



LUIZ CARLOS BARBOSA DE QUEIROZ

**SEÇÕES DOURADAS DE TRIÂNGULO CENTRAL NO TRIÂNGULO DE
OURO**

Santo André, 2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL**

LUIZ CARLOS BARBOSA DE QUEIROZ

**SEÇÕES DOURADAS DE TRIÂNGULO CENTRAL NO TRIÂNGULO DE
OURO**

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa
de Pós Graduação de Mestrado em Matemática em
Rede Nacional para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO LUIZ CARLOS BARBOSA DE QUEIROZ,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

SANTO ANDRÉ, 2018

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Barbosa de Queiroz, Luiz Carlos
Seções douradas de triângulo central no triângulo de ouro / Luiz
Carlos Barbosa de Queiroz. — 2018.

46 fls. : il.

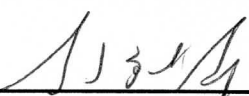
Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2018.

1. Razão áurea. 2. Triângulo de ouro curto. 3. Triângulo de ouro
alto. I. da Silva, Márcio Fabiano. II. Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2018. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 19 de abril de 2018.

Assinatura do autor: 

Assinatura do orientador: Márcio Fabiano da Silva



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Luiz Carlos Barbosa de Queiroz, realizada em 28 de fevereiro de 2018:

Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Armando Caputi

Prof.(a) Dr.(a) **Armando Caputi** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves

Prof.(a) Dr.(a) **Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves** (Universidade de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre Lymberopoulos** (Universidade de São Paulo) – Membro Suplente



Dedico este trabalho a minha família pelo apoio em todas as etapas da minha vida.

Dedico também aos professores de matemática com quem estudei, deixando cada qual a sua contribuição.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela oportunidade de poder realizar este sonho.

Mais uma vez a minha família, pelo apoio e incentivo mesmo nos momentos mais difíceis desta jornada.

Aos amigos que conquistei no PROFMAT, pelo companheirismo e auxílio.

Aos colegas de trabalho, pela compreensão, incentivo e colaboração.

Ao meu orientador professor Dr. Márcio Fabiano da Silva, pela sua paciência nas correções, sugestões e materiais de apoio fornecidos.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudos concedida ao longo de todo o Mestrado.

RESUMO

Nesta dissertação exploramos o número de ouro, ou razão áurea Φ presente em diferentes contextos como segmento dividido em média e extrema razão, o retângulo áureo, os triângulos áureos e o pentágono regular. Em especial, os triângulos áureos de um pentágono regular, chamados de triângulos centrais de ouro e a obtenção da razão áurea através das relações das áreas dos triângulos; através das relações entre os incentros, ortocentros, circuncentros e lados dos triângulos. Construimos círculos de 9 pontos e destacamos a presença da razão áurea, em sua maioria, na reta central dos triângulos de ouro, limitadas pelo vértice comum e o ponto médio de sua base isósceles e o centro de cada circunferência de 9 pontos. Apresentamos ainda, propostas de atividades, em sala de aula, para abordar de maneira diferenciada com os alunos o número de ouro Φ , acompanhadas de suas resoluções presentes em um apêndice.

Palavras-chave: razão áurea, triângulo de ouro curto, triângulo de ouro alto.

ABSTRACT

In this dissertation we explore the number of gold, or golden ratio Φ present in different contexts as segment divided into average and extreme ratio, golden rectangle, golden triangles and regular pentagon. In particular, the golden triangles of a regular pentagon, called central golden triangles and the attainment of the golden ratio through the relations of the triangle areas; through the relationships between the incenters, orthocentres, circumcenters, and sides of the triangles. We construct a circle of 9 points and we emphasize the presence of the golden ratio, for the most part, in the central line of the golden triangles, limited by the common vertex and the midpoint of its isosceles base and the center of each circumference of 9 points. We also present proposals for activities in the classroom to approach students in a differentiated way the number of gold Φ , accompanied by their resolutions present in an appendix.

Keywords: golden ratio, short golden triangle, high golden triangle.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO	1
1 O QUE É O NÚMERO DE OURO	5
1.1 O que é o número de ouro	5
1.2 Mais algumas formas de obtenção do número de ouro	7
1.3 Algumas propriedades que envolvem o número de ouro	10
2 O NÚMERO DE OURO NA GEOMETRIA	13
2.1 Triângulos Áureos	13
2.2 Retângulo Áureo	17
2.3 Espirais	19
2.4 Pentágono	21
3 SEÇÕES DOURADAS NOS TRIÂNGULOS DE OURO	25
3.1 Resultados Preliminares	25
3.1.1 Teorema da Bissetriz Interna	25
3.1.2 Lei dos Senos	26
3.1.3 Círculo de 9 Pontos	28
3.2 Seções Douradas em triângulos curtos e altos no Pentágono Regular . . .	32
4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES NA EDUCAÇÃO BÁSICA	47
4.1 Atividade 1 - Determinando o ponto de divisão áurea de um segmento .	47
4.2 Atividade 2 - Construindo um retângulo com seções áureas	48
4.3 Atividade 3 - Construção de uma seção áurea	49
4.4 Atividade 4 - Construindo um pentágono regular	50
4.5 atividade 5 - O número de ouro na razão entre áreas de triângulos de ouro	52
4.6 Atividade 6 - Triângulos de ouro curto e alto	54
A APÊNDICE A	57
A.1 Determinando o ponto de divisão áurea de um segmento	57
A.2 Construindo um retângulo com seções áureas	59

A.3	Construção de uma seção áurea	61
A.4	Construindo um pentágono regular	63
A.5	O número de ouro na razão entre áreas de triângulos de ouro	66
A.6	Triângulos de ouro curto e alto	69
	Bibliografia	75

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi elaborado visando a despertar no aluno de Educação Básica o interesse pelo estudo da Matemática, associando as relações entre vários temas centrais algébricos e geométricos e buscando significado para cada etapa, pois de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, o ensino deve proporcionar ao aluno um desenvolvimento da capacidade de raciocínio lógico matemático e formar cidadãos críticos, resolvendo os problemas que a vida em sociedade apresenta, com habilidade de fazer inferências e apresentar argumentações concisas.

Sabemos que os números e suas relações fazem parte da história da humanidade, despertando o encantamento e curiosidade de muitos estudiosos. Desde os tempos de Euclides (século III a.C.), dos Pitagóricos (século V a.C.) até os dias atuais os homens dedicam os estudos à Matemática procurando proporções, padrões ou até regularidades em objetos, na natureza e até no universo. Muitas descobertas se deram a partir do encantamento que os números provocam.

Um problema que chamou a atenção dos estudiosos em Matemática, desde Euclides, foi a incomensurabilidade de um segmento, pois é possível construir dois segmentos cuja razão entre eles não pode ser expressa por número racional. É o caso do número π (π), de aproximadamente, 3,1416... que é a razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro; o número e , ou número de Euler, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é a base dos logaritmos naturais e também utilizado no cálculo de juros compostos. Seu valor é, de aproximadamente, 2,7182.... Mas também do número Φ (Fi), de aproximadamente, 1,61803..., número que está presente em nosso meio de variadas formas: na arte, na arquitetura, na natureza, em formas geométricas, e até em algumas razões matemáticas.

Pensando nisso, nosso estudo se baseará nas relações existentes nos triângulos dourados curto e alto que formam um pentágono regular inscrito em uma circunferência, isto é, relações que apresentam o número de ouro Φ .

Este trabalho está dividido em quatro capítulos e um apêndice de modo que no primeiro capítulo será apresentado, após uma breve contextualização histórica, o que é

o número de ouro e uma forma algébrica de obtenção a partir de um segmento, dividindo em média e extrema razão. Estudaremos, na forma de exemplos, aproximações para o número de ouro a partir de radicais e de frações contínuas. Faremos uma construção geométrica de uma divisão áurea em um segmento qualquer e apresentaremos duas propriedades envolvendo o número de ouro.

No segundo capítulo, evidenciamos a presença do número de ouro a partir da razão dos lados em dois tipos de triângulos isósceles: o curto, com ângulos de 36° , 36° e 108° ; e o alto, com ângulos de 72° , 72° e 36° . Construiremos uma espiral formada a partir de triângulos dourados inscritos infinitamente a partir de cada uma de suas bissetrizes. Apresentaremos uma forma de construir retângulo com seções douradas, bem como espiral a partir de infinitos retângulos áureos semelhantes e inscritos no retângulo áureo inicial. E, estudaremos a presença do número de ouro no pentágono regular a partir da razão de uma diagonal com o lado, e dos segmentos formados pelas intersecções das diagonais.

No terceiro capítulo, estudaremos a presença do número de ouro no pentágono regular a partir das relações entre os triângulos dourados curto e alto nos vértices do pentágono regular e os seus pontos de incentro, ortocentro e circuncentro. Encontraremos também o número de ouro nas relações dos centros dos círculos de nove pontos formados pelos triângulos dourados curto e alto do pentágono regular e seus incentros e circuncentros.

No quarto capítulo, apresentaremos seis propostas de atividades para os alunos com objetivo de ampliar o repertório matemático nas suas resoluções e despertar o interesse pelo estudo da Matemática, encontrando o número de ouro nas construções geométricas com segmento dividido em média e extrema razão, retângulo áureo e pentágono regular e suas diagonais; na relação entre áreas de triângulos dourados alto e curto, nesta ordem, a partir dos vértices de um pentágono regular; e nas relações dos lados de um triângulo isósceles curto (36° , 36° e 108°) com seu incentro, ortocentro e circuncentro.

Por fim, este trabalho aborda um apêndice com as resoluções e demonstrações das propostas de atividades dos alunos presentes no capítulo quarto, visando um melhor aproveitamento pelo educador.

Não podemos deixar de relatar que as figuras presentes neste trabalho foram criadas com o auxílio de um recurso computacional denominado Geogebra, na versão 5.0: um software livre, de matemática dinâmica, criado para o ensino e aprendizagem da ma-

temática, agrupando recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um mesmo ambiente.

O QUE É O NÚMERO DE OURO

Neste primeiro capítulo da dissertação, apresentaremos alguns conceitos que serão úteis para o desenvolvimento do trabalho. Definiremos o número irracional Φ que corresponde a razão áurea, explorando algumas propriedades e discutiremos algumas formas de obtenção aplicando o conceito da razão extrema e média bem como onde encontramos a razão áurea. Faremos a construção geométrica da razão áurea com régua e compasso e discutiremos sobre o conjugado do número Φ . Para isso nos valeremos das referências [3], [5], [6], [10], [11].

1.1 O QUE É O NÚMERO DE OURO

O número de ouro ou proporção áurea é uma constante real algébrica irracional que na literatura matemática tinha por símbolo a letra grega tau (τ), indicando “a seção” ou “o corte”. Porém, o matemático americano Mark Barr deu à razão o símbolo de Phi (Φ), no início do século XX, a primeira letra grega do nome de Fídeas, em homenagem ao escultor que viveu entre 490 e 430 a.C. As maiores realizações de Fídeas foram o “Partenon de Atenas”, com suas estruturas contemplando as proporções douradas, bem como a largura entre as colunas e suas alturas e o “Zeus” no templo de Olímpia. Este número também é conhecido como razão áurea, razão de ouro ou média e extrema razão. Se apresenta numa infinidade de elementos da natureza e é definido como:

Definição 1.1. Dado um segmento \overline{AB} , dizemos que um ponto $X \in \overline{AB}$ divide o segmento \overline{AB} em média e extrema razão se $\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{XB}$. Neste caso, o número real

positivo $\frac{AB}{AX} (= \frac{AX}{XB})$, também denotado pela letra grega Φ , é chamado de razão áurea (ou razão dourada).

Sendo $AB = x$ e $AX = y$, conforme ilustrado na Figura 1, temos que

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y} = \Phi.$$

Segue que $x = y\Phi$. Logo,

$$\frac{y\Phi}{y} = \frac{y}{y\Phi - y}.$$

Consequentemente,

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \tag{1.1}$$

cujas raízes são:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343656381177203091 \dots$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,6180339887498948482045868343656381177203091 \dots$$

A solução positiva nós chamamos de número de ouro ou número Φ . Já a solução negativa é conhecida como o conjugado do número Φ cujo símbolo podemos representar por $\bar{\Phi}$ ou simplesmente por φ , pois a sua soma com o número Φ resulta em 1.

Então, por (1.1), temos que:

$$\Phi + \bar{\Phi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1.$$

Observação 1.1.1. O produto das raízes de (1.1) resulta em -1 , isto é, $\Phi\bar{\Phi} = -1$, podendo-se afirmar que $\bar{\Phi} = -\frac{1}{\Phi}$.

Demonstração. Sejam as raízes da equação (1.1) $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Então, o produto das raízes, são:

$$\Phi\bar{\Phi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \times \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - 5}{4} = -1.$$

Temos ainda que

$$-\frac{1}{\Phi} = -\frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \bar{\Phi}.$$

□

O número áureo é conhecido há muitos anos. Já no livro *Os Elementos VI*, Euclides trata de um problema de sectionar um segmento em extrema e média razão. Menciona, em [3], o corte de uma reta finita em extrema e média razão.



Figura 1: Ponto X dividindo o segmento AB em média e extrema razão

O segmento obtido através da definição anterior pode ser encontrado também de maneira geométrica, mais precisamente utilizando régua e compasso, mas deixaremos o processo de construção para discussão na próxima seção.

1.2 MAIS ALGUMAS FORMAS DE OBTENÇÃO DO NÚMERO DE OURO

Na seção anterior vimos que a forma quadrática (1.1) resulta na razão áurea. Nesta seção vamos manipular a equação quadrática a fim de encontrarmos outras relações matemáticas para o número áureo e também realizaremos algumas construções geométricas onde obteremos a razão áurea.

Exemplo 1.1. A seguir mostraremos como escrever uma aproximação para o número áureo a partir de radicais:

A partir da equação (1.1) encontramos:

$$\Phi^2 = \Phi + 1.$$

Aplicando em ambos os membros o radical, encontramos:

$$\Phi = \sqrt{1 + \Phi}.$$

aplicando recursivamente este resultado, encontramos:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (1.2)$$

Exemplo 1.2. A seguir mostraremos como escrever uma aproximação para o número áureo a partir das frações contínuas:

A partir da Equação (1.1) encontramos:

$$\Phi^2 = \Phi + 1.$$

Dividindo por Φ a equação podemos escrever que:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}. \quad (1.3)$$

Usando recursivamente este resultado para Φ obtemos:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}. \quad (1.4)$$

Exemplo 1.3. Utilizando régua e compasso, obteremos um ponto M seccionando um segmento \overline{AB} , obtendo uma razão áurea conforme Figura 1.

1. Trace um segmento qualquer \overline{AB} ;
2. Trace uma perpendicular \overline{BC} ao segmento \overline{AB} de tal modo que o comprimento BC seja igual à metade do comprimento AB ;
3. Trace um segmento do ponto A até o ponto C , determinando o triângulo $\triangle ABC$ retângulo em B ;

4. Trace uma circunferência de raio BC com centro em C , determinando o ponto N no segmento \overline{AC} ;
5. Trace a circunferencia de raio AN com centro em A , determinando o ponto M no segmento \overline{AB} .

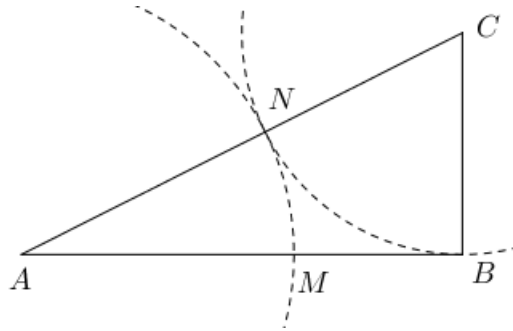


Figura 2: Ponto M dividindo o segmento \overline{AB} na razão áurea

Na Figura 2 o ponto M está dividindo o segmento \overline{AB} na razão áurea, isto é,

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{BM} = \Phi.$$

O resultado desta construção pode ser facilmente demonstrado conforme segue:

Demonstração. Sejam as medidas dos segmentos $AB = x$ e $BC = NC = \frac{x}{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras temos que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = x^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$AC = \frac{x}{2}\sqrt{5}.$$

Sabendo que $AN = AM$ e que $BC = CN$ podemos calcular que:

$$AM = AC - BC$$

$$AM = \frac{x}{2}\sqrt{5} - \frac{x}{2}$$

$$AM = \frac{x}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Então, podemos obter que:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi.$$

Portanto,

$$\frac{AB}{AM} = \Phi.$$

□

Constatamos ao longo desta seção, na forma de exemplos, como podemos obter aproximações da razão áurea através de radicais em (1.2), mas também podemos obter aproximações para o número Φ através de frações contínuas em (1.4). Verificamos também como obter uma razão áurea através de um segmento de medida qualquer apenas utilizando régua e compasso e na próxima seção apresentaremos algumas propriedades que estão contidas na razão áurea.

1.3 ALGUMAS PROPRIEDADES QUE ENVOLVEM O NÚMERO DE OURO

Nesta seção apresentaremos duas propriedades que o número de ouro apresenta, seguidas de suas devidas demonstrações. A primeira relaciona a potência de números inteiros e a segunda o somatório de números inteiros negativos.

Propriedade 1.1. *Dados quaisquer três números inteiros consecutivos $n, n + 1, n + 2$, então será sempre verdade que $\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^{n+2}$.*

Demonstração. Pela Equação (1.1), temos que $\Phi^2 = 1 + \Phi$. Assim,

$$\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^n (1 + \Phi) = \Phi^n \Phi^2 = \Phi^{n+2}.$$

□

Propriedade 1.2. *A série de todas as potências de Φ com expoentes inteiros negativos é igual a Φ , isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-n} = \Phi$.*

Demonstração. A soma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-n} = \Phi$ é a série geométrica cujo primeiro termo é

$\frac{1}{\Phi}$ e cuja razão é $\frac{1}{\Phi} < 1$. Assim, esta série converge para o número real $S = \frac{\frac{1}{\Phi}}{1 - \frac{1}{\Phi}} =$

$\frac{1}{\Phi - 1}$. Segue da Equação (1.1) que $S = \frac{\Phi^2 - \Phi}{\Phi - 1} = \frac{\Phi(\Phi - 1)}{\Phi - 1} = \Phi$.

□

No próximo capítulo abordaremos o número de ouro na Geometria, verificando sua presença em algumas formas geométricas.

O NÚMERO DE OURO NA GEOMETRIA

Neste capítulo buscaremos a razão áurea triângulos curto e alto, no retângulo, no pentágono regular, bem como nas espirais. Veremos algumas aplicações da razão áurea com a Natureza, na Arquitetura e nas Artes. Para isso nos valeremos das referências [3], [5], [6], [11].

2.1 TRIÂNGULOS ÁUREOS

Nesta seção estudaremos o triângulo isósceles de ouro que será muito útil para o desenvolvimento deste trabalho. Veremos que pode se apresentar de duas maneiras: o triângulo isósceles alto e o triângulo isósceles baixo ou curto. Veremos a diferença entre suas definições e apresentaremos suas construções. A seguir temos as definições de ambos triângulos isósceles e em seguida mostraremos que num triângulo isósceles áureo podemos inscrever infinitos triângulos isósceles áureos.

Definição 2.1. Dizemos que um triângulo isósceles é um triângulo de ouro curto quando a razão entre a medida da base e a medida de um dos lados congruentes, nesta ordem, corresponde à razão áurea, isto é, resulta em $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Proposição 2.2. *Todo triângulo cujos ângulos medem 36° , 36° e 108° é um triângulo de ouro curto.*

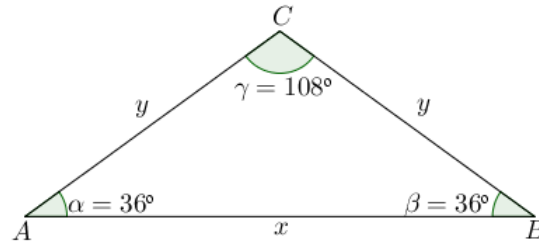


Figura 3: Triângulo isósceles curto

Demonstração. Sejam, $AB = x$, $BC = AC = y$, conforme ilustrado na Figura 3. Traçaremos um segmento \overline{CD} cujo ponto D seja intersecção do segmento \overline{AB} de maneira que a $\text{med}(\widehat{BCD}) = 36^\circ$. Em seguida podemos observar que o triângulo $\triangle ABC$ foi dividido em dois triângulos isósceles sendo o $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ pelo caso ângulo-lado-ângulo. Podemos obter seus lados conforme segue:

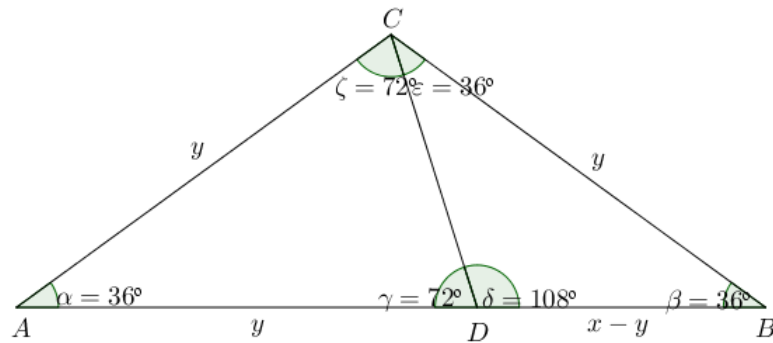


Figura 4: Triângulo de ouro

Pela relação de semelhança nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BCD$, temos que:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB}{BC}.$$

Ou podemos escrever conforme segue:

$$\frac{y}{x-y} = \frac{x}{y}.$$

Multiplicando ambos membros por $(x-y)y$, temos que:

$$y^2 = x(x-y).$$

Ou ainda,

$$x^2 - xy - y^2 = 0.$$

Desenvolvendo a equação quadrática, temos que:

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2} = \frac{y + y\sqrt{5}}{2}$$

Logo, se $\frac{x}{y} \neq \emptyset$, temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Portanto, em um triângulo de ouro curto $\triangle ABC$ a razão $\frac{AB}{AC} = \Phi$. □

Definição 2.3. Dizemos que um triângulo isósceles é um triângulo de ouro alto (ou longo) quando a razão entre a medida de um dos lados congruentes e a medida da base, nesta ordem, corresponde à razão áurea, isto é, resulta em $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Proposição 2.4. *Todo triângulo cujos ângulos medem $72^\circ, 72^\circ$ e 36° é um triângulo de ouro alto.*

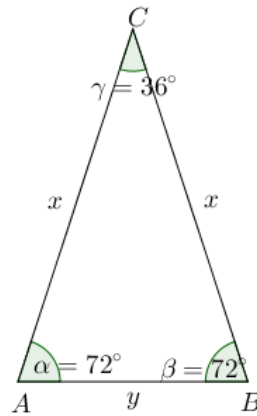


Figura 5: Triângulo isósceles alto

Demonstração. Sejam $AC = BC = x$, $AB = y$, conforme ilustrado na Figura 5. Traçaremos a bissetriz do ângulo \widehat{ABC} obtendo o ponto D pertencente ao segmento \overline{AC} . Em seguida podemos observar que o triângulo $\triangle ABC$ foi dividido em dois triângulos isósceles sendo o $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ pelo caso ângulo-lado-ângulo. Podemos obter seus lados conforme segue:

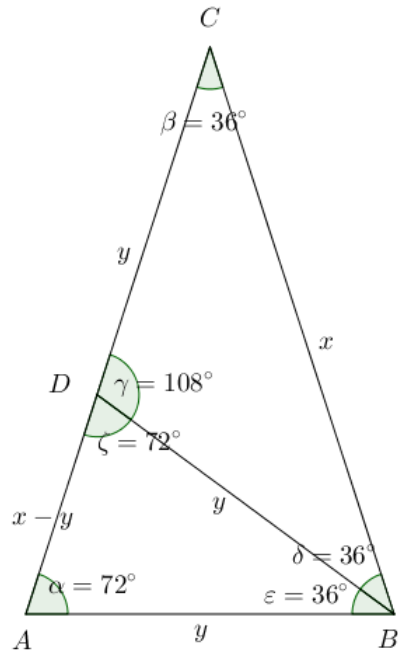


Figura 6: Triângulo de ouro

Pela relação de semelhança nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADB$, temos que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}.$$

Ou podemos escrever conforme segue:

$$\frac{y}{x-y} = \frac{x}{y}.$$

Multiplicando ambos membros por $(x-y)y$, temos que:

$$y^2 = x(x-y).$$

Ou ainda,

$$x^2 - xy - y^2 = 0.$$

Desenvolvendo a equação quadrática, temos que:

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2} = \frac{y + y\sqrt{5}}{2}$$

Logo, se $\frac{x}{y} \neq \emptyset$, temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Portanto, em um triângulo áureo alto $\triangle ABC$ a razão $\frac{AC}{AB} = \Phi$. □

A seguir, apresentaremos a construção de uma sequência inscrita e infinita de triângulos isósceles áureos.

1. Construir um triângulo isósceles não equilátero $\triangle ABC$ de base AB e $\text{med}(\widehat{ACB}) = 36^\circ$;
2. Marcar o ponto D no segmento \overline{AC} , tal que D seja a intersecção do segmento \overline{AC} com a bissetriz de \widehat{ABC} ;
3. Marcar o ponto E no segmento \overline{BD} , tal que E seja a intersecção do segmento \overline{BD} com a bissetriz de \widehat{BAC} ;
4. Repetir o processo anterior para marcar os pontos F , G e H .

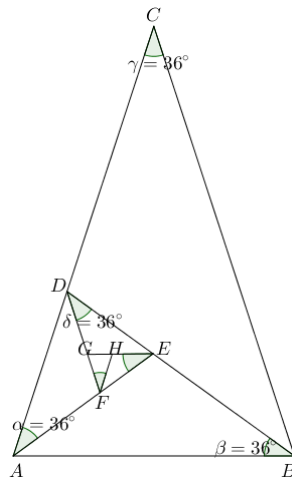


Figura 7: Triângulos isósceles inscritos

2.2 RETÂNGULO ÁUREO

Podemos encontrar na Arquitetura e na Arte, com certa frequência, a utilização de formas geométricas retangulares na proporção áurea por trazer uma agradável proporção aos olhos de quem as vêem. Alguns exemplos são o edifício sede da Organização das Nações Unidas em Nova Iorque, o *Partenon* em Atenas, *Zeus* no templo de Olímpia, em obras de Leonardo Da Vinci como *Monalisa* e *São Gerolamo*, nas obras de Sandro Botticelli como *O nascimento de Vênus* e tantos outros que a utilizaram em seus trabalhos. E nesta seção abordaremos o retângulo áureo, explorando a sua construção

geométrica, obtendo o número Φ através da razão, validada pela demonstração. Faremos ainda construção de retângulos áureos inscritos em um retângulo áureo inicial.

Definição 2.5. É chamado de retângulo áureo todo retângulo cuja razão entre o seu comprimento (dimensão maior) e a sua largura (dimensão menor) resulte na proporção áurea.

Isto é, um retângulo $\square ABCD$, com $AB > BC$, será dito retângulo áureo se e somente se $\frac{AB}{BC} = \Phi$.

A construção de um retângulo áureo pode ser feita de acordo com os seguintes passos:

1. Construir um quadrado $\square AEFD$ (figura 8);
2. Marcar o ponto médio do segmento \overline{AE} e denotá-lo por G ;
3. Marcar o ponto B sobre a semirreta \overrightarrow{AE} , tal que seja a intersecção do arco de círculo cujo centro e raio são, respectivamente, o ponto G e o segmento \overline{GF} ;
4. Marcar o ponto C na intersecção da semirreta \overrightarrow{DF} com perpendicular da semirreta \overrightarrow{AE} no ponto B .

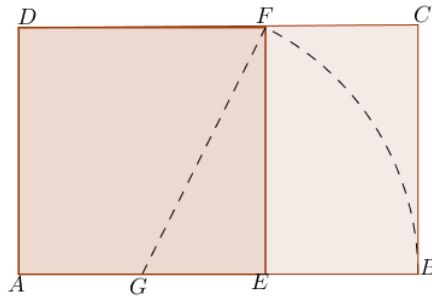


Figura 8: Retângulo áureo

Para verificarmos que o retângulo $\square ABCD$ é um retângulo áureo como na Figura 8, faremos a demonstração abaixo:

Demonstração. Sejam as medidas dos segmentos $AE = EF = x$. Como G é ponto médio de AE temos que $GE = \frac{x}{2}$. Podemos notar que $\triangle FEG$ é um triângulo retângulo em E .

Então, aplicando o Teorema de Pitágoras podemos encontrar a medida de GF que tem mesma medida de GB pois são raios do mesmo arco.

$$GF^2 = GE^2 + EF^2$$

$$GF^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2$$

$$GF = \sqrt{\frac{x^2}{4} + x^2}$$

$$GF = \frac{x\sqrt{5}}{2}.$$

Como $GE = AG = \frac{x}{2}$ temos que:

$$AB = AG + GB$$

$$AB = \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

Logo, aplicando a definição 2.5 temos que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\frac{x(\sqrt{5}+1)}{2}}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{AB}{BC} = \Phi.$$

□

Analogamente à seção anterior, é possível inscrever infinitos retângulos semelhantes a partir de um retângulo áureo inscrevendo quadrados cujo lado é a menor medida do retângulo circunscrito. Neste processo recursivo, obtemos os infinitos retângulos áureos.

2.3 ESPIRAIS

Nesta seção serão apresentados modelos de espirais formados a partir das construções de infinitos triângulos áureos e infinitos retângulos áureos descritos nas seções anteriores e buscaremos esclarecer o procedimento para se chegar à espiral de cada

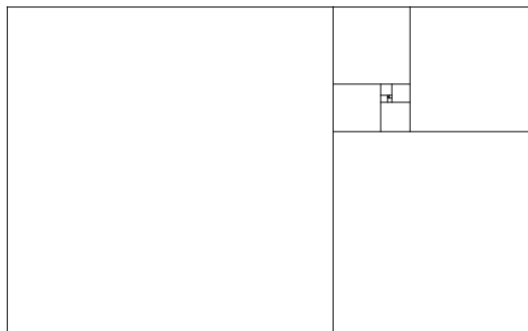


Figura 9: Retângulos áureos inscritos no retângulo áureo

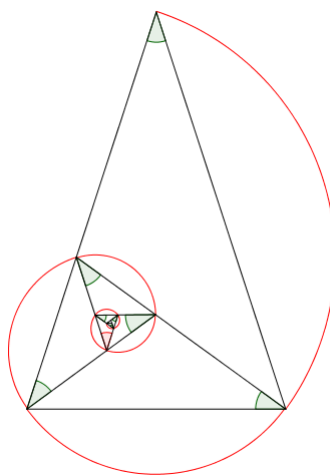


Figura 10: Espiral gerada a partir do triângulo áureo alto

um destes modelos. A importância destes modelos nos remete à semelhança com algumas situações da natureza. Podemos visualizar nestes modelos na formação de nossa Via Láctea, nos girassóis da família *compositae*, nos moluscos náuticos, nas ondas do mar, nos furacões e nos redemoinhos.

A primeira espiral é formada a partir da sequência de triângulos áureos inscritos num dado triângulo áureo alto. Com a bissetriz de um dos ângulos de medida igual a 72° do triângulo de ouro alto, obtemos um triângulo de ouro curto. O vértice do ângulo de medida 108° do triângulo de ouro curto é o centro do primeiro arco da espiral e seu raio é a medida do lado congruente do triângulo de ouro curto. O processo assim continua na construção da espiral, como na Figura 10.

Já os infinitos retângulos áureos inscritos que foram construídos na seção anterior descrevem uma espiral a partir dos infinitos arcos consecutivos cujos raios são o lado

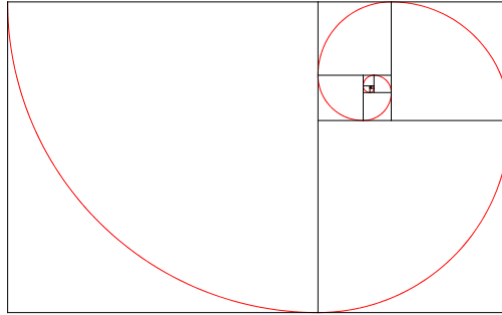


Figura 11: Espiral gerada a partir do retângulo áureo

de cada um dos quadrados inscritos nos retângulos áureos e o centro é o vértice superior do quadrado que faz fronteira com o retângulo formado pela divisão, conforme a Figura 11.

2.4 PENTÁGONO

Nesta seção será apresentado o pentágono regular e a relação com a estrela de cinco pontas, observaremos alguns segmentos áureos contidos e faremos as demonstrações cabíveis.

Ao longo da história, observamos que a razão áurea é conhecida desde os Pitagóricos de 500 anos a.C. e que os filósofos da escola pitagórica já conheciam os cinco sólidos geométricos regulares: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro, sendo este formado a partir de faces pentagonais regulares com muitos segmentos áureos.

Apesar de estudos apontarem indícios que a estrela de cinco pontas era conhecida nos séculos IV a III a.C. devido a registros encontrados em formas deste desenho, foram os pitagóricos que divulgaram o pentagrama ou triângulo triplo que se tornaria o símbolo da Sociedade de Pitágoras.

Seguiremos verificando dois lemas que envolvem as relações no pentágono regular a partir de seus lados e diagonais.

Lema 2.6. *Em todo Pentágono Regular a intersecção de duas diagonais quaisquer divide cada uma em média e extrema razão.*

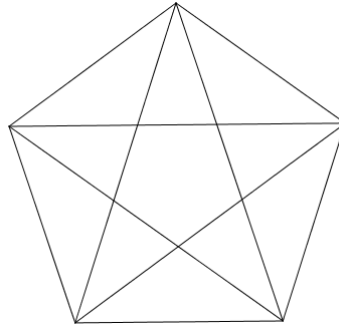


Figura 12: Pentagrama inscrito em um pentágono regular

Por exemplo, sendo $ABCDE$ um pentágono regular e $\{P\} = \overline{AD} \cap \overline{BE}$, temos que em relação a diagonal \overline{AD} do pentágono regular $ABCDE$, o ponto P a divide em média e extrema razão de acordo com a Definição (1.1).

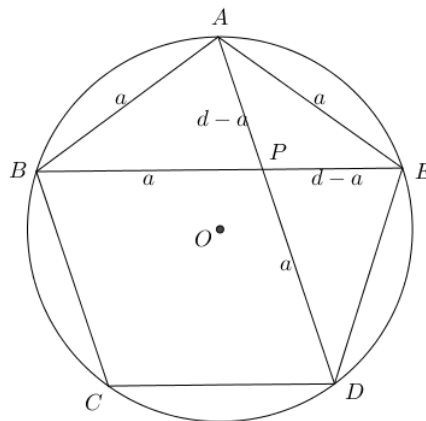


Figura 13: Seções douradas no pentágono regular

$$\frac{AD}{PD} = \frac{PD}{AP} = \Phi.$$

Demonstração. Denote por $d = BE = AD$ e por $a = AB = BC = CD = DE = AE$. Os dois triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle AED$ formados na Figura 13 são isósceles, com dois lados de medida a e o terceiro d . Como $med(\widehat{BAE}) = med(\widehat{AED}) = 108^\circ$ então os ângulos das bases dos triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle AED$ medem 36° , de modo que estes triângulos são áureos curtos. Com isso podemos verificar que os triângulos $\triangle APB$ e $\triangle AEP$, internos ao triângulo $\triangle BEA$ são isósceles, pois $med(\widehat{PAE}) = med(\widehat{DAE}) = 36^\circ$ e $med(\widehat{BAP}) = med(\widehat{BAE}) - med(\widehat{PAE}) = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Como $med(\widehat{EBA}) = med(\widehat{PBA}) = 36^\circ$, então $med(\widehat{APB}) = 72^\circ$ e, como $med(\widehat{AEB}) = med(\widehat{AEP}) = 36^\circ$ temos que $med(\widehat{APE}) =$

108°. Logo, os triângulos $\triangle APB$ e $\triangle AEP$ são isósceles, sendo as medidas dos lados AB , AP e BP do triângulo $\triangle APB$ iguais a a , $d - a$ e a , respectivamente, e as medidas dos lados AP , PE e AE do triângulo $\triangle AEP$ iguais a $d - a$, $d - a$ e a , respectivamente, conforme dados inseridos na Figura 13. A análise para o triângulo $\triangle PED$ é análoga. Temos que são semelhantes os triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle PAE$, donde segue que

$$\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{PE},$$

isto é

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d - a}.$$

Mas, $BE = AD$, $AE = PD = a$ e $PE = AP$, de modo que

$$\frac{AD}{PD} = \frac{PD}{AP}.$$

Portanto, concluímos que o ponto P divide a diagonal \overline{AD} em média e extrema razão. \square

Segue diretamente do Lema 2.6 uma relação entre a medida da diagonal e do lado de um pentágono regular qualquer.

Corolário 2.7. *Em todo pentágono regular, a razão entre a medida de uma diagonal qualquer d e a medida do lado a resulta na razão dourada, isto é, $\Phi = \frac{d}{a} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.*

Demonstração. Com as notações da demonstração do resultado anterior, temos que

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d - a} = \Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

\square

Conforme o Corolário 2.7 temos que a razão entre a diagonal e o lado do pentágono resulta em $\frac{d}{a} = \Phi$. Como a diagonal d é a medida da base do triângulo isósceles

$\triangle ABE$, podemos escrevê-la a partir das razões trigonométricas como $\cos 36^\circ = \frac{d}{2a}$ ou ainda $\cos 36^\circ = \frac{d}{2a}$. Conforme observado na demonstração do Lema 2.6, verificamos

que no Pentágono regular a relação $\frac{d}{a} = \Phi$, logo temos que $\cos 36^\circ = \frac{\Phi}{2}$, ou ainda, $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$.

Neste contexto temos a estrela de cinco pontas. Ela é composta por razões áureas obtidas a partir das intersecções das diagonais do pentágono regular. Podemos notar também que este processo pode ser repetido indefinidamente de modo a obtermos infinitos pentagramas inscritos em pentágonos regulares, mantendo as proporções áureas.

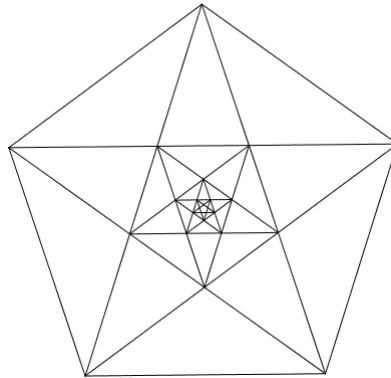


Figura 14: Infinitos pentagramas inscritos em um pentágono regular

Observando os pentagramas inscritos nos pentágonos regulares da Figura 14, observamos que se formam triângulos curtos e triângulos altos que farão parte do nosso objeto de estudo no próximo capítulo.

SEÇÕES DOURADAS NOS TRIÂNGULOS DE OURO

Iniciaremos o capítulo apresentando alguns temas importantes para a compreensão de algumas demonstrações, e em seguida estudaremos a relação áurea presente nos lados e cevianas do pentágono regular através de seus triângulos dourados curto e alto. Encerraremos com a construção de círculos de 9 pontos, mostrando a presença da razão áurea nas construções. Nos valeremos das referências [2], [3], [4], [5], [7].

3.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção incluímos algumas relações importantes que serão utilizadas ao longo do capítulo, principalmente em algumas demonstrações de proposições. Esta seção foi dividida em três subseções: teorema da bissetriz interna; lei dos senos; e círculo de nove pontos.

3.1.1 Teorema da Bissetriz Interna

Este é um teorema muito importante da geometria plana, permitindo determinar segmentos proporcionais em um triângulo. Será uma das ferramentas presentes na demonstração da Proposição 3.9 em que o incentro I_s do triângulo curto $\triangle AB_sC_s$ divide o segmento $\overline{H_sO}$ na proporção áurea sendo H_s ortocentro do triângulo curto e O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo curto; o vértice A do triângulo curto divide o segmento $\overline{H_sI_s}$ na proporção áurea. Presente também na demonstração da Proposição 3.10 em que o incentro I_t do triângulo alto $\triangle AB_tC_t$ divide o segmento

$\overline{H_tO}$ na proporção áurea sendo H_t ortocentro do triângulo alto e O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo alto; o centro O divide o segmento $\overline{AH_s}$ na proporção áurea.

Teorema 3.1. *Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.*

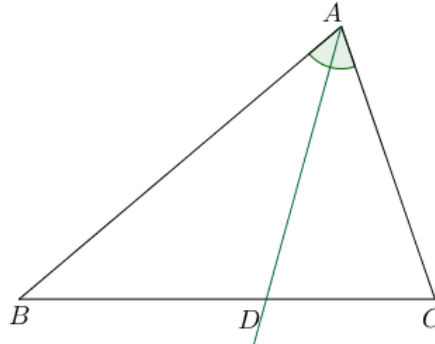


Figura 15: Bissetriz interna do triângulo $\triangle ABC$

Isto é, sendo \overrightarrow{AD} a bissetriz interna do ângulo \hat{A} de um dado triângulo $\triangle ABC$, com $D \in \overline{BC}$, então $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

Demonstração. Sejam $med(\hat{BAD}) = \alpha$ e $med(\hat{DAC}) = \beta$. Trace um segmento \overline{CP} , paralelo a \overline{AD} que encontra o prolongamento do segmento \overline{BA} em P . Sejam $med(\hat{APC}) = \alpha'$ e $med(\hat{ACP}) = \beta'$. Com isso sabemos que $\alpha = \beta$, pois \overline{AD} é a bissetriz do ângulo \hat{BAC} ; $\alpha = \alpha'$ pois são ângulos correspondentes nos segmentos paralelos \overline{AD} e \overline{PC} ; $\beta = \beta'$ pois são ângulos alternos internos nos segmentos paralelos \overline{AD} e \overline{PC} . Temos então que $\alpha' = \beta'$, implicando em $AC = AP$. Pelo Teorema de Tales, temos que $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AP}$. Como $AP = AC$, concluímos então que $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. \square

3.1.2 Lei dos Senos

A relação trigonométrica conhecida como lei dos senos é utilizada neste trabalho na validação da razão áurea no segmento $\overline{I_sI_t}$ a partir do ponto O , presentes na Proposição 3.11, em que I_s e I_t são, respectivamente, incentros dos triângulos curto e alto inscritos no pentágono regular e O é o centro da circunferência circunscrita.

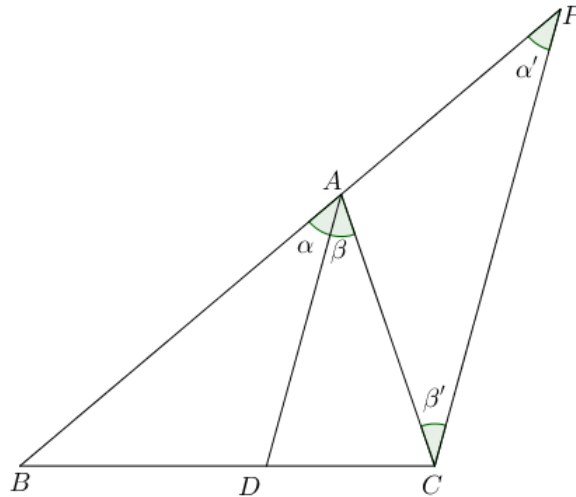


Figura 16: Demonstração do teorema da bissetriz interna do triângulo $\triangle ABC$

Temos, em seguida, uma formulação da lei dos senos e sua respectiva demonstração.

Proposição 3.2. (*Lei dos senos*) *Em um triângulo qualquer o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao dado triângulo.*

Demonstração. Seja um triângulo qualquer $\triangle ABC$, conforme ilustrado na Figura 17, inscrito em uma circunferência de raio R . Por um dos vértices do triângulo (B), tracemos o diâmetro correspondente $\overline{BA'}$. Tracemos também o segmento $\overline{A'C}$, formando o triângulo $\triangle A'BC$. Sabemos que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ por determinarem na circunferência a mesma corda e o triângulo $\triangle A'BC$ é retângulo em C por estar inscrito em uma semi-circunferência de diâmetro $\overline{BA'}$. Temos então que $\widehat{\text{sen}A'} = \widehat{\text{sen}A} = \frac{a}{2R}$, isto é, $\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = 2R$.

De maneira análoga encontramos que $\frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = 2R$ e $\frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R$. Portanto, concluímos que $\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R$. □

Observação 3.1.1. *Aplicando-se a Lei dos senos, podemos concluir a recíproca da proposição 2.2, isto é, que todo triângulo de ouro curto tem ângulos internos de medidas 36° , 36° e 108° . De fato, sendo b a medida da base de um triângulo dourado curto, a a medida do lado isósceles e θ a medida de um dos ângulos (congruentes) da base, temos que*

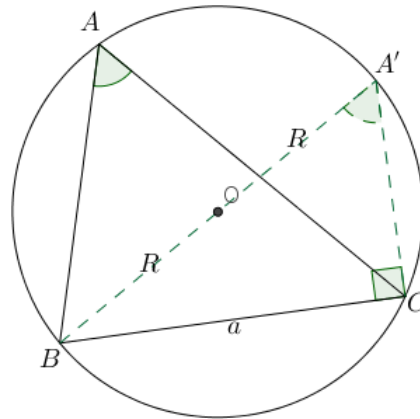


Figura 17: Demonstração da lei dos senos em um triângulo $\triangle ABC$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{b}{\operatorname{sen}(180^\circ - 2\theta)}.$$

Como $\frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, concluímos que $\cos\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ e assim, $\theta = 36^\circ$. De modo completamente análogo, mostra-se que todo triângulo dourado alto tem ângulos internos de medidas 36° , 72° e 72° .

3.1.3 Círculo de 9 Pontos

O círculo de 9 pontos é formado a partir de um triângulo qualquer e as relações com as suas cevianas, porém está muito atrelado à conhecida Reta de Euler. Antes de iniciarmos a construção do círculo de 9 pontos, nos estenderemos brevemente para a reta de Euler.

A necessidade de apresentação deste conceito se dá pois na Proposição 3.14 o utilizamos como ferramenta para a demonstração; na Proposição 3.17, se faz necessária a compreensão devido ao fato de N_s ser o centro do raio do círculo de 9 pontos do triângulo curto; na Proposição 3.18, N_t é o centro do círculo de 9 pontos de um triângulo alto; e o mesmo ocorre nas Proposições 3.19 e 3.20, em que precisa-se identificar o centro de um círculo de 9 pontos nos triângulos curto e alto, respectivamente para efetivar as demonstrações.

Lema 3.3. *Dado um triângulo qualquer, são colineares seu baricentro G , seu ortocentro H e seu circuncentro O , conforme ilustrado na Figura 18.*

A reta que passa por G , H e O é chamada de reta de Euler do triângulo mencionado no Lema 3.3.

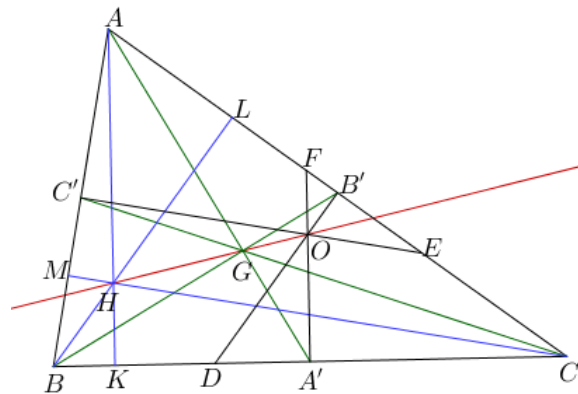


Figura 18: Reta de Euler no triângulo $\triangle ABC$

Na Figura 18 os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são as medianas, formando o baricentro G na intersecção; as mediatrizes estão representadas pelos segmentos \overline{AF} , \overline{BD} e \overline{CE} , cuja intersecção é o circuncentro O ; e as alturas relativas aos lados do triângulo estão representadas pelos segmentos \overline{AK} , \overline{BL} e \overline{CM} , cuja intersecção é o ortocentro H .

Demonstração. Considerando um triângulo $\triangle ABC$, conforme ilustrado na Figura 19, a partir de seus pontos médios A' , B' , e C' , podemos inscrever um outro triângulo $\triangle A'B'C'$ chamado de triângulo Medial, pois as medidas de seus lados são respectivamente, a metade da medida dos lados correspondentes aos do triângulo $\triangle ABC$.

Traçando as medianas $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ do triângulo $\triangle ABC$, encontramos na intersecção o baricentro G ; traçando as alturas do triângulo $\triangle ABC$ referente aos lados \overline{BC} e \overline{AC} encontramos o ortocentro H do triângulo $\triangle ABC$; o circuncentro O do triângulo $\triangle ABC$ é determinado pelas intersecções das alturas referentes aos lados $\overline{B'C'}$ e $\overline{A'C'}$ do triângulo medial $\triangle A'B'C'$, pois seus vértices são pontos médios do triângulo $\triangle ABC$, formado pela intersecção das mediatrizes.

Observando que o quadrilátero $AC'A'B'$ é um paralelogramo e que o ponto P determinado pela intersecção de suas diagonais é também ponto médio das diagonais, e estando as medianas de $\triangle A'B'C'$ contidas nas medianas de $\triangle ABC$, temos então que o baricentro G é comum.

Como H é ortocentro do triângulo $\triangle ABC$, O é o ortocentro do triângulo semelhante $\triangle A'B'C'$, G é o baricentro comum aos dois triângulos, e estando os segmentos corres-

pendentes na razão 2 : 1, por $\triangle A'B'C'$ ser medial à $\triangle ABC$, temos que $AH = 2OA'$, pois \overline{AH} e $\overline{A'O}$ são paralelas entre si e perpendiculares a $\overline{B'C'}$, e $AG = 2A'G$. Portanto $\triangle AHG \sim \triangle A'GO$, donde $med(\widehat{AGH}) = med(\widehat{A'GO})$. Logo, concluímos que os pontos H, G e O do triângulo $\triangle ABC$ estão alinhados. \square

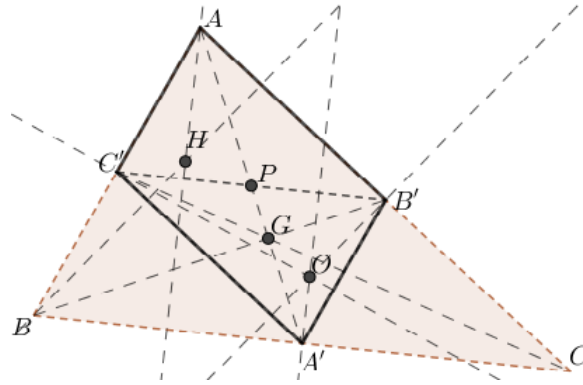


Figura 19: Alinhamento do baricentro, circuncentro e ortocentro na reta de Euler no triângulo $\triangle ABC$

Lema 3.4. *Dado um triângulo qualquer, existe uma circunferência que contém os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos compreendidos entre o ortocentro e os vértices do triângulo. Esta circunferência é chamada de círculo de nove pontos e seu centro é o ponto médio do segmento formado pelo ortocentro H e o circuncentro O (conforme ilustrado na Figura 20).*

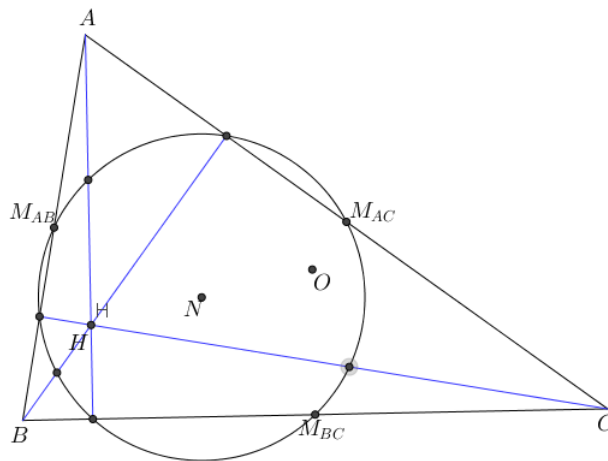


Figura 20: O círculo de 9 pontos no triângulo $\triangle ABC$

Demonstração. Seja o triângulo $\triangle ABC$, conforme ilustrado na Figura 21. Sejam os pontos A' , B' e C' pontos médios dos lados BC , AC e AB , respectivamente. Sejam D , E e F os pés das alturas do triângulo ABC em relação aos vértices A , B e C , respectivamente. Sejam ainda K , L e M os pontos médios dos respectivos segmentos \overline{AH} , \overline{BH} e \overline{CH} .

Como \overline{BC} é o lado comum nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HBC$ e, os pontos B' , C' , L e M , respectivamente, pontos médios dos outros lados, temos que $\overline{B'C'} \parallel \overline{LM} \parallel \overline{BC}$ e $B'C' = LM = \frac{1}{2}BC$.

De maneira análoga temos que \overline{AH} é lado comum dos triângulos $\triangle AHB$ e $\triangle AHC$ e, os pontos C' , L , B' e M , respectivamente, pontos médios dos lados \overline{AB} , \overline{BH} , \overline{AC} e \overline{CH} , temos que $\overline{C'L} \parallel \overline{B'M} \parallel \overline{AH}$ e $C'L = B'M = \frac{1}{2}AH$.

Assim, $B'C'LM$ é um paralelogramo e, como $\overline{BC} \perp \overline{AH}$, $B'C'LM$ é um retângulo.

De forma análoga, $A'B'KL$ e $A'C'KM$ são retângulos. Então $\overline{A'K}$, $\overline{B'L}$ e $\overline{C'M}$ são três diâmetros de um círculo.

Como $\widehat{A'DK}$ é um ângulo reto e $\overline{A'K}$ é um diâmetro, então o círculo passa pelo ponto D . De forma análoga verificamos que o círculo também passa pelos pontos E e F .

Como $\overline{KA'}$ é um diâmetro da circunferência de 9 pontos, N é ponto médio de $\overline{KA'}$ de modo que $N \in \overline{KA'} \cap \overline{OH}$. Como K é ponto médio de AH , então $KH = OA'$.

Além disso, $\overline{AH} \parallel \overline{OA'}$. Portanto, $\triangle KHN \cong \triangle A'NO$, $KN = NA'$ e $HN = ON$.

Maiores detalhes desta demonstração são encontrados em [7]. □

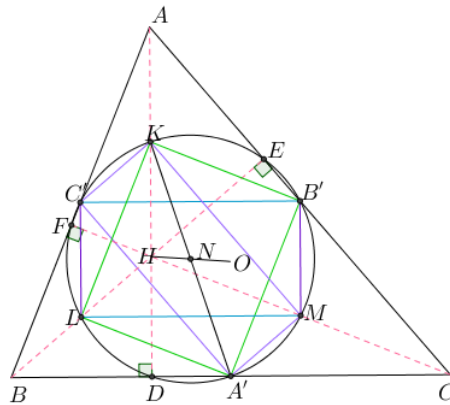


Figura 21: Demonstração do círculo de 9 pontos no triângulo $\triangle ABC$

3.2 SEÇÕES DOURADAS EM TRIÂNGULOS CURTOS E ALTOS NO PENTÁGONO REGULAR

Verificamos na seção anterior que o pentágono regular possui proporções douradas ao relacionarmos o comprimento de uma diagonal d e um lado a . Para efeitos de comparação, consideraremos um par de triângulos de ouro, curto e alto, inscritos no mesmo pentágono regular $AB_sB_tC_tC_s$, como ilustrado na Figura 22. Nomearemos o triângulo de ouro curto por $T_s = AB_sC_s$ com lados de medidas d, a, a ; e o triângulo de ouro alto por $T_t = AB_tC_t$ com lados de medidas a, d, d . Extraímos, a partir das relações dos triângulos inscritos curto e alto, a partir dos vértices, que $\cos 36^\circ = \frac{\Phi}{2}$. Observando o triângulo alto T_t , podemos escrever ainda que $\sin 18^\circ = \frac{1}{2\Phi}$. De fato, $\sin 18^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{d} = \frac{a}{2d}$ e, como já mostramos anteriormente, $\frac{d}{a} = \Phi$.

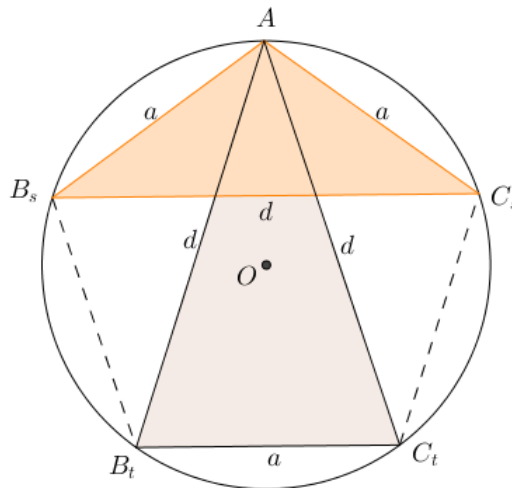


Figura 22: Triângulos curto e alto

Utilizando as relações trigonométricas apontadas anteriormente podemos verificar a validade de algumas regularidades ocorridas no pentágono regular e os triângulos dourados construídos a partir de seus vértices.

Seguiremos observando a presença da razão áurea quando relacionamos as áreas dos triângulos alto e curto na Proposição 3.5, sendo validada pela demonstração em seguida.

Proposição 3.5. *As áreas dos triângulos T_t e T_s estão na proporção de ouro, nesta ordem.*

Demonstração. Denotaremos por Δ_t a área do triângulo de ouro alto e por Δ_s a área do triângulo de ouro curto. Utilizaremos para fins de visualização o esboço na Figura ?? . A altura do triângulo de ouro alto, relativa ao lado $\overline{B_t C_t}$ é

$$h_t = d \operatorname{sen} 72^\circ.$$

Logo sua área será,

$$\Delta_t = \frac{ad \operatorname{sen} 72^\circ}{2}.$$

A altura do triângulo de ouro curto, relativa ao lado $\overline{B_s A}$ é

$$h_s = a \operatorname{sen} 72^\circ.$$

Logo sua área será

$$\Delta_s = \frac{a^2 \operatorname{sen} 72^\circ}{2}.$$

Portanto a razão entre as áreas será,

$$\frac{\Delta_t}{\Delta_s} = \frac{\frac{ad \operatorname{sen} 72^\circ}{2}}{\frac{a^2 \operatorname{sen} 72^\circ}{2}} = \frac{d}{a} = \Phi.$$

□

Como $\overline{B_s C_s}$ e $\overline{B_t C_t}$ são as bases dos triângulos isósceles não equiláteros T_s e T_t , respectivamente, temos que as mediatrizes de $\overline{B_s C_s}$ e $\overline{B_t C_t}$ são eixos de simetria dos triângulos dourados T_s e T_t e, por esta razão, são chamadas de linha central dos triângulos dourados T_s e T_t .

Observamos ainda que o incentro I_s do triângulo de ouro curto está na linha central dos triângulos de ouro, e é a reflexão do centro O em relação à base do triângulo isósceles curto $B_s C_s$, conforme apresentado na Proposição 3.6 e seguido de sua demonstração.

Proposição 3.6. *Se I_s é o incentro do triângulo T_s então I_s é a intersecção da linha central de T_s (mediatriz) com a perpendicular a $\overline{B_s B_t}$, passando por B_s ; é também a reflexão de O no lado $\overline{B_s C_s}$, (como ilustrado na Figura 23).*

Demonstração. Seja I_s o incentro do triângulo T_s . Como $\operatorname{med}(A\widehat{B}_s C_s) = 36^\circ$, então I_s é tal que $\operatorname{med}(I_s \widehat{B}_s C_s) = 18^\circ$. Como o pentágono regular têm ângulos internos de 108° , $\operatorname{med}(C_s \widehat{B}_s B_t) = \operatorname{med}(A\widehat{B}_s B_t) - \operatorname{med}(A\widehat{B}_s C_s) = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Assim, temos

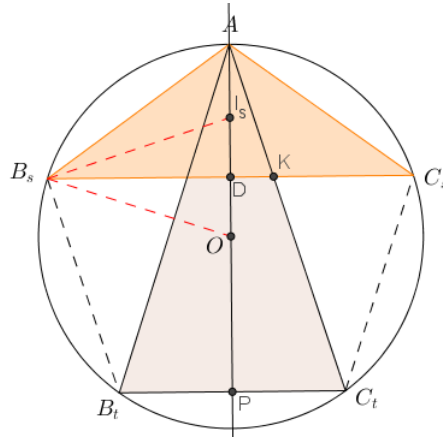


Figura 23: Incentro no triângulo curto

que $med(I_s \widehat{B}_s B_t) = med(I_s \widehat{B}_s C_s) + med(C_s \widehat{B}_s B_t) = 18^\circ + 72^\circ = 90^\circ$. Portanto, temos que o incentro I_s é a intersecção da linha central de T_s com a perpendicular a $\overline{B_s B_t}$. Observando o triângulo $\triangle AOB_s$, temos que os segmentos \overline{OA} e $\overline{OB_s}$ são o raio R da circunferência circunscrita ao pentágono regular e que $med(A\widehat{OB}_s) = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Temos que a linha central de T_s é perpendicular à base de T_s . Seja D o ponto de intersecção da linha central de T_s com a base $\overline{B_s C_s}$. Como o triângulo $\triangle OB_s D$ é retângulo em D , temos que $med(O\widehat{B}_s D) = 18^\circ$. Portanto, I_s é a reflexão de O no lado $\overline{B_s C_s}$. \square

Com base em algumas relações encontradas na demonstração da Proposição 3.6, podemos calcular o raio interno r_s da circunferência inscrita ao triângulo T_s em função do raio R da circunferência circunscrita no pentágono regular, conforme segue:

$$r_s = DI_s = DO.$$

Como $B_s O = R$, temos que:

$$\begin{aligned} \cos 72^\circ &= \frac{r_s}{R}. \\ r_s &= R \cos 72^\circ. \end{aligned}$$

Sendo $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$, temos que:

$$r_s = \frac{R}{2\Phi}. \tag{3.1}$$

De modo análogo, verificamos na Proposição 3.7, que o incentro I_t do triângulo de ouro alto é a reflexão de A no lado $\overline{B_s C_s}$.

Proposição 3.7. Se I_t é o incentro de T_t então I_t é a intersecção das diagonais $\overline{B_t C_s}$ e $\overline{C_t B_s}$, sendo também a reflexão de A no lado $\overline{B_s C_s}$, (como ilustrado na Figura 24).

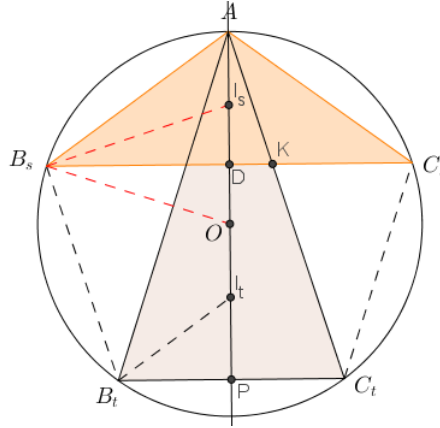


Figura 24: Incentro no triângulo alto

Demonstração. Como $\triangle B_t C_s C_t$ é isósceles e $med(B_t \widehat{C}_t C_s) = 108^\circ$, por ser um ângulo interno do pentágono regular, temos que $med(C_t \widehat{B}_t C_s) = med(B_t \widehat{C}_s C_t) = 36^\circ$. Como os ângulos da base de T_t medem 72° , temos então que I_t pertence à diagonal $\overline{B_t C_s}$. De modo análogo, concluímos que I_t pertence à diagonal $\overline{B_s C_t}$. Portanto, I_t é a intersecção destas duas diagonais, ou mesmo a intersecção de uma delas com a linha central de T_t .

Para estudar a reflexão de A no lado $\overline{B_s C_s}$, podemos verificar a relação de congruência dos triângulos $\triangle AB_s C_s$ e $\triangle I_t C_s B_s$.

Sabemos que o triângulo $\triangle AB_s C_s$ é isósceles de medidas a, a, d e ângulos de $36^\circ, 108^\circ$ e 36° ; assim como o triângulo $\triangle I_t B_s C_s$, pois I_t pertence à linha central do triângulo T_s . Além disso, $med(I_t \widehat{B}_s C_s) = med(A \widehat{B}_s B_t) - med(A \widehat{B}_s C_s) - med(B_t \widehat{B}_s C_t) = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ$. Portanto, os triângulos $\triangle AB_s C_s$ e $\triangle I_t B_s C_s$ são congruentes pelo caso ângulo-lado-ângulo e, conseqüentemente, o ponto A é a reflexão do incentro de T_t no lado $\overline{B_s C_s}$. \square

A partir das informações encontradas na demonstração da Proposição 3.7, podemos calcular o raio interno r_t da circunferência inscrita ao triângulo T_t em função do raio R da circunferência circunscrita no pentágono regular. Sendo P o ponto médio de $\overline{B_t C_t}$, temos que:

$$r_t = I_t P.$$

Como $\text{med}(I_t \widehat{B}_t P) = 36^\circ$, temos que:

$$\begin{aligned} \tan 36^\circ &= \frac{r_t}{\frac{a}{2}} \\ r_t &= \frac{a}{2} \tan 36^\circ. \end{aligned}$$

Sendo $\frac{a}{2} = R \text{sen} 36^\circ$, pois o triângulo $\triangle B_t P O$ é retângulo em P e tem $\text{med}(B_t \widehat{O} P) = 36^\circ$, temos que:

$$\begin{aligned} r_t &= R \text{sen} 36^\circ \tan 36^\circ \\ r_t &= R \frac{\text{sen}^2 36^\circ}{\cos 36^\circ}. \end{aligned}$$

Como $\cos 36^\circ = \frac{\Phi}{2}$, temos que:

$$r_t = R \frac{1 - \left(\frac{\Phi}{2}\right)^2}{\frac{\Phi}{2}} = R \frac{(4 - \Phi^2)}{2\Phi} = R \frac{(3 - \Phi)}{2\Phi},$$

Pois, temos que $(\Phi^2 - \Phi - 1 = 0)$.

Ainda observando os triângulos de ouro, vemos na Proposição 3.9 que o ortocentro H_s do triângulo curto forma um triângulo de ouro alto com os outros pontos O e B_s e ainda, é o conjugado isogonal do ponto O no próprio triângulo de ouro curto, mas para validar a demonstração, apresentaremos a definição de conjugado isogonal em um triângulo qualquer antes de apresentarmos a proposição (conforme ilustrado na Figura 26).

Definição 3.8. Dados um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto P no plano deste triângulo, o conjugado isogonal P^{-1} de P é o ponto de intersecção entre as retas obtidas pela reflexão de \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{BP} em relação às bissetrizes dos ângulos do triângulo cujos vértices são A e B , respectivamente, (conforme ilustrado na Figura 25).

Observação 3.2.1. *Segue das propriedades de reflexão e do Teorema de Ceva trigonométrico que a reta obtida pela reflexão de \overrightarrow{CP} em relação à bissetriz do ângulo ACB também passa por P^{-1} .*

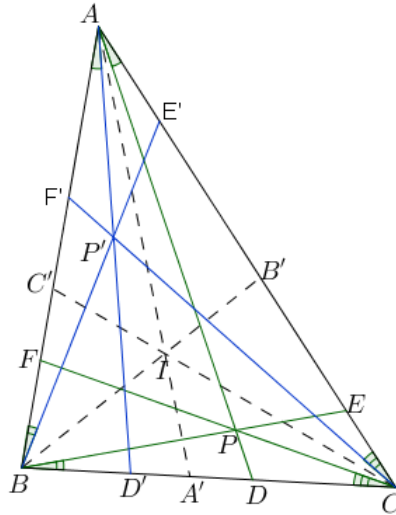


Figura 25: Conjugado isogonal de P no triângulo $\triangle ABC$

Na Figura 25, os segmentos pontilhados $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são as bissetrizes do triângulo; os segmentos $\overline{AD'}$, $\overline{BE'}$ e $\overline{CF'}$ são as reflexões dos segmentos \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} em relação às bissetrizes, formando com as intersecções o ponto P nos segmentos \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} e o ponto P^{-1} nos segmentos $\overline{AD'}$, $\overline{BE'}$ e $\overline{CF'}$.

Proposição 3.9. *Se H_s é o ortocentro de T_s então H_s é o conjugado isogonal de O em T_s e o triângulo $\triangle H_s B_s O$ formado é um triângulo de ouro alto, (como ilustrado na Figura 26).*

Demonstração. Sendo a reta suporte do segmento $\overline{AC_s}$ perpendicular ao segmento $\overline{B_s H_s}$, temos que $\text{med}(H_s \widehat{B_s} A) = 18^\circ$, pois $H_s \widehat{B_s} A$ é o complementar do suplementar de $B_s \widehat{A} C_s$ que mede 108° . De acordo com a Proposição 3.6, temos que $\text{med}(O \widehat{B_s} C_s) = 18^\circ$. Procedendo-se analogamente para o vértice C_s do triângulo T_s , concluímos que H_s é o conjugado isogonal de O no triângulo T_s . Notemos que H_s , I_s e O estão alinhados, de modo que $\text{med}(H_s \widehat{O} B_s) = \text{med}(I_s \widehat{O} B_s) = 72^\circ$. Além disso, $\text{med}(H_s \widehat{B_s} O) = \text{med}(H_s \widehat{B_s} A) + \text{med}(A \widehat{B_s} C_s) + \text{med}(C_s \widehat{B_s} O) = 18^\circ + 36^\circ + 18^\circ = 72^\circ$. Logo, o triângulo $\triangle H_s B_s O$ é alto.

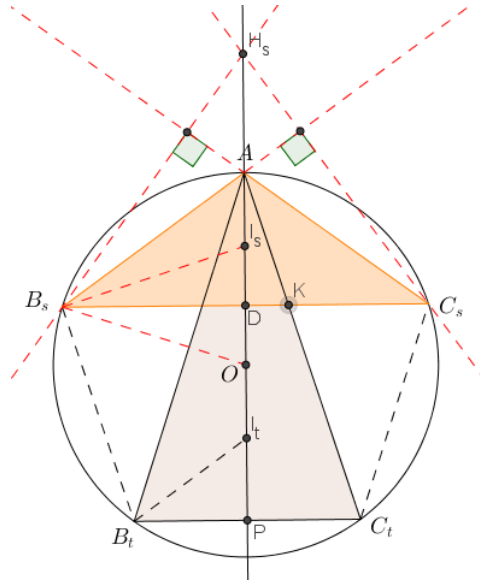


Figura 26: Ortocentro no triângulo curto

Considerando o triângulo alto $\triangle AB_tC_t$ do pentágono regular (em que B_t e C_t são os vértices da base), temos que $\triangle AB_tC_t \sim \triangle H_sB_sO$, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos. Consequentemente, pelo Corolário 2.7,

$$\frac{H_sB_s}{B_sO} = \frac{AB_t}{B_tC_t} = \Phi.$$

Portanto, o triângulo $\triangle H_sB_sO$ é um triângulo áureo alto, cujas dimensões são $B_sO = R$, $B_sH_s = R\Phi$, e $H_sO = R\Phi$. □

Sabendo que o triângulo $\triangle H_sB_sO$ é isósceles de ângulos 72° , 72° e 36° e a medida de seu lado $B_sO = R$, podemos confirmar a medida de OH_s na demonstração anterior a partir da relação trigonométrica que segue:

$$\begin{aligned} \cos 72^\circ &= \frac{\frac{R}{2}}{OH_s} \\ OH_s &= \frac{R}{2 \cos 72^\circ} = \Phi R. \end{aligned}$$

É possível observar ainda, pelo teorema da bissetriz, que I_s divide o segmento $\overline{H_sO}$ na proporção áurea, conforme segue:

$$\frac{H_sI_s}{I_sO} = \frac{B_sH_s}{B_sO} = \Phi.$$

Pelo teorema da bissetriz, podemos observar ainda que A divide o segmento $\overline{H_s I_s}$ na proporção áurea, pois o triângulo $\triangle H_s B_s I_s$ tem como bissetriz interna do vértice B_s o segmento $\overline{B_s A}$. Então podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{H_s A}{A I_s} = \frac{B_s H_s}{B_s I_s} = \Phi.$$

Estudaremos na Proposição 3.10, de forma semelhante à proposição anterior o ortocentro do triângulo $\triangle A B_t C_t$, verificando o número de ouro na relação que possui o centro O , o incentro I_t e o vértice A .

Proposição 3.10. *Se H_t é o ortocentro do triângulo T_t então H_t é o conjugado isogonal de O em T_t , (como ilustrado na Figura 27).*

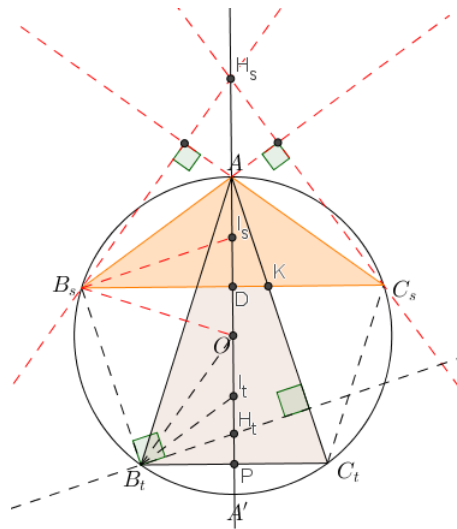


Figura 27: Ortocentro no triângulo alto

Demonstração. Sendo o prolongamento do segmento $\overline{B_t H_t}$ perpendicular ao segmento $\overline{A C_t}$ e $\widehat{A C_t B_t} = 72^\circ$, temos que $\widehat{H_t B_t P} = 18^\circ$, em que P é o ponto médio do segmento $\overline{B_t C_t}$. Assim, $\widehat{B_s B_t H_t} = \widehat{B_s B_t C_t} - \widehat{H_t B_t C_t} = 108^\circ - 18^\circ = 90^\circ$, logo o ortocentro H_t é a intersecção da linha central de T_s com a perpendicular de $\overline{B_s B_t}$ em B_t . Como o triângulo $\triangle A O B_t$ é isósceles, pois $O A = O B_t = R$ e $\widehat{A O B_t} = 144^\circ$, temos que $\widehat{O A B_t} = \widehat{O B_t A} = 18^\circ$. Logo, $\widehat{O B_t A} = \widehat{H_t B_t C_t}$. Como o ponto O pertence à linha central de T_s , então o conjugado isogonal de O deve pertencer à linha central. Portanto, H_t é conjugado isogonal de O em T_t . \square

Sabendo que o triângulo $\triangle B_t H_t O$ é isósceles de ângulos 36° , 36° e 108° e a medida de seu lado $B_t O = R$, podemos calcular o segmento $OH_t = B_t H_t$, conforme segue:

$$\cos 36^\circ = \frac{R}{OH_t}.$$

$$OH_t = B_t H_t = \frac{R}{2 \cos 36^\circ} = \frac{R}{\Phi}. \quad (3.2)$$

Por H_t ser o conjugado isogonal de O em T_t , de acordo com a Proposição 3.10, é possível observar pelo teorema da bissetriz, que I_t divide o segmento $\overline{H_t O}$ na proporção áurea. De fato,

$$\frac{B_t O}{B_t H_t} = \frac{O I_t}{I_t H_t} = \Phi.$$

Com relação à altura do triângulo dourado, podemos verificar que O divide $\overline{AH_t}$ na proporção áurea. De fato,

$$\frac{AH_t}{AO} = \frac{AO + OH_t}{AO} = 1 + \frac{OH_t}{AO}.$$

Pela Equação (3.2), temos que $OH_t = \frac{R}{\Phi}$ logo,

$$\frac{AH_t}{AO} = 1 + \frac{\frac{R}{\Phi}}{R} = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Pela Equação (1.3), temos que $1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$ logo,

$$\frac{AH_t}{AO} = \Phi.$$

Se valendo dos resultados obtidos nas Proposições 3.6 e 3.7, estudamos individualmente os incentros I_s e I_t nos triângulos de ouro curto e alto, respectivamente e suas relações com o centro O . Porém, na Proposição 3.11, descrita na sequência, estão relacionados os incentros I_s e I_t com o centro O .

Proposição 3.11. *Se I_s é o incentro de T_s e I_t é o incentro de T_t , então $O I_t = A I_s$, e O divide $\overline{I_s I_t}$ na proporção áurea, (como ilustrado na Figura 27).*

Demonstração. Pela Proposição 3.6, temos que I_s é a reflexão de O em $\overline{B_s C_s}$; pela Proposição 3.7, temos que I_t é a reflexão de A em $\overline{B_s C_s}$. Logo, temos que O e I_t são reflexões de I_s e A em $\overline{B_s C_s}$.

Mas aplicando a lei dos senos no triângulo $\triangle OB_t I_t$, é possível escrever o segmento $\overline{OI_t}$ a partir de uma relação entre R e Φ . Para isso, podemos verificar, a partir da demonstração da Proposição 3.10 que $med(B_t \widehat{OI_t}) = 36^\circ$ pois é o suplementar do ângulo $A \widehat{OB_t} = 144^\circ$; que $med(O \widehat{B_t} I_t) = 18^\circ$, pois $med(O \widehat{B_t} A) = 18^\circ$ e $med(I_t \widehat{B_t} A) = 36^\circ$; e que $med(O \widehat{I_t} B_t) = 126^\circ$, pois é o suplementar dos ângulos $I_t \widehat{B_t} O + I_t \widehat{OB_t}$. Então, podemos escrever conforme segue,

$$\frac{OI_t}{\text{sen}18^\circ} = \frac{OB_t}{\text{sen}126^\circ}.$$

Sendo $\text{sen}18^\circ = \cos 72^\circ$ e $\text{sen}126^\circ = \cos 36^\circ$, podemos reescrever a equação conforme segue,

$$\frac{OI_t}{\cos 72^\circ} = \frac{R}{\cos 36^\circ}.$$

Pelo Corolário 2.7 temos que,

$$\begin{aligned} \frac{OI_t}{1} &= \frac{R}{\frac{\Phi}{2}} \\ OI_t &= \frac{\frac{R}{\frac{\Phi}{2}}}{\frac{2}{2}} = \frac{R}{\Phi^2}. \end{aligned}$$

Sendo D o ponto médio de $\overline{B_s C_s}$, temos pela Equação (3.1) que $DO = DI_s = \frac{R}{2\Phi}$, então $OI_s = DO + DI_s = \frac{R}{\Phi}$. Logo, temos que O divide $\overline{I_s I_t}$ na proporção áurea, pois

$$\frac{OI_s}{OI_t} = \frac{\frac{R}{\Phi}}{\frac{R}{\Phi^2}} = \Phi.$$

□

A partir do estudo sobre as relações existentes nos triângulos dourados curto e alto é possível demonstrar algumas observações ressaltadas pelo matemático Nikolaos Dergiades: Proposição 3.12, Proposição 3.13 e Proposição 3.14.

A primeira que será apresentada, Proposição 3.12, descreve a relação entre o centro da circunferência circunscrita O e o lado $\overline{I_s H_t}$ formado pelo incentro I_s do triângulo de ouro curto e ortocentro H_t do triângulo de ouro alto, como sendo o seu ponto médio.

Proposição 3.12. *O é ponto médio de $\overline{I_s H_t}$, (como ilustrado na Figura 27).*

Demonstração. Conforme apresentado na Proposição 3.6, temos que I_s é reflexão de O no lado $\overline{B_s C_s}$, e como $I_s D = \frac{R}{2\Phi}$, temos que $I_s O = \frac{R}{\Phi}$. De acordo com a Equação (3.2) $O H_t = \frac{R}{\Phi}$. Com isso, temos que $I_s O = O H_t$. Visto que O está entre I_s e H_t , concluímos que O é ponto médio de $\overline{I_s H_t}$. \square

A Proposição 3.13 estuda a semelhança entre os triângulos $\triangle I_s H_s B_s$ e $\triangle O B_s A'$, em que A' é o antípoda de A no círculo circunscrito a T_s .

Proposição 3.13. *Se A' é antípoda de A no círculo circunscrito a T_s , os triângulos $\triangle I_s H_s B_s$ e $\triangle O A' B_s$ são semelhantes ao triângulo T_s , e $B_s H_s = B_s A' = R\Phi$ (como ilustrado na Figura 27).*

Demonstração. Conforme demonstração da Proposição 3.6, temos que $med(O\widehat{I_s}B_s) = 72^\circ$. Portanto, $med(B_s\widehat{I_s}H_s) = 108^\circ$, pois é o suplementar do ângulo $O\widehat{I_s}B_s$. E na Proposição 3.9, foi demonstrado que $I_s H_s = I_s B_s = R$ e que $B_s H_s = R\Phi$, sendo o triângulo $\triangle I_s H_s B_s$ semelhante ao triângulo de ouro T_s . Observando o triângulo $\triangle O B_s A'$, temos que $O B_s = O A' = R$ e que $med(A'\widehat{O}B_s) = 108^\circ$, pois é o suplementar do ângulo $I_s\widehat{O}B_s$ calculado na Proposição 3.6. Logo, pelo caso de congruência lado-ângulo-lado, temos que o triângulo $\triangle O A' B_s$ é congruente ao triângulo $\triangle I_s H_s B_s$, sendo o lado $B_s A' = B_s H_s = R\Phi$. \square

A última observação feita pelo matemático Nikolaos Dergiades que estudaremos, está presente na Proposição 3.14, na sequência, que é um estudo da relação entre o centro O da circunferência circunscrita, o incentro I_s , o ortocentro H_s e o vértice B_s do triângulo dourado curto $\triangle A B_s C_s$, formando três raios, em progressão.

Proposição 3.14. *Os raios $O I_s$, $I_s B_s$ e $B_s H_s$ estão em progressão geométrica, e os círculos formados pelos respectivos centros O , I_s e B_s são concorrentes em um ponto L que se encontra no segmento $\overline{O B_s}$ (como ilustrado na Figura 28).*

Demonstração. Temos que $O I_s = \frac{R}{\Phi}$, conforme visto na Proposição ??; $I_s B_s = R$, conforme verificado na Proposição 3.13; e $B_s H_s = R\Phi$, conforme Proposição 3.13; como $\frac{B_s H_s}{I_s B_s} = \frac{I_s B_s}{O I_s} = \Phi$, temos que $O I_s$, $I_s B_s$ e $B_s H_s$ estão em progressão geométrica de razão $\Phi > 1$. Chamemos as circunferências λ_1 de centro O e raio $O I_s$; λ_2 de centro I_s e raio $I_s B_s$; e λ_3 de centro B_s e raio $B_s H_s$. Como $O B_s < O I_s + I_s B_s = O I_s + I_s H_s = O H_s$, temos que $\lambda_1 \cap \lambda_2 \neq \emptyset$. Seja $L \in \lambda_1 \cap \lambda_2$ tal que L e C_s estão no mesmo lado em relação à

reta central que contém o segmento $\overline{OI_s}$. Observemos que $B_sL = B_sO + OL = R + \frac{R}{\Phi} = R \left(1 + \frac{1}{\Phi}\right) = R\Phi$. Portanto, $B_sL = B_sH_s$, de modo que $L \in \lambda_3$. \square

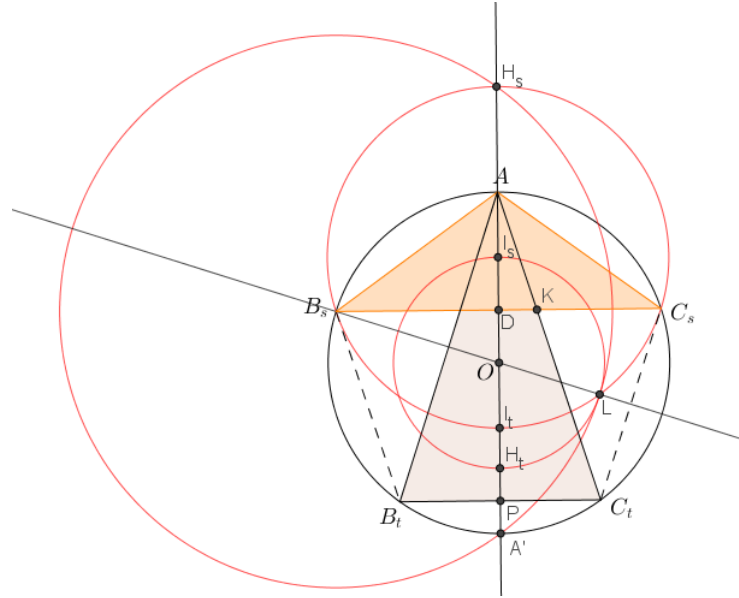


Figura 28: Círculos formados com raios em progressão geométrica

Seguiremos o estudo com proposições que relacionam os centros N_i dos triângulos T_i com outros pontos, sendo $i = s, t$.

Proposição 3.15. *D divide \overline{AP} na proporção áurea, em que D é o ponto médio do segmento $\overline{B_sC_s}$ do triângulo curto T_s e P o ponto médio do segmento $\overline{B_tC_t}$ do triângulo alto T_t (como ilustrado na Figura 29).*

Demonstração. Por construção, temos que $AP = d \text{sen}72^\circ$ e $AD = a \text{sen}36^\circ$.

$$\text{Logo, } \frac{AP}{AD} = \frac{d2\text{sen}36^\circ \cos 36^\circ}{a\text{sen}36^\circ} = \Phi 2 \frac{\Phi}{2} = \Phi^2.$$

Consequentemente,

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AP}{AP - AD} = \frac{1}{1 - \frac{AD}{AP}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\Phi^2}} = \frac{\Phi^2}{\Phi^2 - 1}.$$

Mas, de acordo com a Equação (1.1), temos que $\Phi^2 - 1 = \Phi$.

$$\text{Portanto, } \frac{AP}{PD} = \frac{\Phi^2}{\Phi} = \Phi. \quad \square$$

A Proposição 3.16 relaciona o segmento \overline{PD} e a razão áurea a partir do incentro I_t do triângulo de ouro alto.

Proposição 3.16. *O incentro I_t divide \overline{PD} na proporção áurea (como ilustrado na Figura 29).*

Demonstração. Como vimos na prova da Proposição 3.7, I_t é dado pela intersecção das diagonais $\overline{B_sC_t}$ e $\overline{B_tC_s}$. Segue do paralelismo de $\overline{B_sC_s}$ e $\overline{B_tC_t}$ que são semelhantes os triângulos $\triangle I_tB_sC_s$ e $\triangle I_tB_tC_t$. Além disso, I_tD é uma altura do triângulo $\triangle I_tB_sC_s$, enquanto que I_tP é uma altura do triângulo $\triangle I_tB_tC_t$. Assim, $\frac{DI_t}{I_tP} = \frac{B_sC_s}{B_tC_t} = \frac{d}{a} = \Phi$. \square

Para continuarmos a busca pela razão áurea no pentágono regular, nos valeremos dos Lemas 3.3 e 3.4, que trataram da circunferência de 9 pontos bem como a determinação do seu centro N_i .

A Proposição 3.17 que seguirá aborda a razão áurea no segmento $\overline{DN_s}$ a partir do incentro I_s do triângulo de ouro curto T_s , sendo N_s o centro da circunferência de 9 pontos do mesmo triângulo.

Proposição 3.17. *O incentro I_s divide o segmento $\overline{DN_s}$ na proporção áurea, em que N_s é o centro da circunferência de 9 pontos do triângulo T_s (como ilustrado na Figura 29).*

Demonstração. De acordo com o Lema 3.4 que $ON_s = N_sH_s$; logo, $ON_s = \frac{R\Phi}{2}$, pois pela Proposição 3.9, temos que $OH_s = R\Phi$. Como na Proposição 3.6 temos que $I_sD = DO = \frac{R}{2\Phi}$, temos que $DN_s = ON_s - OD$, isto é, $DN_s = \frac{R\Phi}{2} - \frac{R}{2\Phi} = \frac{R(\Phi^2 - 1)}{2\Phi}$. Mas, segue da equação (1.1) que $\Phi^2 - 1 = \Phi$, logo $DN_s = \frac{R}{2}$. Portanto, I_s divide o segmento

$\overline{DN_s}$ na proporção áurea, pois $\frac{DN_s}{DI_s} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2\Phi}} = \Phi$. \square

Agora, observando o centro N_t do círculo de 9 pontos do triângulo de ouro alto T_t , encontramos na Proposição 3.18 que aquele divide o segmento \overline{OP} na razão áurea.

Proposição 3.18. *Para o triângulo dourado alto T_t de altura \overline{PA} o centro N_t divide o segmento \overline{OP} na proporção áurea, em que N_t é o centro da circunferência de 9 pontos do triângulo T_t (como ilustrado na Figura 29).*

Demonstração. Seja o triângulo $\triangle B_tOC_t$ isósceles de medidas R, R e a . Pela Proposição 3.10, temos que seus ângulos são de $54^\circ, 72^\circ$ e 54° , pois H_t é o conjugado isogonal de

O em T_t e $B_t H_t = OH_t = \frac{R}{\Phi}$ e, conseqüentemente, $H_t N_t = \frac{R}{2\Phi}$. Com isso, sabemos que $\cos 36^\circ = \frac{PO}{R}$. Como $\cos 36^\circ = \frac{\Phi}{2}$, temos que $PO = \frac{R\Phi}{2}$.

Observando o triângulo $\triangle PB_t H_t$ retângulo em P , temos que $\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{PH_t}{B_t H_t}$. Como $B_t H_t = \frac{R}{\Phi}$ e $\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{1}{2\Phi}$, temos que $PH_t = \frac{R}{\Phi^2}$. Então, $PN_t = PH_t + H_t N_t = \frac{R}{2\Phi^2} + \frac{R}{2\Phi} = \frac{R(1+\Phi)}{2\Phi^2}$. Por (1.1) temos que $\Phi^2 = \Phi + 1$, então $PN_t = \frac{R}{2}$. Portanto, N_t divide

o segmento \overline{OP} na proporção áurea, pois $\frac{PO}{PN_t} = \frac{\frac{R\Phi}{2}}{\frac{R}{2}} = \Phi$. \square

As duas últimas Proposições, 3.19 e 3.20 deste trabalho trazem o estudo das reflexões dos centros N_s e N_t em relação ao centro O .

Proposição 3.19. *O centro N_s da circunferência de 9 pontos do triângulo T_s é a reflexão de P em relação ao centro O da circunferência circunscrita ao pentágono regular, (como ilustrado na Figura 29).*

Demonstração. Uma vez que $ON_s = \frac{R\Phi}{2}$, conforme demonstrado na Proposição 3.9, e que $OP = \frac{R\Phi}{2}$, conforme demonstrado na Proposição 3.18, temos então que N_s é a reflexão de P no centro O . \square

Proposição 3.20. *O centro N_t da circunferência de 9 pontos do triângulo T_t é a reflexão de D em relação ao centro O da circunferência circunscrita ao pentágono regular, (como ilustrado na Figura 29).*

Demonstração. Temos que $OD = \frac{R}{2\Phi}$, pela Proposição 3.6, e $ON_t = OP - PN_t = \frac{R}{2\Phi}$, pois pela Proposição 3.18, $OP - PN_t = \frac{R\Phi}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R(\Phi - 1)}{2}$. Mas, por (1.1), $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$ e, com isso $ON_t = \frac{R}{2\Phi}$. Logo, N_t é a reflexão de D no centro O . \square

Neste capítulo pudemos perceber muitas formas de obtenção da relação áurea que é estabelecida em um pentágono regular, especialmente nos triângulos de ouro curto e alto. Foi possível estender esta análise ao círculo de 9 pontos presente em cada triângulo. Seguindo para o próximo capítulo, serão apresentadas seis atividades propostas para alunos do ensino regular, com o intuito que se familiarizem com o número de ouro e consigam perceber sua presença na geometria.

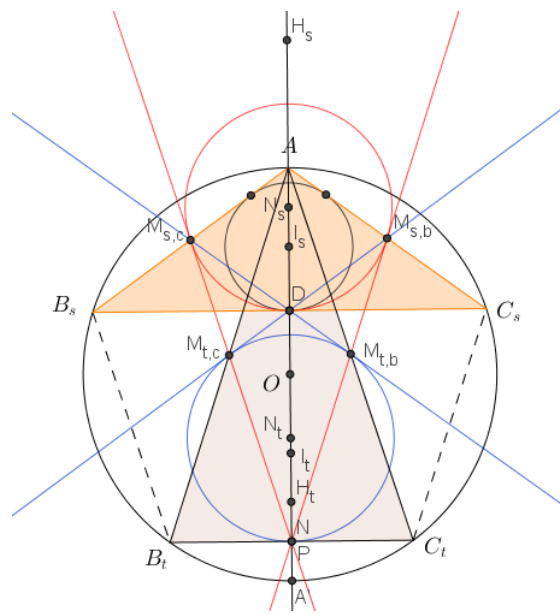


Figura 29: Círculos de 9 pontos

PROPOSTAS DE ATIVIDADES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo serão sugeridas ao professor de Educação Básica algumas atividades envolvendo o número de ouro que, devido à variedade de situações em que aparece, se torna um rico tema para desenvolver aprendizagem dos alunos. Podem ser trabalhadas situações-problema que envolvem construções geométricas, proporcionalidade, semelhança de figuras, incomensurabilidade, números irracionais e problemas relacionados às situações reais. Ressalto que são apenas propostas de atividades, cabendo ao professor fazer as devidas adaptações ao perfil e realidade de cada turma. Nos valeremos das referências [1], [8], [9], [11].

4.1 ATIVIDADE 1 - DETERMINANDO O PONTO DE DIVISÃO ÁUREA DE UM SEGMENTO

A atividade tem por objetivo determinar o ponto X em que um segmento qualquer \overline{AB} é dividido de modo que a razão entre a medida do segmento \overline{AX} pela medida do segmento \overline{XB} seja $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Os materiais necessários para a realização desta atividade são: lápis, papel, régua e compasso;

O desenvolvimento da atividade:

1. Trace um segmento qualquer \overline{AB} ;
2. Trace uma perpendicular \overline{BC} ao segmento \overline{AB} de tal modo que a medida do segmento \overline{BC} seja igual à metade da medida do segmento \overline{AB} ;

3. Trace um segmento do ponto A até o ponto C , determinando o triângulo $\triangle ABC$ retângulo em \widehat{B} ;
4. Trace uma circunferência de raio BC com centro em C , determinando o ponto Y no segmento \overline{AC} ;
5. Trace a circunferência de raio AY com centro em A , determinando o ponto X no segmento \overline{AB} (Figura 30).

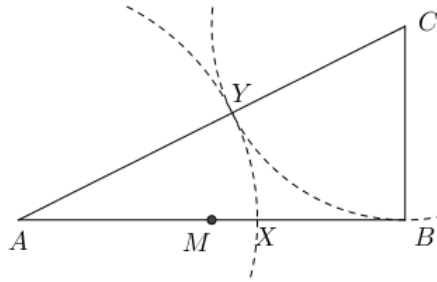


Figura 30: X é a seção áurea do segmento \overline{AB}

Após o término da realização das construções é importante mostrar que o ponto X divide o segmento \overline{AB} na razão áurea, conforme apresentado no exemplo 1.3. Para que os alunos compreendam o fechamento da atividade devem ter conhecimentos de resolução de equações de 2º grau, identificação de figuras semelhantes e conhecimento do Teorema de Pitágoras.

4.2 ATIVIDADE 2 - CONSTRUINDO UM RETÂNGULO COM SEÇÕES ÁUREAS

O objetivo desta atividade é construir um retângulo $\square ABCD$ a partir de um segmento qualquer \overline{AB} , determinando sua seção áurea no ponto X e tal que as medidas do comprimento e largura são, respectivamente, \overline{AB} e \overline{AX} .

Os materiais necessários para a realização desta atividade são: lápis, papel, régua e compasso;

Segue o desenvolvimento da atividade:

1. Realize os procedimentos da Atividade 1 para determinar a seção áurea a partir do ponto X ;
2. Transporte o segmento \overline{AX} perpendicularmente ao segmento \overline{AB} para os pontos A e B ;

3. Denomine-as de pontos D e E ;
4. Ligue os pontos, formando um segmento \overline{DE} (Figura 31).

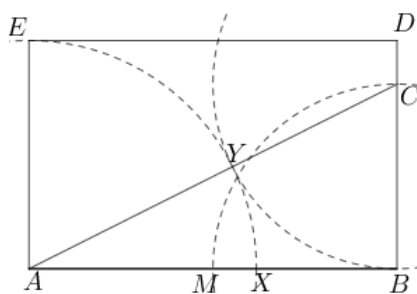


Figura 31: Retângulo áureo $\square ABCD$ a partir de um segmento \overline{AB}

Após o término da realização das construções cabe ao professor fazer com os alunos a verificação da razão áurea entre os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} . Para que os alunos compreendam, devem ter conhecimentos de resolução de equações de 2º grau, identificação de figuras semelhantes e conhecimento do Teorema de Pitágoras.

4.3 ATIVIDADE 3 - CONSTRUÇÃO DE UMA SEÇÃO ÁUREA

O objetivo desta atividade é encontrar a razão áurea a partir de uma construção utilizando três segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ e $\overline{A_3B_3}$ de mesma medida e uma reta.

Os materiais necessários para a realização desta atividade são: lápis, papel, régua de precisão milimétrica e calculadora.

Seguem os procedimentos da realização da atividade:

1. Trace uma reta r e marque sobre ela um ponto A_1 ;
2. Trace o segmento $\overline{A_1B_1}$ de medida 10cm perpendicular à reta r ;
3. Denomine por B_2 o ponto médio do segmento $\overline{A_1B_1}$;
4. Trace o segmento $\overline{A_2B_2}$ de medida 10cm , de modo que A_2 esteja sobre a reta r ;
5. Denomine por B_3 o ponto médio do segmento $\overline{A_2B_2}$;
6. Trace o segmento $\overline{A_3B_3}$ de medida 10cm , de modo que A_1, A_2 e A_3 esteja sobre a reta r (Figura 32).
7. Com uma régua de precisão milimétrica, tome as seguintes medidas:

$$\overline{A_1A_3} = \dots\dots$$

$$\overline{A_1A_2} = \dots\dots$$

$$\overline{A_2A_3} = \dots\dots$$

8. Com o auxílio de uma calculadora, calcule as razões a seguir:

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}} = \dots\dots$$

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}} = \dots\dots$$

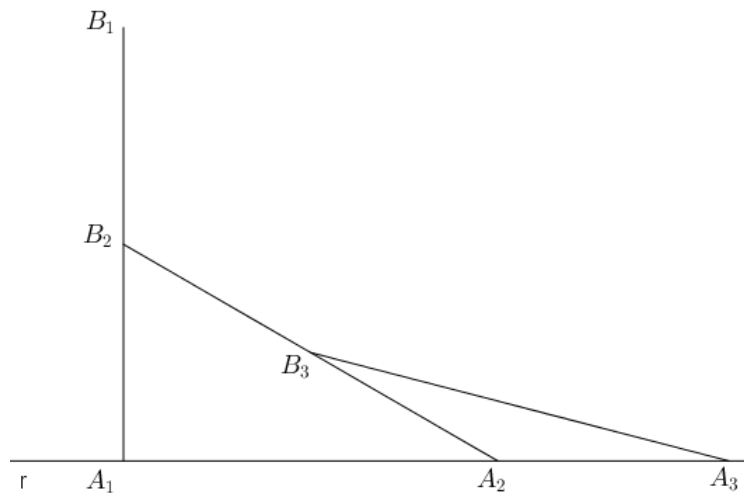


Figura 32: Simples construção da seção áurea

Como etapa final da atividade, o professor pode solicitar que os alunos realizem a generalização para um valor x qualquer para os segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ e $\overline{A_3B_3}$ antes de abrir espaços para discussão sobre as dúvidas ou dificuldades apresentadas para a realização da atividade. Para que a demonstração seja feita os alunos devem ter conhecimento de construções geométricas; teorema de Pitágoras; fatoração; racionalização; propriedades de radicais; e, semelhança de figuras planas.

4.4 ATIVIDADE 4 - CONSTRUINDO UM PENTÁGONO REGULAR

Esta atividade tem por objetivo desenvolver nos alunos a familiarização dos polígonos, bem como verificar a existência da razão áurea Φ em um pentágono regular inscrito em uma circunferência.

Os materiais necessários para a realização desta atividade são: lápis, papel, régua de precisão milimétrica, compasso, transferidor e calculadora.

Seguem os procedimentos da realização da atividade:

1. Marque um ponto O ;
2. Traça o segmento \overline{OA} de medida 6cm ;
3. Trace uma circunferência de raio OA e centro em O ;
4. Divida a circunferência, com um transferidor, em cinco partes iguais marcando os pontos A , B , C , D e E ;
5. Determine o pentágono regular unindo os pontos A , B , C , D e E , formando os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EA} ;
6. Trace três de suas diagonais \overline{AC} , \overline{AD} e \overline{BE} ;
7. Nomeie por F a intersecção entre as diagonais \overline{AC} e \overline{BE} (Figura 33);
8. Com uma régua de precisão milimétrica, tome as seguintes medidas:

$$AB = \dots\dots\dots$$

$$AC = \dots\dots\dots$$

$$AF = \dots\dots\dots$$

$$CF = \dots\dots\dots$$

9. Com o auxílio de uma calculadora, calcule as razões a seguir:

$$\frac{\textit{diagonal}}{\textit{lado}} = \frac{AC}{AB} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\textit{diagonalmaior}}{\textit{diagonalmenor}} = \frac{CF}{AF} = \dots\dots\dots$$

Em uma etapa seguinte, o professor pode solicitar que os alunos sigam os mesmos procedimentos para uma outra medida de raio que queiram e, logo após, confrontem as razões obtidas com as encontradas no desenvolvimento desta atividade. Logo após, deve-se abrir espaços para discussões e fechamento da atividade.

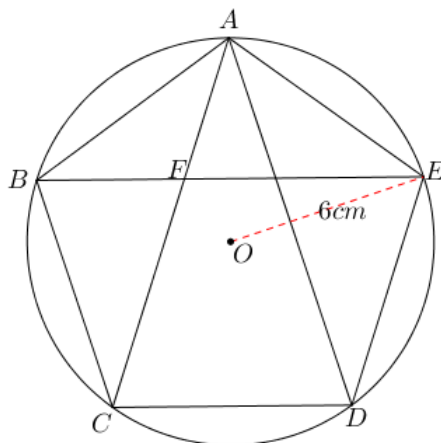


Figura 33: Pentágono regular inscrito em uma circunferência de centro O e raio OA

4.5 ATIVIDADE 5 - O NÚMERO DE OURO NA RAZÃO ENTRE ÁREAS DE TRIÂNGULOS DE OURO

A atividade tem por objetivo mostrar aos alunos a presença do número de ouro na razão das áreas entre um triângulo de ouro alto e um triângulo de ouro curto, inscritos em um mesmo pentágono regular.

Os materiais necessários para a realização da atividade são: compasso, régua de precisão milimétrica, transferidor, calculadora e lápis (Figura 34).

Os procedimentos da realização da atividade são:

1. Desenhe um pentágono regular $ABCDE$, a partir de um centro O e raio de circunferência 8cm , conforme orientação presente na Atividade 4;
2. Trace três diagonais \overline{AC} , \overline{AD} e \overline{BE} , formando os triângulos isósceles $\triangle ABE$ e $\triangle ACD$;
3. Encontre M , sendo o ponto médio do segmento \overline{BE} ;
4. Encontre N , sendo o ponto médio do segmento \overline{CD} ;
5. Trace o segmento \overline{AM} , sendo a altura do triângulo isósceles $\triangle ABE$;
6. Trace o segmento \overline{AN} , sendo a altura do triângulo isósceles $\triangle ACD$ (conforme ilustrado na Figura 34);
7. Utilizando a régua de precisão milimétrica, realize as seguintes medições:

Medida da base do triângulo isósceles $\triangle ABE$:

$$BE = \dots\dots\dots$$

Medida da altura do triângulo isósceles $\triangle ABE$:

$$AM = \dots\dots\dots$$

Medida da base do triângulo isósceles $\triangle ACD$:

$$CD = \dots\dots\dots$$

Medida da altura do triângulo isósceles $\triangle ACD$:

$$AN = \dots\dots\dots$$

8. Com o auxílio de uma calculadora, calcule a área de cada triângulo:

Área do triângulo $\triangle ABE$:

$$A_{\triangle ABE} = \frac{BE \times AM}{2} = \dots\dots\dots$$

Área do triângulo $\triangle ACD$:

$$A_{\triangle ACD} = \frac{CD \times AN}{2} = \dots\dots\dots$$

9. Com o auxílio de uma calculadora, realize as razões:

$$\frac{A_{\triangle ACD}}{A_{\triangle ABE}} = \dots\dots\dots$$

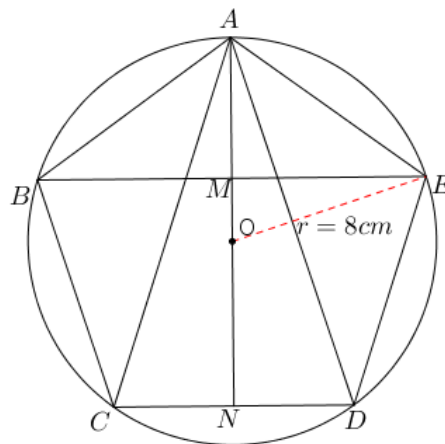


Figura 34: Pentágono regular inscrito em um círculo de raio 8cm

Ao término da atividade o professor abre espaço para discussão sobre os resultados obtidos, mostrando que será muito próximo do número de ouro Φ , devido à imprecisões dos instrumentos de medidas utilizados. É importante mencionar também os

triângulos inscritos no pentágono regular que são os dourados curto $\triangle ABE$ e alto $\triangle ACD$.

Fica a cargo do professor generalizar o resultado juntamente com os alunos. Para isso, será necessário terem conhecimentos de ângulos; razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente de um ângulo; e, cálculo de área de triângulos. Isso dependerá do nível de aprendizado que a turma se encontra.

4.6 ATIVIDADE 6 - TRIÂNGULOS DE OURO CURTO E ALTO

O objetivo desta atividade é apresentar para os alunos a presença do número de ouro nos triângulos isósceles curto (36° , 36° e 108°) e alto (72° , 72° e 36°) através da construção de um triângulo de ouro curto e as relações entre o circuncentro O , o ortocentro H e o incentro I , medindo com uma régua de precisão milimétrica e efetuando os cálculos através de uma calculadora (adaptada da Proposição 3.9).

Os materiais necessários para a realização desta atividade são: régua de precisão milimétrica, transferidor, calculadora, lápis e papel.

Os procedimentos da realização da atividade são:

1. Desenhe um segmento \overline{BC} de medida 10cm;
2. Com a régua e o transferidor trace uma reta por B com inclinação de 36° em relação ao segmento \overline{BC} ;
3. Com a régua e o transferidor trace uma reta por C com inclinação de 36° em relação ao segmento \overline{BC} , de modo a formar um triângulo isósceles $\triangle ABC$, cujos ângulos são 36° , 36° e 108° e A o ponto de intersecção das duas retas;
4. Encontre o incentro do triângulo $\triangle ABC$ e nomeie por I ;
5. Encontre o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$ e nomeie por H ;
6. Encontre o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$ e nomeie por O (conforme ilustrado na Figura 35);
7. Utilizando a régua de precisão milimétrica e uma calculadora, realize as seguintes medições e calcule: Medida da base do triângulo:

$$BC = \dots\dots\dots$$

Medida do lado isósceles do triângulo:

$$AB = \dots\dots\dots$$

Calcule:

$$\frac{BC}{AB} = \dots\dots\dots$$

Medida da distância do circuncentro ao ortocentro:

$$OH = \dots\dots\dots$$

Medida da distância do incentro ao ortocentro:

$$IH = \dots\dots\dots$$

Medida da distância do incentro ao circuncentro:

$$OI = \dots\dots\dots$$

Calcule:

$$\frac{OH}{IH} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{IH}{OI} = \dots\dots\dots$$

Medida da distância de B ao circuncentro:

$$OB = \dots\dots\dots$$

Calcule:

$$\frac{OH}{OB} = \dots\dots\dots$$

Medidas dos ângulos do triângulo $\triangle HBO$:

$$H\hat{B}O = \dots\dots\dots$$

$$H\hat{O}B = \dots\dots\dots$$

$$B\hat{H}O = \dots\dots\dots$$

O professor pode pedir que os alunos observem e façam medições nos lados e ângulos do triângulo formado $\triangle HBO$, verificando que é isósceles de ouro alto de maneira que a razão entre o lado isósceles e a base também é o número de ouro Φ . É possível verificar também que o triângulo $\triangle HBI$ é isósceles curto sendo que $BI = IH$.

Além de levantar estas outras questões e discutir os resultados obtidos, o professor tem a opção de generalizar com a turma o fato que ocorre com triângulos semelhantes, de acordo com os descritos nesta atividade.

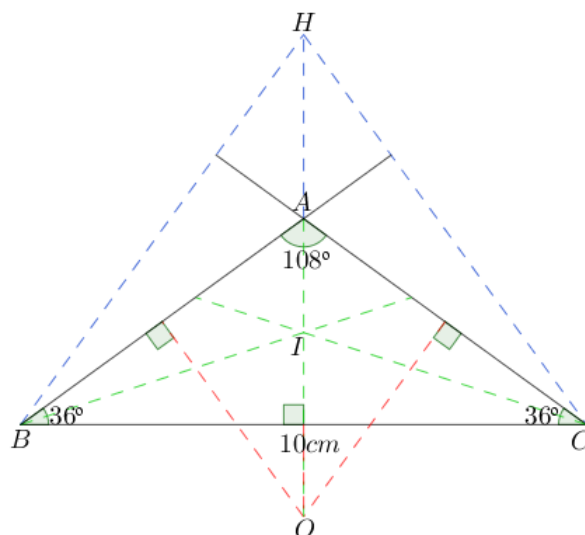


Figura 35: Triângulo de ouro curto e suas cevianas

Este tipo de intervenção poderá ser feita se os alunos tiverem domínio de equações de 2º grau, razões trigonométricas, semelhança de triângulos, Teorema de Tales e Teorema da Bissetriz Interna.

Ficará a cargo do professor decidir a melhor condução e ou adaptações para a realização da atividade.

Com isso, finalizamos esta seção de atividades sabendo que é possível realizar muitas outras envolvendo o número de ouro e suas relações existentes nos triângulos de ouro curto e alto, no retângulo áureo, e no pentágono regular, porém estas foram explanadas para que o aluno se familiarize e perceba a vasta aplicabilidade deste número que é tão encantador e que chama a atenção dos estudiosos há séculos.

No apêndice, apontamos possíveis soluções para a realização das atividades propostas neste capítulo, servindo apenas de sugestão para o professor.

A

APÊNDICE A

Neste espaço, deixaremos as resoluções das seis atividades do capítulo 4, propostas para os alunos.

A.1 DETERMINANDO O PONTO DE DIVISÃO ÁUREA DE UM SEGMENTO

A proposta da Atividade 1 era para determinar um ponto que dividia o segmento \overline{AB} em média e extrema razão através de construção geométrica.

Iniciamos a partir de um segmento \overline{AB} de medida qualquer e determinando o seu ponto médio M através de um compasso, traçando duas circunferências de raio maiores que a metade de \overline{AB} e iguais, com centros nos pontos A e B . Ao traçarmos um segmento pelas intersecções das circunferências, pontos P e Q , encontraremos o ponto M no segmento \overline{AB} (figura 36).

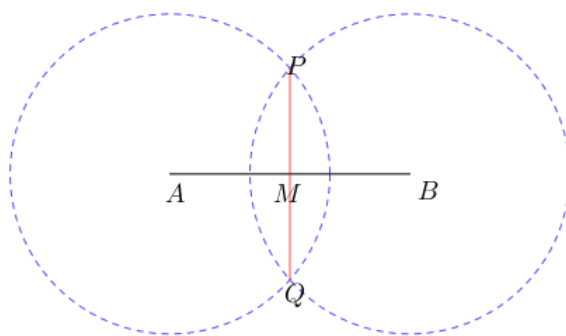


Figura 36: Ponto médio M do segmento \overline{AB}

Com régua e compasso, traçamos um segmento \overline{BC} que é perpendicular à \overline{AB} de forma que $BC = \frac{1}{2}AB$. Em seguida, traçamos uma circunferência de raio \overline{BM} e centro em B , encontrando o prolongamento de \overline{AB} em R . Traçamos duas circunferências de centros em M e R de modo que os raios tenham medidas maiores que o segmento \overline{MB} e que sejam iguais. Uma das intersecções entre as circunferências foi denominada por K . O prolongamento do segmento traçado por \overline{BK} encontra o ponto C na circunferência de raio \overline{MB} . O triângulo $\triangle ABC$, retângulo em B , formado é tal que $BC = \frac{1}{2}AB$ (Figura 37).

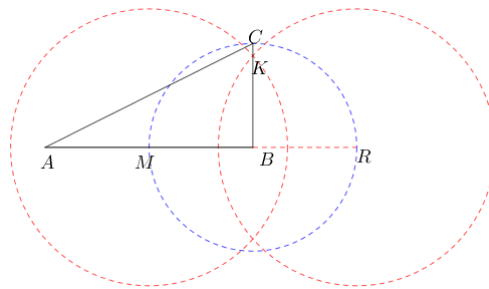


Figura 37: Triângulo retângulo $\triangle ABC$ com $BC = \frac{1}{2}AB$

Com régua e compasso, traçaremos uma circunferência de centro C e raio \overline{BC} , encontrando o ponto Y no segmento \overline{AC} , e finalmente traçaremos uma circunferência de centro A e raio \overline{AY} , encontrando o ponto X no segmento \overline{AB} , de modo que X divide \overline{AB} na razão áurea (Figura 38).

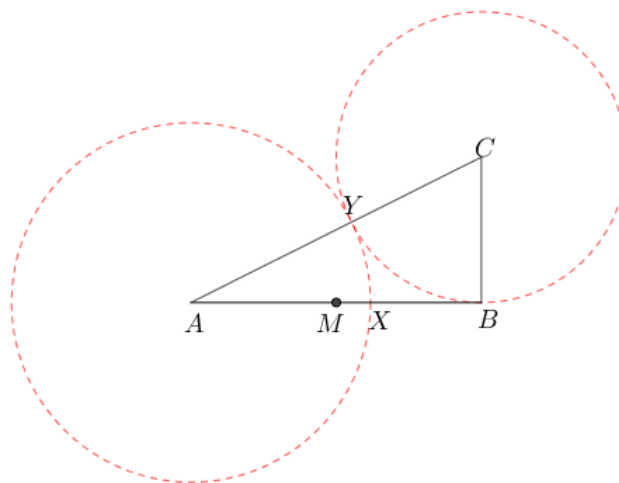


Figura 38: Triângulo retângulo $\triangle ABC$ com X dividindo \overline{AB} na razão áurea

Para que a construção na atividade seja validada, seguiremos com uma demonstração.

Demonstração. Sejam as medidas dos segmentos $AB = x$ e $BC = YC = \frac{x}{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras temos que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = x^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$AC = \frac{x}{2}\sqrt{5}.$$

Como $AY = AX$ e que $BC = CY$ podemos calcular que:

$$AX = AC - CY$$

$$AX = \frac{x}{2}\sqrt{5} - \frac{x}{2}$$

$$AX = \frac{x}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Então, podemos obter que:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi \approx 1,62.$$

Portanto,

$$\frac{AB}{AX} = \Phi \approx 1,62.$$

□

A.2 CONSTRUINDO UM RETÂNGULO COM SEÇÕES ÁUREAS

A proposta da atividade era construir um retângulo cuja razão entre os lados fosse a do número de ouro.

Com régua e compasso construiremos, conforme atividade 1 anterior, o ponto X de modo que divida o segmento \overline{AB} na razão áurea (Figura 39).

Com compasso, construiremos uma circunferência de centro A e raio \overline{AX} . traçaremos uma perpendicular ao segmento \overline{AB} por A , encontrando E na intersecção com a circunferência.

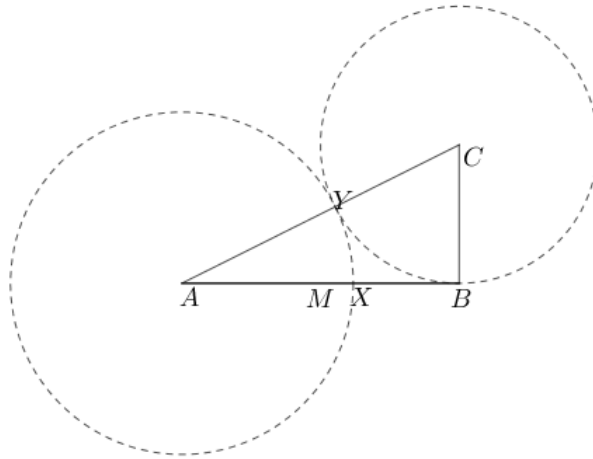


Figura 39: Triângulo retângulo $\triangle ABC$ com X dividindo \overline{AB} na razão áurea

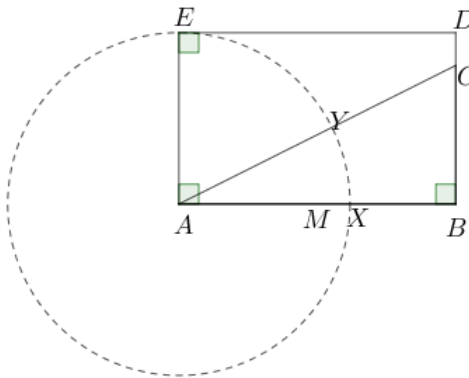


Figura 40: Retângulo áureo $\square ABDE$

Traçaremos um segmento \overline{DE} paralelo ao segmento \overline{AB} , encontrando D na intersecção com o prolongamento do segmento \overline{BC} (Figura 40).

Seguiremos com a demonstração, validando a proposta da Atividade 2.

Demonstração. Seja $AB = x$. Conforme demonstração da atividade anterior sabemos que $AX = \frac{x}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Como $AE = AX$ por compartilhar do mesmo raio de circunferência, então $\frac{AB}{AE} = \frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi \approx 1,62$. □

A.3 CONSTRUÇÃO DE UMA SEÇÃO ÁUREA

O objetivo desta atividade foi de encontrar um segmento dividido na razão áurea através da manipulação de três segmentos de mesma medida.

Inicialmente vamos traçar uma reta que passa pelo ponto A_1 e por ele $\overline{A_1B_1}$, medindo 10cm perpendicular à reta r , utilizando o transferidor (Figura 41).



Figura 41: Segmento $\overline{A_1B_1}$ de 10cm perpendicular à reta r

Utilizando a régua de precisão milimétrica, tracemos o segmento $\overline{A_2B_2}$ de 10cm tal que B_2 seja ponto médio de $\overline{A_1B_1}$ e A_2 intersecte a reta r (Figura 42).

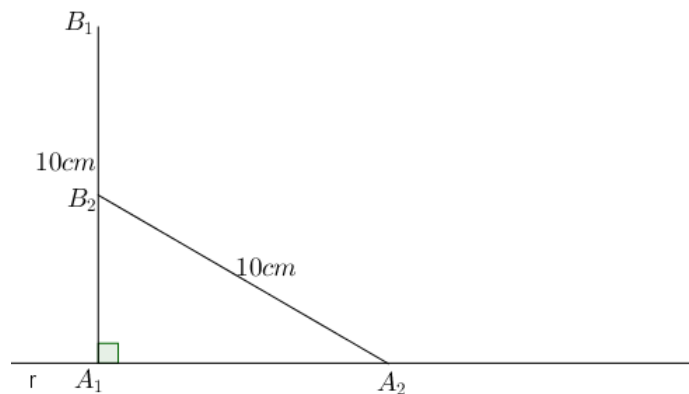


Figura 42: Segmento $\overline{A_2B_2}$ de 10cm com ponto médio B_2 em $\overline{A_1B_1}$ e intersectando a reta r

Com o mesmo procedimento, tracemos o segmento $\overline{A_3B_3}$ de 10cm tal que B_3 seja ponto médio de $\overline{A_2B_2}$ e A_3 intersecte a reta r (Figura 43).

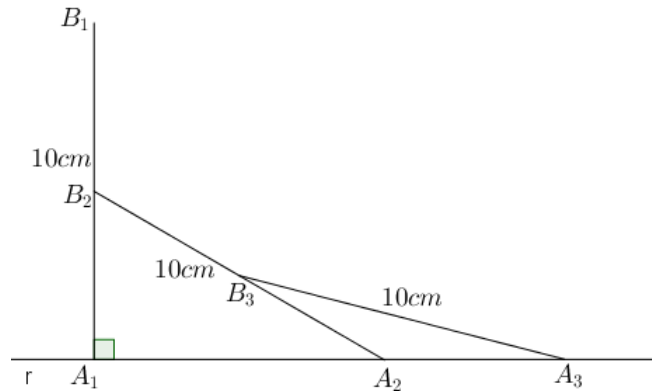


Figura 43: Segmento $\overline{A_3B_3}$ de 10cm com ponto médio em $\overline{A_2B_2}$ e intersectando a reta r

Com a régua de precisão milimétrica, realizaremos as medições dos segmentos solicitados na Atividade 3 (Figura 44).

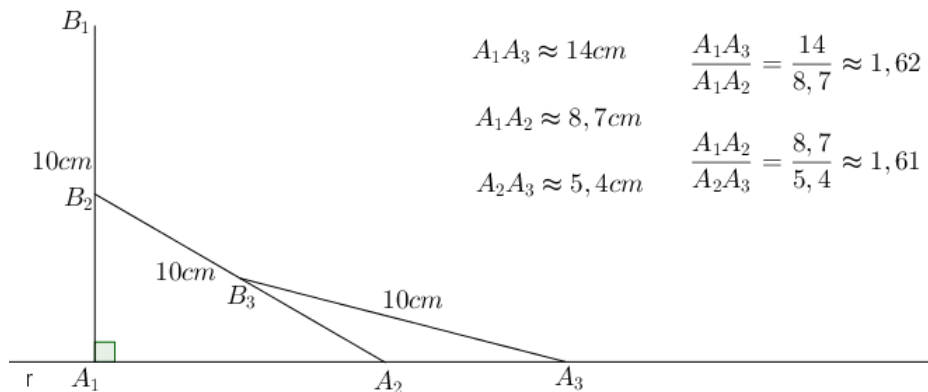


Figura 44: Razão áurea no segmento $\overline{A_1A_3}$ a partir do ponto A_2

Os números encontrados nas razões a partir do segmento $\overline{A_1A_3}$, dividido pelo ponto A_2 são muito próximos do número de ouro Φ .

Finalizando a resolução seguiremos com a demonstração dos valores encontrados presente na atividade.

Demonstração. Seja $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = x$. Como B_2 é ponto médio de A_1B_1 e B_3 é ponto médio de A_2B_2 , então $A_1B_2 = A_2B_3 = \frac{x}{2}$. Como $\overline{A_1B_2} \perp r$, então o triângulo $\triangle B_2A_1A_2$ é retângulo em A_1 . Assim, pelo teorema de Pitágoras temos:

$$(A_2B_2)^2 = (A_1B_2)^2 + (A_1A_2)^2$$

$$(A_1A_2)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$A_1A_2 = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Seja $P \in r$ (Figura 45), de modo que $\overline{PB_3} \perp r$ e como B_3 é ponto médio de $\overline{A_2B_2}$, então o triângulo retângulo $\triangle B_3PA_2$ é semelhante ao triângulo $\triangle B_2A_1A_2$ e $A_1P = PA_2 = \frac{1}{2}A_1A_2$, logo $PA_2 = \frac{x\sqrt{3}}{4}$.

Seja $\triangle B_3PA_3$ o triângulo retângulo com $B_3P = \frac{x}{4}$ e $B_3A_3 = x$, pelo teorema de Pitágoras calculamos PA_3 .

$$(PA_3)^2 = x^2 - \frac{x^2}{16} = \frac{15x^2}{16}$$

$$PA_3 = \frac{x\sqrt{15}}{4}.$$

Como $A_1A_3 = A_1A_2 - PA_2 + PA_3$, então:

$$A_1A_3 = \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{4} + \frac{x\sqrt{15}}{4} = \frac{x(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{4}.$$

Como $A_2A_3 = A_1A_3 - A_1A_2$, então:

$$A_2A_3 = \frac{x(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{4} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{4}.$$

Assim, a partir dos resultados obtidos, podemos verificar a existência da razão áurea entre os seguintes segmentos:

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_2} = \frac{\frac{x(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{4}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{4}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

□

A.4 CONSTRUINDO UM PENTÁGONO REGULAR

Esta atividade tem por objetivo desenvolver a habilidade de construções geométricas, bem como verificar a existência da razão áurea presente neste polígono.

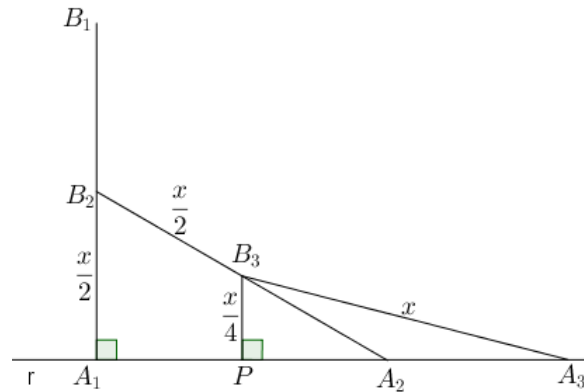


Figura 45: Demonstração da razão áurea nos segmento $\overline{A_1A_3}$ a partir do ponto A_2

Para o seu desenvolvimento, deve-se inicialmente, marcar um ponto central O e com o compasso, traçamos com raio de 6cm a circunferência que será circunscrita ao pentágono regular. Em seguida, dividiremos, com o transferidor, a circunferência em cinco partes para identificar os vértices A, B, C, D e E do pentágono regular. Faremos isso marcando aleatoriamente um ponto A na circunferência. O ponto B deverá ser marcado tal que $med(\widehat{AOB}) = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Este procedimento será comum em todos os pontos adjacentes (Figura 46).

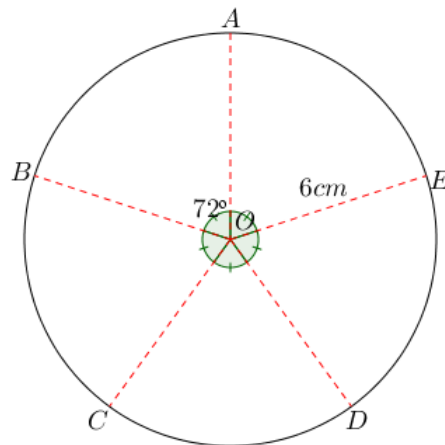


Figura 46: Circunferência de centro O e raio 6cm dividida em 5 pontos (A, B, C, D e E), de mesma distância

Com a régua, os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ e \overline{AE} formam um pentágono regular e ao traçarmos as diagonais $\overline{AC}, \overline{AD}$ e \overline{BE} temos dois triângulos isósceles que comparti-

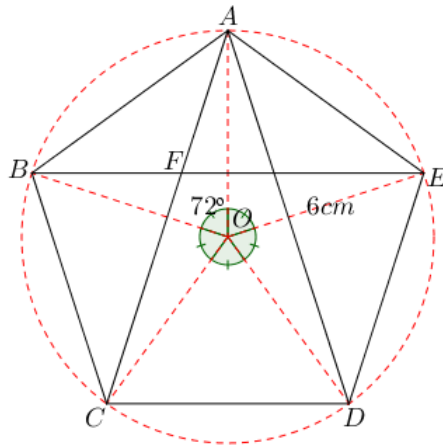


Figura 47: Pentágono regular $ABCDE$ e três de suas diagonais inscrito em uma circunferência de raio 6cm

lham dos vértices do pentágono regular. Nomearemos a intersecção das diagonais \overline{AB} com \overline{BE} por F (Figura 47).

Com uma régua de precisão milimétrica, tomaremos as medidas: do lado \overline{AB} ; da diagonal \overline{AC} ; de \overline{AF} e \overline{FC} que são segmentos divididos pela diagonal \overline{BE} (Figura 47). E logo após, com a calculadora, realizaremos o cálculo das razões $\frac{AC}{AB}$ e $\frac{FC}{AF}$, observando que os resultados obtidos são muito próximos do número de ouro Φ , devido à imprecisão dos instrumentos de medição.

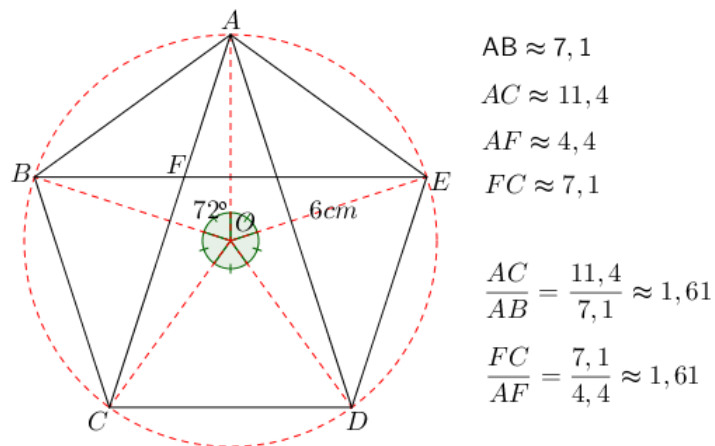


Figura 48: Medições dos lados e diagonais do pentágono regular $ABCDE$

A.5 O NÚMERO DE OURO NA RAZÃO ENTRE ÁREAS DE TRIÂNGULOS DE OURO

A atividade tem por objetivo mostrar a presença do número de ouro na razão entre as áreas de triângulos curto e alto presentes em um pentágono regular.

Para o seu desenvolvimento, deve-se seguir os procedimentos da atividade anterior, desenhando com um compasso um círculo de centro O e raio 8cm ; inserir cinco pontos A , B , C , D e E de forma que os adjacentes formam com o ponto O ângulos de 72° ; com uma régua, traçar os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{AE} , formando um pentágono regular (Figura 49).

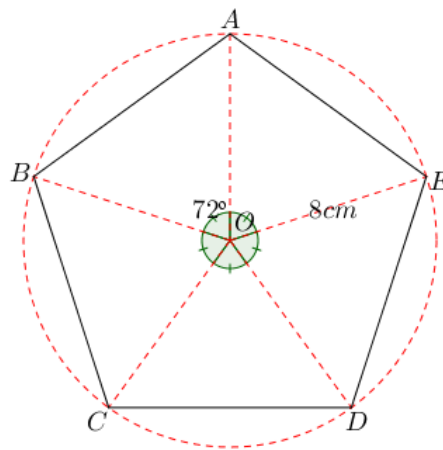


Figura 49: Pentágono regular $ABCDE$ inscrito em um círculo de raio 8cm

Com a régua, traçaremos três diagonais \overline{AC} , \overline{AD} e \overline{BE} formando dois triângulos: $\triangle ABE$ e $\triangle ACD$ (Figura 50).

Com a intenção de calcular a área de cada um dos triângulos, com uma régua de precisão milimétrica, traçaremos os segmentos das alturas \overline{AM} e \overline{AN} , sendo M e N , pontos médios dos triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle ACD$, respectivamente e A vértice comum dos dois triângulos (Figura 51).

Com régua de precisão milimétrica, realizaremos as medições das bases \overline{BE} , \overline{CD} e alturas \overline{AM} e \overline{AN} dos respectivos triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle ACD$.

Com uma calculadora, realizaremos o cálculo das áreas dos triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle ACD$, bem como a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle ACD$ (Figura 52).

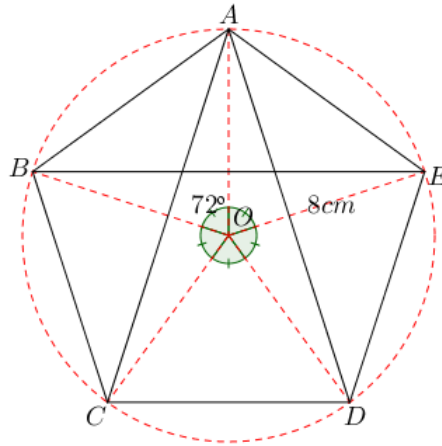


Figura 50: Triângulos $\triangle ABE$, $\triangle ACD$ do pentágono regular $ABCDE$ inscrito em um círculo de raio 8cm

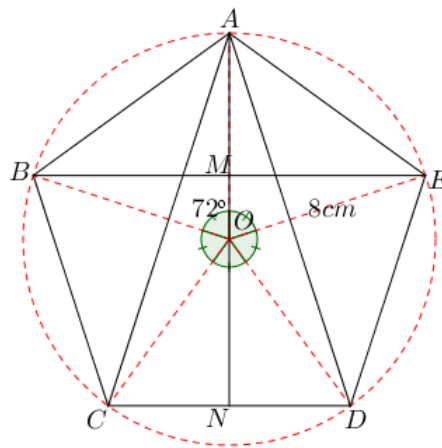
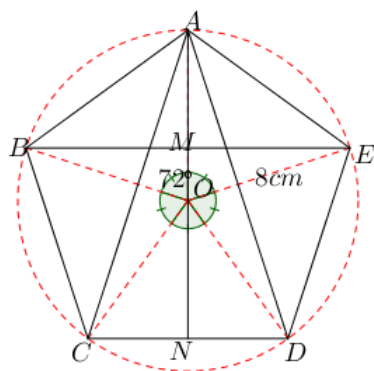


Figura 51: Alturas dos triângulos $\triangle ABE$, $\triangle ACD$ do pentágono regular $ABCDE$



$$\begin{aligned}
 BE &\approx 11,4 \\
 AM &\approx 4,2 \quad A_{\triangle ABE} = \frac{11,4 \times 4,2}{2} = 23,94 \\
 CD &\approx 7,1 \\
 AD &\approx 10,9 \quad A_{\triangle ACD} = \frac{7,1 \times 10,9}{2} = 38,695 \\
 \frac{A_{\triangle ACD}}{A_{\triangle ABE}} &= \frac{38,695}{23,94} \approx 1,616
 \end{aligned}$$

Figura 52: Cálculo da razão entre as áreas dos triângulos $\triangle ABE$, $\triangle ACD$

A generalização da atividade passa pelo fato que devemos inicialmente, mostrar que a razão entre a diagonal e o lado do pentágono regular é o número de ouro, mas também que estas medidas fazem parte dos triângulos estudados nesta atividade.

Demonstração. Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABE$ isósceles e congruentes, pois os lados $AB = BC = AE = a$ por formarem lados do pentágono regular e as diagonais $AC = BE = d$ por serem as diagonais do pentágono regular (conforme ilustrado na Figura 53).

Como a soma dos ângulos internos de um pentágono é 540° e sendo este regular, temos que o ângulo interno de cada vértice será de $\frac{540}{5} = 108^\circ$. Logo, o ângulo interno do vértice A do triângulo $\triangle ABE$ e o ângulo interno do vértice B do triângulo $\triangle ABC$ têm medida de 108° , sendo os ângulos dos lados isósceles destes triângulos de medida igual a $\frac{180 - 108}{2} = 36^\circ$.

Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são congruentes, o triângulo $\triangle ACD$ também é isósceles, pois $med(\widehat{ACD}) = med(\widehat{BCD}) - med(\widehat{ACB}) = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$; $med(\widehat{ADC}) = med(\widehat{EDC}) - med(\widehat{ADE}) = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$; e $med(\widehat{CAD}) = med(\widehat{BAE}) - med(\widehat{BAC}) - med(\widehat{DAE}) = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ$.

Seja ainda, F o ponto de intersecção das diagonais \overline{AC} e \overline{BE} . Como o ponto $F \in \overline{AC}$ e $F \in \overline{BE}$, então $med(\widehat{FAB}) = med(\widehat{FBA}) = med(\widehat{FEA}) = 36^\circ$, sendo que o triângulo $\triangle ABF$ é semelhante aos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABE$ (triângulos de ouro curtos). Já o triângulo $\triangle AFE$ é isósceles com ângulos de 36° , 72° e 72° (triângulo de ouro alto), pois $med(\widehat{FEA}) = 36^\circ$; $med(\widehat{AFE}) = 180 - med(\widehat{AFB}) = 72^\circ$, devido ao ângulo \widehat{AFE} ser o suplementar do ângulo \widehat{AFB} ; e $med(\widehat{FAE}) = med(\widehat{BAE}) - med(\widehat{BAC}) = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Com isso, $AE = FE = a$ e como $BE = d$, temos que $BF = BE - FE = d - a$. Sendo o triângulo $\triangle ABF$ isósceles, $BF = AF = d - a$.

Estabelecendo a relação de semelhança entre os triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle ABF$, temos que $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BF} = K$, isto é, $\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a} = K$. Como $d = aK$, temos que $\frac{aK}{a} = \frac{a}{aK-a}$, logo $K^2 - K - 1 = 0$, cuja raiz positiva é $K = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Calculando a área do triângulo $\triangle ACD$:

Sendo N o ponto médio da base \overline{CD} do triângulo isósceles, temos que \overline{AN} é mediana, mediatriz e altura do triângulo referente a base \overline{CD} , de modo que $\text{sen}72^\circ = \frac{AN}{AC}$, e como $AC = d$, $AN = d\text{sen}72^\circ$. Logo sua área é $A_{\triangle ACD} = \frac{adsen72^\circ}{2}$.

Calculando a área do triângulo $\triangle ABE$:

Seja $\overline{EA'}$ o segmento obtido através do prolongamento do segmento \overline{BA} de modo que $med(\widehat{EA'A}) = 90^\circ$. Com isso, $med(\widehat{EA'A'}) = 72^\circ$ pois é o suplementar do ângulo \widehat{BAE} , e $\overline{EA'}$ é a altura do triângulo referente à base \overline{BA} , de modo que $\text{sen}72^\circ = \frac{EA'}{AE}$, e como $AE = a$, $EA' = a\text{sen}72^\circ$. Logo sua área é $A_{\triangle ABE} = \frac{a^2\text{sen}72^\circ}{2}$.

Com isso, a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle ABE$ é, nesta ordem $\frac{A_{\triangle ACD}}{A_{\triangle ABE}} = \frac{\frac{ads\text{en}72^\circ}{2}}{\frac{a^2\text{sen}72^\circ}{2}} = \frac{d}{a}$. Como $\frac{d}{a} = \Phi$, então $\frac{A_{\triangle ACD}}{A_{\triangle ABE}} = \Phi$.

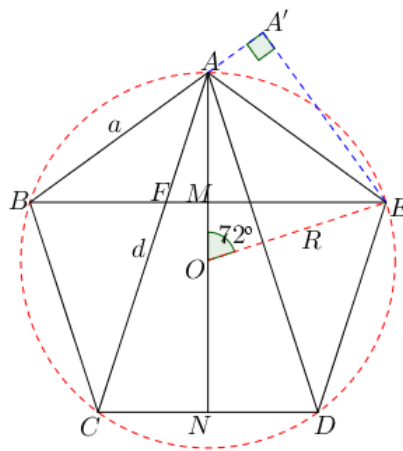


Figura 53: Demonstração da razão entre as áreas dos triângulos $\triangle ABE$, $\triangle ACD$

□

A.6 TRIÂNGULOS DE OURO CURTO E ALTO

A atividade tem por objetivo mostrar que o triângulo de ouro curto apresenta o número de ouro na relação entre circuncentro O , incentro I e ortocentro H e seus lados, sendo possível identificar um triângulo de ouro alto.

A atividade se inicia desenhando um triângulo isósceles de base $BC = 10\text{cm}$ e ângulos isósceles de 36° utilizando régua e transferidor (Figura 54).

Em seguida, com o transferidor e régua, traçaremos a bissetriz em cada um dos três ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ encontrando o incentro I na intersecção das três bissetrizes (Figura 55).

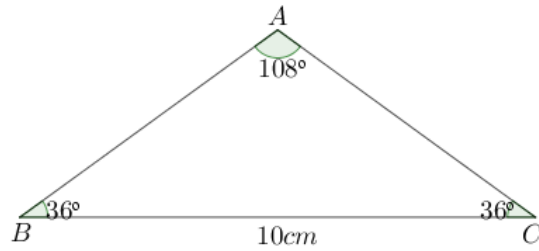


Figura 54: Triângulo de ouro curto $\triangle ABC$

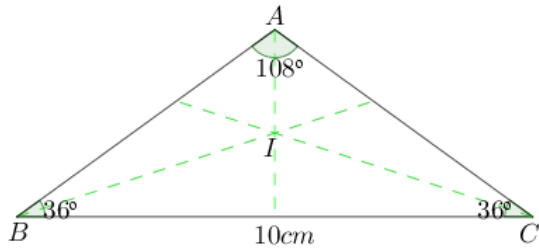


Figura 55: Incentro I no triângulo de ouro curto $\triangle ABC$

Utilizando régua e transferidor, traçaremos a mediatriz em cada um dos três lados do triângulo $\triangle ABC$ encontrando o circuncentro O na intersecção (Figura 56).

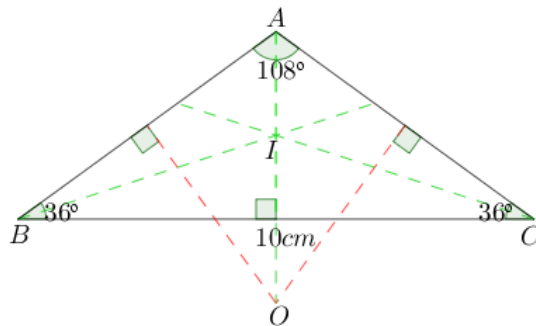


Figura 56: Circuncentro O no triângulo de ouro curto $\triangle ABC$

Encontraremos o ortocentro H através da intersecção das alturas referentes aos três lados do triângulo $\triangle ABC$, utilizando régua e transferidor (Figura 57).

Com uma régua de precisão milimétrica e uma calculadora, encontraremos as medidas dos lados \overline{BC} e \overline{AB} , dos segmentos \overline{OH} , \overline{IH} , \overline{OI} e \overline{OB} , e também realizaremos o cálculo das razões $\frac{BC}{AB}$, $\frac{OH}{IH}$, $\frac{OI}{OB}$ e $\frac{OH}{OB}$.

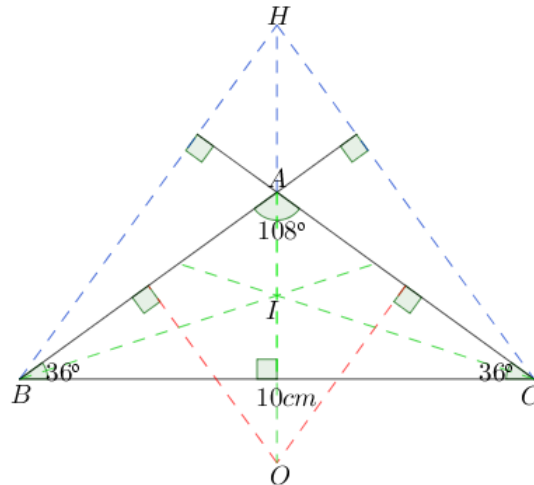


Figura 57: Ortocentro H no triângulo de ouro curto $\triangle ABC$

Com o auxílio de um transferidor mediremos os ângulos \widehat{HBO} , \widehat{HOB} e \widehat{BHO} verificando que o triângulo formado $\triangle HBO$ é um triângulo de ouro alto (Figura 58).

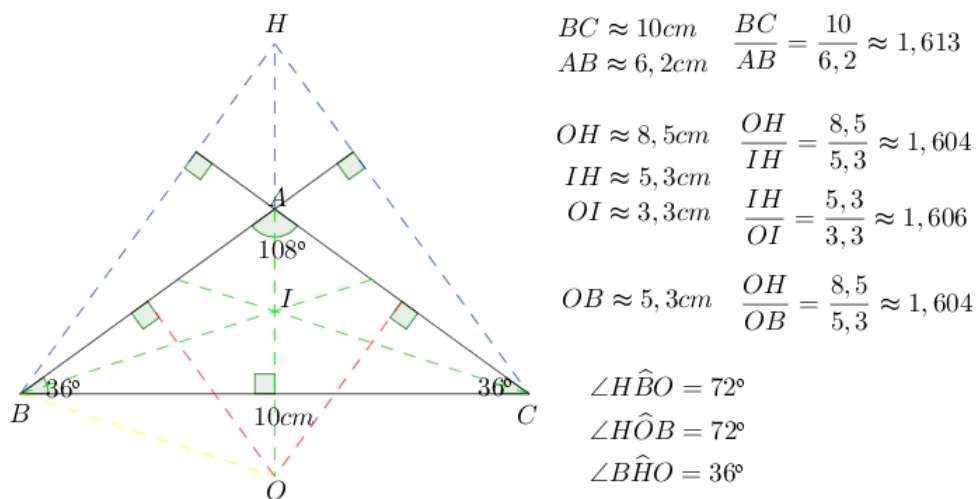


Figura 58: Razões áureas no triângulo de ouro curto $\triangle ABC$

Seguiremos com a demonstração da atividade iniciando pelo fato de que um triângulo isósceles com ângulos de 36° , 36° e 108° possui a razão áurea na divisão de sua base pelo lado isósceles, conforme ilustrado na Figura 59.

Demonstração. Seja o triângulo isósceles curto $\triangle ABC$, de base \overline{BC} ; O o seu circuncentro; I o seu incentro; H o seu ortocentro.

Sejam M , N e P os pontos médios dos respectivos segmentos \overline{BC} , \overline{AB} e \overline{AC} ; S o ponto pertencente ao segmento \overline{BH} de modo que $\overline{BH} \perp \overline{CS}$ e T o ponto pertencente ao segmento \overline{CH} de modo que $\overline{CH} \perp \overline{BT}$; e, R o raio da circunferência que circunscreve o triângulo $\triangle ABC$ com centro em O .

Como $\overline{ON} \perp \overline{AB}$ e N é ponto médio de \overline{AB} , temos que os triângulos $\triangle ANO$ e $\triangle BNO$ são congruentes com o lado comum \overline{ON} e $OB = OC = OA = R$. Com isso, sabemos que $med(\widehat{AON}) = med(\widehat{BON}) = 36^\circ$, pois $med(\widehat{BAO}) = 54^\circ$ (bissetriz do ângulo \widehat{BAC}) e, em consequência $med(\widehat{BOA}) = med(\widehat{BOH}) = 72^\circ$. Sabemos ainda que $med(\widehat{NBO}) = 54^\circ$ pois é o complementar do ângulo \widehat{NOB} e, como $med(\widehat{SBA}) = 18^\circ$ por ser o complementar do suplementar do ângulo \widehat{BAC} , temos que $med(\widehat{SBO}) = med(\widehat{HBO}) = 54^\circ + 18^\circ = 72^\circ$. Logo o triângulo $\triangle BHO$ é isósceles de ângulos 72° , 72° e 36° .

Sabemos que o triângulo $\triangle HBI$ é isósceles e semelhante ao triângulo $\triangle ABC$, pois \widehat{BHI} é congruente a \widehat{BHO} e igual a 36° , $med(\widehat{IBH}) = med(\widehat{ABI}) + med(\widehat{SBA}) = 18^\circ + 18^\circ = 36^\circ$, e por consequência, temos que $med(\widehat{HIB}) = 180^\circ - med(\widehat{IBH}) - med(\widehat{BHI}) = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ$. Com isso, temos que as medidas do triângulo são $BI = IH = BO = R$ pois \overline{BI} é a reflexão de \overline{BO} no lado \overline{BC} e o lado \overline{BH} calcularemos através da relação de semelhança $\frac{BH}{BC} = \frac{BI}{AB}$, denominando $AB = a$, $BC = d$, $BI = R$ e sabendo que $\frac{d}{a} = \Phi$, temos que $\frac{BH}{d} = \frac{R}{a}$, isto é, $BH = \frac{Rd}{a} = R\Phi$.

A partir dos resultados obtidos temos a verificação das razões:

$$\frac{OH}{IH} = \frac{R\Phi}{R} = \Phi.$$

$$\frac{OH}{OB} = \frac{R\Phi}{R} = \Phi.$$

$$\frac{IH}{OI} = \frac{IH}{OH - IH} = \frac{R}{R\Phi - R} = \frac{1}{1 - \Phi}.$$

Como $\Phi^2 - \Phi = 1$, temos que $\frac{IH}{OI} = \frac{\Phi^2 - \Phi}{\Phi - 1} = \Phi$. □

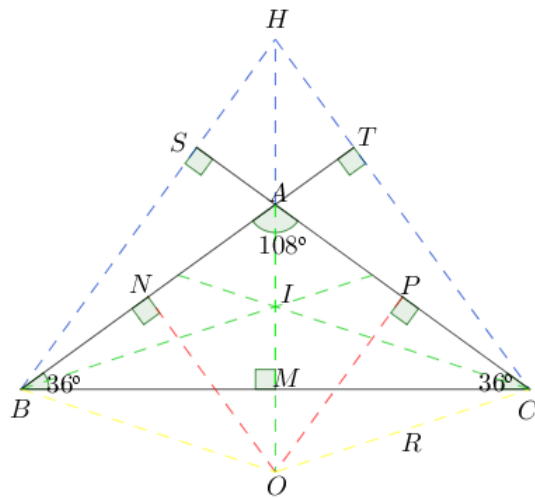


Figura 59: Demonstração das razões áureas no triângulo de ouro curto $\triangle ABC$

BIBLIOGRAFIA

- [1] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental.; *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC, 1998*. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em 20 de maio de 2017.
- [2] EMMANUEL, A. J and PAUL YIU.; *Golden sections of triangle centers in the golden triangles, Forum Geometricorum, 16 (2016) 119-124*. Disponível em: <<http://forumgeom.fau.edu/FG2016volume16/FG201616index.html>>. Acesso em 31 de março de 2017.
- [3] EUCLIDES; *Os Elementos*, Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo, UNESP, 2009.
- [4] IEZZI, G.; *Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria - vol 03*. São Paulo, Ed. ATUAL, 1978.
- [5] LIVIO; *Razão Áurea*, Tradução de Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro, Ed. RECORD, 2009.
- [6] MARTINS, P. C.; *O Número de Ouro e a Divina Proporção*. Disponível em: <<http://pre.univesp.br/o-numero-de-ouro-e-a-divina-proporcao#.WK3RGdIrLIU>>. Acesso em 8 de março de 2017.
- [7] MESQUITA, G. da S., *O círculo de nove pontos e algumas de suas potencialidades didáticas*, Dissertação de Mestrado - Profmat / UFRPE, 2013.
- [8] NIEMEYER, J.; *A Simple Construction of the Golden Section, Forum Geometricorum, 11 (2011) 53*. Disponível em: <<http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201105index.html>>. Acesso em 07 de abril de 2017.
- [9] OBMEP; <<http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea-proporcao-aurea-um-concurso-de-beleza/>>. Acesso em 4 de dezembro de 2017.
- [10] QUEIROZ, S. da C., *O número de Ouro: História, mitos e verdades e suas aplicações na Educação Básica*, Dissertação de Mestrado - Profmat / UECE, 2013.

- [11] SANTOS, G. V. dos; *Explorando a Matemática do número Φ* , Dissertação de Mestrado - Profmat / UNESP, 2013.