



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Tópicos de Geometria Analítica: Parábola

Hugo César Peixoto

Goiânia

2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Hugo César Peixoto		
E-mail:	hpeixoto2006@yahoo.com.br		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Secretaria Municipal de Educação - Goiânia - GO		
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO
		CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Tópicos de Geometria Analítica: Parábola		
Palavras-chave:	Geometria Analítica; Cônicas; Parábola; Hipérbole; Coordenadas polares.		
Título em outra língua:	Topics of Analytical Geometry: Parable		
Palavras-chave em outra língua:	Analytical Geometry; Conics; Parable; Hyperbole; Polar coordinates.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico.		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	15/03/2013		
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT		
Orientador (a):	Prof. Dr. Durval José Tonon		
E-mail:	djtonon@gmail.com		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

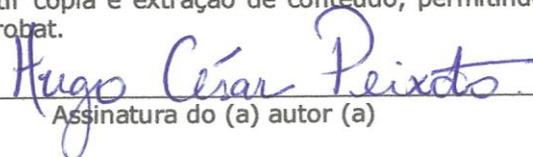
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


Assinatura do (a) autor (a)

Data: 26 / 03 / 2013

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Hugo César Peixoto

Tópicos de Geometria Analítica: Parábola

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.

Goiânia

2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

Peixoto, Hugo César.
P379t Tópicos de Geometria Analítica [manuscrito] : Parábola
/ Hugo César Peixoto. - 2013.
63 f. : figs.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2013.

Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Geometria analítica. 2. Cônicas. 3. Parábola. I. Título.

CDU: 514.12

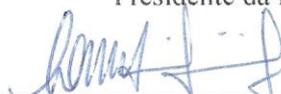
Hugo César Peixoto

Tópicos de Geometria Analítica: Parábola

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 15 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues
Membro/UnB



Profa. Dra. Anyelle Nogueira de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Membro/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Hugo César Peixoto graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás em 2001. Kursou, nesta mesma instituição, o curso de Especialização em Matemática no período de Agosto de 2002 a Julho de 2003. Atualmente é professor da Secretaria Municipal de Educação em Goiânia e do Centro Educacional Sesc Cidadania.

Dedico este Trabalho às mulheres que mais amo: minha esposa Myrian Karla e minha mãe Divina pelo apoio incondicional e pelo exemplo de determinação e superação através da honestidade, do estudo e do trabalho. Valores estes imprescindíveis ao ser humano.

Agradecimentos

- À Deus pelos dons e oportunidades;
- Aos familiares e amigos pelo apoio e compreensão da minha limitação de tempo a vocês durante o curso. Obrigado Myrian Karla (minha querida esposa e companheira nesta jornada), meus pais, irmãos, avós, tios e primos das famílias Peixoto, Ayres, Veronez e Brito;
- Aos professores do PROFMAT, em especial ao Prof. Dr. Durval José Tonon pela ótima orientação neste Trabalho e ao Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota (Coordenador do PROFMAT - UFG) pela dedicação e confiança;
- A todos os colegas do PROFMAT pela socialização espontânea de seus conhecimentos e disposição em auxiliar o outro no decorrer de todo o curso. Destes, destaco aqueles que mais contribuíram e que se tornaram grandes amigos: Cesar Pereira, Júnio César, Dilermano, Diego Maradona, Leonardo Alcântara, Káriton, Frederico, Mateus, Paulo César, Túlio, Amanda, Viviane, Rogério, Simão, Eduardo Vasconcelos, Fábio, Alan, Marcos Antônio e Carlos Eduardo;
- Aos idealizadores e criadores do PROFMAT;
- À CAPES pelo incentivo financeiro.

Resumo

Tópicos de Geometria Analítica: Parábola inicia-se com o contexto histórico sobre o qual se originou o estudo das cônicas e propõe uma abordagem diferenciada para o estudo de cônicas no Ensino Médio devido a grande quantidade de aplicações importantes das propriedades das cônicas no cotidiano. No Ensino Fundamental e no 1º ano do Ensino Médio é ensinado que o gráfico da função quadrática é uma parábola e, em geral, não é apresentada a definição de parábola e nem seus elementos geradores: o foco e a diretriz. Neste trabalho a parábola é definida como um lugar geométrico do plano e são colocados em destaque os seus principais elementos de modo a evitar que leigos pensem que um dos ramos da hipérbole, o gráfico de uma função polinomial de 4º grau ou outras curvas semelhantes sejam também parábolas. Ao determinarmos a equação da parábola verifica-se que, para domínio e contra-domínio específicos, esta é uma função quadrática e provamos também a recíproca disto, ou seja, que o gráfico da função quadrática é uma parábola, eliminando assim quaisquer dúvidas quanto a associação entre parábola e função quadrática. A propriedade refletora da parábola e suas aplicações mostram o quanto é importante a interpretação geométrica da parábola. E, finalizando este trabalho, apresentamos a definição geral de cônicas a partir de sua excentricidade e suas equações em coordenadas polares.

Palavras-chave: Geometria Analítica; Cônicas; Parábola; Hipérbole; Coordenadas polares.

Abstract

Topics of Analytical Geometry: Parable begins with the historical context over which the study of conic had its origin and proposes a differentiated approach to the study of conics in high school because of the large amount of important applications of the properties of conics in everyday life. In elementary school and first year of High School it is taught that quadratic function graphic is a parable, and neither its definition nor its generating elements appear: the focus and the directrix. In this paper is a parable is defined as a locus of plane and its main elements are highlights in order to prevent laymen to think that one of the branches of the hyperbole, the graphic joint of a polynomial function of Fourth degree or other similar curves are also paraboles. As we determine the equation of the parable, it is seen that, for specific domain and counter-domain this is a quadratic function and it is also proved the converse of this, namely, that the graphic of the quadratic function is a parable, thus eliminating any doubt as to association between parable and quadratic function. The reflective property of the parable and its applications show how important it is to stop the geometric interpretation ball. And to conclude this paper, we present the definition of general conic from its eccentricity and its equations in polar coordinates.

Keywords: Analytical Geometry; Conics; Parable; Hyperbole; Polar coordinates.

Lista de Figuras

1	Interpretação geométrica da solução de um sistema.	14
2	Terceira proporcional	16
3	Parábola de Menaecmus	17
4	Secções cônicas.	20
5	Hipérbole com dois ramos.	20
6	Correspondência biunívoca entre o plano e \mathbb{R}^2	22
7	Distância entre dois pontos.	23
8	Triângulo $\triangle ABC$ retângulo em A	23
9	Reta definida por dois pontos.	24
10	Círculo de centro C e raio r	25
11	Mediatriz do segmento \overline{AB}	26
12	Solução do Exemplo 2.3.	27
13	Definição de parábola.	28
14	Principais elementos da parábola.	29
15	Método de Kepler para construção da parábola.	30
16	Construção da parábola com régua e compasso.	31
17	Equação da parábola.	31
18	Parábola com concavidade voltada para baixo.	32
19	Parábola com concavidade voltada para a direita.	33
20	Parábola com concavidade voltada para a esquerda.	33
21	Mudança de coordenadas: Translação.	33
22	Equação da parábola com vértice fora da origem.	34
23	Parábola com concavidade voltada para a direita e vértice fora da origem.	35
24	Parábola com concavidade voltada para a esquerda e vértice fora da origem.	35
25	Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ para $a > 0$	36
26	Propriedade refletora da parábola.	38
27	Uso da parábola em automóveis, lanternas de mão e holofotes.	39
28	Farol de automóvel. Imagem obtida em [8].	39
29	Uso da parábola na rádio-astronomia e em aparelhos de televisão.	40

30	Antena parabólica. Imagem obtida em [8].	40
31	Vista frontal do Ed. Berliner Bogen.	40
32	Edifício Berliner Bogen, Hamburgo, Alemanha.	40
33	Uso de parábola na construção civil.	41
34	Visão noturna da Ponte J. K. sobre o Lago Paranoá em Brasília - DF.	41
35	Futebol.	42
36	Basquete.	42
37	Aplicações de parábola na Física - M.U.V.	42
38	Rotação dos eixos coordenados.	44
39	Parábola representada pela equação $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$	49
40	Hipérbole representada pela equação $x^2 - 4xy + y^2 + 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0$	50
41	Elipse representada pela equação $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4 = 0$	52
42	Demonstração do Teorema 5.1.	54
43	Ponto P em coordenadas polares.	55
44	Círculo em coordenadas polares.	56
45	Reta passando pelo pólo.	56
46	Sistema polar associado ao sistema cartesiano.	57
47	Elipse.	58
48	Hipérbole.	59
49	Parábola.	60

Sumário

Resumo	7
Abstract	8
Lista de Figuras	10
Introdução	13
1 Notas históricas	15
1.1 A origem das cônicas	15
1.2 As cônicas de Apolônio de Perga	19
2 Noções básicas para o estudo das cônicas	22
2.1 Coordenadas no plano	22
2.2 Ponto em \mathbb{R}^2 e distância entre dois pontos	22
2.3 Lugares geométricos em \mathbb{R}^2	24
3 Parábola	28
3.1 Definição de parábola	28
3.2 Principais elementos da parábola	28
3.3 Construção de uma parábola utilizando material concreto	29
3.3.1 Método de Kepler	29
3.3.2 Construção de uma parábola utilizando régua e compasso	30
3.4 Equação da parábola	31
3.5 Translação	33
3.6 Propriedade refletora da parábola	37
3.6.1 Aplicações das propriedades da parábola	38
4 Classificação das cônicas	43
4.1 Rotação dos eixos coordenados	43
4.2 Autovalor e autovetor	44
4.3 Resultados importantes	45

4.4	Redução à forma canônica	47
5	Cônicas e coordenadas polares	53
5.1	Definição geral de uma cônica	53
5.2	Coordenadas polares	54
5.3	Equação polar das cônicas	57
5.3.1	Elipse	57
5.3.2	Hipérbole	58
5.3.3	Parábola	60
	Conclusão	62
	Referências	63

Introdução

Ao estudarmos a disciplina MA23 (Geometria Analítica) nos deparamos com várias situações (problemas matemáticos) que sem o uso de ferramentas da Geometria Analítica apresentariam certa dificuldade para serem solucionadas e que resolvidas analiticamente se tornam muito fáceis. Um exemplo que ilustra bem isto é a demonstração de que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo tem comprimento igual à metade do comprimento da hipotenusa. Veja essa demonstração na Seção 2 deste trabalho.

Diante destas situações e, levando em conta que a Geometria Analítica é um conteúdo também desenvolvido no Ensino Médio, decidimos então escrever este Trabalho de Conclusão de Curso abordando alguns tópicos muito relevantes apresentados em MA23 que gostaríamos de repassar aos estudantes da educação básica de forma concreta e aplicada.

Acreditamos que a Geometria Analítica pode ser introduzida no Ensino Fundamental de modo que nesta etapa o aluno já consiga associar a solução de um sistema de equações do tipo

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$$

que é o par ordenado $(3, -1)$ ao ponto $P(3, -1)$ de interseção das retas r e s de equações $r : x + y - 2 = 0$ e $s : 2x - 3y - 9 = 0$ no sistema de coordenadas cartesianas (\mathbb{R}^2) conforme ilustra a Figura 1.

A falta dessa associação entre Álgebra e Geometria nesta etapa e até mesmo nos primeiros anos do Ensino Médio faz com que muitos alunos concluam (de forma equivocada) que o sistema citado anteriormente admite duas soluções: $x = 3$ e $y = -1$, enquanto que ao visualizar geometricamente a solução, fica claro que trata-se apenas de uma solução.

Imagine o quanto seria mais simples para uma pessoa que reside no Condomínio Jardim, bloco Hortências, apartamento 1104 se ela escrevesse seu endereço assim: Condomínio Jardim, $(H, 11, 4)$ e todos entendessem que a primeira coordenada do terno ordenado identifica o bloco Hortências, a segunda o 11º andar e a terceira o aparta-

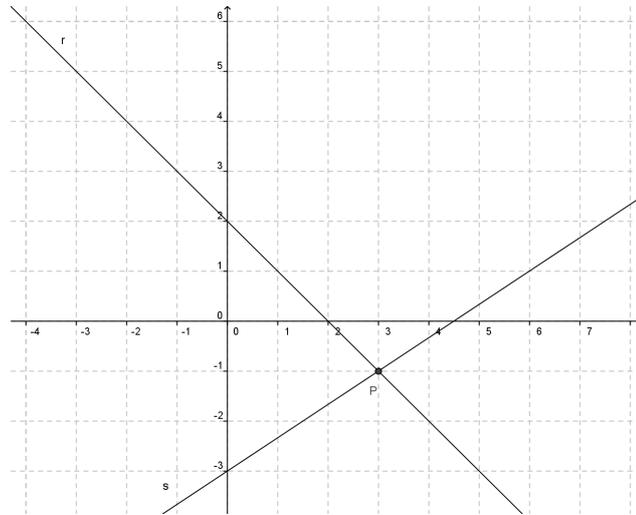


Figura 1: Interpretação geométrica da solução de um sistema.

mento 4 deste andar. Veja que isto faria mais sentido, uma vez que 1104 não significa que há 1104 apartamentos naquele bloco. O zero utilizado em 1104 tem a função de separar o andar e o número do apartamento, ou seja, há aí um par ordenado, pois nesta situação 1104 não é um número, mas um símbolo que poderia facilmente ser substituído por $(11, 4)$.

Este trabalho trata apenas do estudo analítico da Geometria Plana com ênfase em parábola, sua propriedade refletora e aplicações. Ao definirmos esta cônica, iremos abordá-la apenas nos casos em que esta ocupa posição específica em relação aos eixos coordenados conforme é tratado no Ensino Médio, no entanto, nos capítulos finais apresentaremos a definição geral de cônicas, suas equações em coordenadas polares e critérios para classificá-las a partir da equação geral do 2º grau em \mathbb{R}^2

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

1 Notas históricas

1.1 A origem das cônicas

A civilização grega trouxe várias contribuições para o avanço da Matemática. Uma destas, foi o desenvolvimento do pensamento abstrato, ao contrário de civilizações anteriores como os egípcios e babilônicos que praticaram uma matemática utilitária. Platão, por exemplo, distinguia claramente uma matemática a ser utilizada pelos comerciantes e outra pelos intelectuais, aqueles que iriam governar, conforme é apresentado em [10]. Esta abordagem filosófica da matemática levou o mundo grego a atacar problemas de matemática pura, sem uma aplicação imediata. Dentre estes podemos destacar os clássicos problemas da quadratura do círculo, o problema de Delos ou duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. O primeiro provavelmente proposto por Anaxágoras, que de acordo com [3], viveu durante o quinto século antes de Cristo. Ele foi preso por afirmar que o Sol não era uma divindade mas uma grande pedra encandeceste, e no período em que esteve preso se dedicou a resolver o problema da quadratura do círculo. O qual fascinou os matemáticos por mais de 2000 anos. As tentativas de resolver este problema foi de fundamental importância, pois estimularam a pesquisa matemática de épocas posteriores e por não estarem ligados a nenhum problema prático, tornaram-se assim uma das sementes da matemática pura.

Neste momento é importante lembrar que resolver um problema para os gregos significava resolvê-lo através de construções com régua e compasso. Portanto encontrar a medida do lado de um quadrado que tivesse a mesma área de um círculo dado (quadratura do círculo) significava encontrar este através de construção com régua e compasso. Para melhor entendimento tomemos um retângulo de lados 12 cm e 3 cm, qual o lado do quadrado que possui a mesma área deste retângulo (quadratura do retângulo)?

Uma possível solução para este problema no período grego consistia em encontrar um segmento de medida x tal que

$$\frac{12}{x} = \frac{x}{3}.$$

O que facilmente poderia ser feito através da seguinte construção:

- a) Trace uma reta r ;
- b) Sobre r marque o segmento \overline{AB} de medida 12 cm e o segmento \overline{BC} de medida 3 cm;
- c) Trace a mediatriz do segmento \overline{AC} , determinando o ponto médio M deste segmento;
- d) M é o centro da circunferência cujo diâmetro é \overline{AC} ;
- e) Trace a circunferência de diâmetro \overline{AC} ;
- f) Trace a perpendicular a r passando por B , intersectando a circunferência em D ;
- g) Pelas relações métricas no triângulo retângulo, segue que $BD = x$. Veja Figura 2.

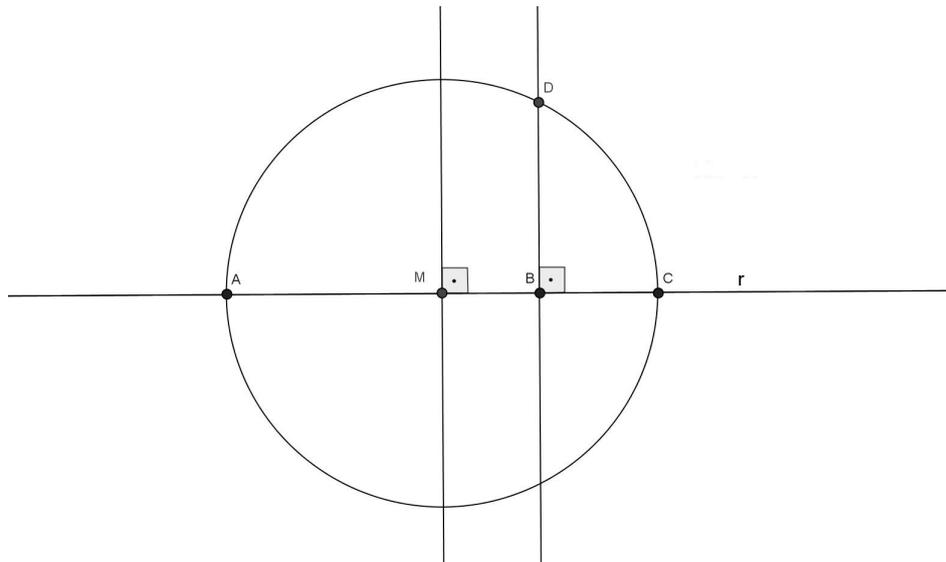


Figura 2: Terceira proporcional

Este tipo de solução inspirou os matemáticos da época a tentarem generalizar este procedimento, ou seja, dados os segmentos de medidas a e b encontrar dois segmentos de medidas x e y tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \quad (1)$$

Em [3] encontramos referências a Hipócrates de Chios, que viveu em Atenas por volta de 430 a.C., ele percebeu que este último problema continha a solução do problema da duplicação do cubo, pois se tomarmos $b = 2a$ na equação (1) e eliminarmos y teremos $x^3 = 2a^3$. Veja que no processo de eliminação de y temos as seguintes equações: $x^2 = ay$, $y^2 = xb$ e $xy = 2a^2$ que, em notação moderna, as duas primeiras representam parábolas e a terceira uma hipérbole.

Neste contexto os matemáticos gregos começaram a procurar curvas que satisfizessem (1). É importante ressaltar que para os gregos encontrar uma curva significava exprimi-la através de propriedades cinemáticas, como a trissetriz de Hípias citada em [3] ou como secção de um sólido. Na busca por tais curvas, o discípulo de Eudoxo, Menaecmus (380 a 320 a.C.), sabendo que uma curva que satisfizesse (1) resolveria o problema da duplicação do cubo e usando a perspectiva de determinação de curvas adotado pelos gregos, observou que havia uma família de curvas adequadas às soluções do problema seccionando um cone circular reto por um plano perpendicular à sua geratriz. E nos casos em que o ângulo do vértice do cone fosse agudo, obtuso ou reto geraria curvas diferentes, respectivamente, elipse, hipérbole e parábola. No caso do ângulo do vértice ser reto a curva obtida, em notação atual, seria da forma $y^2 = lx$, onde l é dito o *latus rectum* da curva e depende da distância em que o plano se encontra do vértice do cone. Vejamos isto:

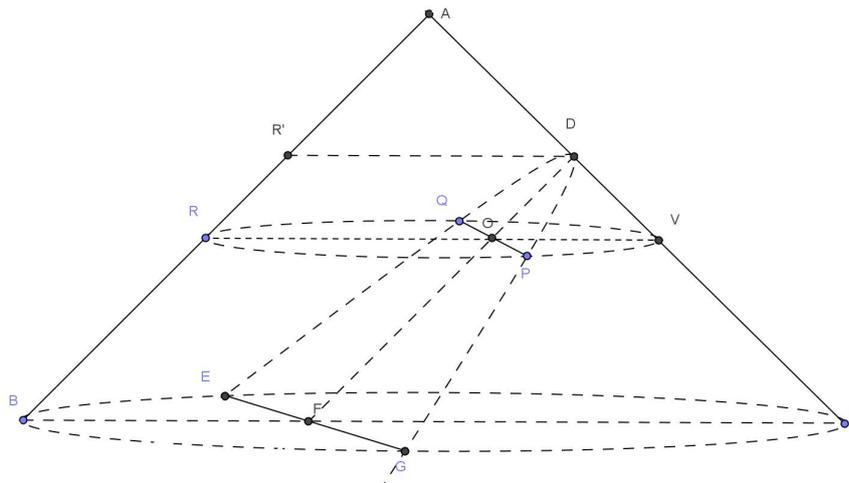


Figura 3: Parábola de Menaecmus

Seja ABC um cone cujo ângulo do vértice mede 90° , conforme a Figura 3. Neste caso a secção determinada pelo plano perpendicular à geratriz do cone é a curva EDG . Seja P um ponto pertencente a esta curva. Seccionando o cone por um plano paralelo à base que contém P , iremos determinar um círculo PVR , onde R e V são as intersecções das geratrizes do cone e o círculo. Sendo Q o outro ponto da curva que intersecta o círculo temos que

a') $\overline{PQ} \perp \overline{RV}$, pois \overline{RV} é um diâmetro que secciona \overline{PQ} em seu ponto médio O ;

b') $(OP)^2 = OR.OV$;

c') Os triângulos $\triangle ODV$ e $\triangle BCA$ são semelhantes, pois $\overline{OD} \perp \overline{AC}$ e \overline{OV} é paralelo a \overline{BC} . Daí,

$$\frac{OV}{OD} = \frac{BC}{AB};$$

d') Passando uma paralela a \overline{BC} por D , a intersecção desta com a geratriz perpendicular a \overline{AC} , denominamos R' . Logo, os triângulos $\triangle R'DA$ e $\triangle ABC$ são semelhantes. Daí,

$$\frac{R'D}{AR'} = \frac{BC}{AB};$$

e') Tomando $OP = y$ e $OD = x$, observe que equivale a tomar o plano cartesiano com origem em D , e os eixos OX e OY contendo \overline{OD} e \overline{AC} respectivamente. Daí, dos itens b'), c') e d') temos $y^2 = OR.OV$. Como $R'DOR$ é um paralelogramo, $R'D = OR$. Logo,

$$y^2 = AR' \cdot \frac{BC}{AB} \cdot OD \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{AR' \cdot BC^2}{AB^2} x.$$

Como AR' , BC e AB são os mesmos para todo P , tomemos $l = \frac{AR' \cdot BC^2}{AB^2}$.

Sendo assim,

$$y^2 = lx$$

como queríamos mostrar. Para os casos em que o ângulo do vértice é agudo ou obtuso os cálculos são análogos.

Após estas conclusões, para Menaecmus determinar as curvas que são soluções de (1) basta determinar uma parábola de *latus rectum* a e outra de *latus rectum* $2a$.

E assim, através destes problemas e da busca por soluções dos mesmos, são introduzidas em matemática as curvas que mais tarde ficaram conhecidas por parábola, hipérbole e elipse. Após os trabalhos de Menaecmus vários matemáticos gregos produziram trabalhos explorando estas curvas e suas propriedades, entre eles, Euclides e Arquimedes. Todavia, a obra grega sobre cônicas que se destacou foi aquela produzida por Apolônio de Perga.

1.2 As cônicas de Apolônio de Perga

De acordo com [3], Apolônio nasceu em Perga na Panfília, possivelmente entre os anos de 262 a 192 a.C.. Este parece ter sido educado em Alexandria e passado algum tempo lecionando na universidade local. Juntamente com Euclides e Arquimedes, Apolônio está contado entre os três maiores matemáticos do período grego e isto se deve em grande parte por sua obra produzida sobre as cônicas. A obra de Apolônio sobre as secções cônicas foi escrita em oito livros, sendo que os quatro primeiros tratam de problemas elementares que possivelmente já haviam sido abordados por outros matemáticos anteriores a este. Os quatro últimos trazem uma abordagem diferente das demais obras existentes, bem como novos resultados. Conforme [3] e [9], os méritos da obra de Apolônio em relação às demais são os seguintes:

- Ele mostrou que a elipse, hipérbole e a parábola podem ser obtidas de um mesmo cone, bastando variar a inclinação do plano de secção, conforme a Figura 4 obtida em [8]. Para definir as três curvas Apolônio tomou uma secção meridiana VAB do cone, onde \overline{AB} é o diâmetro da base do cone e V é o vértice do mesmo. As cônicas foram então definidas como intersecções deste cone com determinados planos que cortam o segmento \overline{AB} ou seu prolongamento. Para isto, define-se:

- r a reta que contém a intersecção do plano que secciona o cone e o triângulo $\triangle VAB$.

Daí,

- * Se r for paralela ao lado \overline{AV} ou ao lado \overline{BV} do triângulo $\triangle VAB$ obtém-se uma parábola;
- * Se r intersectar os dois lados \overline{AV} e \overline{BV} do triângulo $\triangle VAB$ obtém-se uma elipse (note que o círculo é um caso particular de elipse);
- * Se r intersectar um dos lados, respectivamente, \overline{AV} (ou \overline{BV}) do triângulo $\triangle VAB$ e o prolongamento do outro lado no sentido, respectivamente, de B para V (ou de A para V), obtém-se uma hipérbole.

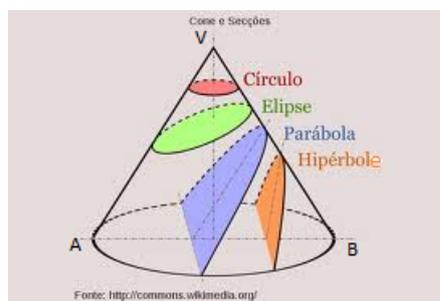


Figura 4: Secções cônicas.

- O cone para obtenção das cônicas não precisa ser reto. E este fato não altera as propriedades das curvas;
- Substituiu o cone de uma só folha pelo cone de duas folhas. Assim, passando a hipérbole a ter dois ramos; Veja a Figura 5 obtida em [8].



Figura 5: Hipérbole com dois ramos.

- Atribuiu os nomes atuais a estas curvas, provavelmente adotados de usos anteriores pelos pitagóricos na solução de equações quadráticas por aplicação de

áreas;

- Retirou estas curvas do cone e as trouxe para o plano. Desta forma, deduziu a relação básica entre o que chamaríamos hoje de coordenadas de um ponto da curva. A partir das equações das curvas deduziu diversas propriedades sem fazer referência ao cone. O processo de obtenção das equações das curvas apresentado por Apolônio segue caminhos muito semelhantes aos utilizados por Menaecmus;
- Apolônio definiu reta tangente e normal a cada ponto das cônicas. No texto original estas definições são feitas a partir das Proposições 8, 13 e 27 de seu livro V e das Proposições 33 e 34 de seu livro I.

A obra de Apolônio de Perga sobre secções cônicas foi tão completa que até os dias atuais os avanços feitos na teoria introdutória sobre este tema apenas sofreram atualização de notação depois do advento da Geometria Analítica. Sendo assim, nas próximas Seções iremos desenvolver a teoria sobre as cônicas a partir das notações modernas, porém muito próximo do que foi feito por este grande geômetra.

2 Noções básicas para o estudo das cônicas

2.1 Coordenadas no plano

Para o estudo das cônicas, suas propriedades, aplicações e equações é necessário adotar um sistema de coordenadas no plano. Neste trabalho adotaremos o sistema de coordenadas cartesianas, de acordo com a abordagem deste assunto no Ensino Médio. Utilizaremos também ao final deste Trabalho o sistema de coordenadas polares.

2.2 Ponto em \mathbb{R}^2 e distância entre dois pontos

Um ponto no plano cartesiano \mathbb{R}^2 é denotado por um par ordenado (x, y) sendo x a abscissa e y a ordenada. Desta forma, conforme [5], há uma correspondência biunívoca entre o plano e \mathbb{R}^2 que associa cada ponto do plano a um par ordenado (x, y) em \mathbb{R}^2 . Veja a Figura 6.

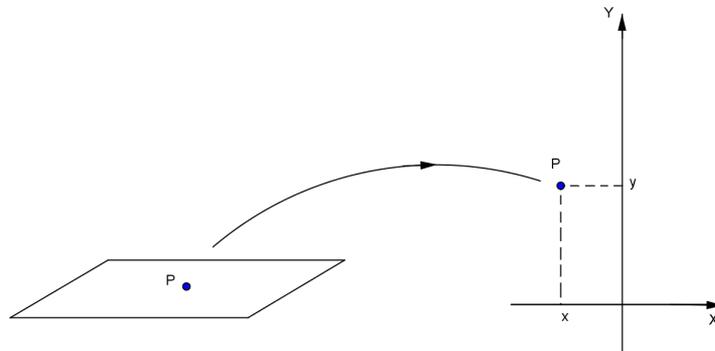


Figura 6: Correspondência biunívoca entre o plano e \mathbb{R}^2 .

Sendo assim, podemos obter uma fórmula para calcular a distância entre dois pontos no plano utilizando suas coordenadas cartesianas. Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos representados no plano cartesiano conforme a Figura 7. Daí, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d(A, B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

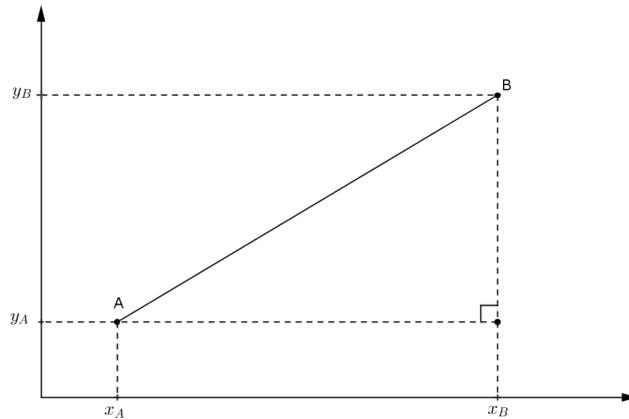


Figura 7: Distância entre dois pontos.

O Exemplo 2.1, retirado de [5], aplica a fórmula de distância entre dois pontos para provar uma propriedade interessante dos triângulos retângulos.

Exemplo 2.1. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo de hipotenusa \overline{BC} . Calculando distâncias em coordenadas mostre que o comprimento da mediana relativa ao lado \overline{BC} é a metade do comprimento do lado \overline{BC} .*

Solução. Escolhendo de forma conveniente o sistema de coordenadas, na Figura 8 tome $A(0, 0)$, $B(0, 2y)$ e $C(2x, 0)$. Como M é ponto médio de \overline{BC} , então $M = (x, y)$.

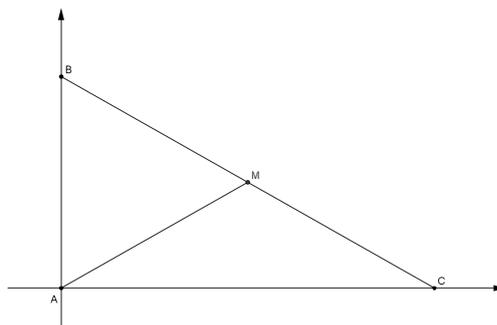


Figura 8: Triângulo $\triangle ABC$ retângulo em A .

Calculando a distância de B a C temos:

$$d(B, C) = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Calculando a distância de A a M temos:

$$d(A, M) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

De (2) e (3) temos:

$$d(A, M) = \frac{d(B, C)}{2}$$

2.3 Lugares geométricos em \mathbb{R}^2

A partir desse processo de mapeamento do plano em coordenadas cartesianas, torna-se possível obter expressões (equações ou inequações) que representam lugares geométricos em \mathbb{R}^2 . Veja a seguir os lugares geométricos mais comuns e suas expressões:

- Reta \overleftrightarrow{AB} , veja Figura 9.

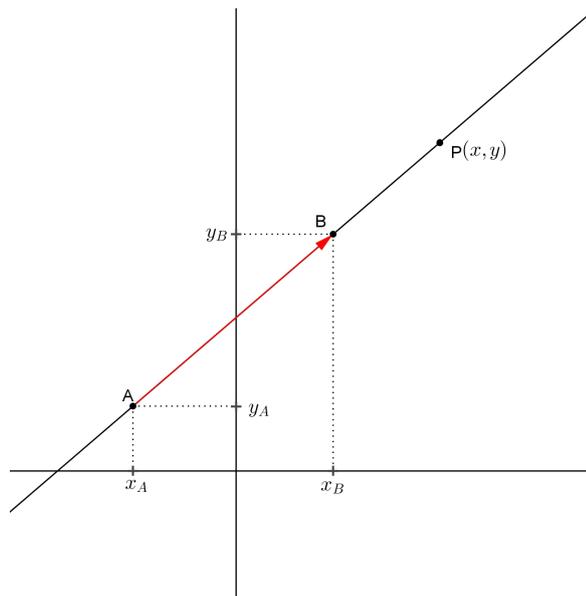


Figura 9: Reta definida por dois pontos.

Sejam $P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ um vetor direção da reta \overleftrightarrow{AB} , então P pode ser representado da seguinte forma:

$$P = A + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad (4)$$

A expressão (4) torna-se muito interessante, pois para valores distintos de t ela representa lugares geométricos distintos em \mathbb{R}^2 .

- para $t = 0$, temos o ponto A ;
- para $t = 1$, temos o ponto B ;
- para $t \in [0, 1]$, temos o segmento de reta \overline{AB} ;
- para $t \geq 0$, temos a semirreta com origem em A contendo o ponto B ;
- para $t = \frac{1}{2}$, temos o ponto médio do segmento \overline{AB} .

- Círculo de centro $C = (x_C, y_C)$ e raio r .

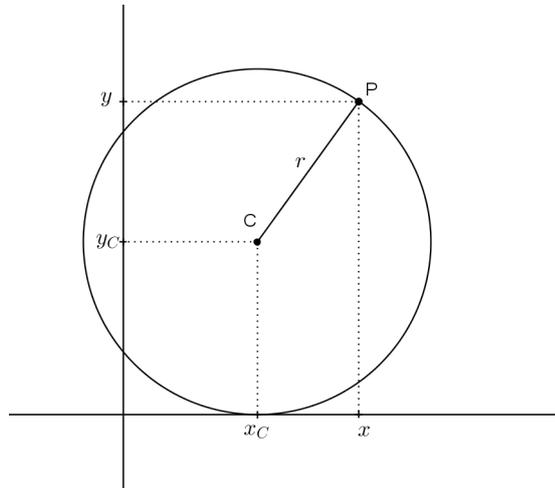


Figura 10: Círculo de centro C e raio r

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer do círculo da Figura 10, daí

$$d(P, C) = r \Rightarrow (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad (5)$$

e (5) é a equação do círculo. Sendo assim, note que (6) é a *região interior ao círculo* e (7) é a *região exterior ao círculo*, onde:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 < r^2 \quad (6)$$

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 > r^2 \quad (7)$$

Observação 2.1. Um conjunto vazio também é interpretado como um lugar geométrico e uma expressão que o representa pode ser $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = k$, para qualquer k real negativo, pois não existem pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaçam esta equação. Além dos lugares geométricos já citados, existem vários outros e obter a expressão que representa cada um deles é um dos principais objetos de estudo da Geometria Analítica.

Exemplo 2.2. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de $A(1, 2)$ e $B(3, 5)$? Determine a expressão que representa este lugar geométrico.

Solução. O lugar geométrico procurado é a reta m mediatriz do segmento \overline{AB} . Veja a Figura 11.

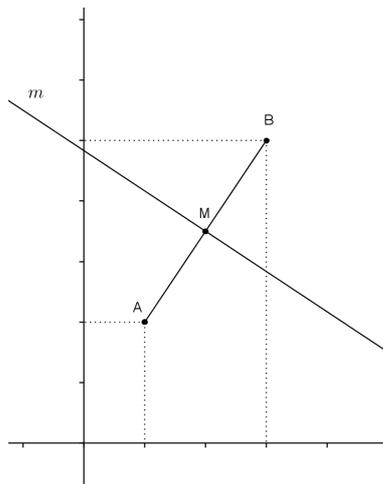


Figura 11: Mediatriz do segmento \overline{AB} .

Seja $P(x, y) \in m$, então $d(P, A) = d(P, B)$. Assim, $d(P, A)^2 = d(P, B)^2$, isto é

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-2)^2 &= (x-3)^2 + (y-5)^2 \Rightarrow \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 \Rightarrow \\ 4x + 6y - 29 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, a expressão que representa o lugar geométrico é a equação cartesiana da reta $m : 4x + 6y - 29 = 0$.

Exemplo 2.3. *Faça o esboço da região do plano representada pelo sistema de inequações*

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} .$$

Solução. A primeira inequação é a região formada pelo círculo de centro $C_1(1, 2)$ e raio $r = 3$ com o seu interior, enquanto a segunda inequação é a região formada pelo círculo de centro $C_2(0, 0)$ e raio $r = 2$ com a região exterior a ele. A região procurada é a intersecção destas duas regiões, conforme a Figura 12.

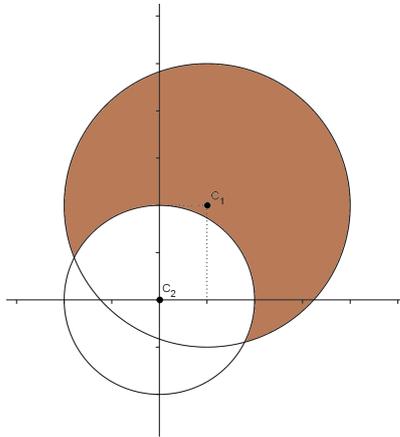


Figura 12: Solução do Exemplo 2.3.

3 Parábola

3.1 Definição de parábola

Definição 3.1. *Dados uma reta d e um ponto $F \notin d$, o lugar geométrico formado pelos pontos equidistantes de d e F é chamado de parábola. Veja a Figura 13.*

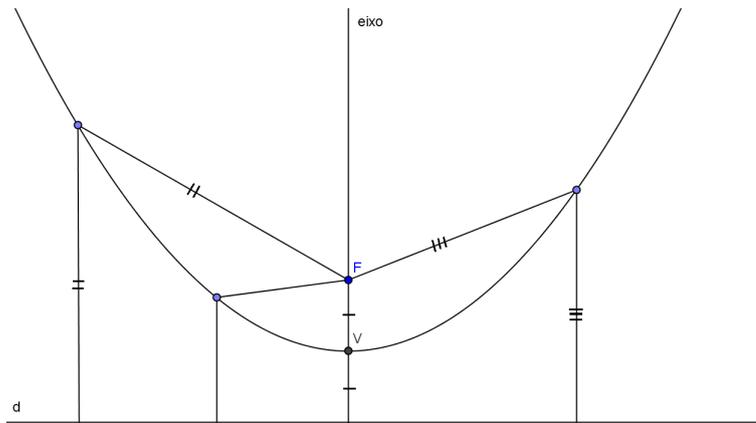


Figura 13: Definição de parábola.

Observação 3.1. *No caso em que $F \in d$ o lugar geométrico dos pontos equidistantes de F e d é a reta perpendicular a d passando por F a qual é considerada uma parábola degenerada.*

3.2 Principais elementos da parábola

Com base na Definição 3.1, F é o foco e d é a reta diretriz da parábola. A distância p entre F e d é chamada de parâmetro da parábola. A reta r perpendicular a d que contém F é o eixo da parábola (também conhecido como eixo de simetria). Sendo $r \cap d = \{A\}$, o ponto médio do segmento \overline{FA} é o vértice V da parábola. Estes elementos foram classificados de acordo com [2]. Veja a Figura 14.

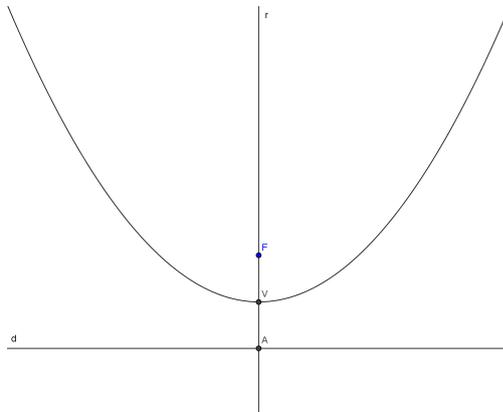


Figura 14: Principais elementos da parábola.

3.3 Construção de uma parábola utilizando material concreto

3.3.1 Método de Kepler

- Materiais utilizados: régua, esquadro, alfinete, lápis e barbante;
- Tome a régua como sendo a reta diretriz da parábola e fixe o alfinete onde será o foco da parábola;
- Corte o barbante do tamanho do maior lado do esquadro e amarre uma ponta dele no vértice do esquadro oposto ao menor lado e a outra ponta no alfinete;
- Apoie o lado menor do esquadro na régua de modo que o lado maior encoste no alfinete e estique o barbante com o lápis marcando o ponto médio entre o alfinete e a régua (perpendicular à régua), obtendo assim o vértice da parábola;
- Deslize o esquadro sobre a régua de modo que a ponta do lápis fique sempre encostada no lado maior do esquadro e mantendo o barbante esticado;
- Faça o mesmo processo deslizando o esquadro no sentido oposto para obter a outra parte da parábola (simétrica à obtida anteriormente). Veja a Figura 15 obtida em [8].

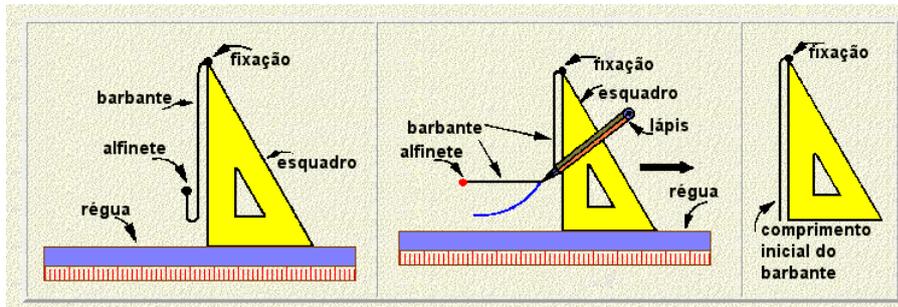


Figura 15: Método de Kepler para construção da parábola.

3.3.2 Construção de uma parábola utilizando régua e compasso

- Desenhe numa folha em branco uma reta d e um ponto $F \notin d$;
- Trace a reta r perpendicular a d passando por F e chame de A o ponto de interseção de d e r ;
- Tome um ponto B qualquer em \overrightarrow{VF} (sendo V o ponto médio de \overline{AF}) e com o compasso desenhe um círculo de centro em F e raio AB ;
- Desenhe a reta s perpendicular a r passando por B ;
- Os dois pontos C e D em que s intersecta o círculo pertencem à parábola, pois $CF = DF = AB$ (raio do círculo) e $AB = d(C, d) = d(D, d)$, conforme a Figura 16;
- À medida que se varia a posição do ponto $B \in r$ obtem-se novos pontos da parábola.

Observação 3.2. *Esta construção pode também ser muito bem representada fazendo-se uso do software GeoGebra, conforme é apresentado em [7].*

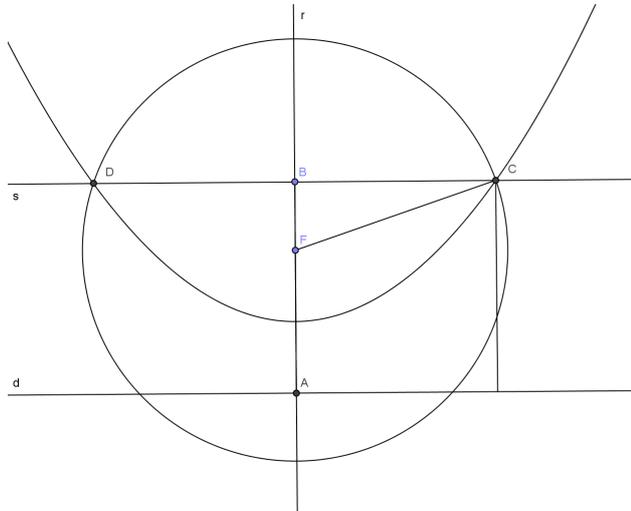


Figura 16: Construção da parábola com régua e compasso.

3.4 Equação da parábola

Seja $P(x, y)$ um ponto do plano, sabemos que P pertence à parábola de foco F e diretriz d se, e somente se, $d(P, F) = d(P, d)$. Vamos obter a equação reduzida da parábola com vértice na origem $O(0, 0)$ e eixo de simetria OY conforme a Figura 17.

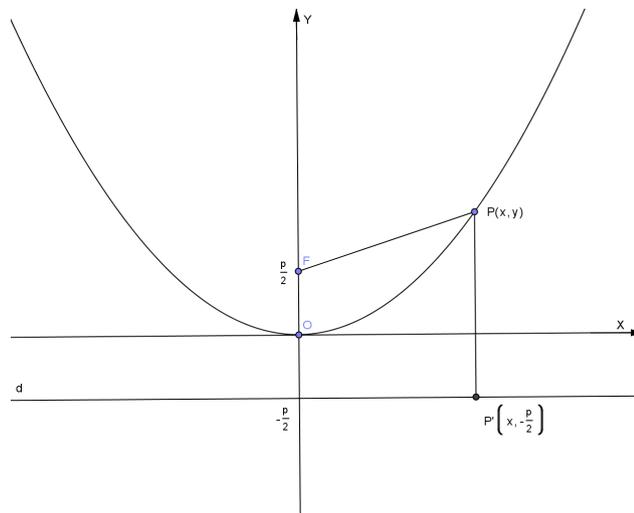


Figura 17: Equação da parábola.

Logo, $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ e $d: y = -\frac{p}{2}$, sendo p o parâmetro da parábola. Daí,

$d(P, F) = d(P, d) = d(P, P')$, de onde temos $d(P, F)^2 = d(P, P')^2$, ou seja,

$$\begin{aligned} (x - 0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 &= (x - x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ x^2 + y^2 - 2y\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} &= \frac{p^2}{4} + y^2 + 2y\frac{p}{2} \Rightarrow \\ 2py &= x^2 \end{aligned} \quad (8)$$

e (8) é a equação reduzida da parábola, desde que o eixo OY tenha o mesmo sentido de d para F . Caso o eixo OY tenha sentido oposto ao de d para F a equação reduzida é da forma $x^2 = -2py$ e dizemos que a parábola tem concavidade voltada para baixo. Veja Figura 18.

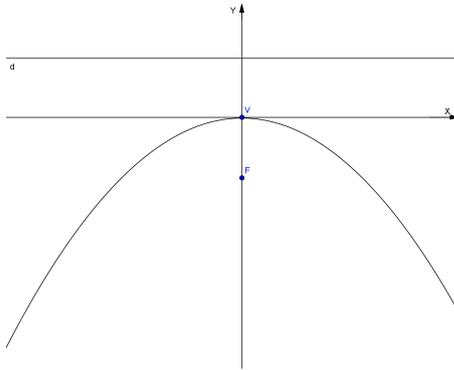


Figura 18: Parábola com concavidade voltada para baixo.

Analogamente, a equação da parábola com vértice $O(0,0)$ e eixo OX é $y^2 = 2px$, desde que o eixo OX tenha o mesmo sentido de d para F (diz-se então que a parábola tem concavidade voltada para a direita - veja a Figura 19) ou $y^2 = -2px$ caso contrário e estas têm a concavidade voltada para a esquerda, conforme a Figura 20.

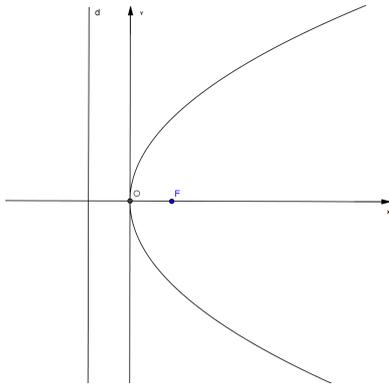


Figura 19: Parábola com concavidade voltada para a direita.

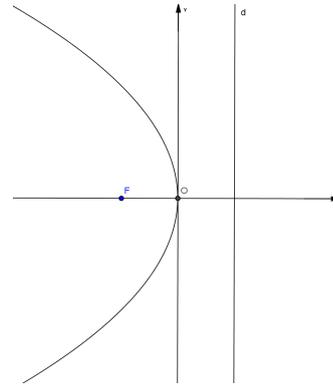


Figura 20: Parábola com concavidade voltada para a esquerda.

3.5 Translação

No sistema de coordenadas cartesianas OXY tome o ponto $A(m, n)$. Em seguida, construa um novo sistema de coordenadas $AX'Y'$ com origem em A de acordo com a Figura 21.

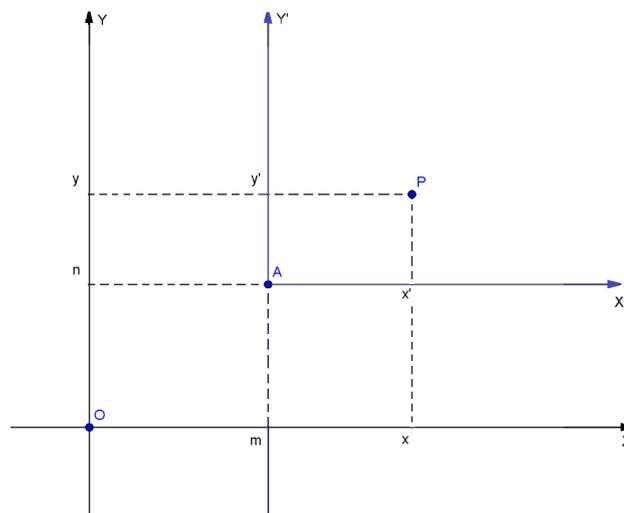


Figura 21: Mudança de coordenadas: Translação.

Note que um ponto $P(x, y)$ nesse novo sistema tem coordenadas (x', y') tais que $x = x' + m$ e $y = y' + n$, ou seja,

$$\begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - n \end{cases} .$$

Esse processo de mudança de coordenadas chama-se translação conforme é apresentado em [4] e é de grande utilidade no estudo das parábolas (cônicas em geral) no sentido de tornar a equação destas mais simples e evidenciando seus elementos.

Exemplo 3.1. *Vamos obter a equação da parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo paralelo ao eixo OY .*

Solução. No sistema de coordenadas $VX'Y'$ (veja a Figura 22) onde V é a origem, a equação reduzida da parábola é $x'^2 = 2py'$ como visto anteriormente. Pela translação sabemos que $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, sendo (x, y) as coordenadas de um ponto qualquer em OXY .

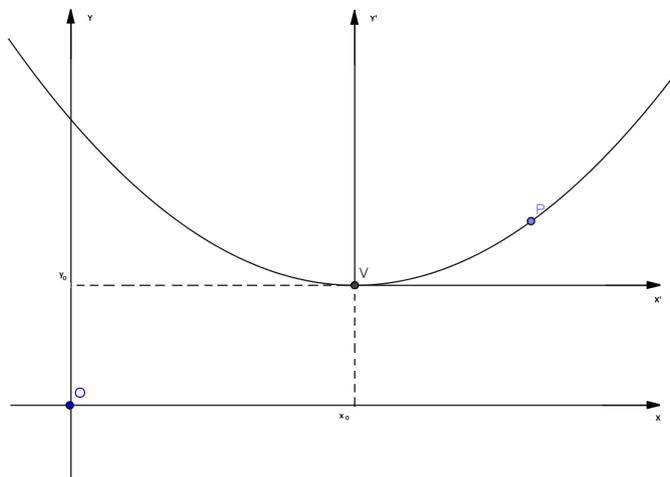


Figura 22: Equação da parábola com vértice fora da origem.

Logo, a equação reduzida da parábola em OXY é $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ se a parábola tiver concavidade para cima ou $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$ se a concavidade for para baixo.

De modo análogo, para parábolas com vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo paralelo ao eixo OX a equação reduzida é $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ se a parábola tem concavidade para a direita (veja Figura 23) ou $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$ se a concavidade for para a esquerda (veja Figura 24).

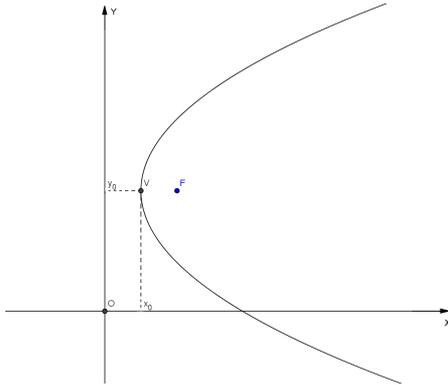


Figura 23: Parábola com concavidade voltada para a direita e vértice fora da origem.

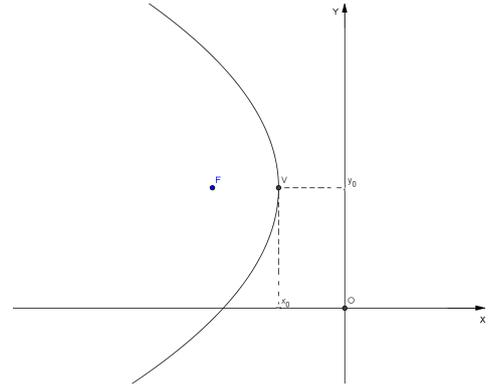


Figura 24: Parábola com concavidade voltada para a esquerda e vértice fora da origem.

Exemplo 3.2. *Mostre que o gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ é uma parábola.*

Solução. O gráfico de f é o conjunto

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = ax^2 + bx + c \text{ e } x \in \mathbb{R}\}.$$

1º Caso: Considere $a > 0$.

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

sendo $\Delta = b^2 - 4ac$.

De onde obtemos que

$$\left[x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right]^2 = \frac{1}{a} \left[y - \left(-\frac{\Delta}{4a} \right) \right] \quad (9)$$

Daí, comparando (9) com a equação reduzida da parábola $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, nota-se que $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$ e $2p = \frac{1}{a} \Rightarrow p = \frac{1}{2a} > 0$, ou seja, $Gr(f)$ é uma parábola de vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, eixo focal (ou eixo de simetria) paralelo ao eixo OY e de equação $x = -\frac{b}{2a}$, foco $F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta + 1}{4a}\right)$ e reta diretriz $y = -\frac{\Delta + 1}{4a}$. Note que $p = \frac{1}{2a}$ é o parâmetro da parábola. Veja a Figura 25.

2º Caso: Se $a < 0$.

Compare a expressão (9) com a equação reduzida da parábola de concavidade para baixo $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$, daí tome $-2p = \frac{1}{a} \Rightarrow p = -\frac{1}{2a} > 0$ e $Gr(f)$ é também uma parábola com as mesmas coordenadas do 1º Caso, porém com concavidade voltada para baixo.

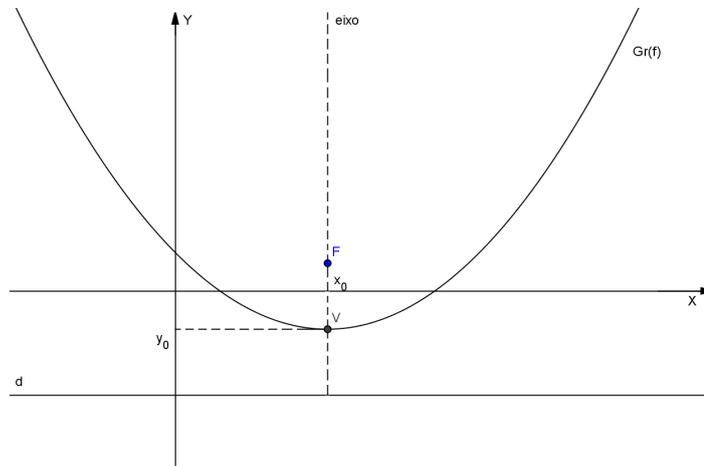


Figura 25: Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ para $a > 0$.

3.6 Propriedade refletora da parábola

Definição 3.2. *Como visto no início desta Seção, parábola é o conjunto dos pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que $d(P, F) = d(P, d)$ para algum ponto F e alguma reta d com $F \notin d$. Sendo assim, definimos a região interna da parábola como sendo a região do plano formada pelos pontos P tais que $d(P, F) < d(P, d)$ e a região externa da parábola pelos pontos P tais que $d(P, F) > d(P, d)$.*

Definição 3.3. *A tangente a uma parábola no ponto P é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto P e tal que todos os demais pontos da parábola estão do mesmo lado dessa reta.*

Definição 3.4. *O ângulo entre uma reta e uma curva que se intersectam no ponto P é o ângulo entre essa reta e a tangente à curva traçada pelo ponto P .*

A Proposição 3.1, obtida em [7], apresenta uma das principais propriedades da parábola.

Proposição 3.1. *(Propriedade refletora da parábola): As retas paralelas ao eixo focal intersectam a parábola num ponto P e formam com esta ângulo igual ao ângulo que \overleftrightarrow{PF} forma com a parábola em P , ou seja, se imaginarmos a parábola como um espelho, todos os raios de luz paralelos ao seu eixo que incidem num ponto P da parábola serão refletidos passando sempre pelo foco.*

Demonstração. Sejam P um ponto qualquer da parábola de foco F e diretriz d e A a projeção ortogonal de P em d (veja Figura 26). Mostremos que a bissetriz t do ângulo FPA é a tangente à parábola em P . Como $PF = PA$ (pois P pertence à parábola), o triângulo $\triangle FPA$ é isósceles e t é a mediatriz do lado \overline{AF} . Daí, tome $P' \in t$ com $P' \neq P$ e B a projeção ortogonal de P' em d . Logo, $FP' = AP' > P'B$.

Segue então pela Definição 3.2 que P' é exterior à parábola para todo $P' \in t$ com $P' \neq P$. Como $P \in t$ e P pertence à parábola então t é a tangente à parábola em P . Portanto, as retas \overleftrightarrow{PA} paralela ao eixo da parábola e \overleftrightarrow{PF} formam ângulos iguais com a parábola em P .

□

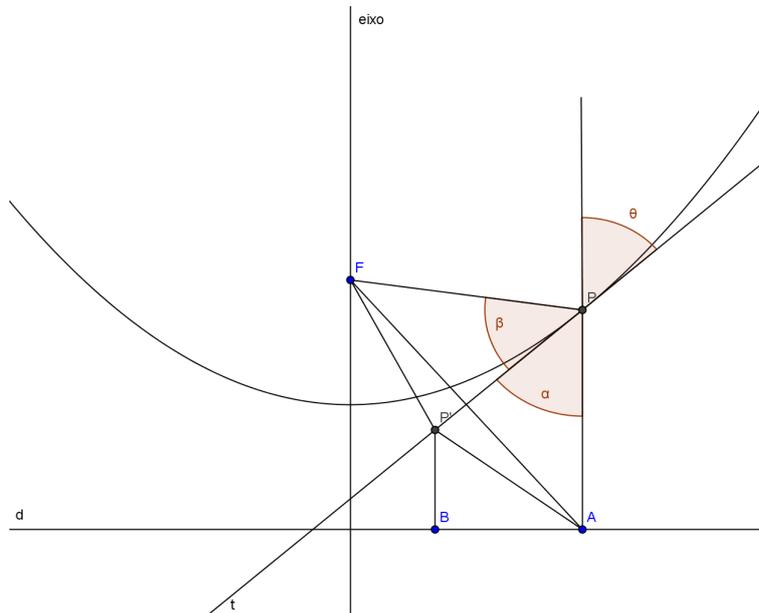


Figura 26: Propriedade refletora da parábola.

3.6.1 Aplicações das propriedades da parábola

O texto a seguir é baseado em [6]. Se girarmos uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada parabolóide de revolução, também conhecida como superfície parabólica. Esta superfície possui inúmeras aplicações interessantes, todas elas decorrentes da propriedade refletora da parábola.

A fama das superfícies parabólicas remonta à Antiguidade. Há uma lenda segundo a qual o extraordinário matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa em torno do ano 250 a.C., destruiu a frota que sitiava aquela cidade incendiando os navios com os raios de sol refletidos em espelhos parabólicos. Embora isto seja teoricamente possível, há sérias dúvidas históricas sobre a capacidade tecnológica da época para fabricar tais espelhos. Mas a lenda sobreviveu, e com ela a ideia de que ondas (de luz, de calor, de rádio ou de outra natureza qualquer), quando refletidas numa superfície parabólica, concentram-se sobre o foco, assim reforçando grandemente o sinal recebido.

Da lenda de Arquimedes restam hoje um interessante acendedor solar de cigarros e outros artefatos que provocam ignição fazendo convergir os raios de sol para o foco de uma superfície parabólica polida.

Outros instrumentos atuam inversamente, concentrando na direção paralela ao eixo os raios de luz que emanam do foco. Como exemplos, citamos os holofotes, os faróis de automóveis e as simples lanternas de mão, que têm fontes luminosas à frente de uma superfície parabólica refletora. Veja as Figuras 27 e 28.

Um importante uso recente destas superfícies é dado pelas antenas parabólicas, empregadas na rádio-astronomia, bem como no dia-a-dia dos aparelhos de televisão, refletindo os débeis sinais provenientes de um satélite sobre sua superfície, fazendo-os convergir para um único ponto, o foco, deste modo reforçando-os consideravelmente. Veja as Figuras 29 e 30.

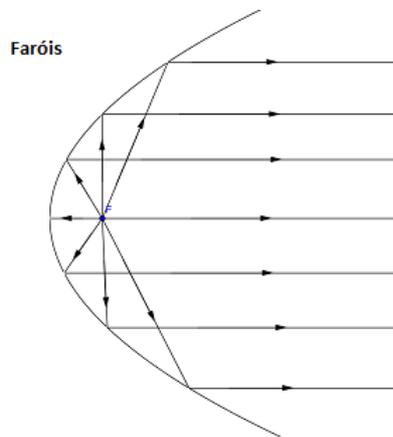


Figura 27: Uso da parábola em automóveis, lanternas de mão e holofotes.

Figura 28: Farol de automóvel. Imagem obtida em [8].

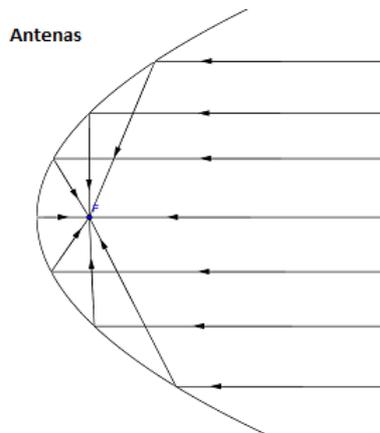


Figura 29: Uso da parábola na rádio-
astronomia e em aparelhos de televisão.



Figura 30: Antena parabólica. Imagem
obtida em [8].

As formas geométricas são muito utilizadas na Arquitetura e na Engenharia Civil devido às suas propriedades e à beleza destas. Além da estética, as propriedades matemáticas presentes nestas estruturas servem para reforçá-las e também para otimizar espaço, iluminação, ventilação etc. Sendo assim, há muitas construções nas quais foram utilizadas a forma parabólica. Veja as Figuras 31, 32, 33 e 34 obtidas em [8].

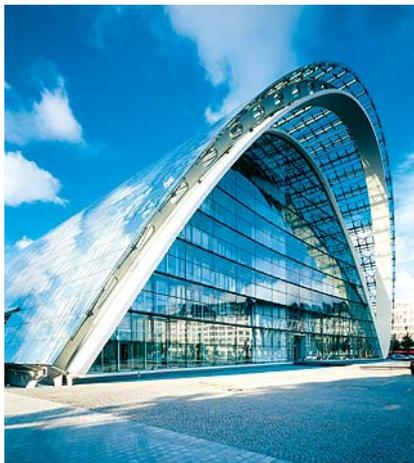


Figura 31: Vista frontal do
Ed. Berliner Bogen.



Figura 32: Edifício Berliner Bogen, Hamburgo,
Alemanha.



Figura 33: Uso de parábola na construção civil.

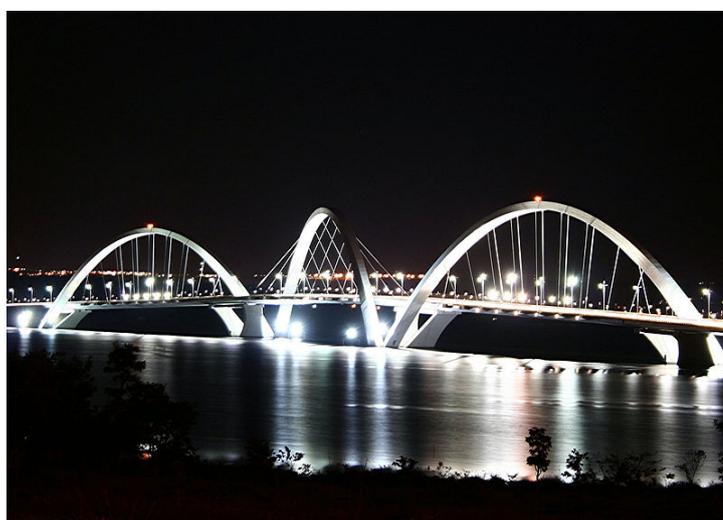


Figura 34: Visão noturna da Ponte J. K. sobre o Lago Paranoá em Brasília - DF.

Na Física, quando estudamos o Movimento Uniformemente Variado (M.U.V.), a expressão que relaciona o espaço em função do tempo é $S(t) = S_0 + V_0t + \frac{a}{2}t^2$ a qual é uma função quadrática, pois $a \neq 0$ (nesta expressão a é a aceleração e no M.U.V. a aceleração é não nula). Daí, como visto no Exemplo 3.2, o gráfico desta função é uma parábola. Conhecendo as propriedades da parábola, ao resolvermos problemas de Física sobre M.U.V. podemos também obter muitas informações tais como alcance, altura máxima e tempo de percurso em lançamentos oblíquos. As Figuras 35, 36 e 37 obtidas em [8] apresentam algumas situações nas quais a Física se utiliza desta curva.

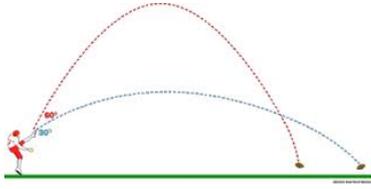


Figura 35: Futebol.

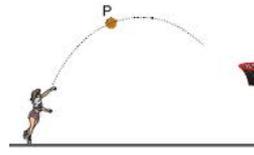


Figura 36: Basquete.

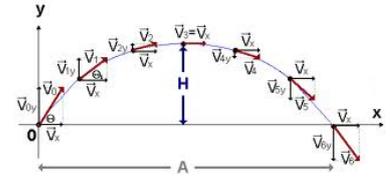


Figura 37: Aplicações de parábola na Física - M.U.V.

4 Classificação das cônicas

Nesta Seção o nosso objetivo é fazer o reconhecimento das cônicas a partir da equação geral do 2º grau, ou seja, dada a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (10)$$

determinar se esta é uma elipse, hipérbole, parábola ou um dos casos degenerados dessas cônicas, para isto iremos usar como referencial teórico [1] e [5]. No caso em que $b = 0$, o reconhecimento pode ser feito completando quadrados. Para o caso em que $b \neq 0$, iremos fazer uma rotação dos eixos coordenados seguida de uma translação, ou seja, vamos passar do plano OXY para o plano $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ de modo que:

- Os eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ coincidam com os eixos da cônica;
- \bar{O} coincida com o centro da cônica.

Para isto, precisamos determinar uma base $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ortonormal para o plano $O\bar{X}\bar{Y}$. Com este objetivo iremos desenvolver as Subseções a seguir.

4.1 Rotação dos eixos coordenados

Para fazermos a rotação dos eixos coordenados utilizaremos o resultado obtido na seguinte

Proposição 4.1. *Se os eixos coordenados giram um ângulo θ em torno de sua origem e as coordenadas de um ponto P qualquer antes e depois da rotação são (x, y) e (\bar{x}, \bar{y}) , respectivamente, então*

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \operatorname{sen} \theta \\ y = \bar{x} \operatorname{sen} \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases}.$$

Demonstração. De acordo com a Figura 38, temos: $OR = x$, $OT = \bar{x}$, $PR = y$ e $PT = \bar{y}$.

Do $\triangle OQT$ segue que: $\operatorname{sen} \theta = \frac{QT}{\bar{x}}$ e $\cos \theta = \frac{OQ}{\bar{x}}$. De onde obtemos $QT = \bar{x} \operatorname{sen} \theta$ e $OQ = \bar{x} \cos \theta$.

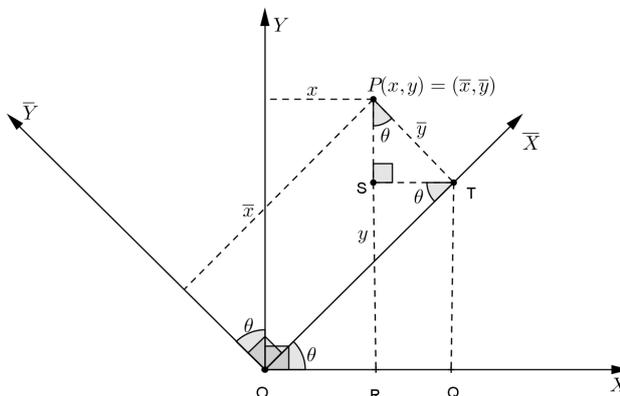


Figura 38: Rotação dos eixos coordenados.

Do $\triangle PST$ temos: $\text{sen}\theta = \frac{ST}{\bar{y}} \Rightarrow ST = \bar{y}\text{sen}\theta = RQ$ e $\text{cos}\theta = \frac{SP}{\bar{y}} \Rightarrow SP = \bar{y}\text{cos}\theta$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned} x &= OR = OQ - RQ &&= \bar{x}\text{cos}\theta - \bar{y}\text{sen}\theta \\ y &= PR = RS + SP = QT + SP &&= \bar{x}\text{sen}\theta + \bar{y}\text{cos}\theta. \end{aligned}$$

□

O sistema anterior pode ser escrito em linguagem matricial da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \end{pmatrix}$ é dita a matriz de rotação.

4.2 Autovalor e autovetor

Sejam $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ uma matriz real do tipo 2 x 2 e $\vec{u} = (x, y)$ um vetor em \mathbb{R}^2 .

Denotamos $A\vec{u}$ como sendo o vetor $(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$.

Definição 4.1. Um número real λ é um autovalor da matriz A se existir um vetor \vec{u} não nulo tal que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Neste caso \vec{u} é dito autovetor da matriz A .

Note que para existir λ devemos ter $\det(A - \lambda I) = 0$, pois neste caso o sistema gerado por $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ tem solução além da trivial. O que motiva a seguinte

Definição 4.2. Sejam a matriz $A_{n \times n}$ e I a matriz identidade de ordem n . O polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é dito o polinômio característico de A .

Daí, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. Seja λ_1 um número real. Dizemos que λ_1 é autovalor da matriz A se, e somente se, λ_1 é raiz do polinômio característico de A .

4.3 Resultados importantes

Os resultados enunciados a seguir justificam a técnica que utilizamos para classificar as cônicas. Os mesmos não serão demonstrados, por fugir aos objetivos deste Trabalho. Todavia o leitor que deseja aprofundar neste tema pode recorrer a [1].

Teorema 4.2. Um operador linear $T : V \rightarrow V$ admite uma base β na qual a matriz $[T]_\beta^\beta$ é diagonal se, e somente se, essa base for formada por autovetores de T .

Teorema 4.3 (Teorema Espectral). Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} . Se $T : V \rightarrow V$ é um operador simétrico, então existe uma base ortonormal β de V tal que $[T]_\beta^\beta$ é diagonal.

Para aplicarmos os resultados anteriores, note que a equação (10) pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} = 0. \quad (11)$$

Acerca da matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$, temos o seguinte

Teorema 4.4. (a) As raízes, λ_1 e λ_2 , do polinômio característico de \mathcal{A} são reais;
 (b) Existe um par \vec{u}_1 e \vec{u}_2 de autovetores ortonormais relativos aos autovalores λ_1 e λ_2 ;

(c) Se $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ é uma matriz cujas primeira e segunda colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , respectivamente, então

$$\mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Observação 4.1. Note que \vec{u}_1 e \vec{u}_2 formam uma base ortonormal para \mathbb{R}^2 . E considerando estes como vetores direcionais para os eixos $O\bar{X}$ e $O\bar{Y}$ teremos \mathcal{B} como a matriz de rotação que associa os pontos do plano OXY aos pontos do plano $O\bar{X}\bar{Y}$.

Demonstração. (a) O polinômio característico da matriz \mathcal{A} é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - a)(\lambda - c) - \frac{b^2}{4} \Rightarrow \\ p(\lambda) &= \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

O discriminante da equação $p(\lambda) = 0$ é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + c)^2 - 4 \left(ac - \frac{b^2}{4} \right) \Rightarrow \\ \Delta &= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + b^2 \Rightarrow \\ \Delta &= (a - c)^2 + b^2, \end{aligned}$$

o qual é não negativo. Sendo assim, as suas raízes λ_1 e λ_2 são reais.

(b) Tome $T_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como \mathcal{A} é simétrica, pelo Teorema 4.3, existe uma base $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ortonormal que diagonaliza $[T_{\mathcal{A}}]_{\beta}^{\beta}$. Logo, pelo Teorema 4.2, β é uma base de autovetores de \mathcal{A} .

(c) Sendo \mathcal{B}^T a matriz transposta de \mathcal{B} , temos que

$$\mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cdot a_1 + \frac{b}{2} b_1 & a \cdot a_2 + \frac{b}{2} b_2 \\ \frac{b}{2} a_1 + c \cdot b_1 & \frac{b}{2} a_2 + c \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}\vec{u}_1 = (a.a_1 + \frac{b}{2}b_1, \frac{b}{2}a_1 + c.b_1) = (\lambda_1.a_1, \lambda_1.b_1)$, pois \vec{u}_1 é autovetor de \mathcal{A} . De modo análogo, $\mathcal{A}\vec{u}_2 = (a.a_2 + \frac{b}{2}b_2, \frac{b}{2}a_2 + c.b_2) = (\lambda_2.a_2, \lambda_2.b_2)$. Daí,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^T\mathcal{A}\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{B}^T\mathcal{A}\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} \lambda_1(a_1^2 + b_1^2) & \lambda_2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \\ \lambda_1(a_1 a_2 + b_1 b_2) & \lambda_2(a_2^2 + b_2^2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Como os vetores são ortonormais temos:

$$\mathcal{B}^T\mathcal{A}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

□

4.4 Redução à forma canônica

A matriz \mathcal{B} é ortogonal, isto é, $\mathcal{B}^T = \mathcal{B}^{-1}$. Daí, tomando $\mathcal{D} = \mathcal{B}^T\mathcal{A}\mathcal{B}$ e multiplicando esta igualdade pela esquerda por \mathcal{B} e pela direita por \mathcal{B}^T temos, $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{D}\mathcal{B}^T$. Substituindo $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{D}\mathcal{B}^T$ na equação (11) iremos obter:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathcal{B}\mathcal{D}\mathcal{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} = 0. \quad (12)$$

Da Observação 4.1 temos que \mathcal{B} é a matriz de rotação que associa os pontos do plano OXY aos pontos do plano $O\bar{X}\bar{Y}$. Sendo assim,

$$\mathcal{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Daí, substituindo esta igualdade na equação (12) obtemos

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathcal{B}\mathcal{D} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} = 0. \quad (13)$$

Da propriedade da transposta do produto de matrizes, temos que

$$\left[\mathcal{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]^T = \left[\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right]^T \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Substituindo na equação (13) segue que

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \mathcal{D} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} = 0. \quad (14)$$

Como

$$\mathcal{D} = \mathcal{B}^T \mathcal{A} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathcal{B} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \mathcal{B} \left[\mathcal{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Substituindo as expressões acima na equação (14) esta se reduz a:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \end{pmatrix} = 0.$$

Resolvendo os produtos de matrizes nesta última equação temos que

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{d}\bar{x} + \bar{e}\bar{y} + f = 0, \quad (15)$$

onde $\bar{d} = \langle (d, e), (a_1, b_1) \rangle$ e $\bar{e} = \langle (d, e), (a_2, b_2) \rangle$, onde $\langle \cdot \rangle$ é o produto interno usual de \mathbb{R}^2 . Agora é só completar quadrados na equação (15) para classificarmos a cônica.

Exemplo 4.1. Qual é a cônica que a equação $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$ representa?

Solução. Para identificar a cônica em questão precisamos encontrar os autovalores e autovetores da matriz \mathcal{A} .

Sendo $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 2 = 0$. Encontramos as raízes desta equação $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$.

Para encontrarmos o autovetor $\vec{u}_1 = (x, y)$ associado a $\lambda_1 = 3$ devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Note que uma solução para o sistema é $(1, \sqrt{2})$. Logo, $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ e $\vec{u}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Daí, $\vec{d} = \langle (6\sqrt{3}, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \rangle = 6$ e $\vec{e} = \langle (6\sqrt{3}, 0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rangle = -6\sqrt{2}$.

Sendo assim, de (15) temos que a equação da cônica pode ser escrita na forma

$$3\bar{x}^2 + 0\bar{y}^2 + 6\bar{x} - 6\sqrt{2}\bar{y} + 3 = 0 \Rightarrow (\bar{x} + 1)^2 = 2\sqrt{2}\bar{y}.$$

Concluimos então que a equação representa uma parábola. A Figura 39 mostra o gráfico desta parábola.

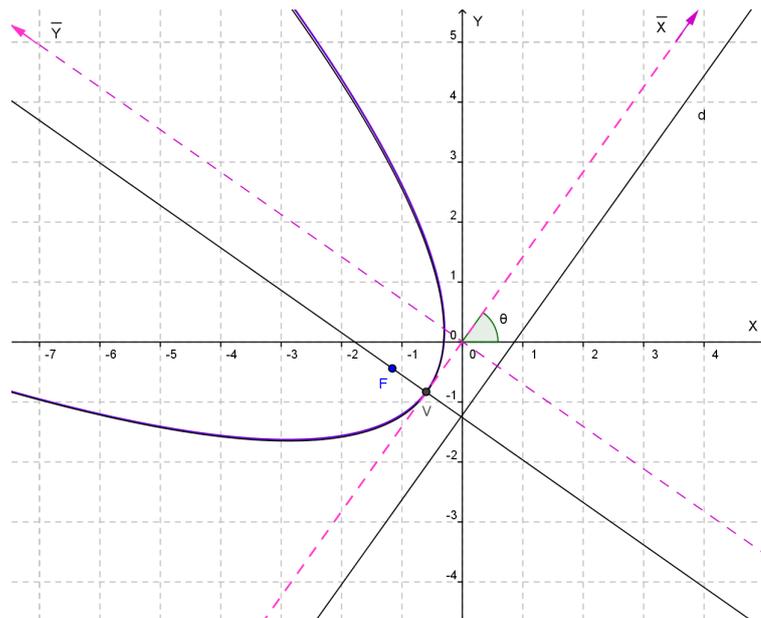


Figura 39: Parábola representada pela equação $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$.

Exemplo 4.2. Identifique a cônica que a equação $x^2 - 4xy + y^2 + 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0$ representa.

Solução. Para identificar a cônica em questão precisamos encontrar os autovalores e autovetores da matriz \mathcal{A} .

Seja $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 1) - 4 = 0$. Encontramos as raízes desta equação $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.

Para encontrarmos o autovetor $\vec{u}_1 = (x, y)$ associado a $\lambda_1 = -1$ devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Note que uma solução para o sistema é $y = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $\vec{u}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\vec{u}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Daí, $\vec{d} = \langle (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rangle = 6$ e $\vec{e} = \langle (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rangle = 0$.

Seja assim, de (15) temos que a equação da cônica pode ser escrita na forma

$$-1\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 + 6\bar{x} = 0 \Rightarrow \frac{(\bar{x} - 3)^2}{9} - \frac{\bar{y}^2}{3} = 1.$$

Concluimos então que a equação representa uma hipérbole. A Figura 40 mostra o gráfico desta hipérbole.

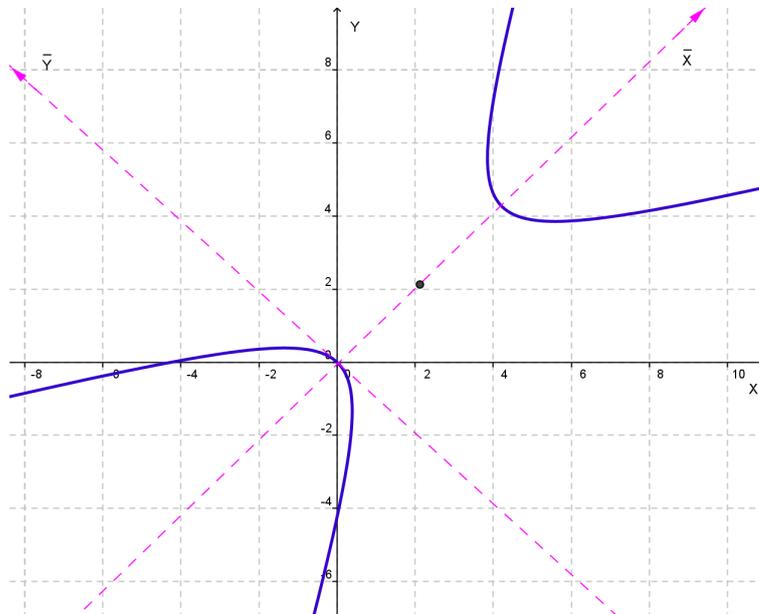


Figura 40: Hipérbole representada pela equação $x^2 - 4xy + y^2 + 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0$.

Exemplo 4.3. Identifique a cônica que a equação $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4 = 0$ representa.

Solução. Para identificar a cônica em questão precisamos encontrar os autovalores e autovetores da matriz \mathcal{A} .

Sendo $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 - 1 = 0$. Encontramos as raízes desta equação $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$.

Para encontrarmos o autovetor $\vec{u}_1 = (x, y)$ associado a $\lambda_1 = 4$ devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Note que uma solução para o sistema é $y = x = 1$. Logo, $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Daí, $\vec{d} = \langle (0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle = 0$ e $\vec{e} = \langle (0, 0), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle = 0$.

Sendo assim, de (15) temos que a equação da cônica pode ser escrita na forma

$$4\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - 4 = 0 \Rightarrow \bar{x}^2 + \frac{\bar{y}^2}{2} = 1.$$

Concluimos então que a equação representa uma elipse. A Figura 41 mostra o gráfico desta elipse.

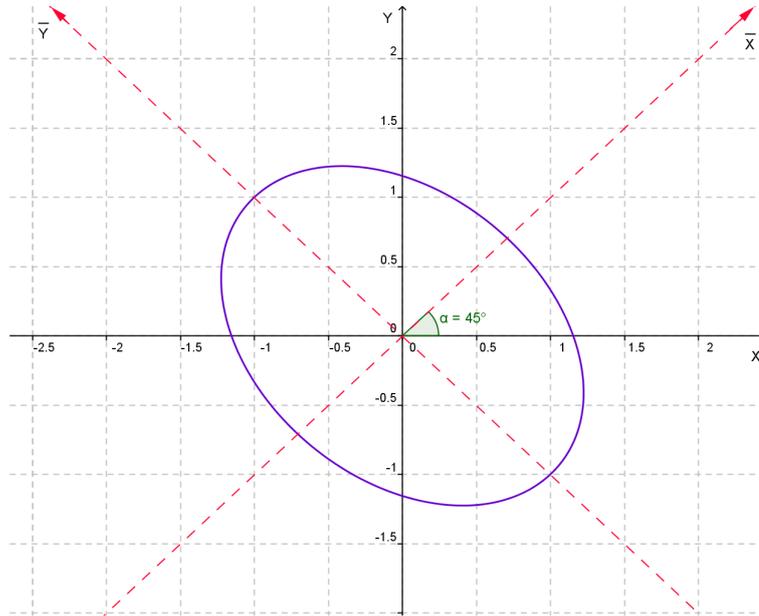


Figura 41: Elipse representada pela equação $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4 = 0$.

5 Cônicas e coordenadas polares

Nesta Seção apresentaremos a definição geral das cônicas e suas equações em coordenadas polares.

5.1 Definição geral de uma cônica

O Teorema 5.1, obtido em [5], apresenta uma definição geral que engloba os três tipos de cônicas em termos de um foco e da diretriz correspondente a esse foco.

Teorema 5.1. *Sejam F um ponto do plano, d uma reta do plano tal que $F \notin d$ e e um número real positivo. Então, o conjunto $\mathcal{C} = \{P; d(P, F) = e \cdot d(P, d)\}$ é uma elipse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ ou uma hipérbole se $e > 1$, de foco no ponto F e excentricidade e .*

Demonstração. Se $e = 1$, então $\mathcal{C} = \{P; d(P, F) = d(P, d)\}$ é uma parábola de foco F e diretriz d , de acordo com a definição de parábola.

Agora tome $0 < e \neq 1$ e no sistema de eixos ortogonais OXY considere $F(0, 0)$ e $d: x = m$, com $m > 0$. Veja Figura 42.

Daí, $P(x, y) \in \mathcal{C}$, então:

$$\begin{aligned}d(P, F) &= e \cdot d(P, d) \Leftrightarrow \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= e \cdot |x - m| \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 &= e^2(x - m)^2 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 &= e^2x^2 - 2me^2x + m^2e^2 \Leftrightarrow \\ (1 - e^2) \left(x^2 + \frac{2me^2}{1 - e^2}x \right) + y^2 &= m^2e^2 \Leftrightarrow \\ (1 - e^2) \left(x + \frac{me^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= m^2e^2 + \frac{m^2e^4}{1 - e^2} \Leftrightarrow \\ (1 - e^2) \left(x + \frac{me^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= \frac{m^2e^2}{1 - e^2} \tag{16}\end{aligned}$$

Utilizando uma translação horizontal e fazendo $a = 1 - e^2$ e $k = \frac{m^2e^2}{1 - e^2}$ a equação (16) é equivalente a

$$ax'^2 + y'^2 = k. \tag{17}$$

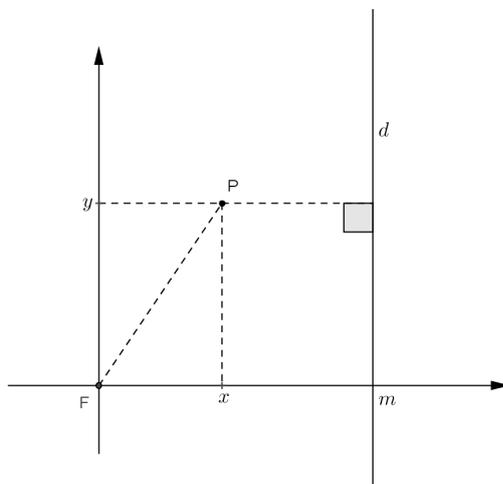


Figura 42: Demonstração do Teorema 5.1.

Logo, se $e > 1$ temos $a < 0$ e $k < 0$, segue então que a equação (17) é uma hipérbole e se $e < 1$, temos $a > 0$ e $k > 0$ e a equação (17) é uma elipse.

□

5.2 Coordenadas polares

A ideia fundamental da geometria analítica plana consiste como visto até agora, em substituir cada ponto do plano por um par de números reais, que são as suas coordenadas. O sistema cartesiano, adotado até este momento, é o mais importante e o mais simples dos sistemas de coordenadas, mas não é o único. Depois do sistema cartesiano, o mais útil é o sistema de coordenadas polares.

Definição 5.1. *Um sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$ no plano consiste de um ponto O , denominado pólo ou origem, de uma semirreta \overrightarrow{OA} , com origem em O , denominada eixo polar, e de uma unidade de comprimento utilizada para medir a distância de O a um ponto qualquer do plano. Dado um ponto P do plano, suas coordenadas nesse sistema são ρ e θ , onde ρ é a distância de P a O e θ é a medida do ângulo do eixo polar para a semirreta \overrightarrow{OP} . Escreve-se $P(\rho, \theta)$. Veja a Figura 43.*

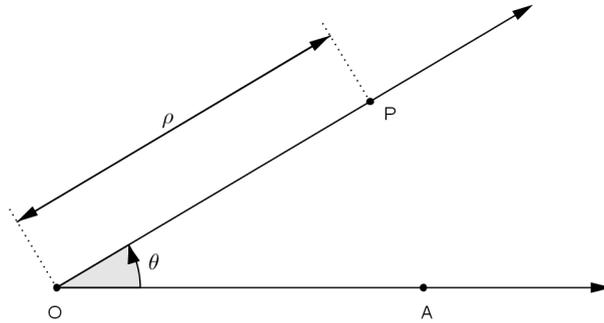


Figura 43: Ponto P em coordenadas polares.

Convencionam-se que a medida do ângulo tomada de \overrightarrow{OA} para \overrightarrow{OP} no sentido anti-horário é positiva, e negativa no sentido horário.

Se a primeira coordenada polar de um ponto é zero, então esse ponto é o pólo. O ângulo do pólo não está definido. Convencionamos que $(0, \theta)$ são as coordenadas polares do pólo, para todo ângulo θ . Percebe-se aqui que não há uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e sua representação em coordenadas polares, pois o par (ρ, θ) determina, de maneira única, um ponto no plano. No entanto, um ponto do plano pode ser representado por várias coordenadas polares distintas. Note que as medidas de θ e $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, estão associadas ao mesmo ângulo e, portanto, (ρ, θ) e $(\rho, \theta + 2k\pi)$ representam o mesmo ponto do plano. Todavia, se o ponto P não for a origem e se restringirmos θ ao intervalo $[0, 2\pi)$, existirá apenas um par de coordenadas polares (ρ, θ) para P .

A limitação dos valores do argumento θ ao intervalo $[0, 2\pi)$ pode ser inconveniente em muitos problemas. Existem também questões que em seu estudo pode ser útil considerar valores negativos para o raio vetor ρ . Neste caso, a convenção que se faz é identificar o ponto $(-\rho, \theta)$ com o ponto $(\rho, \theta + \pi)$.

Exemplo 5.1. O conjunto \mathcal{C} dos pontos $P(\rho, \theta)$ que satisfazem a equação $\rho = 3$ é o conjunto dos pontos cuja distância ao pólo O é igual a 3, isto é, $\mathcal{C} = \{(\rho, \theta); \rho = 3 \text{ e } \theta \in \mathbb{R}\}$ é o círculo de centro O e raio 3, conforme a Figura 44.

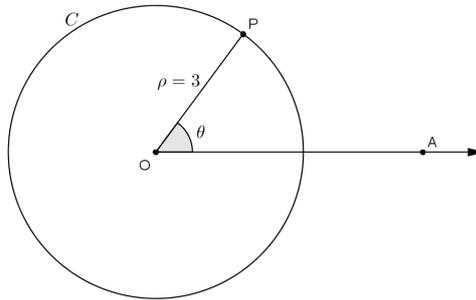


Figura 44: Círculo em coordenadas polares.

Exemplo 5.2. Seja r o conjunto dos pontos $P(\rho, \theta)$ do plano que satisfazem a equação polar $\theta = \frac{\pi}{4}$, ou seja, $r = \left\{ (\rho, \theta); \rho \in \mathbb{R} \text{ e } \theta = \frac{\pi}{4} \right\}$.

Então, r é a reta que passa pelo pólo O e tem inclinação $\theta = \frac{\pi}{4}$ em relação ao eixo polar. Veja a Figura 45.

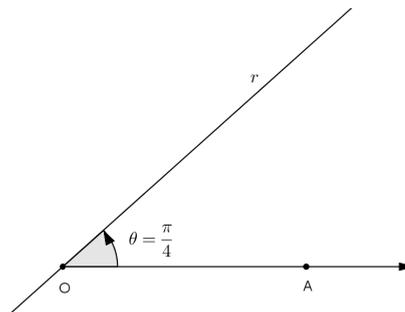


Figura 45: Reta passando pelo pólo.

A Definição 5.2 estabelece as relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

Definição 5.2. O sistema polar associado a um sistema cartesiano OXY é o sistema cujo pólo é a origem O do sistema cartesiano, e cujo eixo polar é a semirreta positiva do eixo OX .

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer do plano, referido ao sistema cartesiano. Sejam (ρ, θ) as coordenadas de P no sistema polar associado (veja a Figura 46). Estamos supondo $\rho > 0$.

$$\text{Daí, } x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad \text{e} \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

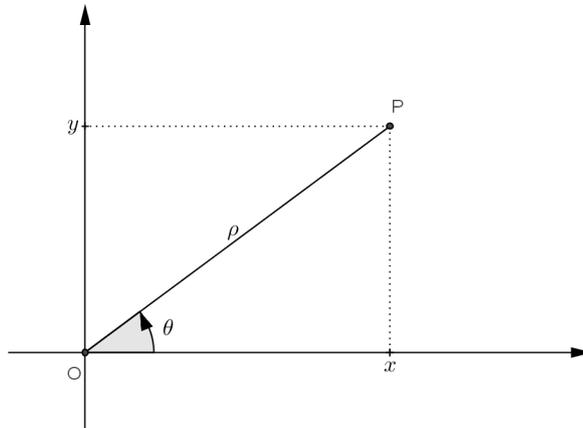


Figura 46: Sistema polar associado ao sistema cartesiano.

5.3 Equação polar das cônicas

Vamos deduzir a equação de cada cônica em coordenadas polares.

5.3.1 Elipse

Considere uma elipse de eixo maior horizontal $A_1A_2 = 2a$, eixo menor $B_1B_2 = 2b$, distância focal $F_1F_2 = 2c$ e centro $C(m, n)$ como na Figura 47.

Seja $P(\rho, \theta)$ um ponto qualquer da elipse, na qual fazemos coincidir o pólo O com o foco F_1 e o eixo polar com o eixo maior da elipse.

Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo $\triangle F_1F_2P$ temos

$$\delta^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta. \quad (18)$$

Da definição de elipse

$$F_1P + F_2P = 2a \Rightarrow \delta + \rho = 2a \Rightarrow \delta = 2a - \rho.$$

Substituindo δ na expressão (18) temos que

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta \Rightarrow 4a^2 - 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta.$$

Da relação notável da elipse segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2.$$

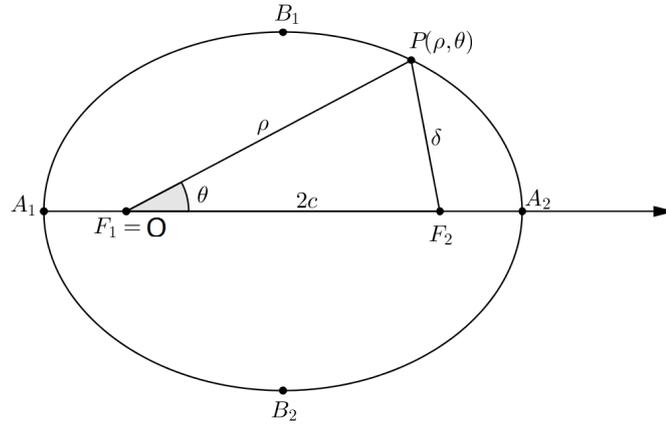


Figura 47: Elipse.

Sendo assim,

$$a^2 - c^2 = \rho(a - c \cos \theta) \Rightarrow b^2 = \rho(a - c \cos \theta) \Rightarrow \rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}.$$

Logo, a equação polar da elipse é

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}. \quad (19)$$

Na equação polar da elipse (19), dividindo o numerador e o denominador do segundo membro da expressão pela constante a , vem que $\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{a}{a} - \frac{c}{a} \cos \theta}$. Fazendo $p = \frac{b^2}{a}$, chamado de parâmetro da elipse e $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade. Assim, a equação polar da elipse é mais comumente dada por

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

5.3.2 Hipérbole

Considere uma hipérbole de eixo focal horizontal $A_1A_2 = 2a$, eixo não focal $B_1B_2 = 2b$, distância focal $F_1F_2 = 2c$ e centro $C(m, n)$. Façamos coincidir o pólo O com o foco F_2 e o eixo polar com o prolongamento do eixo real da hipérbole à direita de O . Seja $P(\rho, \theta)$ um ponto qualquer da hipérbole conforme a Figura 48.

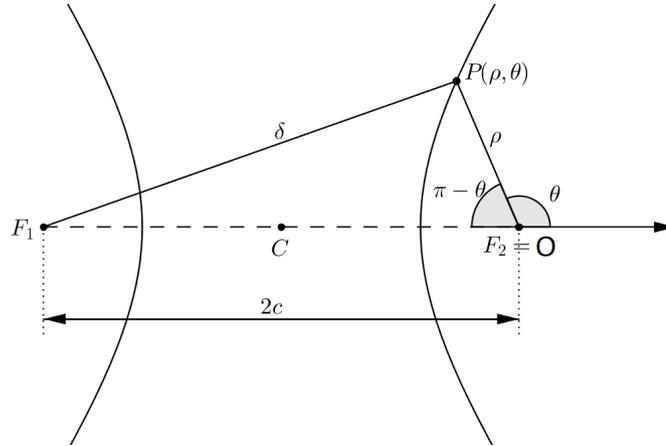


Figura 48: Hipérbole.

Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo $\triangle F_1F_2P$ temos

$$\delta^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos(\pi - \theta). \quad (20)$$

Da definição de hipérbole

$$|F_1P - F_2P| = 2a \Rightarrow \delta - \rho = 2a \Rightarrow \delta = 2a + \rho.$$

Substituindo δ na expressão (20), segue que

$$(2a + \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho \cos \theta \Rightarrow 4a^2 + 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho \cos \theta \Rightarrow a^2 - c^2 = \rho(-a + c \cos \theta).$$

Da relação notável da hipérbole, temos

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = -b^2 \Rightarrow \rho(-a + c \cos \theta) = -b^2.$$

Sendo assim, a equação polar da hipérbole é

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}. \quad (21)$$

Na equação polar da hipérbole (21), dividindo o numerador e o denominador do segundo membro da expressão pela constante a , temos $\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{a}{a} - \frac{c}{a} \cos \theta}$. Fazendo

$p = \frac{b^2}{a}$, chamado de parâmetro da hipérbole e $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade. Deste modo, a equação polar da hipérbole é mais comumente dada por

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

5.3.3 Parábola

Considere uma parábola de eixo de simetria horizontal com vértice V , foco F e $RF = p$. Seja $P(\rho, \theta)$ um ponto qualquer da parábola. Fazemos coincidir o pólo O com o foco F e o eixo polar com o eixo de simetria da parábola de acordo com a Figura 49.

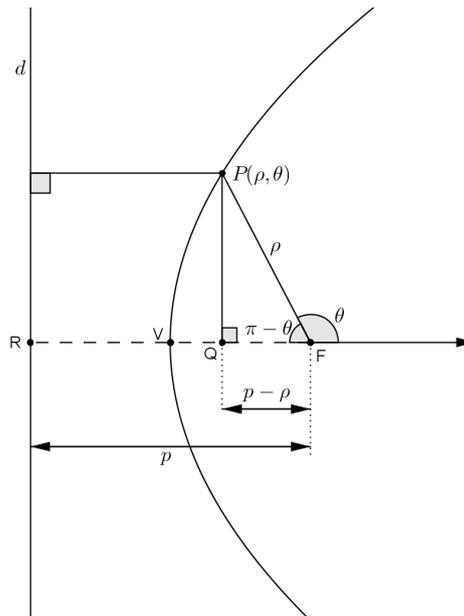


Figura 49: Parábola.

No triângulo $\triangle PQF$ temos que

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = \frac{p - \rho}{\rho}.$$

Daí, $\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}$, onde p é o parâmetro da parábola. Portanto, a equação polar da parábola é

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}.$$

Observação 5.1. Note que a elipse, a hipérbole e a parábola têm as equações polares semelhantes a menos da excentricidade $e = \frac{c}{a}$ que para a elipse ($0 < e < 1$), para a hipérbole ($e > 1$) e para a parábola ($e = 1$). Outro fato importante é que, apesar de

adotarmos os mesmos símbolos $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ e $F_1F_2 = 2c$ para a elipse e para a hipérbole, eles têm significados geométricos diferentes na definição de cada cônica, mesmo porque a relação notável da elipse é $a^2 = b^2 + c^2$ e da hipérbole é $c^2 = a^2 + b^2$. Assim, o parâmetro $p = \frac{b^2}{a}$ adotado na equação polar da elipse e da hipérbole é diferente e não tem nada em comum com o parâmetro p da definição de parábola.

Exemplo 5.3. Determine a equação polar da hipérbole de equação $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Solução. Sabemos que a equação polar da hipérbole é do tipo $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$, onde $e = \frac{c}{a}$ e $p = \frac{b^2}{a}$.

Passando a equação da hipérbole para a forma reduzida:

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Daí, temos $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$, ou seja, $a = 4$ e $b = 3$. Substituindo os valores de a e b na relação notável da hipérbole: $c^2 = a^2 + b^2$, segue que $c = 5$. Então, $p = \frac{9}{4}$, $e = \frac{5}{4}$ e $\rho = \frac{9}{4(1 - \frac{5}{4} \cos \theta)}$. Logo, a equação polar da hipérbole é

$$\rho = \frac{9}{4 - 5 \cos \theta}.$$

Conclusão

O PROFMAT é um Curso de Pós-graduação Stricto Sensu, em nível de Mestrado, com o objetivo de proporcionar ao professor da escola básica, formação matemática aprofundada e competência matemática certificada, relevante ao exercício de docência em matemática no ensino básico.

Para mim, apesar de todas as dificuldades, foi uma grande satisfação ter feito parte da primeira turma deste programa e é com base no conhecimento matemático adquirido neste curso que posso garantir: o objetivo do PROFMAT está sendo alcançado. Os conteúdos matemáticos e os recursos tecnológicos que foram apresentados e socializados nesta primeira turma elevou muito a qualidade das minhas aulas.

Este curso nos mostra o quanto precisamos pensar a forma como ensinamos e, principalmente, o que ensinamos, pois muitas vezes entramos num processo de inércia no qual reproduzimos conceitos incompletos ou falhos que limitam o nosso conhecimento e ao nos limitarmos, conseqüentemente, limitamos também nossos alunos.

Neste trabalho foram pontuadas muitas falhas na abordagem de determinados conteúdos que podem ser facilmente eliminadas fazendo com que o aluno compreenda melhor o que está estudando e sinta prazer em aprender Matemática.

Referências

- [1] A. Hefez e C. S. Fernandez. *Introdução à Álgebra Linear*, Coleção PROFMAT, SBM.
- [2] A. Steinbruch e P. Winterle. *Geometria Analítica*, 2ª edição, Editora McGraw-Hill, 1987.
- [3] C. B. Boyer. *História da Matemática*. São Paulo, Editora Edgard Blucher, 2003.
- [4] E. D. Judice. *Elementos de Geometria Analítica 1*, 3ª edição, Universidade Federal de Minas Gerais, 1983.
- [5] E. L. Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2010.
- [6] E. L. Lima, et al. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*, 9ª edição, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2006.
- [7] E. W. Souza. *Cônicas e Aplicações* [Monografia]. Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.
- [8] <http://www.google.com.br>. Acessado em 16 de fevereiro de 2013.
- [9] J. F. Lopes. *Cônicas e Aplicações* [Dissertação]. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual de São Paulo, 2011.
- [10] U. D'Ambrosio. *Educação Matemática: da Teoria à Prática*. Campinas, Editora Papirus, 1996.