UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

**DISSERTAÇÃO**

# CAMINHOS EM GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

OSNI NOVAES DA SILVA JÚNIOR

2018

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

# CAMINHOS EM GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

**OSNI NOVAES DA SILVA JÚNIOR**

*Sob a Orientação do Professor*

**Montauban Moreira de Oliveira Júnior**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de mestre, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Outubro de 2018

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586c

Silva Júnior, Osni Novaes da, 1981-
Caminhos em Grafos: Uma Experiência no Ensino Fundamental / Osni Novaes da Silva Júnior. - 2018.
132 f.: il.

Orientador: Montauban Moreira de Oliveira Júnior.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, PROFMAT, 2018.

1. Caminhos em Grafos. 2. Grafos no Ensino Fundamental. 3. Teoria dos Grafos. I. Oliveira Júnior, Montauban Moreira de , 1981-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. PROFMAT III. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**OSNI NOVAES DA SILVA JÚNIOR**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 04/10/2018

---

Montauban Moreira de Oliveira Júnior. Dr. UFRRJ
(Orientador)

---

Aline Mauricio Barbosa. Dr.ª UFRRJ

---

Marilis Bahr Karam Venceslau. Dr.ª Colégio Pedro II

Dedico a minha filha, pois durante esse curso, passei por várias dificuldades e ela sempre esteve ao meu lado.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter estado sempre ao meu lado e não ter deixado eu desistir dos meus objetivos, apesar de todos os problemas e dificuldades que enfrentei durante esses dois anos.

Aos meus pais, Osni e Leila, por terem me ensinado os valores da vida, por me educarem com amor e se dedicarem à minha educação como ser humano, fazendo de mim o que sou hoje, amo vocês.

Aos meus irmãos, em especial ao meu irmão caçula, Pablo, que por vivenciar a mesma situação que eu, sempre me deu força para obtenção do meu sucesso, obrigado “mano” por ser este amigão.

A minha filha Letícia, que mesmo com sua tenra idade e sem saber muito do tamanho da sua participação e colaboração nesta etapa da minha vida, foi a pessoa mais importante na conclusão desse projeto, pois durante os problemas que vivenciei, ela esteve sempre ao meu lado, sendo meu porto seguro.Filha, você é a razão de tudo isso!

A minha esposa Jéssica Sabrina, que apesar de ter aparecido em minha vida já na fase final desse trabalho, entrou nela em meio de uma turbulência e com sua calma, carinho e amor, soube administrar tudo de forma exuberante e ser peça fundamental nessa dissertação, por você me apaixono todos os dias, obrigado por tudo meu amor.

Aos membros da banca dessa dissertação, pelas singelas sugestões e contribuições para evolução desse projeto.

Às professoras Aline e Eulina, por saberem da situação que estava passando e sempre me incentivarem para conclusão desse mestrado.

Aos meus amigos de turma, inclusive aqueles que ficaram pelo caminho, pois foram eles que, nos momentos que pensei em desistir, vieram com palavras de apoio e incentivo para que isso não ocorresse.

A todos os professores que com maestria, ministraram as aulas de maneira impecável, contribuindo e enriquecendo cada vez mais para nossa aprendizagem.

À diretora da escola que permitiu a utilização das dependências da instituição e a participação de alunos para a realização das oficinas.

Um agradecimento “mega” especial ao meu orientador, Prof. Doutor Montauban Moreira de Oliveira Júnior, por ter acreditado em mim e ter me dado força e incentivo ao longo desta jornada.

Aos amigos de trabalho, por estarem sempre me apoiando, suprindo minhas turmas em época de prova e até mesmo em momentos que precisei para escrever esta dissertação.

A todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para realização deste trabalho.

À CAPES, pelo auxílio financeiro durante a realização deste mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

# RESUMO

SILVA JÚNIOR, Osni Novaes da. **Caminhos em Grafos: uma experiência no Ensino Fundamental. 2018.** 132 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2018.

Este trabalho realiza, por meio de um estudo de caso, a análise de uma experiência envolvendo problemas de Caminhos em Grafos em duas turmas de uma escola da rede Municipal de Ensino do Rio de Janeiro localizada em Curicica, Jacarepaguá. As turmas, uma do sétimo ano e outra do oitavo ano, contaram com aproximadamente 60 alunos participando da experiência nos meses de novembro e dezembro de 2017. Para realizar a experiência, foram utilizadas quatro aulas de Matemática, cada uma composta por dois tempos de cinquenta minutos. Com o intuito de observar o efeito da introdução de técnicas de caminhos em Grafos, simples e versáteis, na resolução de alguns problemas familiares aos alunos, a experiência se deu da seguinte forma: na primeira aula, foi aplicado um questionário motivacional adaptado do questionário de Gontijo, para a coleta de informações sobre a relação entre os alunos e a matemática. Também foi realizado um teste com questões envolvendo temas familiares aos alunos, e que puderam ser resolvidos com técnicas matemáticas já conhecidas por eles. Na realidade, tais questões são mais facilmente resolvidas por técnicas de caminhos em grafos. Tais técnicas foram ensinadas na segunda e na terceira aulas. Na última aula, o teste foi aplicado novamente, e desta vez eles já puderam usar as técnicas novas aprendidas. Também foi aplicado um questionário final, para avaliar o que os alunos acharam do processo. Uma análise dos resultados obtidos foi realizada ao final, levando a conclusões sobre um efeito positivo causado pela experiência ao grupo estudado.



**Palavras-chave:** Caminhos em Grafos, Grafos no Ensino Fundamental, Teoria de Grafos.

## ABSTRACT

SILVA JÚNIOR, Osni Novaes. **Paths in Graphs: an experience in Elementary School**. 2018. 132 p. Dissertation (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2018.

This work presents, through a case study, the analysis of an experience involving problems of Paths in Graphs in two classes of a school of the Municipal Network of Education of Rio de Janeiro located in Curicica, Jacarepaguá.The classes, one of the seventh year and another of the eighth year, had approximately 60 students participating in the experiment in the months of November and December of 2017. To carry out the experiment, four mathematics classes were used, each composed of two times of fifty minutes. In order to observe the effect of the introduction of simple and versatile graphical path techniques in solving some problems familiar to the students, the experience was as follows: in the first class, a motivational questionnaire adapted from the questionnaire Gontijo, for the collection of information about the relationship between students and mathematics. A test with questions involving topics familiar to the students was also carried out and can be solved with mathematical techniques already known to them. In fact, such questions are more easily solved by techniques of Paths in Graphs. Such techniques are taught in the second and third classes. In the last class, the test was applied again, and this time they can already use the new techniques learned. A final questionnaire was also applied to assess what the students felt about the process. An analysis of the results is carried out at the end, leading to conclusions about a positive impact of the experience on the group studied.



**Keywords:** Paths in Graphs, Graphs in Elementary School, Graph Theory.


.

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Uma das grandes dificuldades do professor de matemática é fornecer ferramentas simples e intuitivas para os alunos no processo de resolução de problemas. Nas séries iniciais, quando a maturidade matemática ainda não se encontra num nível adequado, a dificuldade é ainda maior. Para complicar ainda mais, esta geração de jovens tem exigido cada vez mais simplicidade para ser conquistada. As tecnologias e a internet fornecem rapidez e facilidade, e o celular disputa a atenção dos alunos com o professor, e por vezes sai vitorioso. Os conceitos da Teoria de Grafos muitas vezes conseguem reunir a simplicidade e a versatilidade exigidas nessa tentativa de obter ferramentas intuitivas amigáveis e próximas ao aluno. Essencialmente, para modelar um problema usando tais conceitos, basta que o aluno desenhe pontos e segmentos ligando estes pontos, associando os pontos a elementos básicos de um problema e os segmentos às relações existentes entre tais elementos. Nem todos os problemas podem ser resolvidos com a utilização de tais conceitos, mas é grande a gama de problemas com essa característica.

Alguns resultados básicos de problemas envolvendo Caminhos em Grafos são simples e intuitivos, o que faz com que os alunos realmente aprendam e incorporem os procedimentos ao seu repertório de técnicas.

> Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido.
> Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar a importância do processo de resolução. (BRASIL, 1998, p.42)

O objetivo deste trabalho foi analisar uma experiência com problemas de Caminhos em Grafos envolvendo alunos do sétimo e oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de ensino da prefeitura do Rio de Janeiro.

Enquanto o objetivo geral já foi descrito, os objetivos específicos foram:

- Introduzir conceitos básicos da teoria dos grafos aos alunos;

- Contextualizar problemas sobre caminhos em Grafos através do algoritmo de Dijkstra, para descobrir o menor caminho ou um caminho mais rentável de um vértice do grafo a todos os outros vértices do mesmo, passando uma única vez por uma determinada aresta;
- Exemplificar e elaborar atividades que o professor poderá utilizar em sala de aula para despertar o interesse do aluno pela matemática, explorando o fato de que qualquer aluno é capaz de aprender conceitos básicos de grafos.

Para realizar a experiência foram utilizadas quatro aulas, cada uma com dois tempos de cinquenta minutos. A experiência consistiu em três etapas: na primeira (primeiras aulas) foram aplicados um questionário motivacional inicial - uma adaptação feita a partir do Questionário de Gontijo (GONTIJO, 2007) - e um teste envolvendo questões de raciocínio lógico (Teste 1). Tais questões podiam ser resolvidas tanto através de técnicas de Caminhos em Grafos (mas os alunos obviamente ainda não as conhecem nesta etapa), quanto através de técnicas aprendidas no currículo tradicional. Na segunda etapa, logo após os testes, as aulas foram dedicadas ao ensino das técnicas de Grafos que podem ser usadas na resolução dos problemas do Teste 1. Nesta etapa, ressalta-se o quanto os conceitos simples de Teoria de Grafos são poderosos e intuitivos, o que contribui fortemente para o aumento da motivação do aluno. Na terceira etapa (aulas finais), foram aplicados o Teste 1 (o mesmo da aula 2), no qual os alunos podem decidir usar as técnicas de Caminhos em Grafos aprendidas na segunda etapa para resolver as questões, e em seguida um Questionário Final, para uma avaliação da experiência.

A experiência começou de fato antes das atividades: os alunos foram avisados de que iriam participar de algo totalmente diferente do que eles estavam acostumados em sala de aula. A motivação dos mesmos aumentou consideravelmente.

Durante as atividades, uma atenção especial foi dada à autoestima dos alunos. Foi incentivada a liberdade de criação, e assim, antecipadamente,todos eram convencidos de que seriam capazes de realizar as tarefas. Portanto, cada discente iria produzir seu próprio raciocínio, desenvolvendo através disso uma capacidade de questionamentos e até mesmo potencializando o estabelecimento de relações com outras áreas da grade curricular.

Sempre foi utilizado o lema “aprender a aprender”, que é defendido por Piaget na teoria da aprendizagem construtivista. Utilizou-se como regra o fato de que o conhecimento é construído pelo educando em interação com o meio, e as atividades foram criadas amparando-se em situações-problemas baseadas em seu cotidiano. Os conceitos de teoria de grafos usados para a modelagem foram usados para amenizar um grande problema nos processos de ensino-aprendizagem, que é o excesso de formalismo.Um exemplo simples de atividade deste tipo é a que pede para determinar o percurso mais curto de suas casas até a escola. De uma forma geral, o que norteou as atividades deste trabalho foram as instruções dos PCN, como pode ser visto a seguir:

> As finalidades do ensino de Matemática visando à construção da cidadania indicam como objetivos do ensino fundamental levar o aluno a:
>
> . identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
>
> . resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
>
> . sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
>
> . interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 1998, p.48)

Este texto se divide em 5 capítulos: o Capítulo 1 faz uma revisão da literatura e procura trazer definições e exemplos de alguns conceitos sobre a Teoria dos Grafos que irão auxiliar os alunos durante toda a pesquisa. O Capítulo 2 aborda todo o processo escolhido e desenvolvido para fazer tal estudo. O Capítulo 3 mostra os resultados e discussões das atividades desenvolvidas. Por último, Capítulo 4 é dedicado às considerações finais desta pesquisa.

# 2 REVISÃO DE LITERATURA

Segundo Boaventura Netto (2003), o início dos estudos sobre a teoria dos grafos é atribuído à proposição e à solução de um problema matemático por parte do matemático Leonhard Euller (1707-83), que discutiu a possibilidade de se percorrer (ou não) toda a cidade de Konigsberg (hoje chamada Kaliningrado) cruzando cada uma de suas pontes sobre o rio Pregel exatamente uma só vez. Boaventura Netto ressalta ainda que, talvez pela pouca importância dessa proposição diante da fantástica produção de Euller, os estudos das teorias matemáticas das relações dos conjuntos discretos só vieram a se tornar objeto de maiores atenções já no século XX, com a publicação, em 1936, do primeiro livro sobre a teoria dos grafos, no qual deram a seguinte definição do que vem a ser um grafo:

> Um grafo G consiste em um grupo não-vazio de elementos, chamados vértices, e uma lista de pares não-ordenados desses elementos, chamados linhas de conexão. O grupo de vértices do grafo G é chamado grupo vertex de G, denotado por V(G), e a lista de linhas de conexões é chamada de lista de conexões de G, denotada por E(G). Se v e w são vértices de G, então uma linha de conexão de forma vw é dita como sendo uma ligação ou uma conexão de v e w. (BRAGA, M. J. C, 2005, p.42)

Analisando tal definição, nota-se que é uma definição bastante plausível, mas ao mesmo tempo usa uma linguagem bastante rebuscada, o que foge um pouco do objetivo deste trabalho no qual envolve alunos do ensino fundamental. Vamos agora introduzir os conceitos básicos sobre teoria de grafos que serão usados ao longo do texto.

## 2.1 Noções sobre Grafos

Para que o leitor conheça os termos e ferramentas utilizados neste trabalho, serão introduzidos alguns conceitos básicos de Teoria de Grafos.Esta seção foi escrita com base em (BOAVENTURA NETTO, 1996) e (JURKIEWICZ, 2005).

### 2.1.1 O que é um grafo?

Grafo é um conjunto abstrato de pontos ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos. Os pontos são chamados de vértices e os segmentos são chamados de arestas.

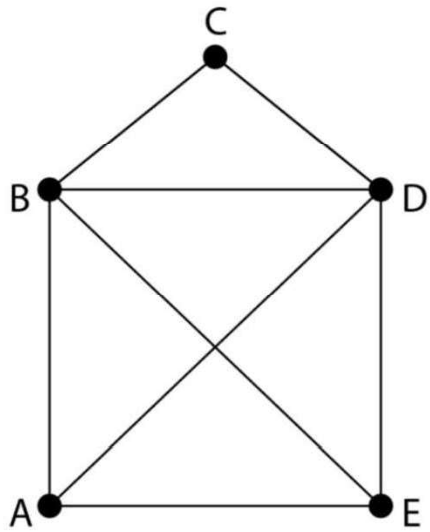



**Figura 1: Exemplo de um Grafo.**

**Fonte:Autor**

Na Figura 1, temos um grafo G representado pelo conjunto de vértices V(G) = {A, B, C, D, E} e o conjunto de arestas A(G) = {(A,B), (A,D), (A,E), (B,C), (B,D), (B,E), (C,D), (D,E)}.Muitas vezes tais conjuntos são denotados apenas por V e A, respectivamente. Por vezes, G é denotado por G(V,A), ressaltando tais conjuntos. Vértices adjacentes são vértices conectados pela mesma aresta.Por exemplo, os vértices B e C são adjacentes.Dizemos que a aresta (B,C) tem os vértices extremos B e C. Vértices não adjacentes são vértices que não estão conectados pela mesma aresta.Por exemplo, os vértices A e C não são adjacentes.Quando temos uma aresta cujos vértices extremos são um mesmo vértice, dizemos que existe um laço.

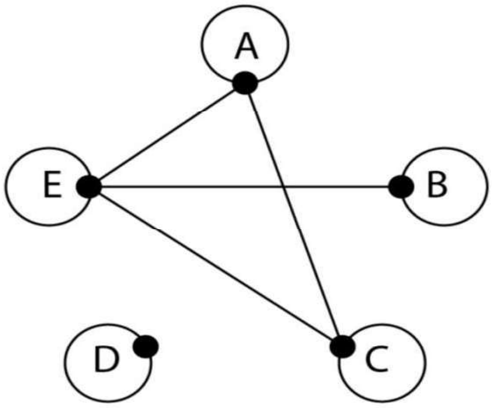



**Figura 2: Grafo com laços.**

**Fonte: Autor**

Na Figura 2 ocorrem cinco laços, pois todos os vértices estão conectados a si próprios. Arestas distintas que se conectam aos mesmos vértices são chamadas de arestas paralelas (também chamadas de arestas múltiplas).

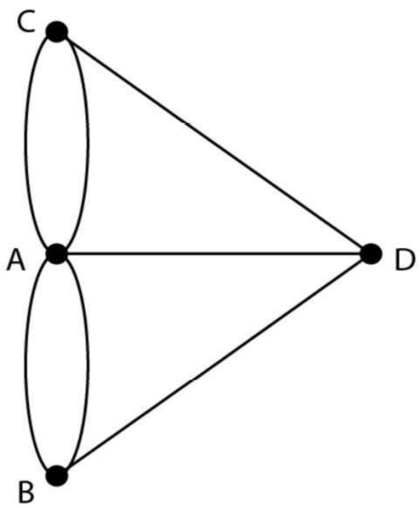



**Figura 3: Grafo com arestas paralelas.**

**Fonte: Autor**

Na Figura 3, percebemos que os vértices A e B possuem arestas paralelas. Os vértices A e C também.

### 2.1.2 Grau de um vértice d(v)

O grau de um vértice é dado pelo número de arestas que incidem nesse vértice, ou seja, que possuem uma de suas extremidades nesse vértice. Portanto, na Figura 1, temos que o vértice A tem grau 3, e representamos por d(A) = 3.Analogamente, d(B) = 4, d(C) = 2, d(D) = 4 e d(E) = 3. Há um pequeno Teorema e um Corolário com respeito a este conceito.

*Teorema:* “A soma dos graus dos vértices de um grafo G é sempre o dobro do número de arestas.”

Demonstração: Se contarmos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas. Como cada aresta tem duas extremidades (a de saída de um determinado vértice e a de chegada a outro vértice), temos, portanto, que cada aresta foi contada duas vezes.

*Corolário:* Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.

Demonstração: Supondo que tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar, logo a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas (teorema), logo é um número par.

Exemplificando: d(A) + d(B) + d(C) + d(D) + d(E) = 2.m, sendo **m** o número de arestas do grafo G. Portanto, 3 + 4 + 2 + 4 + 3 = 2.8. Nota-se também que os vértices A e E, ambos têm grau 3, ou seja, o grafo possui dois vértices de grau ímpar, o que é dito pelo corolário.

## 2.2 Tipos de Grafos

### 2.2.1 Grafo simples

São os grafos que não apresentam laços nem arestas paralelas. A Figura 4 fornece um exemplo de grafo simples. A Figura 1 também. Os grafos das Figuras 2 e 3 não são simples.

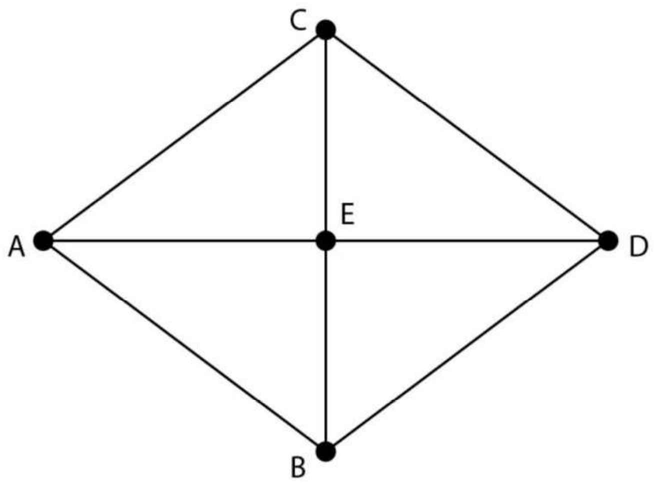



**Figura 4: Grafo Simples.**

**Fonte:Autor**

### 2.2.2 Grafo completo

É o grafo onde todo par de vértices é conectado por uma (única) aresta, que representamos por $K_n$. A Figura 5 destaca o $K_6$.

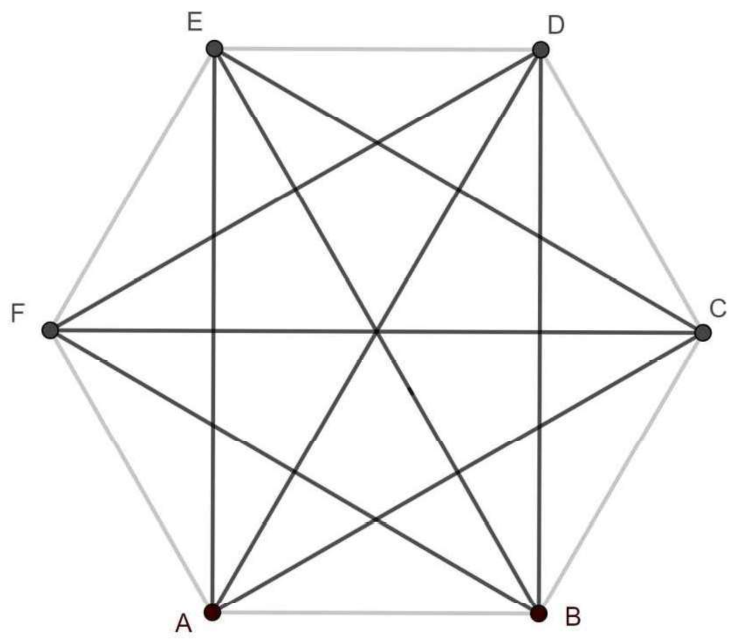



**Figura 5: Grafo Completo $K_6$.**

**Fonte: Autor**

### 2.2.3 Grafo regular

Um grafo é regular quando todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Na Figura 6 há um grafo regular, onde todos os vértices possuem grau 2 (mas não completo). Observe que o $\mathbf{K_6}$, na Figura 5, também é regular.

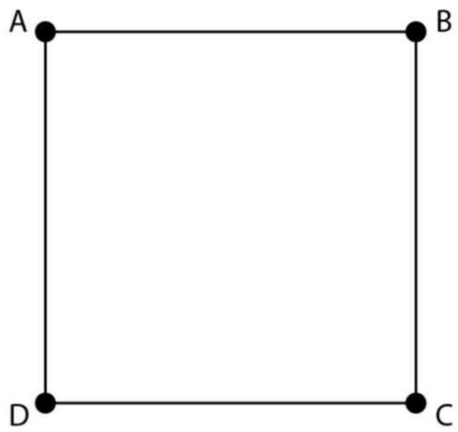



**Figura 6: Grafo regular.**

**Fonte: Autor**

### 2.2.4 Subgrafos, trilhas e caminhos

Um subgrafo$G'(V',A')$ de um grafo $G(V,A)$ é um grafo em que $V \subset V'$ e $A \subset A'$. Intuitivamente, é um grafo contido em outro grafo. Na Figura 7 podemos um subgrafo (hachurado) de um grafo à esquerda. Uma trilha é um subgrafo em que todos os vértices possuem grau par, exceto os extremos, que possuem grau 1. Uma trilha entre os vértices X e Y pode ser descrita pela sequência de vértices por onde a mesma passa começando em X até chegar a Y. Na Figura 7ao centro, temos a trilha ABCFBDE. Uma trilha pode repetir vértice, como é o caso do vértice B no exemplo. Um caminho é um subgrafo em que todos os vértices possuem grau 2, exceto os extremos, que possuem grau 1. Um caminho entre os vértices X e Y pode ser descrito pela sequência de vértices por onde o mesmo passa começando em X até chegar a Y. Na Figura 7 à esquerda, temos o caminho ABCDE. Um caminho não pode repetir vértice. Um caminho é uma trilha, mas uma trilha pode não ser um caminho.

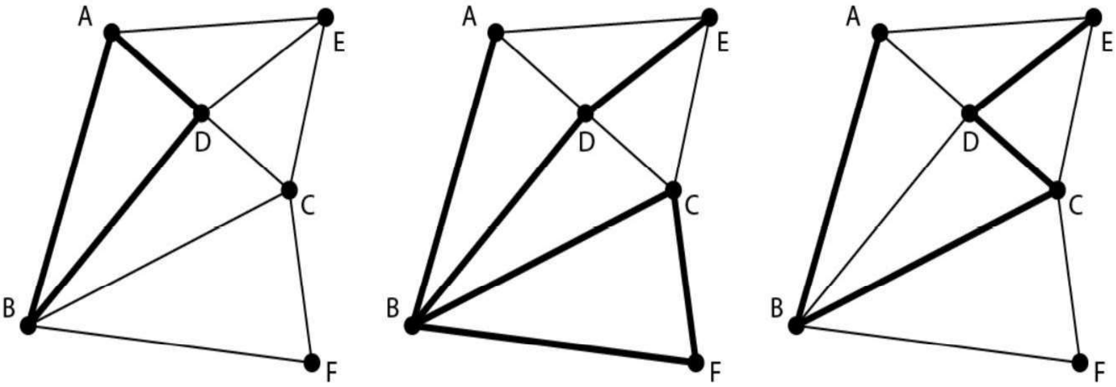



Figura 7:Um exemplo de um subgrafo (hachurado) na primeira figura à esquerda, um exemplo de uma trilha (hachurada) entre A e E descrita por ABCFBDE na figura central e um exemplo de um caminho (hachurado) entre A e E descrita por ABCDE à direita.

**Fonte: Autor**

### 2.2.5 Ciclos e circuitos

Um ciclo é um grafo conexo regular em que todos os vértices têm grau 2, representado por $C_n$, onde $n$ representa o número de vértices. Um circuito é um grafo conexo em que todos os vértices têm grau par. Por vezes, intuitivamente consideram-se ciclos os "caminhos fechados", e circuitos as "trilhas fechadas". Desta forma, podemos representar o ciclo da Figura 8 à esquerda como ABCDA, e o circuito da mesma figura à esquerda como ABDCABCDA. Repare que, no circuito, pode haver repetição de vértices em sua descrição.

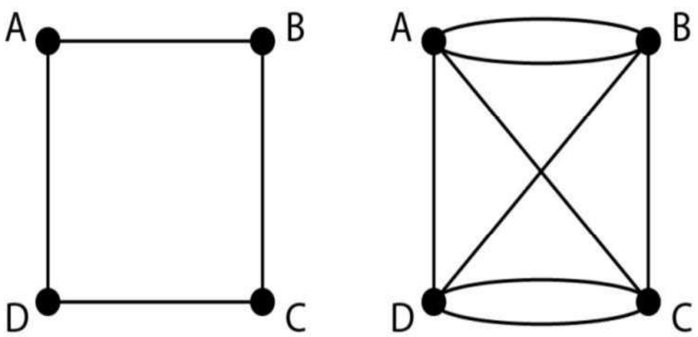



**Figura 8: O ciclo $C_4$ à esquerda e um circuito à direita.**

**Fonte: Autor**

### 2.2.6 Grafo conexo e grafo desconexo

Um grafo em que quaisquer dois vértices são ligadospor ao menos um caminho é chamado de grafo conexo.Caso tenha vértices que não sejam ligados por caminho algum, eles são ditos grafos desconexos.

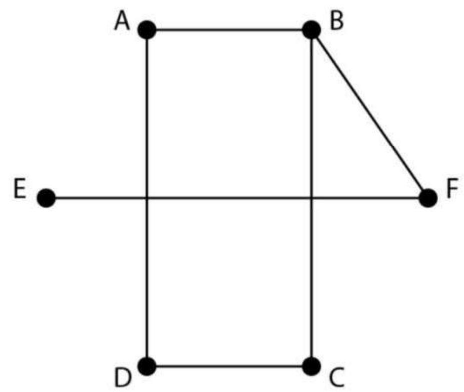



**Figura 9: Grafo Conexo.**

**Fonte: Autor**

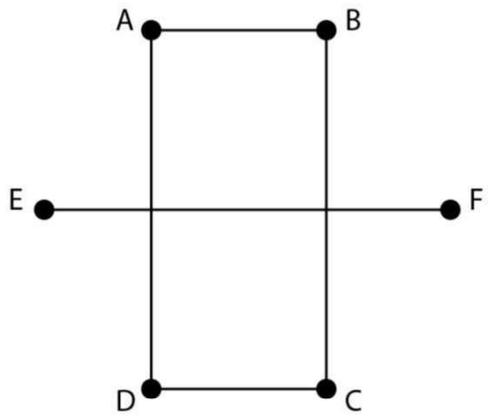



**Figura 10: Grafo Desconexo.**

**Fonte: Autor**

Na Figura 9 acima temos um exemplo de grafo conexo e na Figura 10, temos um exemplo de grafo desconexo (por exemplo, não há nenhum caminho ligando A a E).

### 2.2.7 Grafo bipartido

São grafos nos quais o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos, de tal maneira que vértices de um mesmo subconjunto não sejam adjacentes. Um grafo é dito bipartido completo quando é um grafo bipartido simples em que existem todas as ligações possíveis.

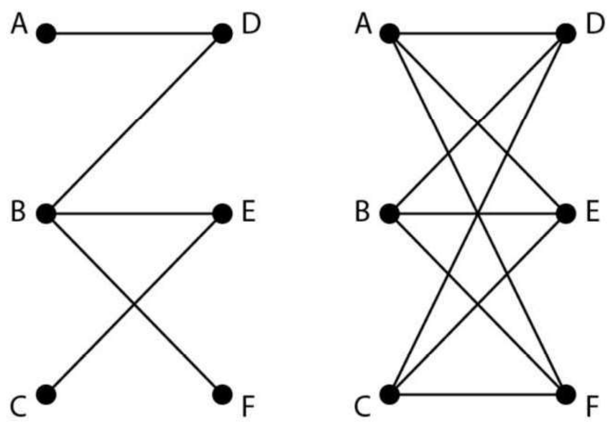



**Figura 11: Exemplo de um grafo bipartido à esquerda, e de um grafo bipartido completo à direita, o $K_{3,3}$.**

**Fonte: Autor**

### 2.2.8 Grafo valorado

Um grafo valorado é um grafo em que cada aresta tem um valor associado. Formalmente, um grafo valorado G = (V, A) consiste de um conjunto V de vértices, um conjunto A de arestas, e uma função f de A para P, onde P representa o conjunto de valores (pesos) associados às arestas.Na Figura 12 temos um tipo de grafo conexo e valorado.

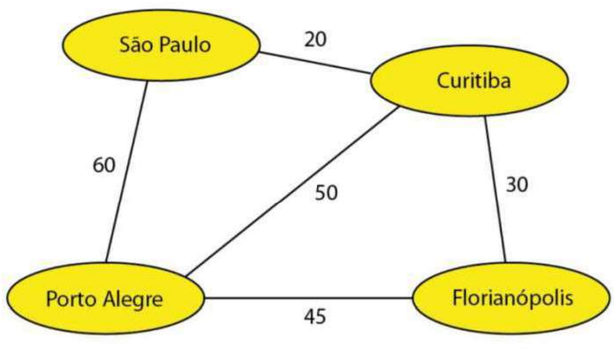



**Figura 12: Grafo valorado.**

**Fonte: http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html**

## 2.3 Circuitos eulerianos e trilhas semieulerianas

Na cidade de Konigsberg, sete pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, conforme ilustrado na Figura 13 abaixo.

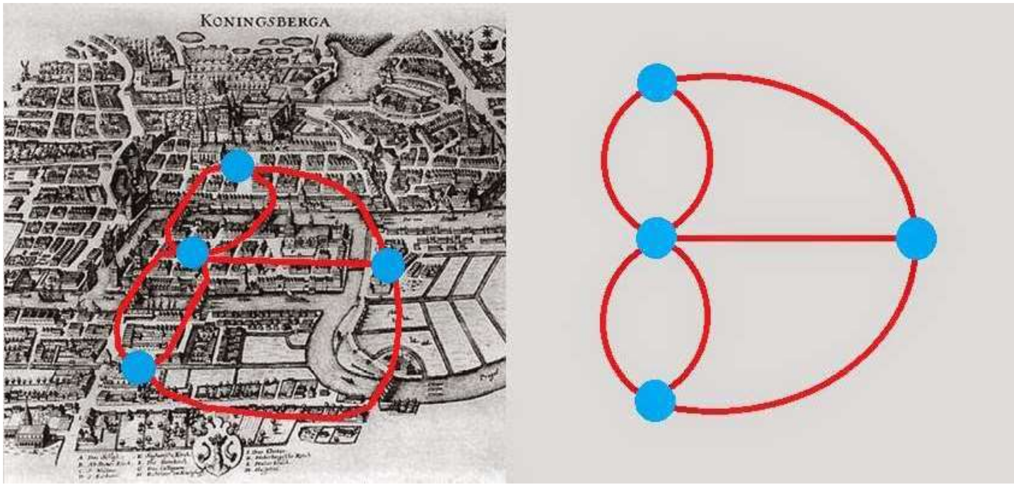



**Figura 13: Sete Pontes de Konigsberg.**

**Fonte**: http://1.bp.blogspot.com/-vamKx2VkdrI/VNIvQkE69HI/AAAAAAAABNM/lq5JbMbgRp8/s1600/koninsberg%2B1652_2.png

Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, passando uma única vez por cada uma das pontes? Modelando cada região por vértices e cada ponte por arestas, temos o grafo à direita da Figura 13. Euller fez isso em 1736, dando início à Teoria de Grafos (embora de uma forma diferente de como a conhecemos hoje). Após tentar solucionar esse problema, surgiu o seguinte teorema:

Um grafo G = (V, A) admite circuito Euleriano se, e somente se, todos os vértices admitirem grau par. Admite uma trilha semieuleriana se todos os vértices possuem grau par, exceto 2, o inicial e o final.

Se G possui m arestas, um circuito Euleriano é um circuito em G de comprimento m, ou seja, um circuito que percorre todas as arestas do grafo. Uma trilha semieuleriana é uma trilha que percorre todas as arestas do grafo.

Na Figura 14 há um exemplo à esquerda de um grafo Euleriano, cujo circuito euleriano pode ser ABCDABDCA e à direita, de um semieuleriano, cuja trilha euleriana partindo de D pode ser DAEBCABDC.

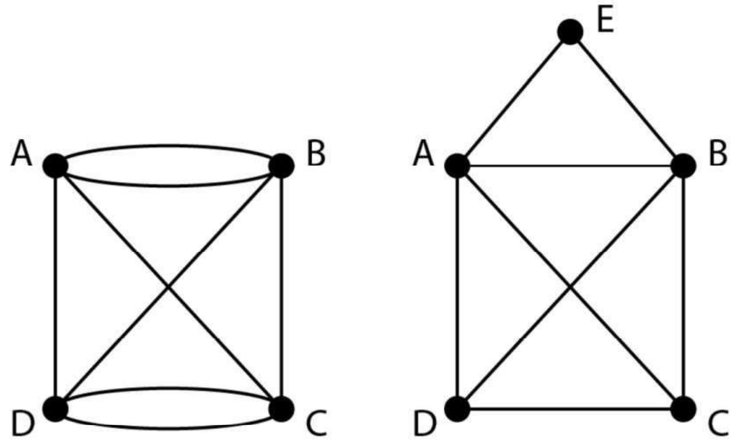



**Figura 14: À esquerda de um grafo Euleriano, e à direita, de um semieuleriano.**

**Fonte: Autor**

## 2.4 Dígrafo

É todo grafo em que as arestas têm uma orientação. Nas Figura 15 há exemplos de grafos orientados. Também é chamado de grafo dirigido.

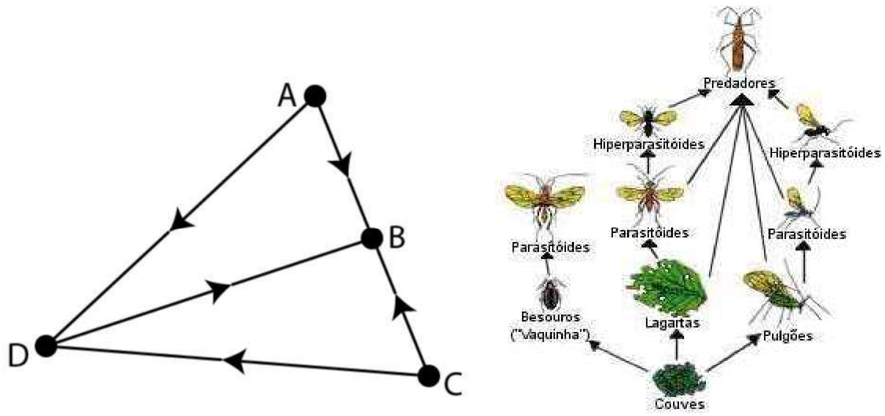



**Figura 15: Digrafosorientados. À direita, uma aplicação em Ciências.**

**Fonte:**

**http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novos_conteudos/2009/modulo_I/conteudos1b.htm**

## 2.5 Problema do caminho mais curto

O problema do caminho mais curto ou caminho mínimo se refere a um determinado deslocamento em que se leva em consideração menor custo, menor tempo ou maior capacidade. Este problema é de extrema importância, abrange uma vasta área de pesquisa devido as suas aplicações.

Na prática, este problema está relacionado com dezenas de coisas, como por exemplo: tráfego de estradas, deslocamento de pessoas, coleta de lixo, otimização de redes, problemas de roteirização (logística), entre outros. Glover et al (1985), citou algumas situações de programação que foram solucionadas pelo caminho mais curto, onde pode-se destacar os seguintes: localização, problema do caixeiro viajante (um dos mais famosos) e problema da mochila.

Para Hung e Divoky (1990), o problema do caminho mínimo busca resolver/solucionar problemas de emparelhamento, problemas de fluxo de custo mínimo e problemas de atribuição, que são aqueles que consistem em determinar o "melhor agente" à "melhor tarefa". Este tipo de problema é de certa forma bastante atraente para cientistas e investigadores, pois possui uma variedade de formas distintas, práticas, simples e eficientes de resolver problemas aparentemente bastante complexos. Outra característica importante deste é o fato de que, a partir de redes simples, podem ser criados modelos mais difíceis e extensos para serem utilizados na área de combinatória. Nada impedirá que a solução seja significativamente fácil, mas montar algum tipo de algoritmo que resolva determinado problema pode exigir concentração e empenho.

Encontrar um caminho mais curto e rentável para solucionar determinados problemas não é uma prática recente, pois historicamente Dreyfus (1969) e Schrijver (2005) comentaram sobre este fato em suas resenhas. Os problemas clássicos sobre grafos foram originados pelo problema do caminho mais curto, porém foi num esquema de labirinto que tudo começou. Trueblood (1952) na década de 50 foi quem deu início a todo este processo a respeito do caminho mais curto, pois em 1952, com a ideia de encontrar rotas alternativas, o mesmo desenvolveu o roteamento de ligações telefônicas. Durante as décadas de 40 e 50 alguns modelos de matrizes foram criados/desenvolvidos com intuito de localizar o caminho mais curto, obtendo assim uma maneira muito mais simples de identificar num grafo dirigido os nós que estão mais próximos. Estes tipos de aplicações são voltados para redes neurais e sociologia animal, e alguns investigadores merecem destaque, como Landahl e Runge (1946), Luce e Perry (1949), Lunts (1952) e Shimbel (1953).

Até o fim da década de 90, foram feitos vários estudos em relação a alguns algoritmos, aos quais foram testadas sua eficácia e aplicabilidade, onde pesquisadores como Glover Et Al (1985), Hung e Divoky (1988), Ahuja et al (1990), Cherkassky et al (1993), Zhan e Noon (1998) mereceram destaque.

## 2.6 Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra, foi concebido pelo cientista holandês Edsger Dijkstra em 1956 e publicado em 1959, este soluciona o problema do caminho mais curto num grafo dirigido ou não dirigido, com arestas de peso não negativo, esses pesos podem representar distancias, tempo, valores entre outros.

Seja G(V,A) um grafo orientado e **s** um vértice de G: Atribua valor zero à estimativa do custo mínimo do vértice **s** (a raiz da busca) e infinito às demais estimativas; agora atribua um valor qualquer aos precedentes (o precedente de um vértice **t** é o vértice que precede **t** no caminho de custo mínimo de **s** para **t**); Enquanto houver vértice aberto: – seja **k** um vértice ainda aberto cuja estimativa seja a menor dentre todos os vértices abertos; – feche o vértice **k** – Para todo vértice **j** ainda aberto que seja sucessor de **k** faça: Posteriormente some a estimativa do vértice **k** com o custo do arco que une **k** a **j**, caso esta soma seja melhor que a estimativa anterior para o vértice **j**, substitua-a e anote **k** como precedente de **j**.

**Problema sugerido para melhor compreensão do leitor:** achar o menor caminho de c até f.

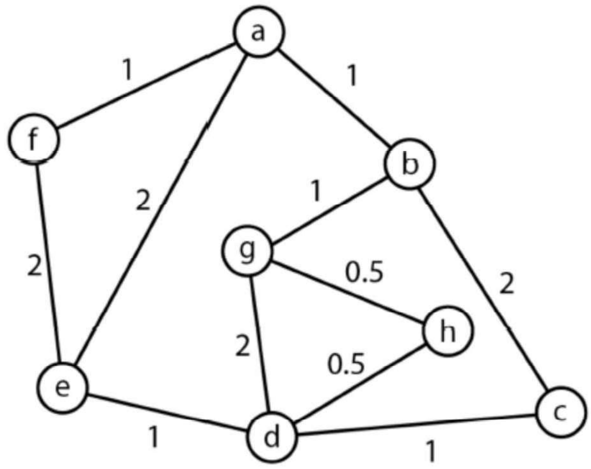



**Figura 16: Grafo com arestas valoradas.**

**Fonte: Autor**

Para encontrar o menor caminho do vértice **c** a cada um dos demais vértices será feito o seguinte: as arestas incidentes a **c** são **cb** e **cd**. Elas devem ser marcadas em vermelho, e os vértices finais rotulados em vermelho com os rótulos respectivamente **(2,c)** e **(1,c)**, representando na primeira coordenada o comprimento do caminho total começando em **c**, e na segunda coordenada o vértice antecessor no caminho. A figura 17 representa o que foi descrito.

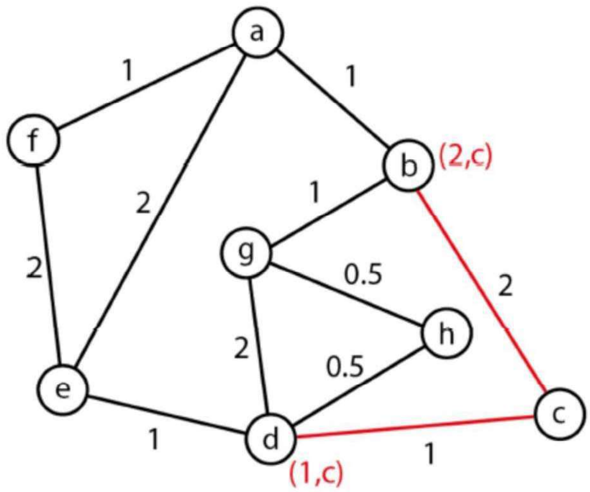



**Figura 17: Grafo representativo do passo 1 (Algoritmo de Dijkstra).**

**Fonte: Autor**

Como o mais próximo é o vértice **d**, deve-se continuar o processo a partir de **d**.As novas arestas incidentes a **d** são **de**,**dg** e **dh**. Elas devem ser marcadas. Seus vértices finais são **e**, **g** e **h**, e devem ser rotulados por **(2,d)**, **(3,d)** e **(1.5,d)**, onde 2 = 1 + 1 é o comprimento do caminho total de **c** até **e**, 3 = 1 + 2 é o comprimento do caminho total de **c** até **g** e 1.5 = 1 + 0.5 é o comprimento do caminho total de **c** até **h**. A Figura 18 representa o que foi descrito.

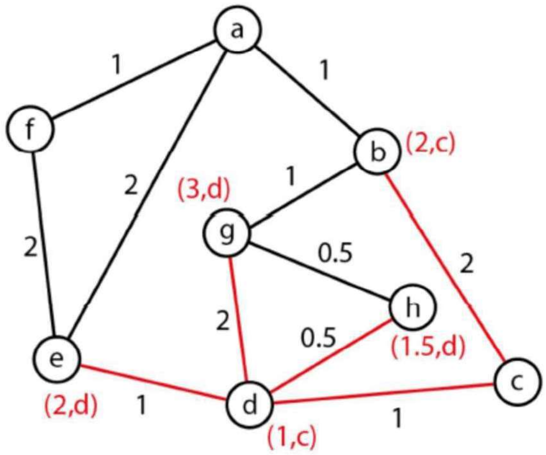



**Figura 18: Grafo representativo do passo 2 (Algoritmo de Dijkstra).**

**Fonte: Autor**

Como o mais próximo é o vértice **h**, deve-se continuar o processo a partir de **h**.A nova aresta incidente a **h** é **hg.** Já há um caminho de c até g, de comprimento 3. Ao marcarmos a aresta **hg**, o caminho passa a ser 1.5 + 0.5 = 2, o que melhora o caminho que já existia. Então a aresta **dg** deve ser desmarcada, e a aresta **hg** marcada. O vértice **g** deve ser rotulado agora por **(2,h).** A Figura 19 descreve o que foi escrito.

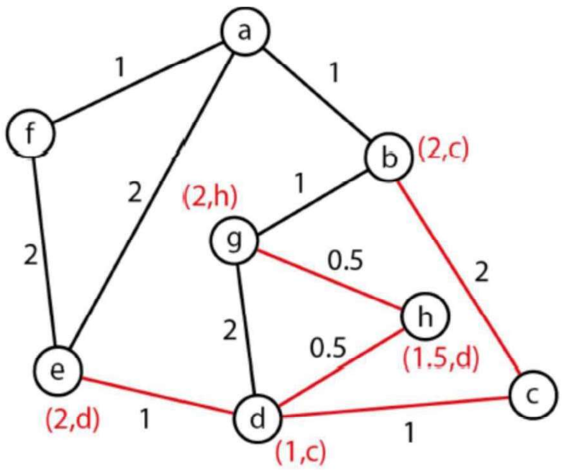



**Figura 19: Grafo representativo do passo 3 (Algoritmo de Dijkstra).**

**Fonte: Autor**

Como todos os vértices finais estão a uma distância 2 de **c**, tanto faz qual se escolhe para o próximo passo; pode-se escolher **b.** As novas arestas incidentes a **b** são **bg** e **ba**. A aresta **bg** criaria um caminho de comprimento 3, o que não melhora o comprimento do caminho de **c** até **g**, que é atualmente 2. Então **bg** não é marcada. A aresta **ba** é marcada, e é adicionado o rótulo **(3,b)** ao vértice **a.** A Figura 20 representa o que foi descrito.

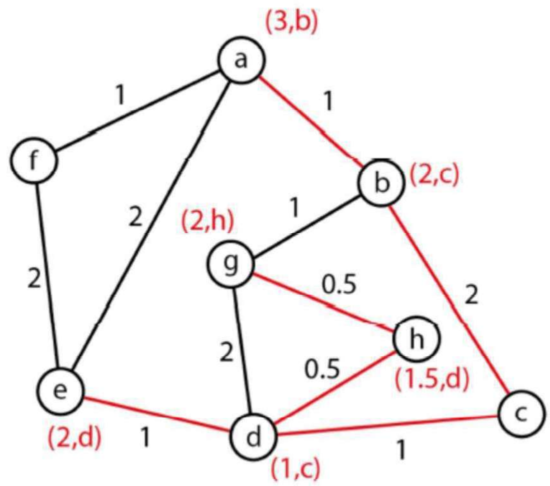



**Figura 20: Grafo representativo do passo 4 (Algoritmo de Dijkstra).**

**Fonte: Autor**

Como o mais próximo agora é o vértice **e**, deve-se continuar o processo a partirde **e.** As novas arestas incidentes a **e** são **ea** e **ef.** A aresta **ea** produziria um caminho de **c** até **a** de comprimento 4, e não melhora o caminho que já existe, que é igual a 3. Logo **ea** não é marcada. A aresta **ef** deve ser marcada e o rótulo de **f** deverá ser **(4,e).** A Figura 21 mostra o que foi escrito.

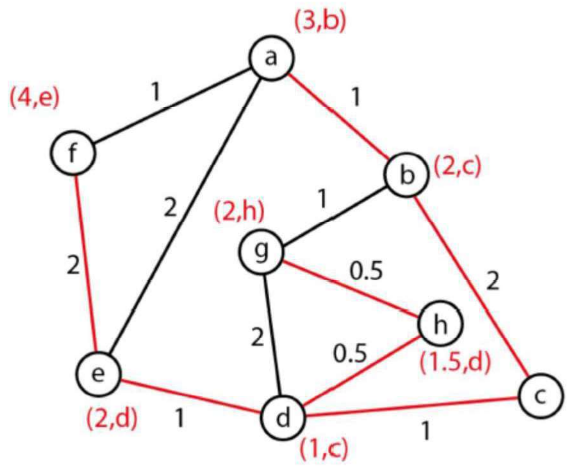



**Figura 21: Grafo representativo da solução encontrada (Algoritmo de Dijkstra).**

**Fonte: Autor**

Repare que o vértice final mais próximo agora é o **a**, e a aresta **af** não deve sermarcada, então o procedimento está concluído. O subgrafo em vermelho representa aárvore de menores caminhos partindo de **c**.

## 2.7 Grafos no Ensino Básico

Nesta seção, veremos que a experiência feita neste trabalho não foi a única sobre tal teoria. Desde já apresentam-se aos leitores outros dois trabalhos envolvendo o mesmo tema, aplicados ao ensino fundamental.

Um projeto como este que se pode destacar é a experiência desenvolvida por Alan Marcelo de Oliveira da Silva, hoje mestre, utilizando em seu trabalho o seguinte título: Grafos: Uma experiência no Ensino Fundamental. Na época, estruturou o trabalho baseando-se no cotidiano dos discentes, despertando desta forma uma maior motivação e considerado interesse do seu público alvo pelo estudo da matemática de maneira breve e simples.

O outro trabalho a ser destacado foi feito por Fábio da Rocha Costa. Ele desenvolveu tal experimento para obter o título de mestre pela mesma instituição e com o mesmo orientador que Alan, com a diferença de que Fábio utilizou uma área específica de Grafos: a Coloração de vértices. O título de seu trabalho foi: “Coloração em Grafos: Uma Experiência no Ensino Fundamental”. A experiência foi feita mais ou menos nos mesmos moldes do anterior, onde foram aplicados dois questionários, um vez antes das atividades propostas, questionário motivacional, e outro depois, questionário de satisfação.

Fábio utilizou em suas atividades problemas envolvendo o raciocínio lógico. Um problema bastante conhecido que foi proposto por ele é o de colorir o mapa do Brasil com quatro cores distintas, mostrando que o Teorema das quatro cores realmente é válido.

O melhor da experiência ficou para parte prática, onde o mestrando levou seus alunos para uma quadra de esportes e desenvolveu um dos problemas propostos em sala de aula naquele espaço, onde os alunos serviram de vértices e barbantes eram arestas.

# 3 METODOLOGIA

Nesta etapa do projeto será fundamentada a metodologia escolhida para a realização do trabalho, mostrando os sujeitos da pesquisa, a descrição da metodologia de pesquisa, a descrição das aplicações do questionário motivacional e dos testes (primeira e segunda etapa), e do questionário final para analisar o nível de satisfação dos alunos.

## 3.1 Sujeitos da Pesquisa

Para realizar a experiência foram utilizadas quatro aulas de Matemática, cada uma composta por dois tempos de cinquenta minutos, com aproximadamente 60 alunos com idades entre 12 e 14 anos. Isto ocorreu nos meses de novembro e dezembro de 2017, em duas turmas, uma do sétimo e outra do oitavo ano de uma escola da rede municipal do Rio de Janeiro, localizada no bairro de Curicica, em Jacarepaguá.

## 3.2 Metodologia da Pesquisa

Neste trabalho foi realizado um estudo de caso.Na primeira e na segunda aulas foi aplicado um questionário motivacional inicial (adaptado do Questionário de Gontijo, 2007) e um teste envolvendo questões de raciocínio lógico (Teste 1), com questões que os alunos conseguiram resolver com base no currículo regular. Tais questões também poderiam ser resolvidas através de técnicas de Caminhos em Grafos, mas os alunos ainda não as conheciam nesta etapa. Após essas avaliações, alguns momentos foram dedicados ao ensino de conceitos básicos de Grafos e técnicas simples de resolução de problemas por Caminhos em Grafos.Nas aulas finais,foi aplicado o Teste 2 (igual aoTeste 1), onde os alunos já poderiam optar por usar técnicas ensinadas durante as aulas para resolver as questões. Para finalizar esse trabalho realizado, foi feito um questionário em moldes similaresao questionário inicial, onde pudemos analisar o grau de satisfação dos discentes em aprender sobre Caminhos em Grafos.

## 3.3 Descrição das aulas

Nesta etapa do trabalhoserá descritoo passoapasso de cada aula, mencionando sempre a sequência didática utilizada para aplicações dos testes e dos questionários que são objetos de nossa pesquisa.

### 3.3.1 Aula 1: Questionário Inicial e Introdução

Um dos nossos objetivos, neste primeiro encontro, foi identificar o perfil dos alunos e suas relações com resoluções de problemas a partir de um questionário motivacional (adaptado do questionário de Gontijo (2007)).Este questionário tem por objetivo aferir o interesse dos alunos em estudar, principalmente estudar Matemática, colocando as seguintes respostas para cada pergunta formalizada: (1) nunca; (2) raramente; (3) às vezes; (4) frequentemente; (5) sempre; os outros objetivos deste encontro foram:começar a apresentar ideias de grafos; começar a mostrar a utilidade da Teoria de Grafos, esse importante ramo da Matemática, através de uma noção intuitiva. A Figura 22 apresenta um quadro desta aula.

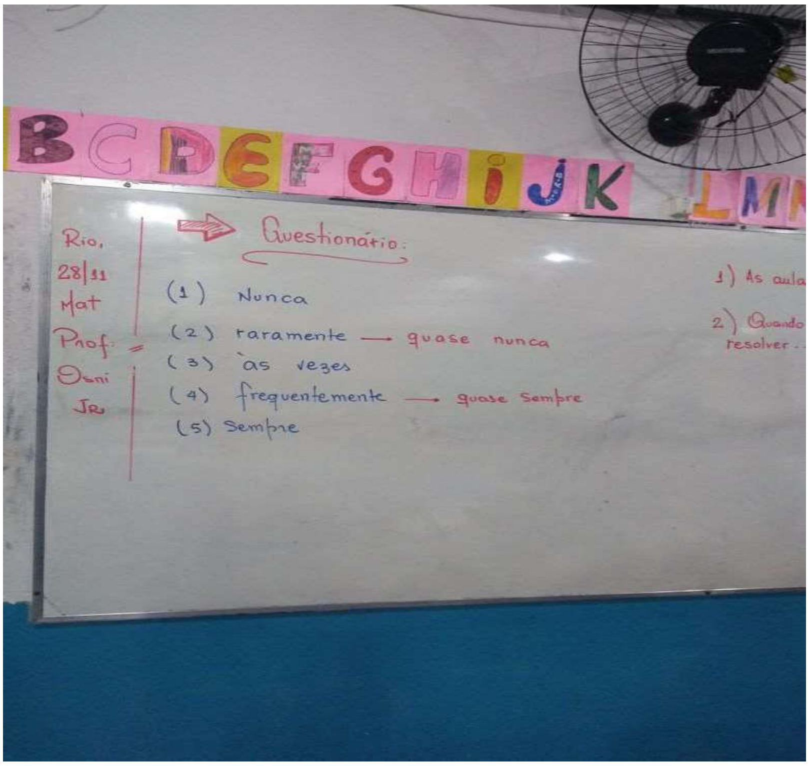



**Figura 22: Foto explicando sobre o que fazer no Questionário Motivacional**

**Fonte: Autor**

Essa primeira aula transcorreu bem e foi até uma surpresa, pois os alunos participaram mais do que havia sido imaginado. Surgiram muitas dúvidas e questionamentos durante a aplicação do questionário e tudo foi devidamente explicado. As primeiras perguntas que surgiram em relação ao questionário foram as de sempre: "Para que serve isso?","Professor,isto vale pontos?" e"Professor, se eu disser aqui que as aulas de Matemática são as piores, o senhor vai me reprovar?"Obviamente, eles foram incentivados a proceder com sinceridade. O questionário motivacional aplicado foi o seguinte:

Questionário Motivacional:

**1°) Satisfação pela Matemática:**

**Quadro1 - Satisfação pela matemática**

| | Fator 1 – Satisfação pela Matemática | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 1 | As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas. | | | | | |
| 2 | Quando me pedem para resolver problemas de matemática, fico nervoso (a). | | | | | |
| 3 | Tenho muita dificuldade para entender matemática. | | | | | |
| 4 | Matemática é “chata” | | | | | |
| 5 | Aprender matemática é um prazer | | | | | |
| 6 | Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas | | | | | |
| 7 | Tenho menos problemas com matemática do que com as outras disciplinas | | | | | |
| 8 | Consigo bons resultados em matemática | | | | | |

**2°) Jogos e desafios**

**Quadro2 - Jogos e desafios**

| | Fator 2 – Jogos e Desafios | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 9 | Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio. | | | | | |
| 10 | Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico. | | | | | |
| 11 | Procuro relacionar a matemática aos conteúdo das outras disciplinas | | | | | |
| 12 | Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de matemática para meus amigos e familiares. | | | | | |

**3°) Resolução de problemas**

Quadro3 - Resolução de problemas

| | Fator 3 – Resolução de problemas | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 13 | Gosto de resolver os exercícios rapidamente. | | | | | |
| 14 | Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes. | | | | | |
| 15 | Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de matemática. | | | | | |
| 16 | Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução. | | | | | |
| 17 | Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo. | | | | | |

**4°) Aplicações no Cotidiano**

**Quadro4 - Aplicações no cotidiano**

| | Fator 4 – Aplicações no Cotidiano | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 18 | Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos. | | | | | |
| 19 | Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo. | | | | | |
| 20 | Faço desenhos usando formas geométricas | | | | | |
| 21 | Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola | | | | | |
| 22 | Faço “continhas de cabeça” para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos. | | | | | |

**5°) Hábitos nos estudos**

**Quadro5 - Hábitos de estudo**

| | Fator 5 – Hábitos de Estudo | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 23 | Estudo matemática todos os dias durante a semana. | | | | | |
| 24 | Realizo as tarefas de casa que o professor de matemática passa. | | | | | |
| 25 | Estudo as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula. | | | | | |
| 26 | Além do meu caderno, eu costumo estudar matemática em outros livros para fazer provas e testes. | | | | | |

**6°) Interação na sala de aula**

**Quadro6 - Interação na sala de aula**

| | Fator 6 – Interação na sala de aula | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 27 | Faço perguntas nas aulas de matemática quando eu tenho dúvidas. | | | | | |
| 28 | Relaciono-me bem com meu professor de matemática. | | | | | |

**7°) Sua família e sua casa**

**Quadro7 - Sua família e sua casa**

| | Fator 7 – Sua família e sua casa | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 29 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre os estudos. | | | | | |
| 30 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre a escola. | | | | | |
| 31 | Com que frequência seus pais ou responsáveis obrigam você ir às aulas | | | | | |
| 32 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre seus amigos | | | | | |

**33. ATÉ QUE SÉRIE SUA MÃE/MADRASTA ESTUDOU?**

(A) Nunca estudou
(B) Entre a 1ª e 4ª série do Ensino Fundamental (antigo primário)
(C) Entre a 5ª e 8ª série do Ensino Fundamental (antigo ginásio)
(D) Ensino Fundamental completo (antigos primário e ginásio)
(E) Ensino Médio incompleto (antigo 2º grau)
(F) Ensino Médio completo (antigo 2 º grau)
(G) Começou, mas não concluiu o Ensino Superior
(H) Completou o Ensino Superior
(I) Pós-graduação completa ou incompleta
(J) Não sei.

**34. ATÉ QUE SÉRIE SEU PAI/PADRASTO ESTUDOU?**

(A) Nunca estudou
(B) Entre a 1ª e 4ª série do Ensino Fundamental (antigo primário)
(C) Entre a 5ª e 8ª série do Ensino Fundamental (antigo ginásio)
(D) Ensino Fundamental completo (antigos primário e ginásio)
(E) Ensino Médio incompleto (antigo 2º grau)
(F) Ensino Médio completo (antigo 2 º grau)
(G) Ensino Superior incompleto
(H) Ensino Superior completo
(I) Pós-graduação completa ou incompleta
(J) Não sei

Após a aplicação do questionário,falou-se brevemente sobre a Teoria de Grafos. Falou-se sobre o problema das pontes de Konigsberg, e acerca disso vieram as seguintes interrogações: "Professor, tu conseguirias resolver esse problema?","As pessoas que estudaram o caso à época conseguiram resolver?" e "Professor, esse problema tem solução?"A ideia era justamente despertar o interesse dos alunos, e tudo superou as expectativas; a participação dos alunos foi grande, e possibilitou ao professor até mesmo estimulá-los com outras. Por exemplo: quando um aluno perguntou se era possível resolver o problema das “Pontes de Koningsberg”, a resposta foi a seguinte: "Você acha que é possível? Analisa, e traz na próxima aula, ok?". As perguntas dos alunos são sempre importantes, pois a partir delas podemos perceber quais os tipos de dúvidas dos mesmos, e com isso analisar a melhor maneira de saná-las.

Nessa primeira aula, foi utilizado um roteiro metodológico mais plausível para o entendimento dos problemas que ainda seriam propostos nas próximas aulas, pois foi montada a introdução visando a construção de novos conceitos relacionados à Teoria de Grafos.

### 3.4 Aula 2: Teste (Primeira aplicação)

Nesta segunda aula foi dada uma folha para cada aluno contendo quatro atividades que poderiam ser resolvidas com raciocínio lógico e com o conteúdo que os alunos aprenderam no currículo normal, mas que seriam mais facilmente resolvidas com técnicas de Teoria de Grafos.Foram disponibilizados vinte minutos para a resolução das mesmas. Neste momento os alunos não sabiam e nem conheciam ainda as técnicas e as ferramentas que a Teoria de Grafos oferece para resolver determinados problemas. Após esta primeira etapa da aula,começou a segunda parte,que consistia em apresentar o básico sobre grafos: fazer com que os alunos conseguissem identificar a quantidade de arestas, vértices e laços de um grafo; possibilitar ao discente identificar os diferentes tipos de grafos e mostrar aos mesmos que os grafos que contêm o $K_5$(grafo completo com cinco vértices) e o $K_{3,3}$(grafo bipartido completo com três vértices de cada lado), terão sempre cruzamento de arestas.

O Teste 1 está descrito a seguir (as Figuras 23 e 24 apresentam quadros desta aula):

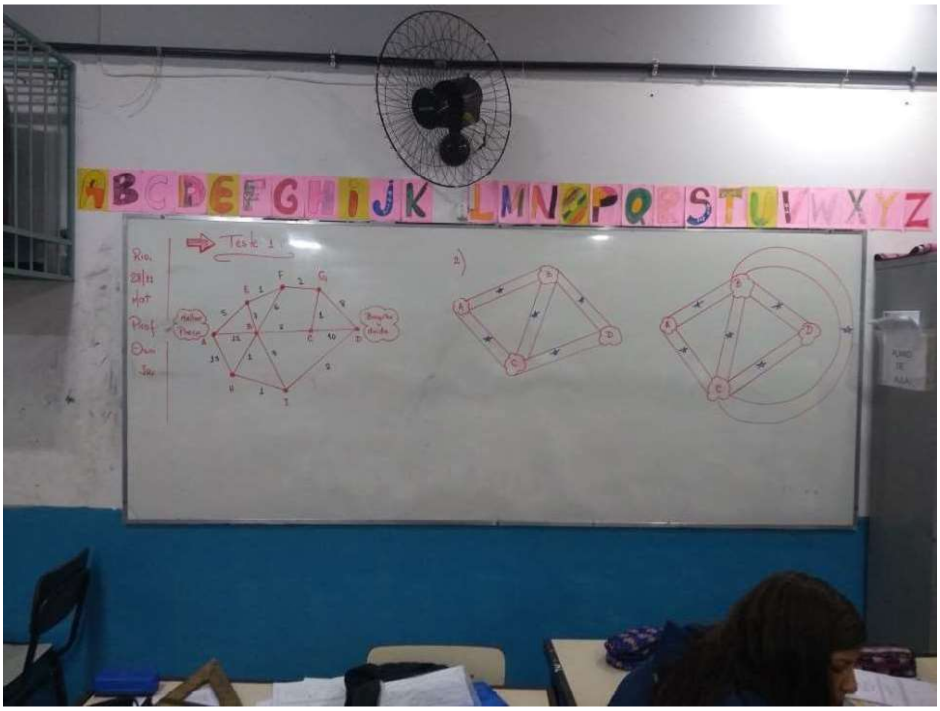



**Figura 23: Foto das questões 1 e 2 do teste (primeira etapa)**

**Fonte: Autor**

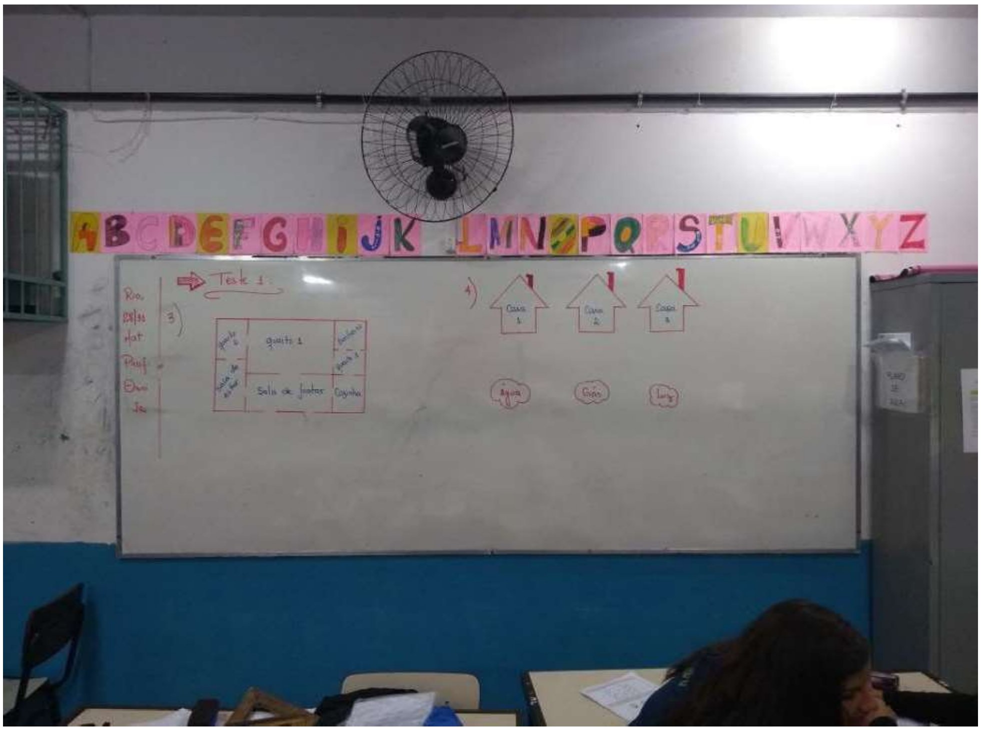



**Figura 24: Foto das questões 3 e 4 do teste (primeira etapa)**

**Fonte: Autor**

**Teste 1**

**Atividade 1:** No ponto A, localiza-se uma autopeça Melhor Preço, onde suas entregas são feitas pelo motoboy Cláudio Charuto. Ele precisa entregar encomendas na oficina Bagulho Doido, localizada no ponto D. As ligações representam as ruas e os pontos representam as esquinas. O valor dado a cada ligação é o tempo necessário (em minutos) para o percurso entre uma esquina e outra devido ao trânsito. Por exemplo, são necessários 2 minutos para ir da esquina F até a esquina G. Qual é o caminho que Cláudio Charuto terá que percorrer para entregar mais rapidamente as encomendas na oficina Bagulho Doido, e qual seria o tempo total deste percurso?(A Figura 25 está associada a esta atividade).

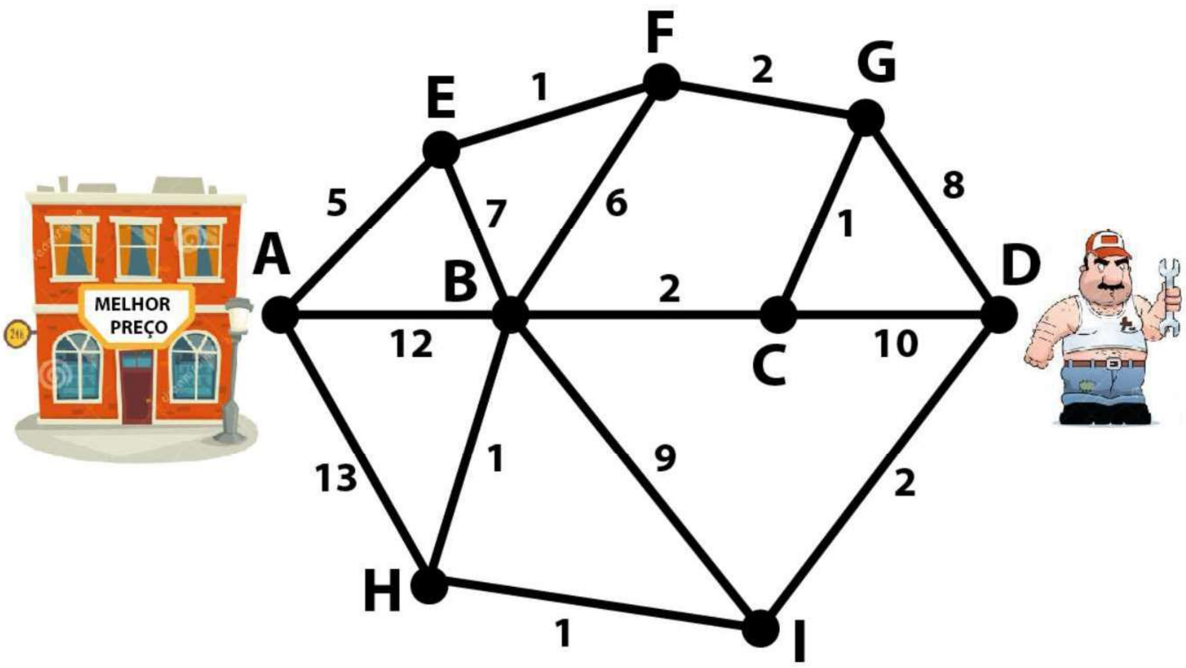



**Figura 25: Figura referente à atividade 1 do teste.**

**Fonte:<pt.dreamstime.com/ilustra%C3%A7%C3%A3o-stock-grupo-da-constru%C3%A7%C3%A3o-de-loja-dos-desenhos-animados-isolado-no-branco-ilustra%C3%A7%C3%A3o-do-vetor-image68487830>, <pt.dreamstime.com/fotos-de-stock-mecânico-dos-desenhos-animados-image16384253>, com adaptações do autor.**

**Atividade 2:(**SILVA,2015, p.58**)** Num jogo de videogame, o personagem deve pegar todas as estrelas para passar de fase. Porém, ele só pode passar pelas pontes uma única vez, pois logo após pisar nas pontes elas caem, como na Figura 26 abaixo:

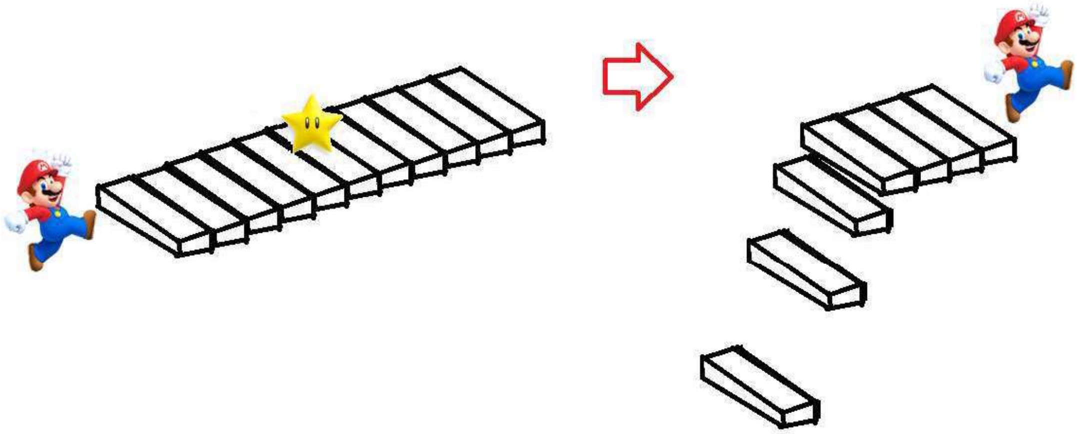


**Figura 26: Figura referente à atividade 2 do teste.**

Fonte: **SILVA,2015, p.58**

Nas Figuras 27 e 28 abaixo, o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos as pontes para recolher as estrelas. Mas, uma vez passando pela ponte, ela se destrói, não tendo como voltar ao ponto anterior. Qual é o melhor caminho para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

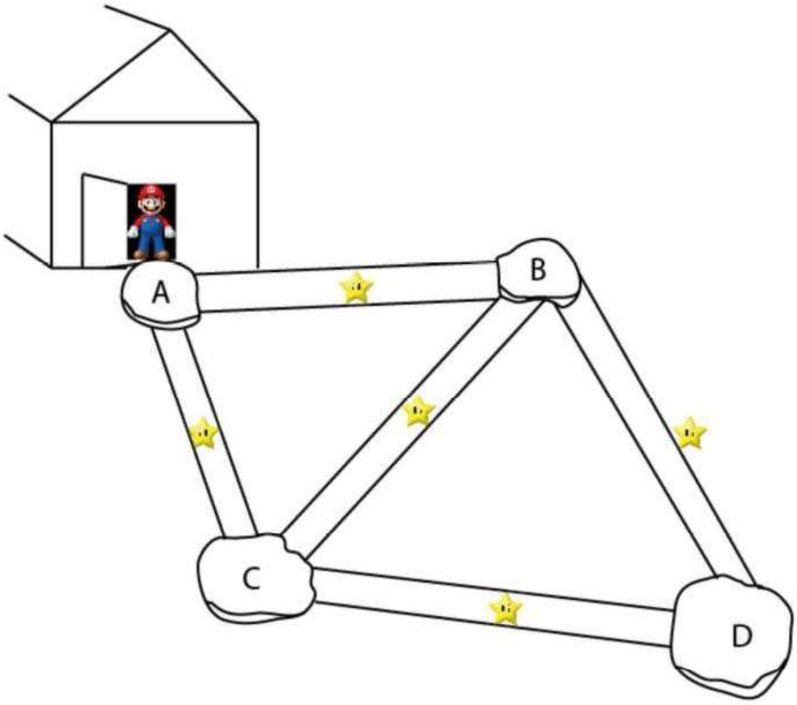



**Figura 27: Figura referente à atividade 2 do teste.**

**Fonte:SILVA,2015, p.58**

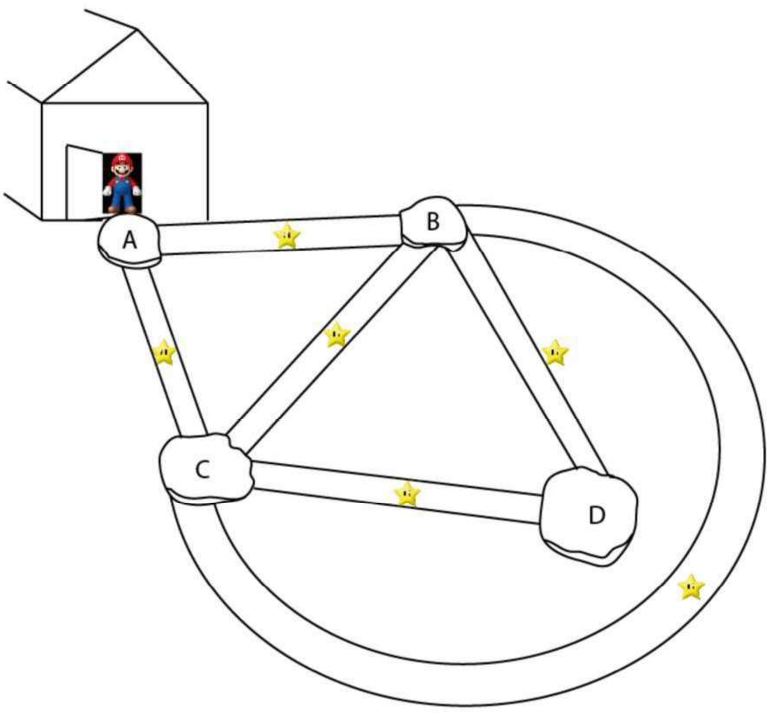



**Figura 28: Figura referente à atividade 2 do teste.**

**Fonte: SILVA,2015, p.58**

**Atividade 3:**No desenho abaixo tem-se a planta da casa de Jéssica Sabrina; ela se localiza no lado de fora da casa, e deseja entrar em sua casa, passar por todas as portas e sair dela novamente, sabendo que toda vez que ela passa por uma porta a mesma se fecha e não tem como voltar por ela. Dada esta situação,Jéssica Sabrina conseguirá fazer o que deseja? Justifique sua resposta. A Figura 29 refere-se a esta atividade.


**Figura 29: Figura referente à atividade 3 do teste.**

**Fonte: Autor**

**Atividade 4:**Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L) e gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como vocêresolveria esse problema? (A Figura 30 refere-se a esta atividade).

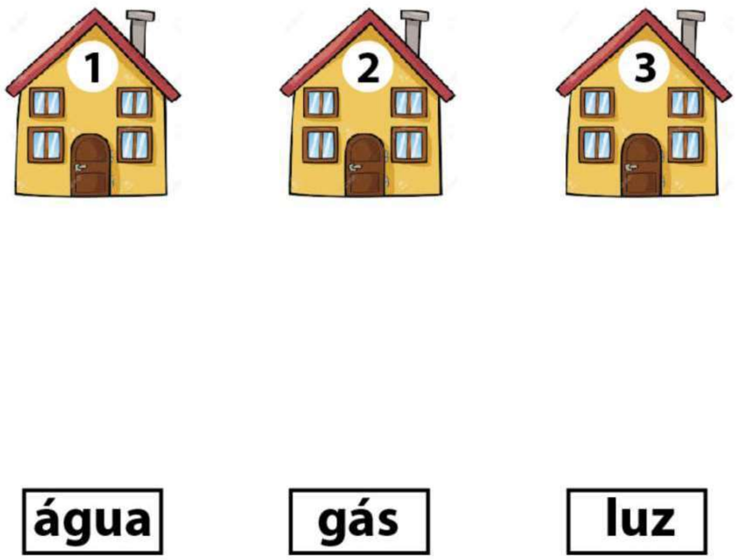



**Figura 30: Figura referente à atividade 4 do teste.**

**Fonte: <www.barewalls.com/art-print-poster/funny-house_bwc7440834.html>, com adaptações do autor**

As atividades foram preparadas de forma que os alunos não se desmotivassem durante as aulas. A primeira atividade era sobre o algoritmo de Dijkstra, onde os mesmos deveriam encontrar o caminho mais rápido para ir da loja de autopeças até a oficina. Procurou-se utilizar na questão nomes que poderiam chamar a atenção dos educandos. À medida que os alunos liam as questões, ouviam-se risos e comentários entre eles próprios.Entretanto, percebia-se que o objetivo estava sendo alcançado, e cada vez mais eles se interessavam pela situação problema que estava sendo proposta aos mesmos.

Na atividade 2, a situação proposta foi sobre um jogo de vídeo-game muito famoso, o *Mario Bros*. Havia duas situações onde o personagem deveria passar pelas pontes uma única vez (pois após passar por cada ponte ela desmoronava), e retornar ao ponto inicial. A primeira situação é impossível, pois, para isso ocorrer, os vértices obrigatoriamente deverão ter grau par.A segunda situação é possível por representar um grafo Euleriano.

Na atividade 3, trata-se da planta de uma casa.Uma pessoa está fora da casa, e a mesma deve passar por todos os cômodos e portas uma única vez (pois assim que ela passa pela porta, a mesma se fecha em definitivo), retornando ao ponto inicial, que é na parte externa da casa. Tal atividade é impossível, pois o grafo associado possui vértice com grau ímpar.

Para finalizar o teste, foi inserido um problema antigo conhecido pelas crianças. Consiste em levar água, luz e gás para as três casas através de ligações, sendo que não é possível cruzar as ligações. Problema também impossível, por se tratar de um grafo bipartido completo$K_{3,3}$. Nessa atividade os alunos tiveram mais dificuldades que nas atividades anteriores.Após discutirem entre eles, chegaram às suas conclusões.As atividades dessa segunda aula foram uma boa estratégia para estimular a criatividade e a interação dos alunos, além de desenvolver o potencial de raciocínio dos alunos.

### 3.5 Aula 3: Técnicas utilizadas através da Teoria de Grafos

O objetivo dessa aula foi apresentar ao aluno os conceitos e resultados envolvendo ciclos e caminhos, possibilitando aos mesmos resolver de problemas de menor caminho pelo algoritmo de Dijkstra, e dar noções sobre grafos Eulerianos e Semieulerianos. A Figura 31 retrata um quadro desta aula.

No início da aula foi mostrado aos alunos o conceito de ciclo, foram dados exemplos e foi falado sobre grafos fechados em geral. Foram usados exemplos onde um vértice era escolhido,realizava-se um percurso passando por todos as arestas uma única vez e retornava-se ao vértice inicial. Foi explicado que, quando o grafo apresentava todos os vértices com grau par, sempre seria possível tal situação.Após isso, voltou-se a falar sobre as pontes de Konigsberg (a Figura 32 retrata um momento desta aula); primeiramente foi contada toda a história referente às sete pontes.Foi explicada sua localização, a localização das ilhas, a destruição de duas delas durante a Segunda Guerra Mundial e a ideia de Leonard Euller em modelar através de grafos para resolver o antigo problema que sempre esteve em discussão: a possibilidade de atravessar todas as pontes, sem repetir nenhuma, e voltar ao ponto de partida. Euller mostrou que isso era impossível. Logo após essa explanação introdutória, foi desenhado o grafo representativo desse problema no quadro, e foi feita a seguinte pergunta aos educandos: “Esse grafo lembra algo para vocês?” Neste momento eles ficaram por alguns minutos calados e pensativos. Logo em seguida vieram as seguintes indagações: “Professor são aquelas pontes?” Foi dito a eles que estavam corretos, que representavam sim as pontes de Konigsberg.

Posteriormente, um novo contato foi feito com o aluno que na aula 1 havia perguntado sobre a solução. Foi explicada uma solução para o problema.

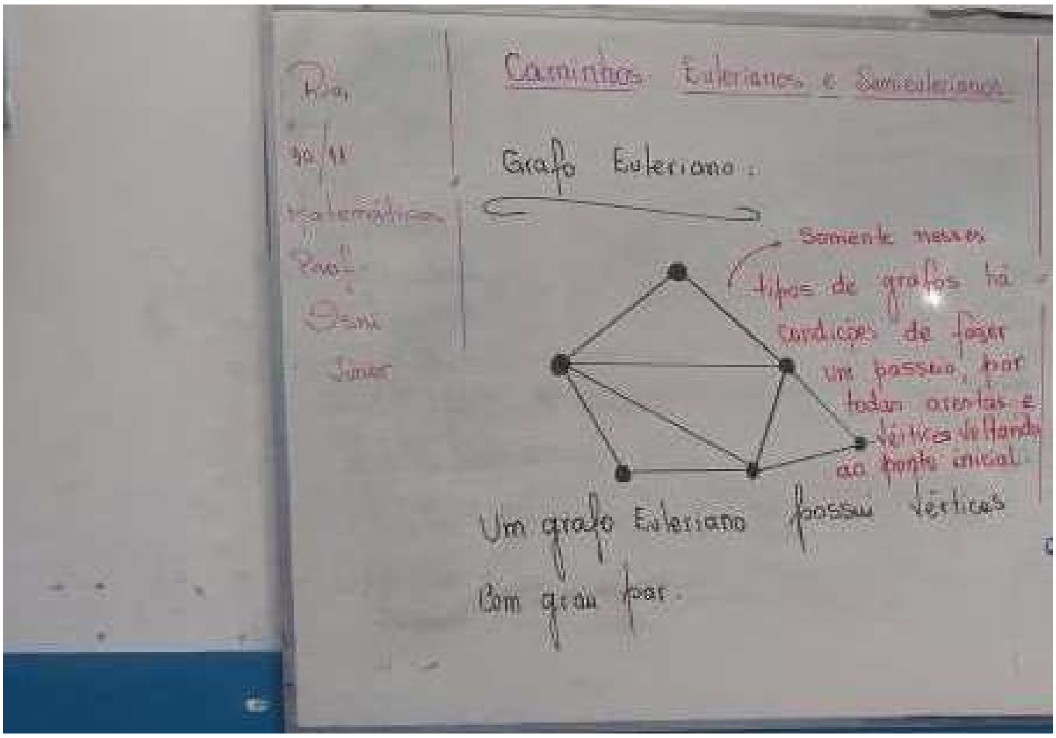



**Figura 31: Foto da aula sobre Caminhos Eulerianos e Semieulerianos**

**Fonte: Autor**

Após passar para os discentes toda a história a respeito das pontes de Konigsberg,falou-se sobre grafos Semieulerianos (a Figura 33 retrata um quadro desta aula).Para isso,foi desenhado no quadro o grafo que representa uma casinha e foi feita a pergunta: “Por que esse grafo não é Euleriano?” Prontamente veio a resposta de uma aluna: “Professor os dois pontos da parte de baixo possuem três linhas saindo dele.” Foi respondido que tal observação foi perfeita, pois de dois vértices da base partem três arestas. Logo em seguida, foi inserida mais uma aresta, com outra cor de caneta, conectando os vértices da base e foi feita uma nova pergunta: “E agora, esse grafo representado é Euleriano? Por quê?” A mesma aluna, bem atenta, respondeu: “É sim professor, porque agora partem quatro linhas dos vértices da base.” Foi dito que estava mais uma vez perfeita tal observação, e essa parte foi finalizada dizendo que grafos desse tipo são chamados de grafos Semieulerianos, grafos que possuem apenas dois vértices de grau ímpar, e que se for colocada uma aresta ligando-os, passa a ser um grafo Euleriano. Este detalhe foi importante para ajudar na compreensão da questão do *Mario Bros*. referente à atividade 2 do teste da aula 2.

**Figura 32: Foto da aula onde mostra o grafo representativo das sete pontes de Konigsberg**

**Fonte: Autor**

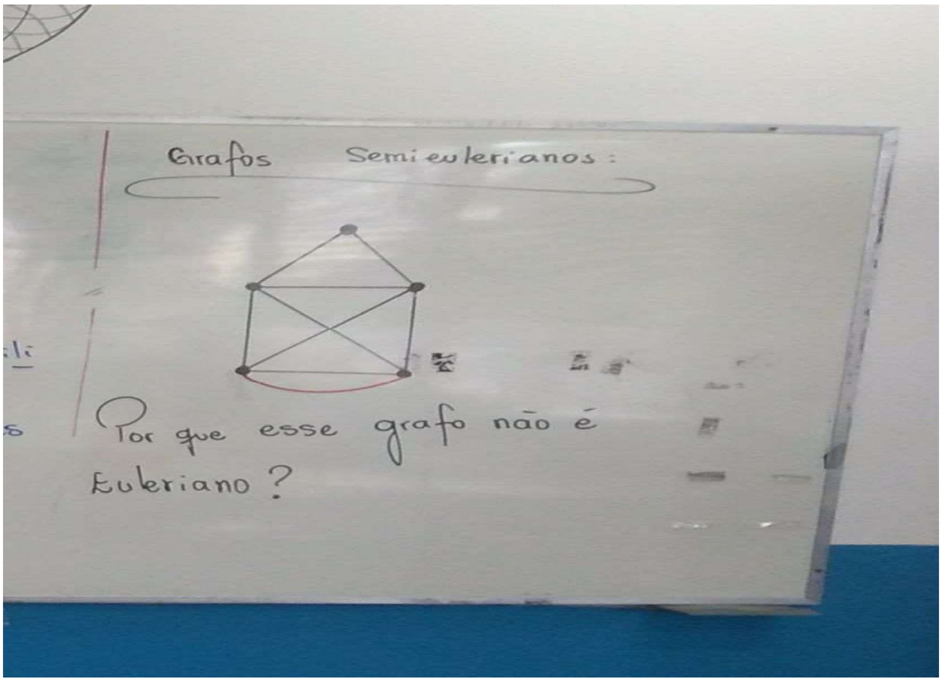



**Figura 33: Foto da aula sobre Grafos Semieulerianos**

**Fonte: Autor**

Na próxima etapa da aula 3, falou-se sobre os grafos completos, com exemplos, propriedades, definições e notações. A Figura 34 retrata um quadro desta aula.

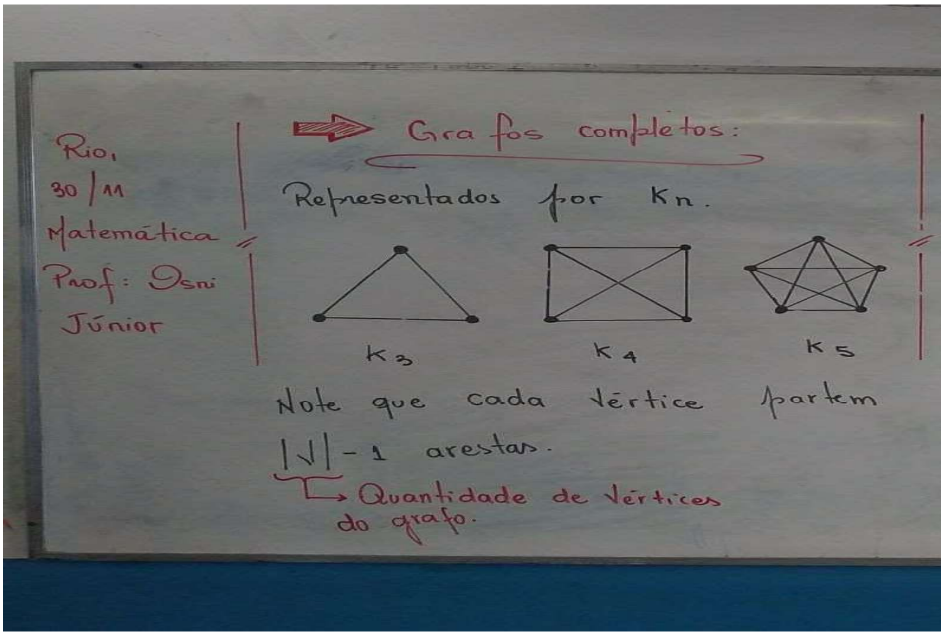



**Figura 34: Foto da aula sobre Grafos Completos**

**Fonte: Autor**

Após essa explicação, falou-se um pouco sobre grafos planares, que são grafos que podem ser desenhados sem que haja arestas se cruzando.

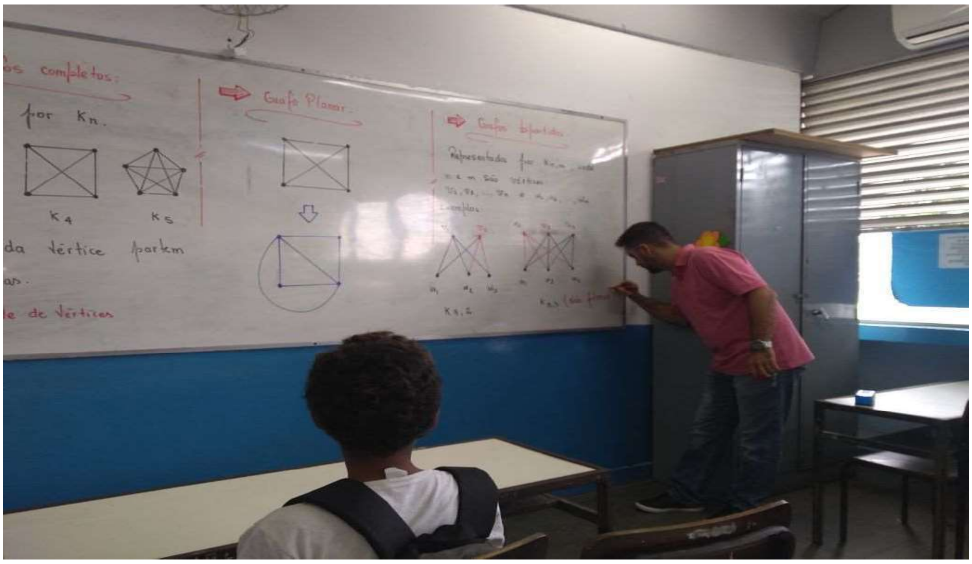



**Figura 35: Foto explicando Grafos Bipartidos e Completos**

**Fonte: Autor**

Foi dado como exemplo de grafo não planar o $K_5$, com tentativas de desenhos buscando em vão a planaridade. Por fim, foi encerrada a aula 3 com a definição de grafo bipartido e de grafo bipartido completo. Foi explicado com exemplos e tentativas de desenho que o $K_{3,3}$ não é planar. E comentou-se a questão do teste que envolvia este conceito (última questão do teste 1). As Figuras 35 e 36 retratam estes momentos na aula.

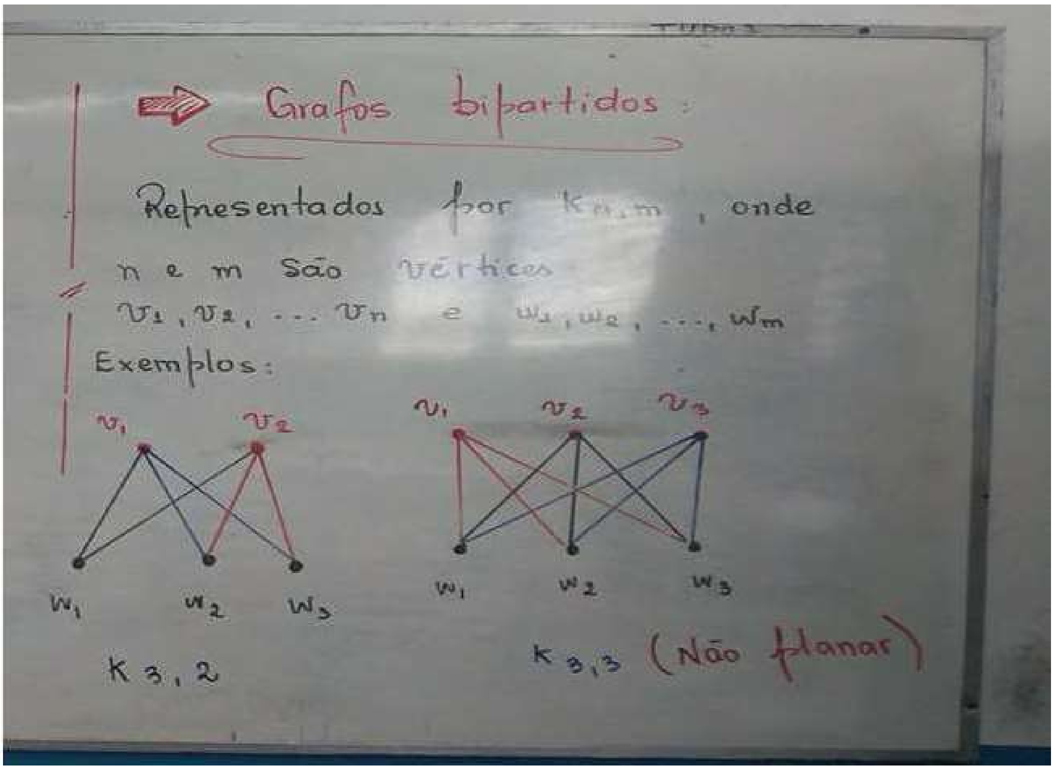



**Figura 36: Foto da aula sobre Grafos Bipartidos**

**Fonte: Autor**

### 3.6 Aula 4: Teste (Segunda aplicação) e questionário final

Esta última aula teve como objetivo nova aplicação do teste realizado na aula 2, mas agora com os alunos conhecendo um pouco da teoria de grafos; e a aplicação do questionário final buscando saber o grau de satisfação dos discentes sobre as atividades propostas. A Figura 37 mostra um momento desta aula.

A aula foi iniciada primeiramente com a aplicação do teste. Assim que as folhas do teste eram distribuídas, já se ouviam os murmúrios por parte daqueles alunos que estiveram atentos durante às explicações dadas principalmente durante a aula 3.Comentários do tipo: “Agora ficou fácil demais!”, “Professor, perdeu a graça!”, entre outros.

**Figura 37: Foto dos alunos desenvolvendo a questão 4 do teste (segunda etapa)**

**Fonte: Autor**

**<u>Teste com gabarito</u>**

**Atividade 1:** No ponto A, localiza-se uma autopeça MELHOR PREÇO, onde suas entregas são feitas pelo motoboy CLÁUDIO CHARUTO. Ele precisa entregar encomendas na oficina BAGULHO DOIDO, localizada no ponto D. As ligações representam as ruas e os pontos representam as esquinas. O valor dado a cada ligação é o tempo necessário (em minutos) para o percurso entre uma esquina e outra devido ao trânsito. Por exemplo, são necessários 2 minutos para ir da esquina F até a esquina G. Qual é o caminho que CLÁUDIO CHARUTO terá que percorrer para entregar mais rapidamente as encomendas na oficina BAGULHO DOIDO, e qual seria o tempo total deste percurso?

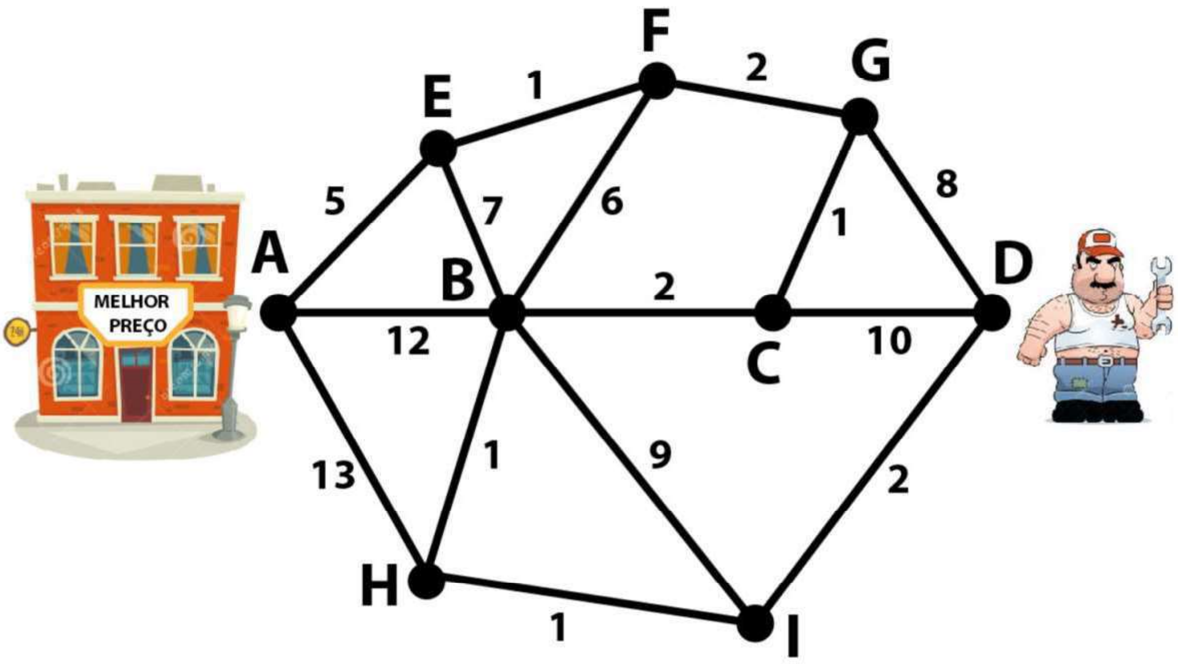



**Figura 38: Grafo que representa os caminhos existentes entre o motoboy e a autopeças**

**Fonte:<pt.dreamstime.com/ilustra%C3%A7%C3%A3o-stock-grupo-da-constru%C3%A7%C3%A3o-de-loja-dos-desenhos-animados-isolado-no-branco-ilustra%C3%A7%C3%A3o-do-vetor-image68487830>, <pt.dreamstime.com/fotos-de-stock-mecânico-dos-desenhos-animados-image16384253>, com adaptações do autor.**

**Solução:**

**A solução será dada usando o algoritmo de Dijkstra.**

**Passo 1. O ponto de partida é A (Figura 38). Os vizinhos de A são E, B e H. Escreve-se sobre E, B e H, respectivamente, (5,A), (12,A) e (13,A), indicando os tempos necessários percorrer os caminhos AE, AB e AH, e marcam-se tais arestas, deixando-as tracejadas (Figura 39).**

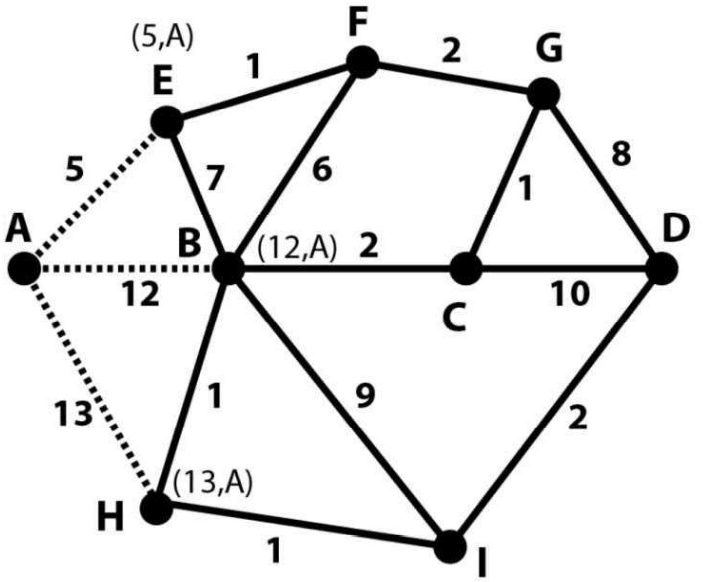



Figura 39: Grafo representativo do passo 1 (atividade Motoboy-autopeças)

Fonte: Autor

**Passo 2. O vértice que representa o menor tempo de percurso é E. Então é a partir dele que o processo continua. Seus vizinhos são B e F. Primeiro pode-se analisar o B. O tempo necessário para o caminho AEB é 5+7=12, o que não melhora o tempo do caminho AB, que também é 12. Então a aresta EB não será marcada. Agora será analisado o F. O caminho AEF pode ser feito em 5+1=6 minutos. Escreve-se então (6,E) sobre o vértice F, indicando que caminho total demora 6 minutos vindo de E. Obtém-se então a Figura 40.**

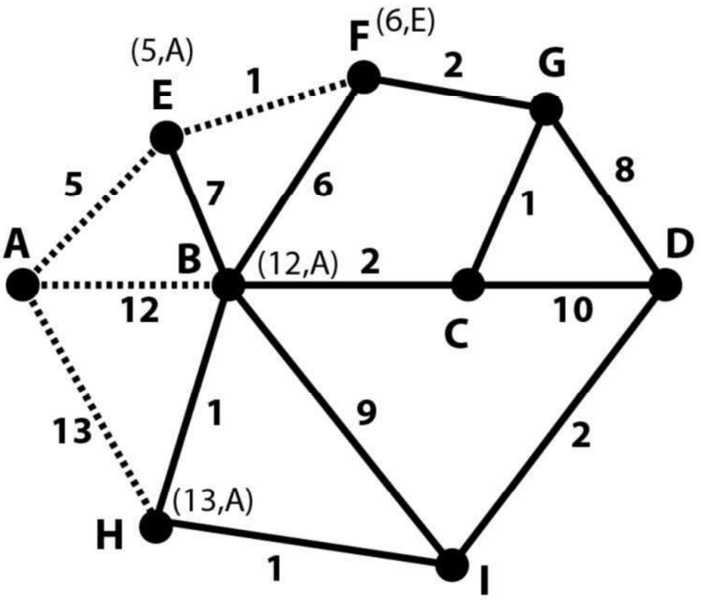



Figura 40: Grafo representativo do passo 2 (atividade Motoboy-autopeças)

Fonte: Autor

**Passo 3. Agora, o vértice que representa o menor tempo de percurso é F. Seus vizinhos são B e G. Analisando B, novamente AEFB pode ser feito em 12 minutos, o que não melhora o tempo do caminho AB. Então não marcamos FB. Agora será analisado o G. O caminho AEFG pode ser feito em 6+2=8 minutos. Escreve-se então (8,F) sobre o vértice G, indicando que o caminho total demora 8 minutos vindo de F. Obtém-se então a Figura 41.**

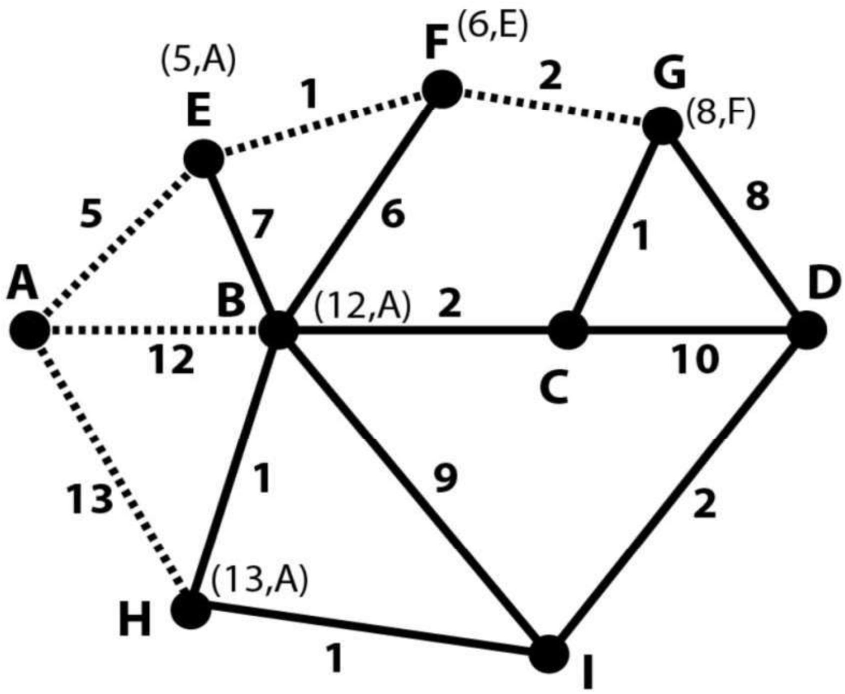



**Figura 41: Grafo representativo do passo 3 (atividade Motoboy-autopeças)**

**Fonte: Autor**

**Passo 4. O vértice que representa o menor tempo de percurso é G. Seus vizinhos são C e D. Em C devemos escrever (9,G) e em D devemos escrever (16,G). Então tem-se a Figura 42.**

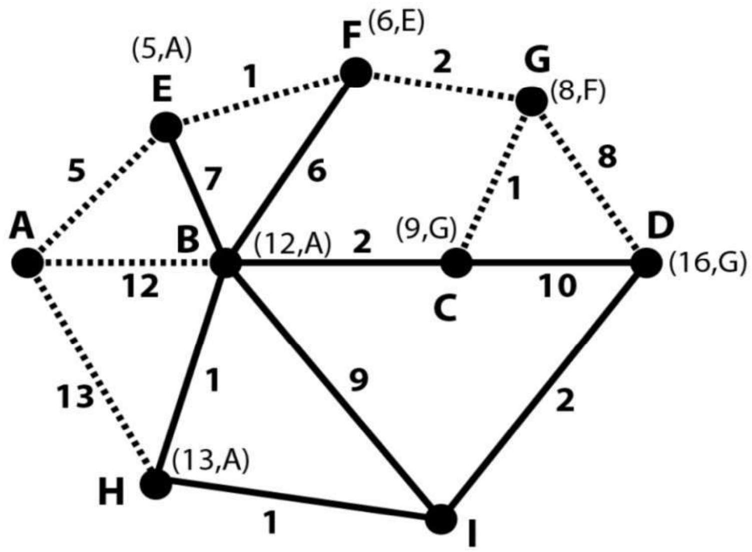



Figura 42: Grafo representativo do passo 4 (atividade Motoboy-autopeças)

Fonte: Autor

**Passo 5. O vértice que representa o menor tempo de percurso é C. Seus vizinhos são B e D. Em D não mudamos nada, pois 9+10 não melhora o caminho já descrito, 16. E em B deve-se escrever (11,C), pois 9+2=11 melhora o tempo 12 que havia sido marcado em B. Marca-se a aresta CB e desmarca-se a AB, obtendo a Figura 43.**

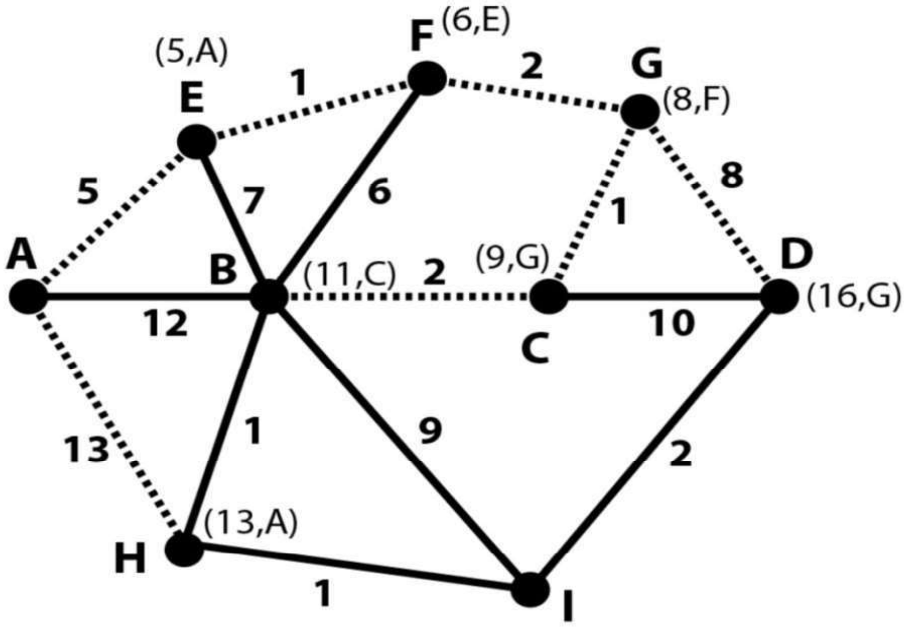



Figura 43: Grafo representativo do passo 5 (atividade Motoboy-autopeças)

Fonte: Autor

**Passo 6. O vértice que representa o menor tempo de percurso é B. Seus vizinhos são H e I. Em H deve-se mudar para (12,B), pois 11+1 melhora o tempo anterior de 12 vindo de A. Marca-se a aresta BH e desmarca-se a aresta AH, então. Em I escreve-se (20,B), e marca-se a aresta BI (Figura 44).**

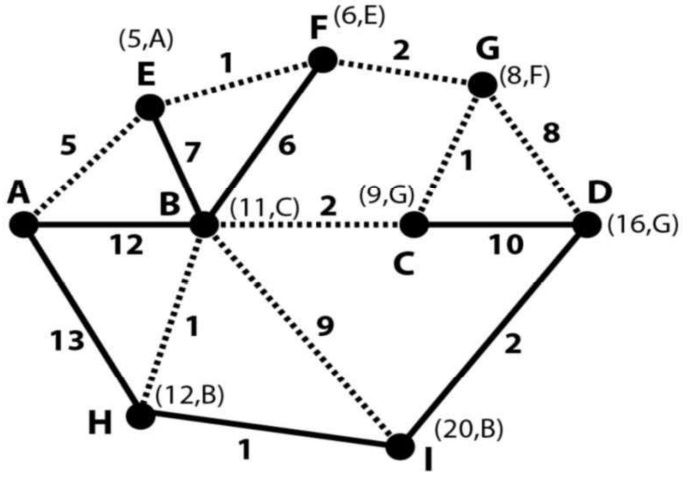



**Figura 44: Grafo representativo do passo 6 (atividade Motoboy-autopeças)**

**Fonte: Autor**

**Passo 7. O vértice que representa o menor tempo de percurso é H. Seus vizinhos são A e I. É claro que não se pode voltar para A. Então, considerando I, observa-se que deve-se mudar o rótulo de I de (20,B) para (13,I), pois vindo de I o tempo será 13. Marca-se a aresta HI e desmarca-se a aresta BI (Figura 45).**

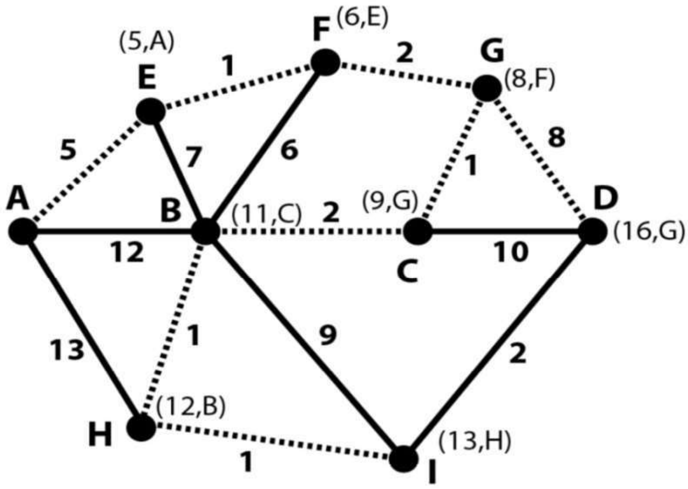



**Figura 45: Grafo representativo do passo 7 (atividade Motoboy-autopeças)**

**Fonte: Autor**

**Passo 8. Finalmente, partindo de I, que representa o menor tempo de percurso, observa-se que se deve rotular D como (15,I), pois 13+2=15 melhora 16, o tempo anterior. Então, o menor tempo é 15 minutos, pelo caminho AEFGCBHI (Figura 46).**

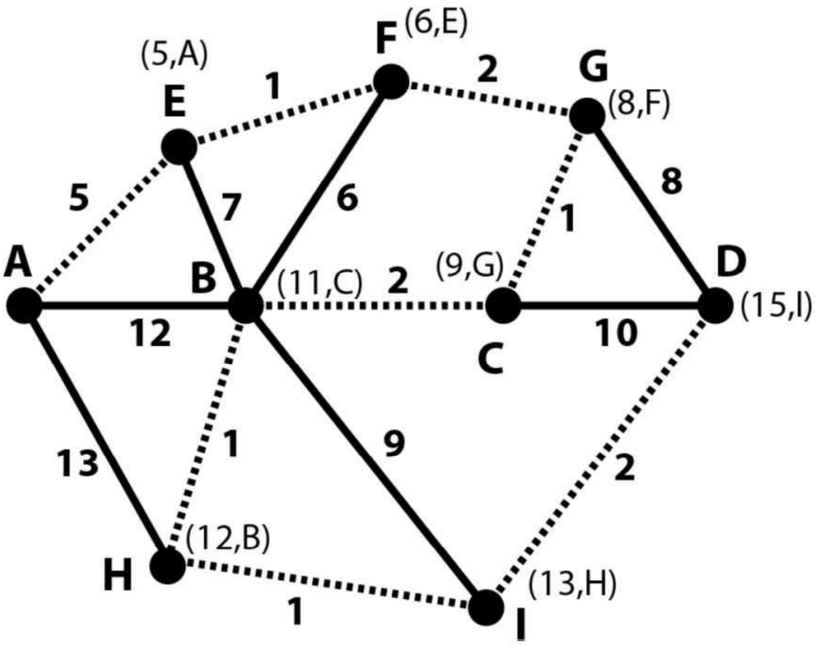



**Figura 46: Grafo representativo da solução (atividade Motoboy-autopeças)**

**Fonte: Autor**

**Atividade 2 (DA SILVA, C. M., 2015):** Num jogo de videogame, o personagem deve pegar todas as estrelas para passar de fase. Porém, ele só pode passar pelas pontes uma única vez, pois logo após pisar nas pontes elas caem, como na Figura 47 abaixo:

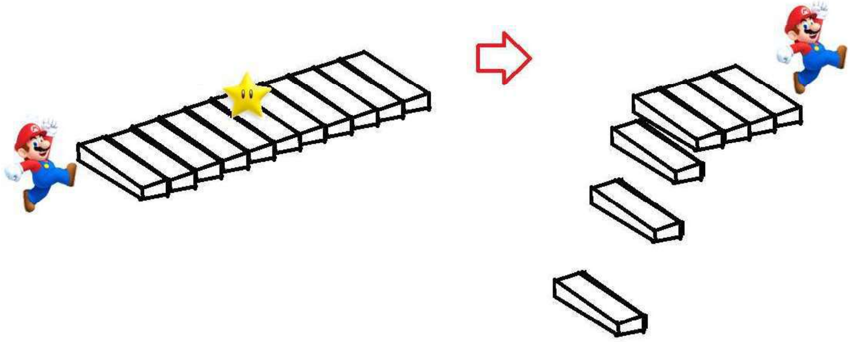


**Figura 47: Jogo de vídeo game "*Mario Bros*"**

**Fonte: SILVA,2015, p.58**

Nas Figuras 48 e 49 abaixo o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos as pontes para recolher as estrelas. Mas, uma vez passando pela ponte, ela se destrói, não tendo como voltar ao ponto anterior. Qual é o melhor caminho para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

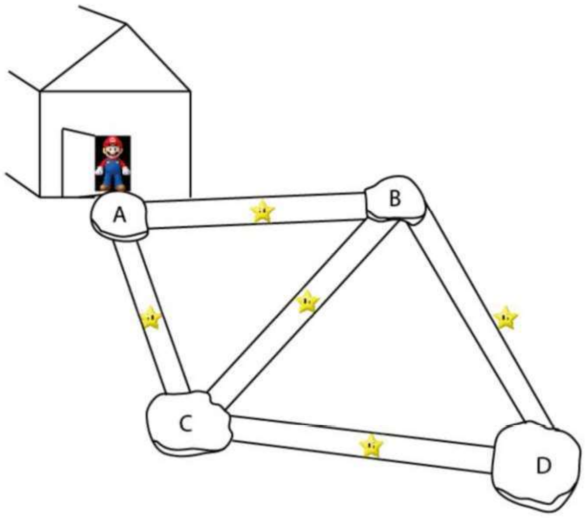



**Figura 48: Grafo que representa a situação 1 (Mario Bros-estrelas)**

**Fonte: SILVA,2015, p.58**

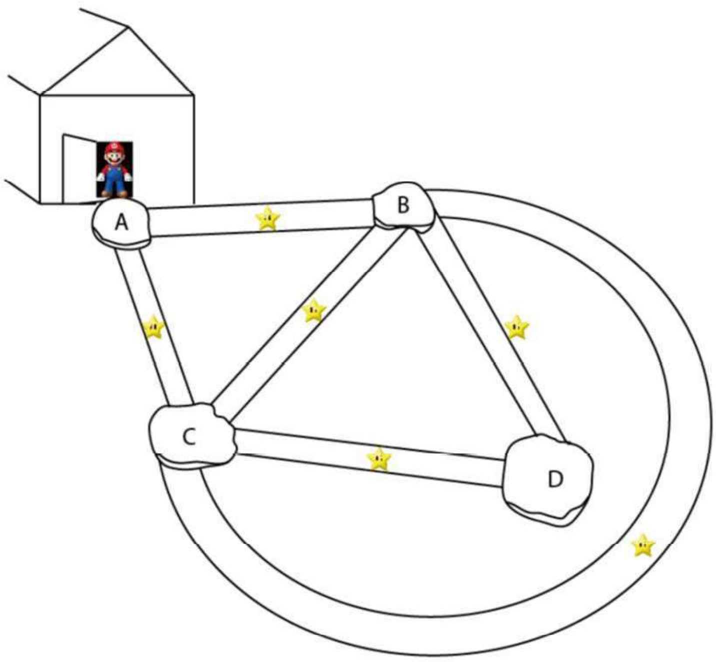



**Figura 49: Grafo que representa a situação 2 (Mario Bros-estrelas)**

**Fonte: SILVA,2015, p.58**

**Solução:**

**Para percorrer todos os pontos voltando ao vértice original todos os vértices têm que ter grau par, ou seja, todos os vértices devem ter uma quantidade par de arestas incidentes.**

**Isto ocorre porque, quando se passa por um ponto, usa-se uma aresta para entrar e uma para sair, sempre. Como não se podem repetir arestas, cada passagem por um ponto gasta 2 arestas. Logo, usamos em n passagens, 2n arestas.**

**Então no primeiro exemplo isto é impossível. No segundo pode-se ter ABCBDCA, que não repete aresta, ou seja, não repete ponte.**

**Atividade 3:** No desenho abaixo (Figura 50) tem-se a planta da casa de Jéssica Sabrina; ela se localiza no lado de fora da casa, e deseja entrar em sua casa, passar por todas as portas e sair dela novamente, sabendo que toda vez que ela passa por uma porta a mesma se fecha e não tem como voltar por ela. Dada esta situação, Jéssica Sabrina conseguirá fazer o que deseja? Justifique sua resposta:

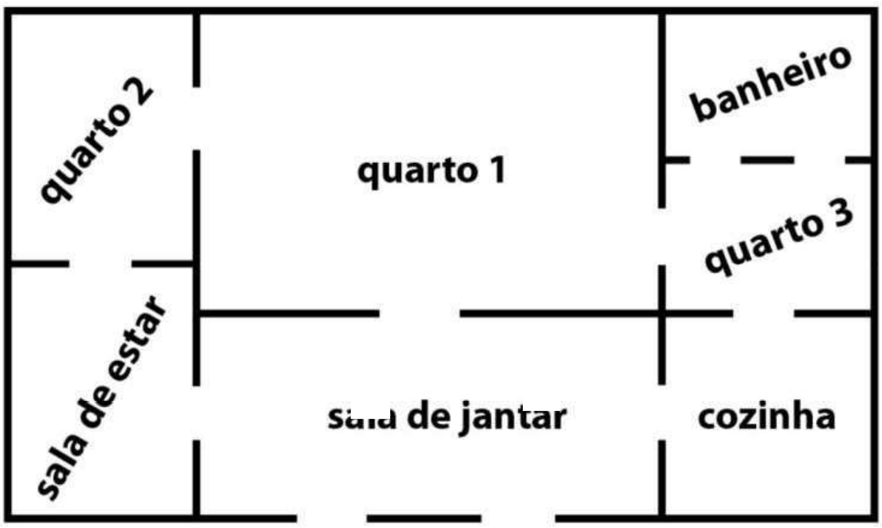



**Figura 50: Planta da casa de Jéssica**

**Fonte: Autor**

**Solução:**

**Observe que o grafo associado tem o aspecto seguinte (Figura 51):**

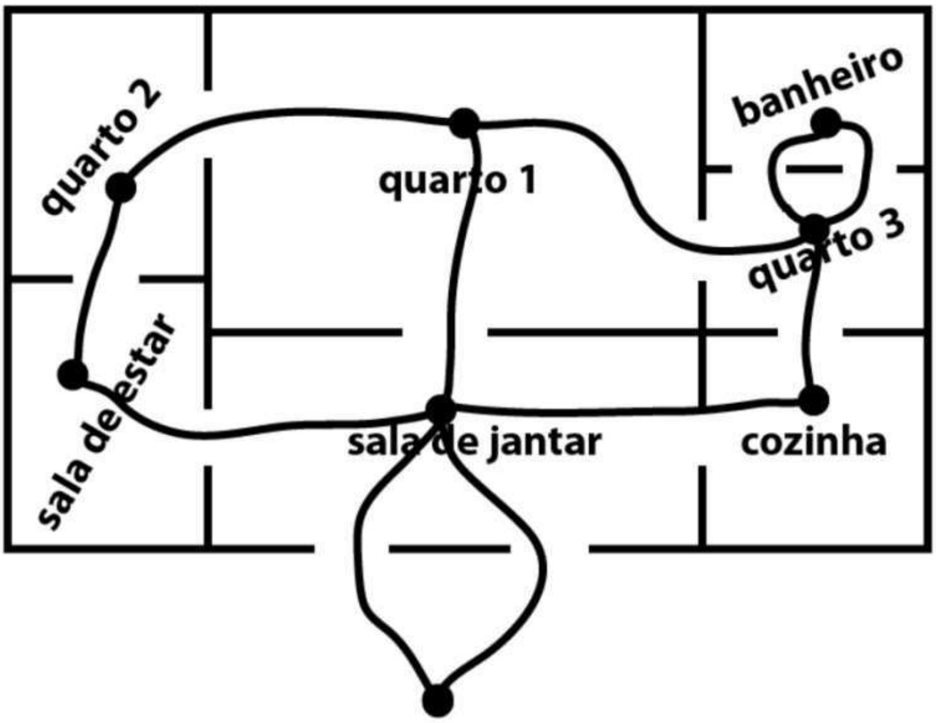



**Figura 51: Grafo que representa a solução da atividade casa de Jéssica**

**Fonte: Autor**

**Ou seja, como o grafo tem vértices de grau ímpar, é impossível. Repare que, ao retirarmos a aresta entre o quarto 1 e a sala de jantar (ou seja, a porta entre tais cômodos), o problema se torna possível.**

**Atividade 4:**Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade (Figura 52). As companhias de água (A), luz (L) e Gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora.A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?

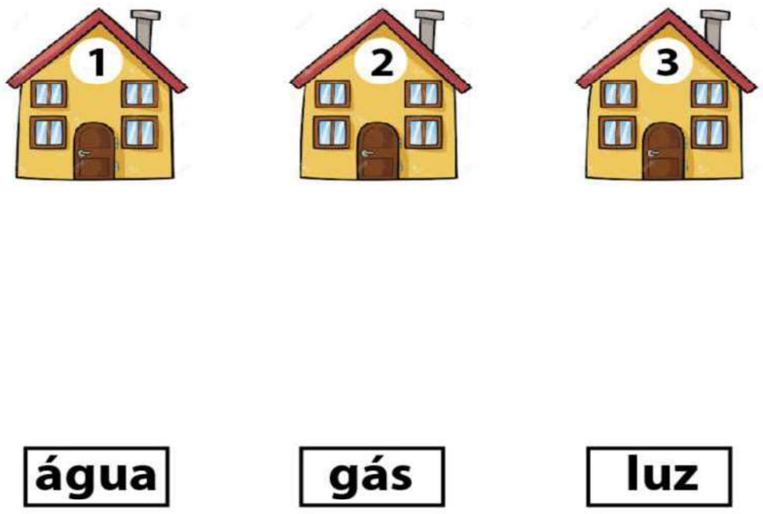



Figura 52: Atividade das casinhas

Fonte: <www.barewalls.com/art-print-poster/funny-house_bwc7440834.html>, com adaptações do autor

**Solução:**

**É impossível. É possível mostrar que um grafo que contém um K33 ou um K5 não sempre terão cruzamento de arestas (Figura 53).**

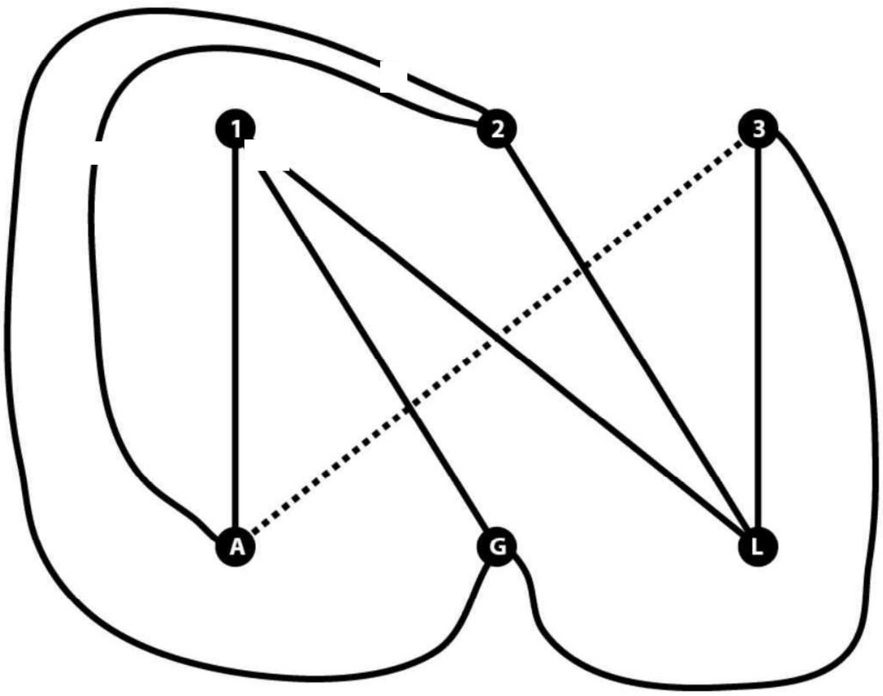



Figura 53: Grafo que representa a solução da atividade das casinhas

Fonte: Autor

A maioria dos educandos entendeu e ficou atenta a toda explanação da teoria, pois durante o tempo dado a eles para tal resolução, foi possível notar que a grande maioria utilizava corretamente as técnicas de aprendizagem que foram vistas nas aulas anteriores, tendo certamente um ou outro aluno que realmente estava totalmente fora do contexto.

Ao término dessa aula, os alunos responderam ao questionário final,que serviu para analisar o grau de satisfação dos estudantes pela aprendizagem da teoria dos grafos e principalmente pela Matemática, que é uma disciplina de extrema importância no ensino básico. Havia o interesse de observar o que causa grande desinteresse por parte deles em estudar com afinco essa ciência que estuda o raciocínio lógico e abstrato.

**Questionário final:**

**Quadro8– Questionário final**

| |
|---|
| 1- Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.<br>( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta. |
| 2- Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos.<br>( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta. |
| 3- Achei fácil estudar os conteúdos sobre Algoritmos de Dijkstra.<br>( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta. |
| 4- Entendi as várias situações onde podemos aplicar Caminhos Eulerianos e semieulerianos.<br>( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta. |
| 5- Achei mais interessante resolver problemas de Matemática utilizando Grafos do que da maneira tradicional.<br>( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta. |
| 6- Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos na internet.<br>( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta. |

7- Fiquei mais motivado para estudar Matemática após descobrir que Grafo pode ser usado para resolver problemas do cotidiano, como problema da coleta de lixo.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta.

---

8- Você daria nota máxima pelo grau satisfação do trabalho realizado.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta.

---

9- Você acredita que seja necessário inserir Teoria dos Grafos como conteúdo do Ensino Fundamental.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta.

---

10- A relação de vocês com o professor ficou mais próxima após esse trabalho.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta.

---

11- Se a Matemática fosse apresentada desta forma, você estudaria com mais frequência

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente Justifique sua resposta.

---

12- Dentro do conteúdo aprendido nas aulas sobre Grafos, gostei mais de (marque apenas uma alternativa):
(a) Algoritmo de Dijkstra.
(b) Caminhos Eulerianos e Semieulerianos.
(c) Estudar sobre Grafos $K_5 \ e \ K_{3,3}$
(d) Tudo.

# 4 RESULTADOS E ANÁLISES

Neste capítulo, serão descritos e analisados todos os resultados obtidos durante a realização das atividades. Pode-se salientar que as turmas contam com alunos empenhados em aprender, com alunos que possuem rendimento insatisfatório, mas também com indisciplinados e com desmotivados. Trata-se da rede municipal do Rio de Janeiro, mais especificamente de um CIEP, onde as condições de trabalho nem sempre são as ideais. Portanto, cada atividade será analisada com o maior cuidado possível.

## 4.1 Considerações Sobre O Questionário Inicial

Esse questionário inicial, baseado no questionário de Gontijo, tem por finalidade verificar vários fatores, dentre eles o quanto eles gostam e estudam matemática, a influência dos pais na vida estudantil de cada aluno e qual o grau de participação deles durante as aulas. A Figura54 mostra um quadro desta aula.

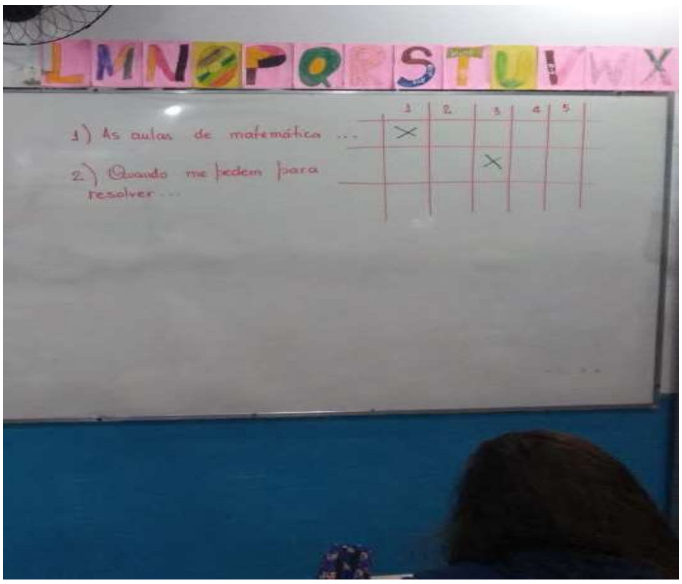



**Figura 54: Foto explicando como os alunos devem responder o questionário inicial**

**Fonte: Autor**

**Turma 1701**

**1°) Satisfação pela Matemática:**

**Quadro9 - Satisfação pela matemática turma 1701**

| | Fator 1 – Satisfação pela Matemática | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 1 | As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas. | 3,7% | 18,5% | 37% | 14,9% | 25,9% |
| 2 | Quando me pedem para resolver problemas de matemática, fico nervoso (a). | 11,1% | 11,1% | 37% | 22,2% | 18,5% |
| 3 | Tenho muita dificuldade para entender matemática. | 11,1% | 7,4% | 37% | 14,9% | 29,6% |
| 4 | Matemática é "chata" | 11,1% | 14,9% | 44,4% | 7,4% | 22,2% |
| 5 | Aprender matemática é um prazer | 22,2% | 29,6% | 11,1% | 22,2% | 14,9% |
| 6 | Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas | 22,2% | 22,2% | 33,3% | 14,9% | 7,4% |
| 7 | Tenho menos problemas com matemática do que com as outras disciplinas | 11,1% | 22,2% | 37% | 14,9% | 14,9% |
| 8 | Consigo bons resultados em matemática | 0% | 11,1% | 52% | 29,6% | 7,4% |

**Turma 1802**

**1°) Satisfação pela Matemática:**

**Quadro10 - Satisfação pela matemática turma 1802**

| | Fator 1 – Satisfação pela Matemática | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 1 | As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas. | 10,7% | 14,3% | 28,6% | 17,8% | 28,6% |
| 2 | Quando me pedem para resolver problemas de matemática, fico nervoso (a). | 14,3% | 7,2% | 57% | 14,3% | 7,2% |
| 3 | Tenho muita dificuldade para entender matemática. | 10,7% | 10,7% | 28,6% | 28,6% | 21,4% |
| 4 | Matemática é "chata" | 7,2% | 21,4% | 42,8% | 14,3% | 14,3% |
| 5 | Aprender matemática é um prazer | 28,6% | 21,4% | 21,4% | 17,8% | 10,7% |
| 6 | Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas | 21,4% | 25% | 28,6% | 17,8% | 7,2% |
| 7 | Tenho menos problemas com matemática do que com as outras disciplinas | 39,3% | 10,7% | 10,7% | 25,9% | 14,3% |
| 8 | Consigo bons resultados em matemática | 21,4% | 32,1% | 28,6% | 7,2% | 10,7% |

Nota-se, nesse quadro,que a porcentagem dos alunos que às vezes, frequentemente ou sempre consideram as aulas de matemática como preferidas é de 77,8% na 1701 e de 75% na turma 1802.No entanto, a porcentagem dos alunos que às vezes, frequentemente ou sempre consideram muito difícil entender matemática é de 78,6% na 1701 e de 81,5% na turma 1802. A porcentagem dos alunos que às vezes, frequentemente ou sempre acham chata a matemática é de 74% na 1701 e de 71,4% na turma 1802. A porcentagem dos alunos que às vezes, raramente ou nunca acham que aprender matemática é um prazer é de 62,9% na 1701 e de 71,4% na turma 1802. Parece então que apesar de boas aulas, os alunos acham difícil e não prazeroso, ou simplesmente chato, aprender matemática. Observa-se uma certa diferença entre os que conseguem bons resultados em matemática: responderam sempre ou frequentemente na turma 1701 37% dos alunos, enquanto que na 1802 foram 17,9%. Na realidade, é sabido que a turma do sétimo ano é uma das melhores turmas do CIEP.

**Turma 1701**

**2°) Jogos e desafios**

**Quadro11 - Jogos e desafios turma 1701**

| | Fator 2 – Jogos e Desafios | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 9 | Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio. | 40,7% | 7,4% | 37% | 14,9% | 0% |
| 10 | Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico. | 18,5% | 3,7%% | 22,2% | 14,9% | 40,7% |
| 11 | Procuro relacionar a matemática aos conteúdos das outras disciplinas | 25,9% | 25,9% | 18,5% | 7,4% | 22,2% |
| 12 | Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de matemática para meus amigos e familiares. | 33,3% | 11,1% | 33,3% | 18,5% | 3,7% |

Turma 1802

**2°) Jogos e desafios**

**Quadro12 - Jogos e desafios turma 1802**

| | Fator 2 – Jogos e Desafios | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 9 | Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio. | 64,3% | 25% | 7,2% | 3,6% | 0% |
| 10 | Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico. | 32,1% | 35,7% | 10,7% | 17,8% | 3,6% |
| 11 | Procuro relacionar a matemática aos conteúdos das outras disciplinas | 42,9% | 35,7% | 17,8% | 0% | 3,6% |
| 12 | Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de matemática para meus amigos e familiares. | 50% | 21,4% | 10,7% | 7,2% | 10,7% |

Analisando essa segunda sequência de perguntas, uma informação importante colhida é que a turma 1701 apresenta uma porcentagem de 40,7% dos alunos que **sempre** gostam de brincar de quebra cabeças e jogos que envolvam raciocínio, enquanto na turma 1802, nem somando todos os que responderam às vezes, frequentemente e sempre chega-se perto de tal percentual: a soma produz 32,1%. Quanto a relacionar matemática com conteúdo de outras disciplinas (algo muito desejado na educação moderna), nota-se um resultado ruim. A porcentagem dos que responderam nunca ou raramente é de 44,4 na 1701 e de 71,4 na 1802.

<u>**Turma 1701**</u>

**3°) Resolução de problemas**

**Quadro13 – Resolução de problemas 1701**

| | Fator 3 – Resolução de problemas | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 13 | Gosto de resolver os exercícios rapidamente. | 7,4% | 18,5% | 29,6% | 18,5% | 25,9% |
| 14 | Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes. | 11,1% | 18,5% | 29,6% | 33,3% | 7,4% |
| 15 | Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de matemática. | 11,1% | 18,5% | 18,5% | 14,9% | 37% |
| 16 | Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução. | 7,4% | 14,9% | 29,6% | 22,2% | 25,9% |
| 17 | Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo. | 3,7% | 3,7% | 22,2% | 33,3% | 37% |

<u>**Turma 1802**</u>

**3°) Resolução de problemas**

**3°) Resolução de problemas**

Quadro 14 – Resolução de problemas

| | Fator 3 – Resolução de problemas | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 13 | Gosto de resolver os exercícios rapidamente. | 14,3% | 17,8% | 32,1% | 21,4% | 17,8% |
| 14 | Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes. | 25% | 21,4% | 32,1% | 7,2% | 10,7% |
| 15 | Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de matemática. | 3,6% | 21,4% | 25% | 17,8% | 32,1% |
| 16 | Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução. | 14,3% | 10,7% | 35,7% | 17,8% | 21,4% |
| 17 | Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo. | 0% | 10,7% | 35,7% | 17,8% | 35,7% |

Tomando a resolução de problemas como outro tópico a ser analisado, observa-se que, entre os que tentam resolver os problemas de maneiras diferentes, responderam sempre ou frequentemente 40,7% na turma 1701 e 17,9% na 1802. Ambos percentuais baixos, mas bem melhor na primeira. Quanto à frustração quando não conseguem resolver um problema de matemática, responderam às vezes, frequentemente ou sempre: 70,4% na 1701 e 74,9% na 1802. Quanto à curiosidade com relação à solução de um problema, responderam às vezes, frequentemente ou sempre: 77,7% na 1701 e 74,9% na 1802. Isto aparentemente é um trunfo que o professor deveria explorar.

**Turma 1701**

**4°) Aplicações no Cotidiano**

**Quadro15 - Aplicações no cotidiano turma 1702**

| | Fator 4 – Aplicações no Cotidiano | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 18 | Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos. | 63% | 14,9% | 18,5% | 3,7% | 0% |
| 19 | Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo. | 40,7% | 3,7% | 25,9% | 7,4% | 25,9% |
| 20 | Faço desenhos usando formas geométricas | 37% | 7,4% | 33,3% | 18,5% | 3,7% |
| 21 | Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola | 11,1% | 33,3% | 25,9% | 25,9% | 3,7% |
| 22 | Faço “continhas de cabeça” para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos. | 14,9% | 7,4% | 18,5% | 14,9% | 29,6% |

**Turma 1802**

**4°) Aplicações no Cotidiano**

**Quadro16 - Aplicações no cotidiano turma 1802**

| | Fator 4 – Aplicações no Cotidiano | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 18 | Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos. | 75% | 14,3% | 7,2% | 3,6% | 0% |
| 19 | Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo. | 42,9% | 7,2% | 7,2% | 10,7% | 32,1% |
| 20 | Faço desenhos usando formas geométricas | 35,7% | 17,8% | 28,6% | 14,3% | 3,6% |
| 21 | Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola | 7,2% | 14,3% | 50% | 21,4% | 7,2% |
| 22 | Faço "continhas de cabeça" para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos. | 17,8% | 10,7% | 28,6% | 21,4% | 21,4% |

Nessa fase de aplicações no cotidiano, fica evidenciado que a grande maioria não utiliza a matemática para explicar fenômenos da natureza: cerca de 3,6% em ambas as turmas responderam que frequentemente ou sempre o fazem. Quanto a desenhar usando formas geométricas, responderam que sempre ou frequentemente 22,2% na 1701, e 17,9% na 1802. Quanto a perceber a matemática fora da escola, responderam que sempre ou frequentemente 29,6% na 1701, e 28,6% na 1802. Quanto a fazer contas de cabeça em atividades fora da escola, responderam que sempre ou frequentemente 44,5% na 1701, e 42,8% na 1802. Todos deixam a desejar, sendo mais assustador o resultado da primeira pergunta.

Turma 1701

**5°) Hábitos nos estudos**

**Quadro17 - Hábitos de estudo turma 1701**

| | Fator 5 – Hábitos de Estudo | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 23 | Estudo matemática todos os dias durante a semana. | 33,3% | 22,2% | 37% | 3,7% | 3,7% |
| 24 | Realizo as tarefas de casa que o professor de matemática passa. | 0% | 7,4% | 33,3% | 44,4% | 14,9% |
| 25 | Estudo as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula. | 25,9% | 14,9% | 33,3% | 18,5% | 7,4% |
| 26 | Além do meu caderno, eu costumo estudar matemática em outros livros para fazer provas e testes. | 22,2% | 14,9% | 18,5% | 22,2% | 22,2% |

Turma 1802

**5°) Hábitos nos estudos**

**Quadro18 - Hábitos de estudo turma 1802**

| | Fator 5 – Hábitos de Estudo | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 23 | Estudo matemática todos os dias durante a semana. | 35,7% | 21,4% | 35,7% | 3,6% | 3,6% |
| 24 | Realizo as tarefas de casa que o professor de matemática passa. | 21,4% | 14,3% | 39,3% | 17,8% | 7,2% |
| 25 | Estudo as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula. | 57,1% | 17,8% | 25% | 0% | 0% |
| 26 | Além do meu caderno, eu costumo estudar matemática em outros livros para fazer provas e testes. | 35,7% | 25% | 25% | 14,3% | 0% |

Observa-se que estudar matemática rotineiramente é uma situação que não ocorre em ambas as turmas;responderam que sempre ou frequentemente 7,4% na 1701, e 7,2% na 1802. Portanto, a grande maioria dos discentes só estudam matemática durante as aulas.Fazer as tarefas de casa, sempre ou frequentemente: 59,6% na turma 1701 e na turma 1802 não ultrapassam os 25%. É interessante observar que ninguém respondeu, na turma 1802, que estuda a matéria antes de o professor ensinar em sala. E mais interessante ainda, na 1701 44,4% sempre ou frequentemente buscam material complementar para estudar matemática, enquanto na 1802 apenas 14,3% responderam assim.

**<u>Turma 1701</u>**

**6°) Interação na sala de aula**

**Quadro19 - Interação na sala de aula turma 1701**

| | Fator 6 – Interação na sala de aula | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 27 | Faço perguntas nas aulas de matemática quando eu tenho dúvidas. | 11,1% | 7,4% | 14,9% | 25,9% | 40,7% |
| 28 | Relaciono-me bem com meu professor de matemática. | 7,4% | 3,7% | 33,3% | 14,9% | 40,7% |

**<u>Turma 1802</u>**

**6°) Interação na sala de aula**

**Quadro20 - Interação na sala de aula turma 1802**

| | Fator 6 – Interação na sala de aula | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 27 | Faço perguntas nas aulas de matemática quando eu tenho dúvidas. | 10,7% | 42,9% | 28,6% | 7,2% | 10,7% |
| 28 | Relaciono-me bem com meu professor de matemática. | 7,2% | 7,2% | 10,7% | 14,3% | 60,7% |

É importante salientar que nesse bloco de perguntas, mais de 55% dos alunos de ambas as turmas sempre ou frequentemente se relacionam bem com o professor de matemática; mas fazer perguntas durante a aula de matemática quando surgem dúvidas é apenas uma característica da turma do sétimo ano, ao qual mais de

75%dos educandos fazem isso sempre ou frequentemente.Na turma do oitavo ano, mais de 53% deles raramente ou nunca fazem esse tipo de perguntas.

**Turma 1701**

**7°) Sua família e sua casa**

**Quadro21 - Sua família e sua casa turma 1701**

| | Fator 7 – Sua família e sua casa | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 29 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre os estudos. | 3,7% | 7,4% | 18,5% | 37% | 33,3% |
| 30 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre a escola. | 3,7% | 14,9% | 7,4% | 29,6% | 44,4% |
| 31 | Com que frequência seus pais ou responsáveis obrigam você ir às aulas | 3,7% | 0% | 14,9% | 11,1% | 70,4% |
| 32 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre seus amigos | 7,4% | 18,5% | 22,2% | 11,1% | 40,7% |

**Turma 1802**

**7°) Sua família e sua casa**

**Quadro22 - Sua família e sua casa turma 1802**

| | Fator 7 – Sua família e sua casa | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 29 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre os estudos. | 14,3% | 3,6% | 21,4% | 32,1% | 28,6% |
| 30 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre a escola. | 7,2% | 3,6% | 21,4% | 39,3% | 28,6% |
| 31 | Com que frequência seus pais ou responsáveis obrigam você ir às aulas | 0% | 3,6% | 3,6% | 10,7% | 82,1% |
| 32 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre seus amigos | 17,8% | 7,2% | 21,4% | 17,8% | 35,7% |

Esse último bloco de perguntas é possivelmente um dos mais importantes dentro desse questionário, pois nele verificaremos a participação dos pais ou responsáveis na vida estudantil dos jovens que frequentam o CIEP. Logo de início fiquemos bastante surpresos, pois mais de 60% dos alunos sinalizaram que sempre ou frequentemente conversam com seus pais sobre estudos e sobre a escola. Sobre a frequência com que os pais obrigam os alunos a ir à escola, responderam sempre ou frequentemente 81,5% na 1701 e 92,8% na 1802, o que é positivo, podendo mostrar um reconhecimento de que escola é importante. No entanto, pode ser apenas uma falta de alternativa dos pais. Vale a pena destacar que ir às aulas, ou seja, ter frequência, pode ser em certas situações mais importante para os pais ou responsáveis do que os rendimentos e resultados, pois muitos que ali estão recebem incentivos do governo federal, como o "Bolsa Família", ao qual faz jus aquele aluno que tenha frequência superior a 75% nas aulas. A falta de consciência dos pais, no entanto, não interfere no fato de que o programa demonstra sucesso ao manter o aluno na escola. Sobre conversar com eles a respeito das amizades, vimos que mais de 50% dos entrevistados responderam que sempre ou frequentemente, seus pais ou responsáveis falam sobre esse assunto.

**Turma 1701**

**33. ATÉ QUE SÉRIE SUA MÃE/MADRASTA ESTUDOU?**

(A) Nunca estudou →**0%**
(B) Entre a 1ª e 4ª série do Ensino Fundamental (antigo primário) → **7,4%**
(C) Entre a 5ª e 8ª série do Ensino Fundamental (antigo ginásio) → **18,5%**
(D) Ensino Fundamental completo (antigos primário e ginásio)→ **14,9%**
(E) Ensino Médio incompleto (antigo 2º grau) → **11,1%**
(F) Ensino Médio completo (antigo 2 º grau) → **11,1%**
(G) Começou, mas não concluiu o Ensino Superior → **3,7%**
(H) Completou o Ensino Superior → **7,4%**
(I) Pós-graduação completa ou incompleta→**0%**
(J) Não sei. → **25,9%**

**Turma 1802**

**33. ATÉ QUE SÉRIE SUA MÃE/MADRASTA ESTUDOU?**

(A) Nunca estudou → **0%**
(B) Entre a 1ª e 4ª série do Ensino Fundamental (antigo primário) → **14,3%**
(C) Entre a 5ª e 8ª série do Ensino Fundamental (antigo ginásio) → **17,8%**
(D) Ensino Fundamental completo (antigos primário e ginásio)→ **7,2%**
(E) Ensino Médio incompleto (antigo 2º grau) → **3,6%**

(F) Ensino Médio completo (antigo 2 º grau) → **21,4%**
(G) Começou, mas não concluiu o Ensino Superior → **3,6%**
(H) Completou o Ensino Superior → **14,3%**
(I) Pós-graduação completa ou incompleta→**0%**
(J) Não sei. → **17,8%**

Observa-se nessa pergunta que nenhuma mãe ou madrasta, possui uma pós-graduação.Também, não houve quem nunca estudou.Uma minoria completou o nível superior.Constata-se também que em ambas as turmaso percentual de mães ou madrastas que começaram, mas não concluíram o nível superior é praticamente idêntico, e menor de 4%. Notemos ainda que existem muitos alunos quenão possuem informações sobre tal fato, o que compromete as estimativas.

**Turma 1701**

34**. ATÉ QUE SÉRIE SEU PAI/PADRASTO ESTUDOU?**

(A) Nunca estudou → **0%**
(B) Entre a 1ª e 4ª série do Ensino Fundamental (antigo primário) → **11,1%**
(C) Entre a 5ª e 8ª série do Ensino Fundamental (antigo ginásio) → **14,9%**
(D) Ensino Fundamental completo (antigos primário e ginásio) → **11,1%**
(E) Ensino Médio incompleto (antigo 2º grau)→ **7,4%**
(F) Ensino Médio completo (antigo 2 º grau) →**0%**
(G) Ensino Superior incompleto →**3,7%**
(H) Ensino Superior completo →**7,4%**
(I) Pós-graduação completa ou incompleta →**0%**
(J) Não sei →**40,7%**

**Turma 1802**

34**. ATÉ QUE SÉRIE SEU PAI/PADRASTO ESTUDOU?**

(A) Nunca estudou → **3,6%**
(B) Entre a 1ª e 4ª série do Ensino Fundamental (antigo primário) → **3,6%**
(C) Entre a 5ª e 8ª série do Ensino Fundamental (antigo ginásio) → **7,2%**
(D) Ensino Fundamental completo (antigos primário e ginásio) → **10,7%**
(E) Ensino Médio incompleto (antigo 2º grau)→ **10,7%**
(F) Ensino Médio completo (antigo 2 º grau) → **21,4%**
(G) Ensino Superior incompleto → **0%**
(H) Ensino Superior completo → **7,2%**
(I) Pós-graduação completa ou incompleta → **0%**
(J) Não sei → **35,7 %**

Nesta última pergunta feita aos alunos, notemos que ainda há um grupo pequeno de estudantes na turma do oitavo ano que respondeu que seu pai ou padrasto nunca estudou.As maiores porcentagens ficaram para o último item, pois muitos alunos, de ambas as turmas, não sabem até onde seu pai ou padrasto estudou.

## 4.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A PRIMEIRA APLICAÇÃO DO TESTE

Nos dias 28 e 29 de novembro do ano de 2017, foi aplicado o teste pela primeira vez nas turmas 1802 e 1701 respectivamente. Para resolver o teste os alunos tiveram um tempo de cinquenta minutos, mas, como é de praxe (acontece inclusive com as avaliações aplicadas na escola), os educandos não demoram nem trinta minutos para solucionar as questões.

A avaliação do teste não foi feita por nota,mas sim por conceito, sendo I – Insuficiente; R – Regular; B – Bom e E – Excelente; como o teste é composto por quatro questões, foi utilizado o seguinte critério de correção: O aluno que errou todas as questões obteve grau I – Insuficiente, aquele que acertou uma única questão, obteve grau R – regular, quem acertou duas ou três questões ficou com grau B – Bom e o discente que acertou todas as questões teve grau máximo E – excelente.

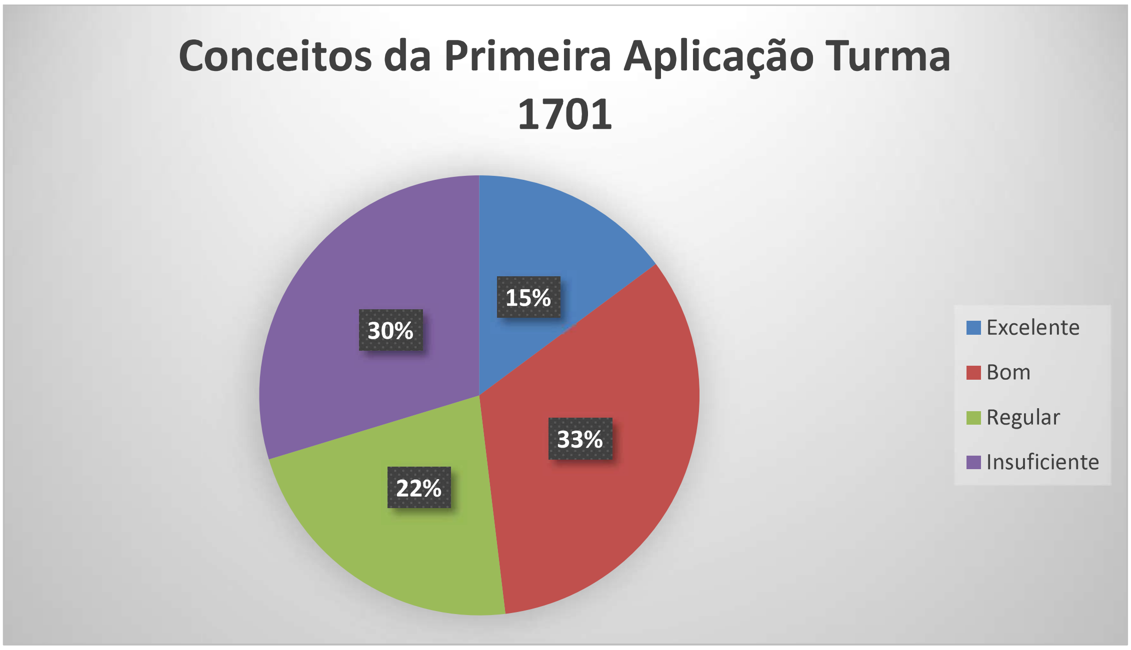



**Figura 55: Gráfico Conceitos da Primeira Aplicação Turma 1701**

**Fonte: Autor**

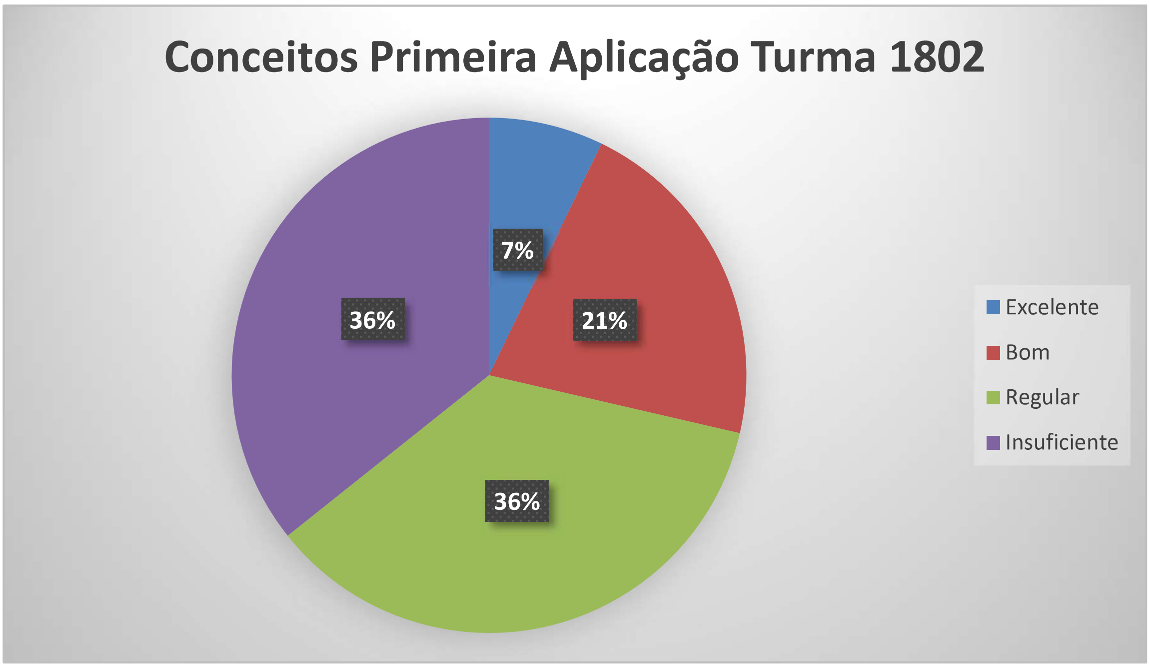



**Figura 56: Gráfico Conceitos da Primeira Aplicação Turma 1802**

**Fonte: Autor**

Analisando os resultados (Figuras55 e 56) de ambas as turmas, mais uma vez notemos um melhor desempenho da turma do sétimo ano, onde mais de 48% dos alunos obtiveram conceitos B ou E, enquanto na turma do oitavo ano esses conceitos não ultrapassaram a 30%.Vale salientar que mais de 70% dos alunos da turma 1802 ficaram com conceitos I ou R, acertando nenhuma ou uma questão apenas, ou seja, não obtendo metade das atividades propostas.

Na próxima etapa da análiseserão construídos gráficos de barras, que interpretarão o número de erros e acertos de cada atividade, separadas por turmas.

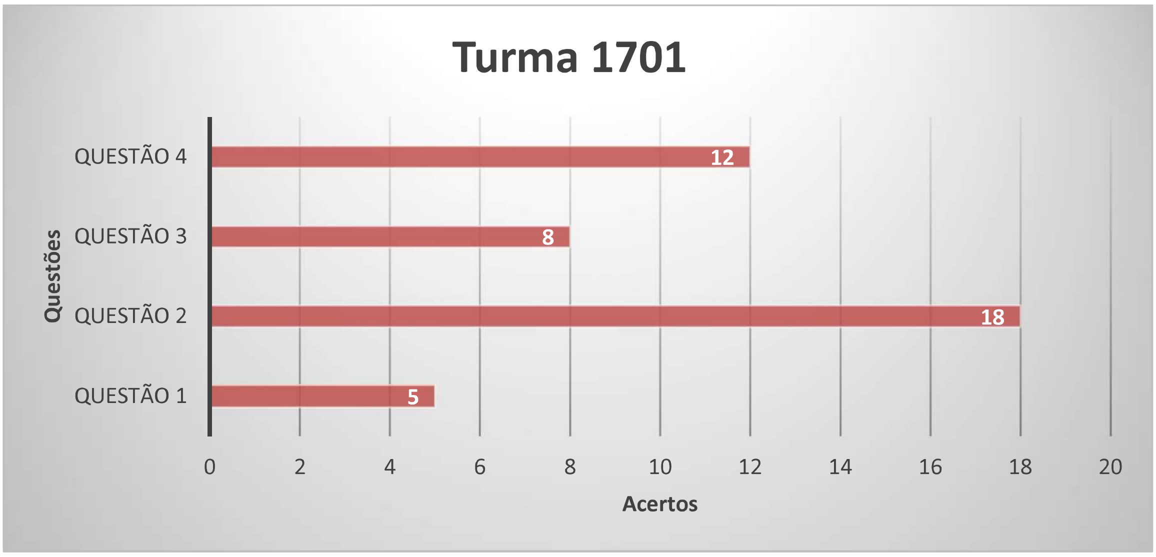



**Figura 57: Gráfico de Acertos Turma 1701**

**Fonte: Autor**

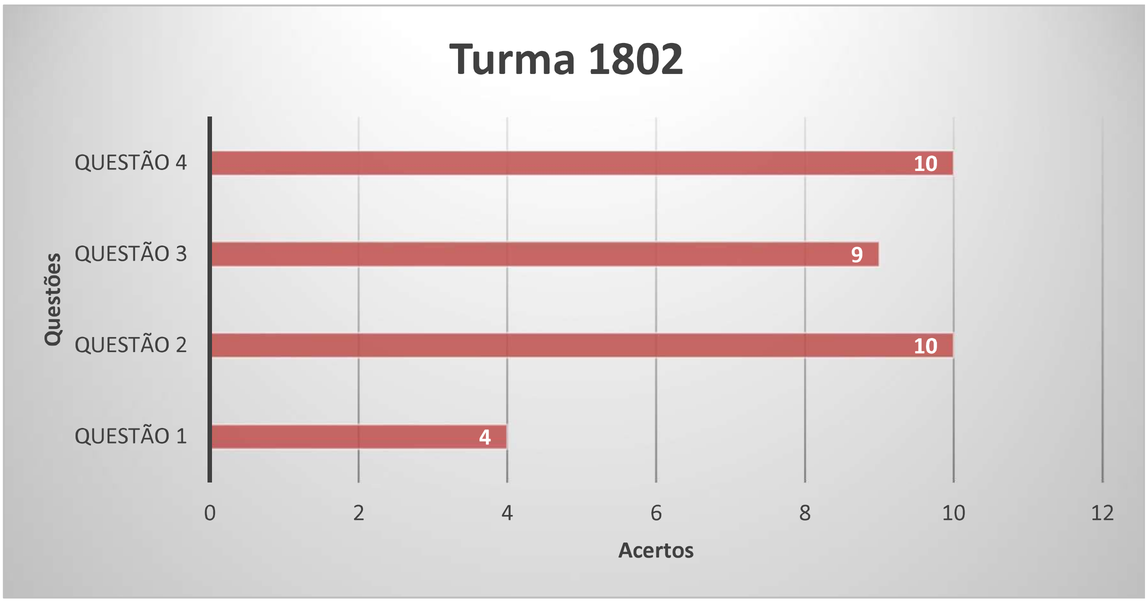


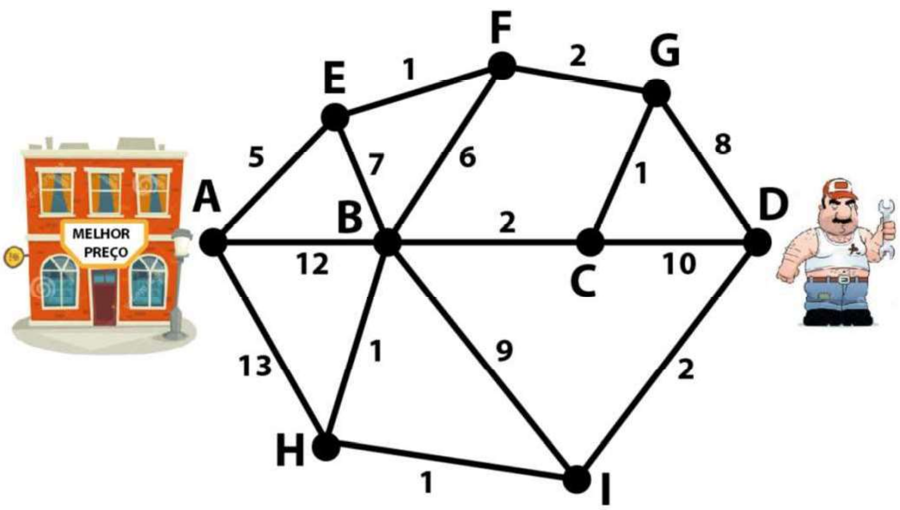

**Figura 58: Gráfico de Acertos Turma 1802**

**Fonte: Autor**

Observando os gráficos acima (Figuras57 e 58), é fácil perceber que as atividades 2 e 4 obtiveram o maior número de acertos, enquanto a atividade 1, na qual era necessário descobrir o menor tempo possível que o motoboy levaria para fazer o trajeto autopeças-oficina (essa atividade que envolvia Algoritmo de Dijkstra) foi a que obteve o menor número de acertos: somando as duas turmas não chega a dez alunos.Portanto, temos uma média de 16,4% de acertos.

Agora serão apresentadas algumas soluções, que merecem destaque neste primeiro momento de aplicação do teste:

**Atividade 1:**No ponto A, localiza-se uma autopeça Melhor Preço, onde suas entregas são feitas pelo motoboy Cláudio Charuto. Ele precisa entregar encomendas na oficina Bagulho Doido, localizada no ponto D. As ligações representam as ruas e os pontos representam as esquinas. O valor dado a cada ligação é o tempo necessário (em minutos) para o percurso entre uma esquina e outra devido ao trânsito. Por exemplo, são necessários 2 minutos para ir da esquina F até a esquina G. Qual é o caminho que Cláudio Charuto terá que percorrer para entregar mais rapidamente as encomendas na oficina Bagulho Doido, e qual seria o tempo total deste percurso?



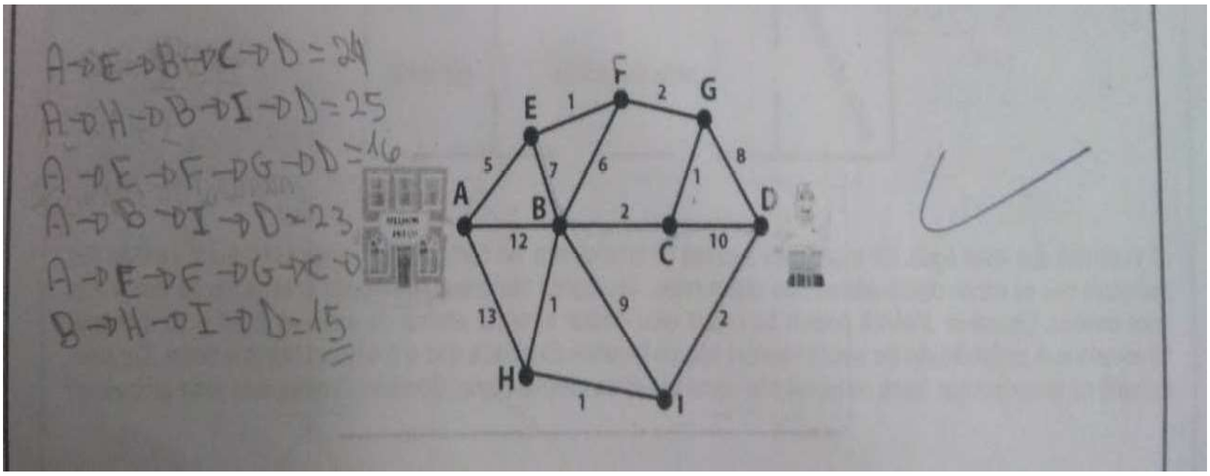



**Figura 59: Figura original da questão e solução do aluno para questão da oficina.**

**Fonte: Autor**

Comentário:

O aluno, sem ter conhecimento do Algoritmo de Dijkstra, uma técnica que facilitaria sua solução, “abriu” em cinco caminhos diferentes (Figura 59).O mesmo percebeu que, após a quinta tentativa, que lhe trouxe como resposta o trajeto A – E – F – G – C – B – H – I – D, não haveria um outro caminho que lhe apresentasse um tempo menor que quinze minutos.

**Atividade 2:**Num jogo de videogame, o personagem deve pegar todas as estrelas para passar de fase. Porém, ele só pode passar pelas pontes uma única vez, pois logo após pisar nas pontes elas caem, como na Figura 60 abaixo. Nas figuras abaixo o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos as pontes para recolher as estrelas. Mas, uma vez passando pela ponte, ela se destrói, não tendo como voltar ao ponto anterior. Qual é o melhor caminho para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

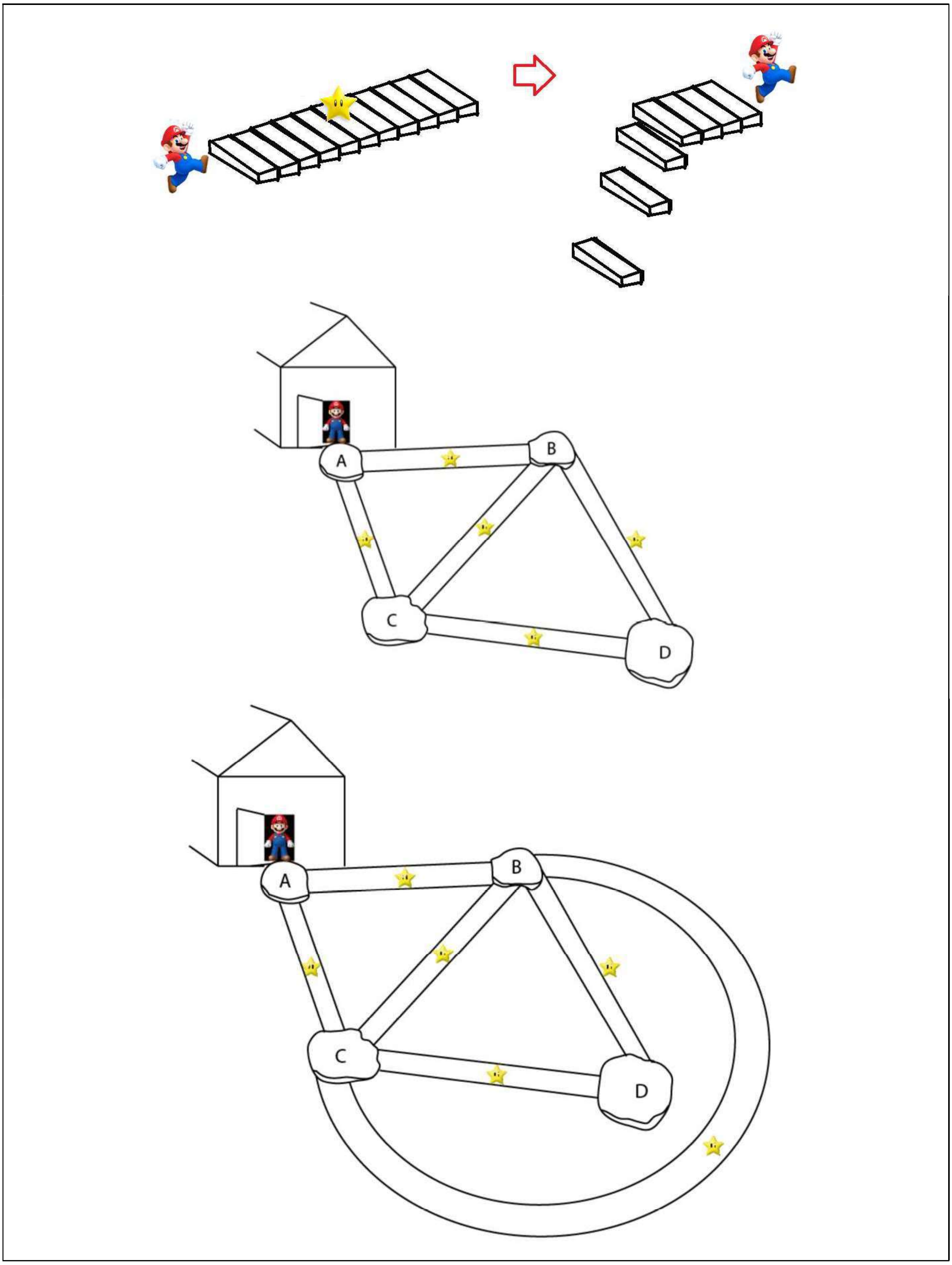



**Figura 60: Figura original da questão da Atividade 2.**

Fonte: **SILVA,2015, p.58**

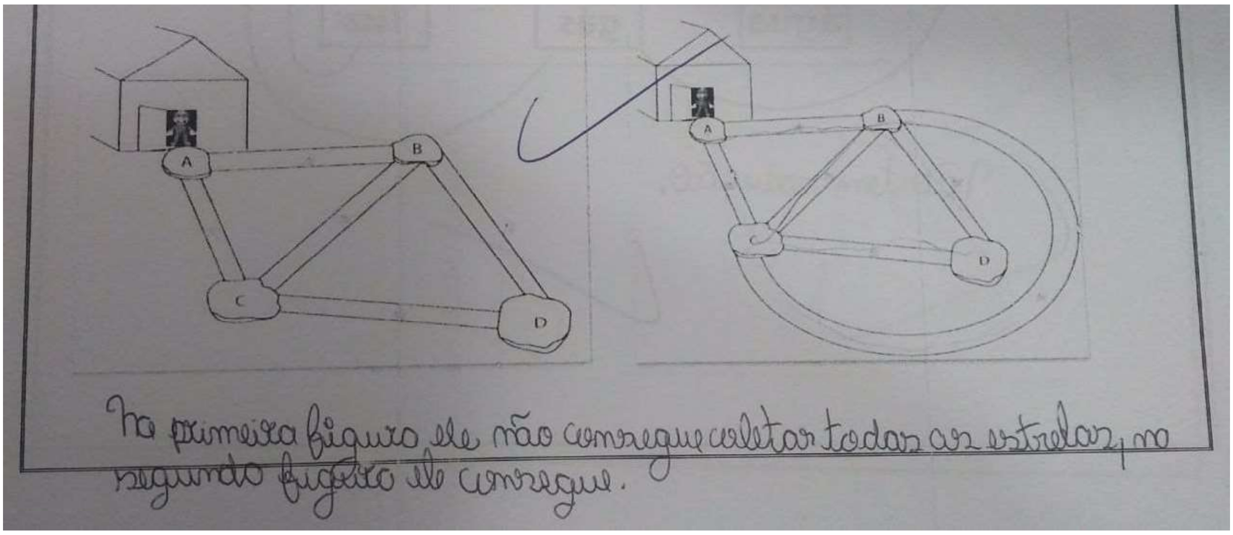



**Figura 61: Solução do aluno para questão do "Mario Bros"**

**Fonte: Autor**

Comentário:

Nota-se que, nesta atividade, o aluno deve ter tentado de várias formas solucionar o problema, pois sua folha apresentava marcas de lápis (Figura 61).O mesmo deve ter apagado bastante para tentar achar uma forma de resolver a situação 1, até perceber que esse tipo de caminho não tem resposta. Já na situação 2, a marca de lápis não aparece, pois ele deve ter conseguido solucionar o que lhe foi proposto logo nas primeiras tentativas.Assim sendo, o aluno escreveu como resposta a seguinte frase: ''Na primeira figura ele não consegue coletar todas as estrelas, na segunda figura ele consegue". A dificuldade de resolver a situação 1 ocorreu porque nesta parte de nossas atividades os discentes ainda não tinham conhecimento de Caminhos Eulerianos e Semieulerianos.

**Atividade 3:** No desenho abaixo tem-se a planta da casa de Jéssica Sabrina; ela se localiza no lado de fora da casa, e deseja entrar em sua casa, passar por todas as portas e sair dela novamente, sabendo que toda vez que ela passa por uma porta a mesma se fecha e não tem como voltar por ela. Dada esta situação, Jéssica Sabrina conseguirá fazer o que deseja? Justifique sua resposta:

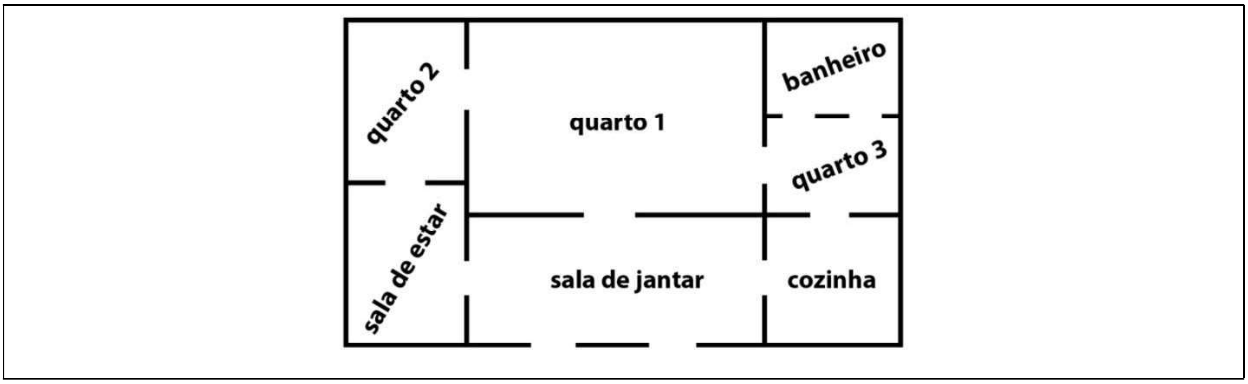




**Figura 62: Figura original e solução do aluno para questão da planta da casa**

**Fonte: Autor**

Comentário:

Essa questão era outra atividade que o aluno poderia resolver com mais facilidade se tivesse conhecimento de Caminhos Eulerianos e Semieulerianos. Acabou sendo, mais uma vez, uma questão de tentativas e erros, o que torna bem difícil a solução desse problema.

Uma solução que mereceu destaque teve o seguinte comentário: “Não consegue passar por todas as portas da casa, faltou uma porta do quarto 1”. A análise do aluno está correta, porém ele não soube explicar o porquê de essa porta do quarto 1 não ser ultrapassada por Jéssica, mas foi utilizado o bom senso e a questão foi considerada como certa.

**Atividade 4:**Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade (Figura 62). As companhias de água (A), luz (L) e gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos jamais podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora.A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?

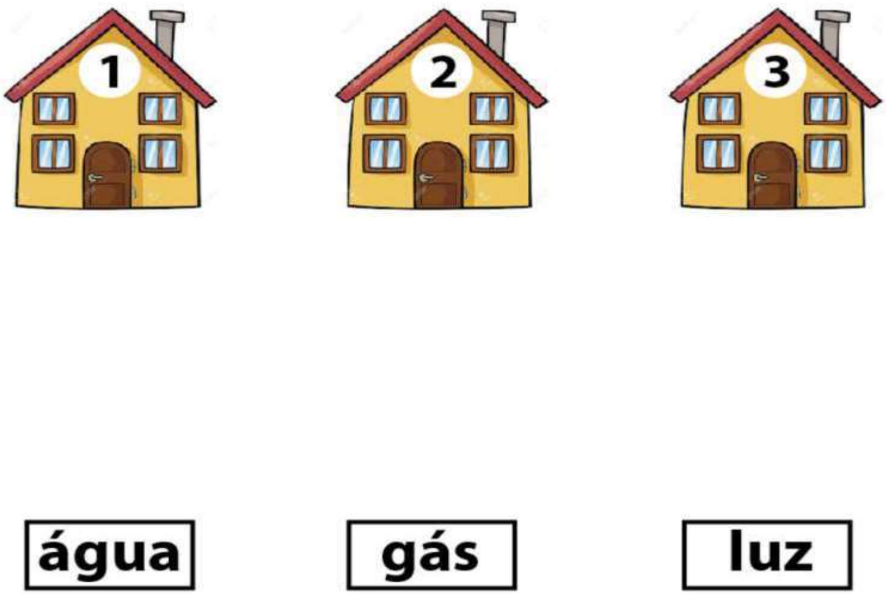



**Figura 63: Figura original da questão da Atividade 4**

**Fonte: Autor<www.barewalls.com/art-print-poster/funny-house_bwc7440834.html>, com adaptações do autor**

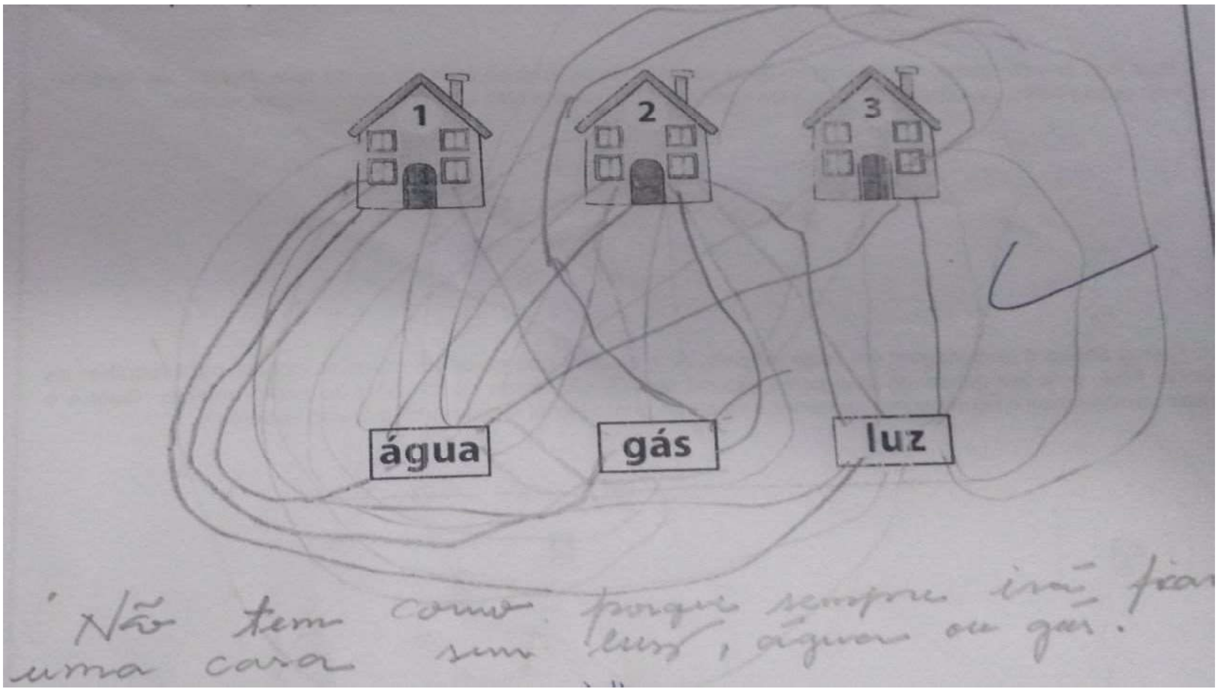



**Figura 64:Solução do aluno para questão das casinhas**

**Fonte: Autor**

Comentário:

Esta solução mereceu destaque, pois apresenta uma sucessão de linhas traçadas no papel (Figura 63), ou seja, destaca-se o interesse do aluno em encontrar a solução do problema proposto. Após tentar de várias formas distintas, isso fica notório pela foto acima, o aluno adicionou corretamente a seguinte análise: “Não tem como, porque sempre irá ficar uma casa sem luz, água ou gás”.É claro que o aluno não conhece a Teoria dos Grafos que fala sobre Grafos Bipartidos do tipo $K_{3,3}$. Sabe-se que grafos desse tipo sempre apresentarão cruzamento de arestas.

## 4.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O TESTE (SEGUNDA APLICAÇÃO)

Os conceitos do teste foram baseados nos mesmos moldes da aplicação inicial, onde I – Irregular (aluno sem nenhum acerto), R –Regular (aluno com um único acerto), B – Bom (aluno com dois ou três acertos) e E – Excelente (alunos que acertaram as quatro questões). Nos gráficos abaixo(Figuras64 e 65) foram explorados a quantidade de acertos em cada turma e as questões com suas respectivas quantidades de acertos.

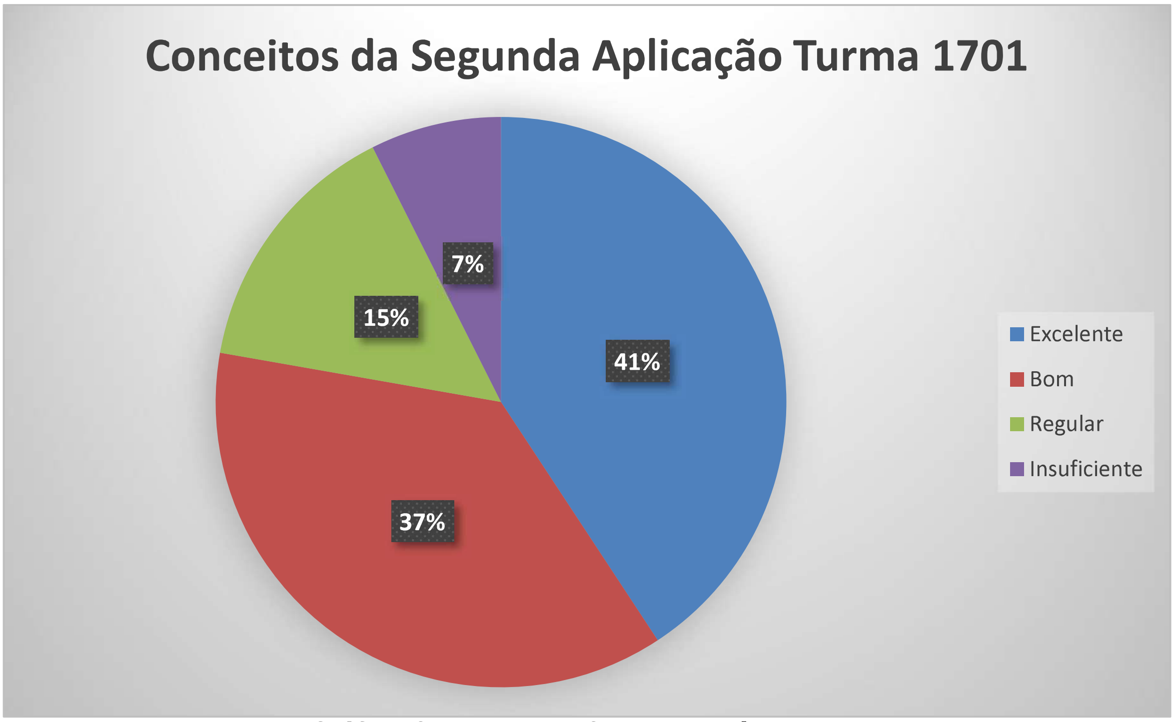



Figura 65:**Gráfico Conceitos da Segunda Aplicação Turma 1701**

**Fonte: Autor**

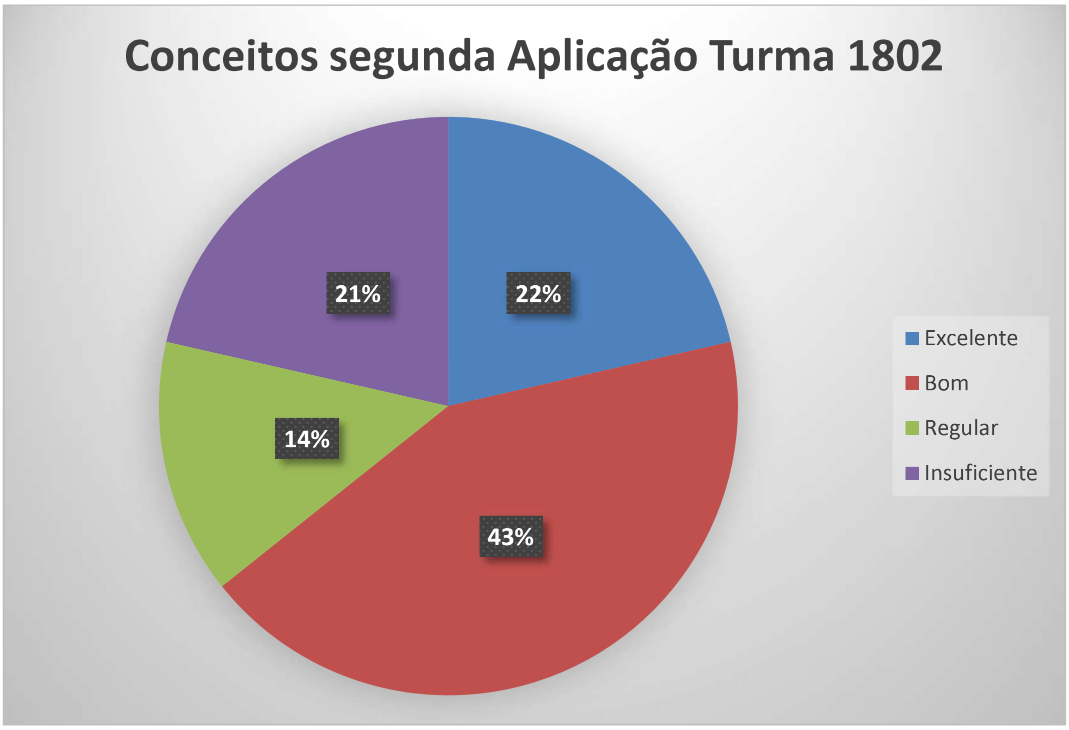



Figura 66:**Gráfico Conceitos da Segunda Aplicação Turma 1802**

**Fonte: Autor**

Observando os gráficos acima, percebe-se que ambas as turmas tiveram uma melhora significativa em relação a primeira aplicação, as turmas ultrapassaram a marca de 60% dentre os conceitos B ou E. Mais da metade deles acertaram duas ou mais questões, obtendo assim, um êxito de 50% ou mais nas atividades propostas.

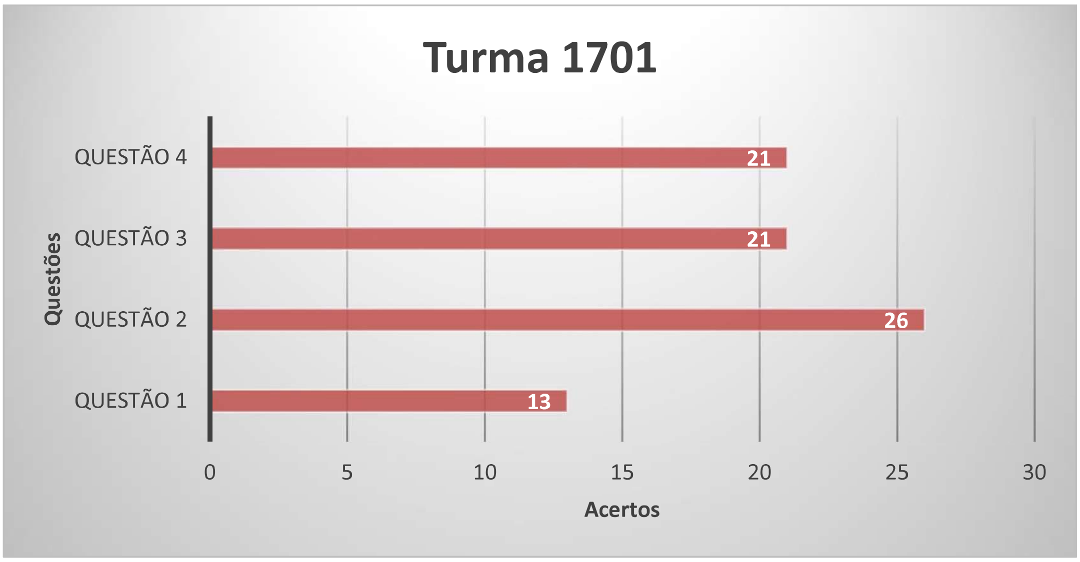



**Figura 67: Gráfico de Acertos do Teste 2 Turma 1701**

**Fonte: Autor**

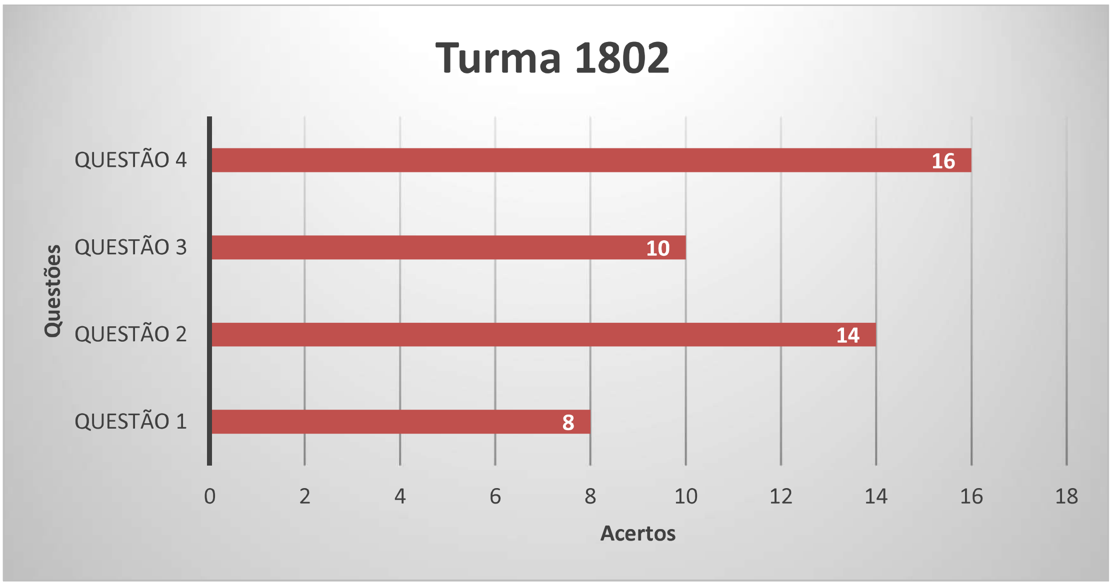


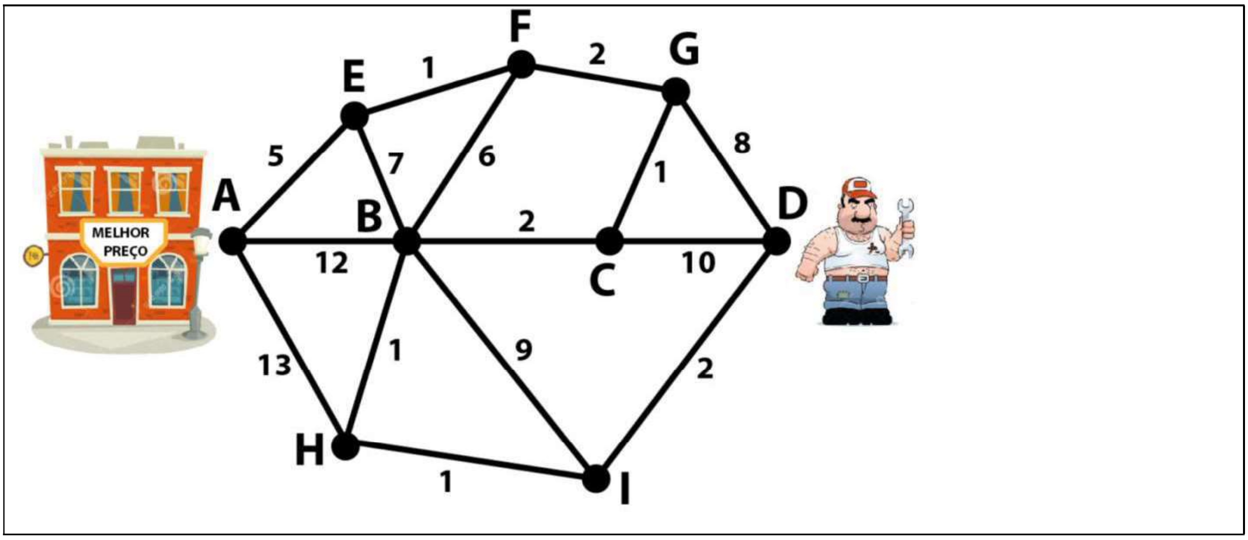

**Figura 68: Gráfico de Acertos do Teste 2 Turma 1802**

**Fonte: Autor**

Nota-se que nesta etapa do trabalho (Figuras 66 e 67) as questões com maior número de acertos foram a 2 e a 4.Ambas falavam sobre Caminhos Eulerianos e Semieulerianos, estes tópicos do projeto foram aqueles que os discentes mais conseguiram assimilar. Em contrapartida, temos a questão de número 1 com a menor quantidade de acertos.Entender completamente o Algoritmo de Dijkstra foi um tormento para um certo grupo de alunos.

Algumas questões propostas por certos alunos mereceram destaque dentre os demais, portanto as fotos das soluções foram colocadas abaixo:

| |
|---|
| **Atividade 1:**No ponto A, localiza-se uma autopeça Melhor Preço, onde suas entregas são feitas pelo motoboy Cláudio Charuto. Ele precisa entregar encomendas na oficina Bagulho Doido, localizada no ponto D. As ligações representam as ruas e os pontos representam as esquinas. O valor dado a cada ligação é o tempo necessário (em minutos) para o percurso entre uma esquina e outra devido ao trânsito. Por exemplo, são necessários 2 minutos para ir da esquina F até a esquina G. Qual é o caminho que Cláudio Charuto terá que percorrer para entregar mais rapidamente as encomendas na oficina Bagulho Doido, e qual seria o tempo total deste percurso? |



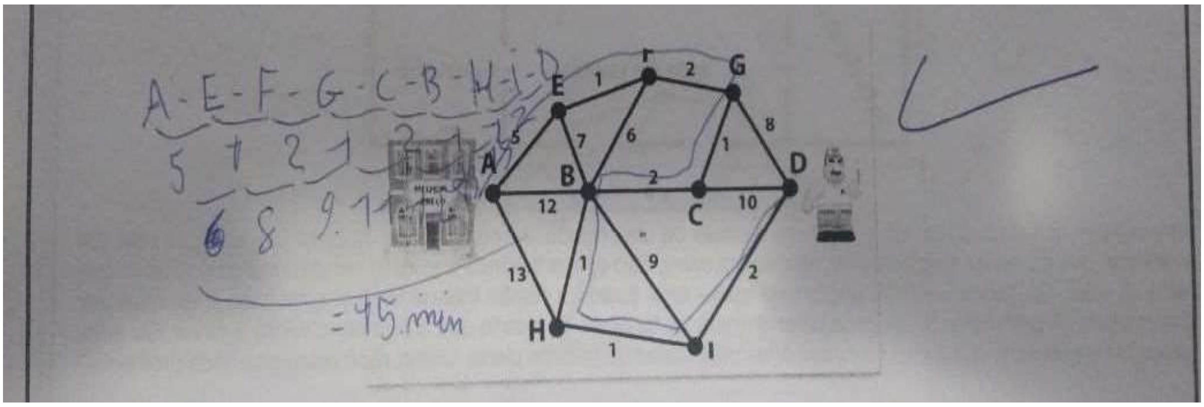




**Figura 69: Figura original e solução apresentada por um aluno: questão sobre Algoritmo de Dijkstra**

**Fonte:Autor**

Comentário:

O aluno com o conhecimento adquirido na aula sobre Algoritmo de Dijkstra conseguiu concluir a questão de modo simplificado.Aprender técnicas sobre a teoria dos Grafos otimizou o trabalho do estudante.

**Atividade 2:**Num jogo de videogame, o personagem deve pegar todas as estrelas para passar de fase. Porém, ele só pode passar pelas pontes uma única vez, pois logo após pisar nas pontes elas caem, como na Figura 69 abaixo. Nas figuras abaixo o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos as pontes para recolher as estrelas. Mas, uma vez passando pela ponte, ela se destrói, não tendo como voltar ao ponto anterior. Qual é o melhor caminho para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

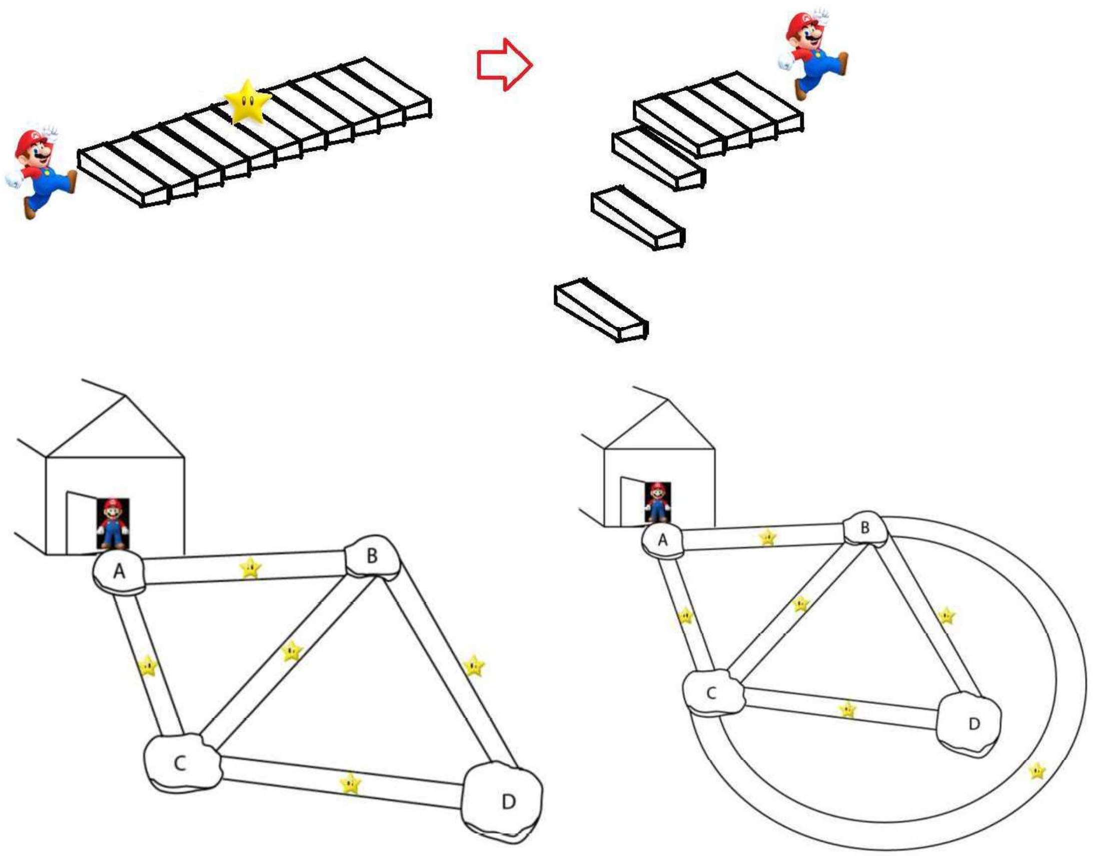



**Figura 70**: **Figura original da Atividade 2.**

**Fonte:SILVA,2015, p.58**

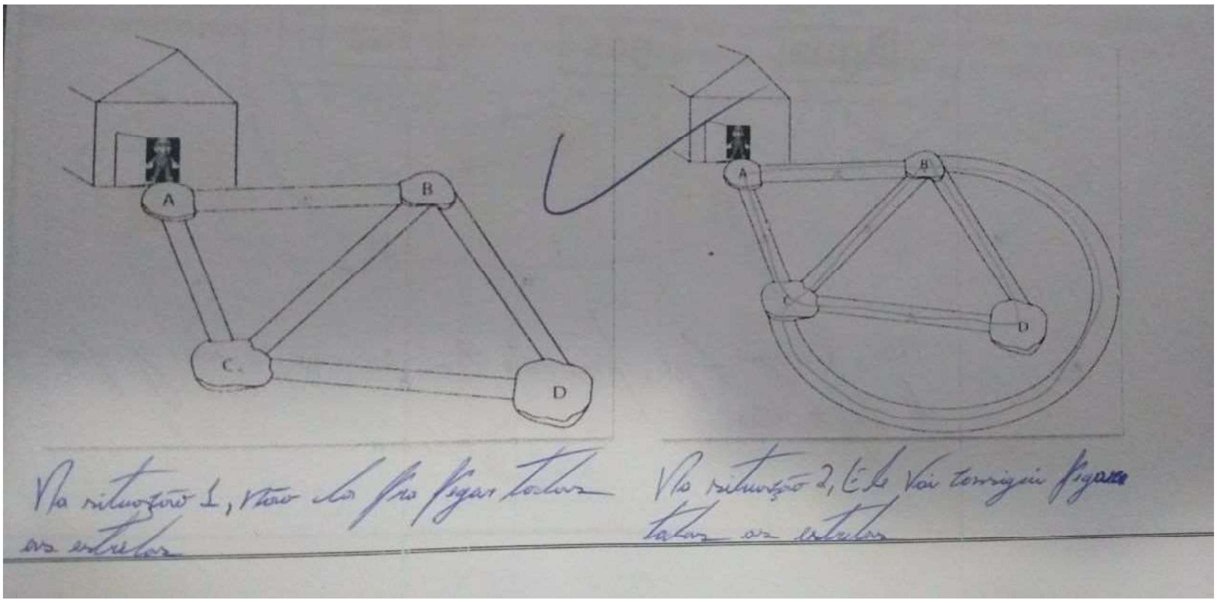



**Figura 71: Solução apresentada por um aluno: questão sobre Caminhos Eulerianos e Semieulerianos**

**Fonte: Autor**

Comentário:

Esta solução (Figura 70)merece destaque, pois o aluno citou as duas soluções separadamente. Faltou apenas complementar o porquê de ele chegar a tal conclusão, ou seja, explicar que se trata de uma atividade de Caminhos Eulerianos e Semieulerianos.Devido a essa situação, temos que a primeira situação não é possível, mas a segunda situação, por se tratar de um grafo Euleriano,é possível.

**Atividade 3:** No desenho abaixo (Figura 71) tem-se a planta da casa de Jéssica Sabrina; ela se localiza no lado de fora da casa, e deseja entrar em sua casa, passar por todas as portas e sair dela novamente, sabendo que toda vez que ela passa por uma porta a mesma se fecha e não tem como voltar por ela. Dada esta situação, Jéssica Sabrina conseguirá fazer o que deseja? Justifique sua resposta:

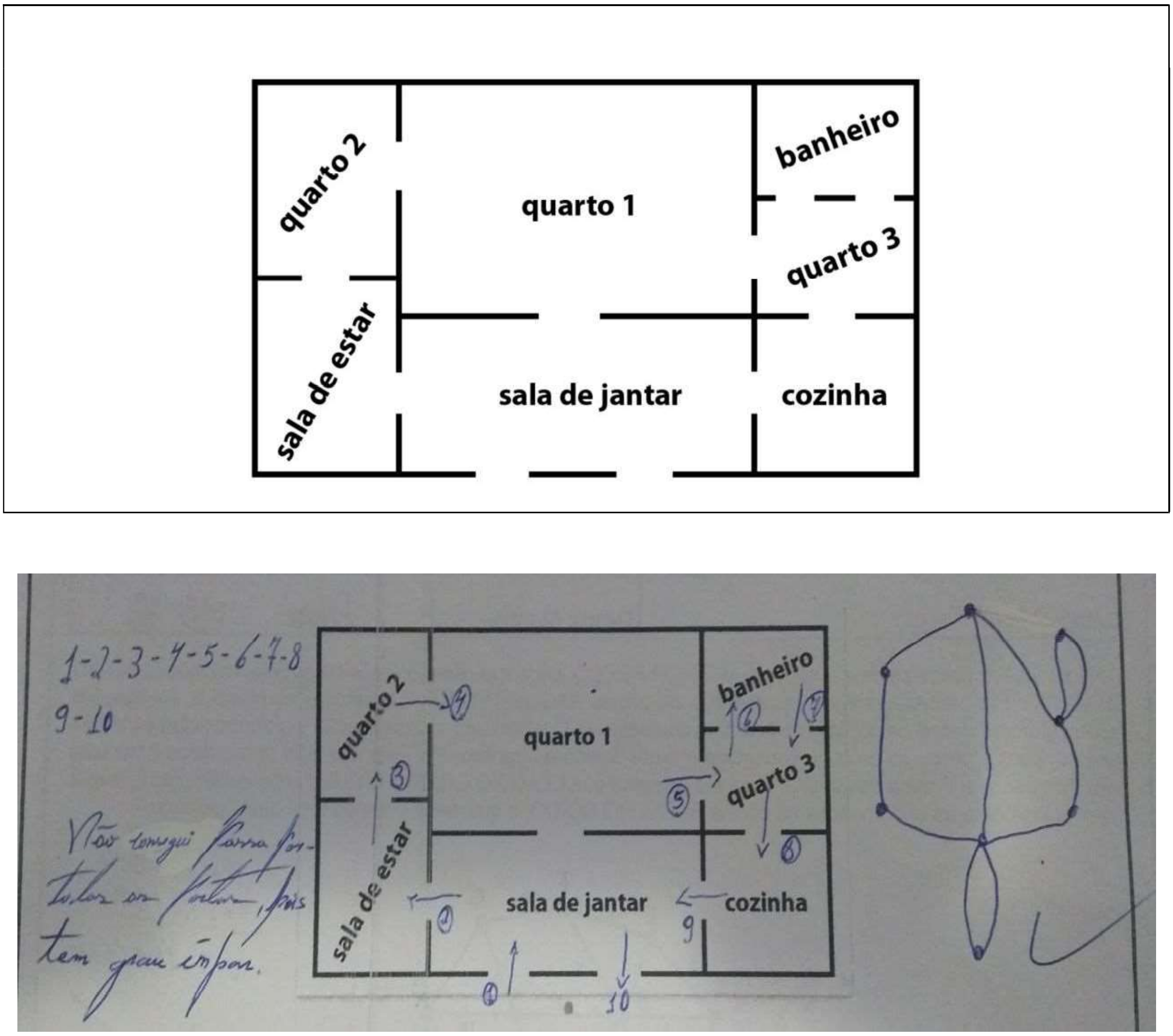


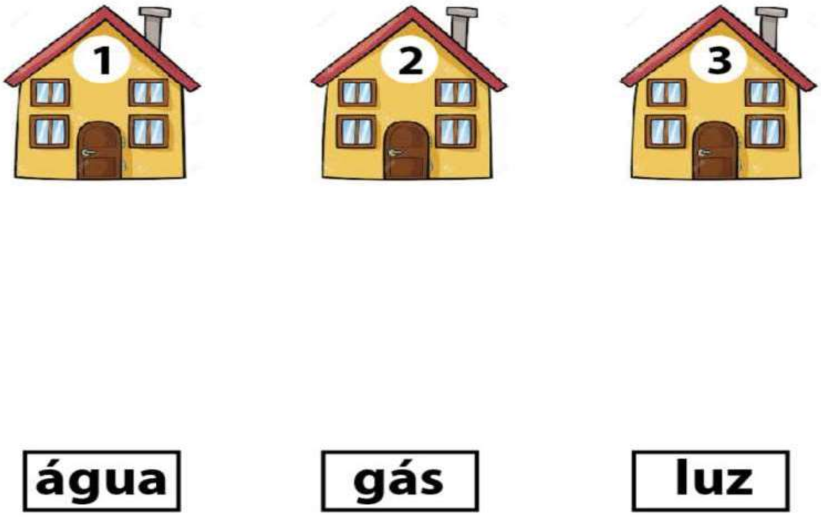

**Figura 72: Figura original e solução apresentada por um aluno: questão sobre Caminhos Eulerianos e Semieulerianos**

**Fonte: Autor**

Comentário:

Esta é uma solução digna de um aluno que conseguiu assimilar esta parte da Teoria dos Grafos com afinco e presteza (Figura 71), pois a solução dada por este discente é de puro conhecimento.“Não consegui passar por todas as portas, pois tem grau ímpar”, escreveu. O mesmo numerou suas passagens e após isso ainda utilizou o grafo ao lado para auxiliá-lo na solução da atividade.Obviamente houve outras soluções que chegaram bem próximo do ideal, mas este aluno foi o único que desenhou o grafo de forma correta ao lado de fora da figura.A maioria dos alunos tentou desenhar o grafo dentro da planta da casa.

**Atividade 4:**Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L) e gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora.A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?



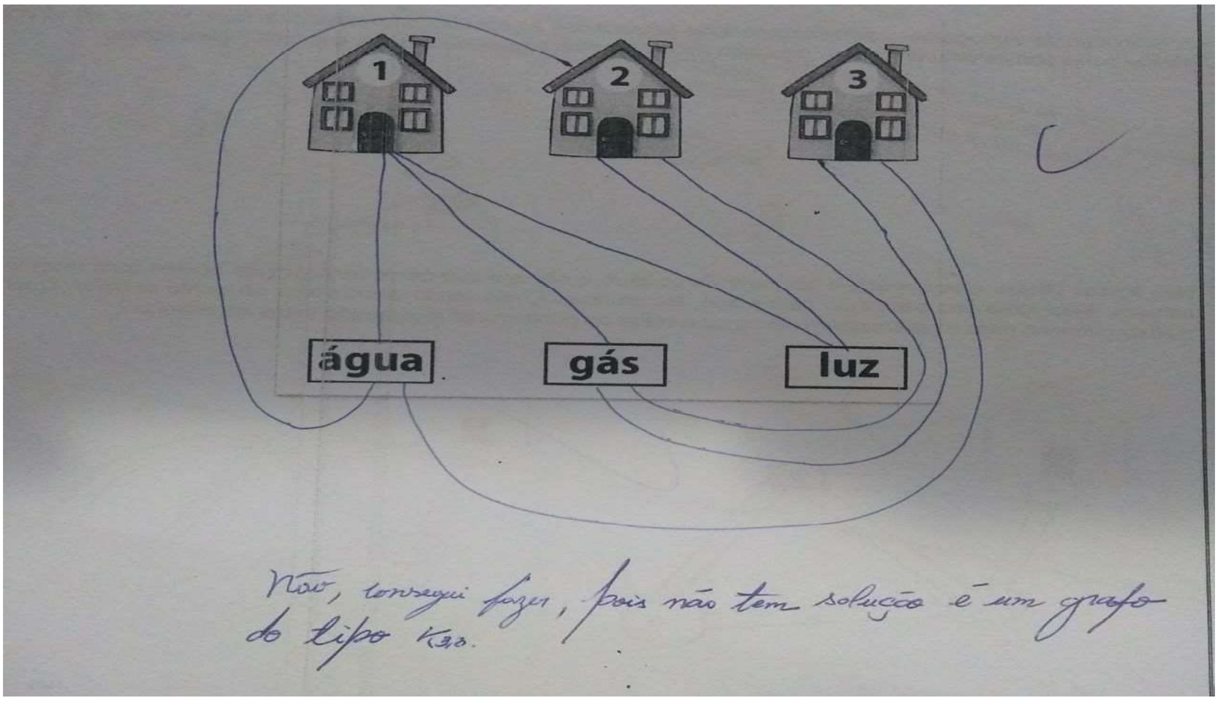




**Figura 73: Figura original e solução apresentada por um aluno para questão das casinhas.**

**Fonte: Autor**

Comentário:

Mais uma vez o mesmo aluno mereceu destaque com sua solução (Figura 72).O discente já havia se destacado pela maneira que resolveu as atividades 2 e 3, e agora pela resposta dada a atividade de número 4, dizendo o seguinte: “Não consegui fazer, pois não tem solução. É um grafo do tipo $K_{3,3}$”.

## 4.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE O QUESTIONÁRIO FINAL

Encerrando as atividades (Figura 73), os alunos foram colocados de frente a um questionário que fazia alusão a quão importante e satisfatório foi estudar um pouquinho sobre a Teoria dos Grafos, uma ferramenta de extrema importância dentro da matemática que serve para dirimir custos e otimizar tempo.

**Figura 74: Foto dos alunos do sétimo ano respondendo ao questionário final**

**Fonte: Autor**

A partir de agora, serão analisadas as respostas dos alunos das duas turmas separadamente:

Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

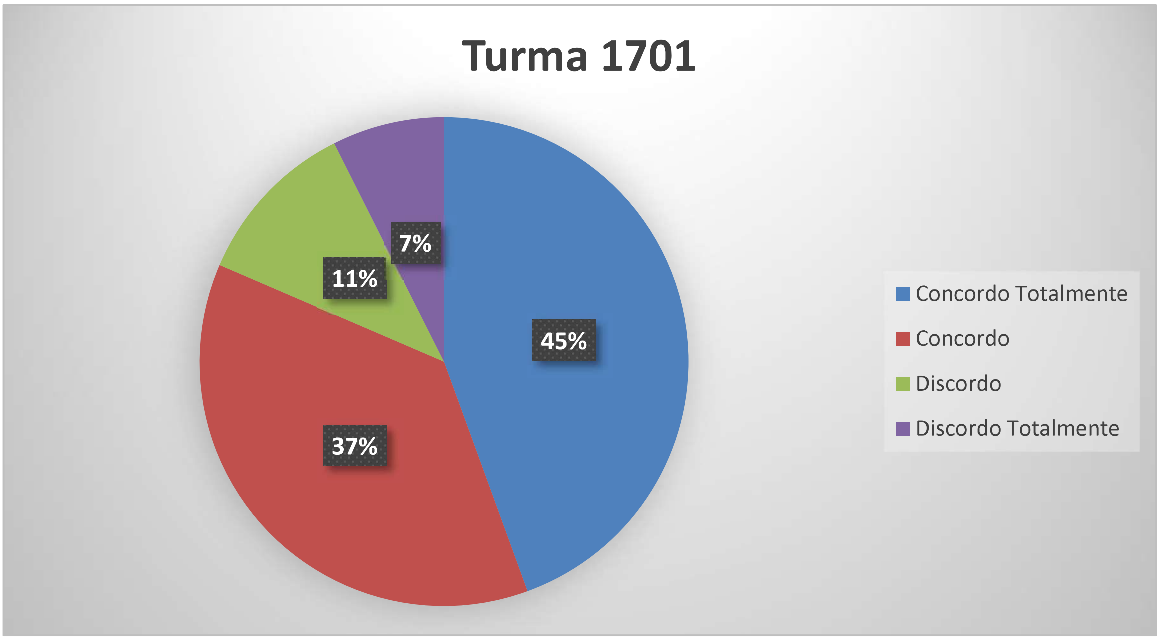



**Figura 75: Gráfico sobre o interesse e gosto pela Matemática turma 1701.**

**Fonte: Autor**

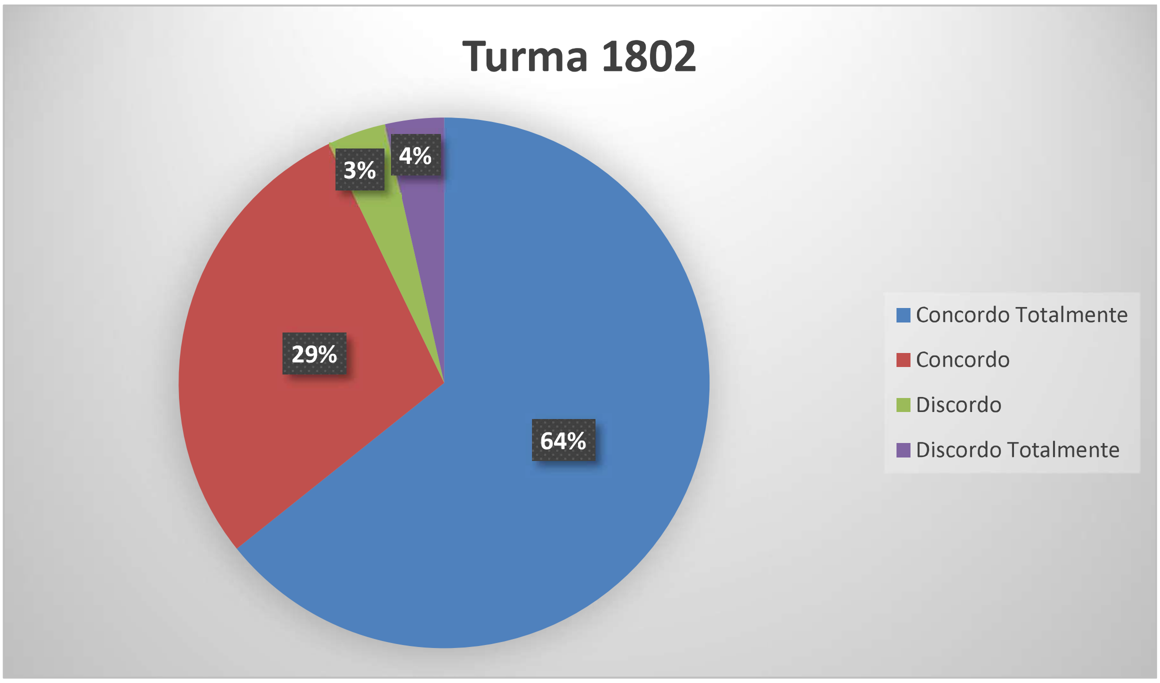



**Figura 76: Gráfico sobre o interesse e gosto pela Matemática turma 1802.**

**Fonte: Autor**

Nota-se,neste momento, um número assustador pela satisfação em estudar a matemática (Figuras 74 e 75). Na turma 1701 tem-se que mais de 80% dos alunos concordam ou concordam totalmente com tal fato, enquanto na turma 1802 este número é maior ainda, cerca de 93% dos alunos se dividiram entre essas duas respostas.Após números avassaladores, constatados nos gráficos acima, percebe-se que,ao se mudar a maneira de apresentar a matemática, haverá um interesse muito maior por parte dos estudantes. A forma com a qual as aulas sobre Grafos foram apresentadas a eles podem ter influenciado bastante no momento de responder tal pergunta.

Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos (Figuras 76 e 77).

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

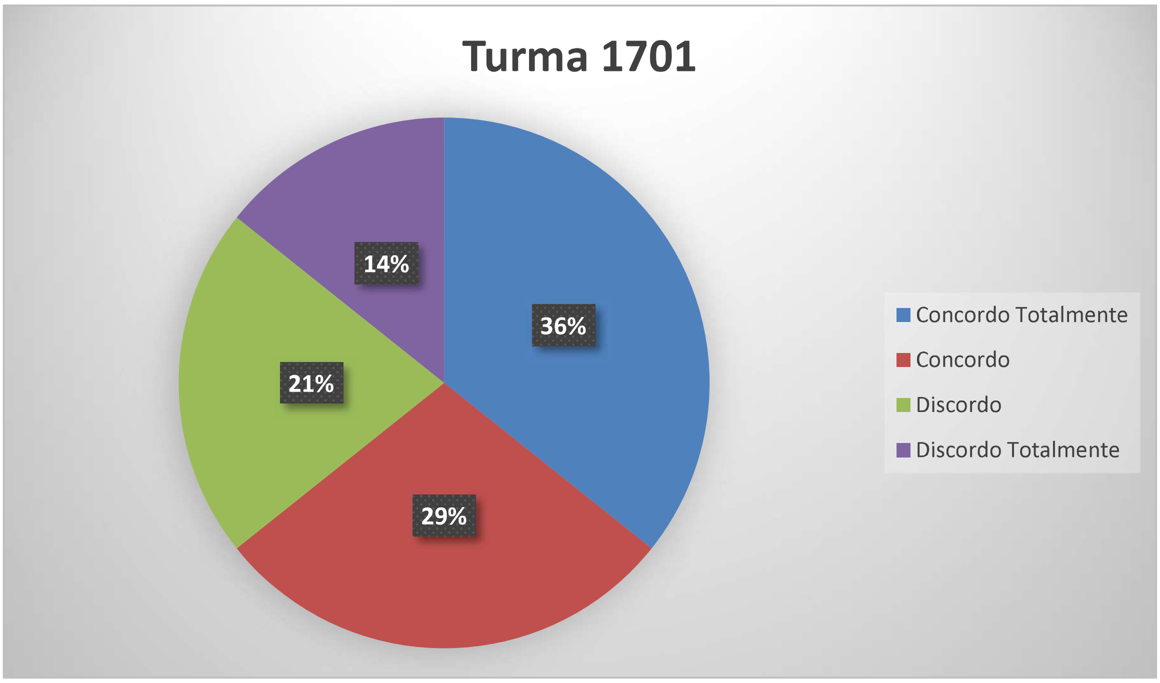



**Figura 77: Gráfico sobre a facilidade do estudo sobre Grafos turma 1701.**

**Fonte:Autor**

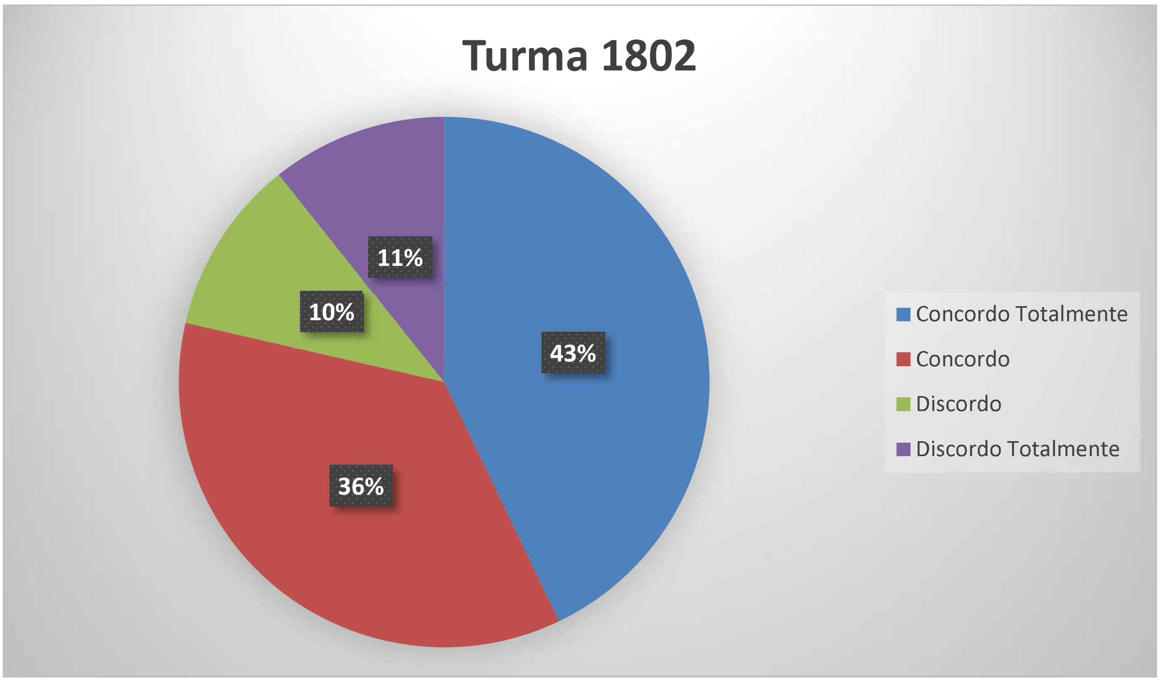



**Figura 78: Gráfico sobre a facilidade do estudo sobre Grafos turma 1802.**

**Fonte: Autor**

O que foi estudado neste trabalho é uma ínfima fração do conteúdo básico sobre Teoria dos Grafos; mas assim mesmo, tomando em consideração que tal projeto foi realizado com jovens entre 12 e 14 anos de idade, que neste momento de suas vidas procuram situações que sejam simples e objetivas, parece ter sido um sucesso. Houve uma aceitação elevada, com mais 60% dos estudantes concordando ou concordando totalmente que estudar Grafos foi bem fácil.

Achei fácil estudar os conteúdos sobre Algoritmos de Dijkstra (Figuras 78 e 79).

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

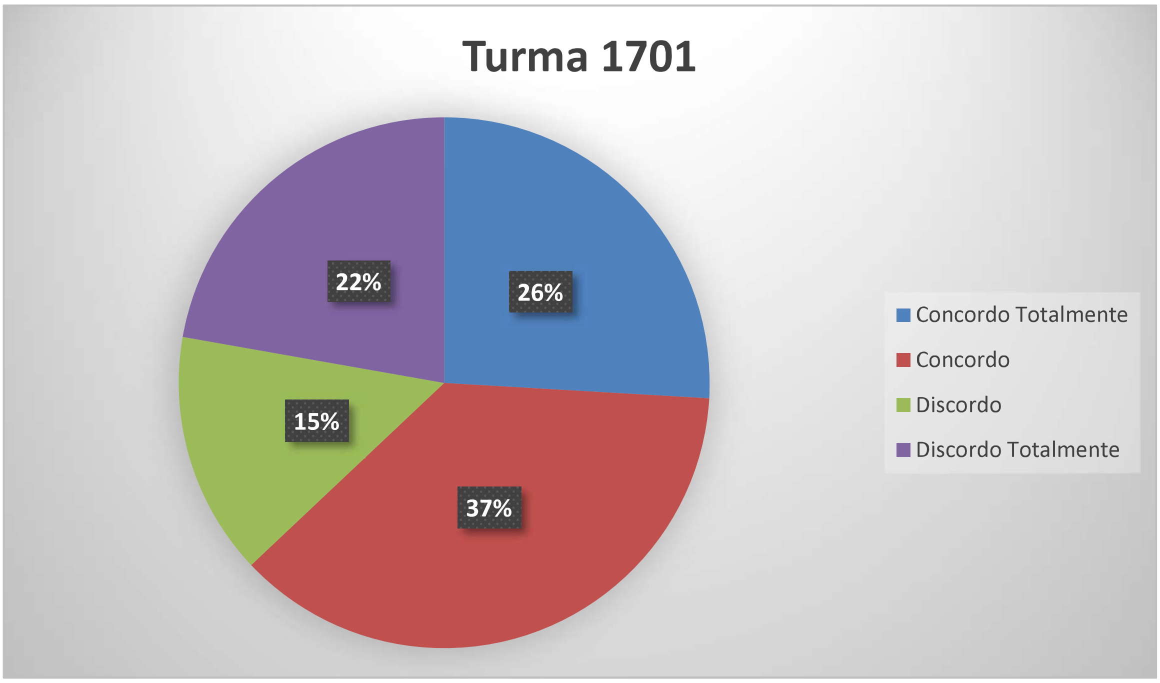



**Figura 79: Gráfico sobre a facilidade de estudar Algoritmo de Dijkstra turma 1701.**

**Fonte: Autor**

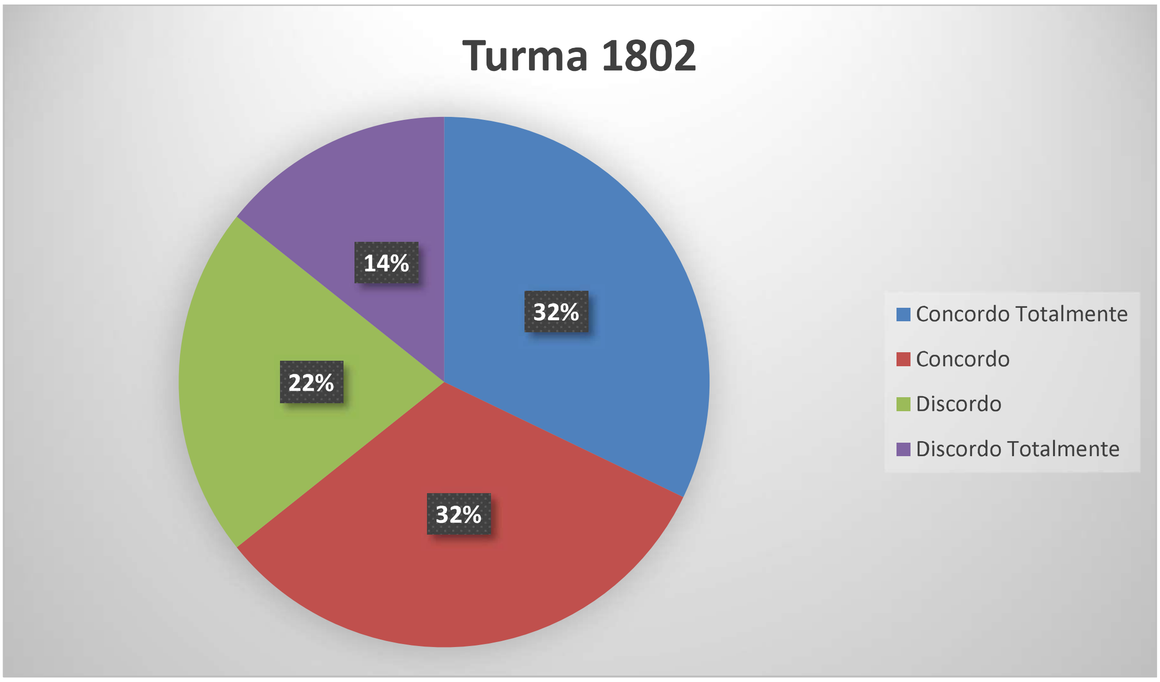



**Figura 80: Gráfico sobre a facilidade de estudar Algoritmo de Dijkstra turma 1802.**

**Fonte: Autor**

Esta parte do conteúdo foi a que os estudantes tiveram a maior dificuldade, pois que aqueles que discordam ou discordam totalmente, em ambas as turmas, ultrapassam a marca de 37% dos alunos.

Entendi as várias situações onde podemos aplicar Caminhos Eulerianos e semieulerianos (Figuras 80 e 81).

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

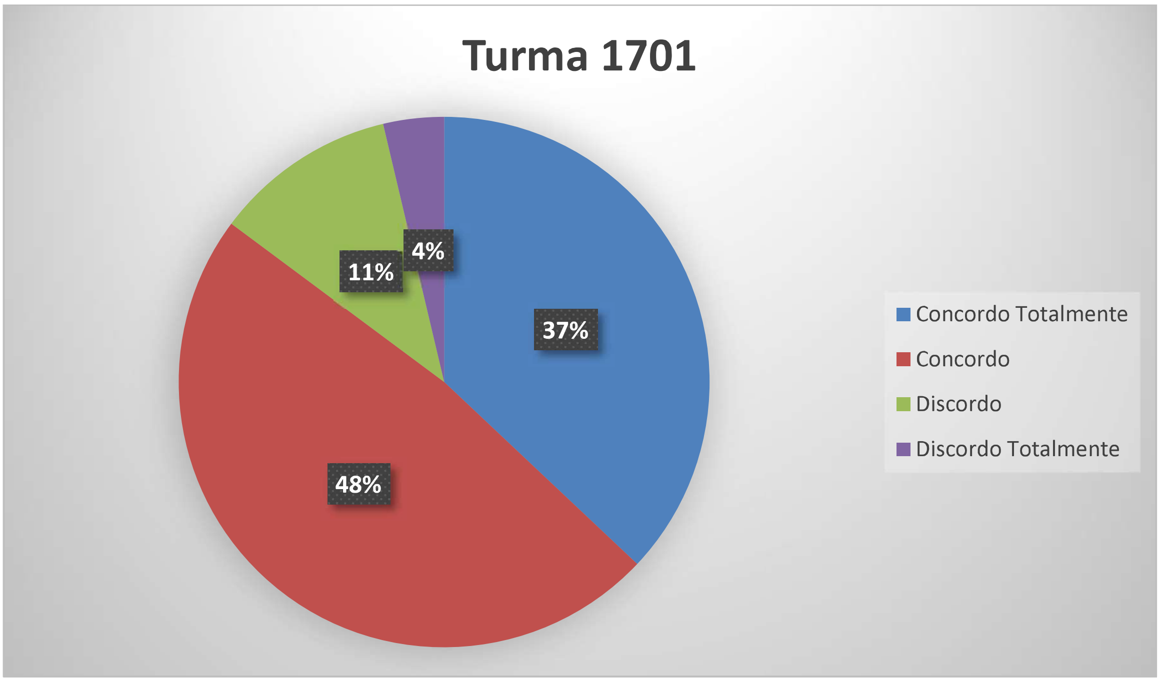



**Figura 81: Gráfico sobre as aplicações de Caminhos Eulerianos e Semieulerianos turma 1701**

**Fonte: Autor**

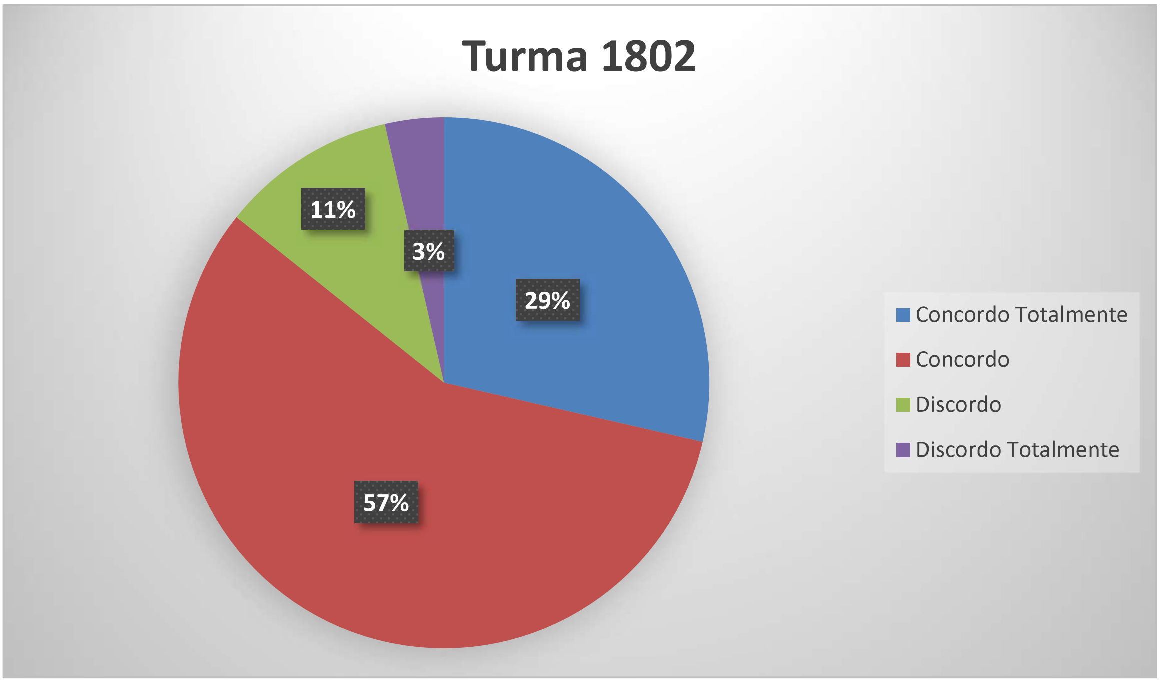



**Figura 82: Gráfico sobre as aplicações de Caminhos Eulerianos e Semieulerianos turma 1802**

**Fonte: Autor**

Caminhos Eulerianos e Semieulerianos foram conteúdos nos quais os alunos obtiveram um maior êxito; tal fato é constatado a partir dos gráficos acima representados, onde nos mostra que mais de 85% dos estudantes, em ambas as turmas, concordam ou concordam totalmente em entender melhor as situações onde foi aplicadaesta teoria.

Achei mais interessante resolver problemas de Matemática utilizando Grafos do que da maneira tradicional (Figuras 82 e 83).

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

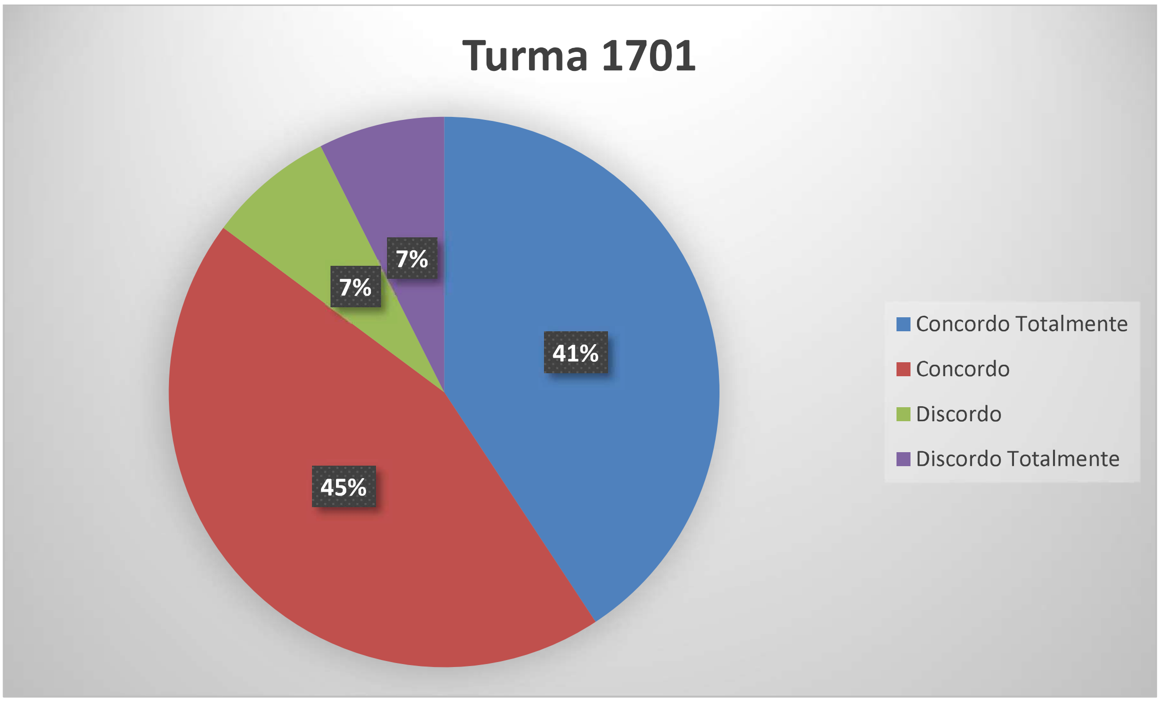



**Figura 83: Gráfico sobre o interesse em utilizar a Teoria dos Grafos turma 1701**

**Fonte: Autor**

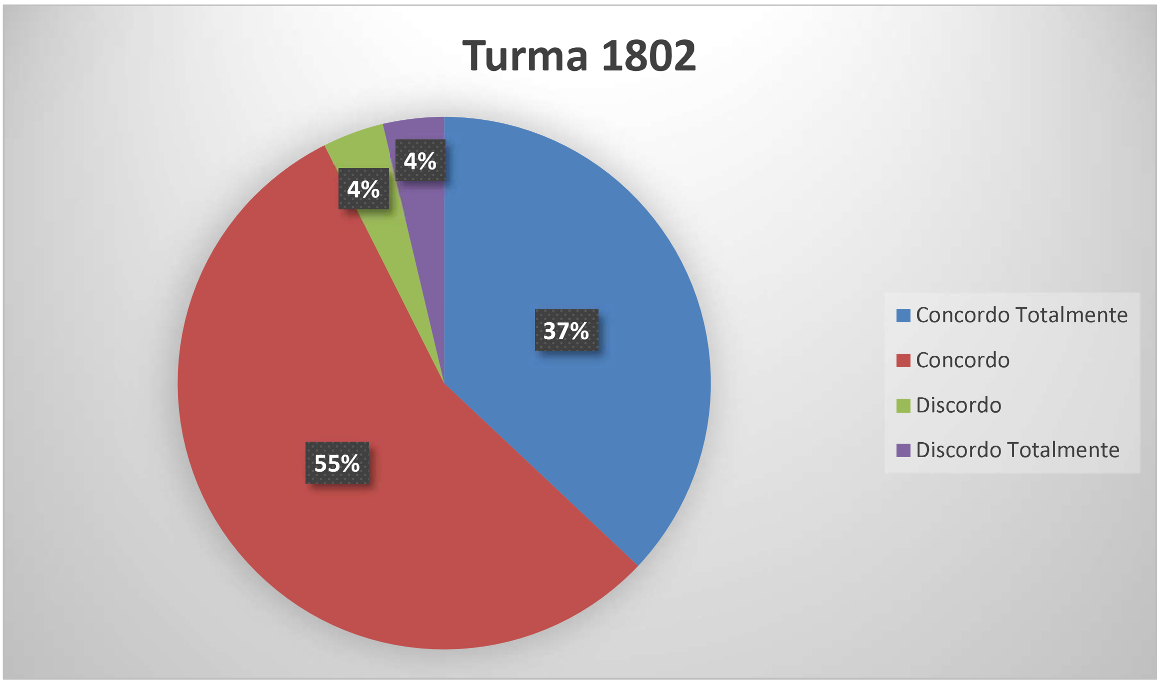



**Figura 84: Gráfico sobre o interesse em utilizar a Teoria dos Grafos turma 1802**

**Fonte: Autor**

Resolver problemas utilizando a Teoria dos Grafos é melhor que resolver utilizando a maneira tradicional. Os números entre 85% e 92% que concordam ou concordam totalmente em ser mais simples estudar matemática desta forma foram maiores do que o imaginado.

Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos na internet (Figuras 84 e 85).

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

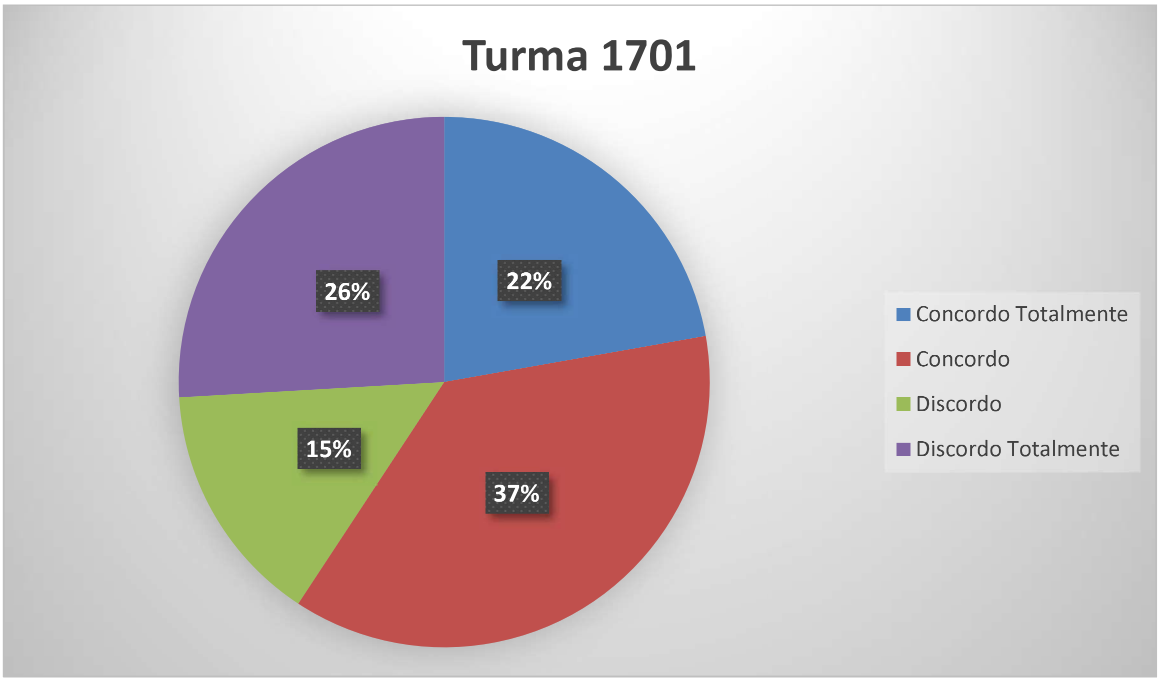



**Figura 85: Gráfico sobre informações via internet turma 1701**

**Fonte: Autor**

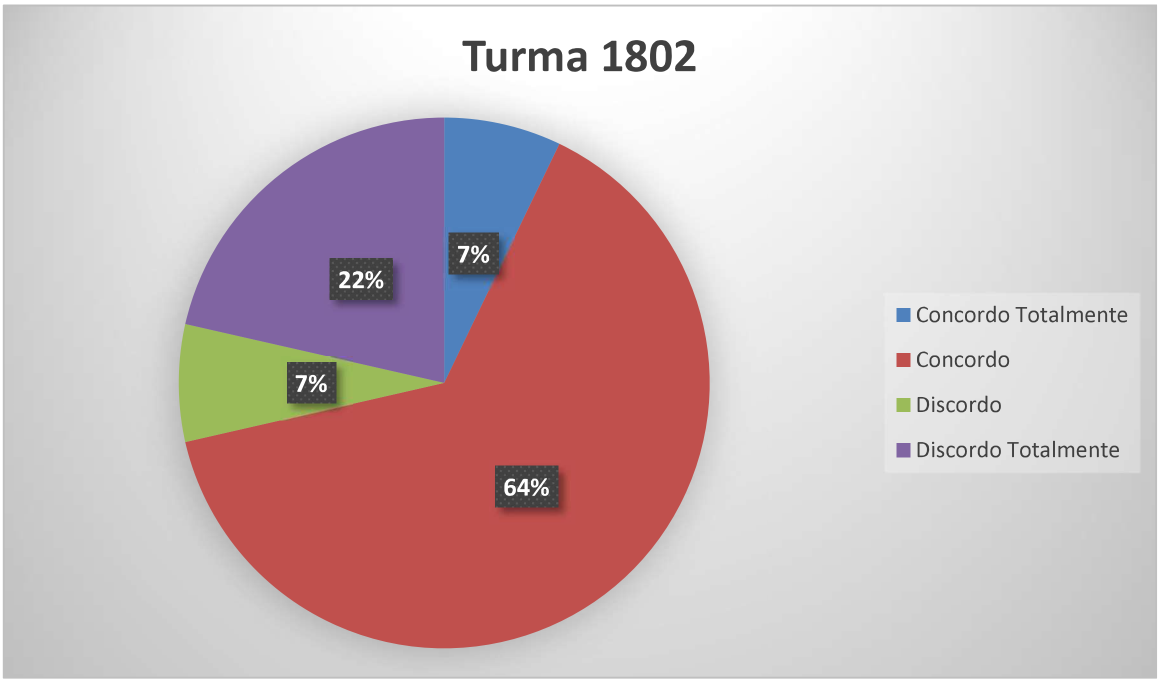



**Figura 86: Gráfico sobre informações via internet turma 1802**

**Fonte: Autor**

Alunos deste segmento do ensino dificilmente buscam informações adicionais extraclasse. A turma do sétimo ano teve 41% dos alunos que discordam ou discordam totalmente, enquanto a turma do oitavo ano teve um número bem mais baixo, cerca de 29% dos estudantes. Tal número foi surpreendente.

Fiquei mais motivado para estudar Matemática após descobrir que Grafo pode ser usado para resolver problemas do cotidiano, como problema da coleta de lixo (Figuras 86 e 87).

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

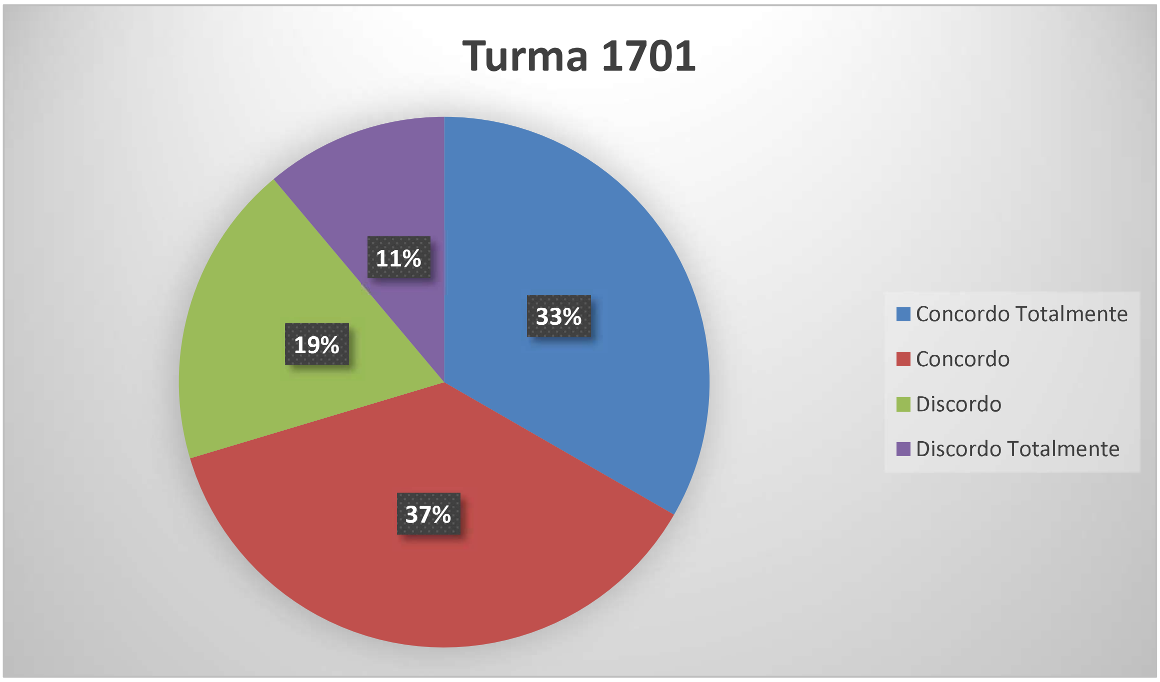



**Figura 87: Gráfico sobre resolver problemas do cotidiano utilizando a Teoria dos Grafos turma 1701**

**Fonte: Autor**

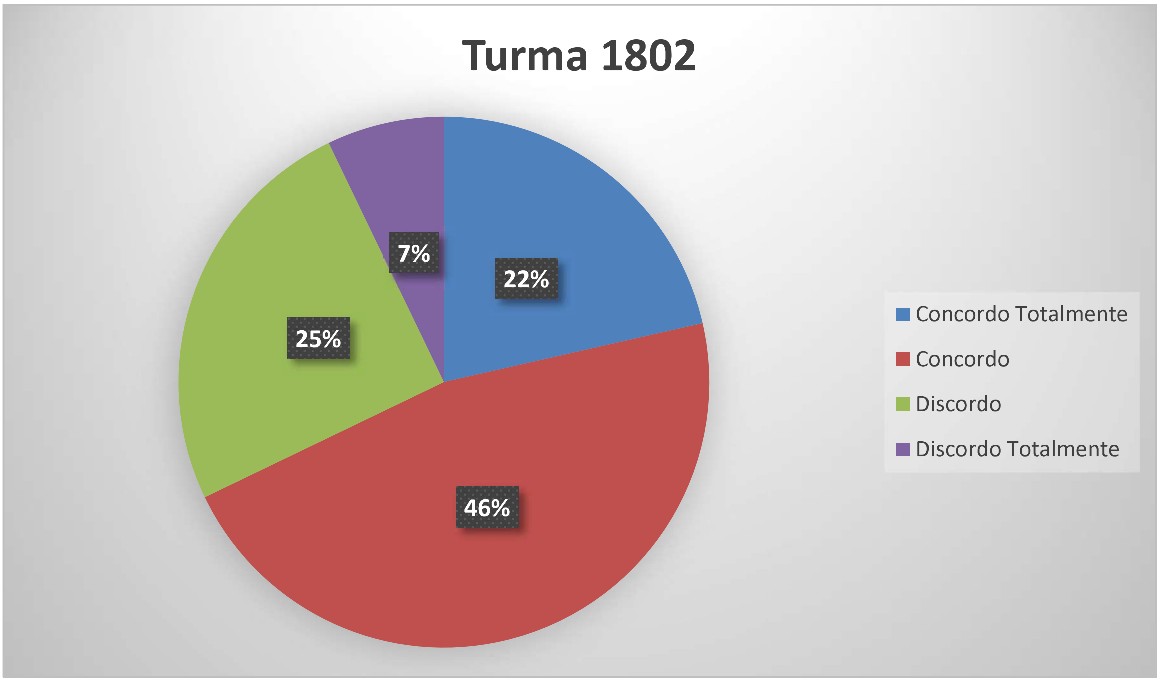



**Figura 88: Gráfico sobre resolver problemas do cotidiano utilizando a Teoria dos Grafos turma 1802**

**Fonte: Autor**

Um dos exemplos mais utilizados em aulas sobre a Teoria dos Grafos é o da coleta de lixo, problema este que torna cada vez mais interessante o estudo sobre Grafos.A maioria dos alunos nunca deve ter parado para se perguntar sobre tais situações, por isso houve cerca de 70% dos alunos que concordam ou concordam totalmente em terem ficados mais motivados em estudar matemática. Pode-se pensar que eles jamais iriam imaginar que situações deste tipo poderiam ser resolvidas através de interpretação matemática, ou seja, que tal disciplina tivesse uma ramificação que pudesse lhes mostrar isso.

Você daria nota máxima pelo grau satisfação do trabalho realizado (Figuras 88 e 89).

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

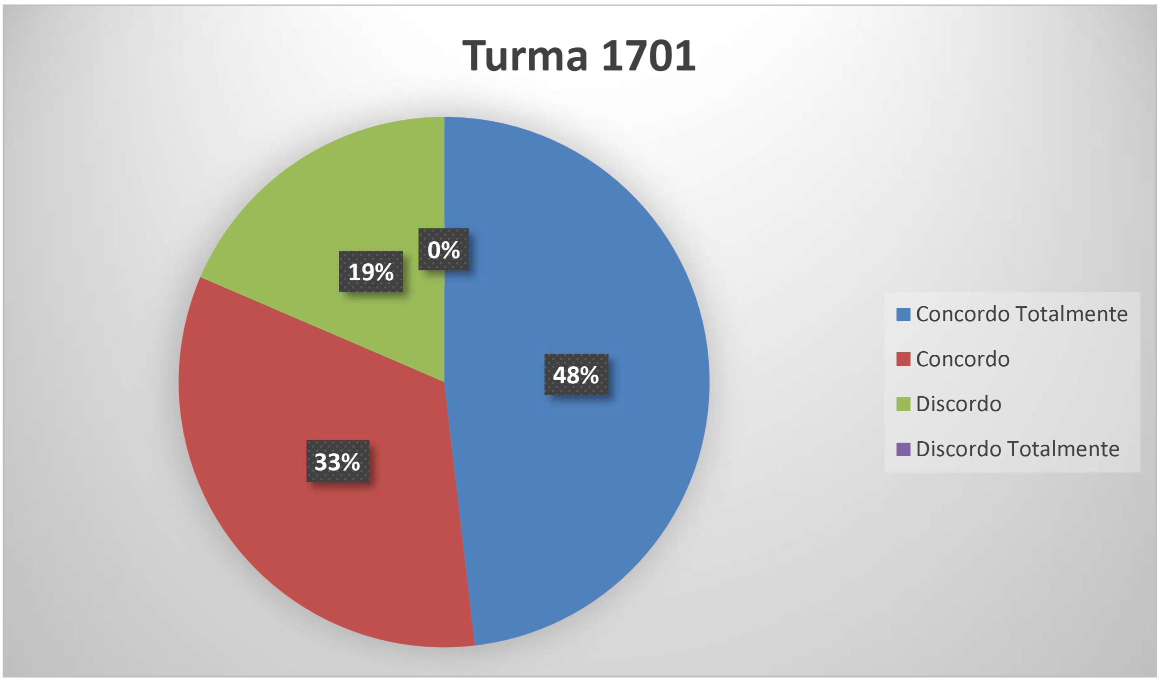



**Figura 89: Gráfico sobre nota de satisfação ao trabalho realizado turma 1701**

**Fonte: Autor**

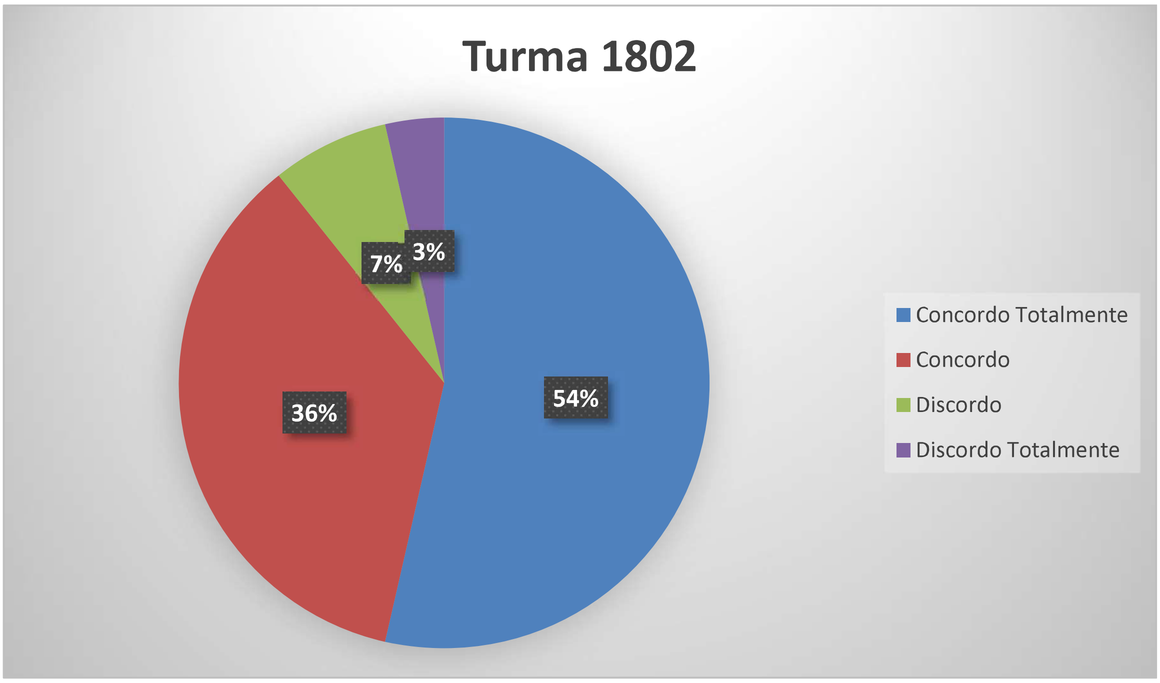



**Figura 90: Gráfico sobre nota de satisfação ao trabalho realizado turma 1802**

**Fonte: Autor**

Nota-se que discordar totalmente em dar nota máxima pelo grau de satisfação do trabalho realizado teve um número muito baixo na 1802.Na turma 1701 ninguém sinalizou esta resposta, enquanto na turma 1802 esse número foi de 3% dos estudantes.Portanto, percebe-se que um número elevado de alunos teve o prazer de terem participado desse projeto.

Você acredita que seja necessário inserir Teoria dos Grafos como conteúdo do Ensino Fundamental (Figuras 90 e 91).

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

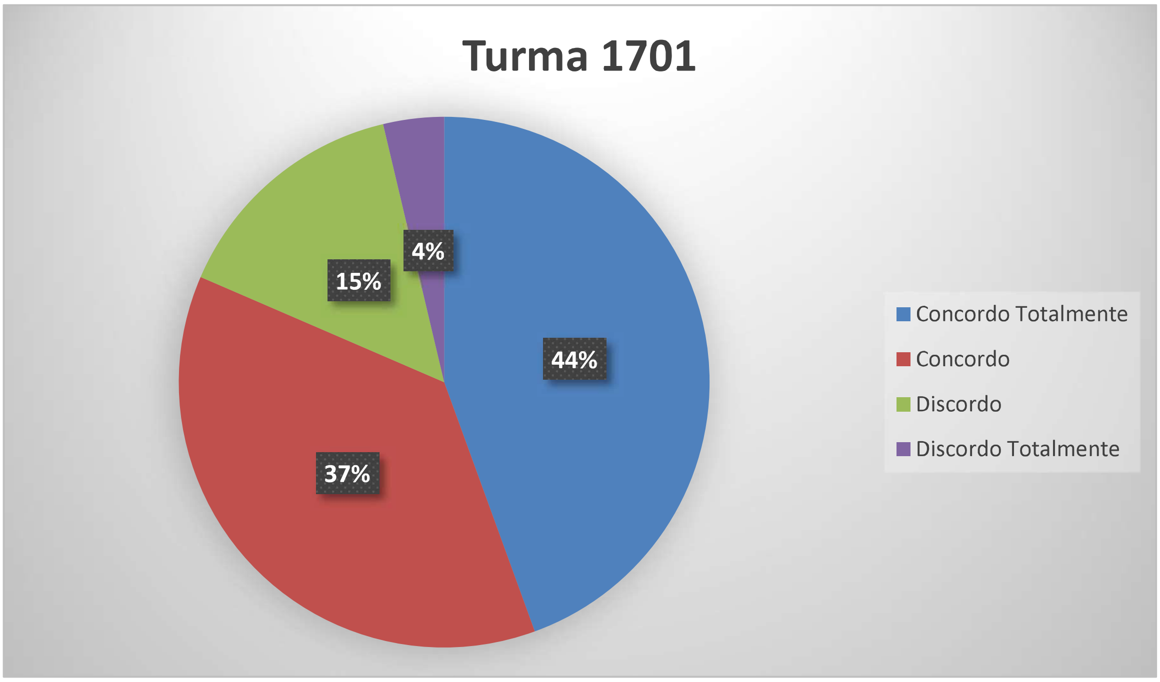



**Figura 91: Gráfico sobre estudar Grafos no Ensino Fundamental turma 1701**

**Fonte: Autor**

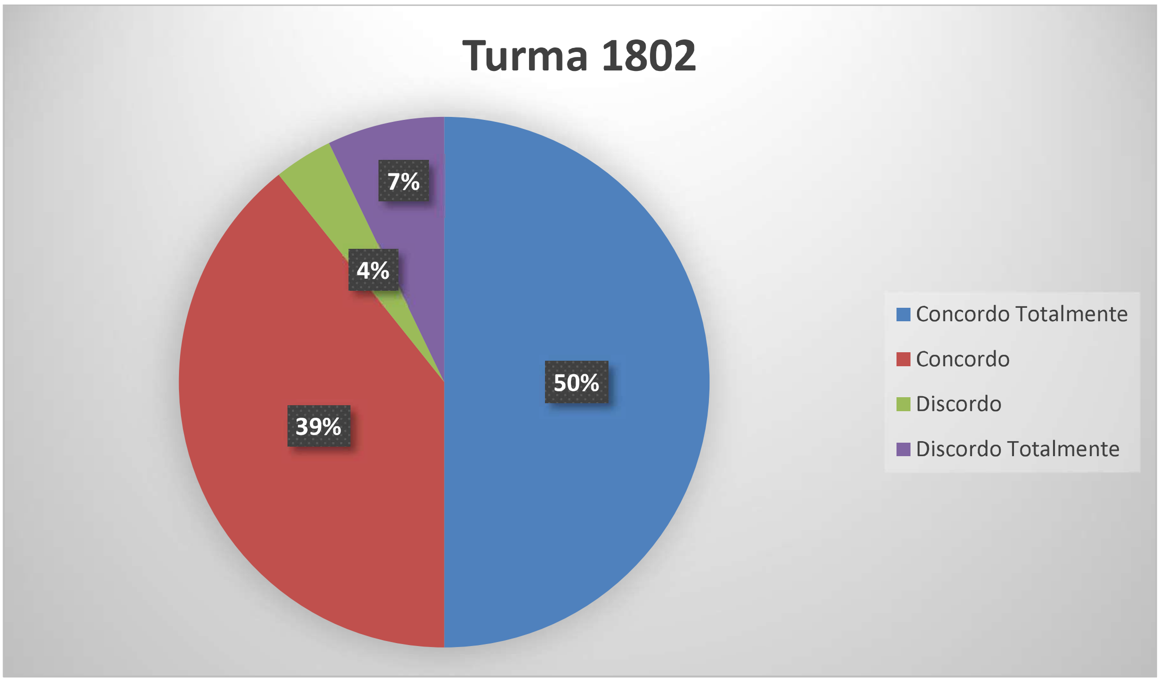



**Figura 92: Gráfico sobre estudar Grafos no Ensino Fundamental turma 1802**

**Fonte: Autor**

Em ambas as turmas concordar ou concordar totalmente ultrapassaram a marca dos 80% dos alunos.O assunto teve uma aprovação em massa dentre os estudantes, achando sua inserção na grade curricular do ensino fundamental muito importante para o desenvolvimento do raciocínio.

A relação de vocês com o professor ficou mais próxima após esse trabalho (Figuras 92 e 93).

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

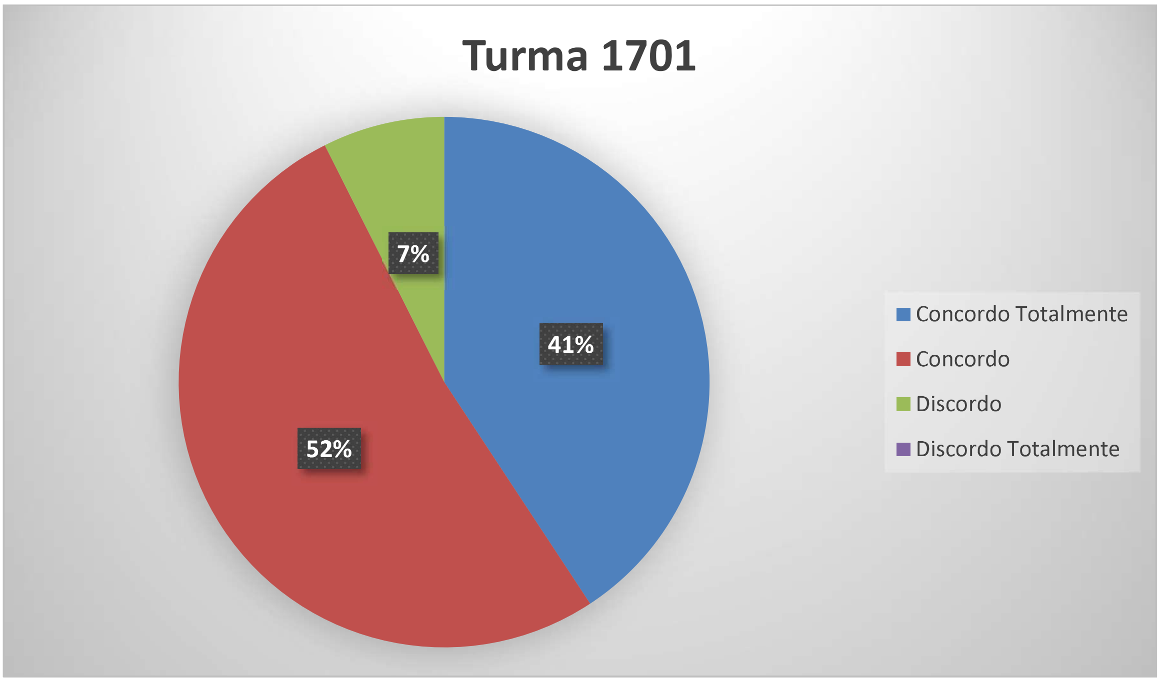



**Figura 93: Gráfico sobre relação professor-aluno turma 1701**

**Fonte: Autor**

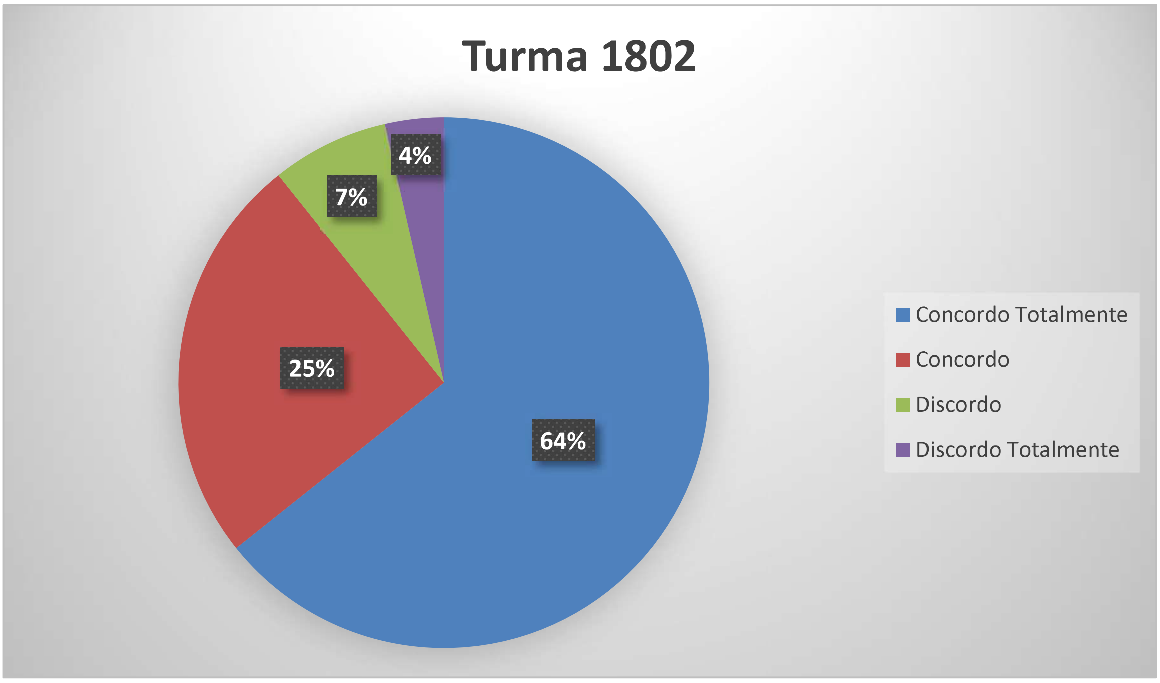



**Figura 94: Gráfico sobre relação professor-aluno turma 1802**

**Fonte: Autor**

Os resultados nos mostram que a relação professor-aluno ficou mais próxima após este trabalho, pois cerca de 90% dos estudantes na turma 1802 concordam ou concordam totalmente com tal pergunta.Na turma 1701 nenhum aluno discordou totalmente. Isso possivelmente deve-se também ao fato da maneira com que o conteúdo lhes foram passados.Muitas vezes os professores do município do Rio de Janeiro ficampresos pelo sistema de ensino adotado, e as aulas se tornam relativamente “chatas”.

Se a Matemática fosse apresentada desta forma, você estudaria com mais frequência (Figuras 94 e 95).

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

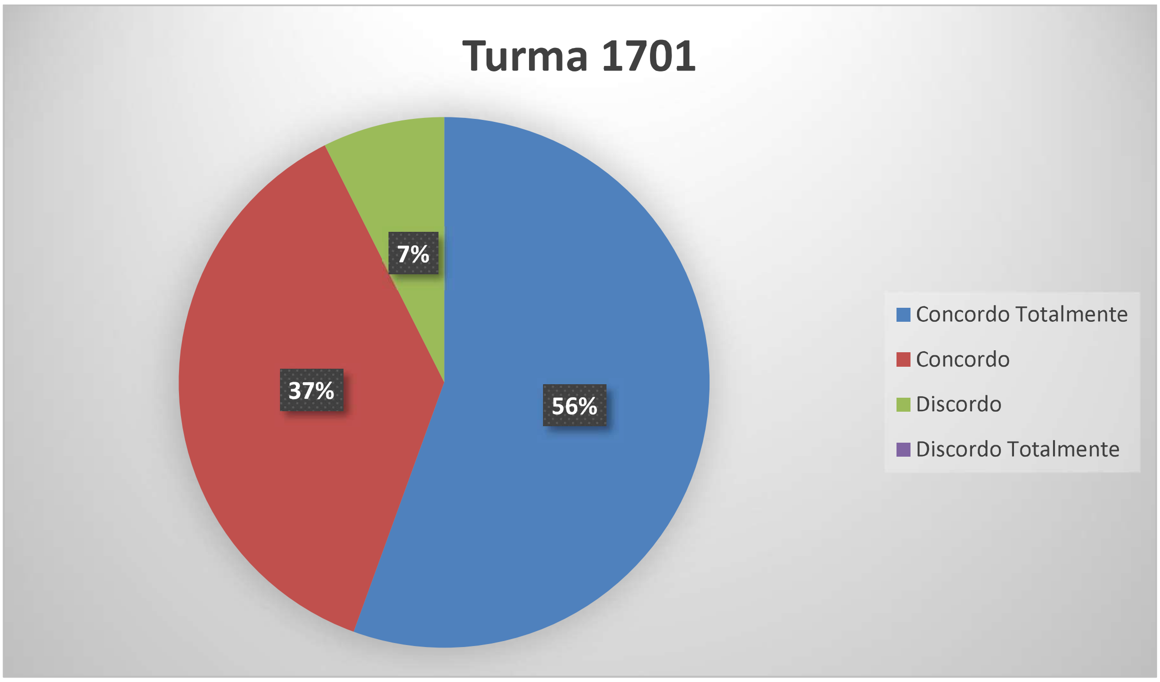



**Figura 95: Gráfico sobre estudar matemática com mais frequência turma 1701**

**Fonte: Autor**

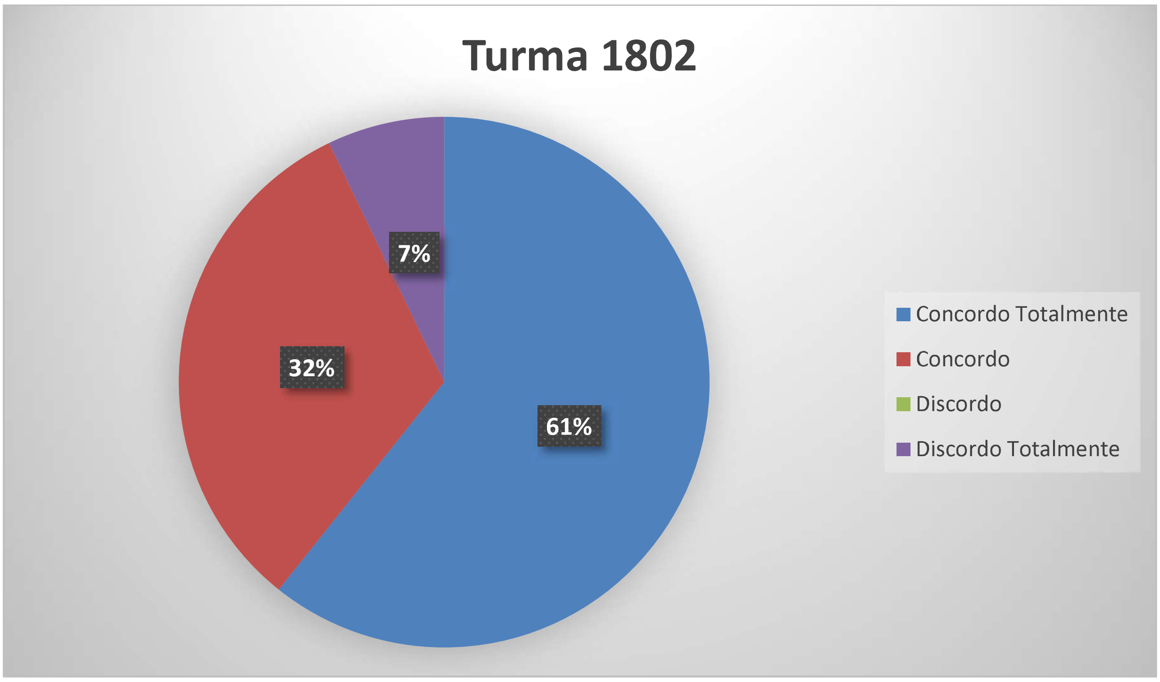



**Figura 96: Gráfico sobre estudar matemática com mais frequência turma 1802**

**Fonte: Autor**

A apresentação da metodologia utilizada para o ensino de Grafos foi tão eficiente que ambas as turmas tiveram 93% dos alunos que concordam ou concordam totalmente em estudar a matemática com mais intensidade caso fosse apresentada desta forma. Na turma do sétimo ano, nenhum aluno discordou totalmente enquanto na turma do oitavo ano nenhum aluno discordou.

Dentro do conteúdo aprendido nas aulas sobre Grafos (Figuras 96 e 97), gostei mais de (marque apenas uma alternativa):

(a) Algoritmo de Dijkstra.

(b) Caminhos Eulerianos e Semieulerianos.

(c) Estudar sobre Grafos $K_5\,e\,K_{3,3}$

(d) Tudo.

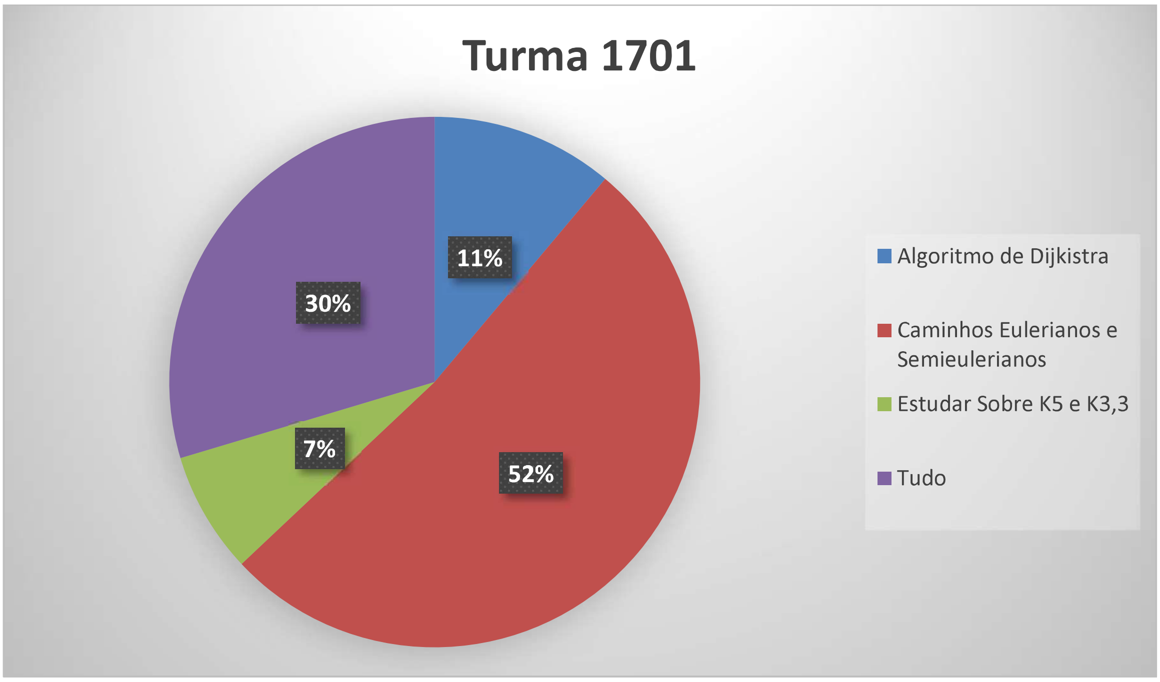



**Figura 97: Gráfico sobre qual tópico os alunos tiveram mais interesse turma 1701**

**Fonte: Autor**

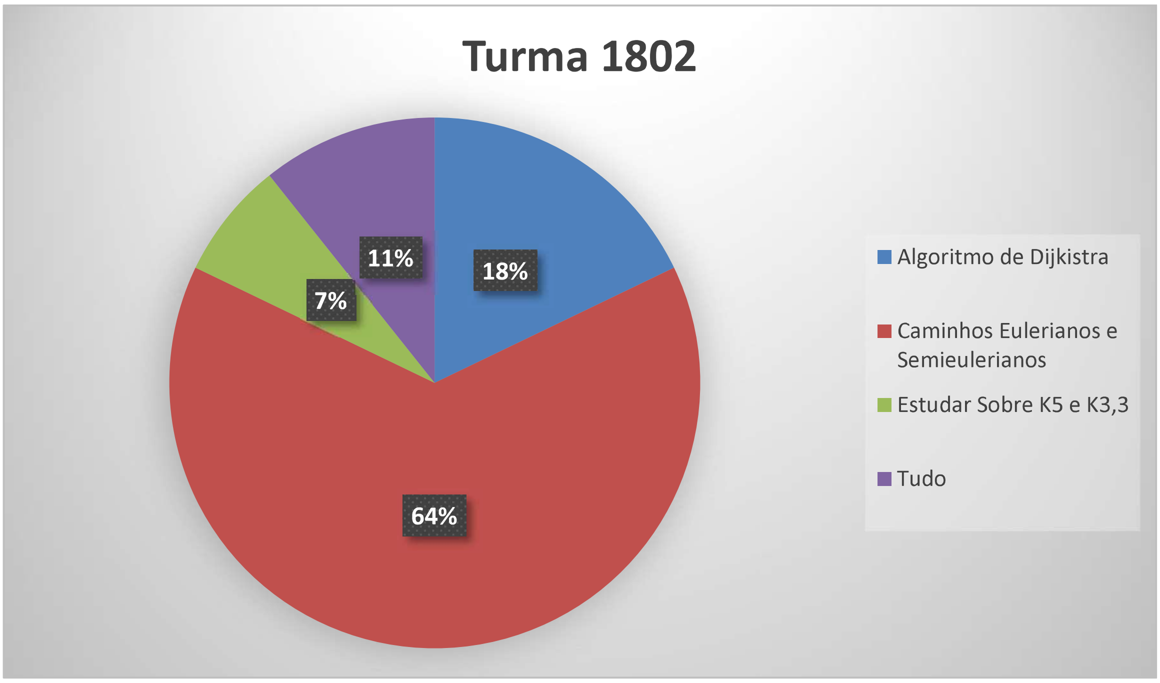



**Figura 98: Gráfico sobre qual tópico os alunos tiveram mais interesse turma 1802**

**Fonte: Autor**

Como era esperado, dentre os conteúdos apresentados, aquele que teve maior aceitação entre os alunos de ambas as turmas foi Caminhos Eulerianos e

Semieulerianos, pois dos tópicos apresentados, é o de mais objetividade e menos complexo. E é um assunto que se aplica muito no cotidiano. A turma 1701, sinalizou isso em mais de 52% dos alunos, e a turma 1802, um número pouco maior, cerca de 64% dos estudantes.Algoritmo de Dijkstra, um outro tópico bastante importante, mas com um grau de complexidade um pouco maior teve 11% e 18% dos estudantes nas turmas do sétimo e oitavo ano, respectivamente.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho foi alcançado: fazer uma experiência com conceitos de grafos em sala de aula, em duas turmas, uma do sétimo ano e outra do oitavo ano. Ao aplicar um questionário inicial para colher informações iniciais sobre a relação do aluno com a matemática e com o estudo, foi possível identificar e conjecturar sobre eventuais problemas e qualidades das turmas. A primeira aplicação do teste fornece um primeiro parâmetro para comparação com uma aplicação posterior do mesmo, após aulas sobre grafos. As aulas sobre grafos permitem a observação de uma reação extremamente positiva dos alunos com o novo, com o diferente, com uma ideia simples e intuitiva apresentada de forma lúdica e com menos formalismo. O questionário final apenas concluiu as informações sobre os testes e a experiência. O retorno foi tão satisfatório que alguns alunos questionaram os professores pelos corredores da escola e perguntando quando seria realizado outro trabalho dos mesmos moldes deste.

Os alunos puderam ver a matemática de uma maneira diferente dahabitual, contextualizando os problemas com seu cotidiano, com ferramentas simples e poderosas.

Uma proposta possível para trabalhos futuros engloba ampliar a profundidade das atividades, pensando em estimular os alunos a desenvolver atividades sobre a teoria dos grafos, aproveitando sua própria intuição e a ideia básica que esta teoria possui, que é a de relacionar elementos, após lhes serem apresentados problemas específicos.

# 6 REFERÊNCIAS

BOAVENTURA NETTO, P. O, **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**, 2a.ed. São Paulo. Edgard Blücher,1996.405p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).** Ensino Médio, Brasília, 1998.

CHERVEL, A. **História das Disciplinas Escolares: reflexão sobre um campo de pesquisa.** In Teoria & Educação, n.2, p. 177-229, 1990.

DA SILVA, C.M.**GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NA REDE PÚBLICA DE ENSINO**. Monografia de Graduação – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro- UFRRJ, Seropédica,2015.

EOFILOFF, P. **Exercícios de teoria dos grafos.**
Disponível em: < http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios> Acesso em: 15 set. 2009.

GERSTING, J.L. Grafos e árvores. In: GERSTING,J.L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação.**4.ed.New York:LTC,1999.p.229-284.

GONTIJO, C. H. **Relações entre criatividade, criatividade em Matemática e motivação em Matemática de alunos do Ensino Médio.** 2017, 194 p.Tese(Doutorado) – Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília. Brasília, 2007.

JURKIEWICZ, S. **Grafos –Uma Introdução**
Disponível em: < http://arquivosevt.lncc.br/pdfs/Apostila5-Grafos.pdf> Acesso em: 20 ago. 2009.

SANTOS, J. Plínio O., MELLO, M. P., MURIATI, I. T. C. **Introdução a Análise Combinatória**, Editora da UNICAMP, 1995.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

# 7 BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

COSTA, FÁBIO DA ROCHA. **COLORAÇÃO EM GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL.** Dissertação(Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro- UFRRJ, Seropédica,2017.

GOMES, A.A.**GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL.** Dissertação(Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro- UFRRJ, Seropédica,2015.

SILVA, ALAN MARCELO OLIVEIRA DA SILVA. **GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL.** Dissertação (Mestrado). - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

# 8 APÊNDICES

## 8.1 APÊNDICE 1: Questionário Motivacional

PROFMAT

UFRRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**TEORIA DOS GRAFOS: CAMINHOS EM GRAFOS NO ENSINO FUNDAMENTAL**

PROF ORIENTADOR: Dr. Montauban Moreira de Oliveira Junior

ALUNO: Osni Novaes da Silva Júnior

DATA DA AULA: __/ __ /2017.

TEMA DA AULA: Questionário Motivacional

Responda o questionário abaixo procurando ser o mais sincero possível:

A escala possui as seguintes possibilidades de resposta:

nunca; (2) raramente; (3) às vezes; (4) frequentemente; (5) sempre.

1°) Satisfação pela Matemática:

Quadro 1 – Satisfação pela matemática

| | Fator 1 – Satisfação pela Matemática | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas. | | | | | |
| 2 | Quando me pedem para resolver problemas de matemática, fico nervoso (a). | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Tenho muita dificuldade para entender matemática. | | | | | |
| 4 | Matemática é “chata” | | | | | |
| 5 | Aprender matemática é um prazer | | | | | |
| 6 | Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas | | | | | |
| 7 | Tenho menos problemas com matemática do que com as outras disciplinas | | | | | |
| 8 | Consigo bons resultados em matemática | | | | | |

2°) Jogos e desafios

Quadro2 – Jogos e desafios

| | Fator 2 – Jogos e Desafios | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9 | Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio. | | | | | |
| 10 | Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico. | | | | | |
| 11 | Procuro relacionar a matemática aos conteúdos das outras disciplinas | | | | | |
| 12 | Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de matemática para meus amigos e familiares. | | | | | |

3°) Resolução de problemas

Quadro 3 – Resolução de problemas

| | Fator 3 – Resolução de problemas | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 13 | Gosto de resolver os exercícios rapidamente. | | | | | |
| 14 | Tento resolver um mesmo problema matemático de | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | maneiras diferentes. | | | | | |
| 15 | Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de matemática. | | | | | |
| 16 | Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução. | | | | | |
| 17 | Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo. | | | | | |

4°) Aplicações no Cotidiano

Quadro 4 – Aplicações no cotidiano

| | Fator 4 – Aplicações no Cotidiano | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 18 | Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos. | | | | | |
| 19 | Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo. | | | | | |
| 20 | Faço desenhos usando formas geométricas | | | | | |
| 21 | Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola | | | | | |
| 22 | Faço “continhas de cabeça” para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos. | | | | | |

5°) Hábitos nos estudos

Quadro5 – Hábitos de estudo

| | Fator 5 – Hábitos de Estudo | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 23 | Estudo matemática todos os dias durante a semana. | | | | | |
| 24 | Realizo as tarefas de casa que o professor de matemática passa. | | | | | |
| 25 | Estudo as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula. | | | | | |
| 26 | Além do meu caderno, eu costumo estudar matemática em outros livros para fazer provas e testes. | | | | | |

6°) Interação na sala de aula

Quadro 6 – Interação na sala de aula

| | Fator 6 – Interação na sala de aula | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 27 | Faço perguntas nas aulas de matemática quando eu tenho dúvidas. | | | | | |
| 28 | Relaciono-me bem com meu professor de matemática. | | | | | |

7°) Sua família e sua casa

Quadro 7 – Sua família e sua casa

| | Fator 7 – Sua família e sua casa | Quantidade de respostas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Itens: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 29 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre os estudos. | | | | | |
| 30 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre a escola. | | | | | |
| 31 | Com que frequência seus pais ou responsáveis obrigam você ir às aulas | | | | | |
| 32 | Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre seus amigos | | | | | |

33. ATÉ QUE SÉRIE SUA MÃE/MADRASTA ESTUDOU?

(A) Nunca estudou

(B) Entre a 1ª e 4ª série do Ensino Fundamental (antigo primário)

(C)Entre a 5ª e 8ª série do Ensino Fundamental (antigo ginásio)

(D) Ensino Fundamental completo (antigos primário e ginásio)

(E) Ensino Médio incompleto (antigo 2º grau)

(F) Ensino Médio completo (antigo 2 º grau)

(G) Começou, mas não concluiu o Ensino Superior

(H) Completou o Ensino Superior

(I) Pós-graduação completa ou incompleta

(J) Não sei.

34. ATÉ QUE SÉRIE SEU PAI/PADRASTO ESTUDOU?

(A) Nunca estudou

(B) Entre a 1ª e 4ª série do Ensino Fundamental (antigo primário)

(C) Entre a 5ª e 8ª série do Ensino Fundamental (antigo ginásio)

(D) Ensino Fundamental completo (antigos primário e ginásio)

(E) Ensino Médio incompleto (antigo 2º grau)

(F) Ensino Médio completo (antigo 2 º grau)

(G) Ensino Superior incompleto

(H) Ensino Superior completo

(I) Pós-graduação completa ou incompleta

(J) Não sei

## 8.2 APÊNDICE 2: Teste

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**TEORIA DOS GRAFOS: CAMINHOS EM GRAFOS NO ENSINO FUNDAMENTAL**

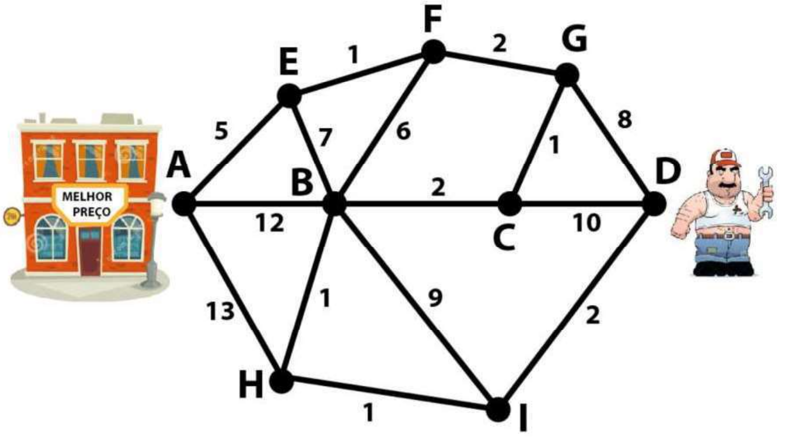
PROF ORIENTADOR: Dr. Montauban Moreira de Oliveira Junior

ALUNO: Osni Novaes da Silva Júnior

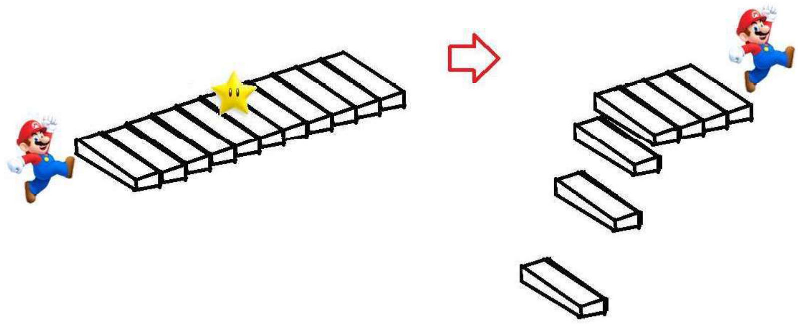
DATA DA AULA: __/ __ /2017.

TEMA DA AULA: Teste

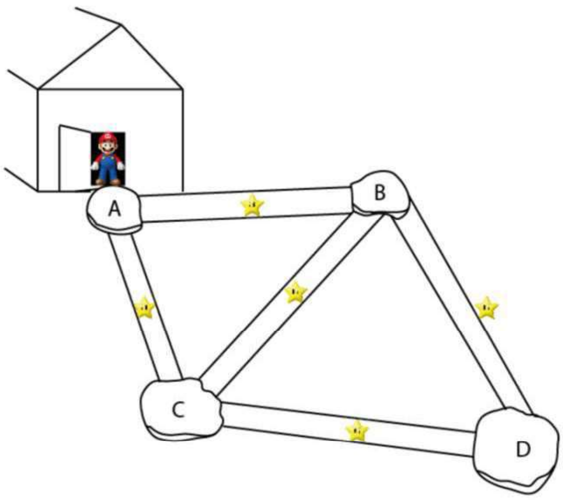
1) No ponto A, localiza-se uma autopeça Melhor Preço, onde suas entregas são feitas pelo motoboy Cláudio Charuto. Ele precisa entregar encomendas na oficina Bagulho Doido, localizada no ponto D. As ligações representam as ruas e os pontos representam as esquinas. O valor dado a cada ligação é o tempo necessário (em minutos) para o percurso entre uma esquina e outra devido ao trânsito. Por exemplo, são necessários 2 minutos para ir da esquina F até a esquina G. Qual é o caminho que Cláudio Charuto terá que percorrer para entregar mais rapidamente as encomendas na oficina Bagulho Doido, e qual seria o tempo total deste percurso?

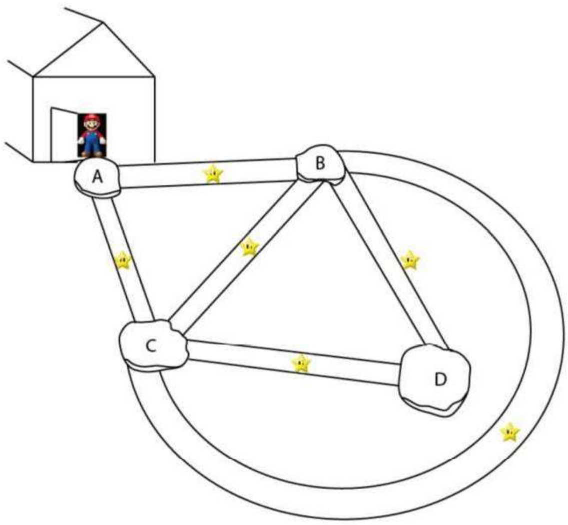


2) Num jogo de videogame, o personagem deve pegar todas as estrelas para passar de fase. Porém, ele só pode passar pelas pontes uma única vez, pois logo após pisar nas pontes elas caem, como na Figura abaixo:

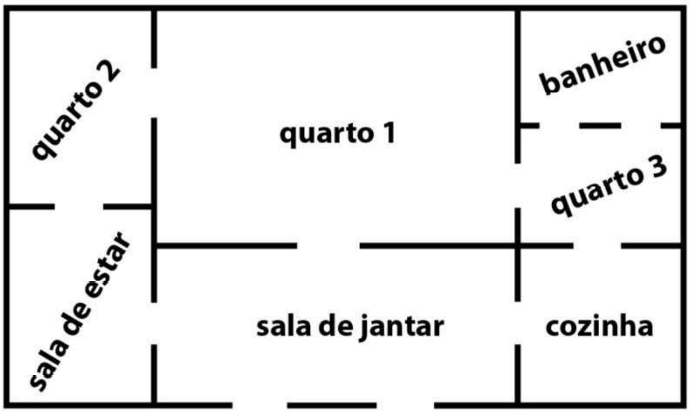


Nas figuras abaixo o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos as pontes para recolher as estrelas. Mas, uma vez passando pela ponte, ela se destrói, não tendo como voltar ao ponto anterior. Qual é o melhor caminho para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

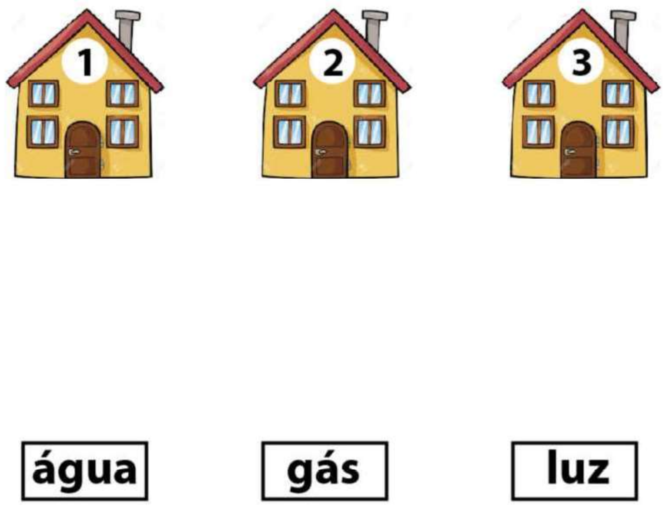



3) No desenho abaixo tem-se a planta da casa de Jéssica Sabrina; ela se localiza no lado de fora da casa, e deseja entrar em sua casa, passar por todas as portas e sair dela novamente, sabendo que toda vez que ela passa por uma porta a mesma se fecha e não tem como voltar por ela. Dada esta situação, Jéssica Sabrina conseguirá fazer o que deseja? Justifique sua resposta:




4) Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L) e gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?



## 8.3 APÊNDICE 3:QUESTIONÁRIO FINAL

**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**TEORIA DOS GRAFOS: CAMINHOS EM GRAFOS NO ENSINO FUNDAMENTAL**

PROF ORIENTADOR: Dr. Montauban Moreira de Oliveira Junior

ALUNO: Osni Novaes da Silva Júnior

DATA DA AULA: __/ __ /2017.

TEMA DA AULA: Questionário Final

1- Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
____________________________________.

2- Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
____________________________________.

3- Achei fácil estudar os conteúdos sobre Algoritmos de Dijkstra.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
____________________________________.

4- Entendi as várias situações onde podemos aplicar Caminhos Eulerianos e semieulerianos.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
____________________________________.

5- Achei mais interessante resolver problemas de Matemática utilizando Grafos do que da maneira tradicional.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
____________________________________.

6- Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos na internet.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________
____________________________________.

7- Fiquei mais motivado para estudar Matemática após descobrir que Grafo pode ser usado para resolver problemas do cotidiano, como problema da coleta de lixo.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

_______________________________________________________________________
_______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

____________________________________.

8- Você daria nota máxima pelo grau satisfação do trabalho realizado.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

____________________________________.

9- Você acredita que seja necessário inserir Teoria dos Grafos como conteúdo do Ensino Fundamental.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

____________________________________.

10- A relação de vocês com o professor ficou mais próxima após esse trabalho.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

____________________________________.

11- Se a Matemática fosse apresentada desta forma, você estudaria com mais frequência

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

____________________________________.

12- Dentro do conteúdo aprendido nas aulas sobre Grafos, gostei mais de (marque apenas uma alternativa):

(a) Algoritmo de Dijkstra.

(b) Caminhos Eulerianos e Semieulerianos.

(c) Estudar sobre Grafos $K_5 \, e \, K_{3,3}$

(d) Tudo.