r^2}{r^2}.$$

Sabemos, por discussões anteriores, que, se Q for externo à circunferência, temos uma limaçon que possui um laço; se pertencente, temos uma cardioide; e, se interno e distinto do centro, temos uma limaçon que se aproxima da própria circunferência conforme o pedal se aproxima de seu centro. Esta também é uma interessante investigação para ser feita ao trabalharmos com as coordenadas cartesianas no GeoGebra.

6.2.2 Curva pedal da hipérbole

Consideramos a hipérbole de equação cartesiana $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, de centro na origem e de semieixos de medidas a e b , respectivamente. Exatamente de modo análogo à determinação das coordenadas cartesianas da curva pedal da elipse, chegamos a

$$(x - x_P) \left(\frac{x - x_P}{a^2} + \frac{2x_P}{a^2} - \frac{m^2(x - x_P)}{b^2} - \frac{2y_P m}{b^2} \right) = 0.$$

Para que este produto seja nulo, também deve ser válido $x - x_P = 0$ ou $\frac{(x-x_P)}{a^2} + \frac{2x_P}{a^2} - \frac{m^2(x-x_P)}{b^2} - \frac{2y_P m}{b^2} = 0$. Ou seja, $x = x_P$ e, portanto,

$$\frac{2x_P}{a^2} - \frac{2y_P m}{b^2} = 0,$$

pois estamos em busca de uma reta tangente. Daí, concluímos que

$$m = \frac{x_P b^2}{y_P a^2}$$

e, portanto, a equação fundamental da reta tangente à hipérbole, no ponto P , é

$$y - y_P = \frac{x_P b^2}{y_P a^2} (x - x_P)$$

e a equação fundamental da reta perpendicular a esta e que passa pelo centro (origem) da hipérbole é

$$y = -\frac{y_P a^2}{x_P b^2} x.$$

A curva pedal da hipérbole, em relação ao seu centro, é determinada pela interseção destas duas retas. Desta forma, ao isolarmos y em ambas as equações e compararmos seus resultados, temos

$$-\frac{y_P a^2}{x_P b^2} x = \frac{x_P b^2}{y_P a^2} (x - x_P) + y_P.$$

Daí, concluímos que esta curva pedal é determinada pelos pontos de coordenadas cartesianas

$$x = x_P b^2 \frac{x_P^2 b^2 - y_P^2 a^2}{x_P^2 b^4 + y_P^2 a^4};$$

$$y = -y_P a^2 \frac{x_P^2 b^2 - y_P^2 a^2}{x_P^2 b^4 + y_P^2 a^4}.$$

Para determinarmos as coordenadas cartesianas da curva pedal da hipérbole em questão, em relação a um de seus focos, $F = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, temos, da demonstração anterior, que a equação fundamental da reta tangente à hipérbole, em P , é

$$y - y_P = \frac{x_P b^2}{y_P a^2} (x - x_P)$$

e a equação fundamental da reta perpendicular à esta e que passa, agora, por um de seus focos é

$$y = -\frac{y_P a^2}{x_P b^2} (x - x_F).$$

A curva pedal da hipérbole, em relação a um de seus focos, é determinada pela interseção destas duas retas. Desta forma, ao isolarmos y em ambas as equações e compararmos seus resultados, temos

$$\frac{x_P b^2}{y_P a^2} (x - x_P) + y_P = -\frac{y_P a^2}{x_P b^2} (x - x_F).$$

Daí, concluímos que esta curva pedal é determinada pelos pontos de coordenadas cartesianas

$$x = \frac{x_P^3 b^4 - x_P y_P^2 a^2 b^2 + x_F y_P^2 a^4}{x_P^2 b^4 + y_P^2 a^4};$$

$$y = \frac{y_P a^2 (x_P x_F b^2 - x_P^2 b^2 + y_P^2 a^2)}{x_P^2 b^4 + y_P^2 a^4}.$$

6.2.3 Curva pedal da parábola

Consideramos a parábola de equação cartesiana $x^2 - 4py = 0$, de vértice na origem e p a medida da distância entre seu vértice e sua reta diretriz. Exatamente de modo análogo à determinação das coordenadas cartesianas da curva pedal da elipse, chegamos a

$$(x - x_P)(x + x_P - 4pm) = 0.$$

Para que este produto seja nulo, deve ser válido $x - x_P = 0$ ou $x + x_P - 4pm = 0$. Ou seja, $x = x_P$ e, portanto, $2x_P - 4pm = 0$, pois estamos em busca de uma reta tangente. Daí, concluímos que

$$m = \frac{x_P}{2p}$$

e, portanto, a equação fundamental da reta tangente à parábola, no ponto P , é

$$y - y_P = \frac{x_P}{2p}(x - x_P)$$

e a equação fundamental da reta perpendicular à esta e que passa pelo seu vértice (origem) é

$$y = -\frac{2p}{x_P}x.$$

A curva pedal da parábola, em relação ao seu vértice, é determinada pela interseção destas duas retas. Desta forma, ao isolarmos y em ambas as equações e compararmos seus resultados, temos

$$-\frac{2p}{x_P}x = \frac{x_P}{2p}(x - x_P) + y_P.$$

Daí, concluímos que esta curva pedal é determinada pelos pontos de coordenadas cartesianas

$$x = -x_P \left(\frac{2py_P - x_P^2}{4p^2 + x_P^2} \right);$$

$$y = 2p \left(\frac{2py_P - x_P^2}{4p^2 + x_P^2} \right).$$

Para determinarmos as coordenadas cartesianas da curva pedal em relação ao foco, $F = (0, p)$, da parábola, temos, da demonstração anterior, que a equação fundamental da reta tangente à parábola, em P , é

$$y - y_P = \frac{x_P}{2p} (x - x_P)$$

e a equação fundamental da reta perpendicular a esta e que passa pelo seu foco é

$$y - p = -\frac{2p}{x_P} x.$$

A curva pedal da parábola, em relação ao seu foco, é determinada pela interseção destas duas retas. Desta forma, ao isolarmos y em ambas as equações e compararmos seus resultados, temos

$$-\frac{2p}{x_P} x + p = \frac{x_P}{2p} (x - x_P) + y_P.$$

Daí, concluímos que esta curva pedal é determinada pelos pontos de coordenadas cartesianas

$$x = x_P \frac{2p^2 + x_P^2 - 2py_P}{x_P^2 + 4p^2};$$

$$y = p \frac{4py_P - x_P^2}{x_P^2 + 4p^2}.$$

Da equação da parábola, podemos considerar $y_P = \frac{x_P^2}{4p}$. Logo,

$$x = \frac{x_P}{2};$$

$$y = 0,$$

ou seja, esta curva pedal é o próprio eixo das abscissas. Notamos que a generalização na resolução nos mostra que, não importa o valor da abscissa, a ordenada é sempre nula. Além disso, podemos perceber que uma mesma curva pode ser dada por mais de uma maneira.

De maneira análoga, para determinarmos as coordenadas cartesianas da curva pedal da parábola em relação ao pé de sua diretriz, $D = (0, -p)$, temos que a equação fundamental da reta tangente à parábola, em P , é

$$y - y_P = \frac{x_P}{2p} (x - x_P)$$

e a equação fundamental da reta perpendicular a esta e que passa pelo pé da diretriz é

$$y + p = -\frac{2p}{x_P} x.$$

A curva pedal da parábola, em relação ao pé da sua diretriz, é determinada pela interseção destas duas retas. Desta forma, ao isolarmos y em ambas as equações e compararmos seus resultados, temos

$$-\frac{2p}{x_p}x - p = \frac{x_p}{2p}(x - x_p) + y_p.$$

Daí, concluímos que esta curva pedal é determinada pelos pontos de coordenadas cartesianas

$$x = x_p \frac{x_p^2 - 2py_p - 2p^2}{4p^2 + x_p^2};$$

$$y = p \frac{-3x_p^2 + 4py_p}{4p^2 + x_p^2}.$$

Assim, buscamos com esta segunda atividade, além de também favorecer o aprendizado da geometria analítica no Ensino Médio, desenvolver a capacidade de abstração do discente, ao generalizarmos algumas situações. Principalmente, buscamos entrelaçar os “três grandes blocos temáticos: números, geometria e relações” (SÃO PAULO, p. 41).

6.3 NOÇÃO DE CURVATURA

Para desenvolvermos a atividade sobre noção de curvatura proposta nesta seção, precisamos tomar conhecimento das curvas de Bézier, para podermos justificar nosso trabalho com a *string art*, ou arte de cordas, que é um estilo caracterizado por um arranjo de cordas que formam padrões geométricos.

6.3.1 Curva de Bézier

De acordo com Biezuner & Jesus (2014, p. 1), as curvas de Bézier foram desenvolvidas, separadamente, pelos engenheiros Paul de Casteljaou (francês, 1930) e por Pierre Étienne Bézier (francês, 1910 – 1999), para modelar as formas aerodinâmicas dos automóveis fabricados pelas empresas em que trabalhavam, a Citroën e a Renault, respectivamente.

Em 1959, Casteljaou desenvolveu um algoritmo eficiente e numericamente estável para calcular tal família de curvas, que ainda é muito utilizado nos dias de hoje, visto que estas curvas são muito úteis para a computação gráfica, já que se adaptam facilmente a sistemas computadorizados. Porém, como a pesquisa de Casteljaou foi considerada

segredo industrial pela Citroën durante certo tempo, foram os estudos de Bézier, em 1962, que se popularizaram, rendendo-lhe o batismo dessas curvas.

Uma curva de Bézier é uma curva paramétrica polinomial no espaço (aqui, trataremos apenas no plano), que pode ser definida explicitamente em função dos polinômios de Bernstein, definidos a seguir.

Definição 6.5. Um polinômio de Bernstein de grau n é dado por

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},$$

com $i = 0, \dots, n$ e $t \in [0, 1]$.

Para definirmos uma curva de Bézier, precisamos definir, também, um “polígono de controle”.

Definição 6.6. Os pontos P_0, \dots, P_n – chamados pontos de controle – formam um “polígono de controle” (o qual denotaremos por $P = [P_0, \dots, P_n]$) se os segmentos $\overline{P_k P_{k+1}}$ formam uma linha poligonal contínua.

Assim, vamos à definição de uma curva de Bézier.

Definição 6.7. Para um “polígono de controle” com $n + 1$ pontos de controle, a curva de Bézier é uma curva paramétrica polinomial de grau n , dada por

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t),$$

em que $B_{i,n}$ é um polinômio de Bernstein.

Para exemplificarmos as curvas de Bézier no plano, vejamos uma de primeiro grau, também chamada curva de Bézier linear.

Exemplo 6.8. Uma curva de Bézier linear pode ser dada por

$$B(t) = \sum_{i=0}^1 P_i B_{i,1}(t) = P_0 \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} + P_1 \binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1} = (1-t) P_0 + t P_1,$$

com $t \in [0, 1]$ e P_0, P_1 pontos do plano, como podemos observar na Figura 43.



Figura 43: Curva de Bézier linear.

Podemos notar que a curva de Bézier linear toma a forma do próprio “polígono de controle” $P = [P_0, P_1]$, que, no caso, possui apenas um único segmento e dois pontos de controle.

Vejam as curvas de Bézier de segundo e de terceiro grau no plano, também chamadas de curvas de Bézier quadrática e cúbica, respectivamente.

Exemplo 6.9. Uma curva de Bézier quadrática pode ser dada por

$$B(t) = \sum_{i=0}^2 P_i B_{i,2}(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2$$

e uma cúbica por

$$B(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3,$$

com $t \in [0, 1]$ e P_0, P_1, P_2, P_3 pontos do plano, como podemos observar na Figura 44.

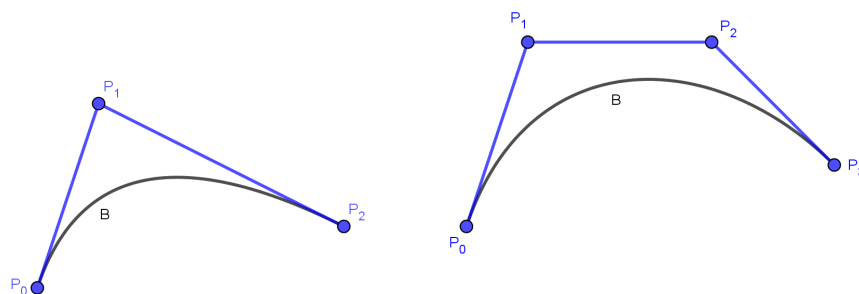


Figura 44: Curvas de Bézier quadrática e cúbica, respectivamente.

Podemos observar que a curva de Bézier quadrática possui dois segmentos e três pontos de controle, enquanto a cúbica possui três segmentos e quatro pontos de controle.

Com estes exemplos, podemos notar que uma curva de Bézier se aproxima do “polígono de controle”, não oscilando mais do que ele, tangencia o primeiro e o último segmentos exatamente no primeiro e no último vértices, respectivamente, visto que $B(0) = P_0$ e $B(1) = P_n$, e está contida no fecho convexo do “polígono”. Além disso, ela é invariante sob transformações afins e tomamos o cuidado de usar aspas para denominar “polígono de controle” porque $P = [P_0, \dots, P_n]$ não precisa ser, necessariamente, fechado.

Uma curva de Bézier também pode ser definida como um conjunto de pontos encontrados por meio do algoritmo de Casteljau: dado um “polígono de controle”, cada segmento é dividido de acordo com o parâmetro e conectam-se os pontos obtidos, formando novos segmentos. Este processo é repetido até se reduzir em um o número de segmentos e, neste momento, o ponto obtido é o ponto da curva de Bézier correspondente ao parâmetro, como podemos observar na Figura 45.

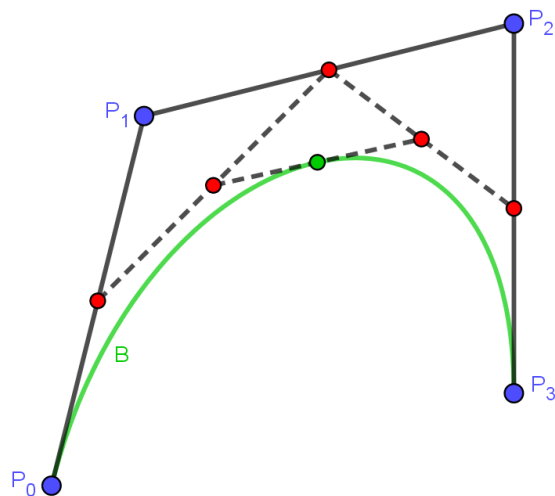


Figura 45: Algoritmo de Casteljau.

Para facilitar o entendimento do algoritmo de Casteljau, podemos ver uma animação da construção de uma curva de Bézier por meio deste algoritmo em <https://www.geogebra.org/m/K3rNmYBc>.

6.3.2 *String art*

String art, também chamada de arte de cordas, é um estilo caracterizado, como dito anteriormente, por um arranjo de cordas que formam padrões geométricos. De acordo com Habre (2013, p. 213-219), esta arte teve origem no final do século XIX, com Mary Everest Boole (inglesa, 1832 – 1916), que buscou em seus trabalhos tornar ideias matemáticas mais acessíveis às crianças. Boole muito contribuiu para a Educação Matemática e uma de suas contribuições mais notáveis é a técnica “arte com fios tensionados”, que, embora tenha surgido antes das curvas de Bézier, pode ser relacionada com o algoritmo de Casteljau para a construção destas curvas, como podemos observar na Figura 46.

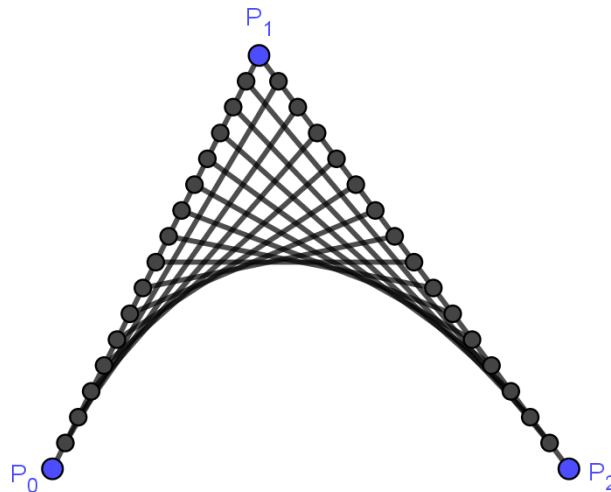


Figura 46: Aproximação de uma curva de Bézier pela arte de cordas.

Como vimos, uma curva de Bézier pode ter muitos pontos de controle. Porém, suas formas mais utilizadas são as quadráticas e as cúbicas, visto que polinômios de graus maiores do que 3 são computacionalmente mais custosos de calcular (e, no caso de nossa atividade, mais difíceis de desenhar). Uma outra desvantagem dessas curvas é que elas não conseguem representar, exatamente, cônicas como a elipse, visto que estas não podem ser descritas por funções polinomiais. Assim, para a nossa proposta de atividade, vamos trabalhar com a ideia de curvas de Bézier por partes, ou seja, uma composição de segmentos polinomiais de Bézier de grau baixo (no caso, grau 2).

Um exemplo desta arte é construir uma figura geométrica que se assemelha a uma circunferência. A seguir, vamos fazer tal construção, com auxílio do software GeoGebra,

o que também pode ser feito com material concreto, como tela e linha ou madeira, pregos e barbante.

Na Entrada do GeoGebra, digitamos os vértices $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (0, 10)$, $P_2 = (10, 10)$ e $P_3 = (10, 0)$ de um quadrado e os pontos médios de cada um dos lados, $P_4 = (0, 5)$, $P_5 = (5, 10)$, $P_6 = (10, 5)$ e $P_7 = (5, 0)$, que serão nossos pontos de controle. Para facilitarmos a construção, dividimos o quadrado em quatro “polígonos de controle”, $P_i = [P_7, P_0, P_4]$, $P_{ii} = [P_4, P_1, P_5]$, $P_{iii} = [P_5, P_2, P_6]$ e $P_{iv} = [P_6, P_3, P_7]$, ou seja, passamos a ter quatro construções quadráticas.

Com o auxílio do comando “ponto médio”, marcamos vários pontos igualmente espaçados sobre os segmentos dos “polígonos de controle” e os ligamos ordenadamente (com o comando “segmento”), baseados no algoritmo de Casteljau, conforme exemplifica a Figura 47.

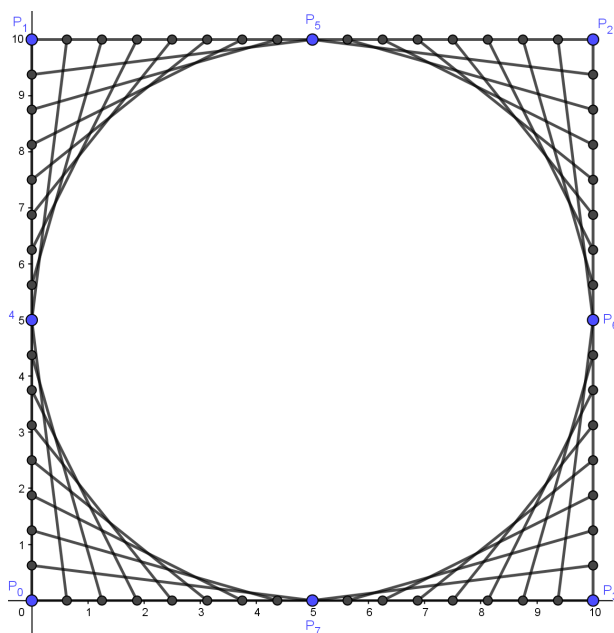


Figura 47: Aproximação de uma curva de Bézier em quatro partes.

Podemos observar que os segmentos construídos conseguiram nos dar a ideia de uma circunferência, que, no caso, teria centro em $(5, 5)$ e raio 5.

O estilo linear da arte de cordas procura valorizar o sentido e a beleza do objeto em seu contorno e é justamente este contorno que nos remete à ideia de retas tangentes, que, por sua vez, abre-nos a possibilidade de introduzir a noção de curvatura de curvas planas no Ensino Médio.

Com os alunos tomando ciência de que a curvatura de uma curva mede a variação da direção de suas retas tangentes, esperamos que, intuitivamente, eles percebam que as retas tangentes a uma circunferência mudam de direção de maneira constante, porém não nula. O que já deve fazê-los perceber que curvatura constante e nula se aplica à reta, já que não há variação de direção de suas tangentes.

Como visto no quatro capítulo, o valor absoluto da curvatura de uma curva regular α , PPCA s , pode ser dado por

$$|k(s)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h)}{h},$$

em que $\phi(h)$ é o ângulo agudo entre dois vetores tangentes consecutivos. Assim, para darmos uma noção mais algébrica de curvatura para os alunos do Ensino Médio, podemos calcular

$$\operatorname{tg}(\phi) = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|,$$

em que m_r e m_s são os coeficientes angulares das retas tangentes a um determinado ponto, do qual queremos calcular a curvatura, visto que o cálculo da tangente do ângulo entre duas retas é conteúdo previsto a ser contemplado na Educação Básica.

Como as curvas de Bézier são tangentes aos segmentos de controle somente nos pontos de controle extremos, vamos efetuar os cálculos somente para os pontos P_4 , P_5 , P_6 e P_7 (para a construção da Figura 47. Para P_7 , temos

$$\operatorname{tg}(\phi) = \left| \frac{\frac{\frac{10}{16}}{\frac{10}{2}} - \left(-\frac{\frac{10}{16}}{\frac{10}{2}}\right)}{1 + \frac{\frac{10}{16}}{\frac{10}{2}} \cdot \left(-\frac{\frac{10}{16}}{\frac{10}{2}}\right)} \right| = \frac{16}{63} \simeq 0,254$$

e, ao fazermos os cálculos para os outros três pontos, também chegamos a este mesmo resultado, o que nos confirma a ideia de que a curvatura da circunferência é constante.

Podemos notar que o valor encontrado se difere do valor real da curvatura, $\frac{1}{5} = 0,2$, na segunda casa decimal. Assim, se quisermos melhorar nosso resultado, precisamos descobrir qual a melhor partição dos lados do quadrado. Para isso, consideramos um quadrado de lado l a ser dividido em n partes iguais. Logo,

$$\left| \frac{\frac{\frac{l}{n}}{\frac{l}{2}} - \left(-\frac{\frac{l}{n}}{\frac{l}{2}}\right)}{1 + \frac{\frac{l}{n}}{\frac{l}{2}} \cdot \left(-\frac{\frac{l}{n}}{\frac{l}{2}}\right)} \right| = \frac{1}{2}$$

ou seja,

$$\left| \frac{2n}{n^2 - 4} \right| = \frac{1}{l}.$$

Considerando $n > 2$, temos $n^2 - 2ln - 4 = 0$ e, daí,

$$n = \frac{-(-2l) \pm \sqrt{(-2l)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = l \pm \sqrt{l^2 + 4}.$$

Como $n > 0$, então

$$n = l \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{l^2}} \right).$$

Assim, a razão entre n e l , nesta ordem, é

$$1 + \sqrt{1 + \frac{4}{l^2}},$$

que se limita a 2, ou seja, a melhor partição seria a em que $n = 2l$. Portanto, para um quadrado de lado 10, a melhor partição seria 20, o que resultaria em

$$\text{tg}(\phi) = \frac{20}{99} \simeq 0,202,$$

onde o erro passa a ser na terceira casa decimal.

É de suma importância destacar que, ao realizarmos estimativas, não estamos nos conformando com resultados inexatos por limitações em nossos conhecimentos. Neste caso, a ideia central da atividade é intuir a noção de curvatura de curvas planas na Educação Básica e chegarmos à conclusão de que a curvatura de uma reta é sempre nula, a de uma circunferência é sempre constante e não nula e a de uma elipse pode não ser constante (como veremos adiante), ou seja, nossas estimativas podem ser dignas de credibilidade, assim como os cálculos exatos, a dependerem de nossos objetivos.

Porém, ainda que atinjamos nosso objetivo com esta atividade, não podemos nós, professores de Matemática, afirmar que o que acabamos de fazer foi uma aproximação de fato, visto que comprovamos que a melhor partição para o método apresentado ainda não nos dá o valor real da curvatura. Além disso, se aplicássemos tal método para outros pontos, também não encontraríamos os mesmos valores, justamente porque o que construímos não é uma perfeita circunferência, já que as curvas de Bézier são dadas por funções polinomiais, como discutimos anteriormente.

Deste modo, podemos ir em busca de um aproximação real. Para isso, precisaríamos de conceitos mais avançados de matemática, como curvas racionais, interpolação de

Hermite e distância Hausdorff, que podem ser encontrados em VIDAL (p. 23-50), onde se relaciona curva de Bézier com arco circular. Desta referência, é válido ressaltar, para este trabalho, que uma aproximação para a situação que estamos discutindo poderia ser dada tomando como “polígonos de controle” os polígonos convexos regulares, com o número de lados cada vez maior, o que aumentaria o número de pontos de controle e diminuiria a distância Hausdorff entre a curva de Bézier e o arco circular correspondente.

Na Figura 48, podemos ver essa nova construção, para polígonos convexos regulares de três, quatro, cinco, oito e dezesseis lados.

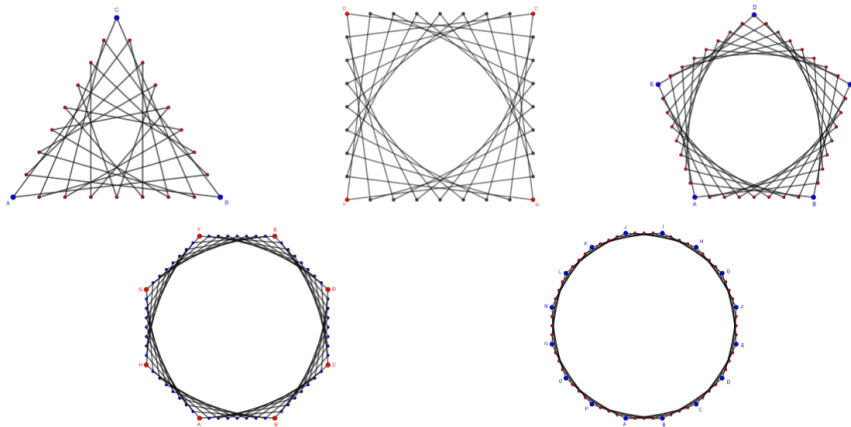


Figura 48: Arte de cordas em polígonos convexos regulares.

Podemos notar que, quanto maior o número de lados, mais a construção se aproxima de uma circunferência e isso não está relacionado com o número de partições dos lados dos polígonos e, sim, com o número de pontos de controle. Deste modo, quando o número de pontos de controle tende ao infinito, a distância Hausdorff tende a zero e a curva de Bézier tende ao arco de circunferência relacionado.

Para este tipo de construção, o cálculo da tangente do ângulo formado por dois segmentos não seria tão fácil de calcular como no método anterior, visto que não é simples determinar os triângulos retângulos envolvidos. Assim, reforçamos a ideia de que fizemos os cálculos baseados na outra construção para atingirmos o objetivo da atividade, que é dar uma noção de curvatura para os alunos, mas sempre nos importando com declarações matemáticas coerentes, como o caso de só nos aproximarmos, de fato, de uma circunferência se utilizarmos a segunda construção.

Para finalizarmos nossa atividade, vamos investigar a curvatura de uma elipse de semieixos de medidas distintas, uma vez que ela não possui curvatura constante – nem nula (como a reta) nem não nula (como a circunferência). Para isso, voltamos a considerar o primeiro método de construção, para facilitarmos os cálculos.

Na Entrada do GeoGebra, digitamos os vértices $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (0,10)$, $P_2 = (20,10)$ e $P_3 = (20,0)$ de um retângulo e os pontos médios de cada um dos lados, $P_4 = (0,5)$, $P_5 = (10,10)$, $P_6 = (20,5)$ e $P_7 = (10,0)$, que serão nossos pontos de controle. Para facilitarmos a construção, também dividimos o retângulo em quatro “polígonos de controle”. Com o auxílio do comando “ponto médio”, também marcamos vários pontos sobre os segmentos dos “polígonos de controle” e os ligamos ordenadamente, baseados no algoritmo de Casteljau, conforme exemplifica a Figura 49.

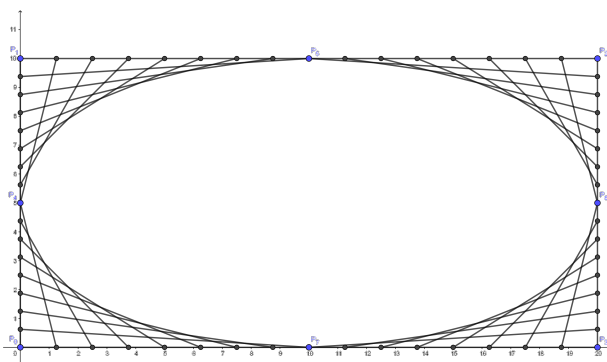


Figura 49: Aproximação de uma outra curva de Bézier em quatro partes.

Podemos observar que os segmentos construídos conseguiram nos dar a ideia de uma elipse, que, no caso, teria centro em $(10,5)$, semieixo maior de medida 10 e semieixo menor de medida 5.

Como as curvas de Bézier são tangentes aos segmentos de controle somente nos pontos de controle extremos, vamos efetuar os cálculos somente para os pontos P_4 , P_5 , P_6 e P_7 . Para P_5 e P_7 , temos

$$tg(\phi) = \left| \frac{\frac{\frac{10}{16}}{\frac{20}{2}} - \left(-\frac{\frac{10}{16}}{\frac{20}{2}}\right)}{1 + \frac{\frac{10}{16}}{\frac{20}{2}} \cdot \left(-\frac{\frac{10}{16}}{\frac{20}{2}}\right)} \right| = \frac{32}{255} \simeq 0,125$$

e, para P_4 e P_6 , temos

$$\operatorname{tg}(\phi) = \left| \frac{\frac{\frac{20}{16}}{\frac{10}{2}} - \left(-\frac{\frac{20}{16}}{\frac{10}{2}}\right)}{1 + \frac{\frac{20}{16}}{\frac{10}{2}} \cdot \left(-\frac{\frac{20}{16}}{\frac{10}{2}}\right)} \right| = \frac{8}{15} \simeq 0,533$$

. Como as curvaturas não são iguais para estes quatro pontos, podemos concluir que a curvatura da elipse de semieixos de medidas distintas não é constante.

Podemos notar que os valores encontrados se diferem dos valores reais das curvaturas, que são $\frac{1}{10} = 0,1$ e $\frac{2}{5} = 0,4$, respectivamente. Se quiséssemos melhorar nosso resultado, também precisaríamos descobrir qual a melhor partição dos lados do retângulo, assim como fizemos com o quadrado. Porém, como a ideia central, neste caso, é mostrar que a curvatura desta elipse não é constante e que ela possui dois mínimos de curvatura e dois máximos, podemos considerar, para nossa análise, os valores encontrados em nossos cálculos.

Como $\frac{32}{255} < \frac{8}{15}$, podemos concluir que a curvatura nos pontos da elipse pertencentes ao seu menor eixo é também menor do que a curvatura nos pontos pertencentes ao seu maior eixo. Além disso, nos pontos intermediários aos citados, a variação da direção das retas tangentes também é intermediária em relação às citadas, pois, para irmos de uma curvatura $\frac{32}{255}$ para uma $\frac{8}{15}$, e vice-versa, devemos, neste caso, passar por valores intermediários a eles e que não se anulam, pois, senão, formariam segmentos de reta ou seriam pontos de inflexão.

Podemos relacionar este fato às órbitas elípticas dos planetas, propostas por Kepler, em que o Sol se encontra em um dos focos da elipse e os seus pontos de curvatura máxima são chamados periélio (o mais próximo ao Sol) e afélio (o mais distante ao Sol).

Na Educação Básica, estudamos funções e, conseqüentemente, obtemos uma noção de taxa de variação, que é a ideia básica do cálculo diferencial. Diante da observação da variação da curvatura da elipse, podemos trabalhar o crescimento e o decréscimo de funções, o que pode ser a porta de entrada para o cálculo diferencial.

A escolha da escala de tratamento de um tema está sempre relacionada com os objetivos didático-pedagógicos do docente e, por isso, sempre é possível ampliar ou reduzir a atenção dada a determinado conteúdo programático. Como a geometria analítica entrelaça as relações de interdependência, a linguagem algébrica e os objetos geométricos, introduzir a noção de cálculo diferencial em seu estudo pode ser uma boa oportunidade de mostrar a verdadeira comunhão de interesses entre esses três segmentos.

No caso da elipse de semieixos de medidas distintas, por o discente imaginar que existe uma função que define a curvatura da curva e que esta função possui pontos de máximo e pontos de mínimo, além de ser contínua, podemos trabalhar periodicidade de funções e introduzir a noção de vértice de uma curva, que são os pontos em que se assume curvatura mínima ou máxima. Assim, chegaríamos à conclusão de que a elipse tem exatos quatro vértices e que, de um vértice para o outro, ora a função curvatura é crescente e ora é decrescente, sendo simétrica devido à sua periodicidade.

É simétrica, também, a curvatura de uma parábola em relação ao seu vértice – o que pode ser investigado no GeoGebra, por construções análogas às feitas nesta seção, confirmando-nos que a parábola possui um eixo de simetria perpendicular à sua diretriz e que passa pelo seu vértice.

Mais uma vez, esperamos que esta atividade favoreça o aprendizado da geometria analítica na Educação Básica e que desperte o interesse do discente nesta ciência, ao explorarmos noções do cálculo diferencial, em benefício de seu crescimento intelectual.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALMEIDA, Dulce M. & REIS, Fabiano E. **Um estudo introdutório sobre cissoides**. Uberlândia: FAMAT em Revista, 2008.
- [2] BIEZUNER, Rodney J. & JESUS, Breno F. R. **Curvas de Bézier**. Belo Horizonte: Seminários de iniciação científica da Universidade Federal de Minas Gerais, 2014.
- [3] BORLIN, Harlley. **Resolução do problema da duplicação do volume do cubo utilizando origami**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.
- [4] BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 1974.
- [5] BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: Ministério da Educação, 2002.
- [6] CARMO, Manfredo P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [7] CARNEIRO, Mário J. D. & GARCIA, Ronaldo A. **O teorema dos quatro vértices e sua recíproca**. Rio de Janeiro: VIII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.
- [8] CASTRO, Leonardo M. **O cálculo variacional e as curvas cicloidais**. Brasília: Universidade de Brasília, 2014.
- [9] DETURCK, Dennis; GLUCK, Herman; POMERLEANO, Daniel; VICK, David S. **The four vertex theorem and its converse**. Providence: American Mathematical Society, 2007.
- [10] FERREIRA, Eduardo S. **Uma história das curvas pedais (podaires) pelo aplicativo GeoGebra**. São João del-Rei: Anais do 6º Encontro Luso-brasileiro de História da Matemática, 2011.

- [11] GRISI, Rafael M.; LUDOVICI, Sinuê D. B.; MACHADO, Daniel M. **Geometria analítica e vetorial**. Santo André: Universidade Federal do ABC, 2015.
- [12] HABRE, Samer. **Enhancing mathematics understanding through visualization**. Hershey: IGI Global, 2013.
- [13] LIMA, Elon L. **Isometrias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.
- [14] LOCKWOOD, E. H. **A book of curves**. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.
- [15] MARQUES, Rafaella C.; PARRA, Danilo; SUZUKI, Soraya S. **A geometria do origami**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- [16] PICKOVER, Clifford A. **The math book**. New York: Sterling Publishing, 2009.
- [17] SÃO PAULO. **Currículo do estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2011.
- [18] TENENBLAT, Keti. **Introdução à geometria diferencial**. São Paulo: Blucher, 2008.
- [19] VIDAL, Concepción G. **Aproximación de arcos circulares mediante curvas de Bézier**. Sevilla: Universidad de Sevilla, 2016.
- [20] WEISSTEIN, Eric W. **Lemniscate**. Champaign: Wolfram MathWorld, [2017].
- [21] WEISSTEIN, Eric W. **Limaçon**. Champaign: Wolfram MathWorld, [2017].
- [22] WEISSTEIN, Eric W. **Cassini Ovals**. Champaign: Wolfram MathWorld, [2017].