UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT
(Mestrado)

RICARDO DE OLIVEIRA GONÇALVES

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DO ENEM: UMA PROPOSTA DE CURSO COM ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Maringá-PR
2018

RICARDO DE OLIVEIRA GONÇALVES

Resolução de problemas de matemática do ENEM: Uma proposta de curso com alunos do 3º ano do Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi

Maringá

2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR, Brasil)

Gonçalves, Ricardo de Oliveira

G635r Resolução de problemas de matemática do ENEM: uma proposta de curso com alunos do 3° ano do Ensino Médio / Ricardo de Oliveira Gonçalves. –Maringá-Pr., 2018.
42 f.: il.color+anexo.

Orientador: DR. Wesley Vagner Inês Shirabayashi.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Matemática, 2018.

1.Resolução de problemas. 2.Preparação para ENEM. 3.Aula em contra turno. 4.Método de Polya. I. Shirabayashi, Wesley Vagner Inês, orient. II.Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III.Título.

CDD 23.ed.372.7

Aparecida Malagolini – CRB-9/1135

RICARDO DE OLIVEIRA GONÇALVES

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DO ENEM: UMA PROPOSTA DE CURSO COM ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Wesley V. I. Shirabayashi
Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Valter Soares de Camargo
Universidade Estadual do Paraná - Paranavaí

Emerson Vitor Castelani
Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 30 de outubro de 2018.
Local de defesa: Sala 107, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desse período de estudos, minha família, namorada, amigos, alunos e colegas de trabalho pelo companheirismo e pela compreensão.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

À UEM e Departamento, pela disponibilização de recursos e materiais necessários.

Aos professores de cada disciplina, pela dedicação e incentivo, em especial ao Professor Orientador Wesley pela disponibilidade e acreditar nesta pesquisa.

À Secretária do curso, Lúcia, pela presteza e dedicação além das suas funções.

“Todo o trabalho é vazio,

a não ser que haja amor.”

Khalil Gibran.

Resumo

Neste trabalho apresentamos os estudos realizados com um grupo de alunos de 3º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual João XXIII, no município de Janiópolis - Pr. O trabalho sugeriu a aplicação de um curso em contra turno com a resolução de problemas das provas do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, dos anos de 2012 à 2017, com a intenção principal de beneficiar esses alunos que, em sua maioria, não têm acesso a uma preparação eficiente para o ENEM. Sendo aplicado um Exame inicial e um Exame final após as aulas em contra turno com a resolução desses problemas. Abordaremos material teórico que argumenta a utilização de resolução de problemas, descrição do processo desde a seleção dos alunos, aplicação dos exames e preparação dos mesmos, além de comparativo com dados dos resultados dos dois exames aplicados.

Palavras chave: Resolução de problemas, Preparação para o ENEM, Aulas em contra-turno, Método de Polya.

Abstract

In this work we present the studies carried out with a group of 3rd year high school students of the João XXIII State College, in the municipality of Janiópolis - Pr. The work suggested the application of a course in turn with a problem solving of the ENEM - National High School Examination, from the years 2012 to 2017, with the main intention of benefiting these students, who in the majority do not have access to an efficient preparation for the ENEM. An initial exam and a final exam were applied after the classes in turn with the resolution of these problems. This work covers a theoretical material that argues the use of problem solving, description of the process from the selection of the students, application of the exams and preparation of the same, as well as comparative study with data of the results of the two exams applied.

Keywords: Problem Solving, ENEM Preparation, Counter-Turn Classes, Polya method.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Muitas vezes os alunos da Educação Básica, se deparam no 3º ano[1] ainda com muita dificuldade de compreender e resolver os problemas matemáticos dispostos no ENEM[2]. Sabendo que atualmente, uma boa nota no ENEM é bastante importante para o ingresso em um curso superior público, principalmente em cursos mais concorridos, a rede de educação básica de ensino deve buscar meios de fortalecer a aprendizagem destes conteúdos.

O Ensino Básico, nos moldes atuais, já não é suficiente para uma preparação do indivíduo para que obtenha sucesso na área de Matemática e Suas Tecnologias na prova do ENEM. Há a necessidade de outros meios para que os alunos estejam preparados para alcançar bons resultados.

Na matemática a resolução de problemas é um meio que pode auxiliar essa preparação. E ao falarmos de alunos da rede pública de ensino, que na maioria dos casos não dispõem de recursos para buscar uma preparação em cursos preparatórios e/ou aulas particulares, é importantíssima a participação do seu professor de matemática nesse processo.

Assim, uma maneira de colaborar com estes alunos, é prepará-los por meio da resolução de problemas do ENEM em contra turno, para que paralelamente cumpram suas metas curriculares e de aprovação no Ensino Médio, e estejam preparados para avançarem.

Com esta pesquisa busca-se mostrar que o estudo pela resolução de problemas, como complemento à sala de aula, pode sanar as dúvidas dos alunos, falhas e vícios de um estudo mal estruturado ao longo do tempo, também aumentar o índice de compreensão e acerto em questões do ENEM e ainda aproximar o aluno da matemática.

[1] Geralmente última série de estudos antes de ingressarem em um curso superior, excetuando-se por alguns cursos técnicos integrado que podem ter 4 anos.

[2] Exame Nacional do Ensino Médio.

Com o intuito de realizar essa proposta de pesquisa, algumas ações foram planejadas dentre elas destacamos: selecionar entre os alunos do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual João XXIII, na cidade de Janiópolis – PR, um grupo de alunos para o estudo; a aplicação de um primeiro Exame individual nos moldes do ENEM com estes alunos (contemplando questões do Banco de dados do ENEM, de anos anteriores), como forma de diagnóstico e também para comparativo com um segundo Exame; lecionar aulas em contra turno com uma carga horária prevista de 16 horas/aula, ensinando como resolver problemas utilizando as ideias de Polya; a aplicação de um segundo Exame com este grupo de alunos nos mesmos moldes do primeiro Exame após a preparação do grupo de alunos para efeito comparativo, e percepção de avanços ou não em relação ao primeiro exame.

Como embasamento bibliográfico para esta pesquisa qualitativa, aborda-se inicialmente o tema resolução de problemas, citando por sua vez a influência de autores na pesquisa sobre o tema, destacando, entre os três modos de abordar a resolução de problemas apresentados por Schoeder e Lester (1989, apud Onuchic, 1999), utilizar a resolução de problemas como forma de ensinar a resolver problemas, fazendo um elo entre Ensinar sobre resolução de problemas[3], e Ensinar para resolução de problemas[4]. Este último, que faz referência ao objetivo deste estudo.

No Capítulo 2 são apresentados dados sobre o ENEM, sua estrutura e importância social.

No Capítulo 3 é relatado o processo de pesquisa realizada "in locco" que investigou a aplicabilidade prática da teoria a realidade dos alunos, com detalhes sobre as características do grupo de alunos, necessária para a sustentabilidade da proposta de pesquisa, com detalhes sobre a preparação e aplicação dos exames: seleção de questões, estruturação das provas e análise diagnóstica dos investigados. Aborda-se ainda neste capítulo o desenvolvimento das aulas em contra turno com acompanhamento e intervenções necessárias em diversas situações.

No Capítulo 4 apresentam-se informações acerca dos acertos dos alunos nos exames aplicados, juntamente com outros resultados da pesquisa a que este trabalho se propôs com percentuais de acertos e análise de avanço dos alunos.

---

[3]Modo que é visto por Proença (2012), que faz uso do Modelo de Polya.

[4]Sugerido por Proença (2012) como o professor direcionando suas ações para que o aluno utilize seus conhecimentos matemáticos na resolução de problemas e exercícios.

Por fim têm-se as considerações finais acerca do trabalho, com percepções de possíveis falhas no ensino, apontamentos dos ganhos e sugestões de pesquisa futura.

Capítulo 1

Resolução de problemas

Há uma certa dificuldade para muitos em diferenciar problema de exercício, ou quando sabem diferenciar, por vezes não conseguem executar com frequência a resolução de problemas.

Dante (1998, apud Rodrigues e Magalhães, 2012) faz esta diferenciação onde exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo e problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que garanta a solução.

Para este mesmo autor, a resolução de um problema exige certa dose de iniciativa e criatividade, aliada ao conhecimento de algumas estratégias. Define também como problema, tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver.

Vale lembrar que a resolução de problemas está entre as quatro metodologias de ensino da Matemática apresentadas pelo Parâmetros Curriculares Nacionais (2006). E que o Professor tem papel crucial no que se refere a resolução de problemas junto a seus alunos, momento em que este é sugerido como mediador no trajeto desde compreensão do problema até sua solução.

Os PCNs (2006) enfatizam a necessidade do professor sempre contextualizar e problematizar os conteúdos matemáticos.

Resolver problemas matemáticos, muitas vezes contribui para além da matemática. Segundo Rodrigues e Magalhães (2012), a atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas, exigindo soluções que muitas vezes requerem estratégias de enfrentamento. O aprendizado de estratégias auxilia o aluno a enfrentar novas situações em outras áreas do conhecimento.

A resolução de problemas contempla vasto campo de estudo com vários segmentos de pesquisa. Embora Schroeder e Lester (1989, apud Souza e Nunes, 2007) descrevam três modos de abordar a resolução de problemas, que foram descritos no NCTM[1], que são: Ensinar sobre resolução de problemas; Ensinar para resolver problemas; e Ensinar Matemática através da resolução de problemas. Neste estudo aborda-se principalmente o segundo modo, Ensinar para resolver problemas, que é objeto de estudo pertinente ao objetivo deste, embora utiliza-se do modelo de Polya que muitos sugerem fazer parte do primeiro modo descrito.

1.1 Técnicas para resolução de problemas

Para se resolver um problema, pode-se dizer que não há uma receita pronta e acabada, que garanta a sua solução correta. Também não existe uma única forma de fazê-lo. Segundo Dante (1998, apud Rodrigues e Magalhães, 2012), ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. O professor deve fazer perguntas para que os alunos possam compreender o problema. Os alunos devem ser encorajados a fazer perguntas ao professor e entre eles mesmos.

Embora existam outras formas de se resolver um problema, o Método de Polya ainda é referência para tal, inclusive por se tratar de um processo investigativo que utiliza-se de forma bastante didática para seus fins. Inúmeros autores fazem referência a este método quando se trata de modelos e formas de se resolver um problema, como Dante (1998), Gazzoni e Ost (2008), Rodrigues e Magalhães (2012), Araújo (2015), Claras e França (2015), Valério (2017), entre outros.

O modelo de Polya dividi-se em quatro partes, que são: Compreensão do problema; Estabelecimento de um plano; Execução do plano e Revisão da resolução.

A seguir será detalhada cada fase desse processo.

[1]National Council of Teachers of Mathematics – Conselho Nacional de Professores de Matemática.

1.1.1 Compreensão do problema

É entendida como uma etapa de grande importância, não faz sentido tentar responder uma pergunta sem saber o seu significado, assim não faz sentido resolver o problema sem compreendê-lo. É visto que já nesta primeira etapa, há uma preocupação que a aprendizagem seja significativa. É sugerido por Polya e por vários autores, que neste momento, para uma melhor compreensão do problema se façam algumas perguntas e questionamentos, algumas destas perguntas podem ser:

O que se pede no problema?

Qual é a incógnita?

Quais são os dados?

Qual é a condicionante?

Também se devem levar em consideração as várias formas de ver o problema, seus pontos de vista, considerar tudo que se julgar importante no problema.

Devemos verificar se o problema pode ser representado através de uma figura e se é possível satisfazer as condições.

Neste momento, quando se trata da resolução de um problema proposto pelo professor em sala de aula, este pode/deve fazer perguntas à turma, fazer indagações, os alunos devem sentir-se encorajados a fazer perguntas ao professor, até conseguirem por si sós, fazerem as perguntas adequadas para auxiliar na resolução.

1.1.2 Estabelecimento de um plano

Polya, aponta que para se iniciar um plano de resolução, deve-se primeiramente pensar para tentar buscar uma relação, se houver, com algum outro problema que já é conhecido pelo aluno, que este já resolveu anteriormente com mesma incógnita, com informações semelhantes que possa utilizá-las também para o problema em questão.

Pode-se usar as seguintes questões neste momento:

Você já resolveu algum problema semelhante?

Há algum outro problema que possa ser útil?

É possível que o problema possa ser reformulado?

Há como resolvê-lo por partes?

É possível organizá-lo por meio de dados, gráficos ou figuras?

Quando não se tem um problema comum, Gazzoni (2008) reforça sugestão de Polya:

> Caso não seja encontrado nada que nos ajude, devemos verificar se é possível fazer uma reformulação no enunciado. Essa reformulação pode levar a um problema auxiliar adequado. Ao usarmos vários problemas ou teoremas conhecidos, realizando diversas modificações e ensaiando problemas auxiliares diferentes, podemos nos distanciar do problema original. Para voltar, podemos realizar a seguinte indagação: Foram utilizados todos os dados? Foram usados todos os condicionantes?

1.1.3 Execução do plano

O plano trata-se de um simples roteiro geral, mas deve-se atenção para que todos os detalhes pertinentes estejam presentes nele para que não passe despercebido algum erro por falta de organização das informações. Geralmente é uma tarefa fácil sua execução, mas é necessário ter organização e paciência (podem haver problemas com grande quantidade de cálculos, numéricos e/ou algébricos), deve-se ter certeza de que cada passo executado esteja correto.

Ainda sobre a execução do plano, Polya (2006, apud Gonçalves e Godinho, 2006) aponta:

> [...]os alunos incentivados pelo professor devem executar seus planos, se determinado plano não der certo, procura-se outro. Os alunos devem colocar em ação o que planejaram, no final o professor deve discutir com a turma o desempenho e fazer a devida avaliação.

1.1.4 Revisão da resolução

Como o tópico sugere, é o momento de revisar o que foi feito. Esta é uma etapa de grande importância, quando se executa a revisão é quando se terá a certeza de que resolveu-se o problema de maneira correta, onde poderá encontrar e eliminar, alguma falha que possa ter ocorrido durante a execução do plano.

Para tanto, pode-se realizar o seguinte questionamento:

É possível verificar o resultado?

É possível verificar o argumento?

Também será necessário verificar que pode-se utilizar o resultado obtido ou o método utilizado em algum outro problema e se há a possibilidade de encontrar a solução utilizando outra estratégia.

Há de se perceber que muitas vezes não termina por aqui. Caso encontre-se erro nesta etapa, sugere-se a retomada das etapas anteriores para ainda assim solucionar de maneira correta o problema em questão.

Capítulo 2

ENEM

2.1 Estrutura do ENEM

O ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, é uma avaliação anual aplicada pelo MEC[1] para avaliar o Ensino Médio em todo o território brasileiro, tanto para a rede pública quanto para a rede particular de ensino. Este exame completa em 2018 vinte anos de aplicação, passando por vários moldes e modelos, na busca por um melhor disgnóstico nas competências desenvolvidas pelos alunos no Ensino Médio. Atualmente sua aplicação é dividida em dois dias com os temas e quantidade de questões indicadas abaixo:

1º Dia	Linguagens, Códigos e suas Tecnologias	45 questões
	Ciências Humanas e suas Tecnologias	45 questões
2º Dia	Ciências da Natureza e suas Tecnologias	45 questões
	Matemática e suas Tecnologias	45 questões

Tabela 2.1: Temas por dia.

No primeiro dia de prova além dos dois temas, é aplicada a prova de Redação, com duração máxima de 5 horas e 30 minutos, já o segundo dia tem duração máxima de 5 horas.

Cada tema é dividido em habilidades. Em Matemática e suas tecnologias, que é a área de interesse deste estudo, são 30 habilidades específicas divididas por competências em sete áreas, sendo elas:

[1]Ministério da Educação e Cultura.

Área 1	**Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.**
H1	Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
H2	Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
H3	Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
H4	Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
H5	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
Área 2	**Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.**
H6	Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
Área 3	**Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**
H10	Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11	Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12	Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13	Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14	Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Tabela 2.2: Competências do ENEM parte 1

Área 4	**Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**
H15	Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16	Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17	Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18	Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
Área 5	**Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.**
H19	Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20	Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21	Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22	Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.
Área 6	**Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.**
H24	Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
H25	Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
H26	Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Tabela 2.3: Competências do ENEM parte 2

Área 7	**Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.**
H27	Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29	Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
H30	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Tabela 2.4: Competências do ENEM parte 3

2.2 Importância social do ENEM

Ao ENEM, ao longo dos anos foi-se atribuindo inúmeras funções, principalmente no que se refere a acesso ao Ensino Superior, como: Acesso às universidades públicas, acesso às universidades particulares, Certificação do Ensino Médio e até mesmo Intercâmbio internacional.

No caso do acesso à universidades públicas, o ENEM serve para substituir o vestibular, sendo o acesso feito por meio do Sisu[2], sem a necessidade de vestibular. Em algumas universidades públicas serve para complementar a nota do vestibular.

O acesso às universidades particulares se dá basicamente de três formas distintas. Por meio do ProUni[3], em que são ofertadas bolsas de estudos de 50% ou 100%; Por meio do FIES[4], sendo possível financiar entre 50% e 100% das mensalidades; Ou simplesmente para substituir o vestibular.

Para obter o certificado de conclusão do ensino médio, segue-se critérios específicos[5].

O Intercâmbio internacional ou bolsas de estudos no exterior é adquirido através do programa Ciências sem Fronteiras.

São vários os benefícios apontados aqui, todos sendo necessária a participação e determinado desempenho nas provas do ENEM, destacando sua grande importância para os estudantes dessa nação. Principalmente quando refere-se à estudantes com nível social mais baixo, sua importância é mais significativa ainda. Uma vez que durante toda sua vida escolar o acesso a informação e preparação acadêmica sugere-se ter sido mais limitada, tanto pelo sistema público de educação e a cultura social da família ou sociedade que está inserida.

Em contra partida atualmente muitos jovens, inclusive de escola pública, já conseguem perceber que o ENEM é a forma mais adequada de que consigam o acesso ao Ensino Superior, seja público ou privado. Principalmente quando em seus sonhos constam o desejo por

[2]Sistema de Seleção Unificada é um processo seletivo totalmente informatizado que classifica os candidatos usando unicamente o desempenho no ENEM. Ocorre duas vezes por ano, uma em cada semestre.

[3]Programa Universidade para Todos.

[4]Financiamento Estudantil do Governo Federal a juros baixos, com taxa de 3,4% ao ano.

[5]Nesse caso é obrigatório marcar essa opção ao se inscrever no Enem, ter no mínimo 18 anos completos até o dia da primeira prova e obter o desempenho de pelo menos 450 pontos nas provas objetivas e 500 pontos na redação.

cursos mais procurados, que geralmente são mais caros em universidades privadas ou mais concorridos nas públicas.

Dessa forma, a busca por estar preparado em alcançar resultados mais altos é cada vez mais comum. Atualmente, muitas famílias investem "pesado"ao longo dos anos (muitas vezes desde as séries iniciais) em escolas privadas com altos custos almejando uma preparação mais eficaz, visando "lá na frente"o ENEM. Quando não, investem ao menos em cursos preparatórios específicos para o mesmo fim, quando seu filho chega no Ensino Médio.

Neste mesmo sentido, muitos colégios ou cursinhos, usam as notas do ENEM alcançadas por seus alunos como propaganda para atrair matrículas e status quanto a qualidade do ensino ofertado.

A partir desses argumentos, e se tratando do perfil do grupo de alunos investigados neste trabalho (que é mais detalhado no próximo capítulo), se consolida mais ainda a necessidade deste estudo.

Capítulo 3

Desenvolvimento

3.1 O grupo de alunos investigados

Como o estudo tem relação direta com o ENEM, foi tomado como objeto de estudo um grupo de alunos do 3º ano, do único colégio de Ensino Médio do município de Janiópolis, no Paraná, o Colégio Estadual João XXIII.

No município não há cursos preparatórios[1] para o ENEM, ou vestibulares, o perfil social da maioria dos alunos é de classe social baixa, ou média baixa. Para estes alunos não há um preparo para o ENEM (o que sugere desempenhos não muito satisfatórios, em relação a outros alunos), o pouco contato com questões do ENEM obtido por esses alunos é feito em sala de aula, o que é pouco frequente, devido a baixa carga horária na disciplina de matemática de apenas 3 horas/aulas semanais, ou o que o próprio aluno tenta buscar em seus horários livres, em contra turno no colégio ou em casa, principalmente por meio da internet, o que é percebível que também ocorre com pouca frequência.

No colégio há 64 alunos matriculados nos terceiros anos, frequentando no momento da aplicação do estudo. Foi disponibilizado à todos estes alunos o convite para inscrição ao curso de preparação às questões de matemática do ENEM, embora por ser no turno da noite, alguns alunos já não poderiam participar. A escolha desse turno se deu pois nos turnos diurnos os alunos que estudam no noturno trabalham e os demais estudam.

Assim houve a inscrição dos alunos que demonstraram interesse e compatibilidade de horário num total de 28 alunos participantes, mas apenas 27 alunos[2] fizeram o Exame 1 e

[1] Seja por ter consideravelmente poucos alunos de 3º ano, por vários alunos serem da zona rural, outros serem alunos trabalhadores, ou ainda por serem em grande parte de classe social baixa.

[2] Após a aplicação do Exame 1, o aluno que não compareceu no dia, se demonstrou interessado e solicitou

puderam continuar no curso. Vale destacar que houve interesse de alguns alunos do 2º ano em participarem, mas estes foram dispensados, uma vez que a proposta era pra alunos do 3º ano.

3.2 Preparação e aplicação dos Exames

Para o estudo foi utilizado como banco de dados as questões do ENEM dos anos de 2012[3] à 2017, num total de 270 questões.

Primeiramente foram separadas (triadas) as 270 questões pelas 7 áreas, ficando assim divididas:

Área	1	2	3	4	5	6	7
Questões Banco de dados	70	28	47	20	31	45	29
Questões cada exame	5	2	4	2	2	4	2

Tabela 3.1: Triagem das questões por competência.

Foram selecionadas 21 questões para cada exame[4], com duração de 70 minutos, seguindo a média de tempo máxima disponível para resolução das 90 questões do segundo dia de prova do ENEM.

A escolha das questões para cada exame foi feita de maneira aleatória por meio de sorteio[5]. Sendo distribuídas de maneira proporcional (por aproximação) à quantidade total de questões.

Encontra-se no Apêndice os exames 1 e 2, com as questões, em acordo com as próximas tabelas que representam o número e ano de cada questão selecionada nas provas amarelas do ENEM.

que o aceitasse no curso e lhe aplicasse o exame. Foi lhe explicado que isso não era possível, então o aluno foi dispensado.

[3]Ano de implantação da Matriz de referência dos eixos cognitivos, na qual houve a estruturação atual por meio das competências e habilidades.

[4]Exame inicial aplicado no primeiro dia do curso e Exame final aplicado ao fim do curso, após as aulas de Resolução de Problemas.

[5]Para o sorteio foi utilizado o site https://www.sorteador.com.br.

Questão 1	136 ano 2016.
Questão 2	137 ano 2012.
Questão 3	140 ano 2016.
Questão 4	141 ano 2015.
Questão 5	141 ano 2012.
Questão 6	143 ano 2014.
Questão 7	145 ano 2015.
Questão 8	152 ano 2017.
Questão 9	146 ano 2015.
Questão 10	164 ano 2014.
Questão 11	136 ano 2012.
Questão 12	155 ano 2015.
Questão 13	158 ano 2017.
Questão 14	163 ano 2015.
Questão 15	164 ano 2016.
Questão 16	165 ano 2015.
Questão 17	175 ano 2013.
Questão 18	171 ano 2014.
Questão 19	180 ano 2015.
Questão 20	166 ano 2014.
Questão 21	180 ano 2016.

Tabela 3.2: Questões Exame 1

Questão 1	164 ano 2012.
Questão 2	163 ano 2013.
Questão 3	171 ano 2012.
Questão 4	161 ano 2013.
Questão 5	159 ano 2013.
Questão 6	173 ano 2013.
Questão 7	155 ano 2014.
Questão 8	172 ano 2014.
Questão 9	162 ano 2014.
Questão 10	175 ano 2014.
Questão 11	176 ano 2014.
Questão 12	161 ano 2015.
Questão 13	169 ano 2015.
Questão 14	179 ano 2015.
Questão 15	145 ano 2016.
Questão 16	137 ano 2016.
Questão 17	176 ano 2017.
Questão 18	152 ano 2016.
Questão 19	165 ano 2017.
Questão 20	172 ano 2017.
Questão 21	167 ano 2016.

Tabela 3.3: Questões Exame 2

3.3 Aulas preparatórias em contra turno

Durante o planejamento do curso, o local das aulas estava definido, com a direção do colégio, em uma sala que servia de sala auxilar, em dias de limpeza das salas de aulas, sala de estudos, entre outros. A sala em questão é considerada uma sala boa, com espaço e carteiras adequadas, com localização nas proximidades das demais salas do ensino médio. Entre o tempo de planejamento e aplicação do curso, o colégio em questão foi contemplado com uma reforma das salas de aula, o que impossibilitou o uso da sala selecionada a priori.

Uma vez que as salas de aula das turmas regulares estavam em reforma, estas turmas foram realocadas nos espaços como laboratórios e bibliotecas, restando para este curso preparatório somente uma sala de aula não tão adequada para estes alunos.

Vale saber que este colégio tem dualidade predial, compartilhando de espaço físico com uma escola municipal das séries inicias do ensino fundamental. O que mais implicava negativamente era a altura das carteiras e cadeiras que eram mais baixas do que as indicadas para a estatura da faixa etária em questão, e a sala era bastante colorida e decorada com muitos cartazes educativos, o que diversas vezes tomavam a atenção dos alunos, durante o curso.

Este, iniciou-se no dia 29 de maio de 2018, com a aplicação do Exame 1. A princípio a previsão de duração do curso, já considerando a aplicação dos dois exames, era de 16 horas/aula[6], em dois dias da semana com 2 horas/aula cada dia.

Ao longo do curso houve a necessidade de ampliação de carga horária para 28 horas/aula[7]. No primeiro encontro houve a aplicação do Exame 1[8], e no último encontro[9], ocorrido no dia 10 de julho de 2018, a aplicação do Exame 2.

Na aula seguinte após a aplicação do Exame 1, deu-se inicio por meio da apresentação de roteiro[10] e explanação de como sugere-se o desenvolvimento da resolução de um problema.

Destacou-se a importância do método de Polya para contribuir no sucesso e obtenção das respostas corretas, e discutiu-se as quatro etapas do método de Polya.

Usou-se o texto *Roteiro para resolução de um problema* (Apêndice C) entregue a cada aluno e foram resolvidos dois problemas como exemplo de como se usar informações estratégicas válidas para o sucesso na resolução do problema.

Segue um dos problemas resolvidos neste momento:

[6]Considera-se 1 hora/aula com duração de 50 minutos.

[7]Considerando o tempo de 2 horas/aula para a aplicação de cada exame.

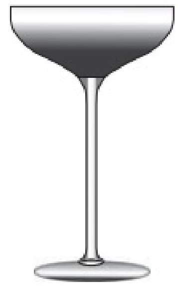
[8]Exame com duração máxima de 70 minutos, e tempo restante para apresentação e orientação a cerca do curso.

[9]Ao aproximar-se da data de encerramento do curso, alguns alunos e pais, solicitavam ao professor e direção do colégio a continuidade do curso, alegando que estava fazendo bem, agregando saberes e entusiasmo a alguns alunos.

[10]Por meio do data show e entregue impresso aos alunos.

QUESTÃO 137

Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.



A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a

A 192.
B 300.
C 304.
D 320.
E 400.

Figura 3.1: Questão 137, ano 2017, prova amarela

Etapa 1 - Compreensão do problema:

Precisa-se dispor 4 taças (com dimensões dadas) em uma única fileira em uma bandeja retangular menor possível (descobrir dimensões).

Etapa 2 - Estabelecer um plano:

Desenhar uma figura que represente a situação, levando em consideração a dimensão da base e as dimensões da borda superior das taças, destacando as medidas dos raios para verificar a dimensão da bandeja.

Etapa 3 - Executar o plano:

Após o desenho com as cotas[11], é calculada a área da bandeja retangular, que é o que se pede no problema.

[11]Figura 3.2 disponível no site http://angloresolve.plurall.net/press/question/2216903

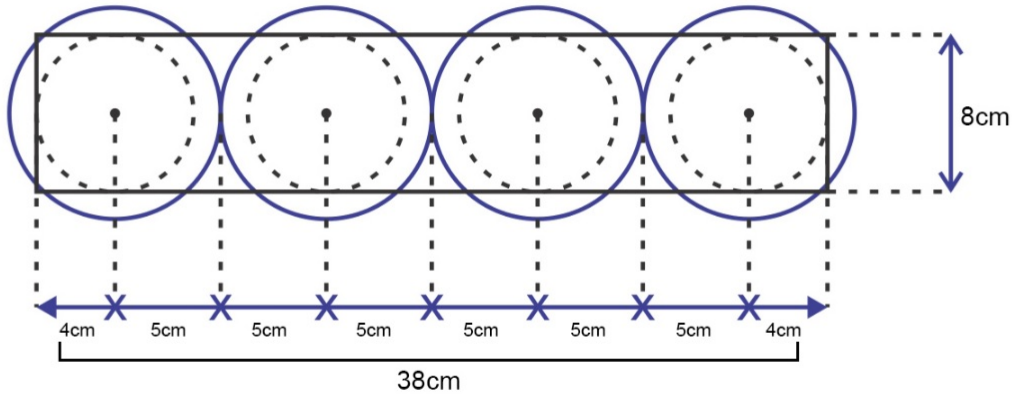


Figura 3.2: Dimensão das taças.

$$A_{retangular} = b.h$$
$$A_{retangular} = 38.8$$
$$A_{retangular} = 304cm^2.$$

Etapa 4 - Revisão da resolução:

São conferidas as medidas da base e borda superior da taça através dos seus raios e diâmetros, confirma se a região retangular utilizada como área da bandeja está de acordo com o enunciado (menor região e base totalmente apoiada), revisão da soma do comprimento e da multiplicação para cálculo da área da bandeja.

Em seguida foi proposto aos alunos que elencassem informações pertinentes para a resolução de um outro problema específico (Figura 3.3), o professor participou como mediador e auxiliou na solução do problema.

Neste momento, vários alunos "chutavam"as respostas, sem apresentarem argumentos embasados. Como os comentários abaixo:

Aluno: Perto do R não tem mina, é o R.

Aluno: Eu acho que ali no R tem mina sim, deve ser no Q que não tem.

Aluno: O S eu não abriria.

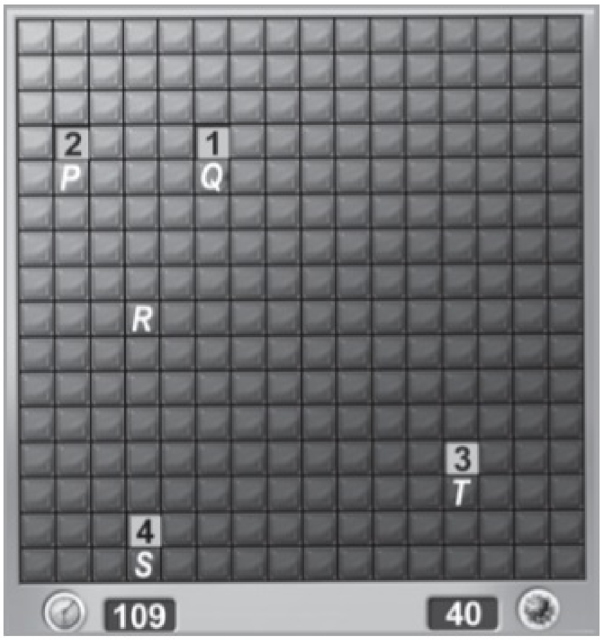
Aluno: Isso aí é pegadinha, certeza.

Aluno: Depois dá pra jogar esse jogo, e abrir os mesmos quadrados pra testar.

Após deixar os alunos comentarem e analisarem melhor o problema e a figura, sugeriu-

QUESTÃO 155

A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16 × 16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras *P*, *Q*, *R*, *S* e *T* um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

(A) *P*.
(B) *Q*.
(C) *R*.
(D) *S*.
(E) *T*.

Figura 3.3: Questão 155, ano 2017, prova amarela.

se que buscassem seguir as perguntas constantes no roteiro, entre outras, que achassem pertinentes à este problema.

Daí surgiram algumas sugestões deles, por meio de cada etapa, como sugerido de início. Buscou-se que os alunos respondessem verbalmente até surgirem respostas válidas. Segue as respostas dos alunos que possibilitaram a resolução[12].

Etapa 1 - Compreensão do problema:

Professor: O que se pede no problema?

Aluno: Quer saber qual botão tem menos chance de ter mina.

[12]Considere que entre as frases apresentadas pelos alunos, houve intervenções e incentivo feitas pelo professor, estas por vezes podem não estar apontadas aqui por não se considerar necessário.

Professor: Que dados são apresentados?

Aluno: O número de minas total;

Aluno: O número de quadrados ainda não abertos;

Aluno: O número de minas ao redor de quatro quadrados abertos.

Etapa 2 - Estabelecer um plano:

Aluno: Tem que encontrar a probabilidade de ter mina em cada um dos quadrados já abertos.

Aluno: E depois comparar qual tem menos chances de ter.

Etapa 3 - Executar o plano:

Considerando um quadrado de 3×3, para cada letras P, Q, S e T. Basta dividir o total de minas ao redor do quadrado aberto, como indicado na figura, por 8, que é o total de quadrinhos na área tomada de 3×3.

Probabilidade de mina na letra P:

$$\mathcal{P}(P) = \frac{2}{8}$$

$$\mathcal{P}(P) = 0,25$$

$$\mathcal{P}(P) = 25\%.$$

Probabilidade de mina na letra Q:

$$\mathcal{P}(Q) = \frac{1}{8}$$

$$\mathcal{P}(Q) = 0,125$$

$$\mathcal{P}(Q) = 12,5\%.$$

Probabilidade de mina na letra S:

$$\mathcal{P}(S) = \frac{4}{8}$$

$$\mathcal{P}(S) = 0,50$$

$$\mathcal{P}(S) = 50\%.$$

Probabilidade de mina na letra T:

$$\mathcal{P}(T) = \frac{3}{8}$$
$$\mathcal{P}(T) = 0,375$$
$$\mathcal{P}(T) = 37,5\%.$$

Para a probabilidade de mina na letra R, podemos dividir o total de minas pelo total de quadrados ainda não abertos:

$$\mathcal{P}(R) = \frac{40}{(16.16) - 4}$$
$$\mathcal{P}(R) = \frac{40}{256 - 4}$$
$$\mathcal{P}(R) = \frac{40}{252}$$
$$\mathcal{P}(R) \simeq 0,1587$$
$$\mathcal{P}(R) \simeq 15,87\%.$$

Etapa 4 - Revisão da resolução:

Durante a revisão um aluno perguntou se o cálculo da probabilidade do quadrado R não estava errado.

Alguns alunos comentaram que não estava errado e começaram a discutir sobre a resolução.

O aluno então indagou se não deveria descontar os quadrados que já foram considerados para a probabilidade dos quadrados P, Q S e T, inclusive as minas nestes quadrados.

O raciocínio do aluno estava correto, os demais alunos concordaram, então a resolução foi reescrita na lousa.

$$\mathcal{P}(R) = \frac{40 - (2 + 1 + 4 + 3)}{(16.16) - (4.9)}$$
$$\mathcal{P}(R) = \frac{40 - 10}{256 - 36}$$
$$\mathcal{P}(R) = \frac{30}{220}$$
$$\mathcal{P}(R) \simeq 0,1363$$
$$\mathcal{P}(R) \simeq 13,63\%.$$

Assim, o quadrado com menor probabilidade de ter uma mina é o representado pela letra Q. Embora a probabilidade não garanta que não haja mina neste quadrado, a alternativa mais adequada é a B.

Neste momento, após o contato dos alunos com o método de Polya, pela resolução destes dois problemas, foram resolvidos com os alunos os problemas apresentados no Exame 1, sempre incentivando-os à explorarem o enunciado novamente e rever suas resoluções, corrigindo-os na lousa.

Durante o curso, a questão do ENEM era sugerida no data show como problema para os alunos resolverem, sempre indicando que os alunos utilizassem o método de Polya para sua resolução. Em seguida o professor apanhava as informações pertinentes indicadas pelos alunos, para aquele problema. Em outros momentos era sugerida a resolução pelos alunos no caderno e depois estes resolviam na lousa.

Capítulo 4

Resultados

Percebeu-se durante as aulas grande resistência em seguir o método de Polya, ora resolviam sem estabelecerem as etapas sugeridas adequadamente, por vezes tentando fazer contas logo de início, ora faltava conhecimento acerca dos conteúdos para apontar estratégias, e/ou executar o plano.

Outro ponto que se mostrou oposto à avanços expressivos no desenvolvimento das atividades, foi a falta de domínio de conteúdo curricular, de séries anteriores e até mesmo de conteúdos já estudados durante o ano corrente, o que de antemão sugere pouco avanço no momento do aluno perceber as informações mais importantes e conseguir organizar a ordem de resolução. E ainda, alguns conteúdos em que o professor explanava, relembrando fórmulas e/ou demonstrações antes ou durante a resolução do problema, muitas vezes não atingia grande parcela dos alunos, pela baixa frequência nas aulas por estes, o que os impossibilitavam de avançar em outro momento em que surgia outro problema semelhante.

Essa falta de conteúdos sugere que o aluno não se apropria dos conteúdos estudados em sala de aula, e/ou simplesmente decoram, ou até mesmo apagam esses conteúdos, demonstrações e fórmulas utilizadas durante as aulas após encerrar determinado conteúdo, após avaliações.

Durante o planejamento deste trabalho, uma das ferramentas pensadas para análise dos resultados, foi um comparativo entre os possíveis avanços dos alunos do Exame 1 para o Exame 2. No gráfico a seguir, é possível verificar o desempenho, com a quantidade de acertos nos exames 1 e 2 referentes aos 14 alunos[1].

[1]Neste momento, foram desconsiderados os alunos que não participaram do Exame 2. Pois apenas seus acertos no exame 1 não surtiriam efeito comparativo.

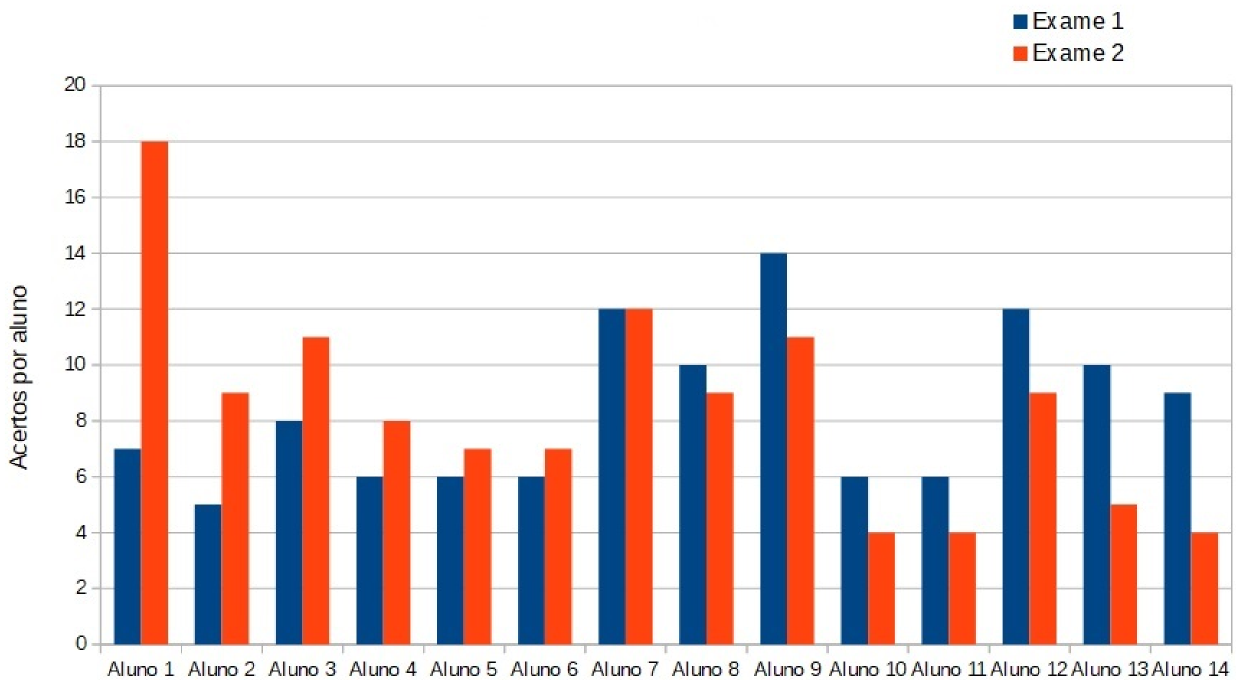


Figura 4.1: Comparativo desempenho alunos.

Percebe-se no gráfico, que houve avanços para alguns alunos no Exame 2, já outros acertaram menos questões neste, mesmo após a prática de resolução dos problemas durante o curso e incentivo da utilização do método de Polya. Um único aluno permaneceu com a mesma quantidade de acertos em ambos os exames.

Além desse comparativo entre exames para cada aluno. Com a triagem das questões pelas 7 áreas de competência foi possível comparar o percentual de acertos por área em cada exame.

Apesar de não ter havido uma classificação das questões quanto ao grau de dificuldade, ainda assim é interessante essa comparação para verificar possíveis áreas em que a maioria dos alunos apresentam pouco conhecimento ou maiores dificuldades.

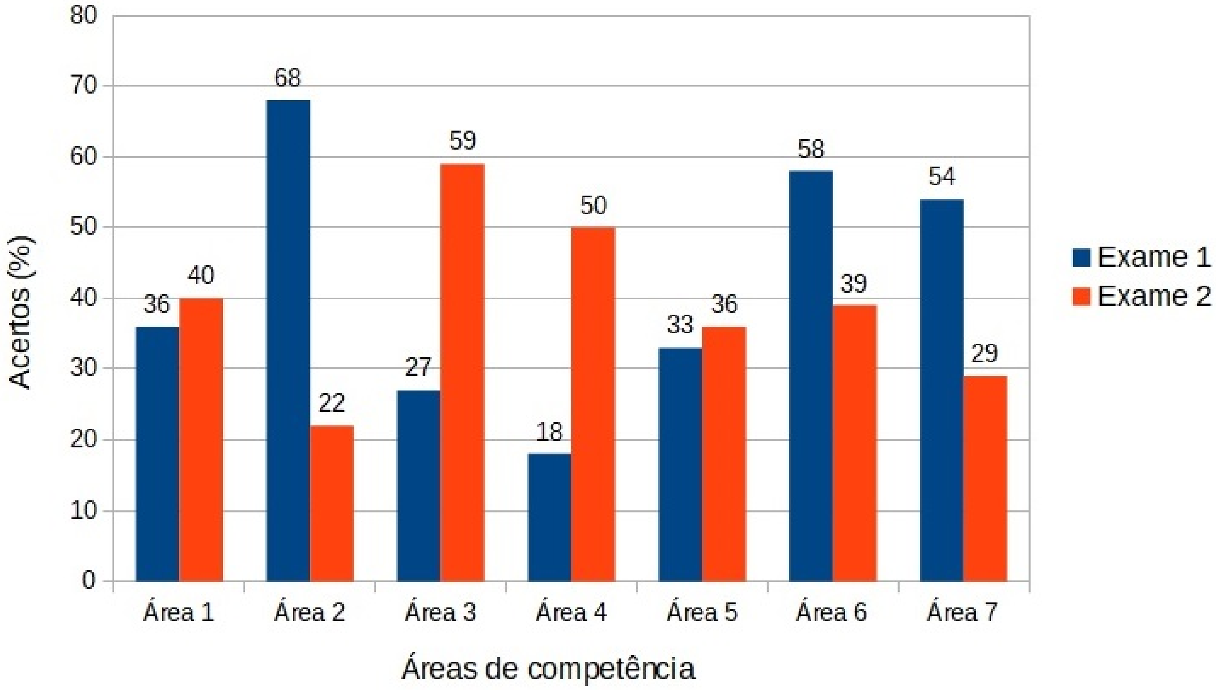


Figura 4.2: Comparativo desempenho por área.

Quanto às áreas de competência, percebe-se que nas áreas 3 e 4, houve avanços significativos com aumento de mais de 30% em cada. Houve ainda 4% de aumento nos acertos nas áreas 1 e 5. Em contra partida houve queda na quantidade de acertos na área 2, área 6 e área 7, respectivamente de 46%, 19% e 25%.

Capítulo 5

Considerações finais

Por se tratar de um trabalho com foco em resolução de problemas é válido considerar aqui, que para Valério (2017) é importante destacar que o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas propõe ensinar Matemática e não apenas ensinar a resolver problemas.

Neste sentido reforça-se a dificuldade apresentada pelos alunos em simplesmente resolver os problemas no curso, uma vez que era o proposto pelo mesmo, sem ensinar de fato a matemática, pois era entendido que esta já era ensinada nas aulas regulares, e que isto bastava. Estes resultados podem reafirmar a necessidade de atrelar o ensino da matemática com a resolução de problemas, para que os avanços sejam maiores.

Os baixos resultados não estão presentes somente aqui, mas pelo Brasil como um todo. Percebe-se esta situação a partir de dados acerca dos resultados da prova de matemática do ENEM do ano de 2017 no Brasil todo. Como sita essa reportagem no site UOL Educação, de 30 de julho de 2018:

> E os Especialistas alertam: Apenas três das 45 questões de matemática no Enem tiveram índice de acertos superior a 50%. Ou seja a maioria dos estudantes erra e muito - mostrando muita dificuldade na disciplina.

Ainda assim, houveram outros ganhos com o trabalho desenvolvido. A aplicação do curso preparatório, oportunizou aos alunos uma experiência diferente com o contato que nunca tiveram, em questão de intensidade, acerca da matemática do ENEM.

Os números por sua vez podem não apresentar avanços significativos de momento. Mas o contato semanal com essas questões e entusiasmo do professor, o que em certos momentos foi visto também no aluno, no envolvimento com a matemática, certamente permitiu uma desmistificação quanto ao receio em resolver questões em provas de matemática, o que poderá contribuir ainda na ansiedade com que muitos alunos enfrentam este momento tão importante de suas vidas[1].

A partir desta prática com esse grupo de alunos do 3º ano, mesmo não atingindo às expectativas de avanços esperadas, sugere-se para o próximo ano letivo, neste mesmo colégio um trabalho em contra turno com resolução de problemas do PAS-UEM[2], inicialmente com alunos da 1ª série do Ensino Médio, já incentivando-os à inscrição, participação e empenho neste programa, e no ano seguinte com os alunos classificados na etapa 1 do programa como meta à classificação na etapa 2, e assim sucessivamente.

A dificuldade dos alunos em resolver problemas é apontado neste trabalho e por vários outros autores de modo que Dante (1998, apud Rodrigues e Magalhães, 2012), afirma que embora tão valorizada, a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula. É muito comum os alunos saberem efetuar os algoritmos e não conseguirem resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos.

Como prática e crescimento profissional, o professor conclui este trabalho com mais experiência e segurança na resolução de problemas, que poderá contribuir para suas aulas em sala, sendo capaz de dar mais suporte aos alunos, unindo o ensino da matemática com a resolução de problemas diversos.

[1]Um contato mais intenso principalmente desses 14 alunos com a matemática durante o curso, despertou em um deles o desejo de mudar de opinião quanto a escolha de curso superior. Decidiu trocar o curso de música que era seu sonho, para cursar matemática.

[2]É uma forma alternativa de ingresso aos cursos de graduação da UEM. Onde a cada ano à partir da 1ª série do Ensino Médio o aluno faz uma prova a cerca de conteúdos estudados até aquela série.

Bibliografia

[1] Araujo, N. K. S., *Análise das dificuldades na resolução de problemas matemáticos por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental*. Universidade Federal do Sergipe, São Cristovão, Sergipe (2015).

[2] Brandão, M. J. L. B., *Modelo de Polya e a Resolução de Problemas Ambientais no 1º Ciclo: Conservação das dunas litorais*. Universidade do Minho, Braga (2005).

[3] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, *Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio: ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias.*. MEC, Brasília (2006).

[4] Claras, A. F., *A Resolução de problemas no ensino da matemática e as contribuições das calculadoras*. Artigo no XII Congresso Nacional de Educação, Curitiba, (2015).

[5] Coimbra, S. F.,*Resolução de problemas do ensino médio usando métodos de otimização*. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal do Piauí, Teresina, (2013).

[6] Gazzoni, A., Ost, A. , *A resolução de um problema: Soluções alternativas e variações na formulação* Vidya, Santa Maria (2008), 37-45.

[7] Gonçalves, E. H, Godinho, K. M., *O ensino da matemática através da resolução de problemas*. Artigo revista científica da Unicerp, Patrocínio, MG (2006).

[8] Idoeta, P. A., *Enem: o que as questões de matemática 'mais difíceis' dizem sobre a educação no Brasil.*. UOL Educação, São Paulo, SP, 30 jul. 2018. Disponível em <https://educacao.uol.com.br/noticias/bbc/2018/07/30/enem-o-que-as-questoes-de-matematica-mais-dificeis-dizem-sobre-a-educacao-no-brasil.htm?cmpid> Acesso em: 10 ago. 2018.

[9] Onuchic, L. De La R., *Ensinoáprendizagem de matemática através da resolução de problemas.* In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo - SP, Ed. UNESP (1999), 199-218

[10] Polya, G., *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático;* tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro-RJ. Ed. Interciência, (1995).

[11] Proença, M. C. O., *A resolução de problemas no contexto do estágio curricular supervisionado: dificuldades e limites de licenciandos em matemática.* Revista Revemat. Florianópolis-SC, Vol. 9 (2014), 119-138.

[12] Rodrigues, A. Magalhães, S. C., *A Resolução de problemas nas aulas de Matemática: Diagnosticando a prática pedagógica.* Minas, MG (2012).

[13] Souza, A. C. P. de. Nunes, C. B., *A Resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática em sala de aula.* In: ENCONTRO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Anais, Belo Horizonte, MG (2007).

[14] Valerio, W., *Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula.* Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP (2017).

Apêndice A

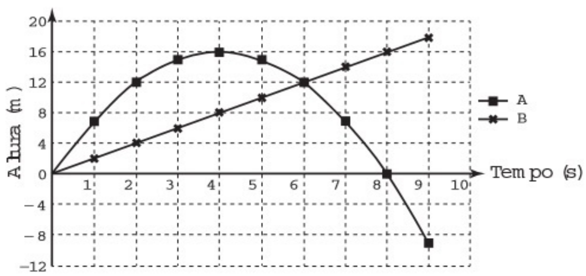
Exame 1

EXAME 1 – CURSO PREPARATÓRIO ENEM

Aluno:

Questão 01:

Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



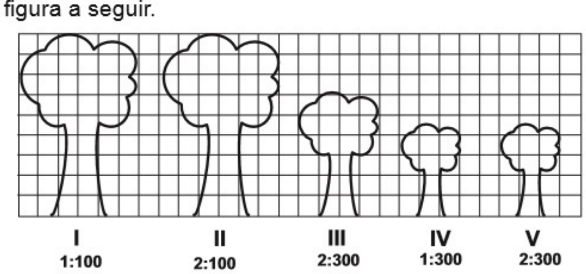
Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

A) diminuir em 2 unidades.
B) diminuir em 4 unidades.
C) aumentar em 2 unidades.
D) aumentar em 4 unidades.
E) aumentar em 8 unidades.

Questão 02:

Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.

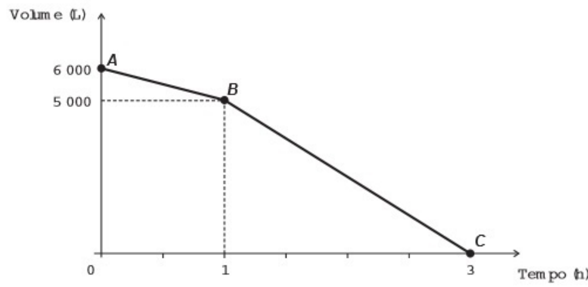


Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

Questão 03:

Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



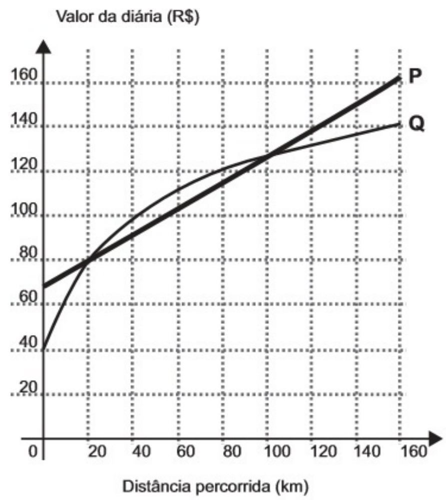
Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

A) 1 000
B) 1 250
C) 1 500
D) 2 000
E) 2 500

Questão 04:

Atualmente existem diversas locadoras de veículos, permitindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis.

Nas locadoras P e Q, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.



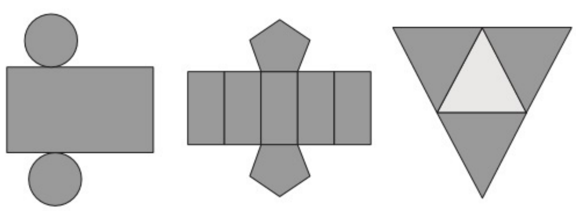
Disponível em: www.sempretops.com. Acesso em: 7 ago. 2012.

O valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

A) De 20 a 100.
B) De 80 a 130.
C) De 100 a 160.
D) De 0 a 20 e de 100 a 160.
E) De 40 a 80 e de 130 a 160.

Questão 05:

Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

A) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
B) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
C) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
D) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
E) Cilindro, prisma e tronco de cone.

Questão 06:

O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte.

Taxa de doação de sangue, por região, em 2010			
Região	**Doadores**	**Número de habitantes**	**Doadores/ habitantes**
Nordeste	820 959	53 081 950	1,5%
Norte	232 079	15 864 454	1,5%
Sudeste	1 521 766	80 364 410	1,9%
Centro-Oeste	362 334	14 058 094	2,6%
Sul	690 391	27 386 891	2,5%
Total	3 627 529	190 755 799	1,9%

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2013 (adaptado).

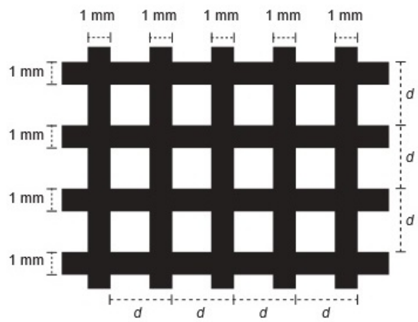
As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são

A) Norte, Centro-Oeste e Sul.
B) Norte, Nordeste e Sudeste.
C) Nordeste, Norte e Sul.
D) Nordeste, Sudeste e Sul.
E) Centro-Oeste, Sul e Sudeste.

Questão 07:

Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de (d – 1) milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento.

A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é

Ⓐ 2

Ⓑ 1

Ⓒ $\frac{11}{3}$

Ⓓ $\frac{4}{3}$

Ⓔ $\frac{2}{3}$

Questão 08:

Em um teleférico turístico, bondinhos saem de estações ao nível do mar e do topo de uma montanha. A travessia dura 1,5 minuto e ambos os bondinhos se deslocam à mesma velocidade. Quarenta segundos após o bondinho *A* partir da estação ao nível do mar, ele cruza com o bondinho *B*, que havia saído do topo da montanha.

Quantos segundos após a partida do bondinho *B* partiu o bondinho *A*?

Ⓐ 5
Ⓑ 10
Ⓒ 15
Ⓓ 20
Ⓔ 25

Questão 09:

Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.

Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

Ⓐ 105 peças.
Ⓑ 120 peças.
Ⓒ 210 peças.
Ⓓ 243 peças.
Ⓔ 420 peças.

Questão 10:

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

Ⓐ $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

Ⓑ $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

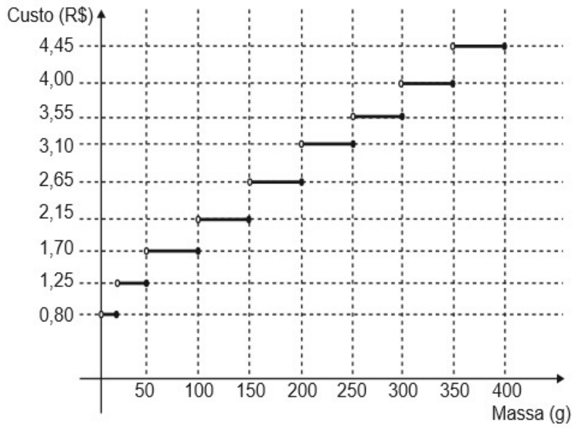
Ⓒ $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

Ⓓ $y = \frac{4}{5}x + 2$

Ⓔ $y = x$

Questão 11:

Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



Disponível em: www.correios.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de

Ⓐ 8,35.
Ⓑ 12,50.
Ⓒ 14,40.
Ⓓ 15,35.
Ⓔ 18,05.

Questão 12:

Segundo dados apurados no Censo 2010, para uma população de 101,8 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais de idade e que teve algum tipo de rendimento em 2010, a renda média mensal apurada foi de R$ 1 202,00. A soma dos rendimentos mensais dos 10% mais pobres correspondeu a apenas 1,1% do total de rendimentos dessa população considerada, enquanto que a soma dos rendimentos mensais dos 10% mais ricos correspondeu a 44,5% desse total.

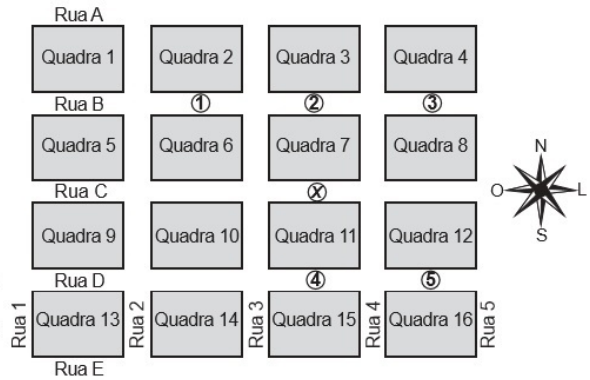
Disponível em: www.estadao.com.br. Acesso em: 16 nov. 2011(adaptado).

Qual foi a diferença, em reais, entre a renda média mensal de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais ricos e de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais pobres?

Ⓐ 240,40
Ⓑ 548,11
Ⓒ 1 723,67
Ⓓ 4 026,70
Ⓔ 5 216,68

Questão 13:

Um menino acaba de se mudar para um novo bairro e deseja ir à padaria. Pediu ajuda a um amigo que lhe forneceu um mapa com pontos numerados, que representam cinco locais de interesse, entre os quais está a padaria. Além disso, o amigo passou as seguintes instruções: a partir do ponto em que você se encontra, representado pela letra *X*, ande para oeste, vire à direita na primeira rua que encontrar, siga em frente e vire à esquerda na próxima rua. A padaria estará logo a seguir.



A padaria está representada pelo ponto numerado com

Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 3.
Ⓓ 4.
Ⓔ 5.

Questão 14:

Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

Ⓐ 0,5
Ⓑ 1,0
Ⓒ 2,0
Ⓓ 3,5
Ⓔ 8,0

Questão 15:

O LIRAa, Levantamento Rápido do Índice de Infestação por *Aedes aegypti*, consiste num mapeamento da infestação do mosquito *Aedes aegypti*. O LIRAa é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma região em avaliação.

O serviço de vigilância sanitária de um município, no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAa de cinco bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

I. 14 imóveis com focos de mosquito em 400 imóveis no bairro;
II. 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;
III. 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro;
IV. 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro;
V. 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro.

O setor de dedetização do município definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRAa.

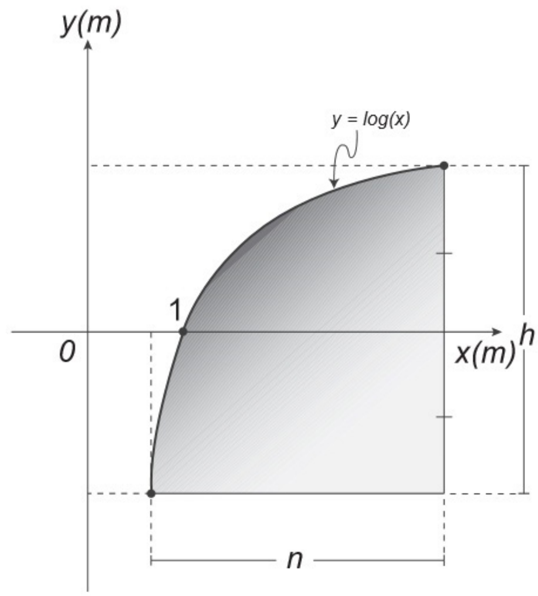
Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br. Acesso em: 28 out. 2015.

As ações de controle iniciarão pelo bairro

A I.
B II.
C III.
D IV.
E V.

Questão 16:

Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação y = log (x), conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo *x* sempre divida ao meio a altura *h* do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo *x*. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura *h* do vidro em função da medida *n* de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

A $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)-\log\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

B $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right)-\log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

C $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right)+\log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

D $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

E $2\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

Questão 17:

Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso.

Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1\,000}$ eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1\,000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

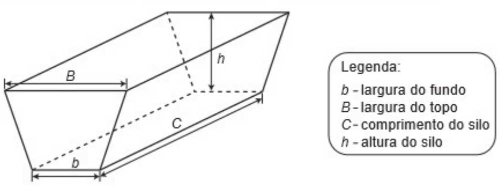
$0 \leq P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P \leq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

- **A** excelente.
- **B** bom.
- **C** regular.
- **D** ruim.
- **E** péssimo.

Questão 18:

Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo.

EMBRAPA. **Gado de corte**. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

- **A** 110.
- **B** 125.
- **C** 130.
- **D** 220.
- **E** 260.

Questão 19:

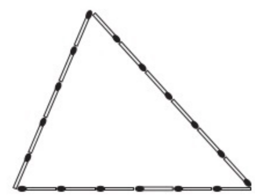
Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

- **A** $\frac{1}{100}$
- **B** $\frac{19}{100}$
- **C** $\frac{20}{100}$
- **D** $\frac{21}{100}$
- **E** $\frac{80}{100}$

Questão 20:

Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

- **A** 3.
- **B** 5.
- **C** 6.
- **D** 8.
- **E** 10.

Questão 21:

A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

- **A** 26
- **B** 29
- **C** 30
- **D** 31
- **E** 35

Apêndice B

Exame 2

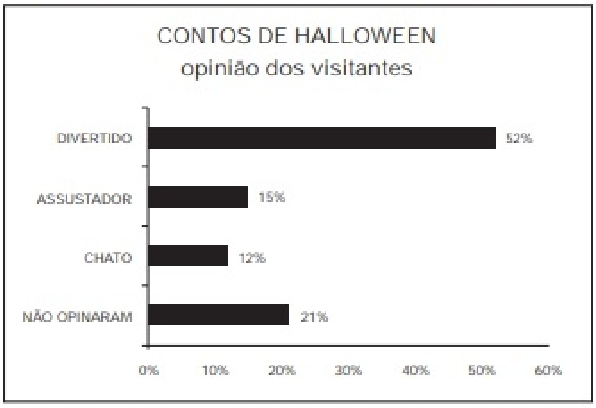
EXAME 2 – CURSO PREPARATÓRIO ENEM

Aluno:

Questão 01:

Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de Halloween". Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em: "Divertido", "Assustador" ou "Chato". Ao final de uma semana, o *blog* registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do *blog* irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween".

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por

A) 0,09.
B) 0,12.
C) 0,14.
D) 0,15.
E) 0,18.

Questão 02:

Nos Estados Unidos a unidade de medida de volume mais utilizada em latas de refrigerante é a onça fluida (fl oz), que equivale a aproximadamente 2,95 centilitros (cL).

Sabe-se que o centilitro é a centésima parte do litro e que a lata de refrigerante usualmente comercializada no Brasil tem capacidade de 355 mL.

Assim, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluida (fl oz), é mais próxima de

A) 0,83.
B) 1,20.
C) 12,03.
D) 104,73.
E) 120,34.

Questão 03:

Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

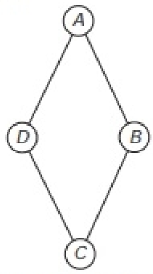
A) hipoglicemia.
B) normal.
C) pré-diabetes.
D) diabetes melito.
E) hiperglicemia.

Questão 04:

Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices *A, B, C* e *D* correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

- A 6
- B 12
- C 18
- D 24
- E 36

Questão 05:

Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota d'agua tem volume de 0,2 mL.

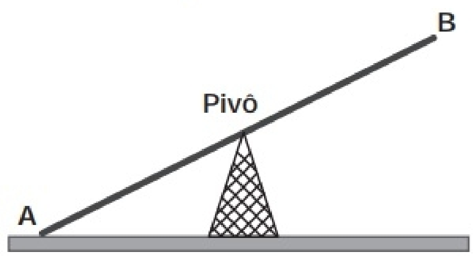
Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

- A 0,2
- B 1,2
- C 1,4
- D 12,9
- E 64,8

Questão 06:

Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos *A* e *B* são equidistantes do pivô:



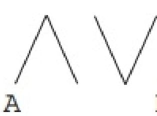
A projeção ortogonal da trajetória dos pontos *A* e *B*, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

A 

B 

C 

D 

E 

Questão 07:

Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

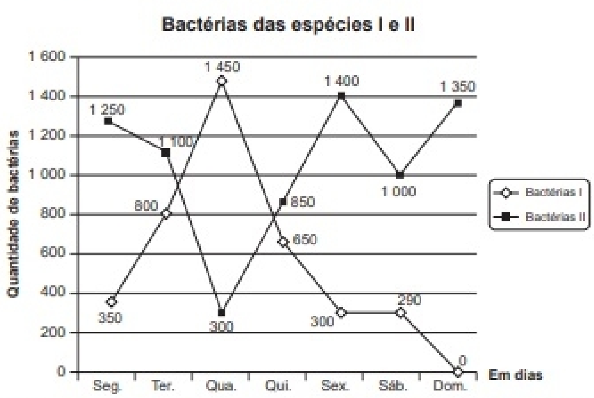
	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.
E 5.

Questão 08:

Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1 250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.



Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

A Terça-feira.
B Quarta-feira.
C Quinta-feira.
D Sexta-feira.
E Domingo.

Questão 09:

Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
2) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
3) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
4) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	**Doença A**	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. **Epidemiologia**: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de

A 47,5%.
B 85,0%.
C 86,3%.
D 94,4%.
E 95,0%.

Questão 10:

Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.

A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era

A R$ 166,00.
B R$ 156,00.
C R$ 84,00.
D R$ 46,00.
E R$ 24,00.

Questão 11:

Um executivo sempre viaja entre as cidades A e B, que estão localizadas em fusos horários distintos. O tempo de duração da viagem de avião entre as duas cidades é de 6 horas. Ele sempre pega um voo que sai de A às 15h e chega à cidade B às 18h (respectivos horários locais).

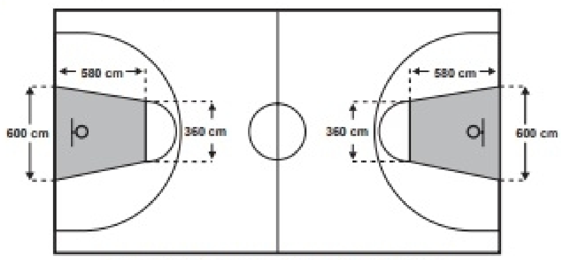
Certo dia, ao chegar à cidade B, soube que precisava estar de volta à cidade A, no máximo, até as 13h do dia seguinte (horário local de A).

Para que o executivo chegue à cidade A no horário correto e admitindo que não haja atrasos, ele deve pegar um voo saindo da cidade B, em horário local de B, no máximo à(s)

- **A** 16h.
- **B** 10h.
- **C** 7h.
- **D** 4h.
- **E** 1h.

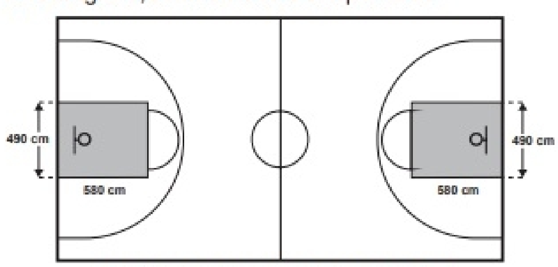
Questão 12:

O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

- **A** aumento de 5 800 cm².
- **B** aumento de 75 400 cm².
- **C** aumento de 214 600 cm².
- **D** diminuição de 63 800 cm².
- **E** diminuição de 272 600 cm².

Questão 13:

Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm.

Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de

- **A** 2,099.
- **B** 2,96.
- **C** 3,021.
- **D** 3,07.
- **E** 3,10.

Questão 14:

Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm³ e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm³, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

- **A** 450.
- **B** 500.
- **C** 600.
- **D** 750.
- **E** 1 000.

Questão 15:

Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.

Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

- **A** 22.
- **B** 50.
- **C** 100.
- **D** 200.
- **E** 400.

Questão 16:

Para a construção de isolamento acústico numa parede cuja área mede 9 m², sabe-se que, se a fonte sonora estiver a 3 m do plano da parede, o custo é de R$ 500,00. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento.

Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área A (em metro quadrado), situada a D metros da fonte sonora, é

A) $\dfrac{500 \cdot 81}{A \cdot D^2}$

B) $\dfrac{500 \cdot A}{D^2}$

C) $\dfrac{500 \cdot D^2}{A}$

D) $\dfrac{500 \cdot A \cdot D^2}{81}$

E) $\dfrac{500 \cdot 3 \cdot D^2}{A}$

Questão 17:

Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\dfrac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

A) 18

B) 20

C) 36

D) 45

E) 54

Questão 18:

A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

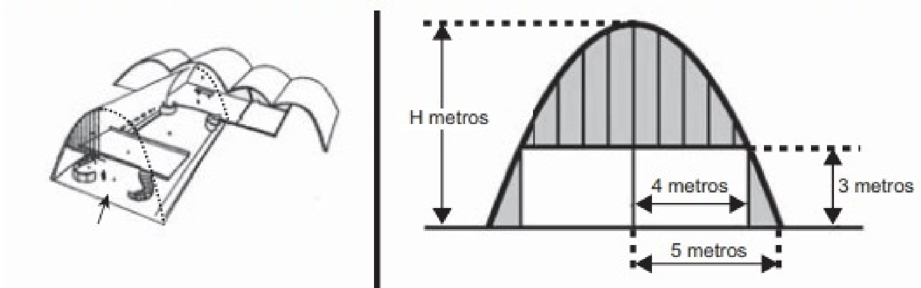


Figura 1 Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

A) $\dfrac{16}{3}$

B) $\dfrac{31}{5}$

C) $\dfrac{25}{4}$

D) $\dfrac{25}{3}$

E) $\dfrac{75}{2}$

Questão 19:

Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3.

O volume do monumento original, em metro cúbico, é de

A 100.

B 400.

C 1 600.

D 6 250.

E 10 000.

Questão 20:

A energia solar vai abastecer parte da demanda de energia do *campus* de uma universidade brasileira. A instalação de painéis solares na área dos estacionamentos e na cobertura do hospital pediátrico será aproveitada nas instalações universitárias e também ligada na rede da companhia elétrica distribuidora de energia.

O projeto inclui 100 m² de painéis solares que ficarão instalados nos estacionamentos, produzindo energia elétrica e proporcionando sombra para os carros. Sobre o hospital pediátrico serão colocados aproximadamente 300 m² de painéis, sendo 100 m² para gerar energia elétrica utilizada no *campus*, e 200 m² para geração de energia térmica, produzindo aquecimento de água utilizada nas caldeiras do hospital.

Suponha que cada metro quadrado de painel solar para energia elétrica gere uma economia de 1 kWh por dia e cada metro quadrado produzindo energia térmica permita economizar 0,7 kWh por dia para a universidade. Em uma segunda fase do projeto, será aumentada em 75% a área coberta pelos painéis solares que geram energia elétrica. Nessa fase também deverá ser ampliada a área de cobertura com painéis para geração de energia térmica.

Disponível em: http://agenciabrasil.ebc.com.br. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

Para se obter o dobro da quantidade de energia economizada diariamente, em relação à primeira fase, a área total dos painéis que geram energia térmica, em metro quadrado, deverá ter o valor mais próximo de

A 231.

B 431.

C 472.

D 523.

E 672.

Questão 21:

Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses.

Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

A I.

B II.

C IV.

D V.

E VII.

Apêndice C

Roteiro

O texto que se segue foi elaborado a partir de um resumo de Peter Alfeld (Department of Mathematics, University of Utah) sobre o livro: G. Polya, “How to Solve It”, 2nd ed., Princeton University Press, 1957.

ROTEIRO PARA RESOLVER PROBLEMAS[1]

1) ENTENDA O PROBLEMA

Primeiro, você tem de entender o problema:

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições?

É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes para determinar a incógnita? Ou são insuficientes? Ou redundantes? Ou contraditórias?

Faça uma figura. Outra se necessário. Introduza notação adequada.

Separe as condições em partes.

2) CONSTRUA UMA ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO

Ache conexões entre os dados e a incógnita.

Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares, se uma conexão não for achada em tempo razoável. Use isso para “bolar”um plano ou estratégia de resolução do problema.

Vale a pena expandirmos um pouco esses conselhos:

Você já encontrou este problema ou algum parecido?

Você conhece um problema semelhante?

[1]fonte: http://www.mat.ufrgs.br/portosil/resu2.html

Você conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar?

Olhe para a incógnita! E tente achar um problema familiar e que tenha uma incógnita semelhante.

Tem um problema relacionado com o seu e que você já sabe resolver? Você consegue aproveitá-lo? Você pode usar seu resultado? Ou seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar de modo a viabilizar esses objetivos? Você consegue enunciar o problema de uma outra maneira?

Se você não consegue resolver o problema dado, tente resolver um problema parecido. Você consegue imaginar um caso particular mais acessível? Um caso mais geral e mais acessível? Você consegue resolver alguma parte do problema? Mantenha apenas parte das condições do problema e observe o que ocorre com a incógnita, como ela varia agora? Você consegue obter alguma coisa desde os dados? Você consegue imaginar outros dados capazes de produzir a incógnita? Você consegue alterar a incógnita ou os dados, ou ambos, de modo que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos?

Você está levando em conta todos os dados? E todas as condições?

3) EXECUTE A ESTRATÉGIA

Frequentemente, esta é a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tendem a pular para essa etapa prematuramente, e acabam dando-se mal. Outros elaboram estratégias inadequadas e acabam se enredando terrivelmente na execução. Execute a estratégia.

Ao executar a estratégia, verifique cada passo. Você consegue mostrar claramente que cada um deles está correto?

4) REVISE

Examine a solução obtida.

Verifique o resultado e o argumento.

Você pode obter a solução de um outro modo?

Qual a essência do problema e do método de resolução empregado?

Em particular, Você consegue usar o resultado, ou o método, em algum outro problema?