



Universidade Federal do ABC



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

A OBRA DE M.C.ESCHER COMO SUBSÍDIO AO ENSINO DAS ISOMETRIAS

Marilene dos Santos Carinha

Dissertação de mestrado apresentada como
requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Matemática sob orientação do
Professor Dr. Armando Caputi

Santo André - SP

2018

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Carinha, Marilene dos Santos

A obra de M.C.Escher como subsídio ao ensino das isometrias /
Marilene dos Santos Carinha. — 2018.

113 fls. : il.

Orientador: Armando Caputi

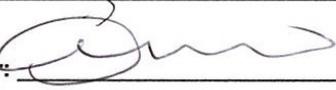
Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2018.

1. Simetria. 2. Isometrias. 3. Escher. I. Caputi, Armando. II. Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2018. III.
Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 17 de maio de 2018.

Assinatura do autor: _____ 

Assinatura do orientador: _____ 



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Marilene dos Santos Carinha, realizada em 27 de fevereiro de 2018:

Prof.(a) Dr.(a) **Armando Caputi** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael de Mattos Grisi** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Barbara Corominas Valerio** (Universidade de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Jerônimo Cordoni Pellegrini** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves** (Universidade de São Paulo) – Membro Suplente

DEDICATORIA

Adalton, marido querido, meu alicerce.

Guilherme, Renan e Renato, filhos amados, minha riqueza.

A vocês dedico com todo amor e carinho este estudo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido saúde, paciência e perseverança para a conclusão deste trabalho.

Agradeço ao meu marido e aos meus filhos por todo carinho, compreensão e apoio incondicional durante toda a realização deste trabalho e hoje me fazem sentir a grandeza de ser esposa, mãe, educadora, professora e mestra.

Um agradecimento especial a minha mãe, pois sua perseverança, seu amor e seus grandes ensinamentos fizeram toda a diferença em minha vida.

Agradeço imensamente também a todos os professores e em especial ao meu orientador Armando Caputi, que muito me auxiliou na realização deste estudo.

EPÍGRAFE

"As leis da matemática não são apenas invenções ou criações humanas. Elas simplesmente existem independentemente do intelecto humano. O que um homem de inteligência apurada pode fazer é descobrir que essas leis estão lá e conhecê-las".
M.C.Escher

RESUMO

Este estudo apresenta as obras do artista holandês M.C. Escher como subsídio ao ensino das isometrias. Suas obras são repletas de movimento, padrões e regularidades, onde as figuras se transformam, se repetem e refletem, fazendo com que o observador seja invariavelmente atraído para descobrir suas particularidades, ou seja, suas simetrias, tornando assim o processo de aprendizagem em algo diferente, concreto e atraente.

Após uma breve apresentação das simetrias, conheceremos um pouco sobre Escher e suas obras, abordaremos o conceito de grupo com destaque ao grupo das isometrias com a proposição que identifica a reflexão como unidade básica, afirmando que qualquer que seja a isometria no plano, esta poderá ser obtida pelo produto de, no máximo, três reflexões.

Complementando este estudo apresentaremos uma aplicação da teoria das isometrias, através do grupo dos ornamentos, onde podemos observar uma bela relação da matemática à arte. Ao final, algumas sugestões de atividades.

Palavras-chave: Simetria, Isometrias, Escher.

ABSTRACT

This study presents the works of the Dutch artist M.C. Escher as a subsidy for the learning of isometries. His works are full of movement, patterns and regularities, where the figures are transformed, repeated and reflected, making the observer invariably attracted to discover their particularities, that is, their symmetries, thus making the process of learning in something different, concrete and attractive.

After a brief presentation of the symmetries, we will know a little more about Escher's works, we will approach the concept of group with emphasis on the group of isometries with the proposition that identifies reflection as basic unit, stating that every isometry in the plane can be represented as a product of at most three reflections.

Complementing this study we present an application of the isometries theory through the group of ornaments, where we can observe a beautiful connection of mathematics and art. At the end it is presented some suggestions for activities.

Keywords: Symmetry, Isometries, Escher.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Produção artística indígena	4
Figura 2	Simetria em animais	5
Figura 3	Simetria nas frutas	5
Figura 4	Simetria na natureza	5
Figura 5	Construção simétrica - Taj Mahal, Índia	6
Figura 6	Construção simétrica - Jardim Botânico, Curitiba	6
Figura 7	Pátio interno do Palácio de Alhambra - Granada, Espanha	7
Figura 8	Detalhes internos do Palácio de Alhambra - Granada, Espanha	8
Figura 9	Detalhes internos do Palácio de Alhambra - Granada, Espanha	8
Figura 10	Orientação do plano numa simetria de reflexão	10
Figura 11	Letras com eixos de simetria de reflexão	11
Figura 12	Besouro, tinta e aquarela, 1953	11
Figura 13	Caranguejo, tinta, lápis e aquarela, 1941	12
Figura 14	Reflexão através de um ponto	12
Figura 15	Simetria de rotação	13
Figura 16	Borboletas, aquarela, 1948	14
Figura 17	Lagarto, tinta e lápis, 1942	14
Figura 18	Diferentes simetrias na mesma Figura	15
Figura 19	Anjo e Demônio, lápis, tinta, crayon e guache, 1941	15
Figura 20	Peixe, Pato e Lagarto, aquarela, 1948	16

Figura 21	Simetria de translação	17
Figura 22	Peixe e Barco, 1948	18
Figura 23	Pássaro e Peixe, 1938	18
Figura 24	Reflexão com deslizamento	19
Figura 25	Águia, 1938	20
Figura 26	Maurits Cornelis Escher	22
Figura 27	Mosaicos internos do Palácio de Alhambra	23
Figura 28	Castroalva, litografia, 1930	24
Figura 29	Palmeira, entalhe em madeira, 1933	25
Figura 30	Espelho Mágico, litografia, 1946	25
Figura 31	Desenhando-se, litografia, 1948	26
Figura 32	Répteis, litografia, 1943	26
Figura 33	Três Esferas II, litografia, 1946	27
Figura 34	Mão Com Esfera Refletora, litografia, 1935	27
Figura 35	Cada Vez Menor, entalhe em madeira, 1956	28
Figura 36	Limite Circular III e IV, xilogravuras, 1959 e 1960	28
Figura 37	Queda D'água, litografia, 1961	29
Figura 38	Em Cima e Embaixo, litografia, 1947	30
Figura 39	Recorte para pavimentação	31
Figura 40	Técnica de pavimentação a partir de um hexágono	32
Figura 41	Técnica de pavimentação a partir de um quadrado	33
Figura 42	Metamorfose I, xilogravura, 1937	34
Figura 43	Metamorfose II, xilogravura, 1939-1940	34
Figura 44	Metamorfose III, xilogravura, 1967-1968	35
Figura 45	Dia e Noite, xilogravura, 1939	36

Figura 46	Lagarto, pintura, 1942	36
Figura 47	Peixe, aquarela, 1942	37
Figura 48	Dois Peixes, aquarela, 1941	37
Figura 49	Cavaleiros, aquarela, 1946	38
Figura 50	Lagarto, Peixe e Morcego, aquarela, 1952	38
Figura 51	Toda isometria ϕ é uma bijeção	54
Figura 52	Reflexão de um ponto em relação a uma reta	55
Figura 53	Reflexão em r com A e $B \in r$	56
Figura 54	Reflexão em r com A não pertencente a r e B pertencente a r	56
Figura 55	Reflexão em r com A e B não pertencentes a r e \overline{AB} não perpendicular a r	57
Figura 56	Reflexão em r com A e B não pertencentes a r e \overline{AB} perpendicular a r no ponto M	58
Figura 57	Reflexão em r com A e B não pertencentes a r e \overline{AB} perpendicular e sem intersecção com r	58
Figura 58	P , Q e M não colineares	59
Figura 59	P , Q e M colineares	60
Figura 60	A , B e P colineares	61
Figura 61	P não colinear ao segmento \overline{AB}	61
Figura 62	$\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ sem pontos em comum	62
Figura 63	$\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ com pontos em comum	62
Figura 64	$\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são lados opostos de um paralelogramo	63
Figura 65	Rotação do ângulo α entre pontos colineares	64
Figura 66	Rotação de ângulo α de pontos não colineares	65
Figura 67	Uma isometria em 2 pontos fixos distintos	66

Figura 68	Isometria em 3 pontos fixos não colineares	68
Figura 69	Produto de reflexões entre 2 retas paralelas	69
Figura 70	Unicidade da reta perpendicular de um produto de 2 reflexões entre retas paralelas	70
Figura 71	Produto de reflexões entre 3 retas paralelas	71
Figura 72	Produto de duas reflexões entre retas concorrentes	72
Figura 73	Unicidade das retas concorrentes r e s em um produto de duas reflexões	73
Figura 74	Produto de três reflexões entre retas concorrentes	74
Figura 75	Produto de 3 reflexões entre retas não paralelas e não concorrentes	75
Figura 76	Teorema fundamental das isometrias	77
Figura 77	Grupo das rosetas	82
Figura 78	Tipos de frisos	83
Figura 79	Algoritmo dos 7 tipos de frisos	84
Figura 80	Algoritmo dos 17 tipos de papel de parede	86
Figura 81	Os 17 tipos de papel de parede de Alhambra	87
Figura 82	Esboços de Alhambra realizados por Escher e Jeta	87
Figura 83	Escher e o grupo $p4$ de papel de parede	88
Figura 84	Escher e o grupo $p3$ de papel de parede	88
Figura 85	Escher e o grupo $p3m1$ de papel de parede	89
Figura 86	Escher e o grupo cm de papel de parede	89
Figura 87	Geogebra com exemplo de reflexão	103
Figura 88	Geogebra com exemplo de rotação	103
Figura 89	Geogebra com exemplo de translação	104
Figura 90	Geogebra com exemplo de reflexão com deslizamento	104

Figura 91	Aplicação da atividade 3	107
Figura 92	Alguns padrões criados pelos alunos	108

SUMÁRIO

Lista de Figuras	xv
INTRODUÇÃO	1
1 A SIMETRIA NA ARTE E NA MATEMÁTICA	3
1.1 As simetrias e as obras de Escher	9
2 ESCHER	21
2.1 Um pouco sobre Escher	21
2.2 Algumas obras e respectivas fases	24
3 GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES	39
3.1 Introdução	39
3.2 Grupos	41
3.3 Subgrupos	43
3.4 Grupo das transformações geométricas	48
4 ISOMETRIAS	51
4.1 Definição e propriedades	52
4.2 Tipos de isometrias	55
4.2.1 Reflexão	55
4.2.2 Translação	60
4.2.3 Rotação	63
4.2.4 Reflexão com Deslizamento	65
4.3 Isometrias no plano	66
4.4 Produto de isometrias	68
4.5 Representação das isometrias	76
5 GRUPOS DOS ORNAMENTOS	81
6 SUGESTÕES DE ATIVIDADES	91

7 REGISTRO DE APLICAÇÕES	105
CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
Bibliografia	111

LISTA DE NOTAÇÕES E SÍMBOLOS

\exists	: Existe
\forall	: Para todo ou para qualquer que seja
\implies	: implica que
\iff	: se e somente se
\vec{v}	: vetor v
\overrightarrow{AB}	: vetor determinado pelos pontos A e B
\overline{AB}	: o segmento de reta ligando os pontos A e B
\overleftrightarrow{AB}	: reta que passa pelos pontos A e B
$A\hat{O}B$: o ângulo determinado por \overline{OA} e \overline{OB}
$d(A, B)$: distância entre os pontos A e B
π	: plano Euclidiano
φ_r	: isometria de reflexão através de uma reta r
φ_P	: isometria de reflexão através de um ponto P
$\tau_{\vec{v}}$: isometria de translação através do vetor \vec{v}
$\rho_{O, \alpha}$: isometria de rotação no ponto O e ângulo α
$\vartheta_{\vec{v}, r}$: isometria de reflexão com deslizamento através do vetor \vec{v} e da reta r
■	: indica o final de uma demonstração

INTRODUÇÃO

A motivação deste estudo foram as dificuldades encontradas na aprendizagem das transformações geométricas, com destaque ao ensino das isometrias presentes tanto no ensino fundamental como no ensino médio.

A associação da arte com a matemática é uma importante aliada nesta aprendizagem, pois as imagens despertam e estimulam o interesse dos alunos facilitando o processo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), foram elaborados a fim de servir como ponto de partida para o trabalho docente, norteando as atividades realizadas na sala de aula. De acordo com os PCNs de Matemática: "O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. Por meio da observação e experimentação elas começam a discernir as características de uma figura, e a usar as propriedades para conceituar classes de formas".

Um das possibilidades mais fascinantes no ensino da Geometria é despertar no aluno a percepção de que ela está presente tanto na natureza, como nas criações humanas, ou seja, nas esculturas, pinturas, construções, etc.

Neste estudo, utilizaremos como recurso de aprendizagem, os trabalhos do artista holandês Maurits Cornelis Escher, pois suas obras são repletas de movimentos, cores, formas, padrões, transformações e ambiguidades, que despertam no observador um interesse pelos padrões geométricos e suas respectivas transformações.

Iniciaremos nosso estudo com algumas observações relacionando arte, matemática e simetria. Optamos neste primeiro Capítulo por uma breve apresentação do conceito de simetria para que o leitor possa melhor compreender e

observar as simetrias presentes nas obras de Escher que veremos no Capítulo 2 onde conheceremos um pouco sobre a vida e obra deste fenomenal artista.

A fundamentação matemática de nosso estudo estará presente no Capítulo 3 com uma breve introdução sobre a teoria dos Grupos e Grupos de Transformações, apresentando algumas definições e resultados que serão utilizados no Capítulo 4 provando através das propriedades e classificações que as isometrias no plano apresentam a estrutura algébrica de grupo.

No Capítulo 5 encerraremos nosso estudo com a apresentação do grupo dos ornamentos, com destaque para o grupo dos 17 tipos de papéis de parede que serviram de grande inspiração para Escher na realização de suas obras que envolviam Tesselações.

No Capítulo 6 apresentamos algumas sugestões de aulas e no Capítulo 7 o registro das aplicações de algumas delas.

Todas as figuras que ilustram o início de cada capítulo deste estudo foram resultado das atividades desenvolvidas com os alunos envolvendo as técnicas de Tesselação de Escher e os conceitos adquiridos em isometrias.

A SIMETRIA NA ARTE E NA MATEMÁTICA



Trabalho realizado pelas alunas C.A. e N.S.

A arte e a matemática sempre estiveram presentes em nossas vidas desde os primórdios tempos e nos acompanham até os dias de hoje. Os primeiros sinais da matemática na arte podem ser observados nas artes rupestres, onde a ideia de números já surgia nas representações de animais e pessoas.

De acordo com [4], o homem tem demonstrado ao longo da história que, mesmo sem conhecer matemática de forma acadêmica, conseguiu ser criativo, pois confeccionou belos objetos e realizou verdadeiras obras de arte. Isso acontece porque na realidade, todos nós possuímos um sentido geométrico primitivo, um sentido inato das formas geométricas. Não faltam exemplos do uso desse sentido geométrico nas artes antigas, quando não havia domínio do conhecimento matemático. Entre eles podemos destacar a produção artística indígena, Figura 1, que além do uso de formas geométricas utiliza outro conceito

fundamental: a *simetria*. É fácil encontrar este tipo de artesanato com traços idênticos em diferentes povos de variadas épocas.

O conceito de simetria está diretamente relacionado com a arte, muitos artistas a definem como uma harmonia resultante de certas combinações e proporções de uma parte ou um todo de uma obra artística.

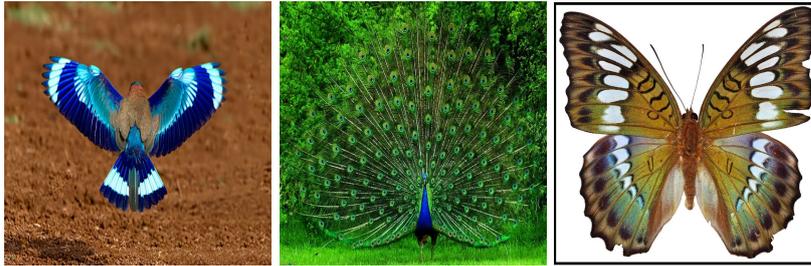
Figura 1: Produção artística indígena



Fonte: [22]

Quando pensamos em simetria, nos vem em mente, beleza, harmonia, equilíbrio, proporção, ordem e perfeição. Há muito tempo o homem busca a simetria em tudo aquilo que faz e ela está presente nas artes, na arquitetura, na natureza e também na matemática, onde o padrão, a regularidade, a criatividade e o rigor prevalecem sempre. Portanto, a arte e a matemática, ajustam-se de forma perfeita e harmoniosa quando falamos em simetria.

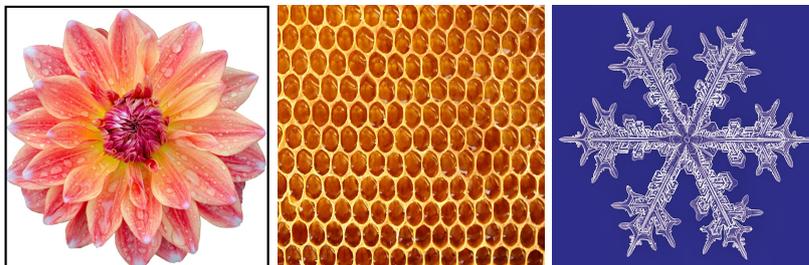
Somos inevitavelmente atraídos por proporções simétricas e a natureza está repleta de simetrias fascinantes. Nas Figuras 2, 3, 4, 5 e 6, podemos observar alguns exemplos de simetria.

Figura 2: Simetria em animais

Fonte: [9]

Figura 3: Simetria nas frutas

Fonte: [25]

Figura 4: Simetria na natureza

Fonte: [9]

Figura 5: Construção simétrica - Taj Mahal, Índia



Fonte: [10]

Figura 6: Construção simétrica - Jardim Botânico, Curitiba

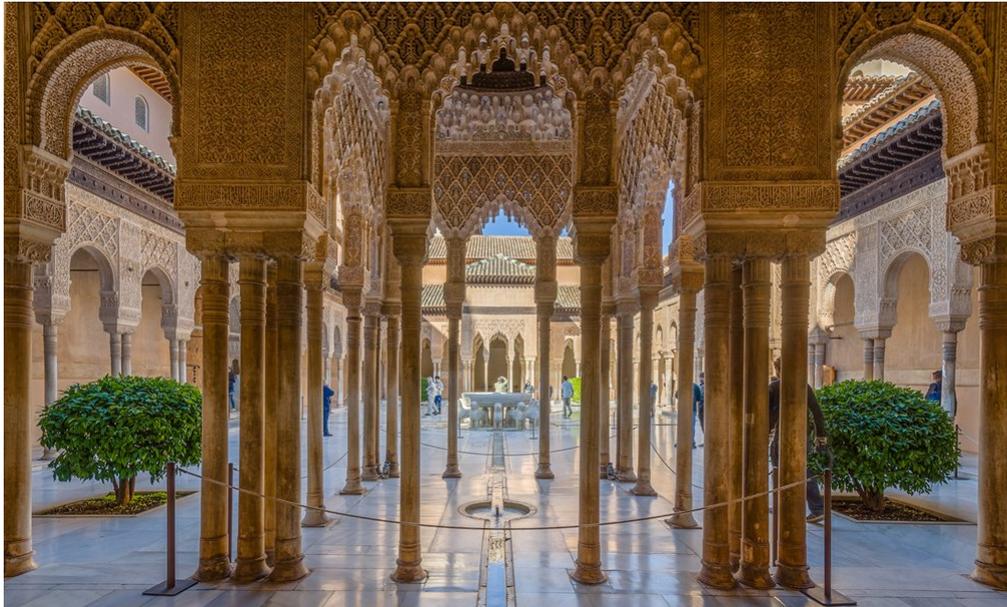


Fonte: [12]

A busca por padrões simétricos esteve presente em muitas civilizações e uma de especial interesse ao nosso estudo foi a civilização moura que permaneceu na Península Ibérica por aproximadamente 14 séculos. Os mouros exerceram grande influência na arquitetura das construções, onde foram observados vários padrões de simetria, porém nenhum deles relativos a seres vivos devido a preceitos religiosos.

O mais famoso legado mouro é o Palácio de Alhambra, em Granada na Espanha, cuja construção foi iniciada no século XIII. A arquitetura, mosaicos e decorações deste palácio são de beleza incomparáveis. Nesse magnífico palácio encontramos em seus painéis decorativos todos os padrões de simetrias possíveis, indicando um amplo conhecimento empírico mouro. Figuras 7, 8 e 9.

Figura 7: Pátio interno do Palácio de Alhambra - Granada, Espanha



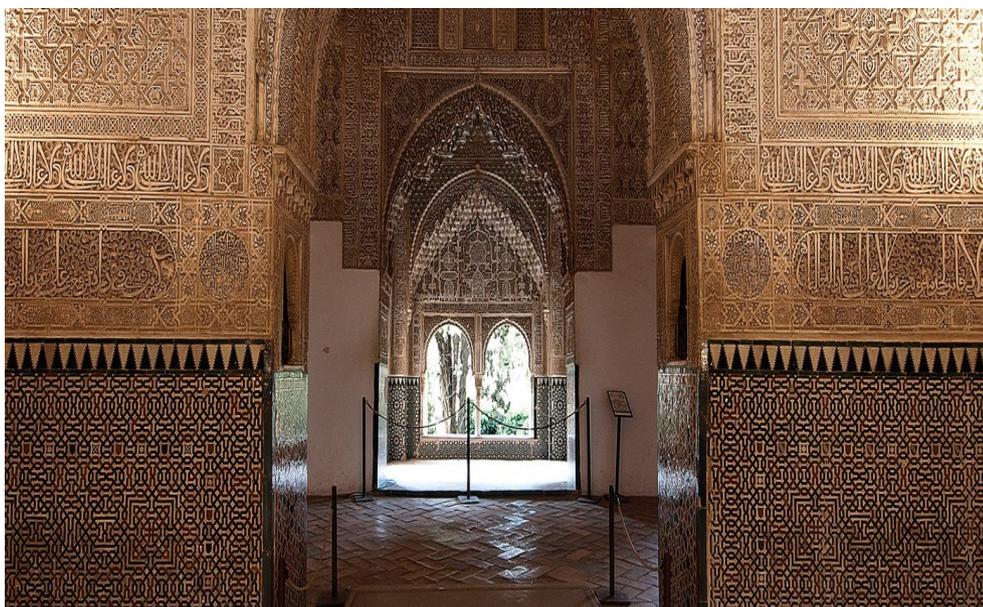
Fonte: [13]

Figura 8: Detalhes internos do Palácio de Alhambra - Granada, Espanha



Fonte: [13]

Figura 9: Detalhes internos do Palácio de Alhambra - Granada, Espanha



Fonte: [13]

Ao observar os detalhes deste palácio Escher se encantou com a simetria dos painéis decorativos e sem ter conhecimento matemático acabou descobrindo

os movimentos simétricos utilizados nestes mosaicos. Posteriormente verificou que se tratavam dos 17 padrões de simetrias possíveis, também chamados de papéis de parede, que veremos em detalhes no Capítulo 5.

Para melhor compreendermos os padrões utilizados por Escher é importante conhecermos algumas operações que podemos fazer com figuras do plano, de modo que elas mudem de posição mas mantenham as formas e tamanhos. Essas operações que transformam pontos do plano em outros pontos do plano são denominadas transformações geométricas.

Definição 1.1. *Uma transformação geométrica no plano é uma função bijetiva $\lambda : \pi \rightarrow \pi$ que associa cada ponto M do plano um ponto M' , denotado $M' = \lambda(M)$.*

M' é chamado imagem de M por λ . Em particular, se \mathcal{F} é uma figura no plano, a imagem de \mathcal{F} por λ é o conjunto de pontos imagens de \mathcal{F} , denotado por $\mathcal{F}' = \lambda(\mathcal{F})$.

O foco do nosso estudo serão somente as transformações geométricas que preservam distâncias entre os pontos, ou seja, mantêm a figura invariável e são chamadas de isometrias. Estudaremos suas características e propriedades no Capítulo 4.

Uma Isometria que deixa uma figura geométrica \mathcal{F} invariante é chamada de simetria de \mathcal{F} e dizemos que a isometria é uma operação de simetria.

Essas operações de simetrias podem ser de quatro tipos: reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento.

Simetria preserva mais do que a distância entre os pontos, preserva a figura como um todo.

1.1 AS SIMETRIAS E AS OBRAS DE ESCHER

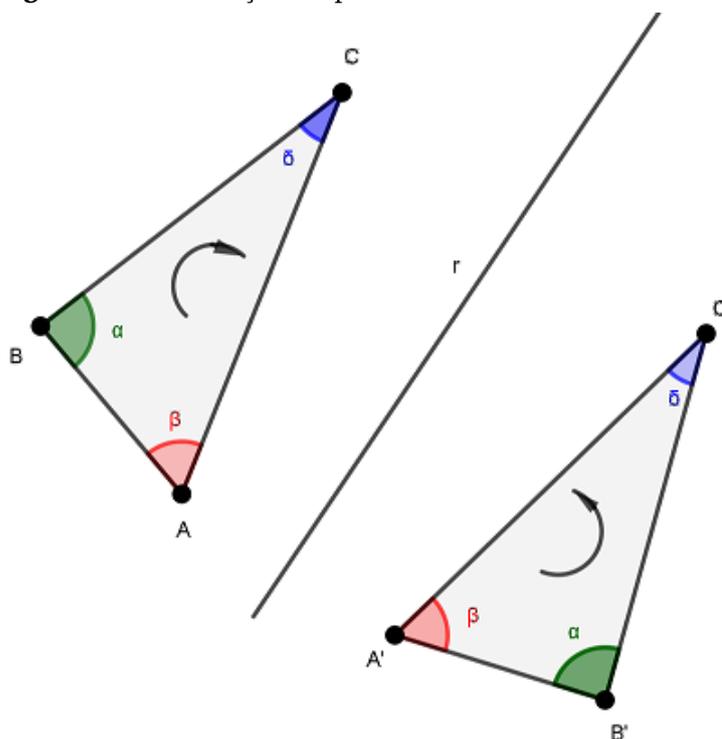
Neste primeiro momento, para uma melhor visualização e compreensão dos trabalhos realizados por Escher, optamos por uma breve apresentação dos tipos de simetrias utilizadas em suas obras.

Simetria de Reflexão em Relação a uma Reta

Uma figura geométrica, possui uma simetria de reflexão se existir uma reta ao longo da qual a figura possa ser dividida ou dobrada em duas partes iguais, de modo que uma metade da figura coincida exatamente com a outra metade quando sobrepostas. Esta reta é chamada de eixo de simetria de reflexão.

Este tipo de simetria possui infinito pontos fixos, pois fixa todos os pontos de uma reta e inverte a orientação do plano, ou seja, se marcarmos os vértices do triângulo ABC de tal forma que o caminho $ABCA$ fica orientado no sentido horário, no triângulo simétrico $A'B'C'$, o caminho análogo $A'B'C'A'$ será percorrido no sentido anti-horário. Figura 10.

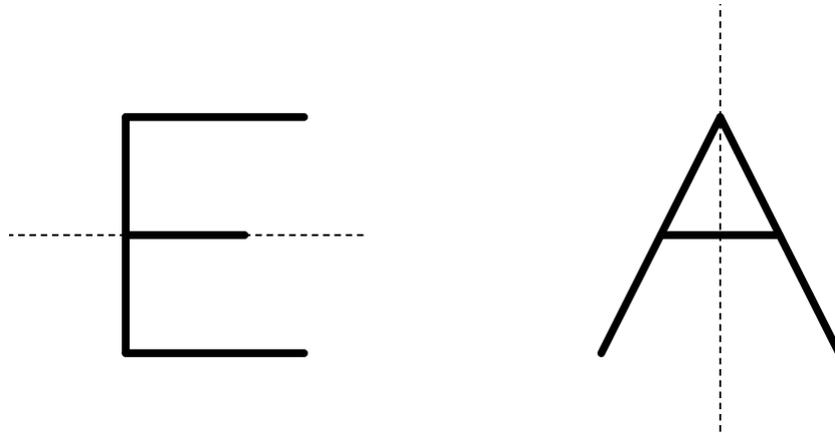
Figura 10: Orientação do plano numa simetria de reflexão



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Tomaremos como exemplo as letras maiúsculas A e E. Na letra E o eixo de simetria é horizontal e na letra A o eixo de simetria é vertical, Figura 11.

Figura 11: Letras com eixos de simetria de reflexão



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Este tipo de simetria também está presente em muitas das obras de Escher. Podemos observar estes movimentos nas figuras 12 e 13 onde os eixos de simetria utilizados por Escher estão em destaque.

Figura 12: Besouro, tinta e aquarela, 1953



Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 13: Caranguejo, tinta, lápis e aquarela, 1941

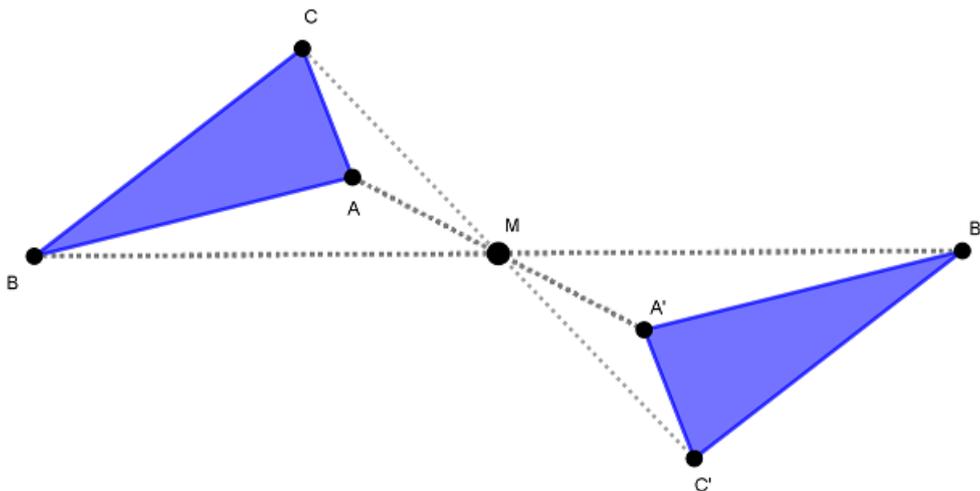


Fonte: M.C.Escher Gallery

Simetria de Reflexão em Relação a um Ponto

Uma figura geométrica possui uma Simetria de Reflexão em relação a um ponto M , se para cada ponto A da figura o ponto A' da reta \overleftrightarrow{AM} tal que $d(A, M) = d(M, A')$ também está na figura.

Figura 14: Reflexão através de um ponto



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Simetria de Rotação

Uma figura geométrica possui uma simetria de rotação se existir um ponto fixo O e um ângulo α , sendo $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ de modo que, dado um ponto qualquer P da figura, distinto de O , o ponto P' obtido pela rotação de P em torno de O pelo ângulo α também pertence à figura. O ponto P' será chamado de simétrico de P pela simetria de rotação de ângulo α e centro O .

Convencionou-se uma orientação para os ângulos do plano, isto é, os ângulos com medida positiva ou simplesmente os ângulos positivos serão aqueles orientados no sentido anti-horário e os negativos aqueles orientados no sentido horário.

Na simetria de rotação há somente um ponto fixo que é o centro de rotação e a orientação do plano é preservada.

A letra N é simétrica por rotação de meia-volta, 180° , ou simétrica por reflexão através do ponto. Já a figura da bandeira é simétrica por rotações de 90° . Figura 15.

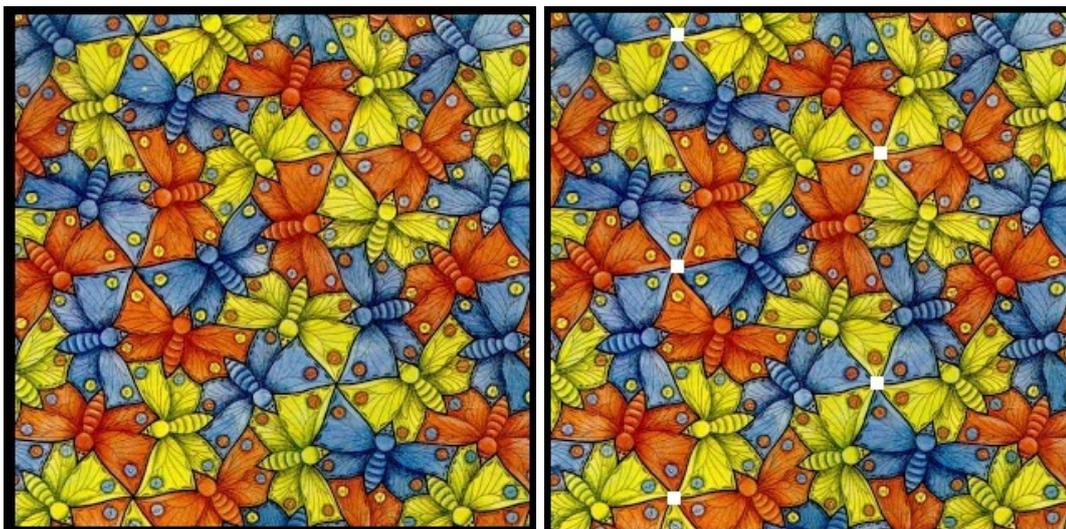
Figura 15: Simetria de rotação



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

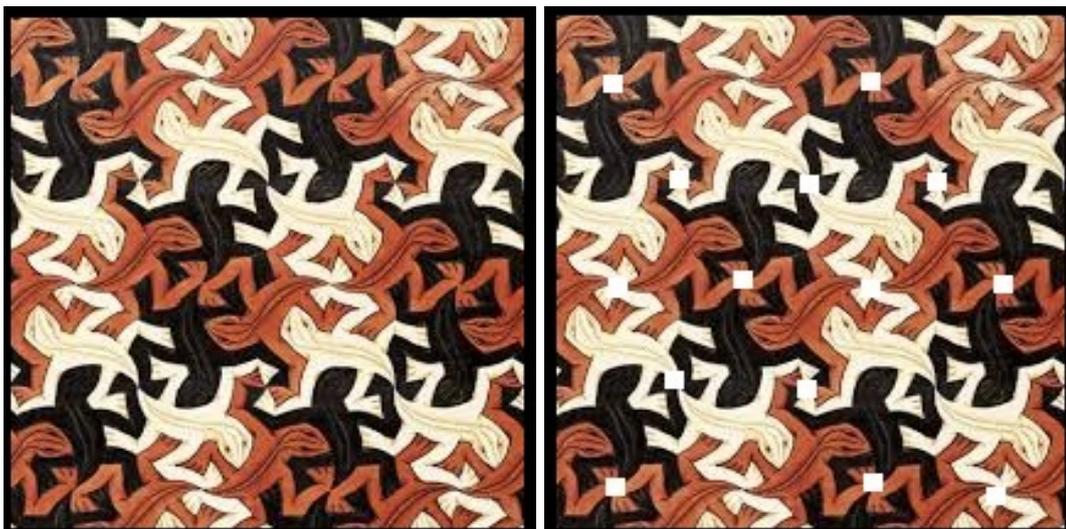
Escher possuía uma grande fascinação pelas rotações e suas obras estão repletas deste movimento. Podemos observar a beleza desta simetria nas Figuras 16 e 17.

Figura 16: Borboletas, aquarela, 1948



Fonte : M.C.Escher Gallery

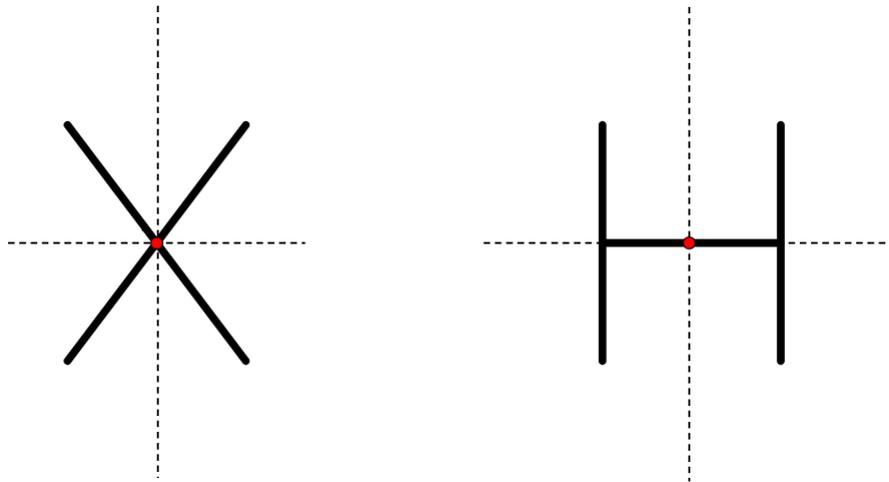
Figura 17: Lagarto, tinta e lápis, 1942



Fonte: M.C.Escher Gallery

Nas letras maiúsculas X e H, ocorre os dois tipos de simetria: uma rotação de 180° , também conhecida como de meia volta, obtida através do ponto central, e dois eixos de simetria de reflexão através da reta que se interceptam no mesmo ponto, Figura 18.

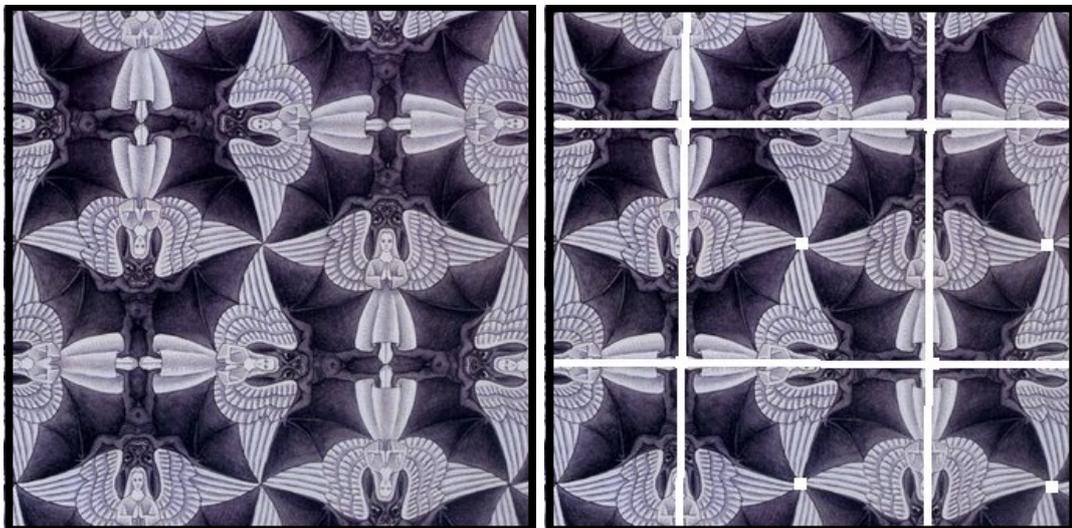
Figura 18: Diferentes simetrias na mesma Figura



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

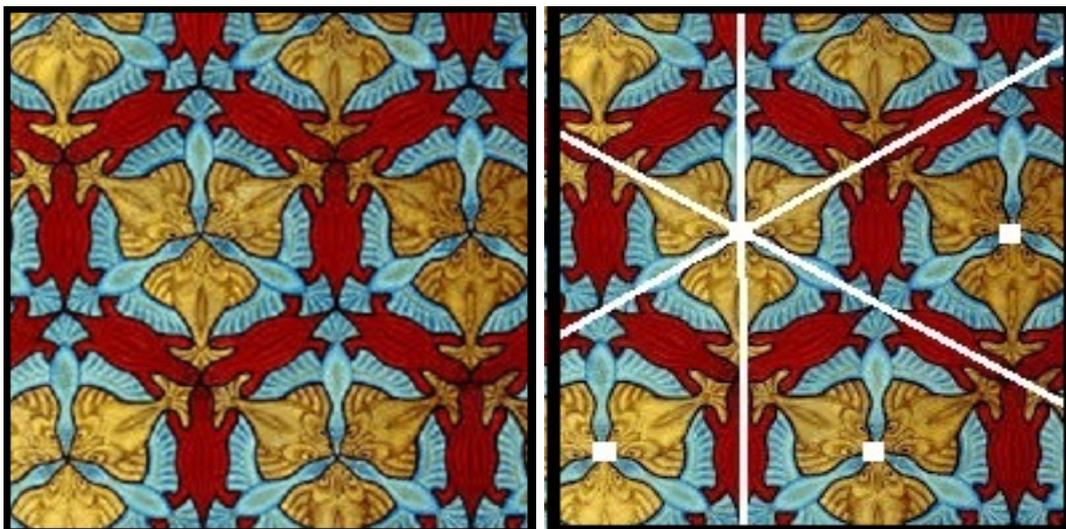
Escher adorava brincar com os movimentos e costumava utilizar diferentes simetrias numa mesma obra. Podemos observar em cada uma das Figuras 19 e 20 as simetrias de Reflexão e de Rotação.

Figura 19: Anjo e Demônio, lápis, tinta, crayon e guache, 1941



Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 20: Peixe, Pato e Lagarto, aquarela, 1948



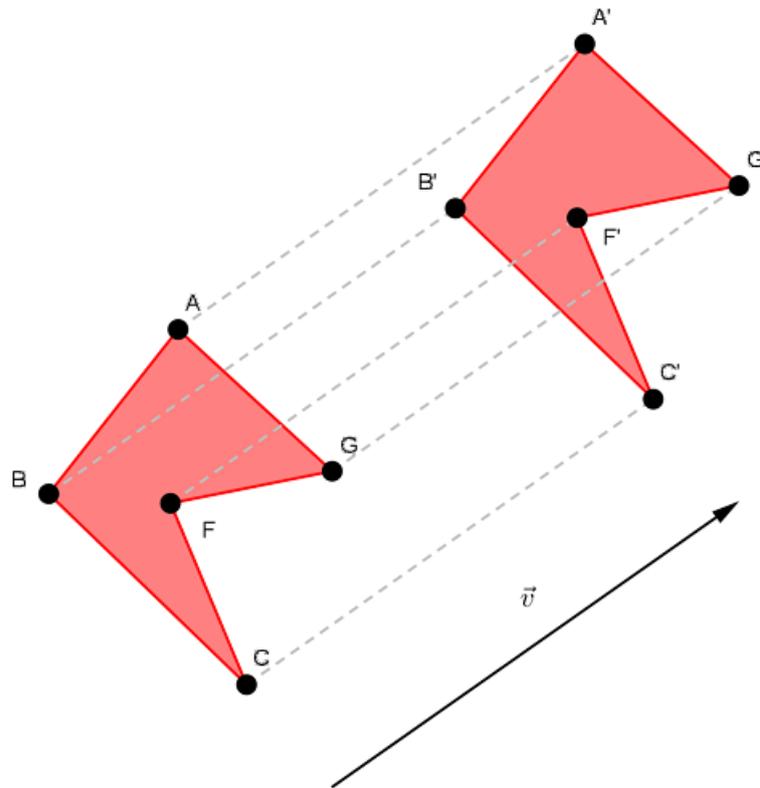
Fonte: M.C.Escher Gallery

Simetria de Translação

Uma figura geométrica possui uma simetria de translação se todos os seus pontos podem ser deslocados paralelamente a uma direção fixa de maneira que a figura obtida seja idêntica à figura original.

Podemos caracterizar qualquer translação indicando o deslocamento total na direção horizontal, que chamaremos de x e o deslocamento total na direção vertical, que chamaremos de y . Estas grandezas determinam um segmento orientado de reta chamado vetor de translação. Assim, dado um ponto A pertencente ao plano, se \vec{v} é o vetor (x, y) , a translação $\tau_{\vec{v}}$ determinada pelo vetor \vec{v} , é a transformação que leva cada ponto $A = (a, b)$ do plano, no ponto $\tau_{\vec{v}}(A) = A' = (a + x, b + y)$. O efeito geométrico sobre uma figura qualquer no plano pode ser interpretado como um deslocamento da figura na direção determinada pelo vetor \vec{v} , tantas unidades quanto o comprimento de \vec{v} . Figura 21.

A translação, diferentemente da reflexão e da rotação, não possui ponto fixo e, assim como a rotação, preserva a orientação do plano.

Figura 21: Simetria de translação

Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

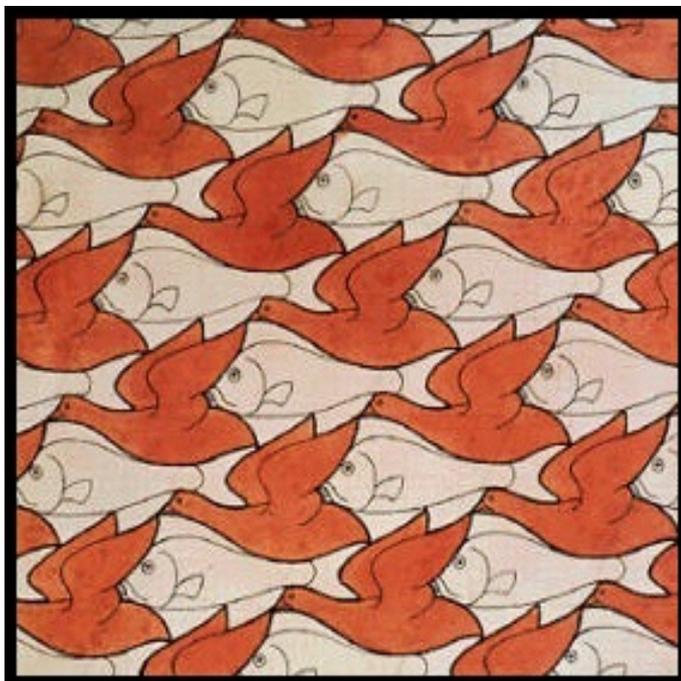
Como dito anteriormente, Escher se encantou com a simetria dos painéis decorativos de Alhambra, onde a técnica de tesselação foi amplamente desenvolvida pelos mouros. Esta técnica consiste em cobrir uma determinada superfície com um único padrão, sem deixar espaço ou sobrepor, fazendo com que os padrões sejam repetidos continuamente de forma a cobrir totalmente a superfície. As translações são com certeza as simetrias mais utilizadas por Escher pois estão presentes em todas as tesselações. Podemos observar este tipo de simetria nas Figuras 22 e 23.

Figura 22: Peixe e Barco, 1948



Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 23: Pássaro e Peixe, 1938



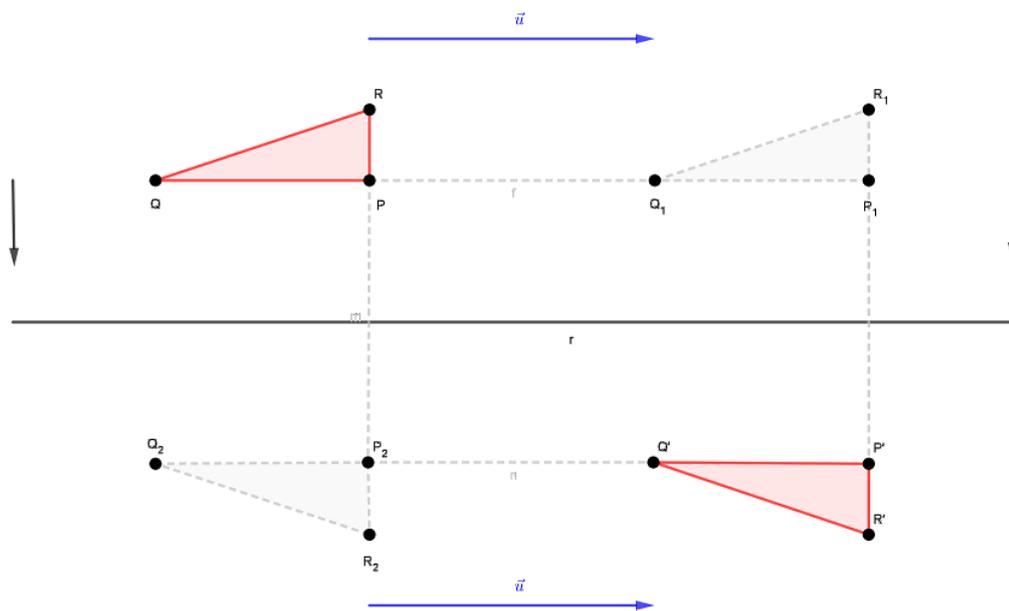
Fonte: M.C.Escher Gallery

Simetria de Reflexão com Deslizamento

Uma figura geométrica possui uma simetria de reflexão com deslizamento se possuir duas simetrias: de translação e de reflexão através de um eixo paralelo à direção de translação.

Esta simetria não possui pontos fixos e inverte a orientação do plano. Figura 24.

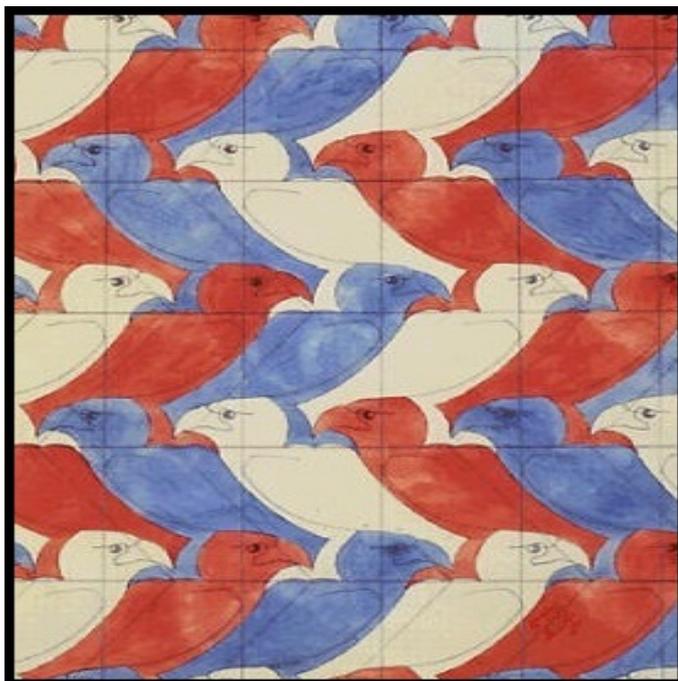
Figura 24: Reflexão com deslizamento



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Escher representou muito bem este tipo de simetria em sua obra "Águia", Figura 25, onde podemos observar a composição das duas simetrias (reflexão e translação) em cada uma das três águias de cores diferentes.

Figura 25: Águia, 1938



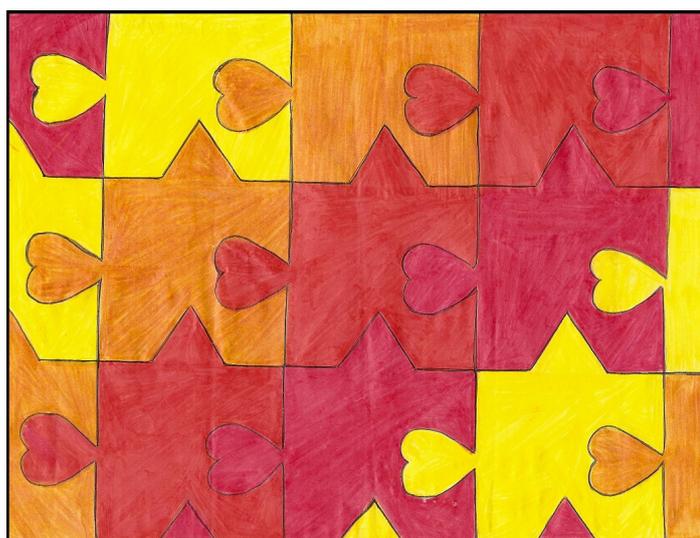
Fonte: M.C.Escher Gallery

Em resumo, utilizando os critérios de número de pontos fixos e preservação da orientação do plano é possível perceber que cada uma das simetrias apresentam um padrão único de acordo com a tabela abaixo.

Tipos de Simetrias	Pontos Fixos	Orientação do Plano
Reflexão	Infinitos	Inverte
Rotação	Um	Preserva
Translação	Nenhum	Preserva
Reflexão com Deslizamento	Nenhum	Inverte

Alguns padrões simétricos utilizam apenas uma dessas simetrias, outros uma combinação de duas ou mais delas, Escher através do estudo sistemático e da experimentação conseguiu identificar os 17 tipos de simetrias diferentes, passando assim a reproduzir essas simetrias em grande parte de suas obras.

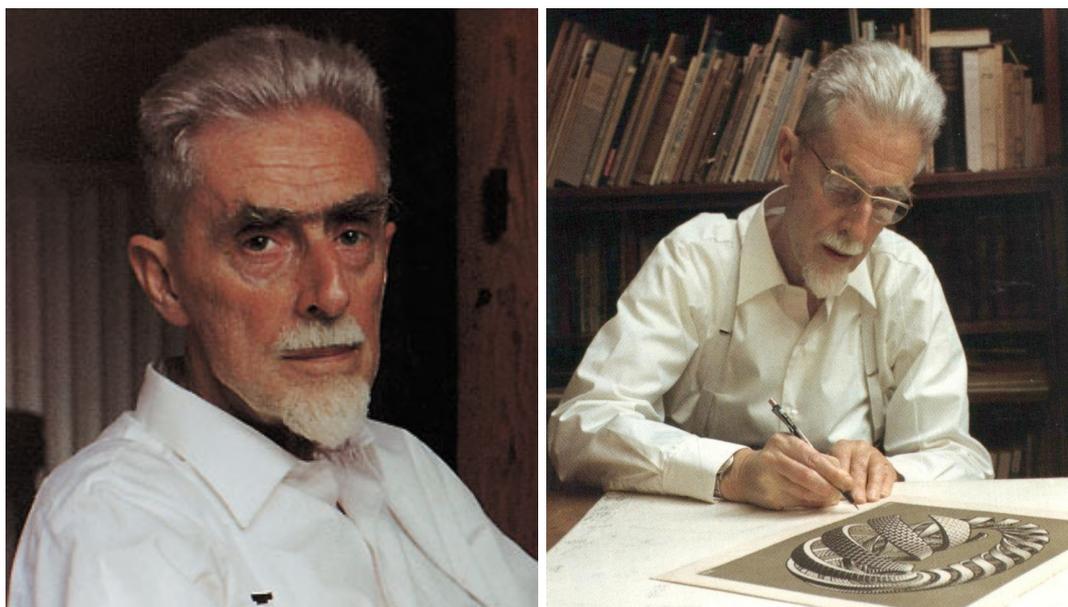
ESCHER



Trabalho realizado pela aluna A.J.

2.1 UM POUCO SOBRE ESCHER

Maurits Cornelis Escher nasceu em Leeuwarden na Holanda em 1898, faleceu em 1970 e dedicou toda a sua vida às artes gráficas. Suas notas na escola não eram boas e para ele a escola era um martírio, exceto as aulas de desenho. Possuía um talento nato para as artes e na fase adulta resolveu cursar arquitetura e como não se sentia realizado, resolveu abandonar o curso e passou a dedicar-se unicamente às artes gráficas. Casou em 1924 com Jetta Umiker, que também desenhava e pintava, e permaneceram na Itália por 11 anos, período onde as belas paisagens lhes serviam de inspiração para suas obras, até que foram obrigados a sair devido a crise política que assolava o país. Posteriormente, passou pela Suíça, Bélgica e retornou à Holanda até a sua morte.

Figura 26: Maurits Cornelis Escher

Fonte: [6]

Inicialmente Escher não era bem visto pelos críticos de arte pois não sabiam como classificar suas obras e como não o consideravam um artista, acharam por bem ignorá-lo. Escher não se intimidou e continuou realizando trabalhos que hoje são mundialmente conhecidos. Pela riqueza de detalhes suas obras ganharam a simpatia de cientistas, especialmente dos matemáticos.

Antes de 1937, Escher esboçava e pintava tudo que achava bonito, utilizando variadas técnicas em madeira e litografia. Suas obras sofreram uma grande mudança após sua segunda visita ao Palácio de Alhambra, na Espanha, onde esteve por duas vezes, a primeira em 1926 e a segunda dez anos depois. Ele fascinou-se com a técnica de tesselação utilizada nos ornamentos mouriscos que decoravam o chão, as paredes e o teto do palácio, Figura 27.

Juntamente com sua esposa copiou-os incessantemente e mais tarde copiando e esboçando-os conseguiu identificar 17 grupos de simetrias diferentes, ou seja, os grupos cristalográficos e que também são conhecidos como os 17 tipos de papéis de parede. Desde então, a paixão por tesselações, também co-

Figura 27: Mosaicos internos do Palácio de Alhambra



Fonte: [1]

nhecida como preenchimento de superfície passou a ocupar sua mente e suas obras buscando sempre regularidades e padrões.

As obras de Escher nos fascinam pelos detalhes, pelas perspectivas precisas, pelos belos padrões geométricos e principalmente por seus mundos impossíveis onde a realidade se mistura a fantasia. Toda sua obra demonstra extraordinária manipulação do espaço pela ótica de um artista genial.

Suas obras possuem variados temas e diversas fases. Os principais são:

1. Natureza
2. Ambiguidade
3. Reflexos
4. O Infinito
5. Construções Impossíveis
6. Tesselações e Metamorfozes

Conheceremos um pouco de cada fase deste artista, porém somente nos deteremos nas Tesselações e como podemos utilizá-las para uma melhor aprendizagem das isometrias. A apresentação dos demais temas se dará de forma rápida, onde poderemos melhor compreender sua habilidade, percepção e senso geométrico, tornando-o um verdadeiro gênio da imaginação lúdica.

2.2 ALGUMAS OBRAS E RESPECTIVAS FASES

Natureza

Nas suas primeiras fases, Escher se dedicava a transmitir suas ideias pessoais sobre paisagens e locais de que apreciava pois estava morando ainda na Itália, lugar que admirava e muito o inspirou. Costumava dizer que as obras desta fase eram "exercícios de dedos", sempre fazia vários esboços até chegar a imagem pretendida e por ainda ser um artista desconhecido, não conseguia sobreviver de suas obras. As Figuras 28 e 29 são alguns exemplos desta fase.

Figura 28: Castroalva, litografia, 1930



Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 29: Palmeira, entalhe em madeira, 1933

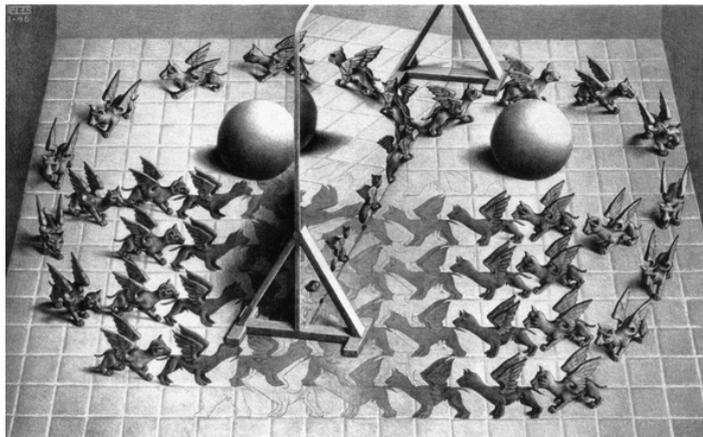


Fonte: M.C.Escher Gallery

Ambiguidade

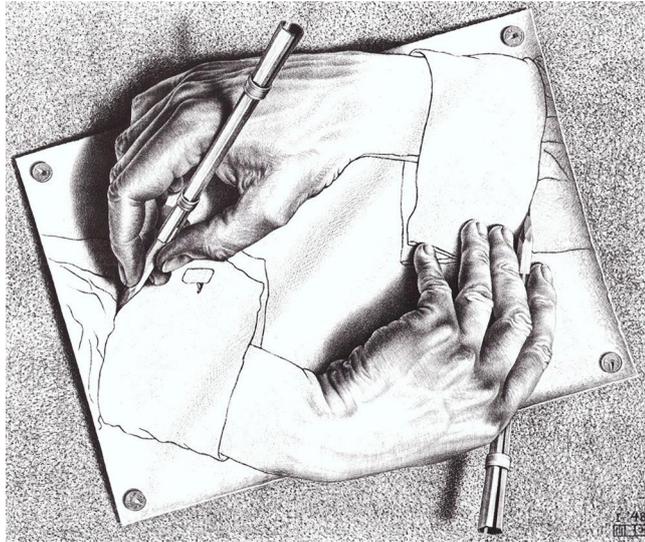
O próprio significado da palavra ambiguidade, "qualidade daquilo que possui ou pode possuir diferentes sentidos", retrata o sentido de muitas de suas obras e é um dos temas que mais despertam interesses em seus admiradores, pois nos faz olhar repetidamente para a obra afim de que possamos melhor compreendê-la. Escher criava essas obras com muita maestria. As litografias representadas pelas Figuras 30, 31 e 32 são bons exemplos desta fase.

Figura 30: Espelho Mágico, litografia, 1946



Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 31: Desenhando-se, litografia, 1948



Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 32: Répteis, litografia, 1943



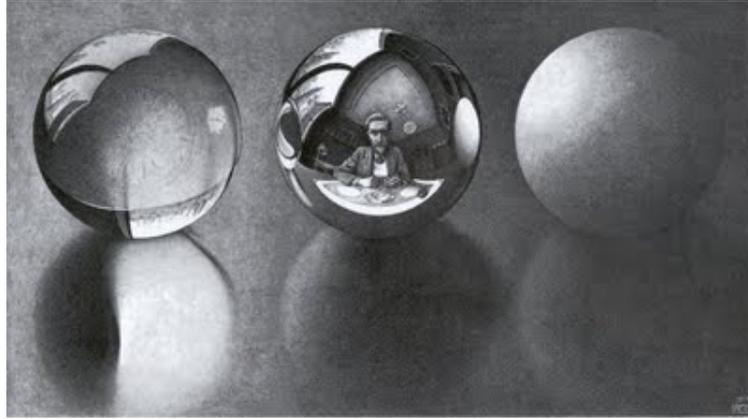
Fonte: M.C.Escher Gallery

Reflexos

Escher adorava brincar em suas obras com espelhos e imagens espelhadas. Os explorou de variadas maneiras e criou alguns auto-retratos que envolviam espe-

lhos convexos, no qual eram refletidos tudo que estava a sua volta, induzindo-nos a perceber que a imagem não poderia ser real. Esta interessante fase pode ser observada nas Figuras 33 e 34 .

Figura 33: Três Esferas II, litografia, 1946



Fonte: M.C. Escher Gallery

Figura 34: Mão Com Esfera Refleitora, litografia, 1935



Fonte: M.C. Escher Gallery

O Infinito

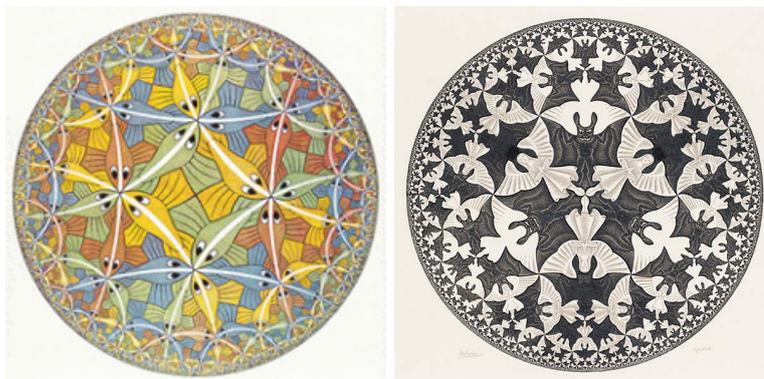
Escher buscou uma forma de transmitir o infinito, de ir além da perspectiva e criar o espaço infinito na limitação do papel bidimensional. Sua primeira tentativa foi a obra *Cada vez Menor*, Figura 35, onde as figuras partem das bordas em direção ao centro e vão se tornando cada vez menores dando-nos a sensação do infinito. Posteriormente criou a série *Limites Circulares*, onde realizou o trabalho oposto, as figuras partem do centro e vão diminuindo de tamanho quando se aproximam das bordas, dando-nos novamente a sensação de infinidade, Figura 36. A ideia de tesselação também está presente nestas obras.

Figura 35: Cada Vez Menor, entalhe em madeira, 1956



Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 36: Limite Circular III e IV, xilogravuras, 1959 e 1960



Fonte: M.C.Escher Gallery

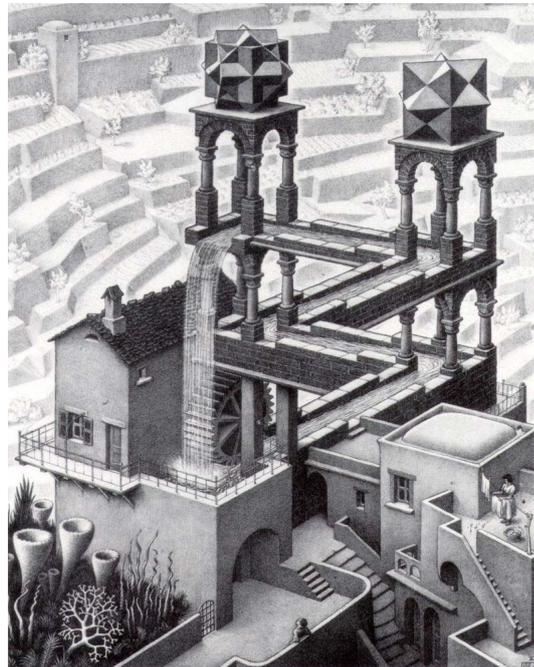
Construções Impossíveis

Ao criar estas obras Escher utilizava-se de fantasia, onde partes da obra se constituíam perfeitas, mas o conjunto não. Escadas que descem e sobem, conceitos de interno e externo, alto e baixo, tudo para que despertasse no observador mais atento um clima de dualidade, impossibilidade e principalmente encantamento. Como se o observador estivesse participando de um jogo, e de acordo com [7], Escher costumava dizer:

Tal jogo só pode ser compreendido e jogado por aqueles que estão dispostos a penetrar a superfície, por aqueles que concordem em usar o cérebro, como na resolução de um enigma. Assim, essa não é uma questão para os sentidos, mas uma questão cerebral. Profundidade não é de todo necessária, mas sim um tipo de humor e autoironia, ao menos para a pessoa que faz as representações.

Escher provou assim o quanto se divertia realizando suas obras. Alguns exemplos desta fase podem ser observados nas Figuras 37 e 38.

Figura 37: Queda D'água, litografia, 1961



Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 38: Em Cima e Embaixo, litografia, 1947



Fonte: M.C.Escher Gallery

Tesselações e Metamorfoses

Os mouros dominavam com perfeição as técnicas de tesselação, onde nunca haviam espaços em branco ou figuras sobrepostas. Escher os admirava e aprendeu muito com eles, porém lhe era difícil compreender que devido a religião muçulmana, os artistas mouros não podiam utilizar-se de figuras que representassem seres vivos, somente motivos geométricos

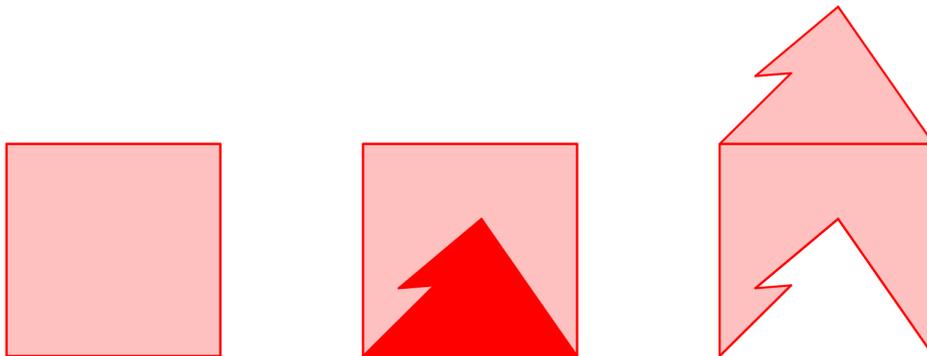
Escher se aproximou muito da matemática através de seus ensaios, quando observou que só era possível utilizar nas tesselações alguns tipos de polígonos, aqueles onde a soma dos vértices formava 360° .

A tesselação também conhecida como divisão regular de superfície foi um tema que muito fascinava e preocupava Escher, escreveu muito sobre o assunto e se aproximou cada vez mais das leis matemáticas, de acordo com [7], Escher confessou:

Posso alegrar-me, com boa consciência, com esta perfeição e testemunhá-la, pois não fui eu que a inventei ou mesmo até a descobri. As leis matemáticas não são nenhuma invenções ou criações humanas. Elas são, elas existem completamente independentes da mente humana. A divisão de superfícies é a fonte mais rica de inspiração de onde eu alguma vez bebi e ela ainda não está seca.

Esta técnica desenvolvida por Escher e inspirada nos mouros, consistia em retirar uma fração da parte interna de um lado do polígono escolhido e fixá-la na parte externa do outro lado do polígono, formando assim uma nova figura, que quando reproduzida várias vezes cobria totalmente a superfície do plano encaixando-se perfeitamente. Esta técnica também é conhecida como técnica da dentada, onde é utilizado como padrão geométrico um único tipo de figura. No exemplo da Figura 39 a figura inicial utilizada foi um quadrado.

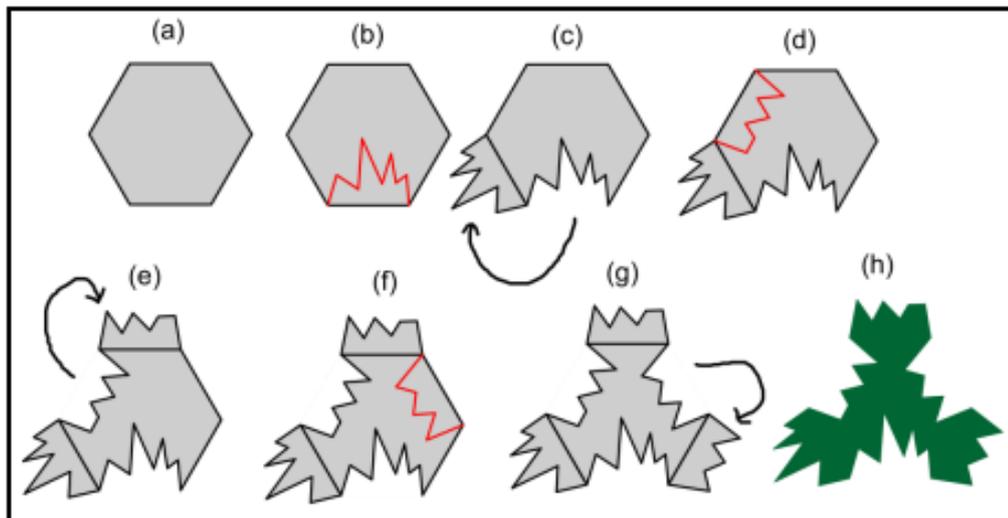
Figura 39: Recorte para pavimentação



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

A área do polígono inicial permanece a mesma da figura obtida ao final dos recortes, pois cada parte retirada é encaixada na própria figura, não alterando assim sua área, Figura 40.

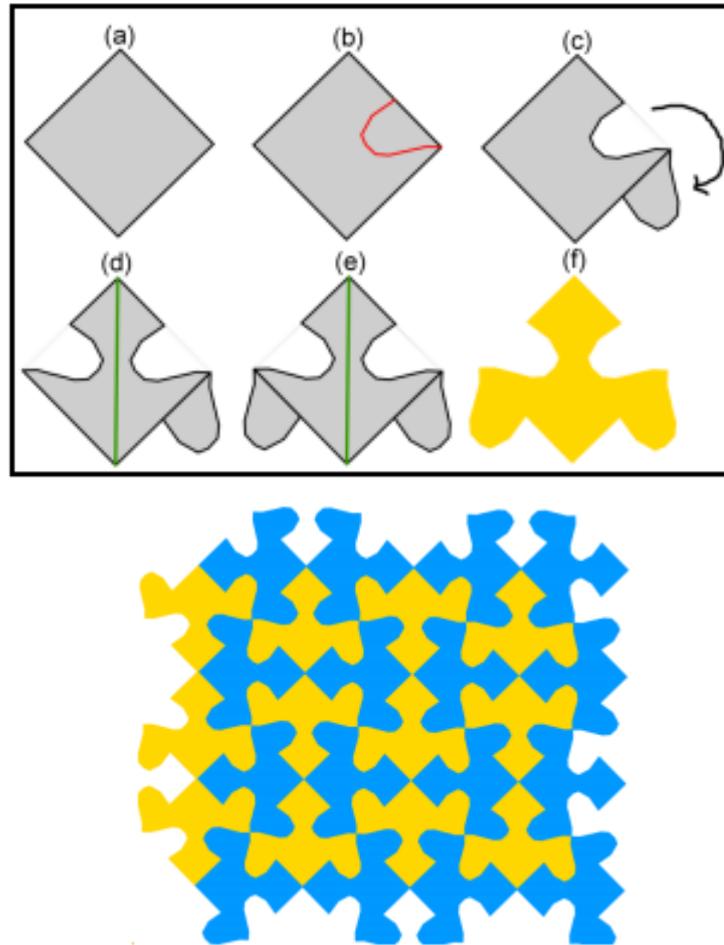
Figura 40: Técnica de pavimentação a partir de um hexágono



Fonte: [20]

Este processo pode ser repetido quantas vezes forem necessárias até chegarmos a figura almejada, Figura 41.

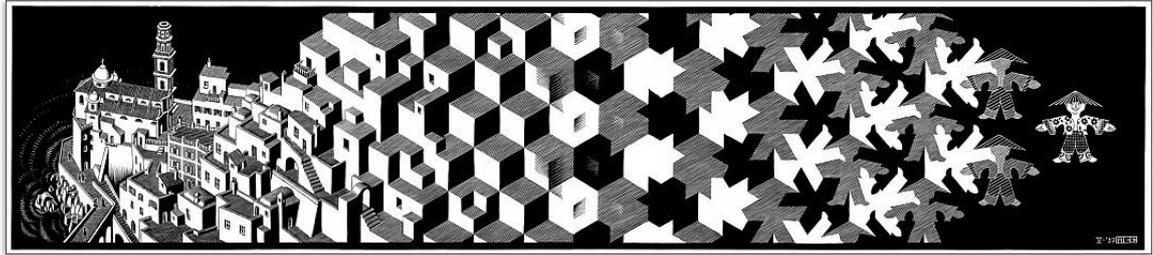
Figura 41: Técnica de pavimentação a partir de um quadrado



Fonte: [20]

Escher levou anos para dominar esta técnica e utilizava 6 polígonos diferentes para iniciar sua tesselação, quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos, triângulos equiláteros e hexágonos regulares. Passou a dar vida aos polígonos desenhando dentro de cada um deles, peixes, pássaros, cavalos e outras animais. Através do jogo de cores e sombras, criava pavimentos que representavam transformações e chamou-os de Metamorfose, onde uma figura ia gradativamente se transformando em outra. A princípio utiliza-se somente das cores preto e branco e seus respectivos degrados. Na criação de sua primeira metamorfose, chamada "Metamorfose I", Figura 42, se preocupou somente em representar as fases de uma transformação.

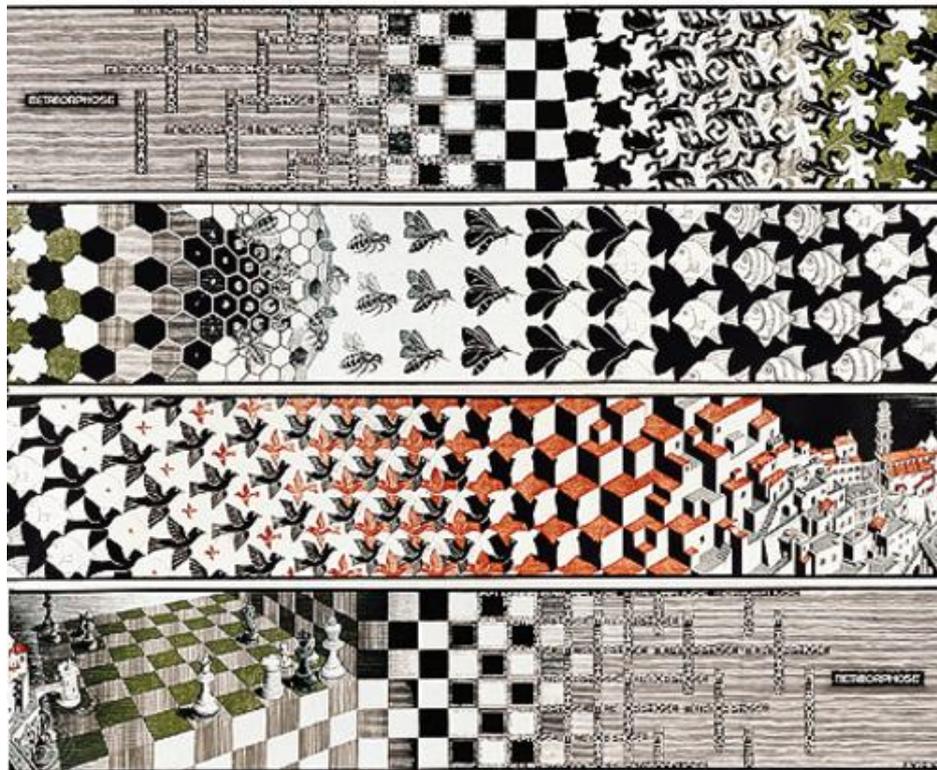
Figura 42: Metamorfose I, xilogravura, 1937



Fonte: M.C.Escher Gallery

Na criação do "Metamorfose II", Figura 43, representou toda a grandeza de uma transformação partindo e chegando no mesmo motivo geométrico. Levou meses para concluí-la pois possuía 4 metros de comprimento e está representada em quatro partes para melhor visualização dos detalhes da obra.

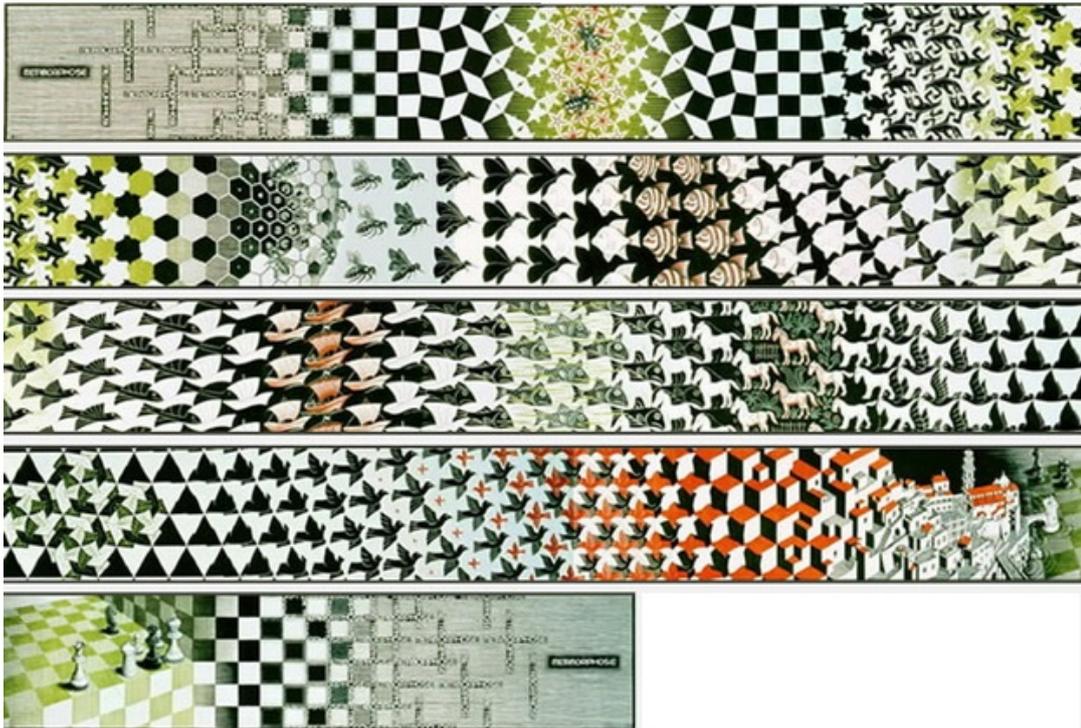
Figura 43: Metamorfose II, xilogravura, 1939-1940



Fonte: M.C.Escher Gallery

Seu terceiro trabalho sobre metamorfoses, "Metamorfose III", Figura 44, foi uma complementação do trabalho anterior e o realizou 37 anos depois. Esse painel de xilogravura possui 29 matrizes diferentes e seu comprimento total é de 7 metros. É sua mais longa sequência de metamorfoses e também está representada em partes para melhor visualização.

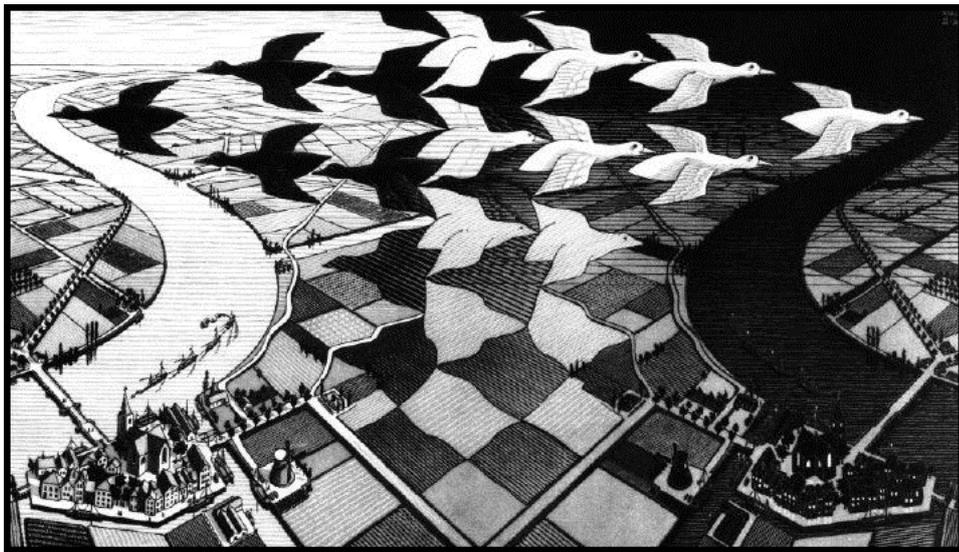
Figura 44: Metamorfose III, xilogravura, 1967-1968



Fonte: M.C.Escher Gallery

Sua gravura mais famosa até hoje é "Dia e Noite", Figura 45, e utilizou todas as técnicas de tesselação e de metamorfoses de que tinha conhecimento. Os pássaros brancos e escuros nunca são vistos simultaneamente, servem de fundo uns dos outros.

Figura 45: Dia e Noite, xilogravura, 1939



Fonte: M.C.Escher Gallery

A princípio ele somente duplicava as figuras, mas passou a inverter, girar e refletir formando novos padrões. Abaixo podemos admirar algumas de suas obras onde as técnicas de tesselação estão presentes.

Figura 46: Lagarto, pintura, 1942



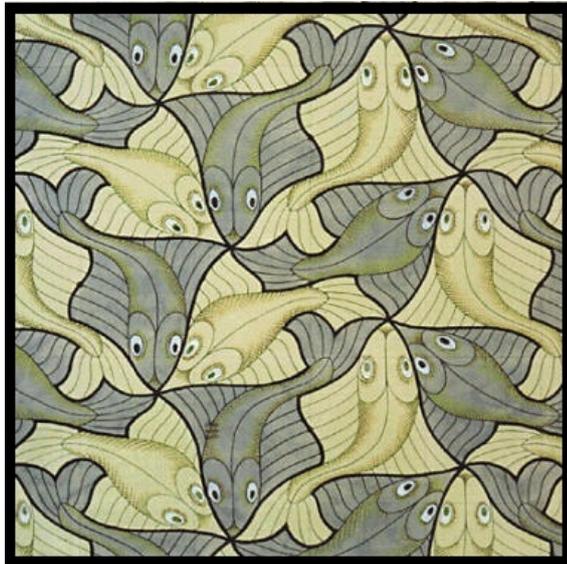
Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 47: Peixe, aquarela, 1942



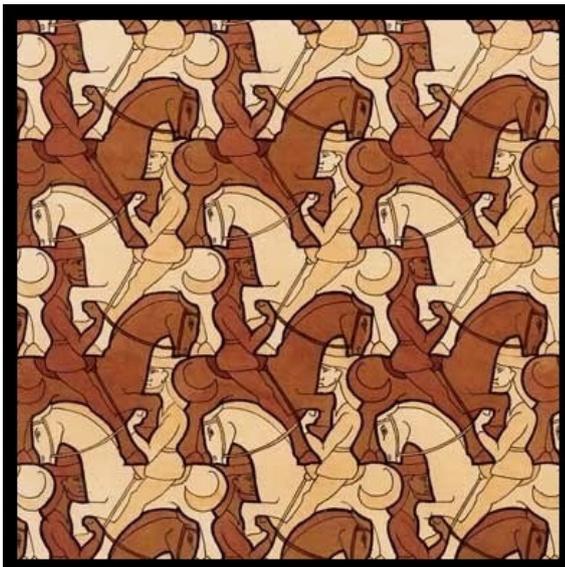
Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 48: Dois Peixes, aquarela, 1941



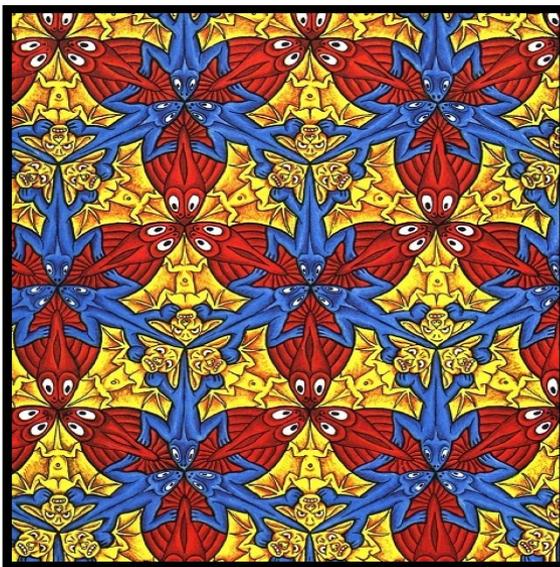
Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 49: Cavaleiros, aquarela, 1946



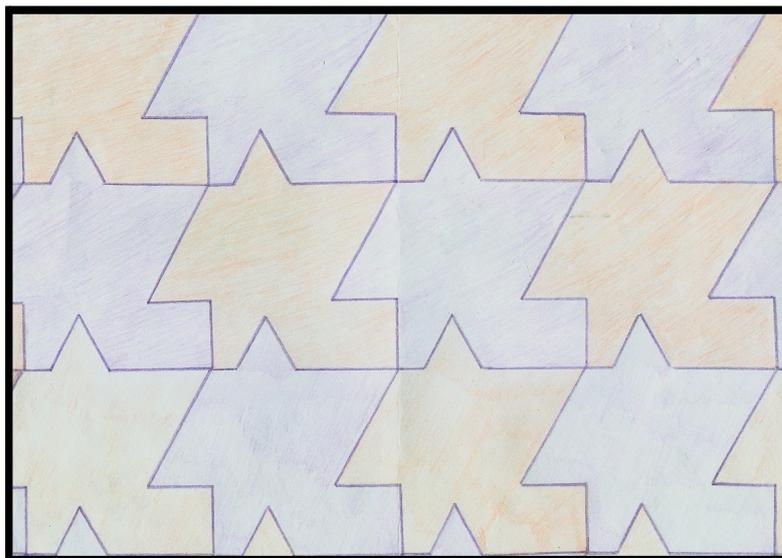
Fonte: M.C.Escher Gallery

Figura 50: Lagarto, Peixe e Morcego, aquarela, 1952



Fonte: M.C.Escher Gallery

GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES



Trabalho realizado pelo aluno L.R.

3.1 INTRODUÇÃO

Ao observar os padrões e simetrias das figuras nos deparamos com conceitos informais da estrutura de grupo. Estes conceitos são fundamentais para o estudo das simetrias.

O estudo das transformações geométricas e da simetria estão relacionadas a estruturas algébricas chamadas grupos. A classificação destes grupos foram desenvolvidas pelos matemáticos Marius Sophus Lie (1842-1899) e Félix Klein (1849-1925) que em 1870 decidiram concentrar seus estudos em formalizar uma teoria para o estudo dos grupos contínuos de transformações, cujas propriedades dos entes geométricos permaneciam invariantes, independente do conjunto das transformações aplicadas sobre ele.

No mesmo ano, Lie formulou a teoria dos grupos contínuos de transformações geométricas relacionado-os com os sistemas algébricos.

Em 1872, Felix Klein tornou-se professor da Universidade de Erlangen com apenas 23 anos de idade, e já na aula inaugural, apresentou seu programa de modelos para compreensão das diferentes geometrias, unificando-as através da noção de grupos de transformações. Esse programa ficou conhecido como *Programa de Erlangen* e teve grande impacto em todas as áreas da Matemática e da Física. Neste programa, Klein apresenta uma nova estruturação para a geometria fundamentada nas teorias de Lie para os grupos contínuos de transformações, utilizando assim as propriedades das figuras que são preservadas para certo grupo de transformações, permitindo não só classificar as geometrias como também traduzir problemas geométricos em linguagem algébrica e resolvê-los através da teoria dos invariantes.

De acordo com [21], o termo *transformação* foi originalmente introduzido pelo matemático Sophus Lie (1842-1899) basicamente como sinônimo de uma função. Em Álgebra Linear, chamam-se transformações às aplicações de um espaço vetorial em outro, sendo de especial interesse as chamadas transformações lineares. Em Análise e Topologia interessam especialmente as transformações contínuas. Em geral, cada disciplina interessa-se especialmente por certos tipos de transformações, aquelas que preservam as propriedades ou relações consideradas mais importantes para a disciplina em questão.

O foco do nosso estudo é o conjunto das transformações geométricas que preservam distâncias, ou seja, o subconjunto das isometrias.

Ao final deste Capítulo provaremos que o conjunto das transformações geométricas possui a estrutura de um grupo.

Definiremos o conceito de grupo e suas propriedades de acordo com os autores [8], [21] e [24]. Estas propriedades serão utilizadas no Capítulo 4 para a classificação das diferentes isometrias.

3.2 GRUPOS

Consideremos uma estrutura da forma $(G, *)$, sendo G um conjunto não vazio dotado de uma operação binária $*$ que associa a cada par ordenado $(a, b) \in G \times G$ um elemento $a * b \in G$.

Representamos uma operação binária sobre G da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow a * b \end{aligned}$$

Observe que $a * b$ (lê-se: a estrela b) é uma outra forma de indicar a função $*(a, b)$, e que uma operação binária combina dois elementos. Quando existe uma operação $*$ definida sobre G , seja ela binária ou não, dizemos que G é um conjunto munido da operação $*$. Em particular, se $*$ é operação binária sobre G , então dizemos que G é fechado com relação à operação $*$.

Exemplo 3.1. *Exemplos de operações binárias:*

1. Se $*$ é operação de adição, temos que a adição sobre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} é uma operação binária.
2. Se $*$ é operação de subtração, temos que a subtração sobre $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} é uma operação binária.
3. Se $*$ é operação de multiplicação, temos que a multiplicação sobre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} é uma operação binária.
4. Se $*$ é uma divisão, temos que a divisão sobre \mathbb{Q} ou \mathbb{R} é uma operação binária.
5. A adição de vetores em um espaço vetorial V é uma operação binária pois,

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longrightarrow u + v \end{aligned}$$

6. A função $*$ é potenciação de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ temos que a operação de potenciação dada por $a * b = a^b$ é uma operação binária sobre \mathbb{N}^* . No

entanto, esta mesma função sobre \mathbb{Z} e \mathbb{Q} não é uma função binária. De fato, sendo $(3, -1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $(5, \frac{1}{2}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ temos, respectivamente, que:

$$3 * (-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$5 * \frac{1}{2} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$$

Definição 3.2. Seja G um conjunto não vazio dotado de uma operação binária $*$. Dizemos que $(G, *)$ é um **grupo** ou que G é um grupo com respeito a operação $*$, se esta operação satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Associatividade:* $\forall a, b, c \in G$ temos que $(a * b) * c = a * (b * c)$,
2. *Elemento neutro:* $\exists e \in G$, tal que para todo $a \in G$, temos $a * e = e * a = a$, onde e é chamado elemento neutro para a operação $*$.
3. *Elemento inverso:* $\forall a \in G \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$, onde b é chamado o inverso de a e é denotado por $b = a^{-1}$.

Se ocorre $a * b = b * a$, para quaisquer elementos $a, b \in G$, dizemos que o grupo $(G, *)$ é comutativo ou abeliano (em homenagem ao matemático norueguês N.H. Abel - 1802-1829).

Se $a \in G$ e $m \in \mathbb{Z}$, a potência m -ésima de a de expoente m , é o elemento de G denotado por a^m e definido da seguinte maneira:

$$a^m = \begin{cases} e & \text{se } m = 0 \\ a^{m-1} * a & \text{se } m > 0 \\ (a^{-m})^{-1} & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

Exemplo 3.3. Grupo aditivo de classe de restos $(\mathbb{Z}_n, +)$, $n \geq 2$.

Lembremos que, para qualquer inteiro $n \geq 2$, o conjunto das classes de resto módulo n , ou seja, $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ é o conjunto quociente de \mathbb{Z} pela relação de equivalência definida pela congruência módulo n . A adição é definida por: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$. Esta operação é associativa e comutativa e, além disso, tem $\bar{0}$ como elemento neutro e $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_n, \exists \overline{n-a} \in \mathbb{Z}_n$ tal que $\bar{a} + \overline{n-a} = \overline{a+n-a} = \bar{n} = \bar{0}$. Portanto, $(\mathbb{Z}_n, +)$ é um grupo comutativo ou abeliano.

Exemplo 3.4. Considere o conjunto \mathbb{Z} com a operação usual de adição (+). Temos:

- $\forall a, b \in \mathbb{Z} \longrightarrow a + b \in \mathbb{Z};$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \longrightarrow a + (b + c) = (a + b) + c;$
- $\exists 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall a \in \mathbb{Z} \longrightarrow 0 + a = a;$
- $\forall a \in \mathbb{Z} \longrightarrow \exists -a \in \mathbb{Z} : (-a) + a = 0.$

Logo, $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo.

Exemplo 3.5. Considere o conjunto \mathbb{Q}^* com a operação usual de multiplicação(\cdot). Temos:

- $\forall a, b \in \mathbb{Q}^* \longrightarrow a \cdot b \in \mathbb{Q}^*;$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}^* \longrightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$
- $\exists 1 \in \mathbb{Q}^*$ tal que $\forall a \in \mathbb{Q}^* \longrightarrow 1 \cdot a = a;$
- $\forall a \in \mathbb{Q}^* \longrightarrow \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}^* : a \cdot \frac{1}{a} = 1.$

Logo, (\mathbb{Q}^*, \cdot) é grupo.

3.3 SUBGRUPOS

Definição 3.6. Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de G . Dizemos que H é um **subgrupo** de G se com a mesma operação binária de G os elementos de H formarem um grupo, isto é, quando as seguintes condições são satisfeitas:

- C_1 - Quaisquer $h_1, h_2 \in H$, temos $h_1 * h_2 \in H$.
- C_2 - Quaisquer $h_1, h_2, h_3 \in H$, temos $h_1 * (h_2 * h_3) = (h_1 * h_2) * h_3$.
- C_3 - Existe em H um elemento neutro e_H tal que $e_H * h = h * e_H = h$, qualquer que seja $h \in H$.
- C_4 - Para cada $h \in H$, existe $k \in H$ tal que $h * k = k * h = e_H$.

Ante a definição acima podemos tirar as seguintes conclusões:

1. A condição C_2 é sempre satisfeita pois, a igualdade $h_1 * (h_2 * h_3) = (h_1 * h_2) * h_3$ é válida para todos os elementos de G .
2. O elemento neutro e_H de H é necessariamente igual ao elemento neutro e de G . Tome $h \in H \subset G$. Como $h \in G$ então $e = h * h^{-1} = e_H$,
3. Dado $h \in H$, o inverso de h em H é necessariamente igual ao inverso de h em G . De fato, se k é o inverso de h em H , então $h * k = k * h = e_H$, logo $h * k = k * h = e$, pois $e_H = e$, e portanto k é o inverso de h em G , e denotamos por h^{-1} .

Teorema 3.7. *Seja G um grupo e seja H um subconjunto não vazio de G . Então H é um subgrupo de G se, e somente se, as duas condições seguintes estiverem satisfeitas:*

- (i) $\forall h_1, h_2 \in H$, temos $h_1 * h_2 \in H$.
- (ii) $\forall h \in H$, temos $h^{-1} \in H$.

Demonstração

Suponhamos que o subconjunto H satisfaça as condições I e II do Teorema acima, logo, em particular, está verificada a condição C_1 da definição 3.6. Basta mostrar que as condições C_2, C_3 e C_4 são verdadeiras.

- C_2 - Por hipótese, temos $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in G$, logo, esta igualdade também é verdadeira para todos os elementos $a, b, c \in H$.
- C_3 - Como $H \neq \emptyset$ temos que existe um elemento $a \in H$ então por (ii) existe $a^{-1} \in H$, ou seja, $e_H \in H$ e é imediato que $a * e_H = a$, $\forall a \in H$.
- C_4 - É verdadeiro em virtude da condição (ii).

Reciprocamente, suponhamos que H seja um subgrupo de G . Conforme a condição C_1 da definição 3.6, H é fechado em relação à operação de G , logo, está satisfeita a condição I do Teorema. De acordo com a condição C_3 , existe em H o elemento e_H , portanto $H \neq \emptyset$. Para verificarmos a condição II temos que $e_H * e_H = e_H = e_H * e$, logo, em virtude da lei do cancelamento aplicada a elementos de G temos que $e_H = e$. Se a é um elemento qualquer de H , então, de acordo com o axioma C_4 , existe $a' \in H$ tal que $a * a' = e_H = e$, esta igualdade

mostra que a' também é o inverso de a em G . Portanto, conforme a unicidade do inverso, temos $a' = a^{-1}$ e então $a^{-1} \in H$. ■.

Se $H \subset G$, $H \neq G$, então H é um subgrupo próprio de G . Observe que e e G são sempre subgrupos de G , chamados de subgrupos triviais.

Definição 3.8. A ordem de um grupo finito G é definida como sendo o número de elementos em G e é denotada por $|G|$.

Exemplo 3.9. O grupo $G = \{-1, 1\}$, com a operação de multiplicação, é um grupo finito de ordem 2.

Exemplo 3.10. Como \mathbb{Z} é infinito, então o grupo $(\mathbb{Z}, +)$ possui ordem infinita.

Seja G um grupo. Dizemos que um elemento $a \in G$ possui ordem $n > 0$ se, e somente se, n é o menor inteiro tal que $a^n = e$. Se $a \in G$ possui ordem n , então denotamos por $|a| = n$.

Exemplo 3.11. Considere o grupo $(\mathbb{Z}_6, +)$, com operação de adição. O elemento $2 \in \mathbb{Z}_6$ possui ordem 3. Vejamos

$$\begin{aligned}\bar{2}^1 &= \bar{2} \\ \bar{2}^2 &= \bar{2} + \bar{2} = \bar{4} \\ \bar{2}^3 &= \bar{2} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{6} = \bar{0}\end{aligned}$$

logo, como 3 é o menor expoente inteiro do elemento 2 cujo resultado da potência é 0 (elemento neutro da adição), temos que a ordem do elemento 2 é 3.

Exemplo 3.12. Considere o grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$, com operação de adição. O elemento $1 \in \mathbb{Z}_4$ possui ordem 4. Vejamos

$$\begin{aligned}\bar{1}^1 &= \bar{1} \\ \bar{1}^2 &= \bar{1} + \bar{1} = \bar{2} \\ \bar{1}^3 &= \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{3} \\ \bar{1}^4 &= \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{4} = \bar{0}\end{aligned}$$

logo, como 4 é o menor expoente inteiro do elemento 1 cujo resultado da potência é 0 (elemento neutro da adição), temos que a ordem do elemento 1 é 4.

Exemplo 3.13. Considere o grupo (\mathbb{C}^*, \cdot) , com operação de multiplicação. Os elementos $-1, i \in \mathbb{C}^*$ possuem, respectivamente, ordens 2 e 4. Vejamos

$$\begin{aligned} (-1)^1 &= -1, & (-1)^2 &= (-1) \cdot (-1) = 1 \\ i^1 &= i, & i^2 &= -1, & i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i, & i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \end{aligned}$$

logo, como 2 e 4 são respectivamente, os menores expoentes inteiros que aplicados aos elementos -1 e i as potências resultam em 1 (elemento neutro da multiplicação), temos que a ordem do elemento -1 é 2 e a ordem do elemento i é 4.

Proposição 3.14. Seja $a \in G$, onde G é um grupo. Se $|a| = n$, então $a^m = e$ se, e somente se, $n|m$.

Demonstração:

(\Rightarrow) Seja $|a| = n$ e suponha que $a^m = e$. Pelo algoritmo da divisão de Euclides temos que existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$, tal que $m = qn + r$ e $0 \leq r < n$. Sendo assim temos:

$$a^m = e \Rightarrow a^{qn+r} = e \Rightarrow a^{qn} a^r = e \Rightarrow (a^n)^q a^r = e \Rightarrow a^r = e.$$

Como $|a| = n$, isto é, n é o menor inteiro tal que $a^n = e$, concluímos de $r < n$ e $a^r = e$ que a única possibilidade é termos $r = 0$. Consequentemente, $m = qn$ e, por definição, $n|m$.

(\Leftarrow) Por outro lado, se $n|m$, então $m = kn$ e $a^m = a^{kn} = (a^n)^k = e$. ■

Definição 3.15. Seja G um grupo e $a \in G$. Denomina-se **subgrupo gerado por a** o conjunto de todas as potências inteiras de a , isto é

$$\langle a \rangle = \{ \dots a^{-2}, a^{-1}, \underbrace{a^0}_e, a, a^2, \dots \}$$

O elemento a é o gerador do subgrupo.

Exemplo 3.16. Considere o grupo (\mathbb{R}^*, \cdot) para a operação de potenciação e $-2, -1 \in \mathbb{R}^*$. Assim temos:

$$\bullet \langle -2 \rangle = \{ (-2)^n | n \in \mathbb{Z} \} = \{ \dots, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, 4, -8, 16, \dots \}$$

$$\bullet \langle -1 \rangle = \{(-1)^n | n \in \mathbb{Z}\} = \{-1, 1\}.$$

Definição 3.17. Um grupo é chamado de **cíclico** se existe um elemento $a \in (G, *)$ tal que o conjunto G coincide com o subgrupo gerado pelo elemento a , ou seja,

$$G = \langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 3.18. Seja o grupo $(\mathbb{Z}_3, +)$, para a operação de soma. Então \mathbb{Z}_3 é um grupo cíclico gerado por 1 e 2, ou seja, $\mathbb{Z}_3 = \langle 1 \rangle = \langle 2 \rangle$. Vejamos,

$$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \text{ (classes de resto módulo 3)}$$

para $a = 0$, temos:

$$\bar{0}^1 = \bar{0}^2 = \bar{0}^3 = \bar{0}, \text{ logo } \langle 0 \rangle = \{\bar{0}\}$$

para $a = 1$, temos:

$$\bar{1}^1 = \bar{1} = \bar{1}$$

$$\bar{1}^2 = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$$

$$\bar{1}^3 = \bar{2} + \bar{1} = \bar{3} = \bar{0}, \text{ logo } \langle 1 \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

para $a = 2$, temos:

$$\bar{2}^1 = \bar{2}$$

$$\bar{2}^2 = \bar{2} + \bar{2} = \bar{4} = \bar{1}$$

$$\bar{2}^3 = \bar{1} + \bar{2} = \bar{3} = \bar{0}, \text{ logo } \langle 2 \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

Como $\mathbb{Z}_3 = \langle 1 \rangle = \langle 2 \rangle$, concluímos que \mathbb{Z}_3 é cíclico de geradores 1 e 2.

Exemplo 3.19. Seja o grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$, para a operação de soma. Então \mathbb{Z}_4 é um grupo cíclico gerado por 1 e 3, ou seja, $\mathbb{Z}_4 = \langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle$. Vejamos,

$$\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \text{ (classes de resto módulo 4)}$$

para $a = 0$, temos:

$$\bar{0}^1 = \bar{0}^2 = \bar{0}^3 = \bar{0}^4 = \bar{0}, \text{ logo } \langle 0 \rangle = \{\bar{0}\}$$

para $a = 1$, temos:

$$\bar{1}^1 = \bar{1} = \bar{1}$$

$$\bar{1}^2 = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$$

$$\begin{aligned}\bar{1}^3 &= \bar{2} + \bar{1} = \bar{3} \\ \bar{1}^4 &= \bar{3} + \bar{1} = \bar{4} = \bar{0}, \text{ logo } \langle 1 \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}\end{aligned}$$

para $a = 2$, temos:

$$\begin{aligned}\bar{2}^1 &= \bar{2} \\ \bar{2}^2 &= \bar{2} + \bar{2} = \bar{4} = \bar{0} \\ \bar{2}^3 &= \bar{0} + \bar{2} = \bar{2} \\ \bar{2}^4 &= \bar{2} + \bar{2} = \bar{4} = \bar{0}, \text{ logo } \langle 2 \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}\}\end{aligned}$$

para $a = 3$, temos

$$\begin{aligned}\bar{3}^1 &= \bar{3} \\ \bar{3}^2 &= \bar{3} + \bar{3} = \bar{6} = \bar{2} \\ \bar{3}^3 &= \bar{2} + \bar{3} = \bar{5} = \bar{1} \\ \bar{3}^4 &= \bar{1} + \bar{3} = \bar{4} = \bar{0}, \text{ logo } \langle 3 \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}\end{aligned}$$

Como $\mathbb{Z}_4 = \langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle$, concluímos que \mathbb{Z}_4 é cíclico de geradores 1 e 3.

3.4 GRUPO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Teorema 3.20. *O conjunto \mathcal{T} das transformações geométricas dotado da operação de produto (de composição) de funções é um grupo.*

Demonstração.

- A transformação identidade, é definida por $\iota(P) = P$ para todo ponto P . Se ι está no grupo das transformações \mathcal{T} , então \mathcal{T} possui a propriedade identidade.
- O produto de duas transformações é uma transformação, se e somente se este produto for uma bijeção. Sejam P, Q tais que $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)(P) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)(Q)$. Temos $(\lambda_2 \cdot \lambda_1)(P) = (\lambda_2 \cdot \lambda_1)(Q)$ e, portanto, $\lambda_2 \cdot (\lambda_1(P)) = \lambda_2 \cdot (\lambda_1(Q))$. Como λ_2 é injetora, pois é uma transformação, obtemos $\lambda_1(P) = \lambda_1(Q)$ e sendo λ_1 também injetora temos $P = Q$, ou seja, $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ é injetora. Agora para mostrar que $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ é sobrejetora, consideremos P um ponto qualquer no plano. Como λ_2 é sobrejetora, existe P' no plano tal que $\lambda_2(P') = P$. E, como λ_1 também é sobrejetora, existe P'' no plano

tal que $\lambda_1(P'') = P'$. Portanto, $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)(P''') = \lambda_2 \cdot (\lambda_1(P''')) = \lambda_2(P') = P$, o que implica que $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ é sobrejetora, logo $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ é uma bijeção.

- Como uma transformação λ é uma correspondência bijetiva de um grupo de pontos sobre si mesmo, podemos definir λ^{-1} também como uma transformação, tal que $\lambda^{-1}(P) = P'$ se e somente se, $P = \lambda(P')$. A transformação λ^{-1} é chamada de inversa da transformação λ , pois

$$\lambda \cdot \lambda^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \lambda = \iota$$

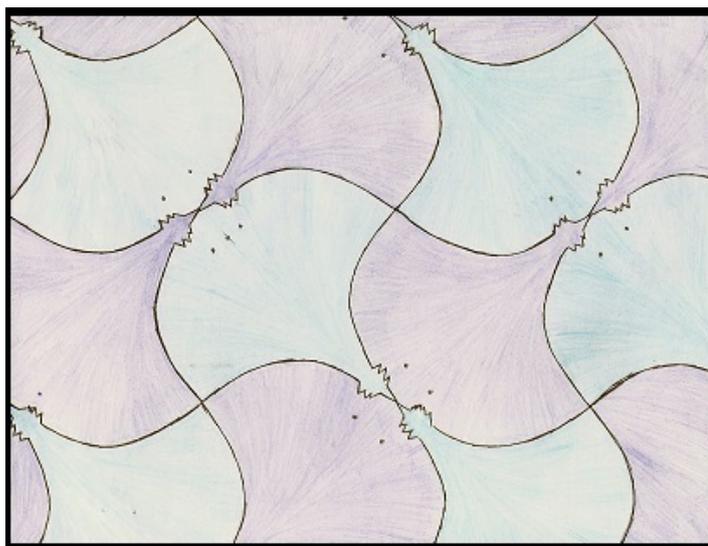
Como λ^{-1} e $\lambda \in \mathcal{T}$, então \mathcal{T} possui a propriedade inversa.

- O produto de transformações não é comutativo e se o plano π têm pelo menos três pontos, não é difícil encontrar duas transformações λ e ψ de π tais que $\lambda \psi \neq \psi \lambda$, quer dizer, o grupo de todas as transformações de π não é comutativo, mas isto não impede que existam algumas transformações λ, ψ que comutem, isto é, tais que $\lambda \psi = \psi \lambda$. Por exemplo, a identidade ι comuta com qualquer transformação.

Assim, o conjunto \mathcal{T} de todas as transformações de π , com a operação de produto de composição, forma um grupo (não abeliano). ■

As transformações geométricas que nos interessam neste trabalho, como vimos, são as reflexões, translações, rotações e reflexões deslizantes. Estas se caracterizam por preservar distâncias entre pontos e formam, como veremos, um subgrupo de \mathcal{T} : o subgrupo das isometrias do plano.

ISOMETRIAS



Trabalho realizado pelos alunos V.G.S. e L.H.L.

Para que possamos melhor compreender os padrões das tesselações de Escher é importante conhecermos as transformações geométricas que foram utilizadas, ou seja, as isometrias. Estas transformações preservam as distâncias entre pontos, assim cada segmento da figura obtida tem o mesmo tamanho do seu correspondente na figura original. De um modo geral, dizemos que duas figuras são congruentes se existe uma isometria que transforma uma das figuras na outra.

Neste Capítulo desenvolveremos um estudo mais aprofundado das Isometrias, suas propriedades, definição e os quatro tipos de isometrias possíveis: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante. No decorrer deste estudo apresentaremos a proposição que identifica a reflexão como unidade básica

das isometrias, afirmando que qualquer que seja a isometria no plano, esta poderá ser obtida pelo produto de, no máximo, três reflexões.

Para a composição deste capítulo utilizamos como referência os autores [2], [14], [15] e [21].

Adotaremos que o plano π é o plano \mathbb{R}^2 e que a distância entre dois pontos A e B , será dada por $d(A, B)$ sendo:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{onde } A = (x_1, y_1) \text{ e } B = (x_2, y_2)$$

4.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Definição 4.1. *Uma isometria no plano π é uma transformação geométrica $\phi : \pi \rightarrow \pi$ que preserva as distâncias entre os pontos, isto é, ϕ é uma isometria se para quaisquer pontos $A, B \in \pi$ tem-se:*

$$d(A, B) = d(A', B')$$

$$\text{onde } A' = \phi(A) \text{ e } B' = \phi(B).$$

Proposição 4.2. *A inversa de uma isometria também é uma isometria*

Demonstração. Dados dois pontos A e $B \in r$ tal que $A' = \phi(A)$ e $B' = \phi(B)$. Seja ϕ^{-1} a inversa da isometria ϕ tal que $\phi^{-1}(A') = A$ e $\phi^{-1}(B') = B$, pela definição 4.1 temos que $d(A, B) = d(A', B')$, pois ϕ é isometria. Como $d(A, B) = d(\phi^{-1}(A'), \phi^{-1}(B'))$ então $d(A', B') = d(\phi^{-1}(A'), \phi^{-1}(B'))$. Segue que ϕ^{-1} também é uma isometria. ■

Proposição 4.3. *O produto de duas isometrias também é uma isometria*

Demonstração. Sejam ϕ e ω isometrias, P e Q pontos do plano, então

- $\phi(P) = P'$, $\omega(P') = P''$ então $\phi\omega(P) = P''$

- $\phi(Q) = Q'$, $\omega(Q') = Q''$ então $\phi\omega(Q) = Q''$, devemos ter
- $d(\phi\omega(P), \phi\omega(Q)) = d(P'', Q'')$, para todo P e Q do plano. De fato,

$$d(\phi\omega(P), \phi\omega(Q)) = d(\omega(\phi(P)), \omega(\phi(Q))) = d(\omega(P'), \omega(Q')) = d(P'', Q'') = d(P, Q)$$

Como ϕ e ω são isometrias, então

$$d(P, Q) = d(P', Q') = d(P'', Q'').$$

Segue que o produto de isometrias também é uma isometria. ■

Teorema 4.4. Propriedade das Isometrias. *Se ϕ for isometria, então obedecerá as seguintes propriedades: c*

- (a) ϕ preserva colinearidade, logo ϕ transforma retas em retas;
- (b) ϕ preserva ângulos.

Demonstração.

- (a) ϕ preserva colinearidade, logo ϕ transforma retas em retas. Dada uma reta r e dois pontos distintos A e $C \in r$ e os pontos A' e $C' \in r'$. Seja $B \in r$, um dos três pontos A, C, B está entre os outros dois. Suponha que B esteja entre A e C , isto é $B \in \overline{AC}$. Os demais casos são tratados analogamente. Assim, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ e, portanto,

$$\overline{A'C'} = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

portanto $B' \in \overline{A'C'}$. Assim os pontos A', B' e C' são colineares. Isto mostra que $B \in r$, logo $\phi(r) = r'$.

- (b) ϕ preserva ângulos. Dado um ângulo $A\hat{B}C$, considere $A' = \phi(A)$, $B' = \phi(B)$ e $C' = \phi(C)$. Como $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. Logo, pelo caso LLL os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes e, portanto, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A'\hat{B}'C'$ também serão congruentes. ■.

Vale destacar que a bijetividade de uma isometria, que aqui assumimos na própria definição, é consequência da preservação da distância. Temos, de fato, a seguinte

Proposição 4.5. Se $\phi : \pi \rightarrow \pi'$ é uma função que preserva distâncias entre pontos, então ϕ é uma bijeção, isto é, ϕ é uma isometria.

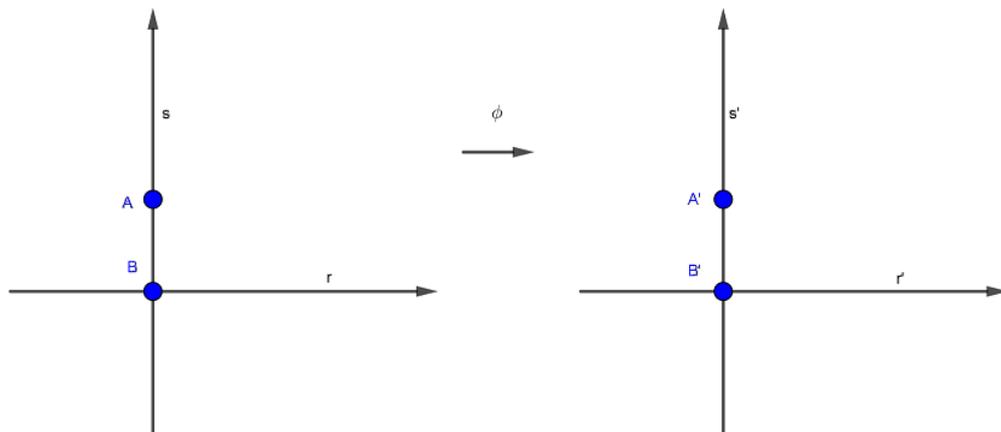
Demonstração.

Primeiramente provaremos a injetividade. Dados dois pontos A e $B \in \pi$ tal que $A' = \phi(A)$ e $B' = \phi(B)$, então

$$A \neq B \implies d(A, B) > 0 \implies d(A', B') > 0 \implies A' \neq B'$$

Logo ϕ é injetiva, falta provar a sobrejetividade. Considere um ponto arbitrário $A' \in \pi'$ e procuramos determinar um ponto $A \in \pi$ tal que $\phi(A) = A'$. Para isso, tracemos uma reta qualquer r em π . A imagem de r por ϕ é uma reta r' . Se $A' \in r'$ então, por definição de imagem, existe um ponto $A \in r$ tal que $\phi(A) = A'$. Caso contrário, seja s' a reta perpendicular baixada de A' sobre r' (figura 51). Denotemos por B' a intersecção de r' e s' . Como $B' \in r'$, existe $B \in r$ tal que $\phi(B) = B'$. Seja s a reta perpendicular a r passando por B . A imagem de s pela isometria ϕ é a reta perpendicular a r' e contém B' , logo $\phi(s) = s'$. Como $A' \in s'$, existe $A \in s$ tal que $\phi(A) = A'$. Portanto ϕ é uma bijeção. ■.

Figura 51: Toda isometria ϕ é uma bijeção



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

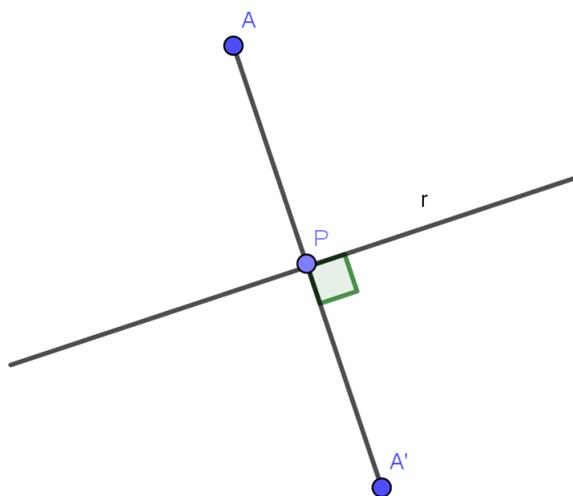
4.2 TIPOS DE ISOMETRIAS

4.2.1 Reflexão

Definição 4.6. Dada uma reta r , a **reflexão em relação a uma reta r** será dada pela função $\varphi_r : \pi \rightarrow \pi$, tal que $\varphi_r(A) = A$ para todo $A \in r$ e para $A \notin r$, $\varphi_r(A) = A'$ tal que a mediatriz do segmento AA' é a reta r .

Seja P o ponto médio de $\overline{AA'}$. P será o pé da perpendicular baixada de A sobre r . Figura 52.

Figura 52: Reflexão de um ponto em relação a uma reta



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Teorema 4.7. Toda Reflexão em relação a uma reta é uma isometria.

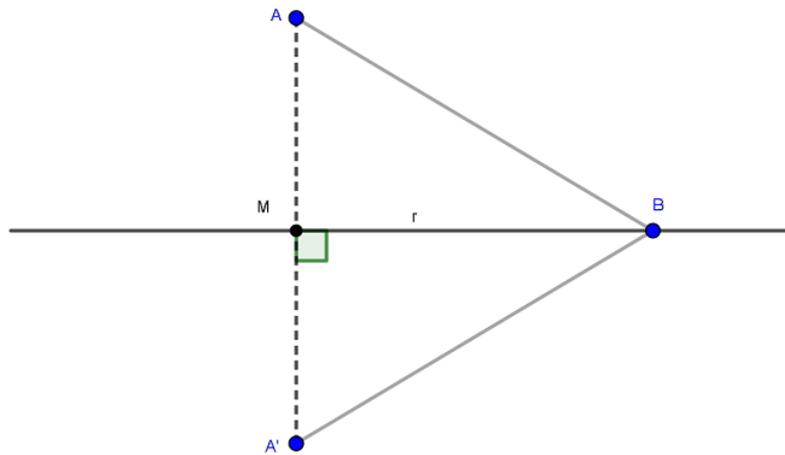
Demonstração. Para provar que φ é uma isometria, consideramos quatro casos:

- Caso 1: A e B pertencentes a r . Então $A' = A$ e $B' = B$, logo $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (Caso trivial de identidade).

Figura 53: Reflexão em r com A e $B \in r$ 

Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

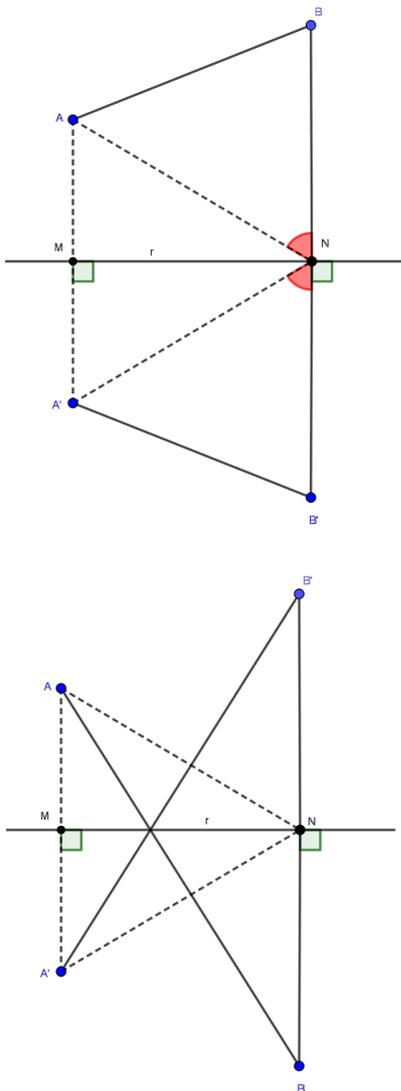
- Caso 2: Se A não pertencente a r e B pertencente a r . Desse modo temos que $\varphi_r(A) = A'$ e $\varphi_r(B) = B' = B$, como r é a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$, então $\overline{AB} = \overline{A'B'} = \overline{A'B}$.

Figura 54: Reflexão em r com A não pertencente a r e B pertencente a r 

Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

- Caso 3: Se A e B não pertencem a r e se \overline{AB} não é perpendicular a r , então temos os pontos M e N pertencentes a r que são os pontos médios de $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$, respectivamente. Utilizando o critério LAL os triângulos $\triangle ANB$ e $\triangle A'NB'$ são congruentes, pois $\overline{AN} = \overline{A'N}$, o ângulo $\hat{A}NB = \hat{A'N}B'$ e $\overline{BN} = \overline{B'N}$, logo, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Na Figura 55 vemos duas imagens, uma vez que o caso é válido independente se os pontos A e B estão do mesmo lado ou em lados opostos de r .

Figura 55: Reflexão em r com A e B não pertencentes a r e \overline{AB} não perpendicular a r

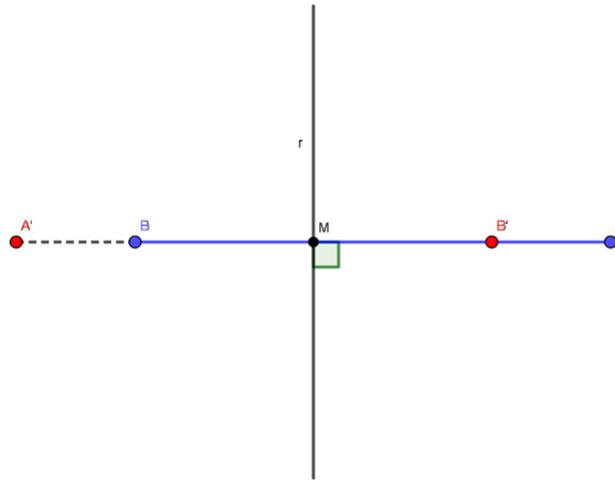


Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

- Caso 4: Se A e B não pertencentes a r e \overline{AB} é perpendicular a r , então temos duas situações:

(i) \overline{AB} tem intersecção com r no ponto M , logo $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$. Pela Definição 4.6 temos que $\overline{A'B'} = \overline{A'M} + \overline{MB'} = \overline{AB}$, que era o resultado esperado.

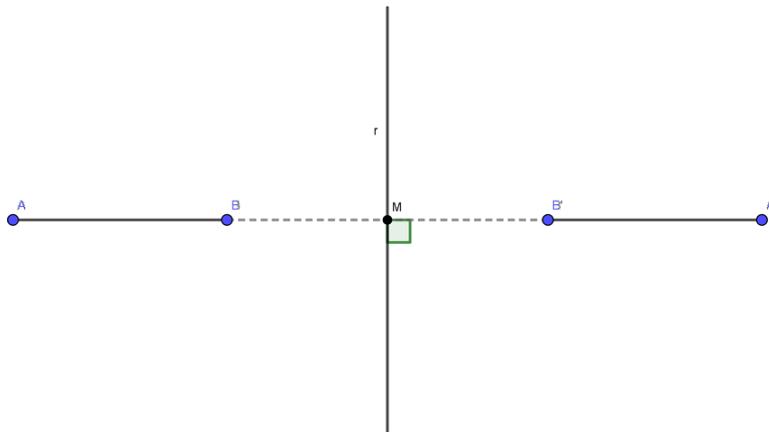
Figura 56: Reflexão em r com A e B não pertencentes a r e \overline{AB} perpendicular a r no ponto M



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

(ii) \overline{AB} não têm intersecção com r , logo $\overline{AB} = |\overline{AM} - \overline{BM}|$, temos ainda que $\overline{A'B'} = |\overline{A'M} - \overline{B'M}| = |\overline{AM} - \overline{BM}| = \overline{AB}$.

Figura 57: Reflexão em r com A e B não pertencentes a r e \overline{AB} perpendicular e sem intersecção com r



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Provamos assim, que toda reflexão em relação a uma reta é uma isometria. ■.

Definição 4.8. Dado um ponto M , chamado centro de reflexão, a **reflexão em relação a um ponto** será dada pela função $\varphi_P : \pi \rightarrow \pi$, tal que fixa o ponto M e associa a cada ponto P do plano, P distinto de M , o ponto P' tal que M é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$.

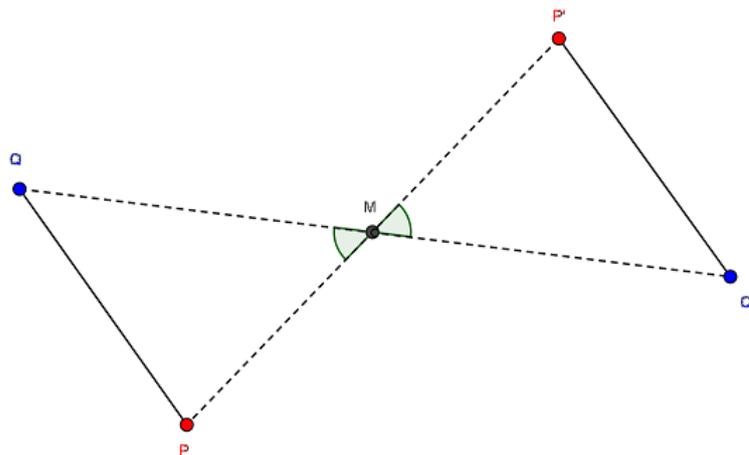
Teorema 4.9. Toda **reflexão em relação a um ponto** é uma Isometria.

Demonstração. Para provar que φ_P é uma isometria, consideramos dois casos:

- Caso 1 : P , Q e M não colineares.

A definição acima nos diz que $\varphi_P(M) = M$ e que para todo ponto P do plano distinto de M , temos que $\varphi_P(P) = P'$ se e somente se, M é o ponto médio de $\overline{PP'}$, logo P e P' são simétricos em relação ao ponto M , que é o centro de reflexão. Dados dois pontos distintos P e Q , sendo $P' = \varphi_P(P)$ e $Q' = \varphi_P(Q)$, temos que se P , Q e M são pontos não colineares então P' , Q' , M são também não colineares. Utilizando o critério LAL de congruência, temos que os triângulos PMQ e $P'MQ'$ são congruentes, pois $\overline{QM} = \overline{Q'M}$, $\overline{PM} = \overline{P'M}$ e $m(\angle Q\hat{M}P) = m(\angle Q'\hat{M}P')$, logo $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.

Figura 58: P , Q e M não colineares

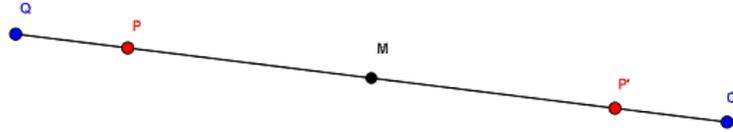


Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

- Caso 2: P , Q e M colineares.

O mesmo resultado $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ se obtém quando P , Q e M são pontos colineares, inclusive com P ou Q , eventualmente coincidentes com M .

Figura 59: P , Q e M colineares



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

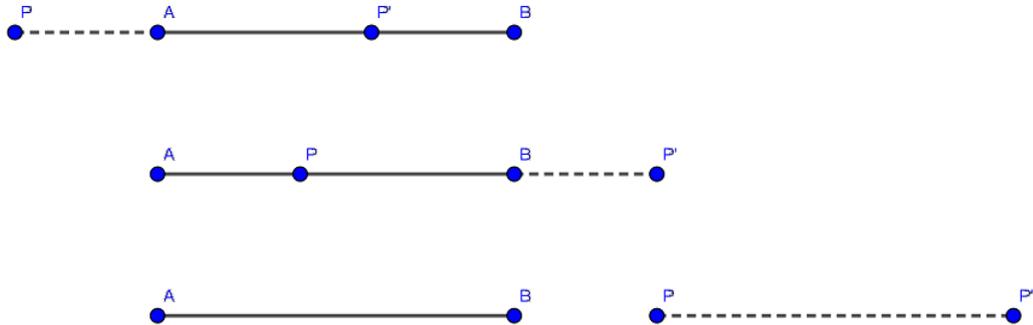
Verificamos assim que toda reflexão em relação a um ponto também é uma isometria do plano. ■

4.2.2 Translação

Para o estudo das translações é necessário o conhecimento prévio do conceito de vetores suas propriedades e operações. Recomendamos os autores [3] e [17] para um maior aprofundamento no assunto.

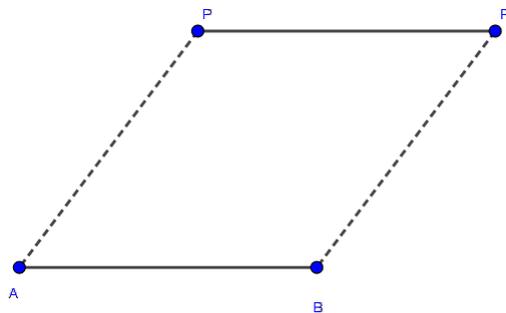
Definição 4.10. Dados os pontos distintos A , B e P no plano e um vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ a **translação** segundo o vetor \vec{u} será dada pela função $\tau_{\overrightarrow{AB}} : \pi \rightarrow \pi$ tal que $\tau_{\overrightarrow{AB}}(P) = P'$, sendo $P' = P + \overrightarrow{AB}$.

Se os pontos A , B e P forem colineares, então o ponto P' também será colinear com A e B , sendo o único ponto pertencente à reta definida pelos pontos A e B que se encontra à distância de P tal que $d(A, B) = d(P, P')$, com \overline{BP} e $\overline{AP'}$ tendo o mesmo ponto médio.

Figura 60: A, B e P colineares

Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Se o ponto P não for colinear com os pontos A e B , então os pontos A, B, P e P' formam um paralelogramo. Da mesma forma, o ponto P' é o único ponto que se encontra à distância de P igual a distância de AB , ou seja, $d(P, P') = d(A, B)$ e o segmento $\overline{PP'}$ é paralelo ao \overline{AB} .

Figura 61: P não colinear ao segmento \overline{AB} 

Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Se $A = B$ então a translação é a identidade e tem deslocamento nulo.

Teorema 4.11. *Toda translação é uma Isometria.*

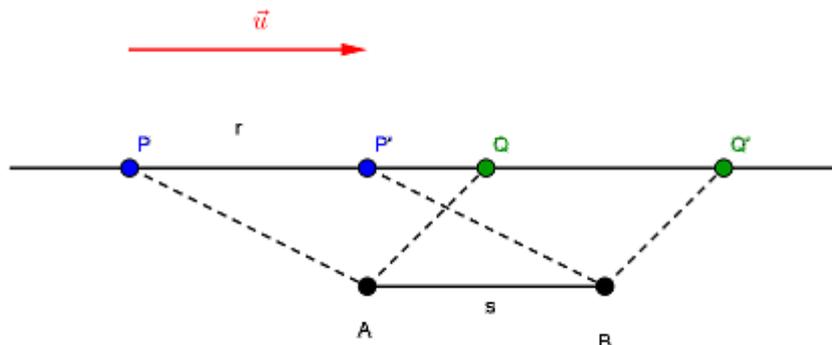
Demonstração. Para provarmos que $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ é uma isometria, consideramos dois casos:

- Caso 1: Se a reta r contém P e Q e é paralela ou igual à reta s que contém A e B então o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, restrito a r , é a translação de vetor $\overrightarrow{PP'}$, logo $\overline{PP'} = \overline{AB}$.

Caso 1A, $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ sem pontos em comum, temos:

$$\overline{P'Q'} = \overline{P'Q} + \overline{QQ'} = \overline{PP'} + \overline{P'Q} = \overline{PQ}$$

Figura 62: $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ sem pontos em comum

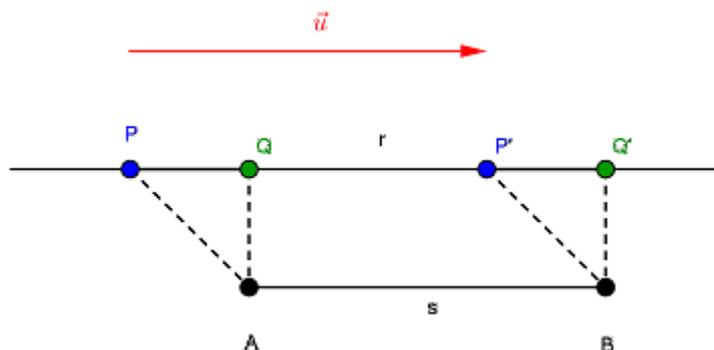


Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Caso 1B, $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ com pontos em comum, temos:

$$\overline{P'Q'} = \overline{QQ'} - \overline{QP'} = \overline{PP'} - \overline{P'Q} = \overline{PQ}$$

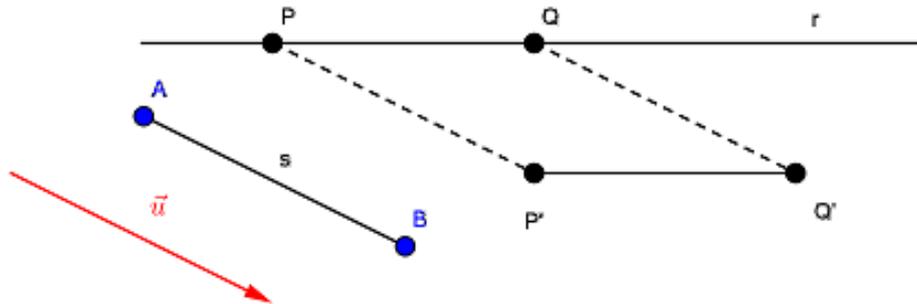
Figura 63: $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ com pontos em comum



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

- Caso 2: Se r não é paralela nem igual a s então $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são lados opostos de um paralelogramo, o mesmo ocorre para \overline{PQ} e $\overline{P'Q'}$. Logo $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$.

Figura 64: $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$ são lados opostos de um paralelogramo



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Verificamos assim, que toda translação é uma isometria do plano. ■

4.2.3 Rotação

Definição 4.12. Dados os pontos distintos P , Q e O do plano e tomando o ângulo (orientado) $\alpha = \angle P\hat{O}Q$, a **rotação** de ângulo α em torno do ponto O será dada pela função $\rho_{O,\alpha} : \pi \rightarrow \pi$ tal que $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e para todo ponto $A \neq O$ no plano, $\rho_{O,\alpha}(A) = A'$ com $\overline{AO} = \overline{A'O}$ e $\angle A\hat{O}A' = \angle P\hat{O}Q$.

Decorre imediatamente da definição que se $m(\alpha) = 0$ então $\rho_{O,\alpha} = \iota$, função identidade.

Observações. Relativamente ao sentido da rotação, considera-se que se $m(\alpha) > 0$, a rotação é feita no sentido positivo ou anti-horário, e se $m(\alpha) < 0$, a rotação é feita no sentido negativo ou horário. O ponto O permanece invariante. Quando o ângulo $\angle A\hat{O}B$ é raso, ou seja quando \overline{OA} e \overline{OB} são semi-retas opostas, a rotação $\rho_{O,\alpha}$ coincide com a reflexão por um ponto φ_p , através do ponto O .

Teorema 4.13. *Toda Rotação é uma isometria.*

Demonstração. Para provar que $\rho_{O,\alpha}$ é uma isometria, consideramos dois casos:

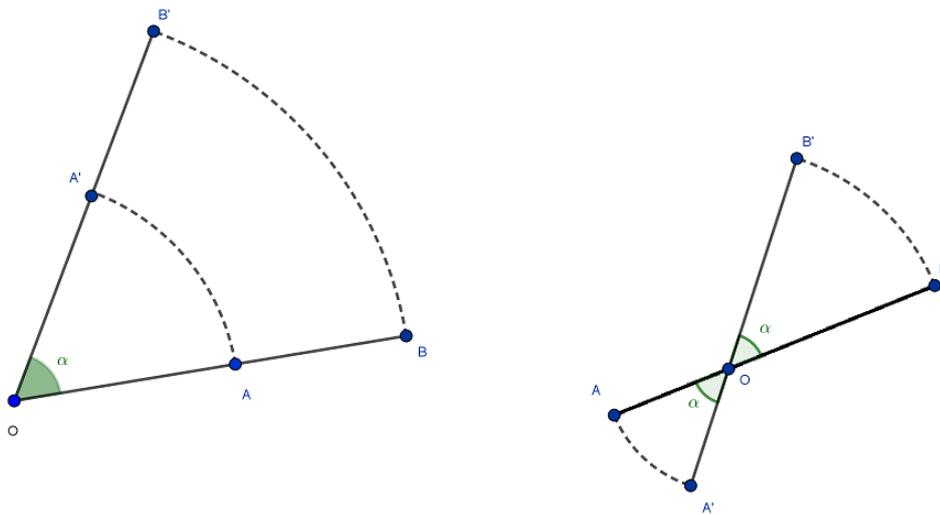
- Caso 1: Se os pontos O , A e B forem colineares, temos que:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{A'B'} \text{ (se } A \text{ estiver entre } O \text{ e } B) \text{ ou}$$

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{A'B'} \text{ (se } O \text{ estiver entre } A \text{ e } B),$$

em ambas as situações $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{OA} = \overline{OA'}$ e $\overline{OB} = \overline{OB'}$.

Figura 65: Rotação do ângulo α entre pontos colineares

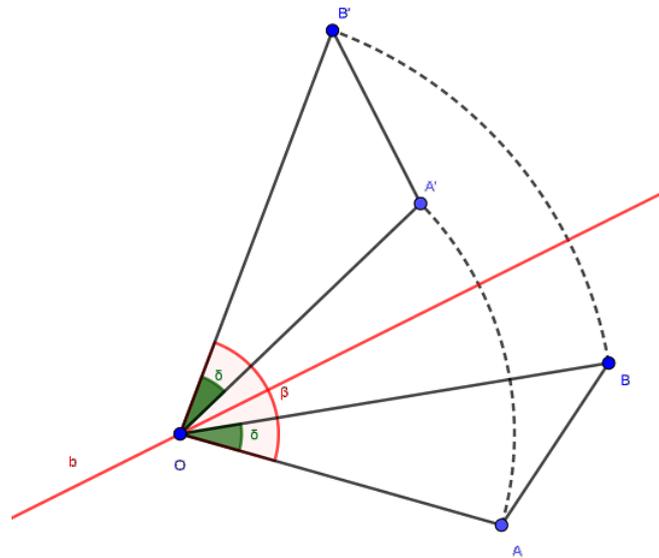


Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

- Caso 2: Se os Pontos O , A e B não forem colineares temos que:

$\angle A\hat{O}B'$ e $\angle A'\hat{O}B$ têm a mesma bissetriz b , logo $m(\angle A\hat{O}B) = m(\angle A'\hat{O}B')$, então pelo critério LAL de congruência temos que os triângulos AOB e $A'OB'$ são congruentes, pois $\overline{OA} = \overline{OA'}$ e $\overline{OB} = \overline{OB'}$, portanto $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Figura 66: Rotação de ângulo α de pontos não colineares



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Verificamos assim, que toda rotação é uma isometria do plano. ■

4.2.4 Reflexão com Deslizamento

Definição 4.14. Dado um vetor não-nulo \vec{u} e r uma reta paralela à direção do vetor \vec{u} , a **Reflexão com Deslizamento**, será dada pela função $\vartheta_{\vec{u},r} : \pi \rightarrow \pi$ tal que $\vartheta_{\vec{u},r}$ seja um produto de duas isometrias: uma reflexão φ_r em relação a reta r e uma translação $\tau_{\vec{u}}$ determinada pelo vetor \vec{u} , ou seja:

$$\vartheta_{\vec{u},r} = \varphi_r \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \varphi_r$$

Teorema 4.15. Toda **Reflexão com Deslizamento** é uma isometria.

Pela proposição 4.3 todo produto de isometrias é uma isometria, logo a reflexão com deslizamento $\vartheta_{\vec{u},r}$ também é uma isometria. ■

4.3 ISOMETRIAS NO PLANO

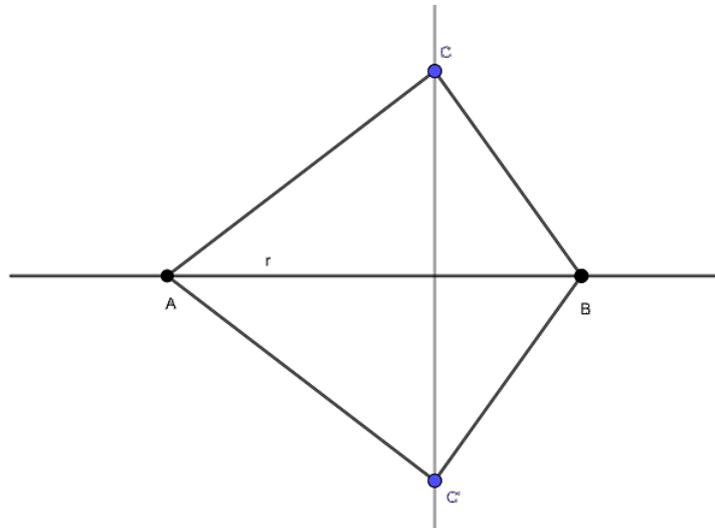
Devido ao importante papel que as reflexões desempenham na teoria das isometrias, escolhemos dentre as variadas abordagens possíveis a representação das isometrias como produto de no máximo três reflexões. Para tanto, necessitamos a apresentação de algumas proposições e definições que serão utilizadas no decorrer deste estudo.

Definição 4.16. *Seja uma isometria $\phi : \pi \rightarrow \pi$ e P um ponto do plano, dizemos que P é um ponto fixo ou invariante de ϕ se, e somente se, $\phi(P) = P$.*

Definição 4.17. *Seja uma isometria $\phi : \pi \rightarrow \pi$ e r uma reta do plano, dizemos que r é uma reta invariante de ϕ se e somente se, $\phi(r) = r$.*

Proposição 4.18. *Se uma isometria $\phi : \pi \rightarrow \pi$ possui dois pontos fixos distintos então ou ϕ é a identidade ou ϕ é a reflexão em relação a reta que contém esses pontos.*

Figura 67: Uma isometria em 2 pontos fixos distintos



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Demonstração. Sejam $A \neq B$ pontos do plano tais que $\phi(A) = A$ e $\phi(B) = B$. Então ϕ deixa fixos todos os pontos da reta $r = \overleftrightarrow{AB}$, Figura 67. Se ϕ não for a

identidade, existe um ponto C no plano, fora da reta r , tal que $C' = \phi(C) \neq C$. Como $\overline{AC} = \overline{AC'}$ e $\overline{BC} = \overline{BC'}$, a reta r é a mediatriz do segmento CC' e o ponto C' é a imagem de C pela reflexão φ_r . Dado agora qualquer ponto P fora da reta r , devemos ter $P' = \phi(P) \neq P$, pois caso contrário teríamos $\overline{PC} \neq \overline{P'C'}$ (uma vez que P está do mesmo lado de um dos pontos C ou C'). E pelo mesmo argumento usado para o ponto C , resulta $\phi(P) = \varphi_r(P)$. ■

Proposição 4.19. *Se duas isometrias $\sigma, \phi : \pi \rightarrow \pi$ coincidam em dois pontos distintos A e B , tais que $\sigma(A) = \phi(A)$ e $\sigma(B) = \phi(B)$ então ou $\sigma = \phi$ ou $\sigma = \phi\varphi_r$, onde φ_r é a reflexão em relação a reta $r = \overleftrightarrow{AB}$.*

Demonstração. Como σ e ϕ são isometrias que coincidem em A e B pontos distintos, temos que $\sigma(A) = \phi(A) = A'$ e $\sigma(B) = \phi(B) = B'$. Desse modo podemos dizer que:

$$\sigma^{-1}\phi(A) = \sigma^{-1}(A') = A$$

$$\sigma^{-1}\phi(B) = \sigma^{-1}(B') = B$$

Logo, $\sigma^{-1}\phi = \text{identidade}$. Segue que $\sigma = \phi$.

Para $\sigma^{-1}\phi = \varphi_r$ e fazendo $\phi = \sigma\varphi_r$ segue que

$$\sigma^{-1}\phi = \sigma^{-1}\sigma\varphi_r = \iota\varphi_r = \varphi_r. \blacksquare$$

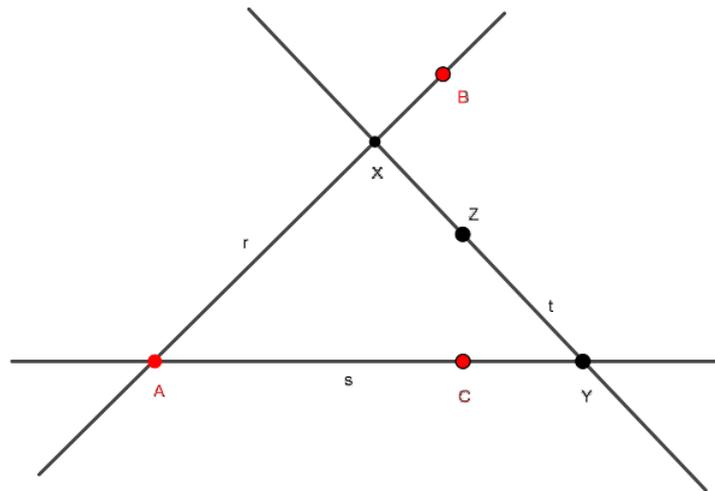
Proposição 4.20. *Se uma isometria $\phi : \pi \rightarrow \pi$ possui três pontos fixos não colineares então $\phi = \text{identidade}$.*

Demonstração. Com efeito, sejam A, B e C pontos não colineares no plano π , tais que $\phi(A) = A, \phi(B) = B$ e $\phi(C) = C$. Considere as retas $r = \overleftrightarrow{AB}$ e $s = \overleftrightarrow{AC}$.

A imagem da reta r pela isometria ϕ é a reta que passa pelos pontos $\phi(A) = A$ e $\phi(B) = B$. Logo $\phi(r) = r$ pela proposição 4.18, tem-se $\phi(X) = X$ para todo $X \in r$. Analogamente, se vê que $\phi(Y) = Y$ para todo ponto $Y \in s$. Seja agora Z um ponto qualquer do plano. Fazemos passar por Z uma reta t que corta r e

s respectivamente nos pontos X e Y . Como $\phi(X) = X$ e $\phi(Y) = Y$, concluímos que ϕ deixa fixos todos os pontos da reta t . Em particular, $\phi(Z) = Z$. Sendo Z um ponto arbitrário do plano, resulta que $\phi = \text{identidade}$. ■.

Figura 68: Isometria em 3 pontos fixos não colineares



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

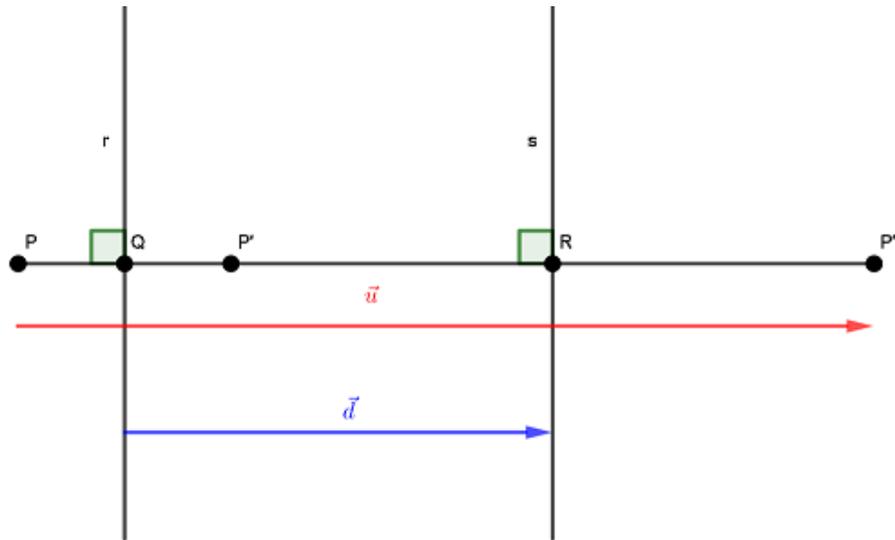
4.4 PRODUTO DE ISOMETRIAS

Nesta seção, verificaremos os resultados obtidos do produto entre isometrias e a importância da reflexão no nosso estudo.

Teorema 4.21. *Sejam r e s retas paralelas entre si, o produto de duas reflexões $\varphi_r \varphi_s : \pi \rightarrow \pi$ é uma translação cujo vetor \vec{u} é o dobro do vetor distância entre as retas, ou seja, $\varphi_r \varphi_s = \tau_{\vec{u}} = \tau_{2\vec{d}}$.*

Demonstração. Vamos considerar a isometria $\phi = \varphi_r \varphi_s$, onde r e s são retas paralelas de vetor distância \vec{d} . Seja P um ponto arbitrário, $P\varphi_r(P)$, $P'' = \varphi_s(P')$ e Q e R as projeções ortogonais de P sobre as retas r e s , respectivamente. Figura 69.

Figura 69: Produto de reflexões entre 2 retas paralelas



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Segue que,

$$\vec{u} = \overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{P'R} + \overrightarrow{RP''} = 2(\overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{P'R}) = 2\vec{d}$$

Então, $\phi = \tau_{\vec{u}}$ ou seja, $\varphi_r \varphi_s = \tau_{2\vec{d}}$.

O vetor $\vec{u} = \overrightarrow{PP''} = 2\vec{d}$ não depende da posição de P e sim do vetor distância \vec{d} entre as retas, isto é, depende somente da distância e da direção das retas r e s . Reciprocamente, dada uma translação $\tau_{\vec{u}}$, podemos escolher arbitrariamente duas retas paralelas, r e s que tenham o vetor distância $\vec{d} = \frac{\vec{u}}{2}$.

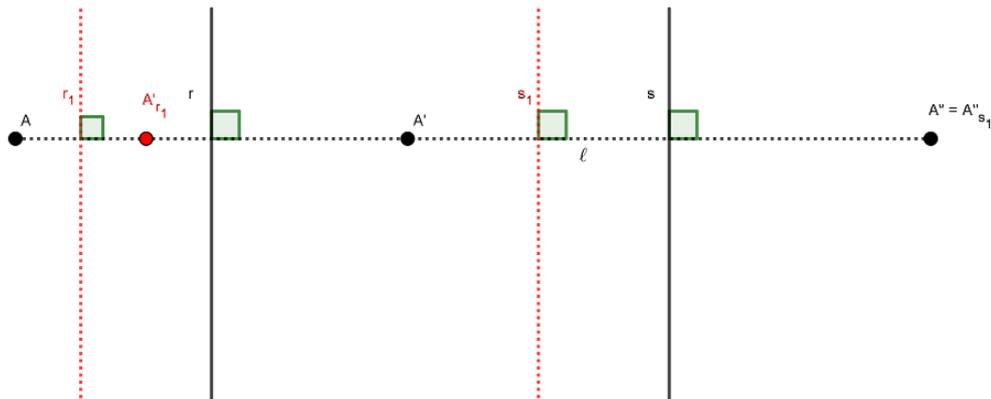
Logo, toda translação pode ser representada de infinitas maneiras como produto de duas reflexões entre retas paralelas. A única condição é que o vetor distância entre as retas r e s seja $\vec{d} = \frac{\vec{u}}{2}$. ■.

Proposição 4.22. *Seja $\tau_{\vec{u}}$ uma translação segundo um vetor \vec{u} . Seja ℓ uma reta paralela a \vec{u} e sejam A em A'' pontos da reta ℓ com $\vec{u} = \overrightarrow{AA''}$. Então para qualquer reta r perpendicular a ℓ , existe e é única a reta s , também perpendicular a ℓ , tal que $\varphi_r(A) = A'$ e $\varphi_s(A') = A''$, ou seja, $\tau_{\overrightarrow{AA''}} = \varphi_r \varphi_s$*

Demonstração. A isometria $\tau_{\vec{u}}$ é a translação ao longo da reta ℓ na direção do vetor $\overrightarrow{AA''}$. Seja r uma reta qualquer perpendicular a ℓ . Se $A' = \varphi_r(A)$, então

a reta s é a mediatriz do segmento $\overline{A'A''}$. Figura 70. A conclusão segue da demonstração do Teorema 4.21. ■

Figura 70: Unicidade da reta perpendicular de um produto de 2 reflexões entre retas paralelas



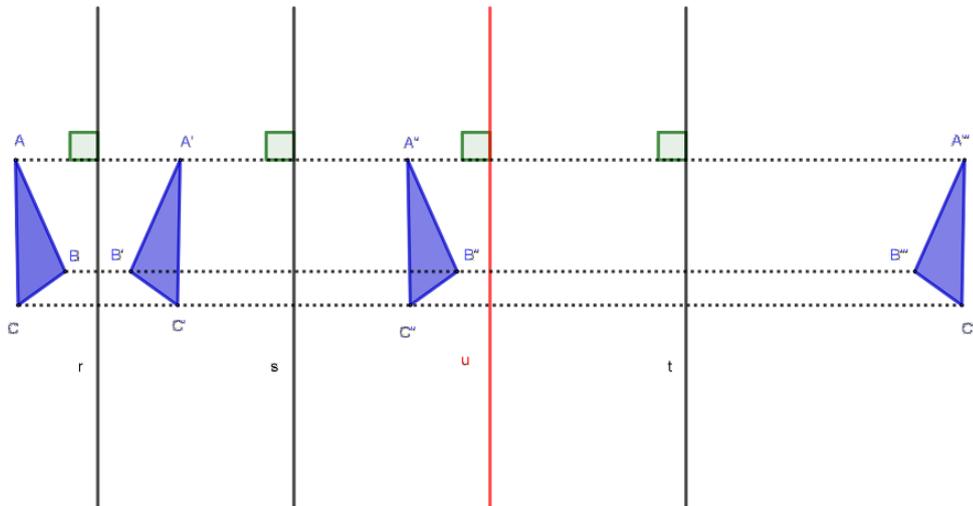
Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Teorema 4.23. *Sejam r, s e t retas paralelas entre si. O produto de três reflexões $\varphi_r \varphi_s \varphi_t : \pi \rightarrow \pi$ é uma reflexão cujo eixo é paralelo às retas r, s e t .*

Demonstração. Sejam dados três pontos não colineares A, B e C , não pertencentes às retas r, s, t . Considerando o ponto A , sejam $A' = \varphi_r(A)$, $A'' = \varphi_s(A')$ e $A''' = \varphi_t(A'')$. Seja u a mediatriz do segmento $\overline{AA''}$ (caso $A = A''$, adotamos como mediatriz a reta por A paralela às retas dadas). Pela definição de reflexão, os pontos A, A', A'' e A''' são colineares, logo o ponto A''' é a imagem de A pela reflexão relativa a u , isto é,

$$\varphi_r \varphi_s \varphi_t(A) = \varphi_u(A).$$

De modo análogo, B''' e C''' correspondem, respectivamente, à imagem de B e C pelas reflexões relativas às mediatrizes dos segmentos $\overline{BB''}$ e $\overline{CC''}$ (com o mesmo cuidado no caso de segmentos nulos). Tais mediatrizes devem necessariamente coincidir com a reta u , caso contrário teríamos $d(A, B) \neq d(A''', B''')$ ou $d(A, C) \neq d(A''', C''')$. Portanto, a isometria $\varphi_r \varphi_s \varphi_t$ é a reflexão φ_u . Figura 71. ■

Figura 71: Produto de reflexões entre 3 retas paralelas

Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Como consequência dos Teoremas 4.21 e 4.23, podemos concluir que quando se efetuam produtos de reflexões em retas paralelas, se o número de reflexões for par teremos uma translação e se for ímpar teremos uma reflexão.

Teorema 4.24. *Sejam r e s retas concorrentes no ponto O sob um ângulo de medida positiva α ou respectivamente negativa β . O produto de duas reflexões $\varphi_r\varphi_s : \pi \rightarrow \pi$ entre as retas é uma rotação cuja amplitude será igual ao dobro do ângulo existente entre as elas, ou seja $\rho_{O,\omega} = \rho_{O,2\alpha} = \rho_{O,2\beta}$.*

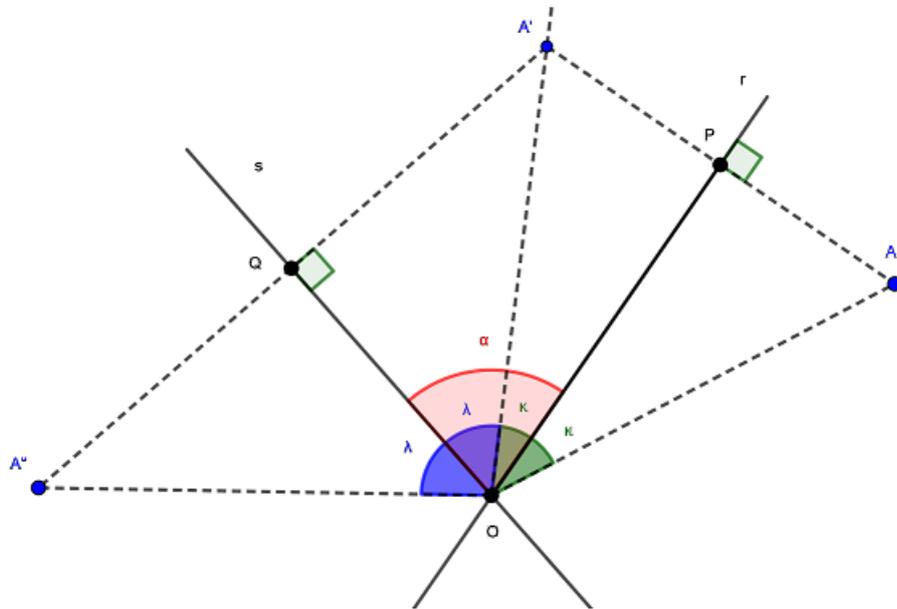
Demonstração. Vamos considerar a isometria $\rho_{O,\alpha} = \varphi_r\varphi_s$, onde r e s são retas concorrentes no ponto O sob um ângulo α de medida positiva $m(\angle P\hat{O}Q)$. A demonstração sob um ângulo de medida negativa é análoga. Figura 72.

Seja A um ponto arbitrário, com $A \neq O$. Sejam $A' = \varphi_r(A)$ e $A'' = \varphi_s(A')$, P é a projeção ortogonal de A na reta r e Q a projeção ortogonal de A' na reta s . Como a rotação conserva a orientação de um ângulo, temos que:

$$m(\angle A\hat{O}P) = m(\angle P\hat{O}A')$$

e

$$m(\angle A'\hat{O}Q) = m(\angle Q\hat{O}A'')$$

Figura 72: Produto de duas reflexões entre retas concorrentes

Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Donde segue que:

$$\begin{aligned}
 m(\omega) = m(\angle A\hat{O}A'') &= m(\angle A\hat{O}P) + m(\angle P\hat{O}A') + m(\angle A'\hat{O}Q) + m(\angle Q\hat{O}A'') = \\
 &= 2(m(\angle P\hat{O}A') + m(\angle A'\hat{O}Q)) \\
 &= 2(m(\angle P\hat{O}Q)) \\
 &= 2m(\alpha)
 \end{aligned}$$

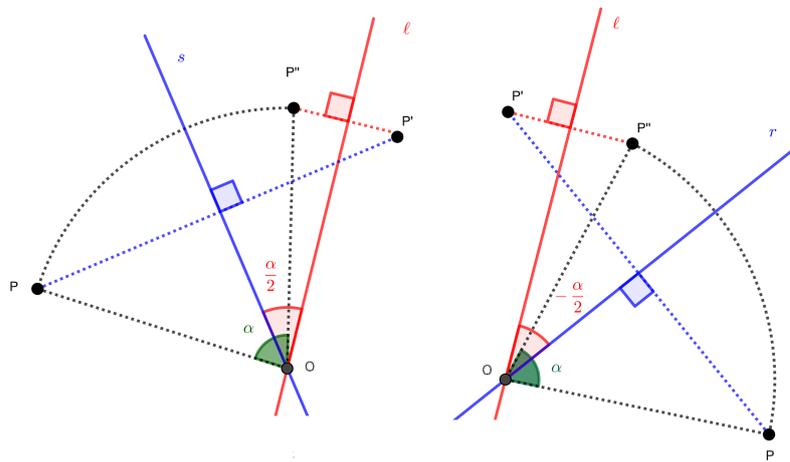
Portanto $\varphi_r \varphi_s = \tau_{O,2\alpha} = \tau_{O,2\beta} = \tau_{O,\omega}$. ■

A imagem A'' de um ponto A , pela rotação $\rho_{O,\omega}$, depende unicamente do ponto O de intersecção entre as retas r e s e do ângulo positivo α ou negativo β entre elas. Reciprocamente, dada uma rotação $\rho_{O,\omega}$ podemos escolher arbitrariamente duas retas r e s concorrentes no ponto O sob um ângulo $\omega = \frac{\alpha}{2}$ (sentido positivo) ou $\omega = \frac{\beta}{2}$ (sentido negativo).

Logo, toda rotação $\rho_{O,\omega}$ pode ser representada de infinitas maneiras como produto de duas reflexões em retas concorrentes. A única condição é que r e s interceptem-se no ponto O , sob o ângulo $\frac{\omega}{2}$.

Proposição 4.25. *Seja $\rho_{O,\alpha}$ uma rotação de centro em O e ângulo α , e ℓ uma reta arbitrária que passe no ponto O . Então existem e são únicas as retas r e s , tais que $\rho_{O,\alpha} = \varphi_r\varphi_\ell = \varphi_\ell\varphi_s$.*

Figura 73: Unicidade das retas concorrentes r e s em um produto de duas reflexões



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Demonstração. Seja $\rho_{O,\alpha}$ uma rotação de centro em O e ângulo α . Seja ℓ uma reta arbitrária que passa no ponto O . Sejam r e s as retas por O que formam um ângulo de $-\frac{\alpha}{2}$ e $+\frac{\alpha}{2}$ com a reta ℓ , respectivamente. Figura 73. O resultado segue então do Teorema 4.24. ■

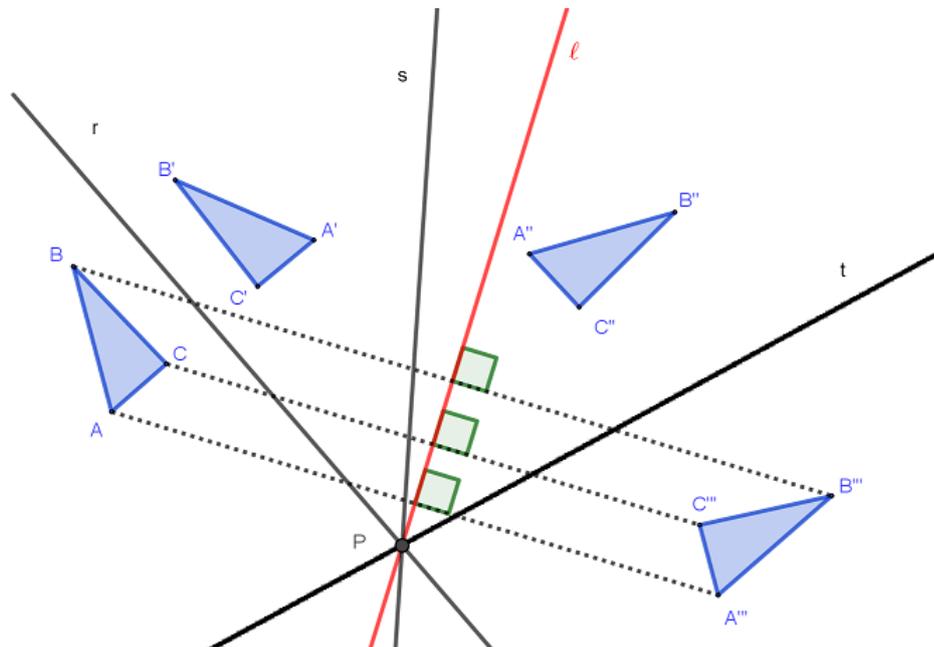
Teorema 4.26. *Sejam r, s e t três retas concorrentes em um determinado ponto P . Então existe uma única reta ℓ também concorrente em P tal que a isometria obtida pelo produto das reflexões sucessivas em cada uma das três retas, é uma reflexão nesta reta: $\varphi_r\varphi_s\varphi_t = \varphi_\ell$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.24, sabemos que $\varphi_r\varphi_s$ é uma rotação de centro em P . Pela Proposição 4.25, existe uma única reta ℓ que passa por P tal que a rotação $\varphi_r\varphi_s$ pode ser escrita como $\varphi_\ell\varphi_t$. Resulta portanto

$$\varphi_r\varphi_s\varphi_t = \varphi_\ell\varphi_t\varphi_t = \varphi_\ell$$

pois $\varphi_t\varphi_t$ é a identidade (duas reflexões sucessivas na mesma reta). Figura 74.

■

Figura 74: Produto de três reflexões entre retas concorrentes

Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Teorema 4.27. *Sejam r , s e t retas distintas que não são paralelas nem concorrentes num único ponto. O produto de três reflexões $\varphi_r \varphi_s \varphi_t : \pi \rightarrow \pi$ é uma reflexão com deslizamento ϑ .*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor r e s são concorrentes em um ponto P . Note que por hipótese, P não está em t . Pelo Teorema 4.24 teremos que o produto de reflexões entre retas concorrentes é uma rotação e pode ser definida por qualquer par de retas r' , s' que sejam concorrentes em P e tais que o ângulo entre r' e s' (com sentido de r' para s') seja igual ao ângulo entre r e s , tal que

$$\varphi_r \varphi_s = \varphi_{r'} \varphi_{s'} = \rho_{P, \alpha}$$

temos então que

$$\varphi_r \varphi_s \varphi_t = \varphi_{r'} \varphi_{s'} \varphi_t$$

Obteremos em seguida a reta s'' paralela a reta r' que passa por Q , e a reta t' perpendicular à reta s'' no ponto Q . Analogamente ao que foi efetuado

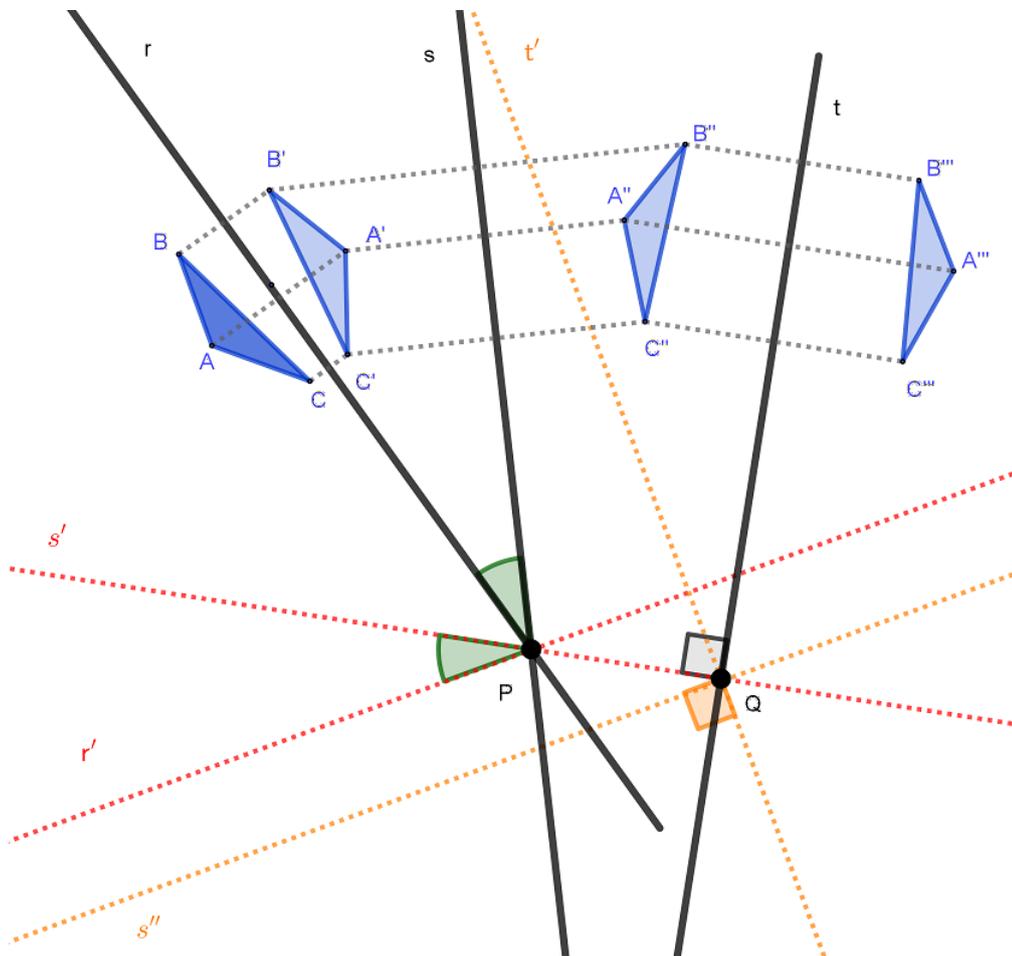
anteriormente, a rotação de ângulo raso em torno de Q definida pelo produto das reflexões entre as retas s' e t será a mesma que a definida entre as retas s'' e t' . Figura 75. Temos então que,

$$\varphi_{s'}\varphi_t = \varphi_{s''}\varphi_{t'} = \rho_{Q,\beta}$$

Logo,

$$\varphi_r\varphi_s\varphi_t = \varphi_{r'}\varphi_{s'}\varphi_t = \varphi_{r'}\varphi_{s''}\varphi_{t'}$$

Figura 75: Produto de 3 reflexões entre retas não paralelas e não concorrentes



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

Dado que as retas r' e s'' são retas paralelas, pelo Teorema 4.21 o produto $\varphi_{r'}\varphi_{s''}$ é uma translação ao longo de t' cujo segmento orientado tem o com-

primento igual ao dobro da distâncias entre as retas r' e s'' , então $\tau = \varphi_{r'}\varphi_{s''}$, resulta $\varphi_r\varphi_s\varphi_t = \tau\varphi_{t'} = \varphi_{t'}\tau$ é uma reflexão deslizante. ■

4.5 REPRESENTAÇÃO DAS ISOMETRIAS

O teorema seguinte é um dos mais importantes de toda a teoria das isometrias, senão mesmo o mais importante.

Teorema 4.28. Teorema Fundamental das Isometrias

Se $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, então existe uma e uma só isometria φ tal que $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) = E$ e $\varphi(C) = F$.

Demonstração. Provaremos a existência. A ideia é construir uma isometria φ como composta de três oportunas isometrias $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Figura 76.

Se $A = D$, tomamos simplesmente $\varphi_1 = \iota$. Se $A \neq D$ tomamos para φ_1 a reflexão na mediatriz ℓ_1 de \overline{AD} . Em qualquer dos casos tem-se $\varphi_1(A) = D$. Sejam $B_1 = \varphi_1(B)$, $C_1 = \varphi_1(C)$. Se $B_1 = E$ pomos $\varphi_2 = \iota$; se $B_1 \neq E$, então D está na mediatriz ℓ_2 de $\overline{B_1E}$, pela propriedade característica da mediatriz, pois $\overline{DE} = \overline{AB} = \overline{DB_1}$ pela hipótese sobre os triângulos e por φ_1 ser isometria, e neste caso tomamos para φ_2 a reflexão na mediatriz de $\overline{B_1E}$. Em qualquer dos casos tem-se

$$\varphi_2(D) = D \text{ e } \varphi_2(B_1) = E.$$

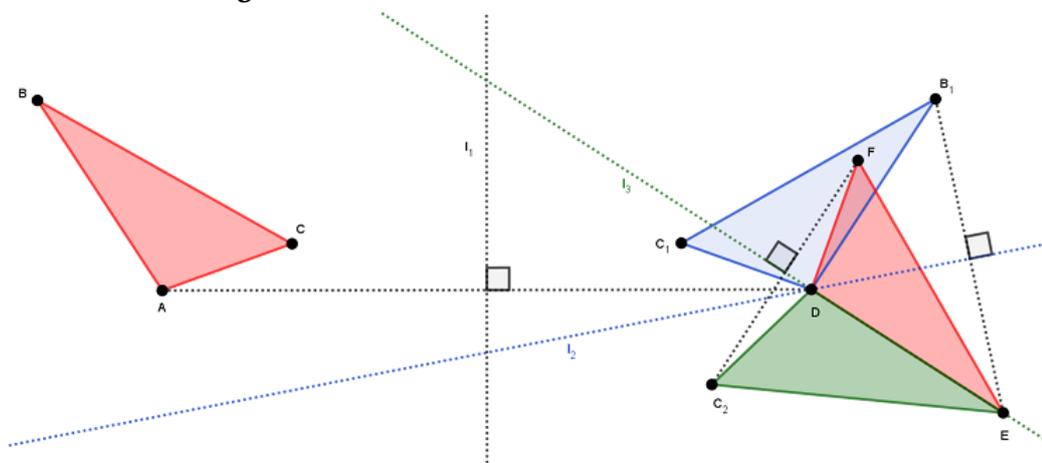
Seja $C_2 = \varphi_2(C_1)$. Se $C_2 = F$ pomos $\varphi_3 = \iota$; se $C_2 \neq F$, então D e E estão na mediatriz ℓ_3 de $\overline{C_2F}$, pela propriedade característica da mediatriz, pois

$$\overline{DF} = \overline{AC} = \overline{DC_1} = \overline{DC_2}$$

$$\overline{EF} = \overline{BC} = \overline{B_1C_1} = \overline{EC_2}$$

pela hipótese sobre os triângulos e por φ_1 e φ_2 serem isometrias. Neste caso tomamos para φ_3 a reflexão na mediatriz de $\overline{C_2F}$. Em qualquer dos casos tem-se $\varphi_3(D) = D$, $\varphi_3(E) = E$ e $\varphi_3(C) = F$. Pondo $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$, tem-se:

Figura 76: Teorema fundamental das isometrias



Fonte: Produção da autora através do software GeoGebra

$$\varphi(A) = \varphi_3\varphi_2\varphi_1(A) = \varphi_3\varphi_2(D) = \varphi_3(D) = D$$

$$\varphi(B) = \varphi_3\varphi_2\varphi_1(B) = \varphi_3\varphi_2(B_1) = \varphi_3(E) = E$$

$$\varphi(C) = \varphi_3\varphi_2\varphi_1(C) = \varphi_3\varphi_2(C_1) = \varphi_3(C_2) = F$$

o que prova a existência.

Provaremos a unicidade. Suponhamos φ, σ , duas isometrias que aplicam A, B, C em D, E, F , respectivamente. Então

$$\sigma^{-1}\varphi A = \sigma^{-1}D = A$$

$$\sigma^{-1}\varphi B = \sigma^{-1}E = B$$

$$\sigma^{-1}\varphi C = \sigma^{-1}F = C.$$

Logo $\sigma^{-1}\varphi = \iota$ pela proposição 4.20, donde $\varphi = \sigma$. ■

A isometria φ construída no decurso da demonstração anterior é um produto de, quando muito, três reflexões. Assim é, na realidade, para *qualquer* isometria, como veremos no corolário a seguir, que nos mostra a importância das reflexões na teoria das isometrias. Este corolário é apresentado como consequência da demonstração do teorema anterior.

Corolário 4.29. Teorema de Representação das Isometrias

Toda isometria é igual ao produto de, quando muito, três reflexões. Além disso, se a isometria fixa um ponto, então é uma reflexão ou um produto de duas reflexões; se a isometria fixa dois pontos, então é a reflexão na reta determinada por estes pontos ou a identidade.

Demonstração. Seja ϕ uma isometria. Dados três pontos não colineares A , B e C , sejam $D = \phi(A)$, $E = \phi(B)$ e $F = \phi(C)$. Então o $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, por (LLL), e ϕ é igual ao produto de, quando muito, três reflexões. De acordo com a demonstração do Teorema 4.28 (por unicidade, $\phi = \varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$, nas notações da demonstração). Se ϕ fixa um ponto qualquer, podemos supor sem perda de generalidade que seja A , então a demonstração do teorema também mostra que ϕ é igual ao produto de, quando muito, duas reflexões (caso $\varphi_1 = \iota$). Se ϕ fixa dois pontos, podemos supor A e B , resulta (ainda na notação da demonstração) $\phi = \varphi = \varphi_3$, que é uma reflexão ou a identidade. ■

Concluimos este capítulo com o resultado mais importante sobre isometrias no âmbito do estudo das simetrias.

Teorema 4.30. Teorema de Classificação das Isometrias

Se ϕ é uma isometria no plano π , então ϕ é uma translação, uma rotação, uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

Demonstração. Conforme provado anteriormente no Teorema de Representação das Isometrias, a isometria ϕ pode ser expressa pelo produto de, no máximo, três reflexões: $\phi = \varphi_r\varphi_s\varphi_t$. Assim, seguiremos uma análise conforme o número de reflexões necessárias para definir ϕ .

1. Uma reflexão: $\phi = \varphi_t$, sendo φ_r e φ_s iguais à identidade. Trata-se então de uma reflexão.
2. Duas reflexões: $\phi = \varphi_s\varphi_t$, sendo φ_r igual à identidade. Teremos dois casos:
 - Caso 1: Retas s e t paralelas. Será uma translação associada ao vetor ortogonal às retas e de módulo igual ao dobro da distâncias entre elas (Teorema 4.21).

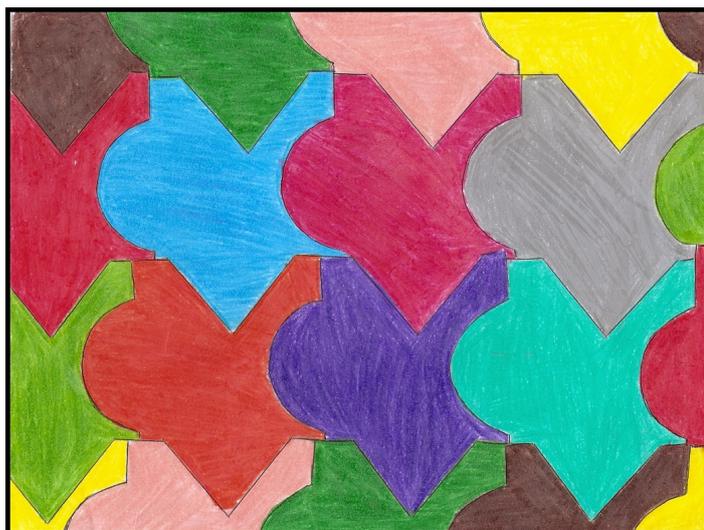
- Caso 2: Retas s e t concorrentes. Será uma rotação centrada no ponto de intersecção entre as duas retas e de amplitude igual ao dobro do ângulo que as duas retas fazem entre si (Teorema 4.24).

3. Três reflexões: $\phi = \varphi_r \varphi_s \varphi_t$.

- Caso 1: Retas r , s e t paralelas entre si. Será uma reflexão (Teorema 4.23).
- Caso 2: Retas r , s e t concorrentes num ponto. Será uma reflexão (Teorema 4.26).
- Caso 3 : Retas r , s e t nem paralelas nem concorrentes em um único ponto. Será uma reflexão com deslizamento (Teorema 4.27).

Conclusão, de acordo com o exposto acima, se ϕ for uma isometria, então ϕ será uma translação, rotação, reflexão ou reflexão com deslizamento. ■

GRUPOS DOS ORNAMENTOS



Trabalho realizado pelas alunas A.B.F. e B.C.

Uma aplicação da teoria das isometrias é o estudo dos ornamentos do plano onde podemos observar uma bela relação da matemática à arte.

O estudo do grupo dos ornamentos é bastante vasto e interessante, porém optamos em somente apresentar as classificações sem demonstrar cada um delas. Utilizamos para a composição deste capítulo os autores [11] e [16].

Podemos considerar que grupos de diferentes isometrias aplicadas conjuntamente determinam um ornamento, ou seja, cada grupo de isometrias estabelece um determinado padrão de simetria. Estes padrões de ornamentos são distribuídos em três grandes classes:

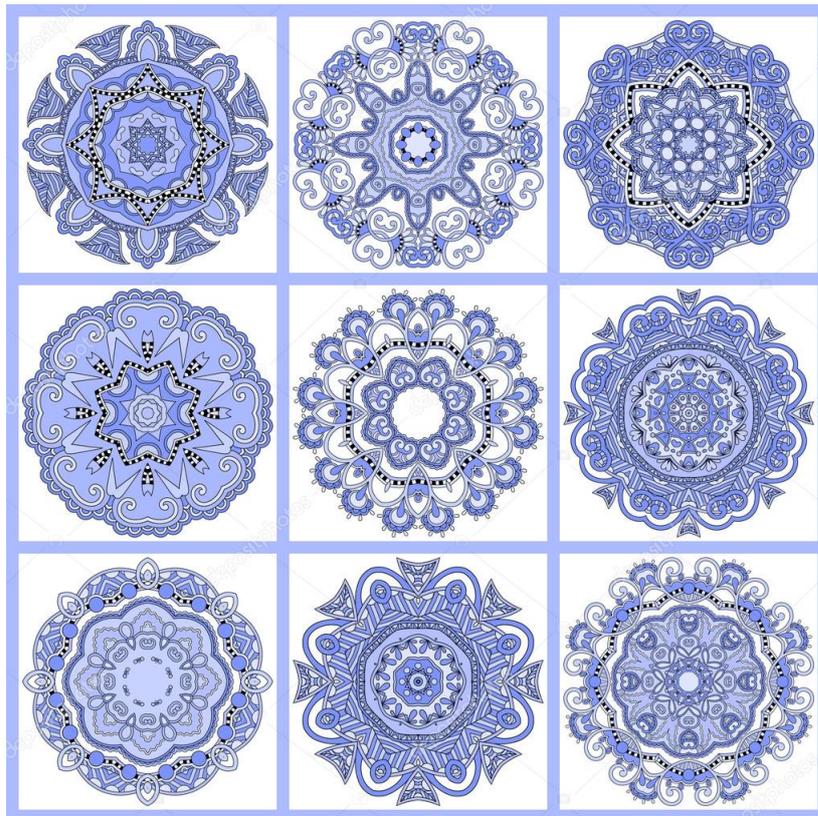
- Grupos das Rosetas ou Rosáceas.
- Grupos dos Frisos ou Faixas.

- Grupos dos Papéis de Parede ou Cristalográficos.

Grupos das Rosetas

São grupos de isometrias em que não aparecem translações, somente rotações e, possivelmente, reflexões. As figuras que apresentam esse padrão ornamental evidenciam uma simetria circular. Algebricamente, os grupos de rosetas são grupos cíclicos finitos ou grupos diedrais.

Figura 77: Grupo das rosetas



Fonte : Depositphotos

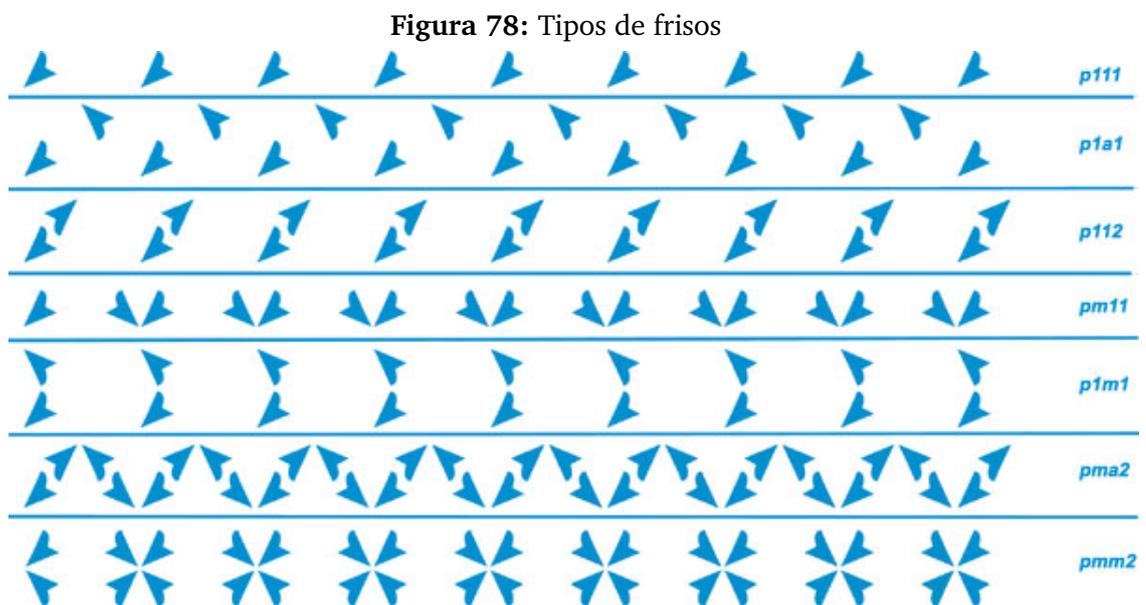
Grupos dos Frisos ou Fitas

São grupos em que aparece exatamente uma única translação geradora. Há somente sete grupos de frisos, que apresentaremos abaixo a título de curiosidade, utilizando os seguintes símbolos ordenados:

- Símbolo 1: Terá sempre a letra **p**, indica que se trata de um padrão, em inglês "pattern".

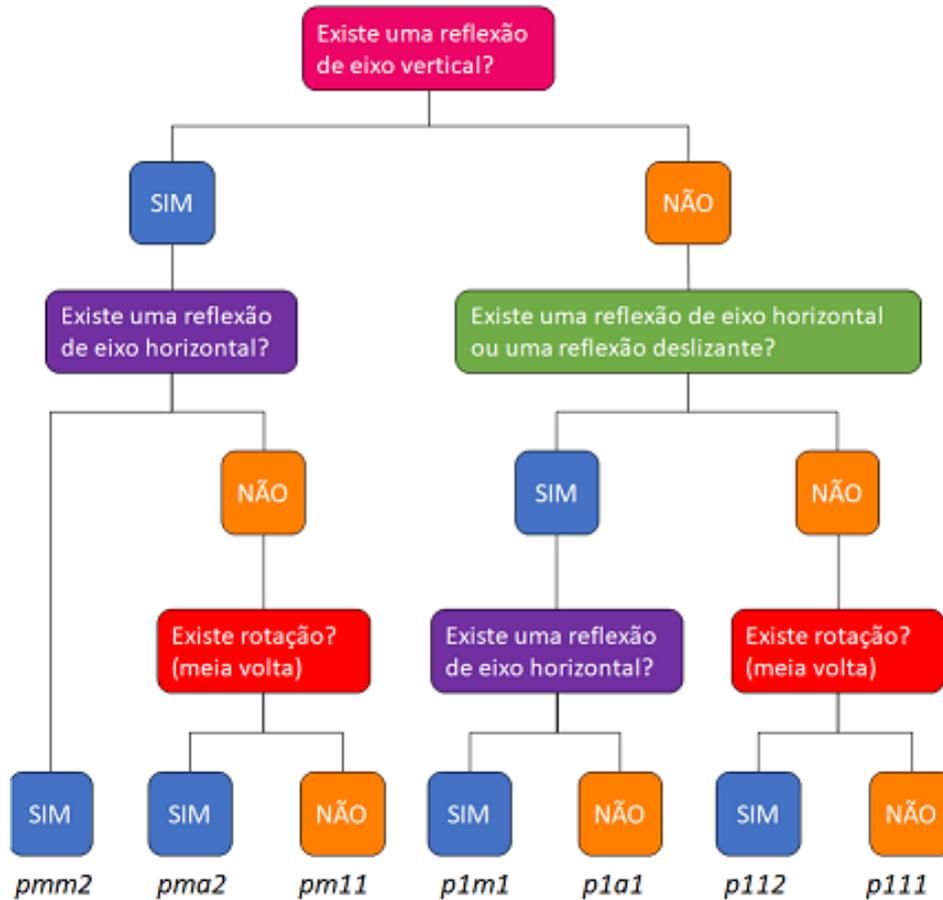
- Símbolo 2: Representa a simetria de reflexão axial vertical e pode conter 2 símbolos:
 - m** - O friso possui simetria de reflexão axial vertical e a letra **m** vem do inglês "mirror", espelho.
 - 1** - O friso não possui este tipo de simetria.
- Símbolo 3: Representa o tipo de simetria e pode conter 3 símbolos:
 - m** - O friso possui reflexão axial horizontal.
 - a** - O friso possui reflexão de deslizamento.
 - 1** - O friso não possui as duas simetrias anteriores.
- Símbolo 4 - Representa a simetria de rotação e pode conter 2 símbolos:
 - 1** - O friso não possui simetria de rotação.
 - 2** - O friso possui simetria de rotação de meia-volta.

Na figura 78 podemos observar os 7 tipos de frisos descritos anteriormente.



Fonte: [5]

Figura 79: Algoritmo dos 7 tipos de frisos



[19]

Grupo dos Papéis de Parede ou Cristalográficos de dimensão 2

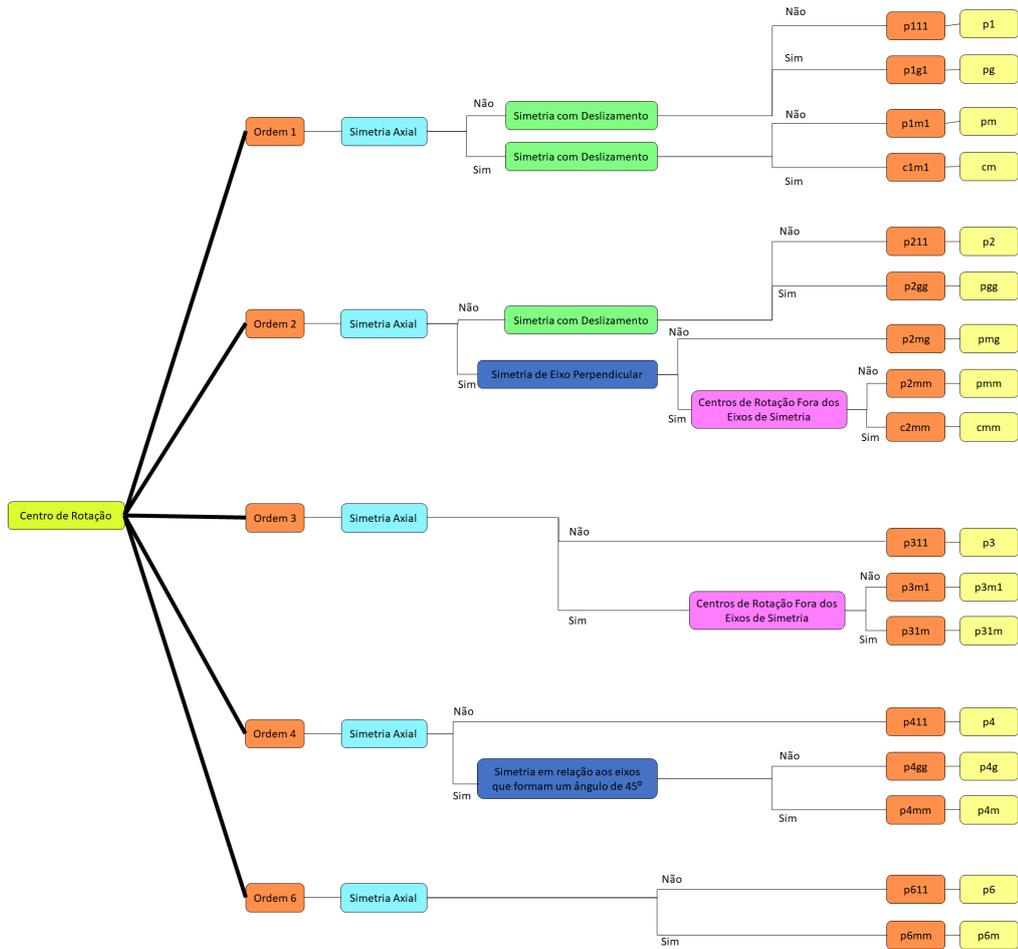
A teoria dos ornamentos originou-se no estudo das formas regulares dos cristais que obedecem a padrões periódicos. Fedorov foi um cristalógrafo russo que em 1891, identificou e classificou cada um deles. Foi somente nos anos 20, através dos trabalhos de Niggli e de Polya, que surgiram os 17 grupos de simetria que são denominados grupos cristalográficos bidimensionais.

O nome do grupo cristalográfico de cada um dos grupos de papel de parede foi estabelecida pela União Internacional de Cristalografia, também conhecida como notação Hermann-Mauguin e consta de quatro símbolos ordenados:

- Símbolo 1 - Terá a letra **c** (centrado), quando o paralelogramo primitivo é um losango que se pode emoldurar centrando-o em um retângulo e a letra **p** (primitivo) em qualquer outro caso. Dos 17 grupos, existem somente dois centrados: **cm** e **cmm**.
- Símbolo 2 - Representa a maior ordem de rotação que podemos encontrar. Quando um mosaico possui um centro de rotação de uma determinada ordem, também terá os outros centros divisores desta ordem. As ordens podem ser:
 - Ordem 1 - Não possui simetria de rotação.
 - Ordem 2 - Possui rotação de ângulo 180° .
 - Ordem 3 - Possui rotação de ângulo 120° .
 - Ordem 4 - Possui rotação de ângulo 90° .
 - Ordem 6 - Possui rotação de ângulo 60° .
- Símbolo 3 - Representa o tipo de simetria e pode conter dois símbolos:
 - m** do inglês "mirror- espelho, possui simetria de reflexão axial.
 - g** do inglês "glide- deslizamento, possui simetria de reflexão com deslizamento.
- Símbolo 4 - A mesma classificação do símbolo anterior, com respeito a presença ou não de um segundo tipo de eixo de simetria **m** ou **g**.

A identificação de grupos de revestimentos pode ser realizada através de um algoritmo na forma de um fluxograma, Figura 80 onde os grupos de simetria são mais facilmente compreendidos.

Figura 80: Algoritmo dos 17 tipos de papel de parede



[18]

Como mencionado anteriormente, Escher visitou por duas vezes Alhambra, e somente na segunda visita, conjuntamente com suas esposa Jeta, copiaram vários padrões encontrados nas paredes, tetos e chão do palácio. Na figura 81 podemos observar os 17 tipos de papel de parede encontrados em Alhambra e os esboços dos mesmos realizados por Escher e sua esposa, Figura 82.

Figura 81: Os 17 tipos de papel de parede de Alhambra



Fonte: [1]

Figura 82: Esboços de Alhambra realizados por Escher e Jeta

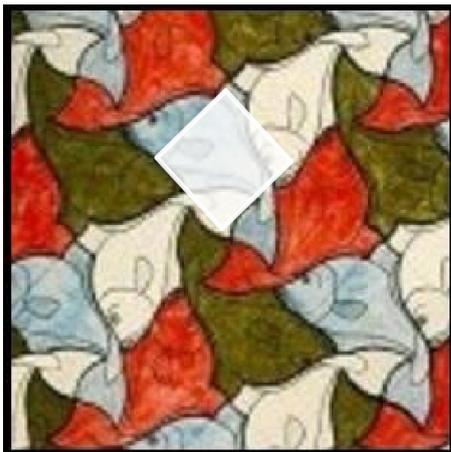


Fonte: [23]

A seguir, algumas obras de Escher com seus respectivos grupos de papel de parede de acordo com a classificação cristalográfica pelo qual é conhecido.

Na obra "Peixe", Figura 83 destacamos o quadrado como a figura base desta simetria e pertence ao grupo p4. Este grupo possui somente rotações de ordem 4 e rotações de ordem 2.

Figura 83: Escher e o grupo p4 de papel de parede



"Peixe- Grupo p4

Na obra "Lagarto", Figura 84 destacamos o hexágono regular como a figura base desta simetria e pertence ao grupo p3. Este grupo possui somente rotações de ordem 3.

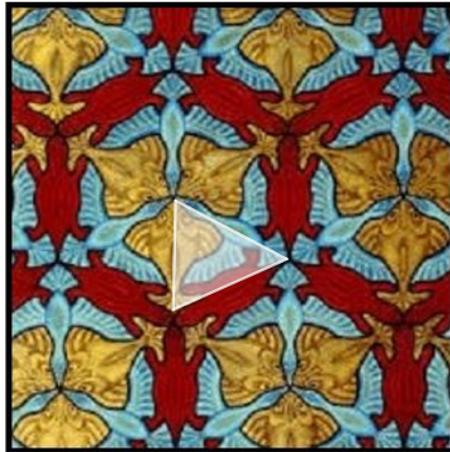
Figura 84: Escher e o grupo p3 de papel de parede



"Lagarto- Grupo p3

Na obra "Peixe, Pato e Lagarto", 85 destacamos o triângulo equilátero como figura base desta simetria e pertence ao grupo $p3m1$. Este grupo possui reflexões e rotações de ordem 3. Os eixos das reflexões são inclinados a 60° um para o outro e todos os centros de rotação situam-se nos eixos de reflexão.

Figura 85: Escher e o grupo $p3m1$ de papel de parede



"Peixe, Pato e Lagarto- Grupo $p3m1$

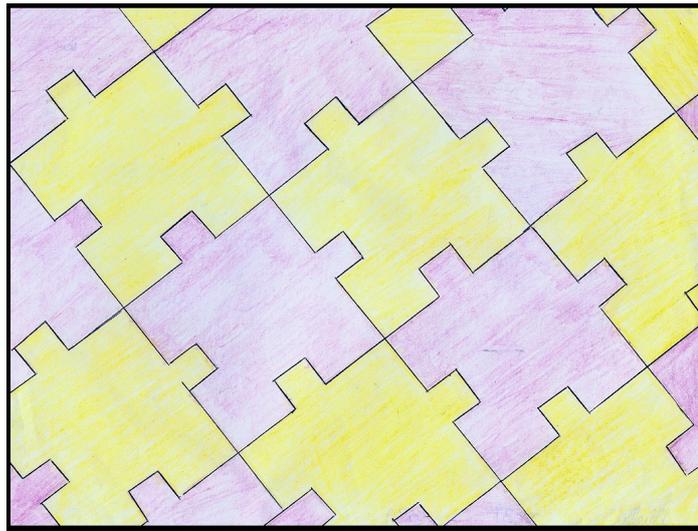
Na obra "Besouros", Figura 86 destacamos o losango como figura base desta simetria e pertence ao grupo cm . Este grupo contém reflexões e reflexões com deslizamento de eixos paralelos. Não há rotações e as translações podem ser inclinadas em qualquer ângulo umas das outras.

Figura 86: Escher e o grupo cm de papel de parede



"Besouros- Grupo cm

SUGESTÕES DE ATIVIDADES



Trabalho realizado pela aluna T.C.

O conceito de simetria é estudado e aplicado em diversos campos da ciência, da tecnologia e das artes, sendo possível utilizar diferentes contextualizações tornando-se assim um tema de fácil desenvolvimento e aprendizagem. Esse tema é de suma importância para o entendimento das transformações geométricas e um excelente ponto de partida para a construção das noções de proporcionalidade e congruência.

As atividades propostas possuem uma abordagem mais significativa do tema das isometrias, possibilitando ao aluno construir conceitos e utilizá-los na construção de ornamentos do plano euclidiano.

Para o desenvolvimento das atividades utilizamos como recursos didáticos as obras do artista Escher, bem como a utilização de vídeos e o software "GeoGebra".

Plano de Aula

Duração da Atividade: 8 aulas de 50 minutos

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio

Tema: Estudando as Isometrias Através das Obras de M.C.Escher

Objetivos:

1. Investigar e reconhecer formas congruentes e diferentes posicionamentos em uma superfície plana;
2. Relacionar posicionamentos de figuras congruentes em situações envolvendo reflexões, translações, rotações e reflexões com deslizamento;
3. Identificar padrões e pavimentações nas obras de Escher;
4. Reconhecer as diferentes simetrias utilizadas por Escher;
5. Construir figuras simétricas através do conceito de isometria;
6. Utilizar o software GeoGebra como ferramenta interativa e dinâmica no processo de aprendizagem das isometrias, possibilitando ao aluno construir, visualizar, alterar e transformar uma figura geométrica.
7. Reconhecer os critérios de diferenciação entre as simetrias através dos pontos fixos e da orientação do plano.

Atividade 1

Tema: Simetrias de Reflexão, Rotação e Translação

Duração: 2 aulas de 50 minutos

Recurso Utilizado : Sala de multimídia.

Esta atividade é utilizada como introdução ao tema das isometrias, com apresentação de pequenos vídeos onde o aluno possa compreender e ampliar seus conhecimentos sobre o tema e sua relação com as obras de Escher.

Esses vídeos apresentam os conceitos de forma clara, contextualizados no cotidiano do aluno e com destaque para questões do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) relacionadas ao tema.

Sugestões de vídeos:

1. **Simetrias no Enem - Reflexão**, que poderá ser visualizado no endereço:

<https://www.youtube.com/watch?v=77D8Vzp8Qlc>

Professor Eloy Machado

Resenha do vídeo : Vídeo de 11 minutos que apresenta o conceito intuitivo e formal de Simetria e sua relação com a natureza, ciência e arte. O conceito de reflexão através da reta e do ponto é amplamente desenvolvido.

Algumas obras de Escher são apresentadas, bem como questões do Enem que abordem a simetria de figuras e as transformações geométricas.

2. **Simetrias no Enem - Rotação**, que poderá ser visualizado no endereço:

<https://www.youtube.com/watch?v=-yh4YJFA364>

Professor Eloy Machado

Resenha do vídeo : Vídeo de 9 minutos onde o conceito de rotação é amplamente desenvolvido com vários exemplos e algumas questões do Enem que envolvem esse assunto são discutidas detalhadamente.

3. **Simetrias no Enem - Translação**, que poderá ser visualizado no endereço:

<https://www.youtube.com/watch?v=ue3anAcKRIs>

Professor Eloy Machado

Resenha do vídeo : Vídeo de 7 minutos onde o conceito de translação é amplamente desenvolvido com vários exemplos das obras de Escher e algumas questões do Enem que envolvem esse assunto são discutidas detalhadamente.

4. **Isto é Matemática - O Estranho Mundo de Escher**, que poderá ser visualizado no endereço:

<https://www.youtube.com/watch?v=7ac0WC3tzwU>

Professor Rogério Martins

Resenha do vídeo : Video de 8 minutos que apresenta polígonos, azulejos e pavimentações em museus europeus analisando suas simetrias, bem como o estranho e maravilhoso mundo de Escher.

Atividade 2

Tema: Identificando Tipos de Isometrias nas Obras de Escher

Duração : 1 aula de 50 minutos

Recurso Utilizado : Listas A, B, C e D, com três obras de Escher em cada lista.

Orientações: A aula deverá ser iniciada com um debate sobre as transformações geométricas identificadas nos vídeos da aula anterior para posteriormente o professor apresentar os conceitos formais de simetria e transformações geométrica que preservam distâncias (isometrias).

A seguir a turma deverá ser dividida em dupla para a realização da atividade de identificação das simetrias utilizadas por Escher, onde cada dupla receberá 4 listas num total de 12 obras a serem analisadas.

Caso o professor não disponha de cópias para todas as duplas, as listas poderão ser trocadas entre si e as respostas de cada dupla registradas em uma única folha. De modo que ao final da aula todos tenham identificado as 12 obras apresentadas.

Ao final da atividade o professor deverá compartilhar as respostas obtidas e fazer suas considerações finais.

LISTA A

Continuando nossos estudos, identifique em cada uma das obras de Escher, qual ou quais apresentam simetria de reflexão, translação, rotação ou reflexão com deslizamento. Justifique sua resposta.

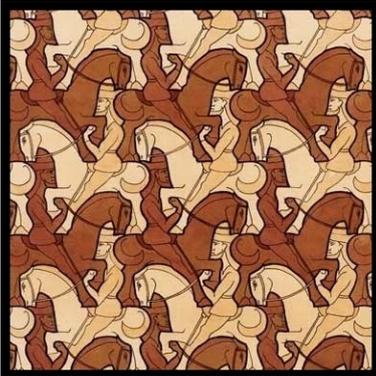


Figura A1 - Cavaleiro, 1946

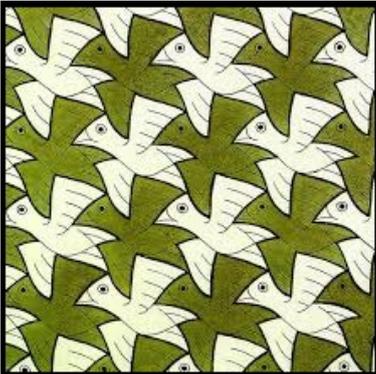


Figura A2 - Pássaro, 1952

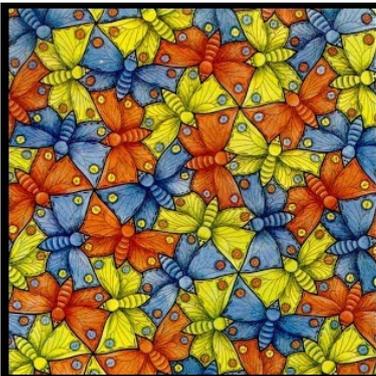


Figura A3 - Borboleta, 1948

LISTA B

Continuando nossos estudos, identifique em cada uma das obras de Escher, qual ou quais apresentam simetria de reflexão, translação, rotação ou reflexão com deslizamento. Justifique sua resposta.

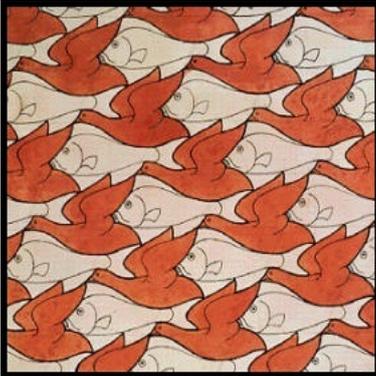


Figura B1 - Pássaro e Peixe, 1938

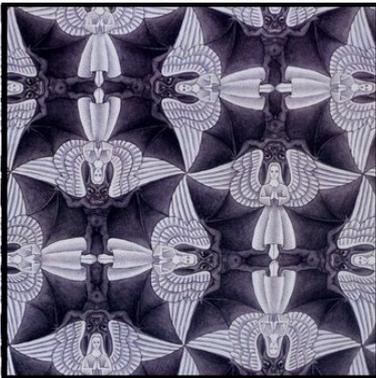


Figura B2 - Anjo e Demônio, 1941

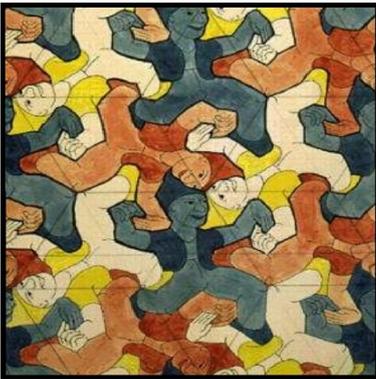


Figura B3 - Palhaços, 1938

LISTA C

Continuando nossos estudos, identifique em cada uma das obras de Escher, qual ou quais apresentam simetria de reflexão, translação, rotação ou reflexão com deslizamento. Justifique sua resposta.

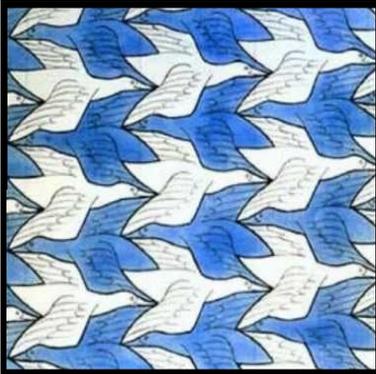


Figura C1 - Dois Pássaros, 1938



Figura C2 - Cavalo Marinho, 1937



Figura C3 - Peixe, 1942

LISTA D

Continuando nossos estudos, identifique em cada uma das obras de Escher, qual ou quais apresentam simetria de reflexão, translação, rotação ou reflexão com deslizamento. Justifique sua resposta.



Figura D1 - Leão Alado, 1945

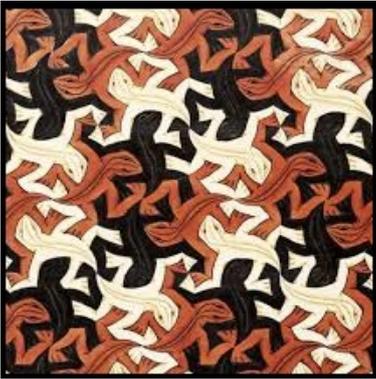


Figura D2 - Lagarto, 1942

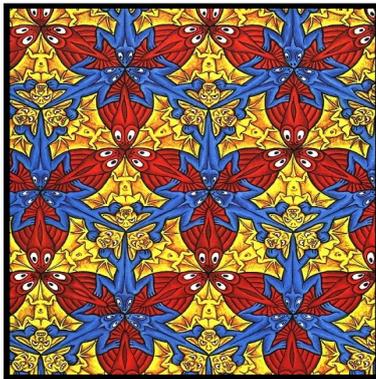


Figura D3 - Lagarto, Peixe e Morcego, 1952

Atividade 3

Tema: Construindo Uma Tesselação Através das Obras de Escher

Duração : De 2 aulas de 50 minutos

Recurso Utilizado : Sala de multimídia, cartolina, régua, tesoura, lápis de cor e caneta colorida.

O início desta atividade deverá ser a apresentação de dois pequenos vídeos sobre Tesselações, sendo o primeiro um vídeo somente com tesselações de Escher e o segundo um vídeo demonstrando a técnica de construção. Apesar do segundo vídeo ser em inglês, os alunos conseguem compreender facilmente a técnica utilizada.

Sugestão de Vídeos:

1. **Escher's Tessellations**, que poderá ser encontrado no endereço:

<https://www.youtube.com/watch?v=njp6yexWbfw>

Autora : Sarah M.

Vídeo de 6 minutos somente com apresentação das obras que Escher utilizou a técnica de pavimentação.

2. **Simple Tessellation English**, que poderá ser encontrado no endereço:

<https://www.youtube.com/watch?v=tJYtBF6gt4c>

Professor : Arving Gupta

Autor : Ashok Rupner - Fundação Tata Trust

Vídeo de 2 minutos em inglês, ensinando a fazer uma pavimentação através da construção de um pássaro obtido de um quadrado. Apesar do vídeo ser em inglês, ele é de fácil compreensão por ser bem detalhista.

Após a apresentação dos vídeos cada aluno deverá construir e colorir uma Tesselação utilizando as técnicas e conceitos adquiridos. O professor pode estipular ou não, o tamanho do polígono inicial que poderá ser um quadrado,

triângulo equilátero, hexágono regular ou retângulo para que o aluno possa iniciar os recortes formando uma nova figura geométrica que será utilizada para preenchimento do plano, ou seja, tesselação. O professor poderá aproveitar este momento para abordar o tema dos ângulos formados pelas figuras de uma tesselação e o porque somente estas quatro figuras geométricas poderão ser utilizadas.

Atividade 4

Tema: Isometrias no GeoGebra

Duração : De 2 a 3 aulas de 50 minutos

Recurso Utilizado : Sala de informática, software GeoGebra

Nesta atividade o aluno deverá explorar o software GeoGebra, afim de conhecer algumas de suas ferramentas e testar seus conhecimentos adquiridos em isometrias.

Caso a escola não disponha de número suficiente de computadores, os alunos poderão sentar-se em duplas de modo que ambos possam conhecer e explorar o software.

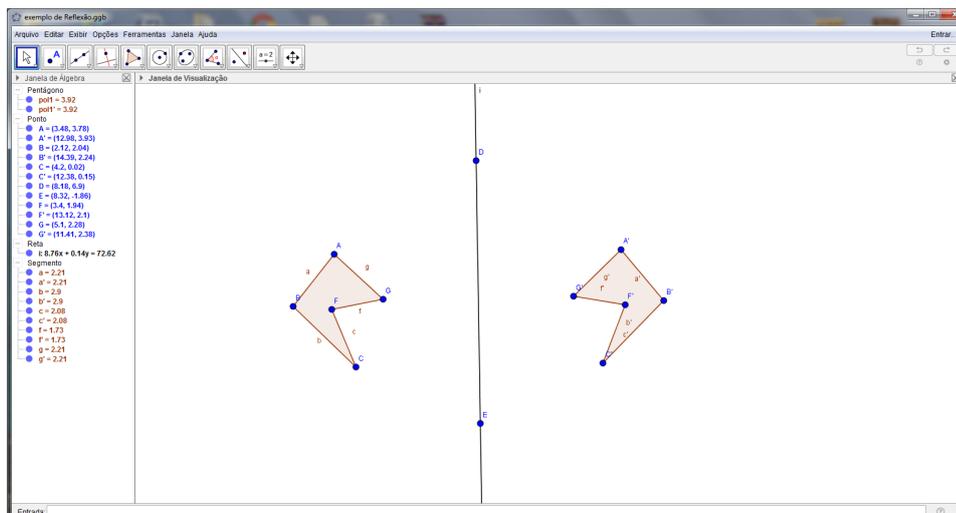
Sugerimos uma aula para apresentação das ferramentas e construção de figuras geométricas básicas, antes da execução do roteiro proposto abaixo, fazendo assim com que os alunos se familiarizem com o software.

Roteiro:

Sugiro que todos os computadores já estejam com o programa aberto e com a opção malha e eixos desabilitada.

1. Construa um polígono de sua preferência;
2. Construa uma reta ao lado deste polígono;
3. Selecione a opção reflexão e salve na opção "gravar como". Figura 87;
4. Verifique que se alterar o formato da figura original a imagem obtida através da reflexão também será alterada.

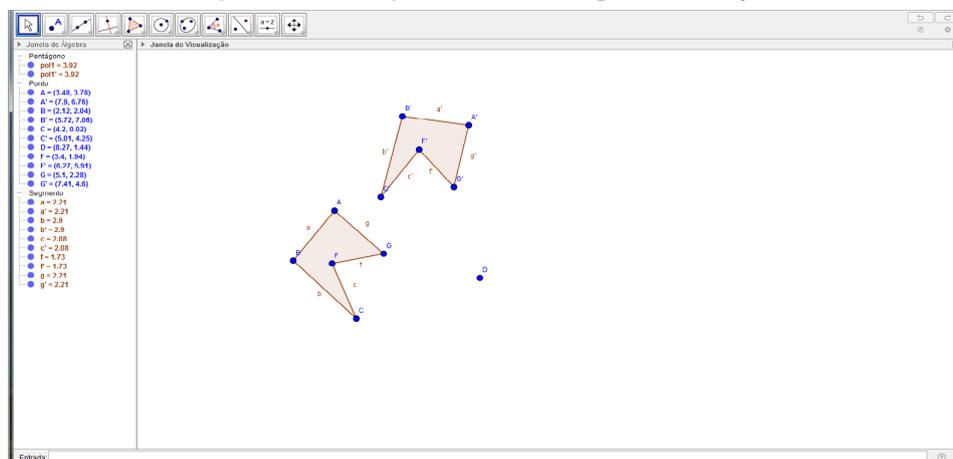
Figura 87: Geogebra com exemplo de reflexão



Fonte: Confecção da autora através do software GeoGebra

5. Para a construção de uma isometria de rotação serão necessários um polígono e um ponto do plano.
6. Selecione o polígono, o ponto e um determinado ângulo. Figura 88;

Figura 88: Geogebra com exemplo de rotação

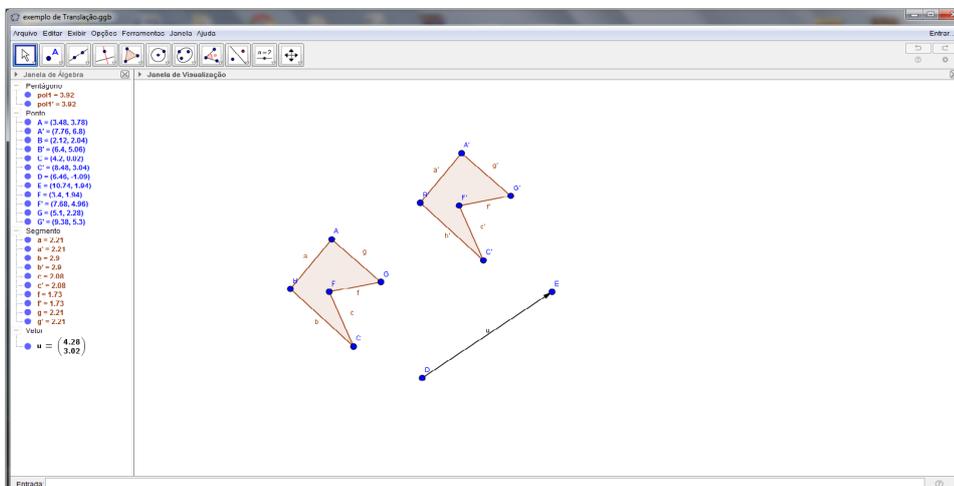


Fonte: Confecção da autora através do software GeoGebra

7. Para a construção de uma isometria de translação serão necessários construir um polígono e um vetor.

8. Selecione o polígono e o vetor. Figura 89;

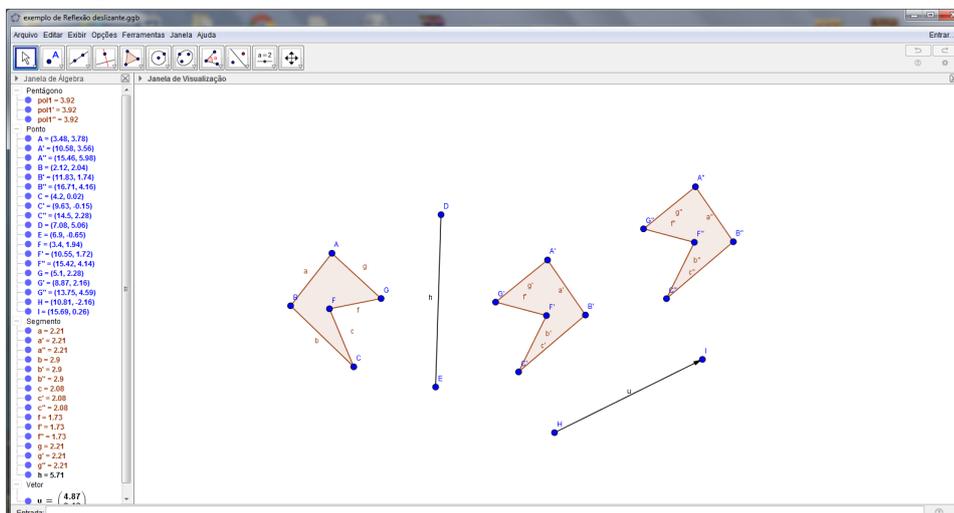
Figura 89: Geogebra com exemplo de translação



Fonte: Confecção da autora através do software GeoGebra

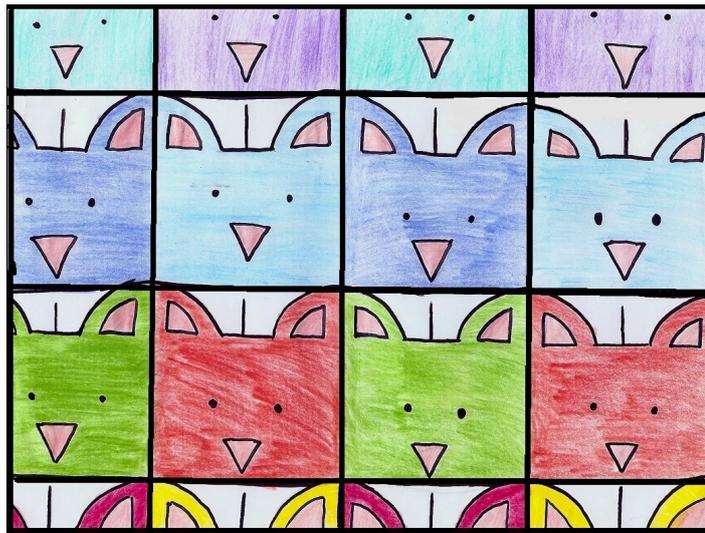
9. Para construir uma reflexão deslizante, o aluno poderá escolher se vai iniciar pela reflexão ou pela translação. Observe que não importando a ordem das isometrias aplicadas a imagem final será a mesma. Figura 90

Figura 90: Geogebra com exemplo de reflexão com deslizamento



Fonte: Confecção da autora através do software GeoGebra

REGISTRO DE APLICAÇÕES



Trabalho realizado pelas alunas A.F. e K.C.

Foram desenvolvidas atividades voltadas ao tema das isometrias utilizando as obras de Escher como agente motivador e foram aplicadas em 120 alunos do 3° ano do Ensino Médio de uma escola pública.

Alguns de nossos alunos desconheciam o conceito de transformação geométrica que preserva distâncias e apesar do tema não estar presente no conteúdo curricular do 3° ano, foi utilizado como revisão para o ENEM.

No primeiro momento, os alunos foram estimulados a apresentarem seus conceitos pessoais sobre simetria e muitos associaram rapidamente a estética corporal, pois simetria é um conceito inerente ao ser humano e nos sentimos naturalmente atraídos por tudo que é simétrico.

Após trocarem ideias, sem conhecimento do conceito formal sobre simetria, os alunos registraram suas observações sem qualquer intervenção da profes-

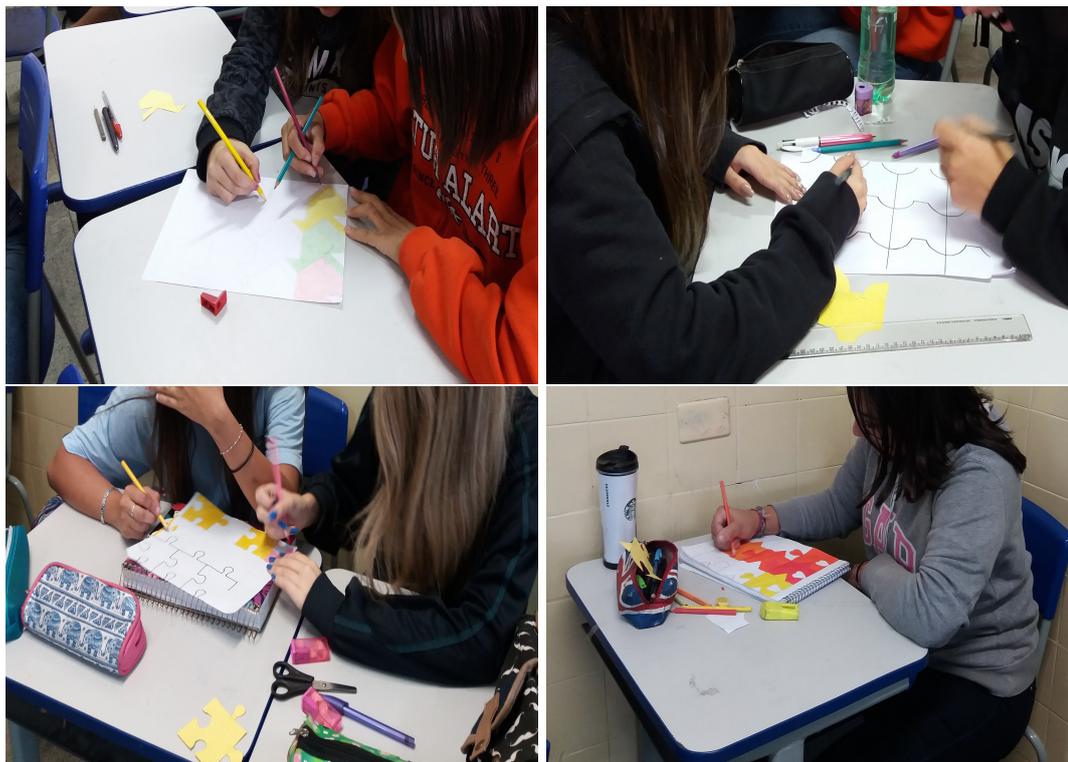
sora, pois o objetivo era que conseguissem perceber o quanto a simetria está presente em nossas vidas.

Num segundo momento, a professora apresentou os conceitos matemáticos necessários e em seguida os alunos foram levados à sala de vídeo para que assistissem aos vídeos do professor Eloy Machado, cujos temas são sobre as Simetrias no Enem, com aplicações dos conceitos e também algumas questões envolvendo reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante. Isso despertou grande interesse por parte deles, além do que, Escher é várias vezes mencionado, pois muitas de suas obras apresentam conceitos matemáticos de fácil percepção. A apresentação foi interrompida em alguns momentos para que eles resolvessem os problemas propostos antes da visualização dos resultados e conseguiram facilmente encontrar a alternativa correta. O vídeo sobre as obras de Escher foi bastante apreciado devido as técnicas, os movimentos e as cores utilizadas. Muitos ficaram admirados em perceberem tantos conceitos matemáticos numa obra cujo artista não era matemático.

Num terceiro momento os alunos foram divididos em duplas e cada dupla recebeu listas com 12 diferentes obras de Escher para que fossem analisadas, identificando assim, quais os tipos de simetrias encontradas em cada uma delas.

Os poucos erros apresentados nas análises das obras (somente 4 alunos), foram os relacionados com as reflexões deslizantes, demonstrando assim que o objetivo proposto foi alcançado, onde o aluno participa ativamente do seu processo de aprendizagem.

Num quarto momento, os alunos foram levados novamente à sala de multimídia e assistiram a dois vídeos relacionados às técnicas de tesselação de Escher e criação de um motivo geométrico. Ao retornarem para a sala de aula, a professora solicitou que trabalhassem em dupla ou individualmente e todos receberam um quadrado de cartolina com lado 7 cm para que criassem um motivo geométrico com recortes para ser utilizado na tesselação de uma folha de sulfite.

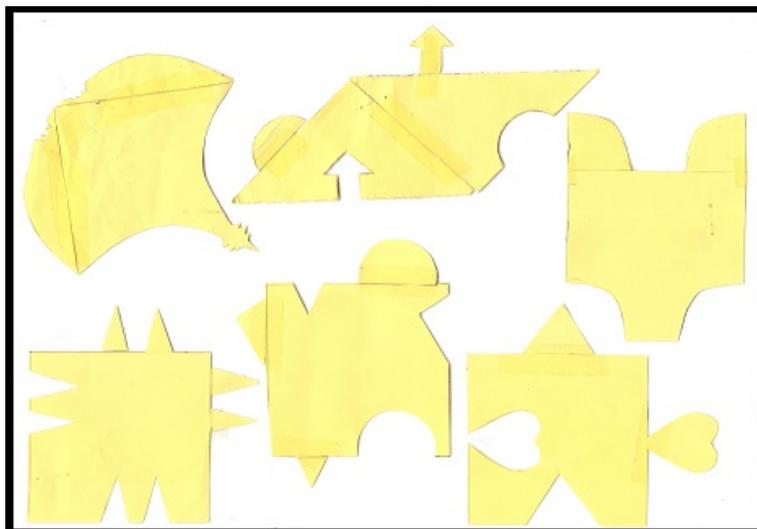
Figura 91: Aplicação da atividade 3

Fonte : Arquivo pessoal da professora

As atividades foram realizadas durante 3 aulas, sendo uma somente para a criação do padrão e as restantes para a pintura e acabamento. Todos participaram ativamente e não foi observado qualquer dificuldade para a realização desta atividade. O registro da aplicação pode ser observado na Figura 91.

Todos os trabalhos que ilustram o início de cada capítulo desse estudo, foram desenvolvidos nesta atividade onde os alunos partiram de um quadrado para pavimentar uma folha de sulfite. Na figura 92 apresentamos alguns dos padrões utilizados.

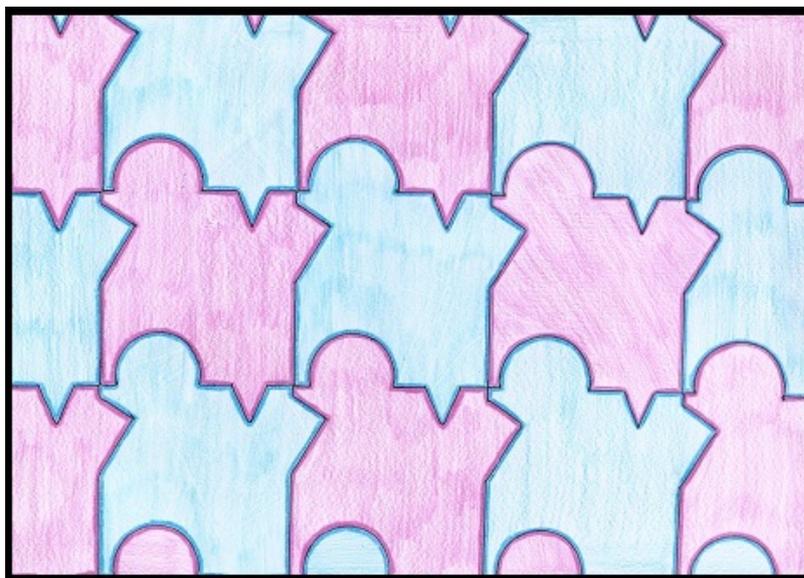
Num último momento, os alunos foram levados a sala de informática para a visualização e construção de figuras, bem como suas transformações geométricas, utilizando o software "GeoGebra". A aplicação desta atividade foi prejudicada pelo número reduzido de computadores, pois poucos estavam funcionando perfeitamente.

Figura 92: Alguns padrões criados pelos alunos

Fonte : Arquivo pessoal da professora

Os resultados obtidos na aplicação das atividades propostas, foram muito bons. Os alunos sentiram-se estimulados a estudar as isometrias, pois a exploração dos elementos matemáticos presentes nas obras de Escher é de fácil visualização e entendimento, conseqüentemente, os conceitos foram assimilados facilmente e resultando em excelentes trabalhos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS



Trabalho Realizado pela aluna S.G.C

Este estudo teve como objetivo utilizar as obras do artista M. C. Escher como subsídio ao ensino das isometrias, demonstrando assim que a matemática pode ser estudada e compreendida de uma maneira diferente e agradável, pois as obras de Escher nos fascinam com conceitos de padrões, movimentos, continuidades e ambiguidades.

É realmente incrível estudar sobre este artista que levava meses de trabalho e estudos prévios, para que suas obras fossem claramente definidas da melhor maneira e com a maior exatidão. Tudo que fazia era resultado de longa pesquisa pois não se permitia nenhuma liberdade artística, sem que antes tivesse encontrado alguma regularidade em seus projetos.

Escher obteve efeitos surpreendentes e únicos em suas produções e isso é o que o torna especial, pois suas obras estão repletas de padrões, regularidades, proporções, ordem e beleza. Conceitos que o aproximam cada vez mais da

matemática. Chegou até mesmo a ser chamado por alguns, como um artista com "alma" de matemático.

O estudo da obra de Escher nos permitiu compreender as diferentes possibilidades e familiaridades entre saberes produzidos nas práticas desse artista e nas práticas da matemática escolar.

Foi extremamente gratificante observar que a aquisição do conhecimento matemático precisa estar associado ao envolvimento do aluno, pois todas as atividades propostas foram muito bem recebidas e o interesse em aprender algo novo, compreensível e agradável era visível a todos.

Espero ter contribuído para que outros professores possam encontrar novas propostas de transformar a sala de aula em um local onde o aluno possa se sentir estimulado a construir seu próprio conhecimento, ampliando assim seus horizontes e acreditando que a matemática pode e deve ser vista como algo prazeroso e extremamente presente em sua vida.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Patronato.es ALHAMBRA, *Coleccion Artística del Patronato la Alhambra y Generalife, Granada*, <https://br.pinterest.com/pin/288511919864693921/>, acessado em 15/08/2017.
- [2] Sérgio ALVES e Maria E.E.L. GALVÃO, *Um Estudo Geométrico das Transformações Elementares*, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 1996.
- [3] Paulo BOULOS e Ivan de CAMARGO, *Geometria Analítica - um Tratamento Vetorial*, Mcgrawhill, 1987.
- [4] Paulo Roberto Martins CONTADOR, *A Matematica na Arte e na Vida*, Editora Livraria da Física, 2007.
- [5] Maria DEDÓ, Simonetta DI SIENO e Cristina TURRINI, *Il Ritmo Delle Forme*, Associazione Culturale Mimesis, Itália, 2001.
- [6] Hans DERIJK, *Espirais*, http://www.artistsmarket.com/escher_photos, acessado em 10/06/2017.
- [7] Bruno ERNEST, *The Magic Mirror of MC Escher*, Taschen America Llc, 2007.
- [8] André Luiz GALDINO, *Grupos, Subgrupos e Homomorfismos de Grupos*, https://galdino.catalao.ufg.br/up/635/o/algebra_I_ead_v1.pdf, acessado em 01/11/2017.
- [9] Camila GALVÃO, *Dezenove imagens que provam a simetria perfeita da natureza*, <http://m.megacurioso.com.br/fenomenos-da-natureza/75491-19-imagens-que-provam-a-simetria-perfeita-da-natureza.htm>, acessado em 20/07/2017.
- [10] Adamkaz/ GETTY IMAGES, *Eight Secrets of the Taj Mahal*, <http://www.travelandleisure.com/attractions/landmarks-monuments/>

- taj-mahal-unique-facts-history, acessado em 20/08/2017.
- [11] David E. JOYCE, *The 17 plane symmetry groups Department of Mathematics and computer science, Clark University*, <http://www2.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/seventeen.html>, acessado em 10/06/2017.
- [12] Nelson Etuo KADOWAKI, *Jardim Botânico de Curitiba - Dicas de final de semana com a família*, <http://fotografiasdelmundotodo.blogspot.com.br/2014/03/jardim-botanico-curitiba-dica-para.html>, acessado em 28/11/2017.
- [13] Paulo LANNES, *Arquitetura Árabe na Espanha*, <http://agenteviaja.net/colunas/arquitetura-arabe-construida-espanha/>, acessado em 16/07/2017.
- [14] Erika Brigitta LEDERGERBER-RUOFF, *Isometrias e Ornamentos do Plano Euclidiano*, Atual Editora, 1982.
- [15] Elon Lages LIMA, *Isometrias*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.
- [16] George E. MARTIN, *Transformation Geometry: An introduction to symmetry*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] Daniel MIRANDA, Rafael GRISI e Sinuê LODOVICI, *Geometria Analítica e Vetorial*, Universidade Federal do ABC, 2016.
- [18] José Antonio MOURA, *El nombre del grupo cristalográfico*, <http://jmora7.com/Mosaicos/4300gupos.htm>, acessado em 01/02/2018.
- [19] Maria Augusta Ferreira NEVES, *Isometrias*, <https://pt.slideshare.net/Pedro279/isometrias-augusta-neves>, acessado em 01/10/2017.
- [20] Clube de Matemática da OBMEP, *A Técnica da Dentada*, http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-escher_13/, acessado em 20/07/2017.
- [21] Augusto J.Franco de OLIVEIRA, *Transformações Geométricas*, Universidade Aberta, 1997.
- [22] Renato SOARES, *Cestos da etnia Wajãpi, Imagens do Brasil*, http://www.imagensdobrasil.art.br/produtos/3492/19/4/Cestaria_Wajãpi#.WW559TYuM8, acessado em 15/04/2017.

- [23] José Ezequiel Soto SÁNCHEZ, *Geometria, Arte Islâmica e o Trabalho de DE M.C. Escher*, <http://w3.impa.br/~cheque/fm2017/>, acessado em 28/10/2017.
- [24] Elbert A. WALKER, *Introduction to Abstract Algebra*, New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico, USA, 1998.
- [25] Dennis WOJTKIEWICZ, *A bela simetria revelada nos cortes transversais e longitudinais de algumas frutas*, <http://valedodaniel.blogspot.com.br/2017/06/a-bela-simetria-revelada-nos-cortes.html>, acessado em 28/09/2017.