UFG

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Utilização do software Geogebra no estudo de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável

por

Hugo Leonardo de Moraes

Goiânia

2013

sibi
sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Hugo Leonardo de Moraes						
E-mail:	hugoleonardodemoraes@yahoo.com.br						
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [**X**]Sim [ ] Não							
Vínculo empregatício do autor	Professor de Educação Básica						
Agência de fomento:	Secretaria de educação do DF					Sigla:	SEE/DF
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	00.394.676/0001-07		
Título:	Utilização do software Geogebra no estudo de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável.						
Palavras-chave:	Geogebra, Função, Máximo, Mínimo, Limite, Derivada.						
Título em outra língua:	Utilization of the software Geogebra in the study of maximum points and minimum points of functions of one variable.						
Palavras-chave em outra língua:	Geogebra, Function, Maximum, Minimum, Limit, Derivative.						
Área de concentração:	Matemática do Ensino Médio.						
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	28/02/2013						
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática						
Orientador (a):	Dr. Mário José de Souza						
E-mail:	mariojsouza@gmail.com						
Co-orientador(a):*							
E-mail:							

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [**X**] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Hugo Leonardo de Moraes
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 21 / 03 / 2013

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Hugo Leonardo de Moraes

Utilização do software Geogebra no estudo de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

M827u

Moraes, Hugo Leonardo de.
Utilização do software Geogebra no estudo de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável [manuscrito] / Hugo Leonardo de Moraes. - 2013.
45 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.
Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de tabelas e figuras.

1. Geogebra (Programa de computador). 2. Função. 3. Máximo. 4. Mínimo. 5. Limite. I. Título.

CDU:512:004.4

Hugo Leonardo de Maraes

Utilização do Software Geogebra no Estudo de Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo de Funções de Uma Variável

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 28 de fevereiro de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

____

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

____

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – Campus Goiânia-GO

____

Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Hugo Leonardo de Moraes graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás em 2002 e especializou-se em Matemática Aplicada pela Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas de Goiatuba em 2004, atualmente é Professor do Ensino Básico da Secretaria de Educação do Distrito Federal.

À minha mãe Aparecida e à minha tia Divina que, com apoio e incentivo, me fizeram acreditar que era possível chegar até aqui.

Agradecimentos

A Deus, acima de tudo, por ter me proporcionado saúde, perseverança e lucidez para enfrentar todos as provas e obstáculos que surgiram ao longo do curso.

À minha família pelo apoio, pelo sacrifício e pelo incentivo que foi fundamental para a vitória ao final deste grande desafio.

À minha mãe que, desde a alfabetização, me incentivou a estudar, e sempre esteve ao meu lado acreditando em meu potencial e investindo, mesmo com todas as dificuldades, na minha boa formação educacional.

À minha tia Divina que ajudou em todas as minhas realizações e sempre esteve ao meu lado nos bons e maus momentos de minha vida.

À minha avó Ilídia, que hoje infelizmente não está entre nós, mas que cuidou de mim durante muitos anos e contribuiu de forma decisiva para a formação da pessoa que sou hoje.

Aos meus amigos de curso pela ajuda e pela generosidade em compartilhar seu conhecimento.

A Karina, a Vanessa e ao Glauber, que estiveram comigo em todas as viagens e em praticamente todos os encontros do curso, conversando, discutindo e estudando conceitos importantes da matemática.

A todos os idealizadores do PROFMAT e a CAPES, que proporcionaram uma oportunidade única, aos milhares de professores de matemática espalhados por todo este país, de estudarem e se aperfeiçoarem para o melhor desempenho de sua função. Eu, em particular, jamais faria um mestrado, se não fosse nos moldes do PROFMAT.

A todos os professores que dedicaram o seu tempo precioso e transmitiram conhecimentos importantíssimos para a nossa formação.

Ao professor Jesus que se empenhou ao máximo para viabilizar o programa do curso no Pólo de Anápolis.

Ao professor Mário pela dedicação, seriedade, amizade e paciência ao longo de toda esta jornada de dois anos.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar as vantagens de se utilizar o programa geogebra no estudo de situações-problema que envolvem pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável. A pesquisa contemplou um breve estudo sobre: o software geogebra e algumas de suas finalidades, função de uma variável, representação gráfica de uma função, limite, derivada, derivada segunda, pontos críticos, pontos de máximo, pontos de mínimo e aplicações do estudo de pontos de máximo e de mínimo em situações-problema do cotidiano sempre com a utilização do software geogebra.

PALAVRAS-CHAVE: Geogebra, Função, Máximo, Mínimo, Limite, Derivada.

Abstract

This paper aims to present the main advantages of using the software geogebra in the study of problem situations involving points of maximum and minimum points of functions of one variable. The survey included a brief study on: geogebra software and some of their purposes, function of one variable, graphical representation of a function, limit, derivative, second derivative, critical points, maximum points, minimum points and applications of the study of points of maximum and minimum in problem situations everyday when using the software geogebra.

KEYWORDS: Geogebra, Function, Maximum, Minimum, Limit, Derivative.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A tecnologia faz parte de quase todos os setores da atividade humana. Quase tudo remete ao cidadão ao uso de recursos tecnológicos; de forma direta ou indireta, ela está presente em muitas situações do nosso cotidiano.

O impacto deste fenômeno na sociedade é enorme, até hoje nenhuma revolução mudou tanto a forma de vida das pessoas do que a entrada dos computadores e da internet na sociedade. Nós vivemos cercados de tecnologias das mais variadas o tempo todo, e isso pode e deve ser aproveitado para o melhor ensino-aprendizagem da matemática. Desta maneira, podemos utilizar softwares para o auxílio do ensino de diversos conteúdos matemáticos que os alunos têm dificuldade de assimilar. Por exemplo *funções*.

Para o estudo das *funções*, temos um software livre fantástico, de interface muito simples e qualquer estudante é capaz de aprender a utilizá-lo rapidamente. Este software é o *Geogebra*. O intuito é dar mais dinâmica às aulas sobre funções, fazer com que o aluno interaja com a função e com sua representação gráfica e assim despertar a curiosidade do aluno a respeito do conteúdo estudado.

O software *Geogebra* possui uma grande potencialidade em relação ao ensino específico de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável, ele oferece vários recursos como capacidade de computação algébrica, numérica e gráfica, capacidade de manipulação de fórmulas e números e uma linguagem de programação de alto nível e ao mesmo tempo muito simples de se utilizar.

Portanto, utilizando o software *Geogebra*, os conceitos vistos em sala de aula são apresentados de maneira computacional, tornando o processo ensino-aprendizagem mais prazeroso do que apenas no ambiente de sala de aula que geralmente o professor utiliza.

Para o estudo específico de pontos de máximo e mínimo de funções de uma variável com o *Geogebra* temos os comandos: *Extremo*, *Máximo* e *Mínimo*. Eles determinam os pontos de máximo, de mínimo locais e globais de função num determinado intervalo, e isto é feito de uma forma muito simples.

Logo, utilizar o *Geogebra* aliado ao conhecimento matemático previamente sistematizado, só tem a contribuir com o processo educacional. A possibilidade de construir, alterar, reconstruir e modificar as funções feitas na tela do computador permitem testar propriedades, resultados e fazer conjecturas sobre as mesmas. Essa interação gera discussão e por consequência o aprofundamento no conteúdo estudado. A dinâmica oportunizada pelo software, permitem muitas possibilidades de testes e análises, que no processo de construção à mão, seria demorado, impreciso e as dificuldades seriam enormes, causando um fator desmotivador da aprendizagem e da investigação do que está sendo estudado.

Portanto, a utilização do *Geogebra* de maneira adequada, só tem a contribuir com o processo ensino-aprendizagem das funções e especificamente dos pontos de máximo e de mínimo das funções de uma variável.

1 O software Geogebra

O GeoGebra, conforme [3], é um software de matemática dinâmica que junta Geometria, Álgebra e Aritmética. É desenvolvido por uma equipe internacional de programadores para ensinar matemática nas escolas e nas universidades.

Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University.

O programa permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada, o GeoGebra pode derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função e etc. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de uma mesma função.

O GeoGebra fornece três diferentes vistas dos objetos matemáticos: a Zona Gráfica, a Zona Algébrica, e a Folha de Cálculo. Todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer uma delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

Vejamos o *layout* do software:

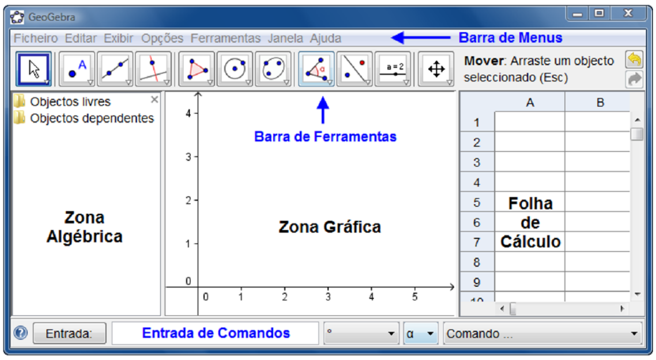

Figura 1: Interface do software Geogebra

Uma grande vantagem do Geogebra é o dinamismo existente entre a zona algébrica, a zona gráfica e a folha de cálculo, por exemplo, na guia *seletor*, em que é possível a criação de parâmetros para uma variável definida no campo de entrada, informando o intervalo de variação e incremento. Assim, o aluno pode movimentar o seletor e observar as variações nas janelas gráfica e algébrica e fazer suas próprias conjecturas.

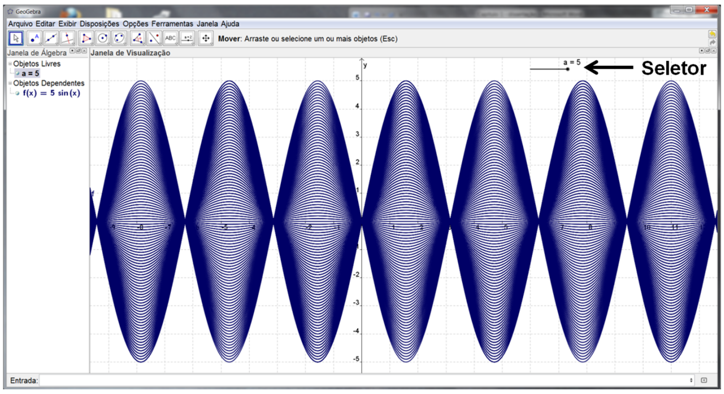

Figura 2: Função $f(x) = a.sen(x)$, $a \in [-5, 5]$ com incremento de 0.1

A velocidade de construção gráfica com o Geogebra permite ao aluno utilizar mais o tempo conjecturando do que realizando construções trabalhosas e imperfeitas dessas representações, ou seja, o software, além de poupar o tempo do aluno, facilita sua visualização acerca do assunto abordado de maneira fácil, rápida e interativa. Portanto o aluno se torna mais independente na construção do seu aprendizado.

2 Preliminares

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos necessários para o desenvolvimento deste trabalho, tais como: funções, limites, derivadas, pontos de máximo e pontos de mínimo.

A ideia de função é muito importante para a humanidade e encontra cada vez mais aplicações em nosso dia-a-dia. Estudar o comportamento de funções é estratégico para o bom desempenho de uma empresa no mercado de hoje. As bolsas de valores estudam e analisam funções o tempo todo.

O filósofo e matemático *Platão* escreveu no século IV a.C. que, *"os números governam o mundo"*. Pode-se dizer que no mundo moderno do século XXI d.C., *"As funções governam e controlam o mundo o tempo todo"*.

2.1 Um breve histórico do conceito de função

A noção de dependência teve início a aproximadamente 6000 anos, mas foi somente no século XVII que houve o desenvolvimento do conceito formal de *função*. Este desenvolvimento se deu por conta da relação entre *função* e problemas relacionados ao Cálculo que foi estudado e fundamentado por *Newton* e *Leibniz*.

O uso de *função* como um termo matemático foi iniciado por *Leibniz*, em uma carta de 1673, para designar uma quantidade relacionada a uma curva, tal como a sua inclinação em um ponto específico. As funções que *Leibniz* considerou são atualmente chamadas de funções diferenciáveis.

A palavra *função* foi, posteriormente, usada por *Euler* em meados do século XVIII para descrever uma expressão envolvendo vários argumentos. Com o tempo foi-se ampliando o conceito e a definição de *função*.

Durante o Século XIX, vários matemáticos começaram a formalizar toda a Matemática utilizando a *Teoria dos conjuntos*.

Com base nesta teoria o matemático alemão *Dirichlet* criou a definição "formal" de *função* moderna. Na definição de *Dirichlet*, uma *função* é um caso especial de uma relação.

Utilizaremos nesta dissertação, um conceito de *função* um pouco diferente do conceito de *Dirichlet*, mas que também é baseado na utilização de conjuntos.

2.2 Função

Em [9], verifica-se que *função* é um dos conceitos mais importantes da matemática. Existem várias definições, dependendo da forma como são escolhidos os axiomas.

Definição 1. *Dados dois conjuntos não-vazios A e B, uma função de A em B, denotada por $f : A \longrightarrow B$, é uma lei ou uma regra que associa cada elemento x de A a um único elemento y de B. Utilizamos a notação $y = f(x)$.*

Exemplo 1: Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, consideremos a lei que associa os elementos dos conjuntos A e B definida por $y = 2x + 1$, onde $x \in A$ e $y \in B$. Determine se a lei é uma função ou não:

Solução. Temos:
para $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
para $x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.
para $x = 3 \Rightarrow y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

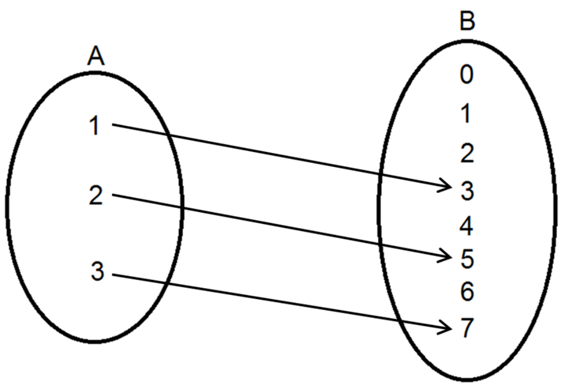

Figura 3: Diagrama da relação $y = 2x + 1$

Portanto, a lei descrita no exemplo é uma função e é denotada por: $f : A \longrightarrow B$;
$f(x) = 2x + 1$

2.3 Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Definição 1. *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função tal que $f(x) = y$, ou seja, f é uma função que associa o elemento $x \in A$ ao elemento $y \in B$. O conjunto A é o domí-*

nio de f. O contradomínio de f é definido como sendo o conjunto B. As notações para estes conjuntos são: $D(f) = A$, $CD(f) = B$. A imagem de f é o conjunto: $Im(f) = \{y \in B; \exists\, x \in A, f(x) = y\}$.

Para o exemplo 1, tem-se:

$$D(f) = \{1, 2, 3\}, \quad CD(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{e} \quad Im(f) = \{3, 5, 7\}.$$

2.4 Representação gráfica de uma função

René Descartes foi um filósofo, físico e matemático que revolucionou a matemática quando sugeriu a fusão da álgebra com a geometria através do sistema de coordenadas que hoje é conhecido como sistema de coordenadas cartesianas. Para maiores detalhes indicamos [9].

Para representar funções graficamente, vamos utilizar o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, também chamado de plano cartesiano.

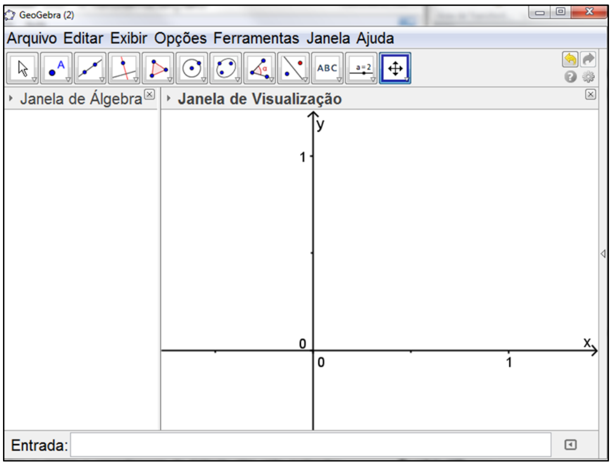

Figura 4: Plano cartesiano

O gráfico de uma função f, é o conjunto de todos os pontos (x, y), do plano cartesiano, com $x \in D(f)$ e $y \in Im(f)$. A representação gráfica de uma função é de fundamental importância para a análise de seu comportamento, do seu domínio, de sua imagem, etc.. Hoje temos o software *Geogebra* que de forma fácil e rápida apresenta gráficos de inúmeras funções para uma análise mais precisa e interativa do comportamento de tais funções.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: Construa o gráfico da função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + 1$, onde $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)
2	3	(2, 3)
3	4	(3, 4)

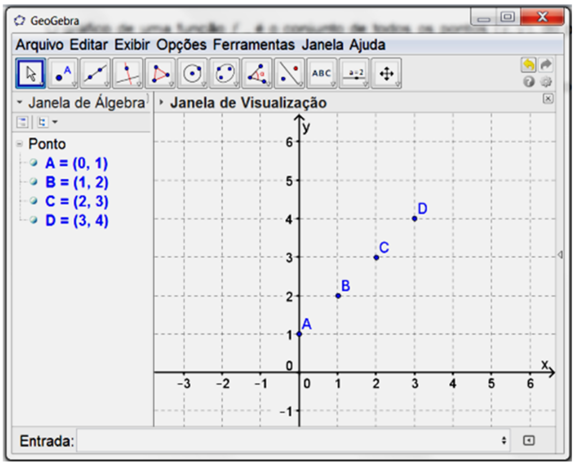

Figura 5: Gráfico da função $f(x) = x + 1$ com domínio A

Exemplo 2: Construa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + 1$.

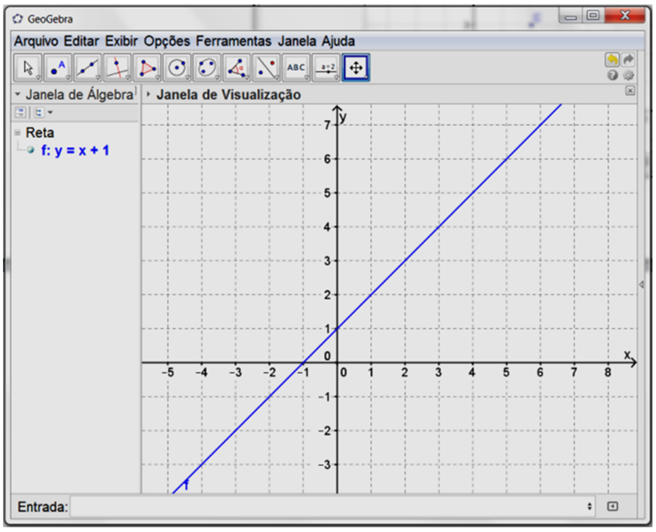

Figura 6: Gráfico da função $f(x) = x + 1$ com domínio $\mathbb{R}$

Percebemos que apesar de serem formadas pela mesma lei $f(x) = x + 1$, são funções totalmente diferentes, pois a imagem da função do exemplo 1 é o conjunto $Im = \{1, 2, 3, 4\}$, já a imagem da função do exemplo 2 é o conjunto $Im = \mathbb{R}$.

Exemplo 3: Construa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $y = -x^2$.

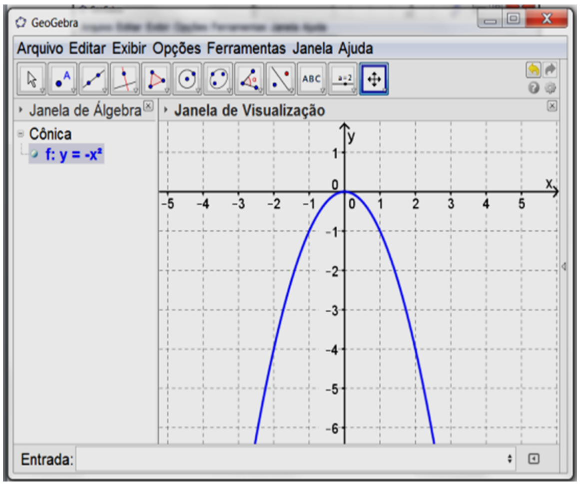

Figura 7: Gráfico da função $f(x) = -x^2$

O conjunto imagem da função é $\mathbb{R}^-$.

Exemplo 4: Construa o gráfico da função $f : [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3 - 2x$.

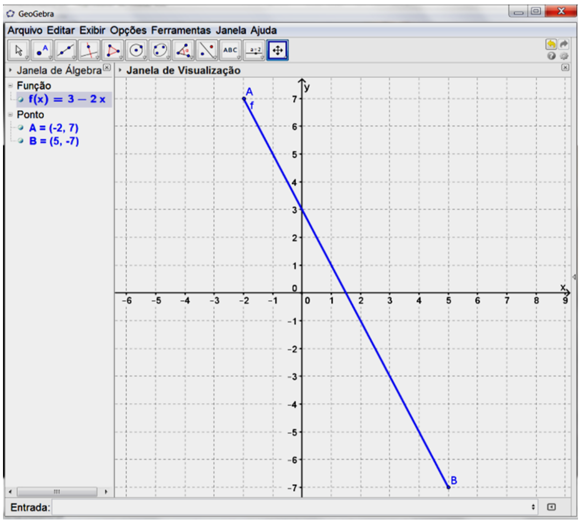

Figura 8: Gráfico da função $f(x) = 3 - 2x$

Neste caso vemos que $Im(f) = [-7, 7]$.

2.5 Limite de uma função

O conceito básico sobre o qual o cálculo se apoia é o de *limite* de função. É um dos conceitos mais belos da matemática, ele consiste em analisar o comportamento de uma função quando a sua variável independente se aproxima de um determinado valor. Por exemplo, consideremos a função $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\quad f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$. Sabemos que f não está definida em $x = 0$, mas o que ocorre com f quando x se aproxima de 0?

Observemos primeiro o que ocorre quando x se aproxima de 0 pela direita, ou seja, por valores maiores que 0.

x	$f(x)=\dfrac{sen(x)}{x}$
1	0,84147
0,5	0,95885
0,1	0,99833
0,01	0,99998

Observemos agora o que ocorre quando x se aproxima de 0 pela esquerda, ou seja, por valores menores que 0.

x	$f(x)=\dfrac{sen(x)}{x}$
-1	0,84147
-0,5	0,95885
-0,1	0,99833
-0,01	0,99998

Vemos que em ambos os casos a função se aproxima de 1. Neste caso, dizemos que o limite da função quando x tende a 0 é igual a 1.
Notação: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \quad$ ou $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1.$

Vejamos graficamente:

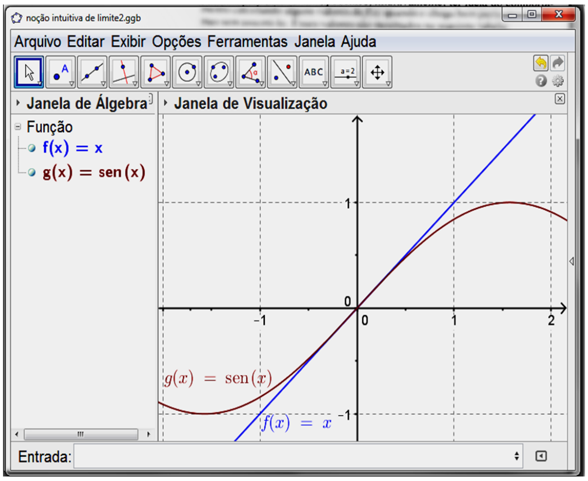

Figura 9: Gráficos das funções $f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = sen(x)$

Observe que as funções $f(x) = x$ e $g(x) = sen(x)$ se aproximam uma da outra quando x se aproxima de 0, portanto o quociente entre as duas tende a 1. Ou seja, $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$.

2.6 Taxa de variação média de uma função

Definição 1. *Seja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$; $y = f(x)$ uma função contínua definida no intervalo (a, b). Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos do gráfico de f. Seja r a reta que passa pelos pontos P e Q, então r é secante ao gráfico da função.*

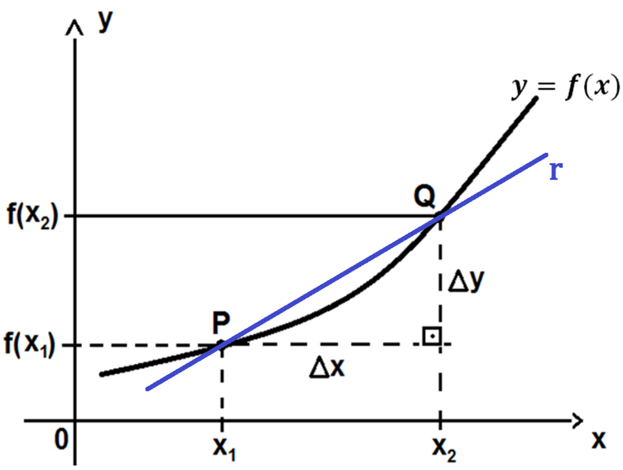

Figura 10: Taxa de variação média de uma função

Denomina-se *taxa de variação média da função* $y = f(x)$, no intervalo $[x_1, x_2]$, o quociente:

$$m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad com \quad x_2 > x_1$$

Observe que a taxa de variação média de uma função em um intervalo é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos dados.

A taxa de variação média nos mostra com que rapidez a função varia num dado intervalo.

2.7 Derivada de uma função

Agora, e se quisermos saber a rapidez com que uma função contínua $y = f(x)$ varia, não num intervalo, mas num ponto x_0? Para isto utilizaremos o conceito de *taxa de variação instantânea* de uma função num ponto ou *derivada* de uma função num ponto.
A ideia de tal noção é a de que uma curva pode ser bem aproximada por uma reta nas proximidades de um ponto.

De todas as retas que passam pelo ponto $P(x_0, y_0)$, a que melhor se aproxima do gráfico de $y = f(x)$ para valores de x próximos de x_0, é a reta tangente à curva nesse ponto.

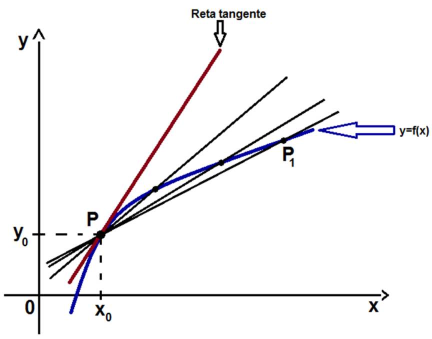

Figura 11: Taxa de variação instantânea de uma função

Para determinarmos a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$, consideremos a figura abaixo:

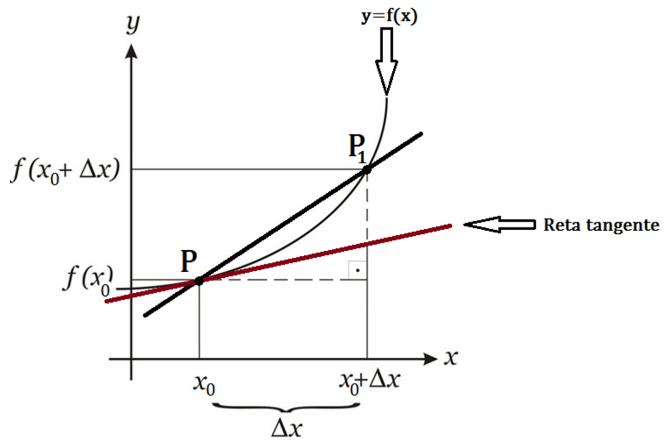

Figura 12: Reta tangente ao gráfico da função no ponto x_0

Note que, se fizermos Δx tender a zero ($\Delta x \longrightarrow 0$), o ponto P_1 tenderá a P, ou seja, a reta secante tenderá à reta tangente.

Definição 1. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida num intervalo aberto I e $x_0 \in I$, a derivada de f, denotada por $f'(x)$, em x_0, é o limite, se existir, da razão* $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ *quando Δx tende a 0, ou seja,*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Este limite representa geometricamente o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto de abscissa x_0.
Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por: $\quad y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0), \quad$ caso exista $f'(x_0)$.

O conceito de derivada é considerado o cerne do Cálculo Diferencial e Integral e tem aplicações em muitas áreas do conhecimento científico.
Se uma função $y = f(x)$ é derivável em todos os pontos de um intervalo aberto I, então podemos definir a função derivada $f' : I \longrightarrow IR$, denotada por $f'(x)$, tal que seu valor, em qualquer ponto x de seu domínio, é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Exemplo 1: Determinar a equação da reta tangente à parábola de equação $f(x) = x^2 - 2x$

no ponto de abscissa $x_0 = 4$.

Solução. Calculando $f'(4)$:

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4+\Delta x)^2 - 2.(4+\Delta x) - (4^2 - 2.4)}{\Delta x} = 6$$

Calculando $f(4)$: $\quad f(4) = 4^2 - 2.4 = 8$

Logo a equação da reta tangente à parábola $f(x) = x^2 - 2x$ no ponto $(4, 8)$ é:

$y - f(4) = f'(4).(x-4) \quad \Longrightarrow \quad y - 8 = 6.(x-4) \quad \Longrightarrow \quad y = 6x - 16.$

Vejamos graficamente:

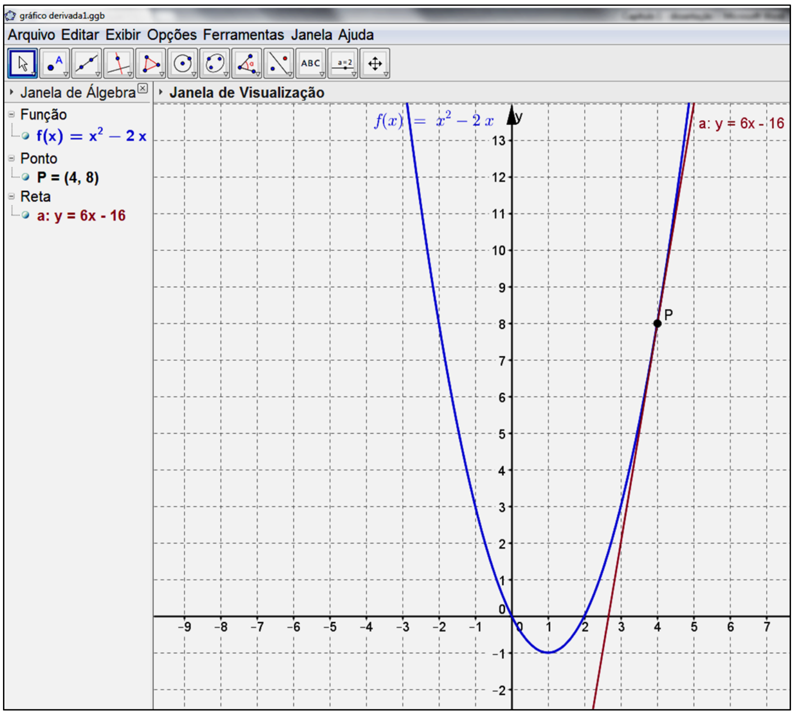

Figura 13: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 2x$ em $x = 4$

2.8 Derivada segunda de uma função

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ uma função derivável num intervalo (a, b). A sua derivada $f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, é também uma função definida neste intervalo. Se f' também for derivável num ponto x_0 deste intervalo podemos pensar na derivada segunda de f em x_0.

Definição 1. *Seja f uma função derivável. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada derivada segunda de f e é representada por $f''(x)$. (lê-se derivada segunda de f em relação a x).*

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = tg(x)$, calcule $f''(x)$.

Solução.

$$f(x) = tg(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = sec^2(x) \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 2sec(x).[sec(x).tg(x)] \quad \Longrightarrow$$

$$f''(x) = 2sec^2(x).tg(x)$$

2.9 Relação entre derivada e crescimento ou decrescimento de uma função

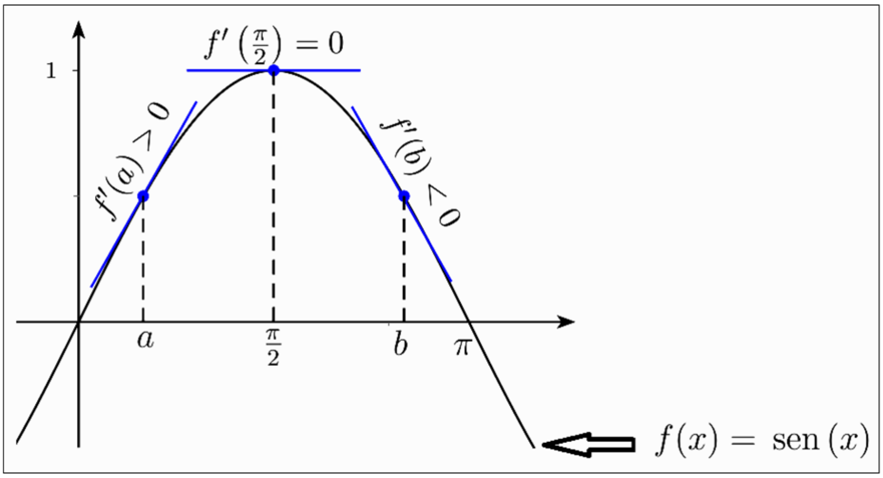

Figura 14: Gráfico da função $f(x) = sen(x)$ no intervalo $[0, \pi]$

A figura acima mostra a função $f(x) = sen(x)$ em $[0, \pi]$. Observe que a função é crescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Percebemos intuitivamente que no intervalo em que a função é crescente, a derivada é positiva, pois as retas tangentes em quaisquer pontos do intervalo são crescentes e no intervalo em que a função é decrescente, a derivada é negativa, pois as retas tangentes em quaisquer pontos do intervalo são decrescentes.

Esta conjectura nos remete ao teorema abaixo:

Teorema 1. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável em (a,b). Então:*

- *f é não decrescente em $[a,b]$ se, e somente se, $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$. E se $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$ então f é crescente em $[a,b]$.*

- *f é não crescente em $[a,b]$ se, e somente se, $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$. E se $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$ então f é decrescente em $[a,b]$.*

Demonstração. Suponhamos que f seja não decrescente em $[a,b]$. Determinemos o sinal de $f'(x)$:

Sejam $x \in (a,b)$ e $h > 0$ tal que $x + h \in (a,b)$, então $x + h > x$, logo

$f(x+h) \geq f(x)$, pois f é não decrescente. Segue que

$f(x+h) - f(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$

Seja $h < 0$, então temos $x + h < x$, logo

$f(x+h) \leq f(x)$, pois f é não decrescente. Segue que

$f(x+h) - f(x) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$

Logo, em ambos os casos temos $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$

Portanto, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$

Suponhamos agora que $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$. Sejam $x_1, x_2 \in [a,b]$ com $x_1 < x_2$. Temos que f é contínua, então, pelo Teorema do valor médio, $\exists\ c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $x_2 - x_1 > 0$ e $f'(c) \geq 0$, temos que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1)$.

Logo, f é não decrescente.

Suponhamos agora que $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$.

Sejam $x_1, x_2 \in [a,b]$ com $x_1 < x_2$. Temos que f é contínua, então, pelo Teorema do valor médio, $\exists\ c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $x_2 - x_1 > 0$ e $f'(c) > 0$, temos que $f(x_2) - f(x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$.

Logo, f é crescente.

O caso em que f é não crescente é análogo.

2.10 Ponto de máximo e ponto de mínimo de uma função

Definição 1. *Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável em (a, b). Se $\exists\ c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não exista então c é dito* ***ponto crítico*** *de f.*

Veremos a seguir que se c é um ponto crítico de f então $f(c)$ pode ser mínimo local, máximo local de uma função ou nenhum dos dois casos.

Vejamos o gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 0.5$:

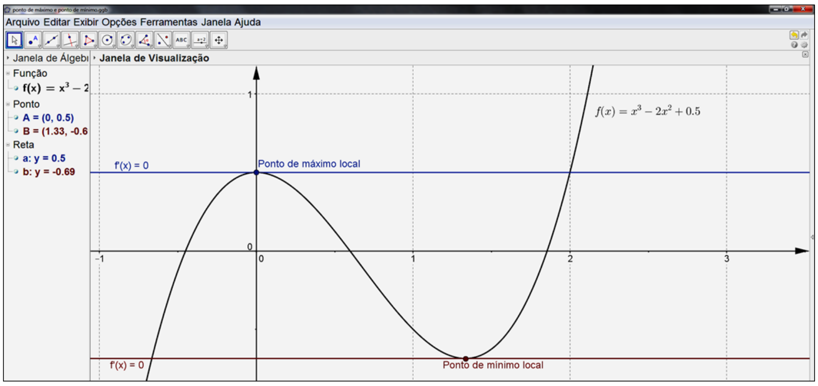

Figura 15: Pontos de máximo e de mínimo de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 0.5$

Vejamos agora o gráfico da função $f(x) = x^3$

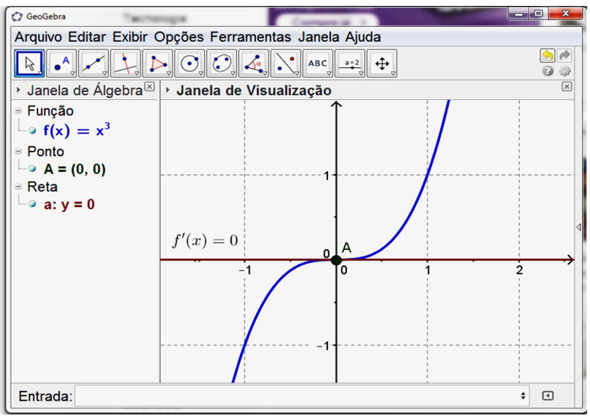

Figura 16: Ponto crítico da função $f(x) = x^3$

2.11 Teste da segunda derivada para pontos de máximo e de mínimo

Teorema 1. *Sejam f uma função derivável em um intervalo aberto I e $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. Se $f''(c)$ existe, então:*

- *Se $f''(c) < 0$ então f possui um ponto de máximo local em c.*
- *Se $f''(c) > 0$ então f possui um ponto de mínimo local em c.*
- *Se $f''(c) = 0$ o teste é inconclusivo.*

Demonstração. Suponhamos que $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. Então:
$f''(x) \;=\; \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c} \;=\; \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{x - c} \;<0.$
Logo, existe um intervalo (a, b) com $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f'(x)}{x - c} < 0$, $\forall x \in (a, b)$.
Então,

$$a < x < c \implies x - c < 0 \implies f'(x) > 0.$$
$$c < x < b \implies x - c > 0 \implies f'(x) < 0.$$

Portanto, a função f passa de crescente para decrescente em $x = c$. Concluímos então que f tem ponto de máximo local em $x = c$.

O caso em que $f''(c) > 0$ é análogo.

O caso em que $f''(c) = 0$ podemos obter:

- Ponto de máximo, no caso por exemplo da função $f(x) = -x^4$ em $x = 0$.
- Ponto de mínimo, no caso da função $f(x) = x^4$ em $x = 0$.
- Nem ponto de máximo, nem ponto de mínimo no caso da função $f(x) = x^3$ em $x = 0$.

Vejamos alguns exemplos.
Exemplo 1: Encontre os pontos de máximo e de mínimo locais da função $f(x) = x^3 - x^2$.
Determinando os pontos críticos:

$f(x) = x^3 - x^2 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x$. Fazendo $f'(x) = 0$, teremos $x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$.
Logo, os pontos críticos da função são $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$.
Encontrando a segunda derivada:
$f'(x) = 3x^2 - 2x \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 6x - 2$.
Aplicando o teste da segunda derivada em $x = 0$:
$f''(x) = 6x - 2 \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = -2 < 0$.
Calculando $f(0)$:
$f(0) = 0^3 - 0^2 = 0$
Logo, o ponto $(0, 0)$ é ponto de máximo local de f.
Aplicando o teste da segunda derivada em $x = \frac{2}{3}$:
$f''(x) = 6x - 2 \quad \Longrightarrow \quad f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$.
Calculando $f\left(\frac{2}{3}\right)$:
$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{27} \approx -0,15$.
Logo, o ponto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$ ou $(0.67, -0.15)$ é ponto de mínimo local de f.
Vejamos graficamente:

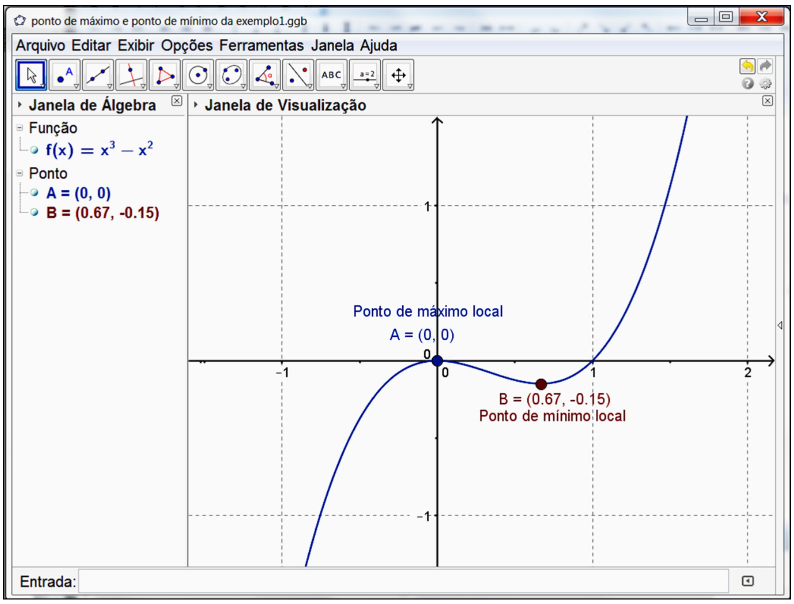

Figura 17: Pontos de máximo e mínimo da função $f(x) = x^3 - x^2$

Vejamos agora um caso em que o ponto de mínimo ocorre num ponto onde a derivada não existe.

Exemplo 2: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\quad f(x) = |x - 1|$, determine seu ponto mínimo:

f pode ser escrita da seguinte forma: $f(x) = \begin{cases} x - 1, & se \quad x \geq 1 \\ -(x - 1), & se \quad x < 1 \end{cases}$. Daí, temos que

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x > 1 \\ -1, & se \quad x < 1 \end{cases}.$$

Mas em, $x = 1$, f' não está definida, pois:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x + 1 - 0}{x - 1} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - 0}{x - 1} = 1.$$

Logo, $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, não existe e portanto f não é derivável em $x = 1$.

Temos que $f(1) = 0$ e sabemos que $f(x) = |x - 1| \geq 0, \forall x \in IR$, logo $(1, 0)$ é o ponto mínimo de f.

Vejamos no gráfico:

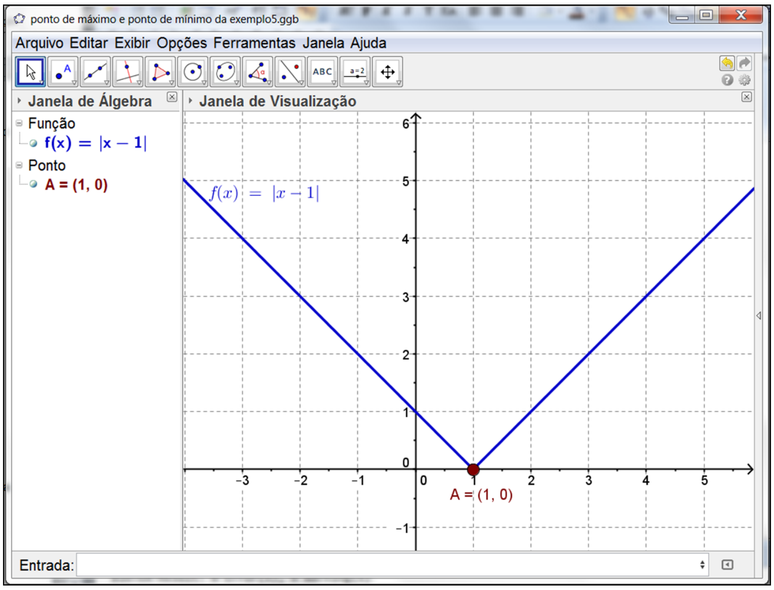

Figura 18: Ponto de mínimo da função $f(x) = |x - 1|$

Caso a função esteja definida num intervalo fechado, é importante analisar também os extremos desse intervalo. Vejamos o exemplo:

Exemplo 3: Determine o pontos de máximo e mínimo da função:

$$f : [-6,4] \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & se \quad -6 \leq x \leq 1 \\ 5-(x-3)^2, & se \quad 1 < x \leq 4 \end{cases}.$$

A função pode ser escrita da seguinte forma: $f(x) = \begin{cases} -x, & se \quad -6 \leq x < 0 \\ x, & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 5-(x-3)^2, & se \quad 1 < x \leq 4 \end{cases}.$

Logo, $\quad f'(x) = \begin{cases} -1, & se \quad -6 < x < 0 \\ 1, & se \quad 0 < x < 1 \\ -2x+6, & se \quad 1 < x < 4 \end{cases}.$

Vemos que $f'(x)$ não existe quando $x = 0$ e $x = 1$. $f'(x) = 0$ quando $x = 3$.
Portanto, os pontos críticos de f são: $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$.
Calculando f nestes pontos, temos:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(3) = 5.$$

Calculando f nos extremos, temos:

$$f(-6) = 6, \quad f(4) = 4.$$

Portanto, o ponto mínimo de f é $(0,0)$. E o ponto máximo de f é $(-6,6)$.

Vejamos graficamente:

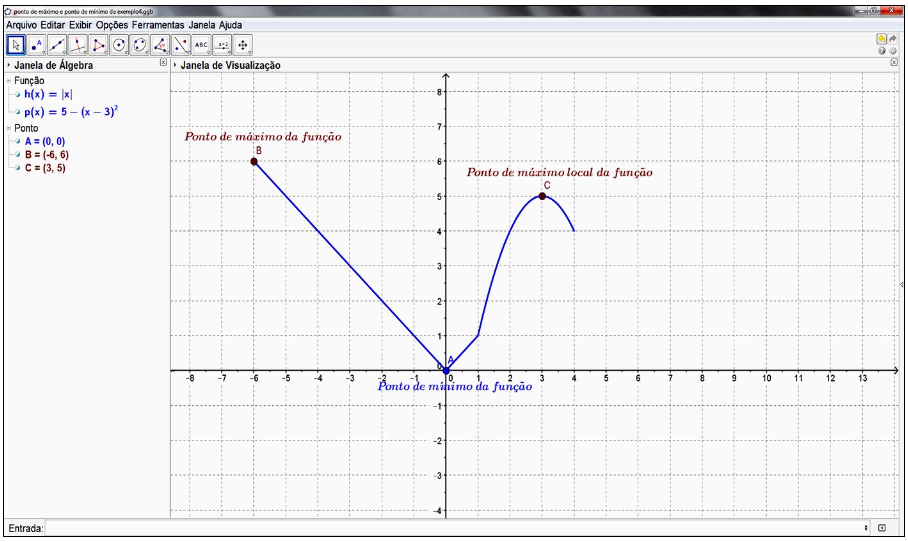

Figura 19: Pontos de mínimo e máximo da função

Portanto, o uso do software geogebra pode ser anterior à sistematização de um conteúdo, trabalhando a ideia para o melhor entendimento, posterior para aprimorar, refinar e explorar o seu conhecimento ou, ainda, durante o processo facilitando a visualização e a compreensão do que está sendo estudado.

3 Resolução de problemas de maximização e minimização aplicados às diversas áreas do cotidiano, com a utilização do software Geogebra

Neste capítulo apresentaremos vários problemas que envolvem máximos e mínimos de funções de uma variável aplicados aos diversos ramos da atividade humana.

O primeiro passo para resolver este tipo de problema é determinar, de forma precisa, a *função* a ser otimizada. Em seguida, devemos encontrar os pontos extremos da função utilizando os critérios estudados.

3.1 Problema 1

Determine dois números reais positivos cuja soma é 70 e tal que seu produto seja o maior possível.

Solução. Sejam $x, y > 0$ tais que $x + y = 70$. Então, $x, y \in (a, b)$.

Seja $P \in \mathbb{R}$; $\quad P = x.y$. Como $x + y = 70$, temos que $y = 70 - x$. Logo $P = x.(70 - x)$ $\iff \quad P = -x^2 + 70x, \quad x \in (0, 70)$.

Portanto a função é: $\quad P : (0, 70) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad P(x) = -x^2 + 70x$.

Calculando seus pontos críticos:

$P(x) = -x^2 + 70x \quad \Longrightarrow \quad P'(x) = -2x + 70$.
$P'(x) = 0 \quad \iff \quad -2x + 70 = 0 \quad \iff \quad x = 35$.
Logo, seu único ponto crítico é em $x = 35$, pois $P'(x)$ existe em todo domínio $(0, 70)$ da função P.
Calculando $P''(x)$:
$P'(x) = -2x + 70 \quad \Longrightarrow \quad P''(x) = -2$.
Então, $P''(35) = -2$. Portanto, o ponto de abscissa 35, é ponto de máximo da função.
Calculando $P(35)$:
$P(x) = -x^2 + 70x \quad \Longrightarrow \quad P(35) = -35^2 + 70.35 \quad P(35) = 1225$.
Logo, o ponto $(35, 1225)$ é o ponto máximo da função P.
Como $\quad x + y = 70 \quad$ e $\quad x = 35, \quad$ temos que $\quad y = 35$.
Portanto, os números reais positivos cuja soma é 70 e tal que o produto é o maior possível são:
x=35 e **y=35**. E o maior produto é: **P=1225**.

Vejamos graficamente:

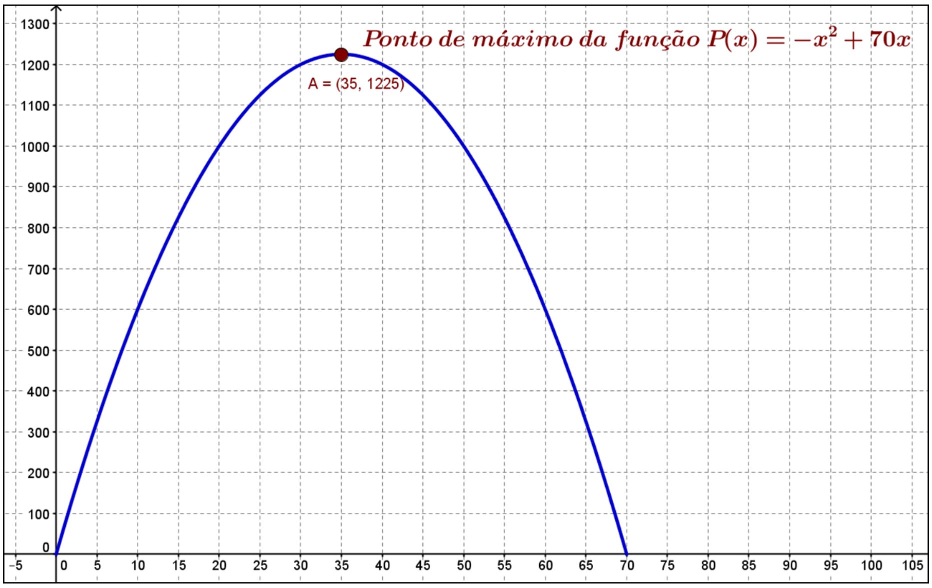

Figura 20: Gráfico da função $P(x) = -x^2 + 70x$

A vantagem da representação gráfica é que vemos o comportamento da função produto $P(x) = -x^2 + 70x$ não só no ponto de máximo mas em todo o seu domínio, não deixando dúvidas sobre o resultado encontrado. E com o Geogebra isto é feito de forma muito simples e rápida.

3.2 Problema 2

Com uma folha retangular de papelão se quer construir uma caixa de máximo volume possível, cortando um quadrado em cada canto, conforme indica a figura abaixo. As dimensões da folha são 60 cm e 40 cm.

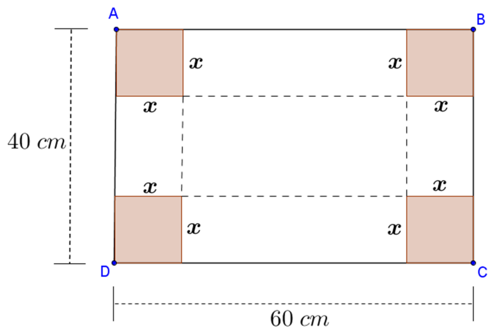

Figura 21: Folha retangular para a construção da caixa de papelão

a) Calcule o valor de x;

b) Determine o volume máximo da caixa.

Solução. A caixa terá a forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões: $60-2x$, $40-2x$ e x.

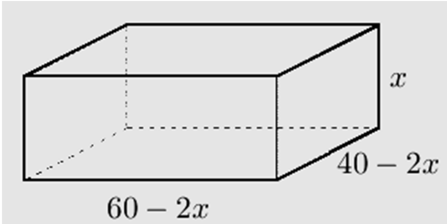

Figura 22: Caixa de papelão

Para que a construção da caixa seja possível, $x \in (0,20)$.

Seja V, o volume da caixa. Então:

$V = x.(60-2x).(40-2x) \iff V = 4x^3 - 200x^2 + 2400x.$

Logo, a função que determina o volume da caixa em relação a x, é:

$V : (0,20) \longrightarrow \mathbb{R};\quad V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x.$

Determinando os pontos críticos de V:

$V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x \implies V'(x) = 12x^2 - 400x + 2400.$

$V'(x) = 0 \iff 12x^2 - 400x + 2400 = 0 \iff$

$x_1 = \dfrac{50+10\sqrt{7}}{3}$ ou $x_1 \approx 25,48.$ Não serve! Pois **25,48** não pertence ao domínio da função.

$x_2 = \dfrac{50-10\sqrt{7}}{3}$ ou $x_2 \approx 7,85.$ Serve! Pois **7,85** pertence ao domínio da função.

Logo, o único ponto crítico da função V é o de abscissa $7,85$, pois como já foi visto $25,48 \notin (0,20)$ e V é derivável em todo o seu domínio.

Calculando $V''(x)$:

$V'(x) = 12x^2 - 400x + 2400 \implies V''(x) = 24x - 400.$

Determinando $V''(7,85)$:

$V''(x) = 24x - 400 \implies V''(7,85) = 24.7,85 - 400 \quad V''(7,85) = -211,6 < 0.$

Logo, o ponto de abscissa $x = 7,85$ é ponto de máximo.

Calculando $V(7,85)$:

$V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x \implies V(7,85) = 4.7,85^3 - 200.7,85^2 + 2400.7,85 \iff V(7,85) \approx 8450,45.$

Logo, o ponto de máximo da função V é $(7,85; 8450,45)$.

Portanto, o volume da caixa será máximo quando **x ≈ 7,85 cm**.

O volume máximo da caixa é $\approx$ **8450,45 cm**^{3}.

Vejamos no gráfico:

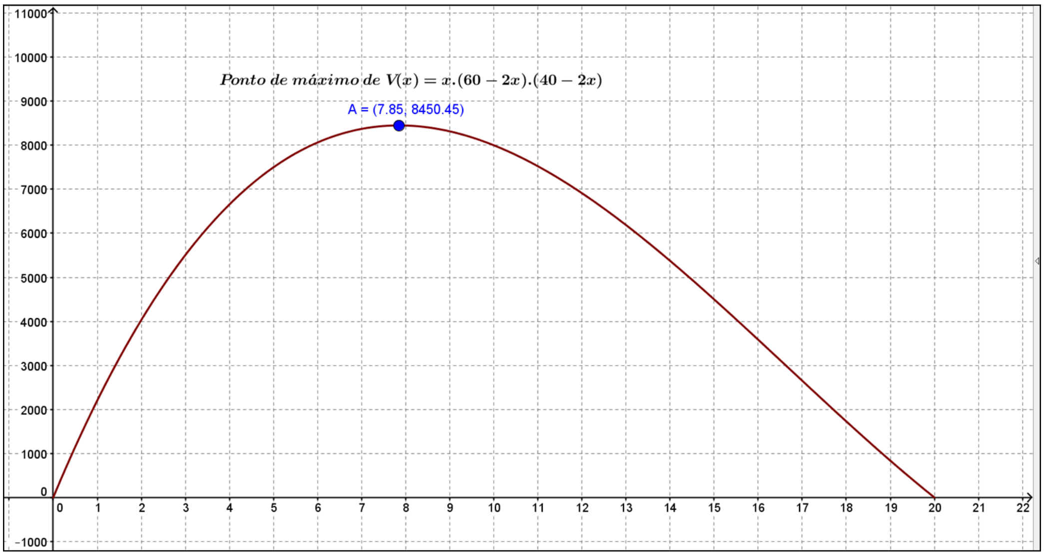

Figura 23: Gráfico da função $V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$

No gráfico observamos a curva da função volume $V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$ em todo o seu domínio, ratificando o resultado encontrado para o ponto de máximo da função.

3.3 Problema 3

Um fazendeiro precisa construir um galinheiro de forma retangular utilizando-se de uma tela de 16 metros de comprimento. Sabendo que o fazendeiro vai usar um muro como fundo do galinheiro, determine as dimensões do mesmo para que sua área seja máxima.

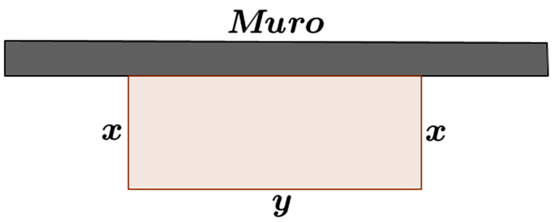

Figura 24: Galinheiro

Solução. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, com $x, y > 0$, as dimensões do retângulo, conforme a figura. Então: $2x + y = 16$.

Logo, para que a construção do galinheiro seja possível, $0 < x < 8$ e $0 < y < 16$.
Como $2x + y = 16$, temos que $y = 16 - 2x$.
Seja A, a área do galinheiro. Então: $A = x.y$.
Logo, a $A = x(16 - 2x) \iff A = -2x^2 + 16x$.
Portanto, a função que determina a área do galinheiro é:
$A : (0, 8) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad A(x) = -2x^2 + 16x$.
Determinando os pontos críticos da função A.
$A(x) = -2x^2 + 16x \implies A'(x) = -4x + 16$.
$A'(x) = 0 \iff -4x + 16 = 0 \iff x = 4$. Serve! Pois $4 \in (0, 8)$, que é o domínio da função A. Calculando $A''(x)$:
$A'(x) = -4x + 16 \implies A''(x) = -4$. Aplicando A'' em $x = 4$, temos: $A''(4) = -4 < 0$. Logo, o ponto de abscissa $x = 4$ é o único ponto de máximo da função A, pois A é derivável em todo o seu domínio. Calculando $A(4)$:
$A(x) = -2x^2 + 16x \implies A(4) = -2.4^2 + 16.4 \iff A(4) = 32$. Logo, o ponto $(4, 32)$ é o ponto máximo da função A.
Como $2x + y = 16$ e $x = 4$, temos que $y = 8$.
Portanto, para que a área do galinheiro seja máxima, **x = 4 m** e **y = 8 m**.
A área máxima do galinheiro é **32 m**^{2}.

Vejamos graficamente:

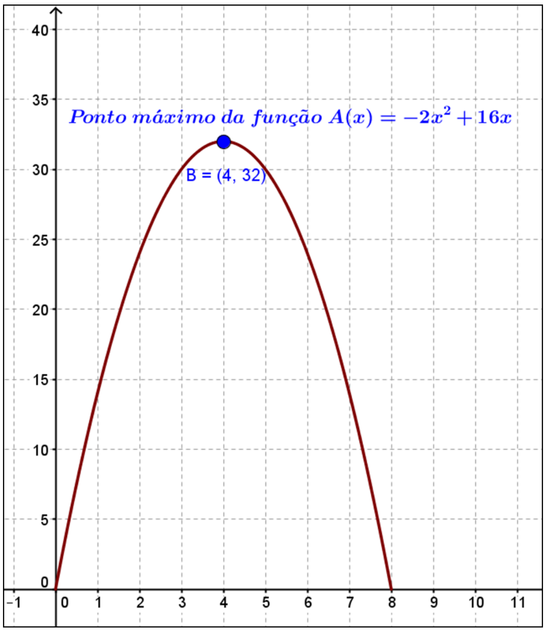

Figura 25: Gráfico da função $A(x) = -2x^2 + 16x$

Com a função Área $A(x) = -2x^2 + 16x$ representada graficamente em todo o seu domínio, compreendemos de uma maneira muito abrangente, as propriedades e as características da referida função.

3.4 Problema 4

Deseja-se construir um reservatório de água destampado de forma circular, com volume igual a $\mathbf{125\pi m}^3$. Sabendo que o custo do material para fazer o fundo do reservatório é o triplo do custo do material para fazer a lateral, determine os valores do raio r e da profundidade h, de modo que o reservatório possa ser construído com o menor custo.

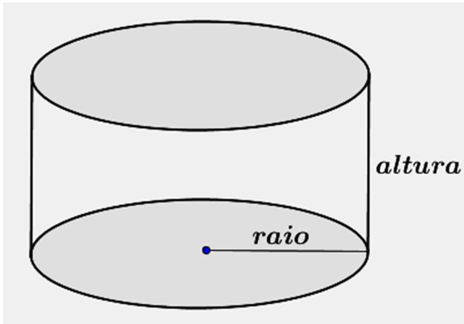

Figura 26: Reservatório de água

Solução. Como o reservatório é circular, então o seu formato é o de um cilindro.

Sejam r, h respectivamente, o raio e a altura do cilindro. Então $r, h > 0$.

Seja V o volume do cilindro. Então $V = \pi r^2 h$. Como $V = 125\pi\ m^3$, temos que:

$125\pi = \pi r^2 h \quad \Longleftrightarrow \quad h = \dfrac{125}{r^2}$.

Seja C o custo de produção do reservatório. Logo, $\quad C = 3.\pi r^2 + 2\pi r h \quad \Longrightarrow$

$C = 2\pi r.\dfrac{125}{r^2} + 3\pi r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad C = 250\pi r^{-1} + 3\pi r^2$.

Logo, a função que determina o custo de produção do reservatório é:

$$C : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad C(r) = 250\pi r^{-1} + 3\pi r^2, \quad \text{onde } r \text{ é o raio do cilindro.}$$

Determinando os pontos críticos de C:

$C(r) = 250\pi r^{-1} + 3\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad C'(r) = -250\pi r^{-2} + 6\pi r$.

$C'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{-250\pi}{r^2} + 6\pi r = 0 \quad \dfrac{-250\pi}{r^2} = -6\pi r \quad \Longleftrightarrow$

$r^3 = \dfrac{125}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad r = \dfrac{5}{\sqrt[3]{3}} \quad \Longleftrightarrow \quad r \approx 3,47.$ Serve! Pois $3,47 \in (0, +\infty)$.

Calculando $C''(r)$:

$C'(r) = -250\pi r^{-2} + 6\pi r \quad \Longleftrightarrow \quad C''(r) = 500\pi r^{-3} + 6\pi.$

Aplicando S'' em $r = 3,47$:

$C''(r) = 500\pi r^{-3} + 6\pi \quad \Longleftrightarrow \quad C''(3,47) = 500.\pi.(3,47)^{-3} + 6.\pi \quad C''(3,47) \approx 37,6 + 18,85$ $\Longleftrightarrow \quad C''(3,47) \approx 56,45 > 0.$

Logo, o ponto de abscissa $r = 3,47$ é o único ponto de mínimo da função C, pois C' existe em todo domínio da função C.

Calculando $C(3,47)$:

$C(r) = 250\pi r^{-1} + 3\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad C(3,47) = 250.\pi.3,47^{-1} + 3.\pi.3,47^2 \quad \Longleftrightarrow \quad C(3,47) \approx 339,82.$

Logo, o ponto $(3,47; 339,82)$ é o ponto mínimo da função custo.

Como $h = \dfrac{125}{r^2}$ e $r = 3,47$, temos que $h = \dfrac{125}{3,47^2} \quad \Longleftrightarrow \quad h \approx 10,38.$

Portanto, para que o custo de construção do reservatório seja mínimo, o raio do reservatório deverá ser aproximadamente $3,47\ m$ e a profundidade aproximadamente $10,38\ m$.

Vejamos graficamente:

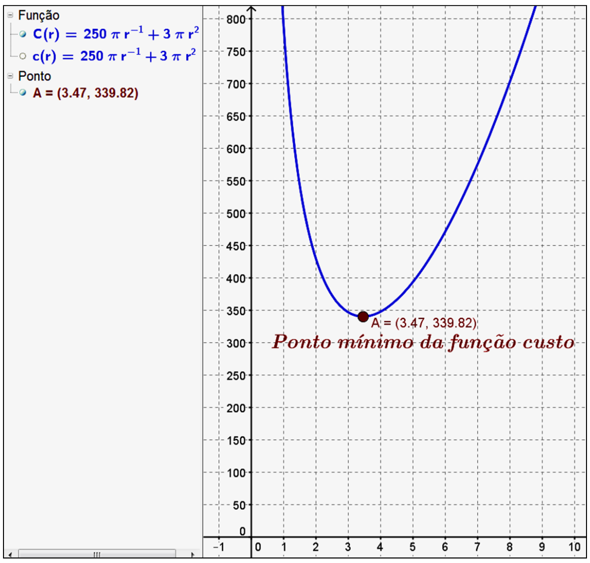

Figura 27: Gráfico da função custo: $C(r) = 250\pi r^{-1} + 3\pi r^2$

Com a função representada através de seu gráfico, percebemos claramente que o custo de fato será mínimo se o raio do reservatório for aproximadamente $3,47\ m$.

3.5 Problema 5

Num canteiro semicircular, cujo raio tem 4 metros de comprimento, são reservados, de acordo com a figura, dois canteiros, também semicirculares, destinados ao cultivo de flores, sendo para grama esmeralda a parte restante. Sabendo que o m^2 da grama esmeralda custa $5,00$ reais, o m^2 da flor que será plantada no canteiro 1 custa $20,00$ reais e o m^2 da flor que será plantada no canteiro 2 custa $50,00$ reais:

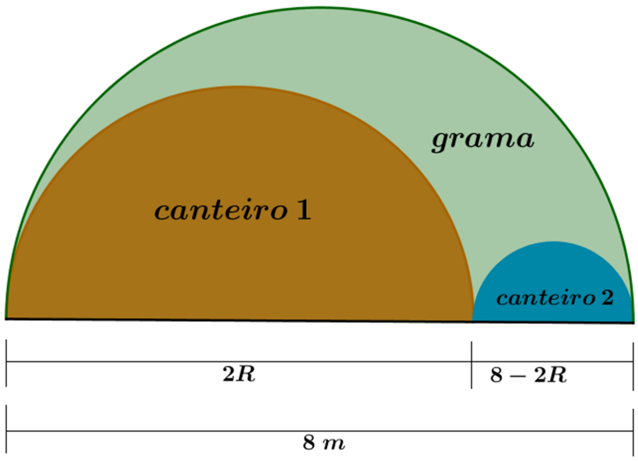

Figura 28: Canteiro semicircular

a) Determine a função que calcula o custo total do empreendimento;
b) Determine quais as medidas dos raios dos dois canteiros das flores para que o custo do empreendimento seja mínimo.

Solução. Sejam A a área do semicírculo maior, A_1 a área do semicírculo que representa o canteiro 1 e A_2 a área do semicírculo que representa o canteiro 2.

Então, $A = \dfrac{\pi.4^2}{2} \iff A = \dfrac{16\pi}{2} \iff A = 8\pi\ m^2$.

A área do canteiro 1 será: $A_1 = \dfrac{\pi R^2}{2}\ m^2$.

Como o diâmetro do semicírculo que representa o canteiro 2 é $8-2R$, temos que seu raio mede $(4-R)\ m$.

Logo, a área do canteiro 2 será: $A_2 = \dfrac{\pi(4-R)^2}{2}\ m^2$.

Seja A_3 a área da grama. Então: $A_3 = A - A_1 - A_2 \iff A_3 = 8\pi - \dfrac{\pi R^2}{2} - \dfrac{\pi(4-R)^2}{2}$ $\iff A_3 = \pi(4R - R^2)\ m^2$.

Seja C o custo total de produção. Como o m^2 da grama esmeralda custa $5,00$ reais, o m^2 da flor que será plantada no canteiro 1 custa $20,00$ reais e o m^2 da flor que será plantada no canteiro 2 custa $50,00$ reais, temos que:

$$C = 5.\pi(4R - R^2) + 20.\left(\frac{\pi R^2}{2}\right) + 50.\frac{\pi(4-R)^2}{2}$$

$$C = 20\pi R - 5\pi R^2 + 10\pi R^2 + 400\pi - 200\pi R + 25\pi R^2$$

$$C = 30\pi R^2 - 180\pi R + 400\pi.$$

Vemos que a figura acima que o canteiro só pode ser construído se $0 < R < 4$.

Então:

$$C : (0,4) \longrightarrow \mathbb{R};\quad C(R) = 30\pi R^2 - 180\pi R + 400\pi.$$

É a função que calcula o custo total de produção do empreendimento.

Determinando os pontos críticos de C:

$C(R) = 30\pi R^2 - 180\pi R + 400\pi \implies C'(R) = 60\pi R - 180\pi$

$C'(R) = 0 \iff 60\pi R - 180\pi = 0 \iff R = 3.$

$R = 3$ é válido, pois $3 \in (0,4)$, que é o domínio da função custo C.

Calculando $C''(R)$:

$C'(R) = 60\pi R - 180\pi \implies C''(R) = 60\pi$

Logo, $C''(3) = 60\pi > 0$.

Calculando $C(3)$:

$C(R) = 30\pi R^2 - 180\pi R + 400\pi \iff C(3) = 30\pi.3^2 - 180\pi.3 + 400\pi \iff$

$C(3) = 270\pi - 540\pi + 400\pi \quad \Longleftrightarrow \quad C(3) = 130\pi \quad \Longleftrightarrow \quad C(3) \approx 408,41$ reais.

Logo, o ponto $(3;\ 408,41)$ é o único ponto mínimo da função custo C, pois $C'(x)$ está definida em todo domínio $(0,\ 4)$.

Portanto, para que o custo de produção do empreendimento seja mínimo, o raio do canteiro 1 deverá ser **3 metros**, e o raio do canteiro 2 deverá ser **1 metro**.

E, o custo mínimo de produção será aproximadamente **408,41 reais**.

Vejamos graficamente:

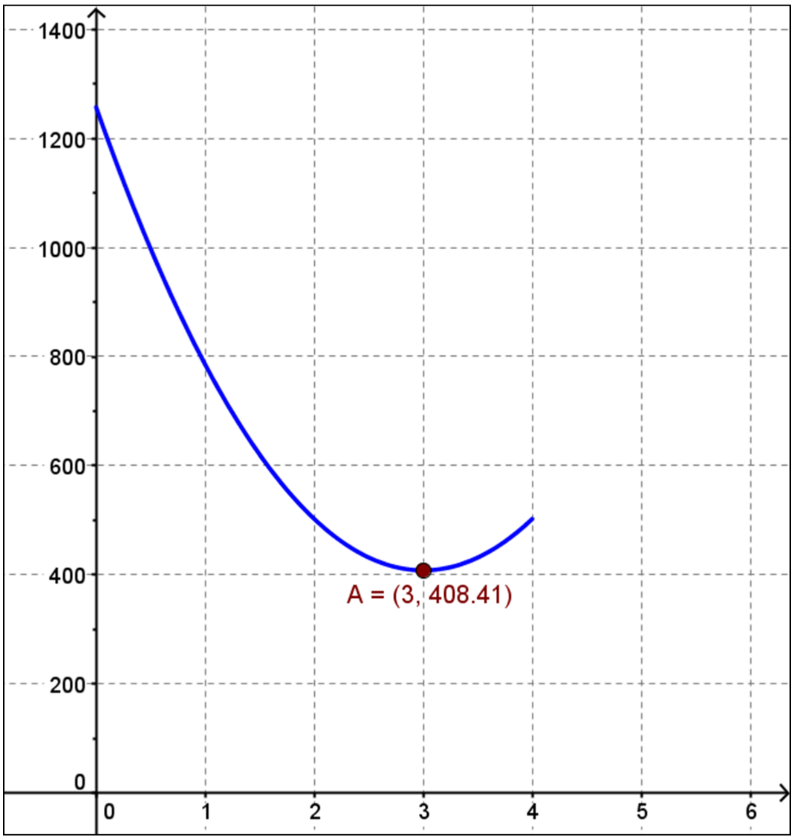

Figura 29: Gráfico da função Custo total de produção

Observando a função representada graficamente temos o custo de produção variando em todo o seu domínio e não há dúvidas sobre o seu valor mínimo.

Portanto, o canteiro com o menor custo terá da seguinte forma:

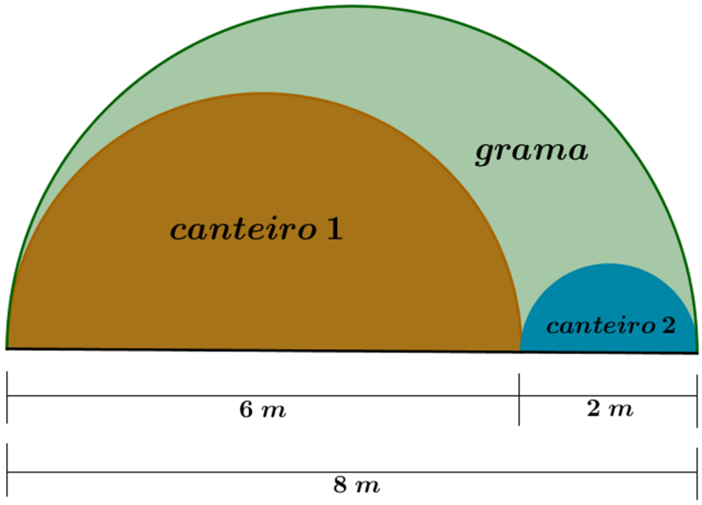

Figura 30: Canteiro com o menor custo de produção

3.6 Problema 6

Um edifício de 2000 m^2 de piso deve ser construído , sendo exigido recuos de 5 m na frente e nos fundos e de 4 m nas laterais, conforme a figura abaixo. Determine as dimensões do lote com menor área onde esse edifício possa ser construído.

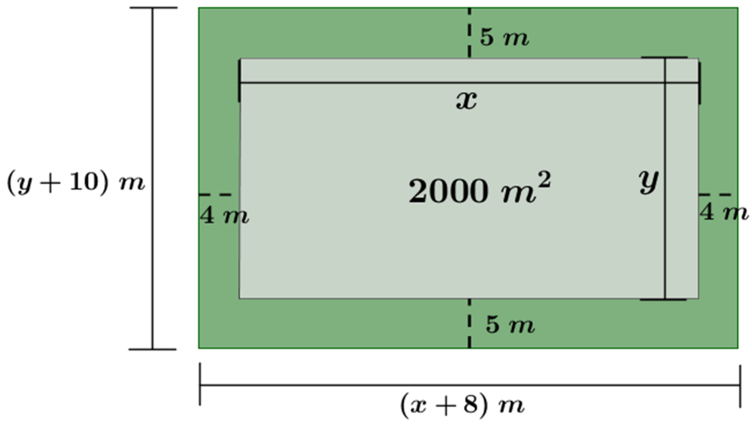

Figura 31: Lote para a construção do prédio

Solução. Seja A, a área do lote. Logo $A=(x+8).(y+10) \iff A=xy+10x+8y+80$.

Seja S, a área do piso do prédio. Logo, $S=x.y=2000 \iff y=\dfrac{2000}{x}$.

Então: $A=2000+10x+8.\dfrac{2000}{x}+80 \iff A=10x+\dfrac{16000}{x}+2080 \iff$

$$A=10x+16000x^{-1}+2080.$$

Portanto, a função que determina a área do lote é:

$$A:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R};\quad A(x)=10x+16000x^{-1}+2080.$$

Determinando os pontos críticos da função A:

$$A(x)=10x+16000x^{-1}+2080 \implies A'(x)=-16000x^{-2}+10$$

$$A'(x)=0 \iff -16000x^{-2}+10=0 \iff x=40 \quad ou \quad x=-40.$$

$x=40$ é válido, pois $40\in(0,+\infty)$, mas $x=-40$ não é válido, pois $-40\notin(0,+\infty)$.

Calculando $A''(x)$:

$$A'(x)=-16000x^{-2}+10 \implies A''(x)=32000x^{-3}.$$

Então,

$$A''(40)=32000.40^{-3} \iff A''(40)=\frac{32000}{64000} \iff A''(40)=0.5>0.$$

Calculando $A(40)$:

$$A(x)=10x+16000x^{-1}+2080 \implies A(40)=10.40+\frac{16000}{40}+2080 \iff A(40)=2880.$$

Portanto, o único ponto de máximo da função A é o ponto $(40,2880)$, pois $A'(x)$ está definida em todo domínio $(0,+\infty)$.

Como, $y=\dfrac{2000}{x}$ e $x=40$, temos que $y=\dfrac{2000}{40} \iff y=50$.

Portanto, para que o lote tenha a menor área, $x=40\ m$ e $y=50\ m$. Ou seja:

O lote deverá ter: 48 *metros* de frente por 60 *metros* de fundo.

Logo a área do lote será 2880 m^2.

E o edifício deverá ter: 40 $metros$ de frente por 50 $metros$ de fundo.

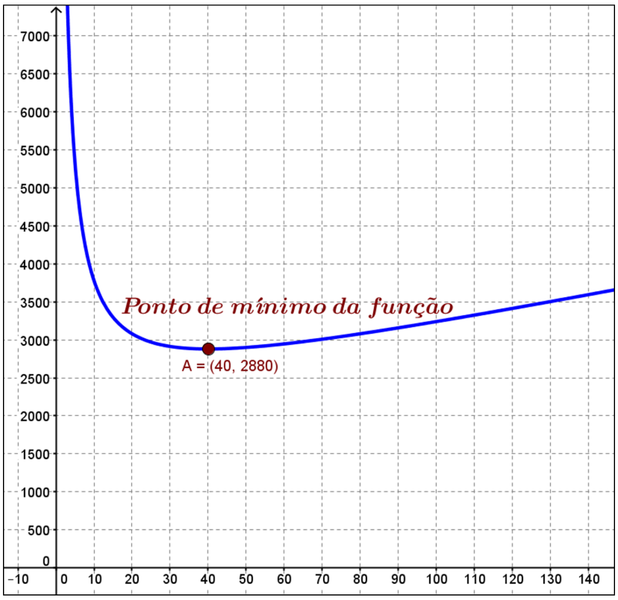

Figura 32: Gráfico da função $A(x) = 10x + 16000x^{-1} + 2080$ que determina a área do lote.

Observando a função representada graficamente não resta dúvidas quanto ao seu ponto de mínimo.

Considerações finais

Este trabalho demonstrou como o software Geogebra pode auxiliar professores e alunos na construção de conhecimentos sobre funções de uma variável, especialmente na análise de pontos de máximo e mínimo. Muitas escolas e universidades ainda tratam o ensino de uma maneira tradicional, com memorização de fórmulas, exercícios repetitivos e reprodução de passos direcionados pelo professor.

Diversos estudos vêm sendo feitos para tentar mudar estes procedimentos e, consequentemente, tornar o ensino-aprendizagem menos metódico e mais dinâmico e prazeroso tanto para o aluno quanto para o professor.

Como vimos, o computador pode ser um instrumento de muitas possibilidades para que nos auxiliem no alcance destes objetivos. A utilização destas ferramentas pode dar a oportunidade aos alunos de interagir com os conceitos matemáticos, de fazer conjecturas e quem sabe olhar a matemática de uma forma mais prazeroza.

O trabalho realizado com o software Geogebra comtemplou o estudo de construções e análises de gráficos de funções, das derivadas das funções, das derivadas segundas e principalmente a análise e interpretação dos pontos críticos das funções, sendo alguns de mínimo, outros de máximo e outros que não eram nem mínimo nem máximo.

Portanto o uso de tecnologias, aliado a vontade do professor de atingir seus objetivos e suas metas podem proporcionar aos alunos, um ambiente pedagógico interativo e instigante, onde quem ganha no final é o melhor ensino-aprendizagem.

Referências

[1] FLEMMING, Diva Marília e GONÇALVES, Mirian Buss; *Cálculo A*. Santa Catarina, Editora da Universidade Federal de Santa Catarina. 1987.

[2] GIOVANNI, José Ruy e BONJORNO, José Roberto; *Matemática Completa*. São Paulo, FTD. 2005.

[3] HOHENWARTER, Markus e HOHENWARTER, Judith; *Manual Oficial do Geogebra*. Universidade de Salzburgo, Austria. 2001.

[4] LIMA, Elon Lages; *Análise real*. Vol. 1. Rio de Janeiro, IMPA. 1989.

[5] LIMA, Elon Lages; *Curso de Análise*. Vol. 1. Rio de Janeiro, IMPA. 1976.

[6] LIMA, Elon Lages; *Meu Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, IMPA. 1991.

[7] MUNEM, Mustafa A. e FOULIS, David J.; *Cálculo 1*. University of Massachusetts, USA. 1978.

[8] SANTOS, Reginaldo; *Introdução ao LaTeX*. Departamento de Matemática, UFMG. 2008.

[9] WIKIPEDIA; *A enciclopédia livre*. www.wikipedia.org.