INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SALATIEL MARIA MOURA SALOMÉ

A AUTONOMIA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: Fatores que afetam a sua construção no Ensino Médio

Floriano
2018

SALATIEL MARIA MOURA SALOMÉ

A AUTONOMIA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: Fatores que afetam a sua construção no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado do Instituto Federal do Piauí para obtenção do título de mestre em matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves.
Co-Orientador: Prof. Me. Wilbert José de Oliveira Moura.

Floriano
2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente com dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SALOMÉ, SALATIEL MARIA MOURA
S173a AUTONOMIA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO : Fatores que afetam a sua construção no Ensino Médio / SALATIEL MARIA MOURA SALOMÉ - 2018.
74 p. : il. color.

Trabalho de conclusão de curso (Mestrado) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Floriano, Mestrado Profissional em Matemática, 2018.

Orientador : Prof Dr. EZEQUIAS MATOS ESTEVES.
Coorientador : Prof Me. WILBERT JOSÉ DE OLIVEIRA MOURA.

1. ENSINO. 2. MATEMÁTICA. 3. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. I.Título.

CDD 510

INSTITUTO FEDERAL
Piauí
Campus Floriano

PROFMAT

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ - IFPI
CAMPUS FLORIANO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

SALATIEL MARIA MOURA SALOMÉ

"A AUTONOMIA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: Fatores que afetam a sua construção no Ensino Médio"

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal do Piauí, como parte integrante dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 26/10/2018.

BANCA EXAMINADORA

Ezequias Matos Esteves
____
Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI
Orientador

____
Prof. Dr. Egnilson Miranda de Moura
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI
Avaliador Interno

____
Profª. Drª. Maria Cezar de Sousa
Universidade Federal do Piauí - UFPI
Avaliadora Externa

Dedico este trabalho a todos os professores que com dedicação exercem o seu ofício.

A minha avó, Helena Quaresma Moura, cujo afeto e zelo jamais poderei compensar;

A minha tia, Maria do Socorro Quaresma Moura, meu porto seguro e o meu arquétipo de mãe;

A minha mãe, Maria Lúcia Quaresma Moura, por todas as dificuldades enfrentadas na minha criação;

Aos meus filhos Alice Moura Santos e Humberto Moura Santos, pela inspiração e felicidade diárias que me proporcionam;

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves, por todos os incentivos que foram além deste trabalho;

Ao Prof. Me. Antônio Francisco Oliveira Veloso, pela perene amizade e incentivo;

A todos os professores do PROFMAT sem os quais esta formação não seria possível.

Ninguém é sujeito da autonomia de ninguém.

(Paulo Freire)

Salomé, M. M. S. A Autonomia do pensamento matemático: os fatores que afetam a sua construção no ensino médio. 2018. 74f. Dissertação (mestrado) – Instituto Federal do Piauí, Floriano, 2018.

RESUMO

Este trabalho consiste em um estudo sobre os objetivos do ensino de matemática no Ensino Médio, sobretudo os dispostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais e direcionados ao desenvolvimento de habilidades e competências por parte dos alunos ao final desta etapa de formação. Apresenta fragmentos do texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais, enfatizando vários objetivos que devem nortear o ensino de matemática no Ensino Médio e traz esses objetivos aos auspícios da autonomia do pensamento matemático, mostrando como seus elementos estão presentes em diversas áreas da Educação Matemática através de um recorte bibliográfico. Analisa os principais fatores que afetam a construção dessa autonomia tendo por base pesquisa realizada na Escola Ceep Balduíno Barbosa de Deus, através da análise das respostas de questionário aplicado aos professores e do qual extrai, pela análise de conteúdo, a presença/ausência desses objetivos na visão do professor. Realiza uma análise do livro didático categorizando os exercícios apresentados e, por fim, apresenta ainda uma rápida análise de erros cometidos pelos alunos em teste aplicado. A análise dos resultados obtidos é apresentada com auxílio de tabelas, quadros e ilustrações utilizados como elementos de síntese, culminando numa proposta de condução do ensino através da geometria como meio de alcance dos resultados objetivados no aprendizado de matemática.

Palavras-chave: Autonomia. Ensino Médio. Pensamento Matemático. Geometria.

ABSTRACT

This work consists of a study about the objectives of teaching mathematics in High School, especially those arranged in the National Curricular Parameters and directed to the development of skills and competences by the students at the end of this stage of formation. It presents fragments of the text of the National Curricular Parameters, emphasizing several objectives that should guide the teaching of mathematics in High School and brings these objectives to the auspices of the autonomy of mathematical thinking, showing how its elements are present in several areas of Mathematics Education through a cut bibliographic. It analyzes the main factors that affect the construction of this autonomy, based on the research carried out at the Ceep Balduino Barbosa de Deus School, through the analysis of the questionnaire responses applied to the teachers and from which, through content analysis, the presence / absence of these objectives is teacher's view. It performs an analysis of the textbook categorizing the exercises presented and, finally, presents a quick analysis of errors committed by the students in applied test. The analysis of the results obtained is presented with the aid of tables, tables and illustrations used as elements of synthesis, culminating in a proposal of conduction of teaching through geometry as a means of reaching the results objectified in the learning of mathematics.

Keywords: Autonomy. High school. Mathematical Thinking. Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino básico, etapa da vida escolar que no Brasil se encerra no 3º ano do ensino médio, tem passado por reformas neste país, em consonância com a dinâmica internacional, a exemplo da que se encontra em andamento e que visa uma reestruturação profunda do currículo do Ensino Médio, dividindo-o em uma base comum e outra base flexível. Notadamente, o ensino de matemática tem se mostrado preocupante. No meio científico temos a criação e avanço da Educação Matemática, ramo do conhecimento, cujo nascimento remonta à década de 1970 (FIORENTINI; LORENZATO, 2012) e busca estudar o ensino e aprendizagem da matemática sob variados enfoques. Os estudos nesta área são abrangentes e complexos uma vez que têm natureza essencialmente multidisciplinar ou multidimensional, neste contexto apresentam-se, por exemplo, como tendências temáticas em Educação Matemática:

> Processo ensino-aprendizagem em matemática; mudanças curriculares; utilização de Tecnologias de Informação e comunicação (TICs) no ensino e na aprendizagem de matemática; prática docente, crenças, concepções e saberes práticos; conhecimentos e formação/desenvolvimento profissional do professor; práticas de avaliação; contexto sociocultural e político do ensino-aprendizagem da matemática (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 41)

Ainda para estes autores:

> A EM, nascida há pouco mais de 40 anos, está, portanto, diretamente relacionada com a filosofia, com a matemática, com a psicologia e com a sociologia, mas a história, a antropologia, a semiótica, a economia e a epistemologia tem também prestado sua colaboração (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 5)

Todas essas áreas analisam aspectos relevantes que concorrem para o ensino e aprendizagem da matemática de forma ampla e têm apresentado contribuições significativas nesta área.

Não obstante os esforços e contribuições apresentados, os níveis de desenvolvimento do pensamento matemático esperado para o ensino fundamental e médio tem se mostrado preocupante no Brasil, conforme relatório apresentado pelo Instituto Educacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) em 2016, 70,3% dos estudantes brasileiros que participaram do Programa Internacional de Avaliação do Estudante (PISA) em 2015, apresentaram desempenho abaixo do nível 2 em matemática, nível considerado mínimo para o exercício pleno da cidadania, além disso os objetivos presentes nos Parâmetros

Curriculares Nacionais (**PCNs)**, relativos ao nível de domínio esperado nesta disciplina por parte dos alunos ao encerrarem o 3º ano do Ensino Médio mostram-se distantes de serem alcançados, constituindo objeto de interesse de estudo, uma vez que norteiam o processo de ensino de matemática ocorrido durante a educação básica, desta forma, cumpre verificar quais são estes objetivos, pelo menos os principais deles, e em que medida estão sendo atingidos, além de considerar os fatores envolvidos no processo de construção/aquisição das características apontadas como indicadoras de que tais objetivos foram galgados por parte dos alunos, ou seja, do nível de amadurecimento do pensamento matemático em que se encontram os alunos ao final do Ensino Médio.

Melhor colocado, temos em mãos o problema de analisar a autonomia do pensamento matemático que deve ser adquirida pelos alunos ao final do Ensino Médio através dos principais elementos conducentes deste processo.

Propomo-nos, então, dois objetivos gerais:

- Analisar como a autonomia do pensamento matemático aparece como objetivo a ser perseguido e como é considerada na literatura e promovida na escola.
- Propor uma possível forma para que seja melhor alcançada a autonomia do pensamento matemático com suporte na geometria.

Dividimos estes objetivos em objetivos específicos da seguinte forma:

- Realizar análise documental para constatação do tema como objetivo a ser atingido pelo aluno no ensino básico;
- Fazer um recorte bibliográfico identificando como o tema é visto sob a perspectiva de autores de várias áreas da Educação Matemática, buscando identificar os principais obstáculos vinculados ao problema em nível de Educação Básica.
- Analisar, através de aplicação de questionário, teste e análise dos livros didáticos adotados em pesquisa realizada na Escola Ceep Professor Balduíno Barbosa de Deus, localizada no município de Teresina-PI, como esses obstáculos se apresentam e concorrem para os níveis de desenvolvimento da autonomia do pensamento matemático.

- Propor uma forma que possibilite melhorar o amadurecimento do pensamento matemático aos níveis preconizados através da geometria.

Partimos, assim, de uma análise na qual elencamos os principais objetivos constantes dos **PCNs** e da presença característica destes em parte da literatura componente da grande área da Educação Matemática, através de um recorte bibliográfico, buscando, dessa forma, uma melhor compreensão dos aspectos envolvidos, sobretudo no percurso de aquisição/construção das capacidades matemáticas esperadas identificando os principais enfoques do ensino de matemática constituintes do cenário atual e relacionados ao tema, buscando com isso uma melhor compreensão dos fatores envolvidos, bem como da natureza do problema. Esse eixo será em parte documental, mas, essencialmente, reflexivo e bibliográfico.

Analisamos dados coletados através de aplicação de questionários, análise do livro didático, e aplicação de testes com os alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Ceep Professor Balduíno Barbosa de Deus, identificando os principais fatores envolvidos no processo de aquisição da autonomia do pensamento matemático, para, apoiados na análise dos dados e literatura propor uma forma de melhorar tal aquisição.

Utilizamos análise de conteúdo para criação de unidades significativas nas respostas dos professores e na análise dos erros cometidos pelos alunos, mantendo estreito diálogo com a literatura afim.

Este trabalho é composto por 5 capítulos, dos quais este é o primeiro.

No segundo capítulo é tratada a autonomia dos pensamento matemático, caracterizando-a e apresentando seus elementos no texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais e na literatura, sobretudo da área da Educação Matemática.

O terceiro capítulo apresenta o desenvolvimento da pesquisa realizada na Escola Ceep Balduíno Barbosa de Deus, em Teresina-PI, neste capítulo apresentam-se os resultados e análise dos questionários aplicados aos professores participantes da pesquisa, a análise dos livros didáticos e os resultados e análise do teste aplicado aos alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Ceep Balduíno Barbosa de Deus.

O quarto capítulo relaciona o desenvolvimento do pensamento matemático com a Geometria, buscando mostrar como essa disciplina favorece tal desenvolvimento.

O quinto e último capítulo tece algumas considerações ao tempo em que retoma os principais pontos do trabalho apontando a necessidade de ações que incidam nos problemas e melhorem o quadro atual do ensino de matemática.

2 AUTONOMIA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Neste capítulo trataremos da acepção do termo autonomia da forma como será adotada para os nossos propósitos, caracterizando-a no contexto do aprendizado de um dado conhecimento matemático.

Falamos em autonomia do pensamento matemático sem, no entanto, precisar ou aproximar o que entendemos por tal. O termo autonomia tem inúmeras acepções dependendo do contexto considerado, político, filosófico, financeiro etc., em cada um desses contextos a autonomia expressa a condição oposta a uma heteronomia que, por sua vez, expressa uma insuficiência do sujeito para agir em tal contexto ou, em outras palavras, o sujeito não consegue, por si, agir em tal contexto por carecer de elementos necessários para tal ação. Não enveredaremos por uma digressão acerca dessas possibilidades de acepção considerando variados contextos, por hora, consignamos apenas que um sujeito autônomo em determinado contexto apresenta elementos que, em conjunto, possibilitam a este sujeito agir por meios próprios para a consecução de determinado fim.

Por outro lado, sendo o pensamento a faculdade do sujeito de realizar elaborações mentais, podemos nos referir a autonomia do pensamento como a capacidade de o indivíduo guiar-se acertadamente pela sua razão elaborando de forma racional determinado conteúdo que lhes seja apresentado. Quanto ao pensamento matemático o identificamos, para efeito deste trabalho, com a capacidade de modelar situações, compreender, articular e produzir fatos matemáticos apresentados em situações concretas ou abstratas. Neste ponto deixamos implícitos todos os processos envolvidos.

2.1 AUTONOMIA DO PENSAMENTO E A MATEMÁTICA

Passemos agora às considerações concernentes a autonomia do pensamento matemático, buscando identificar os elementos que devem estar presentes no sujeito que apresenta tal autonomia, apontando como estes elementos aparecem nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na literatura, estabelecendo como contexto o Ensino Médio. Antes, porém, tecemos algumas considerações importantes.

Primeiramente chamamos a atenção para o fato de que podemos tomar para análise da autonomia do sujeito referindo-se a um determinado conteúdo componente da grade curricular, como a um conjunto de conteúdos, aos conteúdos de determinada série, ou mesmo aos conteúdos de um ciclo do ensino, em cada caso apresentar-se-á um conjunto de elementos que devem caracterizar a autonomia no contexto considerado.

Outra consideração importante para o momento é que o sistema educacional é organizado visando à aquisição de conhecimentos e desenvolvimento de habilidades e competências de forma gradativa e com adequação ao desenvolvimento motor, social, psicológico etc. desta forma, cada série e cada ciclo visa galgar um determinado nível de desenvolvimento. Isto posto, prosseguiremos apresentando elementos que caracterizam a autonomia do pensamento matemático, como esses elementos aparecem em várias áreas na Educação Matemática e nos **PCNs**.

Visando nos aproximar do ensino da matemática é oportuno apontarmos como a autonomia é tratada no contexto pedagógico da filosofia Kantiana:

> A partir da pedagogia kantiana, podemos dizer que uma educação que vise formar sujeitos autônomos deve unir lições da experiência e os projetos da razão. Isso porque no caso de basear-se apenas no raciocínio puro, estará alheia à realidade e não contribuirá para a superação das condições de heteronomia e, no caso de guiar-se apenas pela experiência, não haverá autonomia, pois para Kant a autonomia se dá justamente quando o homem segue a lei universal que sua própria razão proporciona (ZATTI, 2007, p.31)

Considerando os objetivos do ensino da matemática sob tal perspectiva entendemos que o aluno adquire autonomia quando consegue transitar do concreto ao abstrato em ambos os sentidos em uma dialética de construção do pensamento por abstração do concreto e da ação sobre o mundo material a partir de modelos abstratos previamente criados.

Para (LORENZATO 2010, p.3) “Ensinar é dar condições para que o aluno construa seu próprio conhecimento”. Quando levamos isso ao campo do ensino da matemática há várias considerações que devemos ter em mente. A matemática é um construto da humanidade que vem sendo desenvolvida e polida durante milênios, conforme (D’AMBRÓSIO, 2012, p.16) “todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração, de organização intelectual, de organização social e difusão, elementos naturalmente não contraditórios entre si e que influenciam uns aos outros”, em particular, a matemática, historicamente edificada, estrutura-se com o maior grau de rigor lógico possível, sobretudo esmerada no modelo axiomático herdado de Euclides. Esta face rigorosa é adequada a uma formação acadêmica voltada para a pesquisa matemática de ponta, mas a sua transposição por parte dos professores como princípio norteador no ensino básico tem recebido duras críticas.

> As características da prática escolar tendem a favorecer um modo mais flexível de caracterização dos objetos matemáticos, muitas vezes através de referências descritivas ou de imagens intuitivas no lugar de definições formais. Mesmo porque a definição formal parece não desempenhar, entre os estudantes, um papel muito significativo no processo de construção do conceito a que ela se refere (MOREIRA, 2010, p.30)

Além do rigor lógico inerente ao corpo de conhecimentos matemáticos, outro aspecto que tem levantado vozes em seu desfavor, enquanto objeto de ensino em nível básico, é o grau de abstração de determinados conteúdos, por vezes tido como obstáculo epistemológico desnecessário ao ensino-aprendizagem da matemática, nesse sentido, podemos mesmo afirmar que há certo anseio pela concretização, ou aproximação do ensino de conteúdos matemáticos ligados de maneira mais imediata ao mundo físico, "real", cotidiano, em detrimento de conteúdos de caráter mais abstrato.

> A prática do matemático tem como uma de suas características mais importantes, a produção de resultados originais de ***fronteira.*** Os tipos de objetos com os quais se trabalha, os níveis de abstração em que se colocam as questões e a busca permanente de máxima generalidade nos resultados fazem com que a ênfase nas estruturas abstratas, o processo rigorosamente lógico-dedutivo e a extrema precisão de linguagem sejam, entre outros, valores essenciais associados à visão que o matemático profissional constrói do conhecimento matemático. Por sua vez, a prática do professor de Matemática da escola básica desenvolve-se num contexto ***educativo***, o que coloca a necessidade de uma visão fundamentalmente diferente. Nesse contexto, definições mais descritivas, formas alternativas (mais acessíveis ao aluno em cada um dos estágios escolares) para demonstrações, argumentações ou apresentação de conceitos e resultados, a reflexão profunda sobre as origens dos erros dos alunos etc. se tornam valores fundamentais associados ao saber matemático escolar (MOREIRA, 2010, p.21)

Como vemos, esse autor expressa a preocupação existente com a projeção dos métodos, valores e objetivos que vinculam as práticas matemáticas de nível superior, no ensino básico. Mais especificamente, apresenta preocupação com a apresentação das demonstrações, argumentações ou apresentação de resultados, sugerindo adequação dessas ao momento de desenvolvimento escolar. Por outro lado, há preocupação com a situação de aprendizado encontrada atualmente.

> Conversemos com professores de Matemática. Não são raras às vezes em que relatam as dificuldades de seus alunos em entender o que os

> problemas “pedem”, ou em transformar essa compreensão numa sentença matemática clara e válida. Mesmo os Parâmetros Curriculares Nacionais reforçam a necessidade de serem enfocadas, nos diferentes níveis de ensino, estratégias para motivar a “interpretação de dados” (BICUDO; GARNICA, 2003, p. 43).

Em seguida a autora aponta a continuação do problema em nível superior de educação conforme segue:

> Conversemos com alunos de cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática. É muito comum descreverem dificuldades que enfrentam ao deparar-se com uma matemática formalizada; os tropeços para a demonstração de resultados – por vezes tão claros no enunciado que parecem prescindir de uma prova formalizada – ou para a elaboração de sentenças, ou mesmo para a verificação – informal – da validade de proposições (BICUDO; GARNICA, 2003, p. 43).

Vale ressaltar que a consolidação ou aquisição do aparato e conjunto de valores canônicos componentes do rol epistemológico da matemática em nível superior tem suas bases alicerçadas no ensino básico, notadamente no ensino médio, onde se apresenta como objetivos ou como competências a serem desenvolvidas pelo aluno, conforme previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (**PCNs**). Neste documento o termo autonomia aparece em vários momentos, mas não vem acompanhado de uma definição. No entanto, o texto refere-se a competências e habilidades que são, em última análise, elementos que conduzem à aquisição de tal autonomia, conforme veremos doravante.

Os **PCNs** apresentam considerações importantes em tom de objetivos sobre os conhecimentos de matemática que devem ser alcançados até o final do terceiro ano do ensino médio. Ao tecer considerações visando justificar os objetivos do ensino de matemática em nível de ensino médio, os **PCNs** afirmam que (BRASIL, 1998, p. 41) “aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.”, fica explícito, desta forma, que este nível de educação deve preparar o terreno para o campo epistemológico da matemática como é, de fato, em nível superior, neste ponto, é importante salientar que não nos referimos restritamente à matemática pura, mas às características de método que devem estar presentes tanto nesta quanto na matemática aplicada, ou seja, no uso da matemática enquanto ferramenta de conhecimento e análise como tem sido aplicada às diversas ciências. Em outra passagem o texto dos **PCNs** complementa:

> [...] no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade (BRASIL, 1998, p. 41).

Essas passagens apontam para uma apropriação, por parte dos alunos, de processos cognitivos típicos do pensamento abstrato, desvencilhados, cada vez mais, da presença material, ou seja, de uma realidade concreta, e apoiando-se cada vez mais no raciocínio puro, seguindo uma linha evolutiva orientada do concreto para o abstrato. Há outros trechos dos **PCNs** em que é colocada incisivamente essa vertente, por exemplo:

> Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, 1998, p. 40).

Por outro lado, ainda nos **PCNs**, encontramos também a consideração dos aspectos mais concretos, ou seja, da matemática voltada para a aplicação cotidiana, pragmática, como ressaltado no seguinte trecho: “No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.” (BRASIL, 1998, p. 40). Temos assim uma visão da matemática como ferramenta que, por seu turno, deve subsidiar a compreensão de outras áreas do conhecimento e as tomadas de decisão relativas a diversas áreas de trabalho.

Não obstante o caráter formativo da matemática em relação ao desenvolvimento de estruturas do pensamento, os **PCNs** afirmam que a matemática “é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.” (BRASIL, 1998, p. 40). De fato, é vasta a aplicação da matemática, sobretudo em áreas em que esta ciência apresenta-se como meio de expressão das leis como na química, na biologia, na física e na economia, pra falar apenas das mais próximas do cotidiano. Por outro lado, pretender que o ensino de matemática seja guiado pelo aspecto pragmático, seja na seleção de conteúdos componentes dos currículos, na seleção e apresentação de problemas práticos que conduzam, em tese, à construção de determinado conceito matemático, ou qualquer forma que pretenda alicerçar o ensino da matemática no mundo físico objetivo, mostra-se insuficiente para esta disciplina uma vez que muitos dos seus construtos prescindem de um correlato material pois possuem o seu valor na dimensão do pensamento humano. Tal linha de raciocínio encontra eco em:

> No que diz respeito, mais particularmente, aos conceitos matemáticos e científicos, não se pode absolutamente falar de correspondência estrita com a realidade sensível: os conceitos de ponto (ente geométrico adimensional por definição), reta (perfeitamente unidimensional), número negativo, força e movimento (enquanto grandezas vetoriais), energia e variável (em álgebra) não dispõem de correlativos imediatamente observáveis (FALCÃO 2003, p. 31).

Outra dimensão da matemática que não passou despercebido nos **PCNs** foi o seu aspecto linguístico ao afirmar que “habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio” (BRASIL, 1998, p. 41), o aspecto é uma faceta desta ciência que tem sido trabalhada no sentido de torná-la cada vez mais precisa e concisa, com suas características sintáticas e semânticas peculiares, estas levadas sob os auspícios do rigor lógico.

Após tecer considerações sobre a importância da matemática no Ensino Médio, os **PCNs** elencam alguns objetivos do ensino de matemática neste nível, dentre os objetivos destacamos os seguintes:

• compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral (BRASIL, 1998, p. 42).

• expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática (BRASIL, 1998, p. 42).

• aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas (BRASIL, 1998, p. 42).

• desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo (BRASIL, 1998, p. 42).

Nestes quatro, dos nove objetivos constantes do texto, ressalta que o objetivo primordial do ensino de matemática no ensino médio é conduzir o aluno a uma situação de autonomia relativa aos conteúdos ensinados nesta etapa, garantindo-lhe esteio para a formação de um pensamento científico, seja na aquisição de novos conhecimentos, na aplicação de conhecimentos já adquiridos a outras áreas ou na própria produção de conhecimento científico de forma ampla. Cumpre ainda salientar que, como última instância do processo, a produção de conhecimentos pautada em método científico reclama adequação formal e, portanto, domínio do meio de expressão. Isto fica explícito nos **PCNs** ao afirmar que o aluno deve “valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática” (BRASIL, 1998, p. 42), tal nível de apropriação do pensamento científico ocorre essencialmente em nível abstrato pois, não prescinde da forma de produção matemática, ainda que em seus rudimentos, tal como ocorre no nível superior de ensino.

Fica evidente que encontramos defensores de propostas com foco em um ensino de matemática que seja pautado na proximidade cotidiana dos alunos, nas suas necessidades práticas, nas suas aplicações imediatas, ou seja, de um modo geral, que tenha como ponto de partida para a apresentação ou mesmo inclusão de determinado conteúdo em um currículo, problemas que sejam palpáveis como uma aferição de medidas de volume com recipientes em formatos diversos, a compra de determinada mercadoria com juros ou descontos, o financiamento de determinado bem ou outra situação que, devido a sua presença no cotidiano do aluno favoreça a sua compreensão e funcione como elemento motivador uma vez que deve apresentar-se como um problema natural ou como uma aplicação imediata de determinado conteúdo da matemática. No extremo dessa corrente encontramos, na prática docente, uma grande produção de material manuseável que pretende dar subsídio ao ensino desta disciplina através do manuseio de objetos em formas geométricas variáveis, da aferição de comprimentos e volumes em laboratórios de matemática, manipulação de softwares matemáticos e da realização de experimentos diversos que incluem os sentidos do tato e da visão e dão um caráter sinestésico ao processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Por outro lado, há aqueles que defendem um ensino que prime pelo rigor em detrimento das ligações da matemática com o mundo objetivo, seja por projetar os cânones da disciplina apreendidos na formação de nível superior, seja por entenderem como necessário o desenvolvimento de certas competências argumentativas, dedutivas ou indutivas, típicas do abstrato, ou mesmo por reconhecer como forma de validação epistemológica “correta” as demonstrações e construções axiomáticas dando ênfase a problemas de ordem tipicamente interna e abstrata da matemática.

Conforme vimos, os **PCNs** abarcam, enquanto objetivos, os dois aspectos acima delineados, buscando tanto o desenvolvimento da aquisição de competências pragmáticas relativas aos conteúdos matemáticos quanto o desenvolvimento de competências argumentativas que conduzam o aluno a tal nível de autonomia em que este consiga não apenas compreender como também produzir conhecimento matemático, fazendo uso de argumentação clara com linguagem adequada e encadeamento lógico compatível na forma de demonstrações.

Cabe aqui algumas considerações sobre estes dois aspectos, primeiramente, os reconhecemos, como de fato são, como facetas amplas e motivadoras da matemática que apresentam características próprias com seu maior ou menor grau de proximidade com determinada realidade social ou natural, não obstante, não podemos concebê-los como polos opostos ou desconexos ou adotar uma visão maniqueísta na qual devemos adotar um em detrimento do outro, muito pelo contrário, os aspectos concretos e abstratos da matemática encontram-se intimamente concatenados e são, por si sós, justificadores do grande edifício da matemática e da necessidade de ensino dessa disciplina. Assim, antes de adotar uma postura que privilegie um dos aspectos citados, cumpre observar que grande parte da matemática produzida como abstração em determinado momento acaba, em um momento futuro, encontrando uma área de aplicação, sobretudo com os avanços tecnológicos e científicos, como é o caso, por exemplo, dos números complexos que após vencerem a resistência de sua aceitação até mesmo pela comunidade matemática, encontraram muitas formas de aplicação, como nos fenômenos de corrente alternada na física. Por outro lado, a observação de fenômenos cotidianos pode suscitar questões de modelagem que levam à criação de teorias matemáticas com aporte lógico preciso, como é o caso da Teoria do Caos, fortemente motivada pela observação de mudanças acentuadas na previsão do tempo em função de pequenas modificações nas condições de pressão, temperatura, umidade etc.

Nos dois casos há algo que fica evidente, que tanto uma criação abstrata pode encontrar um símile no mundo físico quanto um problema do mundo físico pode nos conduzir à criação de uma abstração. Tanto numa como noutra direção, porém, é indubitável que deve estar presente em quem segue uma direção a autonomia do pensamento matemático pautada na capacidade de argumentar, abstrair e demonstrar, ou pelo menos de utilizar com clareza ferramentas desenvolvidas nesta têmpera.

Certamente, no ensino a nível médio, partir da experiência, da resolução de um ou mais problemas práticos, perceber padrões, criar modelos, argumentar, formular hipóteses e transformá-las em fatos matemáticos através de uma demonstração formal, embora possa parecer uma pretensão ambiciosa, parece um caminho mais natural que partir do sentido oposto, e também mais de acordo com os objetivos previstos nos **PCNs.** Compreendemos, desta forma, que a construção do pensamento matemático adequada para uma formação em nível médio, tendo em vista os objetivos citados, deve culminar na capacidade de entender e produzir fatos matemáticos.

Considerando o que sugere os **PCNs** e as discussões científicas sobre a temática, percebe-se que para o desenvolvimento da autonomia do pensamento matemático, a formação do aluno deve conduzi-lo para a passagem do pensamento ancorado na experiência, no palpável, para a forma de pensamento com fulcro lógico, centrado na argumentação e validado por uso da lógica, como prescreve a epistemologia científica, fazendo-se necessário a condução do aluno nessa direção.

Examinaremos, no capítulo seguinte, elementos que concorrem no processo de condução do aluno seguindo análise de dados coletados em pesquisa.

3 RESULTADOS E ANÁLISE

Trataremos neste capítulo da apresentação dos resultados obtidos em pesquisa realizada na Escola Ceep Professor Balduíno Barbosa de Deus e faremos a análise pertinente.

Esta escola localiza-se na Avenida Maria Antoniêta Burlamarqui, no bairro Vale Quem Tem, zona leste do município de Teresina-PI e é componente da rede estadual de ensino, atende a aproximadamente 1000 (mil) alunos distribuídos no Ensino Fundamental II, Ensino Médio, Curso Técnico e EJA, em 2015 a escola obteve nota média 477,8 pontos no Enem enquanto a nota média das escolas públicas do município de Teresina foi de 482,6 e a das escolas públicas do país foi de 492,4 no mesmo ano (Melhorescola.net, 2018). Estes dados iniciais nos mostram que a escola, embora apresente média ligeiramente abaixo da média do município, não está em situação muito discrepante em relação à média do país, podendo ser considerada como uma típica escola mediana.

Antes, porém, de iniciarmos a análise, ressaltamos que há dois elementos basilares que atuam concomitantemente no processo de desenvolvimento do aluno no percurso do ensino básico: o professor e o livro didático. Não estamos, com isto, reduzindo a prática docente e o ensino a estes dois elementos, no entanto, é indubitável que eles figuram, juntamente com o aluno, em primeiro plano. Apresentamos também os resultados de teste aplicado aos alunos, dando-lhes o devido tratamento analítico.

3.1 AS RESPOSTAS DOS PROFESSORES

Conforme citamos, o professor é um componente essencial no processo de ensino-aprendizagem do aluno, por esta razão é de fundamental importância tentarmos compreender melhor como este elemento contribui e, principalmente, como ele percebe os demais elementos do processo, ou seja, o livro didático, os alunos e os objetivos do ensino de matemática. Com este objetivo, os professores foram arguidos através de questionário no qual foram sondados quatro aspectos principais: a adequação da formação do professor; objetivos do ensino de matemática; dificuldades dos alunos e adequação do livro didático na visão do professor. Para melhor análise separamos as questões de acordo com as categorias acima, que constituirão nossas unidades de análise.

Iniciaremos pela adequação da formação do professor. Esta verificação faz-se necessário à medida que é prática comum a utilização de professores com formação em diversas áreas assumirem, normalmente por necessidade dos quadros de pessoal, a docência de disciplinas diversas da sua área de formação. Dois professores das turmas de 3º ano dos turnos manhã e tarde, turmas que participaram do teste, participaram da pesquisa. Estes professores serão tratados por professor A e professor B, vejamos os resultados.

QUADRO 1: Adequação da formação dos professores.

PERGUNTA	PROFESSOR	RESPOSTA
1 - Qual a sua área de formação?	A	Matemática
	B	Matemática
2 - Qual o seu nível de formação?	A	Especialista
	B	Especialista
3 - Qual a sua área de especialização? Caso possua.	A	Matemática para o ensino médio.
	B	Matemática para o ensino médio.
4 - Qual (ou quais) disciplinas da sua graduação você considera mais importante(s) para a sua prática docente?	A	Cálculo I.
	B	Toda disciplina tem sua importância então considero todas.
5 - Considerando os conteúdos estudados na sua graduação e sua relação com os conteúdos que você ministra no Ensino Médio, você consideraria que a grade curricular da graduação está: • inadequada • parcialmente adequada • adequada	A	Adequada.
	B	Parcialmente adequada.

Fonte: Autor

Vemos então que ambos os professores são licenciados em matemática e especialistas em Matemática para o Ensino Médio o que mostra boa adequação da formação acadêmica destes professores e que estes percebem a adequação, ainda que de forma parcial, da sua formação. A questão 4 ensejava possibilidade de apontamento de alguma disciplina voltada para a dimensão pedagógica do trabalho docente, mas, não houve manifestação nesse sentido.

Vejamos agora como o professor percebe as dificuldades dos alunos.

QUADRO 2: Percepção dos professores sobre os alunos

PERGUNTA	PROFESSOR	RESPOSTA
6 - Há quanto tempo você leciona matemática nessa escola?	A	Há nove anos.
	B	Seis anos.
7 - Considerando as áreas da matemática abaixo, como você ordenaria (do maior para o menor) o grau de dificuldade de aprendizagem apresentado pelos alunos do Ensino Médio? a) Aritmética b) Álgebra c) Geometria	A	Geometria, álgebra, aritmética.
	B	Geometria, álgebra, aritmética.
8 - Considere as etapas abaixo vivenciadas pelos alunos durante o aprendizado de determinado conteúdo de matemática. a) Compreensão correta do conceito apresentado. b) Manipulação das expressões envolvidas (cálculos algébricos ou aritméticos). c) Aplicação do conteúdo diante de um problema em que o conceito não aparece explícito no enunciado. Como você ordenaria (do maior para o menor) as etapas em que os alunos apresentam maior dificuldade?	A	c, a, b.
	B	b, a, c.
9 - Na resolução de um problema pelos alunos, considere os itens abaixo: a) Aplicar corretamente uma fórmula. b) Reconhecer o conteúdo a ser aplicado para a solução do problema. c) Realizar as manipulações necessárias para chegar à resposta. d) Analisar e argumentar corretamente sobre a validade (ou adequação) de uma resposta encontrada diante do problema proposto. Como você ordenaria as etapas acima quanto ao grau de dificuldade (do maior para o menor) apresentado pelos alunos?	A	b, d, a, c.
	B	a, d, b, c.
10 - Em qual das situações abaixo os alunos apresentam menor desempenho? a) Resolver um problema em que o enunciado remete a uma situação concreta, contextualizada. b) Resolver um problema em que o enunciado refere-se a uma situação abstrata, não contextualizada.	A	b.
	B	a.
11- Na sua opinião, os alunos apresentam maiores dificuldades com raciocínios do tipo: a) Dedutivo b) Indutivo	A	b.
	B	a.

Fonte: Autor

As respostas da questão 6 nos informam que os professores atuam há pelo menos seis anos na escola, portanto, estão em condições de ter um bom conhecimento dos alunos que se encontram na etapa final do 3º ano do Ensino Médio na escola. Conforme as respostas apresentadas, os alunos apresentam maiores dificuldades com conteúdos da geometria e menores dificuldades com os da aritmética. Uma inferência de potencial importância baseada nas respostas da questão 9 é que durante a resolução de um problema, conforme os professores, os alunos apresentam como melhor habilidade a realização das manipulações necessárias para se chegar ao resultado pretendido. As questões 8, 10 e 11 não apresentam convergência de respostas que nos permitam inferir uma concentração de dificuldades sob qualquer dos aspectos levantados, o que nos conduz a concluir que as dificuldades apresentadas pelos alunos são de ordem global e difusas, possivelmente apresentando algumas variações de acordo com o grupo de alunos.

Passemos agora à análise da percepção do professor no que concerne a objetivos do ensino de matemática.

QUADRO 3: Objetivos do ensino de matemática na visão do professor

PERGUNTA	PROFESSOR	RESPOSTA
12 - Considere: a) Domínio de conteúdo b) Didática c) Definição de objetivos. Como você definiria uma ordem de relevância (de maior para menor) para estes fatores na atividade docente?	A	a, b, c.
	B	a, c, b.
13 - Na sua opinião, quais são os principais objetivos do ensino de matemática no Ensino Médio?	A	Fazer com que o alunado compreenda os conceitos e estratégias matemáticas para o seu desenvolvimento de estudos posteriores e desenvolva a capacidade de raciocínio e resolução de problemas de forma a adquirir uma formação geral.

	B	Entender e aplicar determinados conteúdos relacionando a situações diárias.
14 - Como você descreveria a contribuição do aprendizado dos conteúdos do Ensino Médio na formação do pensamento crítico geral do aluno?	A	NÃO RESPONDEU.
	B	Ajuda a interpretar e entender determinadas situações vivenciadas por eles. Como a matemática na alimentação, no trabalho.

Fonte: Autor

Considerando as respostas da pergunta 12 percebemos que o fator mais relevante dos apresentados é o domínio de conteúdo e que a definição de objetivos figura em segundo, ou mesmo terceiro plano. Embora o professor B, na pergunta 13, restrinja os objetivos do ensino de matemática no Ensino Médio à resolução de problemas cotidianos, o professor A apresenta uma visão bem mais ampla sobre tais objetivos inserindo as estratégias e raciocínio no contexto de uma formação geral. Quanto à pergunta 14, embora o professor A não a tenha respondido, notamos que a sua resposta à pergunta 13 contempla a pergunta 14. Na resposta do professor B à pergunta 14 é evidente que este mantém os objetivos do ensino de matemática na seara do cotidiano.

Vejamos então em que medida o livro didático adotado na escola contribui no processo de ensino aprendizagem na visão dos professores.

QUADRO 4: Contribuição do livro didático

PERGUNTA	PROFESSOR	RESPOSTA
15 - Você consegue cobrir, durante o ano letivo, todo o conteúdo do livro didático? Caso não consiga, qual o percentual do conteúdo que é coberto durante o ano?	A	Entre 70% e 80%.
	B	Não! Em torno de 70%.
16 - Qual o percentual de questões do livro didático que	A	Em torno de 60%.

você acha que os alunos trabalham durante o ano letivo?	B	50%.
17 - Considerando o livro didático adotado na escola, que aspectos do livro você considera adequados, ou que favoreçam o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno?	A	NÃO RESPONDEU.
	B	As questões contextualizadas.
18 - Considerando o livro didático adotado na escola, que aspectos do livro você considera inadequados, ou que NÃO favoreçam o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno?	A	NÂO RESPONDEU
	B	Aspectos adequados são os exercícios, a maioria contextualizado. Aspectos que não favorece, a quantidade de exercícios repetitivos, tornando o aluno mecânico.

Fonte: Autor

Das respostas acima podemos afirmar que o livro didático tem sua contribuição abreviada pois, de 20% a 30% do conteúdo não é coberto durante as aulas e no máximo 60% dos exercícios são trabalhados pelos alunos. Embora o professor A não tenha respondido às perguntas 17 e 18, há dois aspectos relevantes nas respostas do professor B, o primeiro é que ele mantém o apontamento da contextualização dos exercícios do livro como fator de primeiro plano, o segundo é o apontamento de uma quantidade inadequada de exercícios repetitivos no livro didático, o que torna o aluno mecânico e não favorece o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno.

3.2 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

O objetivo precípuo da análise dos livros adotados do 1º ao 3º anos do ensino médio na escola é buscar classificar os exercícios propostos em categorias que expressem os principais elementos participantes na construção do pensamento matemático autônomo, conforme discussão precedente. Dando relevo ao livro didático afirma (BICUDO; GARNICA, 2011), p. 71) “O livro didático, muitas vezes, é o único auxiliar do professor em sala de aula.”. Reconhecendo também a contribuição do livro didático como suporte do professor e balizador das atividades desenvolvidas por este no labor letivo, (LIMA, 2007, P. 182) destaca que “... Novamente, se olharmos para o panorama global do país, veremos que, obtido seu diploma, o jovem professor terá como base de orientação para seu trabalho os livros-texto disponíveis no mercado e adotados pelas escolas onde vai lecionar.”. De fato, a contribuição do livro didático não é circunscrita ao suporte do professor, é também o meio por excelência de que dispõe o aluno para a prática exigida no aprendizado dos conteúdos estudados. Neste aspecto, os exercícios do texto ganham relevo, pois, orientarão a prática do aluno na construção do conhecimento apresentado. É nos exercícios que se pode direcionar o aluno no desenvolvimento das competências e habilidades objetivadas, pois, diante de um exercício bem selecionado o aluno poderá manter uma postura crítica, essencialmente ativa, criativa. Se, do contrário, o livro texto apresenta grande quantidade de exercícios repetitivos ou que não estejam dispostos em uma ordem adequada que proporcione ao aluno oportunidade de elaboração, sanando lacunas deixadas pelo texto e consolidando o conteúdo apresentado, tornar-se-á incompleto e limitará o aluno no seu desenvolvimento do pensamento matemático.

As linhas acima expressam a importância do livro didático bem como o benefício de se analisar sua estrutura. Não pretendemos aqui realizar uma análise rigorosa englobando os mais variados e minuciosos aspectos do livro texto considerado, mas, apenas apontar as principais características encontradas que possamos relacioná-las ao tema em desenvolvimento.

Deixamos assente, antes de tudo, que a escolha do livro didático a ser adotado na escola é realizada posteriormente a uma seleção prévia realizada em consonância com o Plano Nacional do Livro Didático da qual resulta uma lista de coleções de livros que são apresentadas às escolas para a referida escolha. Nesta prévia análise os livros são apresentados na forma de resumo das principais características. Cada escola dispõe, então, de um conjunto de opções das quais deve escolher o seu livro didático. Esta escolha ocorre a cada triênio em anos diferentes para o Ensino Fundamental e Médio, uma vez escolhido determinado livro este deve ser utilizado no referido triênio. Na escola pesquisada a coleção adotada foi “MATEMÁTICA: Ensino Médio”, de autoria de Manoel Paiva. Esta coleção foi utilizada no triênio de 2015 a 2017, período em que os alunos participantes desta pesquisa cursaram o Ensino Médio nesta escola.

> As explanações teóricas, acompanhadas de exemplos, problemas resolvidos e questões propostas são a opção metodológica que predomina na obra. Desse modo, a participação mais ativa do aluno no processo de sua aprendizagem fica limitada. Em contrapartida, há cuidado em relacionar os conteúdos com situações significativas e em propor atividades de aplicação da matemática escolar em contextos variados.
>
> Destacam-se as atividades nas quais se propõe, ao aluno, a análise de erros comuns na aprendizagem. Ao lado dessas, sugestões de trabalho em grupo e o incentivo à interação entre alunos e entre estes e o professor contribuem positivamente para a aprendizagem.
>
> O Manual do Professor traz boas contribuições para o trabalho em sala de aula e para a formação continuada do docente (BRASIL, 2014, p. 39).

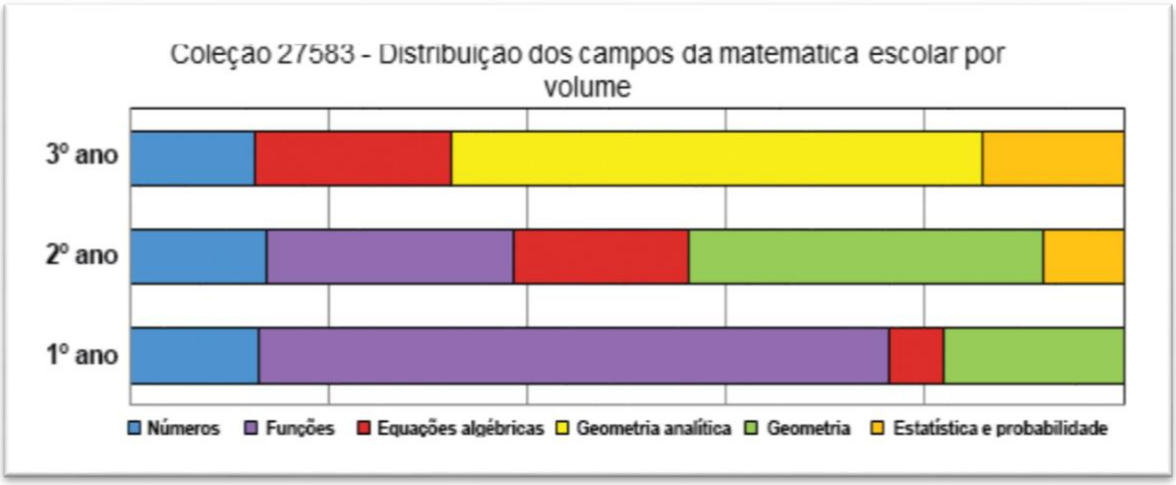
Logo no primeiro parágrafo da visão geral apresentada destacamos a referência feita à limitação da participação ativa do aluno no seu processo de aprendizagem. Em seguida são destacados a aplicação e contextualização dos conteúdos, em consonância com o apontado por um dos professores participantes da pesquisa, conforme quadro apresentados. Destacados também as atividades que induzem o aluno à análise dos erros mais comuns na aprendizagem.

Ainda neste documento o conteúdo da obra é avaliado da seguinte maneira:

> Os conteúdos selecionados são os tradicionalmente propostos para a formação matemática no ensino médio. Mesmo assim, nota-se uma boa escolha ao se abordarem as equações algébricas do 1º e do 2º graus logo no início do primeiro volume. Na distribuição dos conteúdos, igualmente, não se foge ao usual: o estudo de funções está concentrado no livro do primeiro ano e o de geometria analítica no terceiro livro, o que dificulta as diversas articulações entre esses dois campos. Além disso, a estatística é tratada somente no livro do 3º ano, o que torna o seu estudo pouco uniforme, ao longo do ensino médio. A despeito disso, nota-se empenho no estabelecimento de articulações entre os conhecimentos novos e os já abordados, o que é um aspecto elogiável da coleção (BRASIL, 2014, p. 43).

Os conteúdos do livro são assim distribuídos:

Figura 1: Distribuição de conteúdos no livro didático



Fonte: (BRASIL, 2014)

Concernente à apresentação da Geometria Analítica na obra, a análise aponta que “Entretanto, há demasiada atenção a regras e fórmulas em detrimento das atividades de investigação, exploração e descoberta das variadas consequências...” (BRASIL, 2014, p. 44), esta tendência ao uso de fórmulas prontas para aplicação na resolução de problemas está presente de forma acentuada, conforme apresentamos adiante.

Pontuamos ainda que observando o livro percebemos que os conteúdos da Geometria estão dispostos da seguinte maneira nos três volumes da coleção: aproximadamente 20% do volume 1 apresenta elementos da geometria Euclidiana Plana, dispostos nos capítulos 3 e 4. A geometria espacial ocupa aproximadamente 35% do volume 2, no entanto, está disposta nos últimos três capítulos o que pode dificultar que estes conteúdos sejam de fato ministrados durante o ano letivo, como vimos, os professores responderam que conseguem cobrir no máximo 80% do conteúdo do livro didático. No volume 3 a Geometria Analítica é tratada em 50% do volume, novamente, são os últimos capítulos.

Essa disposição dos conteúdos da Geometria contribui para um menor contato dos alunos com essa área da matemática no curso dos três anos, tornando a sua prática intermitente e diminuindo o contato e as vantagens que se pode tirar da Geometria no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, conforme apresentaremos no capítulo 5. Evocamos aqui o fato de a Geometria ser apontada pelos professores pesquisados como a área de maior dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos.

Este potencial dano fica em evidência quando consideramos a adequação sugerida na análise da coleção ao tratar da Geometria nos seguintes termos:

> Em geral, o estudo das figuras geométricas planas é apresentado por meio de suas conexões com propriedades de objetos do mundo físico. A geometria espacial de posição é iniciada com a comparação entre figuras planas e não planas. Poliedros, prismas, pirâmides, cilindros, cones, troncos e esferas são abordados com rigor adequado ao nível de ensino a que se destina a obra. O Princípio de Cavalieri é empregado corretamente para a obtenção do volume de sólidos geométricos.
>
> No geral, é feita uma articulação satisfatória entre os três domínios que integram o estudo da geometria: os conceitos, os objetos do mundo físico associados a esses conceitos e as representações verbais ou gráficas (BRASIL, 2014, 45).

Para entender como os exercícios apresentados na coleção afetam o desenvolvimento do aluno ao observar os exercícios do livro didático em questão podemos resumir os resultados como segue:

QUADRO 5: Adequação dos exercícios do livro quanto ao tipo.

CATEGORIAS	ADEQUAÇÃO
Conceituação	Adequada
Manipulação	Excessiva
Aplicação	Adequada
Demonstração	Inadequada (insuficiente)

Fonte: Autor

A grande maioria dos problemas apresentados são do tipo “calcule”, embora a grande variação de situações e contextualizações em muitos deles seja bastante adequada, a manipulação excessiva pode induzir à mecanização na resolução de problemas. No entanto, não é este, a nosso ver, o ponto mais importante, a quase ausência de problemas que solicitem do aluno alguma demonstração é bastante prejudicial na formação do pensamento matemático desses alunos, como vimos, as demonstrações são parte essencial da construção desse pensamento, é nas demonstrações que de fato a coerência da argumentação é levada a cabo, embora em vários exercícios, principalmente naqueles em que é proposto ao aluno analisar respostas encontrando possíveis erros, o aluno consiga perceber boa parte dos processos de construção das respostas, reconhecendo os principais tipos de erros cometidos, como generalizações indevidas.

3.3 TESTE COM OS ALUNOS: RESULTADOS E ANÁLISE

A tabela abaixo apresenta os resultados obtidos em teste aplicado aos alunos da referida escola. Neste teste participaram 36 alunos componentes de duas turmas de 3º ano do Ensino Médio dos turnos manhã e tarde. O teste (vide apêndice), composto de 9 questões subjetivas e uma questão objetiva, foi elaborado de forma que os alunos pudessem, durante o processo de resolução dos problemas, expressar suas habilidades concernentes à conceituação, manipulação e aplicação de diversos conteúdos por eles já estudados ao longo do Ensino Médio.

Tabela 1: Número de erros e acertos por questões.

QUESTÃO	ACERTO TOTAL		ACERTO PARCIAL		ERRO TOTAL		NÃO RESPONDEU	
1	0	0%	10	27%	15	41%	11	30%
2	0	0%	4	11%	9	25%	23	63%
3	0	0%	6	16%	14	38%	16	44%
4	0	0%	10	27%	22	61%	04	11%
5	0	0%	6	16%	14	38%	16	44%
6	0	0%	0	0%	34	94%	2	5%
7	0	0%	1	2%	13	36%	22	61%
8	0	0%	1	2%	14	38%	21	58%
9	0	0%	5	13%	21	58%	10	27%
10	0	0%	3	8%	9	25%	24	66%
TOTAL GERAL	0	0%	46	12%	165	45%	149	41%

Fonte: Autor

Os percentuais acima foram aproximados com arredondamento da casa decimal para baixo, o que não afeta os resultados obtidos.

Para termos uma visão panorâmica dos resultados consideramos inicialmente:

- Acerto total: a situação em que o aluno entendeu e respondeu corretamente ao problema proposto, o que corresponde a apresentar completo domínio das etapas de conceituação, manipulação e aplicação.

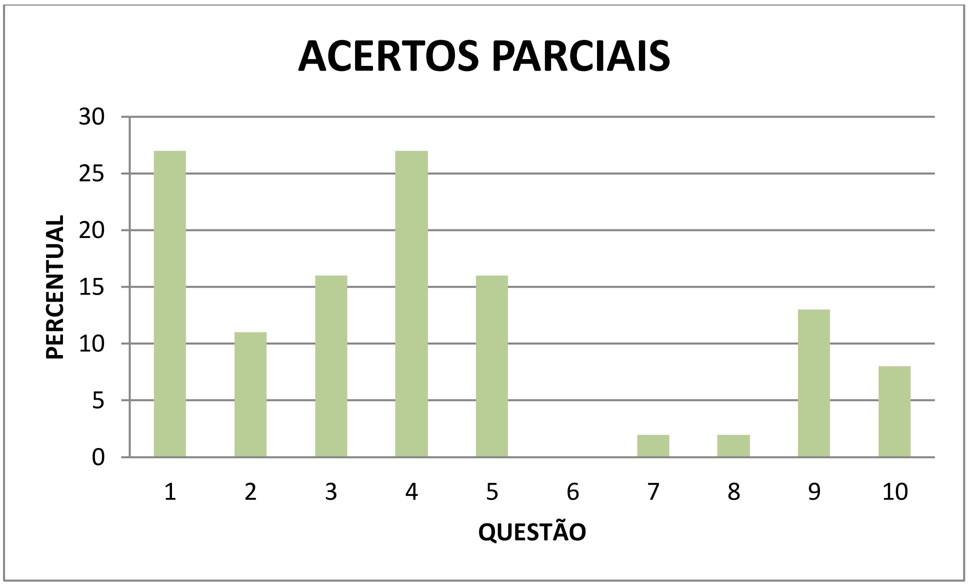
- Acerto parcial: a situação em que o aluno compreendeu total ou parcialmente o problema proposto, mas, não conseguiu chegar à resposta correta.
- Erro total: a situação em que o aluno apresentou uma resposta ou um esboço de resposta em total desconexão com o problema.
- Não respondeu: situação em que não houve qualquer manifestação do aluno no sentido de procurar ou apresentar um resultado ainda que sem a execução de cálculos.

É imediato que panoramicamente os resultados expressam severa defasagem em relação ao esperado para tal nível educacional, sobretudo pelo fato de que não houve qualquer acerto total em nenhuma das questões propostas e, ainda, o percentual aproximado de questões para as quais não foi apresentada qualquer resposta foi de 41%, apontando que, nestes casos, os alunos não passaram sequer da fase interpretativa do problema. Considerando ainda que, aproximadamente 45% das questões apresentaram erro total, concluímos que a situação geral dos alunos é extremamente preocupante.

Outra informação importante que tiramos dos resultados acima é que não houve, de forma geral, diferença que aponte para uma melhor ou pior situação em relação a algum dos conteúdos abordados, o que sugere que não se trata de dificuldades restritas a conteúdos, mas, isto sim, de dificuldades de caráter amplo, global e sistêmicas no processo de ensino aprendizagem destes alunos no âmbito da disciplina de matemática.

Estes resultados panorâmicos, em que pese sua importância, nos dão pouca informação a respeito das causas dos erros cometidos e não nos servem como indicadores de qualquer medida a ser tomada para mudar a situação, por este motivo, nos concentraremos nos aproximados 12% de acertos parciais buscando identificar possíveis causas para tais resultados. Para tal, o gráfico que segue nos será útil.

Figura 2: Percentual de acertos parciais por questão



FONTE: Autor

Vamos inicialmente considerar a questão 6 que apresentou uma caracterização da função exponencial e, embora fosse a única objetiva e sumamente conceitual do teste, não computou acerto, ela nos informa que além de associar os conceitos a fórmulas os alunos não conseguiram distinguir a função exponencial das demais apresentadas nas alternativas, mostrando que não apenas a função exponencial não é reconhecida por sua caracterização mas, também, que as demais funções apresentadas não foram reconhecidas, pois, se conhecessem as demais funções apresentadas, isso os conduziria ao acerto da questão por eliminação das demais alternativas. A questão 5, que juntamente com a 6 tem conteúdo essencialmente da álgebra, obteve 6 respostas parcialmente corretas e aproximadamente 54% de tentativas de resolução. Esse encorajamento para a resolução do problema, conforme nos indicam os motivos elencados pelos alunos diante da não resolução de um problema, é oriundo do fato de associar o trinômio do segundo grau, da forma como aparece no enunciado desta questão, a uma fórmula pronta para resolução.

As questões 7 e 8 apresentaram 1 acerto parcial. Curiosamente apresentam conteúdo de geometria e obtiveram resultados muito semelhantes entre si em acertos parciais, erros totais e não respondidas, mas quando comparadas às questões 1 e 3, que também apresentam conteúdo da geometria, estas obtiveram resultados bem melhores, sobretudo quando observamos que o percentual de alunos que tentaram responder às questões 1 e 3, 68% e 54% respectivamente, é bem superior aos 39% e 40% que tentaram responder às questões 7, 8.

As questões 2, 4, 9 e 10 apresentaram conteúdo da área de aritmética, neste grupo as questões 2 e 10 apresentaram resultados bem semelhantes e obtiveram 36% e 33% respectivamente de tentativas de resolução. Já as questões 4 e 9 também tiveram resultados muito semelhantes entre si, mas, aproximadamente 88% e 71% de tentativas de resolução.

De um modo geral, as questões 1, 3, 4, 5 e 9 apresentaram maior participação dos alunos no que concerne a tentar resolver, já as questões 2, 7, 8 e 10 apresentaram os piores desempenhos. Para melhor entender o que ocorreu é importante, antes, saber o que os alunos percebem sobre suas dificuldades.

No intuito de termos uma referência sobre como o aluno percebe as suas dificuldades diante da não resolução de determinado problema foi solicitado, no momento da aplicação do teste, que, se possível, este informasse a dificuldade encontrada. A reflexão sobre o próprio aprendizado e os processos cognitivos por parte dos alunos constituem uma ferramenta de grande valia no desenvolvimento intelectual e leva o aluno a assumir uma postura ativa, crítica e autônoma do seu desenvolvimento intelectual.

> ...além disso, é amplamente admitido que, por intermédio da escrita, o indivíduo pode, mais facilmente, reconhecer seu próprio processo cognitivo e encaminhar adequadamente esse processo. Metacognição, da qual essa é uma estratégia, é uma das mais promissoras direções que vem tomando as ciências cognitivas (D'AMBRÓSIO, 2012, p. 65).

No quadro abaixo apresentamos os motivos elencados pelos alunos que, segundo eles, constituíram o óbice à resolução do problema.

QUADRO 6: Motivos elencados para a não resolução dos problemas.

QUESTÃO	MOTIVOS ELENCADOS PARA A NÃO RESOLUÇÃO
1	Ler e entender a questão é a grande dificuldade. Não lembro mais como se resolve lembro pouca coisa não tive boas aulas. Ler e entender a questão é a grande dificuldade.
2	Não faço a menor ideia. Não consigo responder. Não entendi o enunciado da questão. Não faço a menor ideia. Não sou idiota, é que meu raciocínio é lento
3	Lembro desse assunto, mas o cálculo não. Sou muito ruim em matemática.

4	Não lembro a fórmula. Não lembro a fórmula.
5	A=2, b= -9, c=4. Δ= b² - 4ac Só isso que lembrei. Não lembro das funções.
6	Ensinar a entender e analisar cada questão é um bom começo. Não consigo.
7	Não lembro a fórmula. Não consigo calcular.
8	Lembro desse conteúdo, mas a forma como começa não. Não lembro a fórmula.
9	Fiquei em dúvida do anunciado.
10	NÃO HOUVE RESPOSTAS

Fonte: Autor

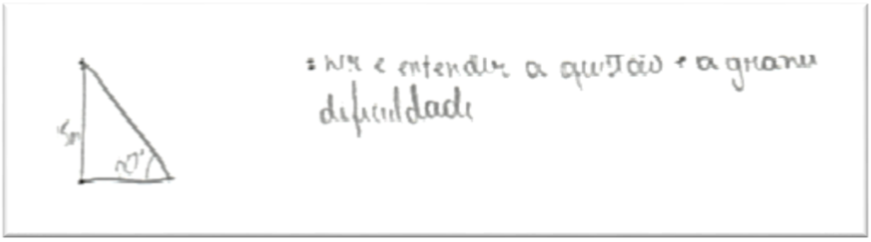
Aí estão todas as razões apresentadas em cada questão, embora sejam poucas, diante do número total de questões não resolvidas, é possível observar alguns aspectos bastante interessantes. Neste quadro observamos que são variados os motivos expostos e estes apontam nuances importantes da situação, por exemplo, expressam sentimentos como o de incapacidade que aparece nas respostas “não consigo” e “sou muito ruim em matemática” mostrando que o processo vivenciado por estes alunos na trajetória de estudos dessa disciplina chegou mesmo a atingir sua autoestima. Outra dificuldade apontada faz referência direta à interpretação do enunciado, a exemplo das respostas “Ler e entender a questão é a grande dificuldade”, também em “ensinar a entender e analisar cada questão é um bom começo”.

No entanto, o motivo apontado com maior frequência foi o de não lembrar. O verbo lembrar e o substantivo fórmula aparecem em 09 (nove) e 04 (quatro) das 20 (vinte) respostas, respectivamente, e em 45% destas uma das duas palavras está presente.

Estas respostas nos revelam que a prática do ensino de matemática para estes alunos foi centrada na recorrência a fórmulas, basicamente, o aluno colhe dados numéricos apresentados em enunciados, lança-os em uma fórmula e efetua os cálculos para obtenção de um resultado numérico. Como resultado, o aluno passa a associar essencialmente os conceitos matemáticos a fórmulas e o ensino passa a ser baseado em processos mnemônicos e na solução mecânica de problemas.

A observação da escrita dos alunos pode nos apontar nuances de grande utilidade na compreensão de suas dificuldades, vejamos.

Figura 3: Expressão do aluno ao tentar resolver a 1ª questão



Fonte: Autor

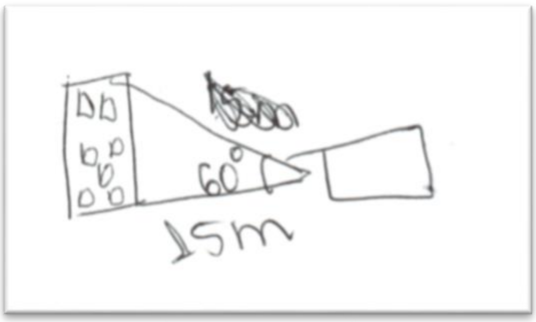
Na resposta deste aluno percebemos que os dados do enunciado aparecem no desenho elaborado pelo aluno para servir de suporte visual na sua resolução, no entanto, a distância do veículo ao prédio foi colocada em uma posição onde deveria está a incógnita (altura do prédio). Este caminho pretendido pelo aluno, como vemos, é frutífero e levaria o aluno a uma resposta correta, mas, conforme deixa expresso, houve dificuldade em entender a questão. De fato, o problema foi parcialmente compreendido e o aluno não se sentiu seguro sequer para realizar qualquer tipo de cálculo. Este não foi o único caso.

Figura 4: Tentativa de resolução fracassada

Fonte: Autor

Neste outro caso percebemos a mesma dificuldade que o aluno anterior, desta vez, é o ângulo que se encontra em posição invertida ao que foi apresentado no enunciado. Um caso ainda mais interessante aparece na imagem abaixo.

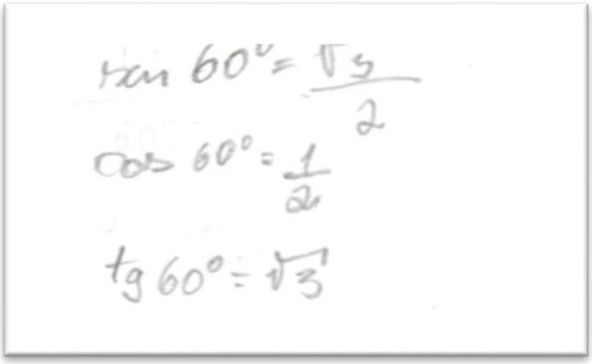
Figura 5: Dados corretos sem resposta



Fonte: Autor

Desta vez a representação utilizada pelo aluno comtemplou completamente os dados do enunciado, a sua ilustração do problema o levaria a solucioná-lo, mas, não houve o passo seguinte, o esquema não foi capaz de evocar os elementos trigonométricos necessários para prosseguir e mais uma vez o problema não foi solucionado.

Figura 6: Mais dados corretos sem resposta



Fonte: Autor

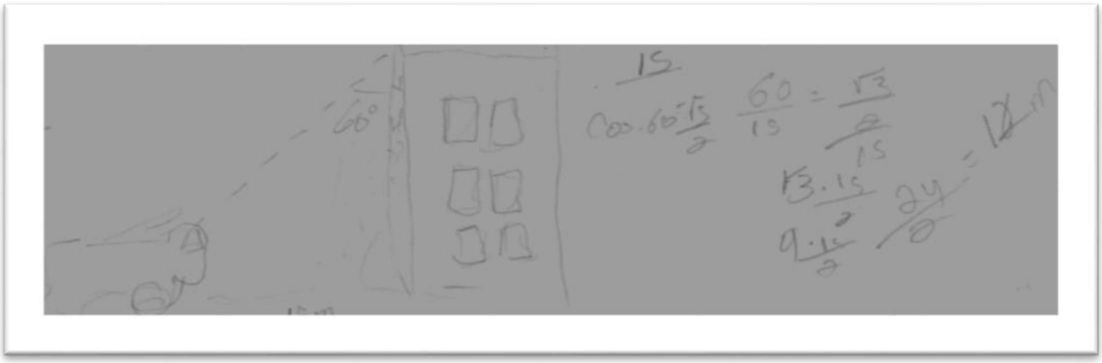
Aqui a situação aparece invertida, os elementos trigonométricos foram lembrados mas, não se soube o que fazer com eles.

Figura 7: Caso com todos os elementos do enunciado

Fonte: Autor

Este caso apresentado na figura anterior é, talvez, o mais significativo pois, destas respostas apresentadas nas figuras anteriores, foi a que apresentou de forma completa os dados do enunciado, a representação correta em um desenho de apoio, e ensaiou a relação entre os dados, combinando-os em operações, ainda assim, não obteve êxito. É oportuno observar que a frase “não tive boas aulas” deixada pelo aluno, revela que este tem consciência de que não atingiu o objetivo, embora tenho chegado bastante próximo.

Figura 8: O supérfluo na resolução



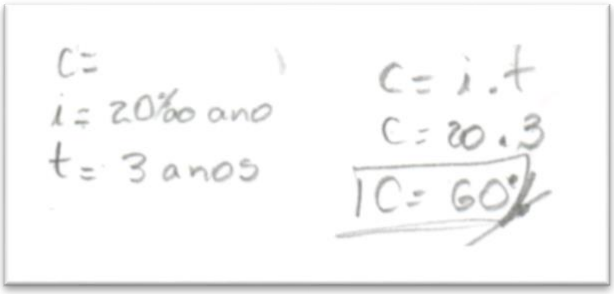
Fonte: Autor

Neste último exemplo de resposta percebemos que se mantêm, de modo geral, o que já foi observado nos anteriores, no entanto, chamamos a atenção para algo relevante, com frequência as respostas apresentaram esquemas visuais, representação da situação descrita no enunciado através de desenhos, o que é típico e muito útil em problemas de geometria, embora não seja estritamente necessário, mas, muitas vezes, os esquemas foram dotados de elementos totalmente desnecessários para a resolução como o caminhão do corpo de bombeiros, as janelas do prédio e outros detalhes. Um desenho com o necessário e o suficiente para este caso deveria apresentar somente um triângulo retângulo com um lado medindo 15m e adjacente a um ângulo de 60º. Todos os demais detalhes representados são supérfluos para o fim almejado.

Vamos focar o nosso olhar no processo de solução que de modo geral foi apresentado, qual seja, considerar os dados do enunciado, representá-los em um desenho esquemático que permite um apoio visual, estabelecer relações entre os dados e chegar a uma resposta. A maioria dos que tentaram resolver o problema não passou por todas estas etapas, ficaram pelo caminho em algum momento, ainda assim, o que temos é suficiente para tecermos algumas considerações. A questão apresenta um contexto como pano de fundo para que seja interpretada e dela sejam retirados os elementos necessários para sua solução, notadamente o aluno deve extrair esses elementos e esquematizá-los de forma a utilizar os conhecimentos matemáticos pertinentes, em outras palavras, ele deve abstrair a situação retirando os elementos concretos (caminhão, prédio, bombeiro, paredes etc.) e levando os dados a um esquema ou modelo matemático adequado, mas, é exatamente esta a maior dificuldade mostrada, desvincular-se dos elementos concretos componentes do contexto para chegar num plano abstrato adequado, ou seja, a passagem do conhecimento ancorado no concreto para um conhecimento ancorado nas relações lógicas entre os elementos matemáticos que, como já apontamos no capítulo 2, é essencial para a autonomia do pensamento matemático. Devemos aqui frisar o papel do apoio visual, tão evocado pelos alunos em suas respostas, este suporte visual constitui um meio de passagem para a abstração, no qual os alunos apresentam certa segurança.

Há diversas fragilidades na formação básica que foram identificadas em outras questões dos questionários e das quais nos ocuparemos a seguir.

Figura 9: Resposta à questão 4 com abordagem linear



Fonte: Autor

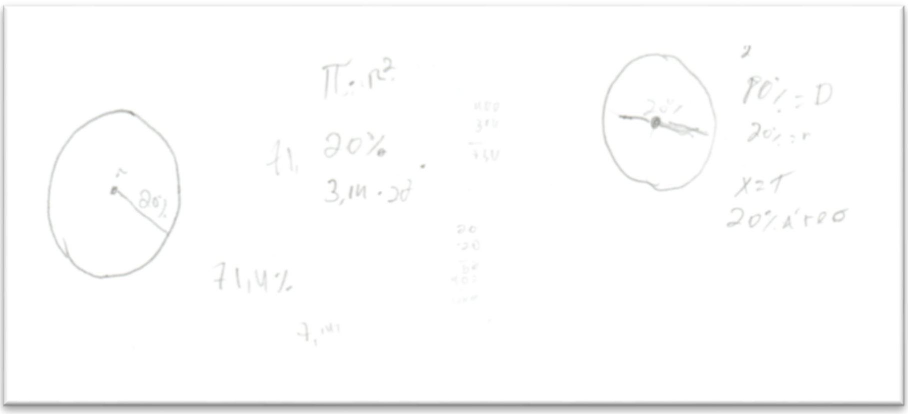
Esta questão, sofreu uma modificação no enunciado no momento da aplicação do teste, o período de um trimestre foi substituído por um período de 3 anos, motivados pelo fato de que muitos alunos não dispunham de calculadora para realizar o cálculo com raízes. O que se deve ressaltar é que na maioria das respostas apresentadas não foi considerada a incidência acumulada dos percentuais, ou seja, o problema foi tratado de forma linear e não exponencial como deveria ser. Este não foi o único problema em que tal tendência (pensar de forma linear) ficou manifesta, como podemos ver na imagem que segue.

Figura 10: resposta à questão 3 com relação linear indevida

Fonte: Autor

Este modo de relacionar grandezas que guardavam qualquer tipo de relação envolvendo variação mostrou-se recorrente nesse tipo de questão. Podemos associar a tal manifestação os resultados obtidos na questão 6, por exemplo, onde nenhum aluno foi capaz de identificar a função exponencial caracterizada formalmente, trata-se, pois, de dificuldades concernentes à conceituação, o aluno não consegue reconhecer as funções e as formas de relações entre as variáveis expressas por cada tipo de função básica apresentadas no ensino médio, ficando restrito a uma relação linear baseada essencialmente na proporcionalidade entre grandezas.

Figura 11: Relação linear difusa



Fonte: Autor

Esta resposta mostra que o aluno conhece a fórmula para o cálculo da área de uma circunferência e que, portanto, bastaria considerar um raio qualquer e realizar os cálculos com um outro raio 20% maior e comparar os resultados, no entanto, mesmo diante de uma fórmula que mostra explicitamente uma relação quadrática entre a área e o raio da circunferência, o aluno chega a uma relação linear (20% área) como aparece na imagem. Notamos então que a relação linear é utilizada de forma difusa para a resolução de problemas que envolvam relações de variação entra grandezas, manifestando-se mesmo diante de uma fórmula conhecida pelo aluno.

Nestes exemplos vislumbramos ainda que há uma tendência a resolver problemas em um único lance, imediatamente, inserindo os dados disponíveis em fórmulas ou em uma relação simples e direta e realizando cálculos, isso afeta sobretudo problemas que apresentam dois ou mais conteúdos, como área e porcentagem na questão 3, ou que necessitem da descoberta de informações intermediárias para se chegar, em uma segunda etapa, a uma resposta final, como nas questão 2 e 10 por exemplo.

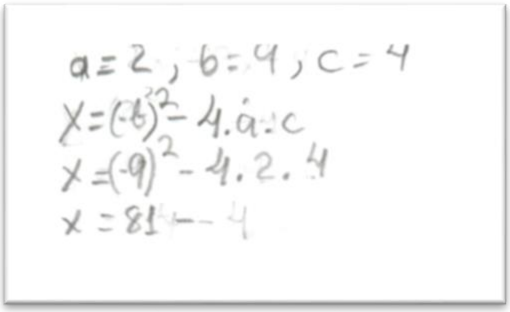
Trataremos agora de uma falha que também mostrou-se frequente, a falta de habilidade algébrica. Nas questões em que se fazia necessário a manipulação de expressões algébricas os alunos têm grande dificuldade em realizar tais operações, vejamos o que ocorreu.

Figura 12: Fórmula de báskara para resolução da questão 5

Fonte: Autor

Nesta resposta dada pelo aluno está presente o que já constatamos anteriormente, a necessidade de recorrer a fórmulas prontas para, após a computação necessária, chegar a uma resposta. Aqui está presente o recurso mnemônico tão fortemente evocado pelos alunos, apesar disso, esse aluno não conseguiu dar continuidade com os cálculos.

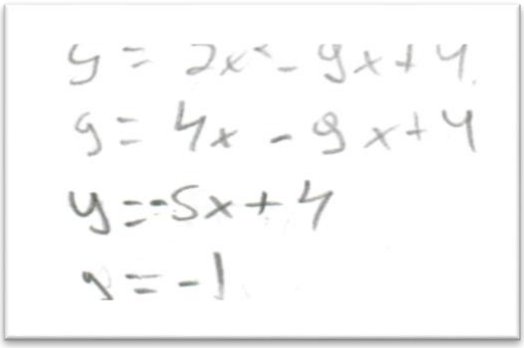
Figura 13: Cálculo do discriminante



Fonte: Autor

Desta vez, foi iniciado o cálculo do discriminante da função quadrática, porém, embora estivesse na direção correta, o cálculo não chegou a ser concluído e o processo encerrou-se neste ponto.

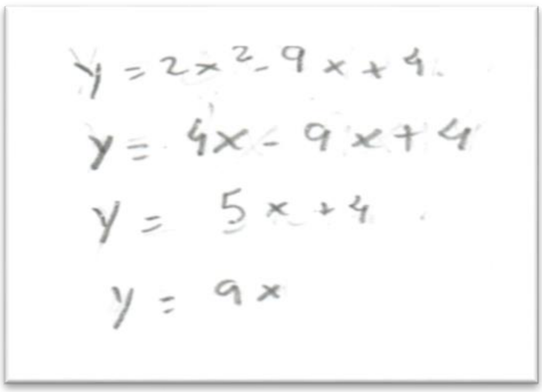
Figura 14: A sintaxe matemática



Fonte: Autor

É curioso notar que ao tentar responder à questão 5 este aluno combinou letras e números como se fossem elementos da mesma natureza e como na passagem da 4ª para a 5ª linha o x simplesmente foi desconsiderado e desapareceu no processo. É notório que este aluno pratica o processo de resolução de forma totalmente mecânica, não refletindo nas relações lógicas implicadas na passagem de uma linha para a linha seguinte, como da primeira para a segunda linha, nela o coeficiente do termo x^2 é elevado ao expoente 2 que aparece neste termo transformando a expressão em uma expressão de 1º grau.

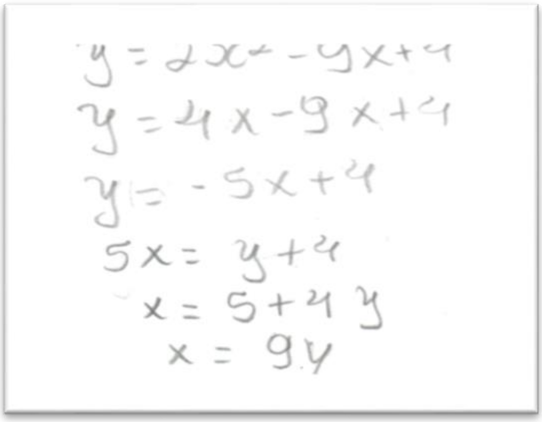
Figura 15: Operação com letras e números



Fonte: Autor

Na figura 14 temos mais um exemplo de resposta da questão 5 em que não houve distinção entre letras e números, porém, aqui o x permaneceu na passagem da terceira para a quarta linha.

Figura 16: Outra combinação inusitada com variável

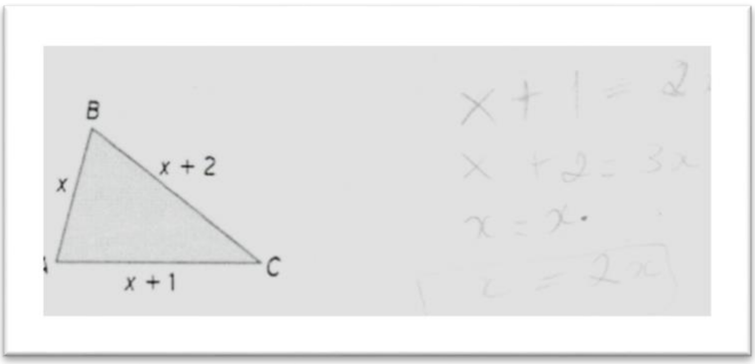


Fonte: Autor

Mais uma vez, as regras de sintaxe matemática foram totalmente desvirtuadas em sua aplicação. É oportuno salientar aqui que o enunciado desta questão solicitava a soma e o produto das raízes do trinômio e que estas poderiam ser facilmente obtidas pelo uso das relações entre raízes e coeficientes, não obstante, nenhum aluno tentou outro caminho que não fosse a resolução da equação. Como vemos, variáveis, coeficientes e expoentes são combinados sem restrições. Sobre a linguagem característica da matemática temos:

> Várias são as origens dessas dificuldades, mas, certamente, a linguagem matemática desempenha, quanto a isso, papel significativo. Compreender o funcionamento dos mecanismos da matemática, a natureza de seus objetos e processos e a vinculação desses mecanismos com a prática materializada nas salas de aula podem ser uma possibilidade de desenhar, com mais clareza, um quadro desse contexto, indicando propostas de ação (BICUDO; GARNICA, 2011, P. 60):

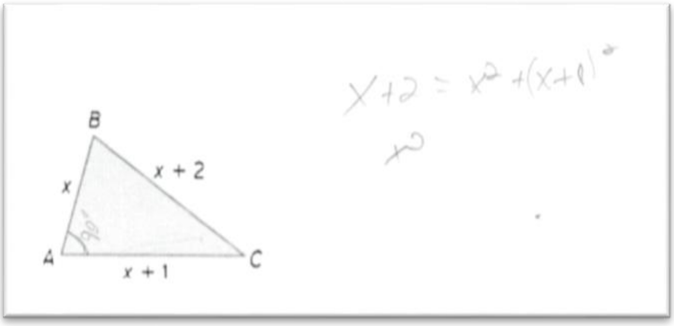
Figura 17: Mesmo problema em outra questão



Fonte: Autor

A questão 7, que também culminaria em uma equação do segundo grau, apresentou também semelhante mistura de letras e números, como mostrado na figura 15. Ainda nesta questão houve peculiaridades interessantes, como a da figura a seguir.

Figura 18: Processo de resposta interrompido



Fonte: Autor

Neste esboço de resposta percebemos que o aluno esteve perto de montar uma equação que levaria de fato à solução do problema, acrescentou um elemento implícito na figura, o ângulo de 90º, e que pretendia utilizar o Teorema de Pitágoras, mas, no momento em que precisou desenvolver a expressão lhe faltou recursos, ou confiança, e o processo foi interrompido permanecendo no princípio da organização.

Sinteticamente, podemos fazer algumas considerações acerca do que até aqui foi apresentado neste capítulo.

Primeiramente, não há consistência de objetivos nas respostas apresentadas pelos professores ao questionário, poucos pontos do quadro de respostas em questão apresentam algum indício de que os professores ensinam com clareza de objetivos, sobretudo de objetivos que apontem na direção do desenvolvimento da autonomia do pensamento matemático dos alunos. Há grande distância de objetivos na visão dos professores A e B, conforme referimos.

Segundo, os resultados dos testes realizados com os alunos nos mostram que as dificuldades apresentadas por estes são de natureza ampla, embora alguns aspectos apresentem-se com maior ênfase, como os tropeços ao lidar com expressões algébricas combinando letras e números sem fazer distinção da natureza desses elementos e seus significados nas expressões em que aparecem. Outro obstáculo de relevo manifesto é a dependência do uso de fórmulas com a tendência a resolver problemas pela substituição, nas fórmulas, dos dados apresentados nos enunciados, seguida de cálculos numéricos que culminam na resposta esperada de forma imediata. De modo geral, podemos falar de memorização e mecanização. A dificuldade de reconhecer relações não lineares também figura no rol de destaques e nos remete a uma falha relacionada à conceituação, sobretudo das funções não lineares. Estes problemas, sem dúvida, têm origem anterior ao ensino médio, pois, remontam ao ensino fundamental, no entanto, é no ensino médio onde deveria haver a consolidação do aprendizado do ensino fundamental. Ao tratar do uso (abuso) de exercícios rotineiros e repetitivos, como apontado por um dos professores. Nesse sentido:

> No ensino da matemática, podem-se fazer necessários problemas rotineiros, até mesmo muitos deles, mas deixar que os alunos nada mais façam é indesculpável. O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém (POLYA, 2006, P. 142).

Por fim, ressaltamos que há também tendência do aluno em buscar apoio visual através da elaboração de figuras que esquematizem a situação problema atacada. É este aspecto que abordaremos e apresentaremos no próximo capítulo para apresentar uma forma viável para o desenvolvimento da autonomia do pensamento matemático.

4 PENSAMENTO MATEMÁTICO E GEOMETRIA

Das páginas precedentes somos conduzidos a apresentar uma via que possibilite encetar o desenvolvimento da autonomia do pensamento matemático considerando a natureza e os métodos da Geometria. É o que faremos doravante.

Relembremos, primeiramente, alguns aspectos presentes na análise realizada no capítulo 3. Vimos uma tendência a utilizar figuras na esquematização de respostas a problemas, ainda quando não é necessária a presença de certos elementos, isso traz a lume a importância do apelo imagético, visual, geométrico, em que se apega o aluno. Juntando a isto a dificuldade habitual em atingir o nível de abstração desejado e preconizado nos **PCNs** e necessário para que se consiga modelar situações problema, seja no aprendizado institucional ou de fato problemas práticos do cotidiano, é, de certa forma, elementar que a Geometria mostra-se uma via bastante proveitosa no desenvolvimento do pensamento matemático. A geometria está intimamente ligada às mais diferentes formas de representação:

> A identificação que o aluno faz de um conceito abstrato com sua representação concreta é a expressão de uma fase necessária e fundamental de seu aprendizado. Em certo estágio da sua relação cognitiva com um determinado conceito, essa identificação parece ser a forma possível de apreendê-lo (MOREIRA, 2010, p. 44).

Historicamente a Geometria alcançou grande prestígio com Os Elementos, (EUCLIDES, 2009), em razão do sucesso na aplicação do método axiomático-dedutivo, esse método teve tamanha relevância que extravasou o âmbito da matemática, manifestando-se, por exemplo, na filosofia. Lembremos que (SPINOSA, 1979) fez uso explícito deste método para estabelecer um sistema ético a partir de princípios basilares (axiomas éticos). Vemos, então, que o alcance dos métodos geométricos é amplo e, sobremaneira importante para estabelecimento de uma epistemologia.

A Aritmética, voltada para as relações entre números, não comtempla um esteio visual ao praticante ou aluno que lida com problemas nesta área, da mesma forma, as relações algébricas, com toda a sua generalidade, muitas vezes não propicia tal suporte, muito embora estas três áreas mantenham estreito contato e por vezes expressem os mesmos fatos de maneira diferente. Há a possibilidade de se representar o mesmo fato matemático de maneiras diferentes, em muitas situações o mesmo fato pode ser representado através da aritmética, da geometria e da álgebra, em cada uma dessas representações encontramos idiossincrasias, pois, mudando a forma de representação alguns elementos podem ser suprimidos ou evidenciar-se. A cambialidade entre as formas de representação é uma habilidade a ser desenvolvida pelo aluno na prática da matemática, ela está presente, por exemplo, no momento em que o aluno lê o enunciado de um problema e o reescreve na forma de uma equação ou um esquema visual ou uma expressão numérica. Sobre a teoria das representações semióticas e suas atividades é corroborado o que afirmamos em:

> As representações semióticas são os gráficos, os diagramas, os esquemas, as figuras geométricas, os variados tipos de escritura para os números, escrituras algébricas, para expressar relações e operações, entre outros. Diante disso, as representações semióticas parecem apenas ser o meio que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais para fins de comunicação, ou seja, tornarem visíveis ou acessíveis ao outro. Mais que isso, no entanto, as representações semióticas são essenciais para a atividade cognitiva do pensamento (BRANDT; MORETTI, 2014, P. 118).

Ainda para (BRANDT; MORETTI, 2014, p. 118) “Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, ele deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais: a formação, o tratamento, a conversão.”. Continuando (BRANDT; MORETTI, 2014, p. 118/119) afirmam “A formação implica seleção do conjunto de caracteres e determinações que queremos representar, seja para “exprimir” uma representação mental, seja para “evocar” um objeto real.”. Por outro lado “O tratamento é a transformação da representação no próprio registro em que ela foi formada. É uma transformação interna a um registro”. Quanto à conversão “é a transformação desta representação em outro sistema semiótico conservando a totalidade ou parte do objeto em questão. A conversão é uma transformação que faz passar de um registro a outro”.

Sob a perspectiva da Teoria das Representações Semióticas podemos perceber que os alunos que apresentaram as respostas constantes nas figuras 3 e 7 cometeram erro de registro ao situarem o ângulo de 60º na parte superior da representação, esse erro ocorreu no momento da conversão do enunciado numa representação imagética. Já os erros apresentados nas figuras 12, 13, 14 e 15 são erros de tratamento uma vez que não houve mudança na forma de representação e o aluno realizou operações indevidas no sistema apresentado (representação algébrica).

Destacamos aqui a possibilidade de evidenciar ou suprimir um determinado aspecto do objeto representado conforme mudamos o sistema de representação, portanto, destacaremos como a representação geométrica apresenta-se vantajosa em termos de explicitação de características de objetos matemáticos tornando-se uma expressão adequada no ensino desta disciplina.

Vejamos um exemplo que ilustra como uma abordagem geométrica através de um recurso visual pode facilitar a compreensão de um resultado.

Suponhamos que determinado professor deseja mostrar que S = ½ + ¼ +...+ $1/2^n$ = 1, quando n tende a infinito.

Certamente esse resultado pode ser confirmado pela aplicação de uma fórmula que permite calcular a soma dos termos de uma Progressão Geométrica com infinitos termos em que a razão (q) desta progressão é tal que $0 < q < 1$, conforme apresentado na figura abaixo, contanto, para um aluno que não teve ainda contato com tais progressões ou mesmo que não tenha compreendido com clareza o processo de obtenção de tal fórmula, torna-se, em certa medida, um exercício de fé, acreditar na precisão do resultado obtido.

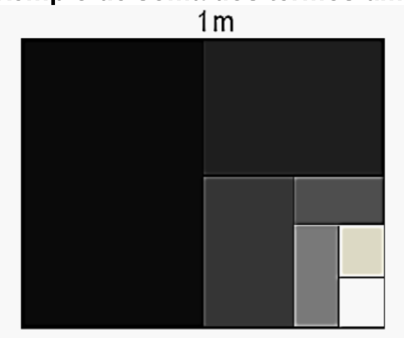
Figura 19: Fórmula para a soma dos termos de uma PG infinita

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Fonte: Autor

Como pode ser observada, esta fórmula não nos dá nenhuma dica sobre sua origem, mesmo o seu processo de dedução pode parecer demasiado artificial para um aluno que está tendo um primeiro contato. Por outro lado, vejamos como uma apresentação através de imagem pode favorecer uma introdução a tais elementos com relativa amenização. Observemos a figura que segue.

Figura 20: Exemplo de soma dos termos uma PG infinita

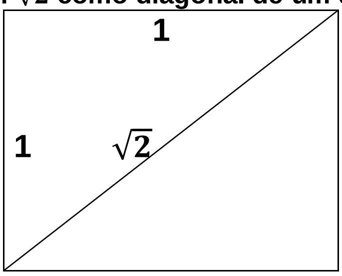


Fonte: Autor

Certamente, para efeito de compreensão por parte de um aluno, uma abordagem utilizando esta imagem como um processo de recobrimento da área de um quadrado unitário em reiteradas etapas que cobrem ½ da área restante é uma forma bem mais amena para que este compreenda que são necessárias infinitas iterações no processo e também que de fato o processo culmina na cobertura completa da área do quadrado maior, ou seja, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$ para valores de n crescendo indefinidamente. Tal abordagem, tirando proveito da forte intuição promovida pela imagem, poderia evitar eivar o aluno de dúvidas quanto à validade ou precisão do resultado. Não estamos aqui nos referindo à validade do resultado do ponto de vista da epistemologia matemática, com o rigor lógico praticado, mas, da certeza intuitiva do aluno, com esta, é certamente mais fácil ao aluno acolher sem maior estranheza o resultado de uma demonstração.

Outra situação que costuma causar embaraço é o reconhecimento da existência dos números irracionais como algo bem definido, de valor preciso. Normalmente esta situação ocorre em função da apresentação dos números irracionais através de aproximações sucessivas por números na forma decimal, como mostrar que $\sqrt{2}$ está compreendida entre 1 e 2, em seguida melhorar a aproximação mostrando que de fato ela está entre 1,4 e 1,5 e prosseguir melhorando a aproximação para um número maior de casas decimais. Este procedimento pode deixar no aluno a inquietação com a possibilidade de repetir indefinidamente o processo sem que consiga, em algum momento, um valor exato, isso deixa uma certa desconfiança sobre a existência da $\sqrt{2}$ como algo definido. Por outro lado, há a clássica apresentação deste resultado através da diagonal de um quadrado de lado unitário como caso particular do Teorema de Pitágoras, onde novamente a dúvida é dissipada pela apresentação visual. Neste caso, como resultado particular da aplicação de um teorema, para não se falar apenas em intuição.

Figura 21: $\sqrt{2}$ como diagonal de um quadrado



Fonte: Autor

Analogamente, $\sqrt{\mathbf{3}}$ pode ser apresentada como a diagonal de um cubo unitário. Sobre a contribuição da geometria na compreensão de fatos matemáticos diversos temos:

> [...] A vantagem da geometria é que ela nos permite mobilizar nossa intuição física para encarar a situação, em particular quando se pode fazer um desenho. Poucas vezes sinto que *realmente* entendo uma peça matemática até saber do que se trata em termos de linguagem geométrica (ELLENBERG, 2015, p. 280).

A abordagem de conteúdos que apresentam alguma dificuldade de assimilação, ou mesmo de aceitação por parte do aluno, através de elementos imagéticos mostra-se útil, no entanto, está longe de ser a única ou mesmo a principal vantagem que se pode tirar da geometria na construção do pensamento matemático. Vimos na nossa pesquisa com os professores que estes divergem ao informar se os alunos apresentam maior dificuldade com problemas que exigem raciocínio indutivo ou dedutivo, todavia, a tendência apresentada pelos alunos para utilização de fórmulas bem como a ênfase em processos mnemônicos, como transparece nas suas respostas, nos conduz a inferir que a utilização de raciocínio dedutivo é mais comum uma vez que apresentam maior disposição em utilizar modelos prontos para resolver problemas e maior dificuldade em elaborar modelos diante de problemas que não se encaixam a priori, isto tem reflexos no desenvolvimento do pensamento matemático, tornando o aluno um usuário de modelos que não desenvolve habilidades na criação de modelos. É oportuno lembrar que os professores pesquisados apontaram unanimemente a Geometria como a área da Matemática em que os alunos apresentam maiores dificuldades.

Se o desenvolvimento do pensamento matemático enseja uma via de passagem do concreto ao abstrato e se esse processo de passagem deve ser o mais suave possível, então a geometria mostra-se bastante conveniente.

Não nos iludimos sobre as dificuldades deste caminho, pelo contrário, temos presente o quão difícil é o estabelecimento de ações que atendam a estes reclames, sejam as dificuldades inerentes à disciplina, a falta de clareza de objetivos por parte de professores, ou mesmo a zelosa resistência em utilizar métodos matemáticos típicos da sua epistemologia, como as demonstrações, por parte de professores no Ensino Fundamental e mesmo no Ensino Médio.

A importância da geometria bem como os entraves ao ensino de matemática são observados e advertidos em:

> Em nenhum lugar a batalha é definida mais cruamente que na geometria plana. Este é o último reduto do ensino de provas, o alicerce da prática matemática. Ela é considerada uma espécie de último baluarte da "matemática real" por muitos matemáticos profissionais, mas não está claro em que medida estamos ensinando a beleza, o poder e a surpresa da prova quando ensinamos geometria. É fácil o curso se tornar um exercício de repetição tão árido quanto uma lista de trinta integrais definidas (ELLENBERG, 2015, p. 72)

A geometria é campo extremamente profícuo no desenvolvimento do pensamento matemático, do qual os alunos participantes da pesquisa mostraram preocupante nível. Neste sentido:

> [...] De fato, se o aluno não tiver aprendido este ou aquele fato geométrico específico, não terá perdido muito. Mas se ele não se houver familiarizado com as demonstrações geométricas, terá deixado escapar os melhores e mais simples exemplos de verdadeiras provas e perdido a melhor oportunidade de adquirir a ideia do raciocínio rigoroso. Sem esta ideia, faltar-lhe-á o verdadeiro critério para comparar argumentos de todos os tipos que se lhe apresentam na moderna vida cotidiana (POLYA, 2006, p. 132).

Mais adiante o autor arremata, (POLYA, 2006, p. 132), "Em suma, se a educação pretender incutir no estudante as noções da prova intuitiva e do raciocínio lógico, ela deverá reservar um lugar para as demonstrações geométricas.". As demonstrações são destacadas como de especial relevância para os alunos nos PCNs, sendo suscitado destes "expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;" (BRASIL, 1998).

De modo geral, as demonstrações são a essência da consistência da Matemática e devem, em alguma medida, estar presentes o quanto antes na rotina de estudos, obviamente devem ser introduzidas de forma gradativa e natural confirmando ou negando de forma inequívoca as possíveis intuições apresentadas por alunos. Seria um grande erro pretender que o aprendizado da matemática fique restrito a uma aceitação incondicional por parte do aluno do que lhe é apresentado. Quanto à maturidade dos alunos do Ensino Médio para compreender e assimilar demonstrações, ou mesmo quanto a necessidade delas neste nível de ensino, embora haja preocupação com excessos, os PCNs, conforme vimos, lhes conferem algum destaque. Este destaque é também realçado e apresentado como um salto no desenvolvimento do aluno, como segue:

> O segundo salto consiste no encontro com a ideia de demonstração, que deveria acontecer entre os 13 e 14 anos. Nessa idade o aluno tem maturidade suficiente para entender que alguns fatos matemáticos simples, principalmente de natureza geométrica, devem ser justificados de modo lógico e convincente. Esta prática não só o prepara para estudos posteriores de Matemática como é de considerável importância para a sua formação intelectual e até mesmo para o desenvolvimento da sua cidadania. Com efeito, aprendendo os elementos básicos do raciocínio, o jovem saberá melhor empregar seu poder de crítica e discernimento (LIMA, 2007, p. 183).

De modo geral, um matemático alicerça sua produção, e também sua compreensão de fatos produzidos por outros matemáticos, nas demonstrações, o que gera uma certa preocupação com estas, isso é loquazmente afirmado em:

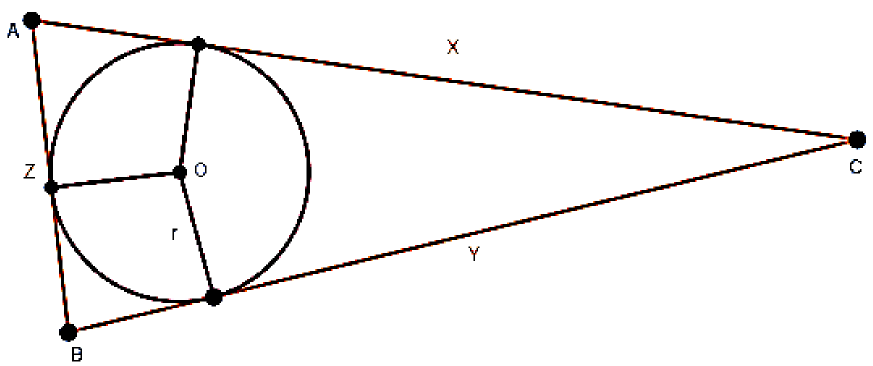
> Bem, o matemático tem pelo menos dois motivos básicos para demonstrar todos os seus teoremas. O primeiro motivo é que algumas proposições que parecem intuitivamente óbvias são de fato falsas. Por exemplo, é intuitivamente óbvio que existe mais números racionais do que números inteiros. Isto é, desde que existe um número infinito de racionais entre quaisquer dois inteiros, parece óbvio que não podemos achar uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos inteiros e o conjunto dos racionais. De fato, porém, como o leitor percebeu na primeira parte desse trabalho, existe uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos, contrariando todas as nossas intuições. Portanto, demonstrações são necessárias para assegurar a verdade dos teoremas (FOSSA, 2009, p. 45).

Reiteramos a necessidade de adequação na exposição de demonstrações a alunos que estejam tendo um primeiro contato com demonstrações, certamente leva algum tempo até o domínio, ou mesmo compreensão, mesmo das técnicas mais básicas, no entanto, uma cuidadosa seleção de problemas que torne gradativa em dificuldade a introdução destas mostra-se exequível e adequada, sobretudo, se for mantido o máximo possível de elementos que sirvam de suporte à intuição. Nisto a Geometria apresenta-se como excelente meio.

Vejamos alguns exemplos de demonstrações geométricas que podem servir como apresentação e meio de prática de técnicas básicas de demonstrações, que tem na imagem recursos intuitivos que disciplinam e conduzem o raciocínio do aluno.

Temos na imagem seguinte um suporte para a demonstração da fórmula que relaciona o raio r de uma circunferência, os lados x, y e z e a área de um triângulo inscrito a esta circunferência.

Figura 22: Triângulo inscrito em circunferência



Fonte: Autor

Para se chegar à relação desejada basta ter em mente que a área do triângulo ABC é a soma das áreas dos triângulos $\mathrm{AOC}, \mathrm{AOB}$ e BOC, em seguida, expressando cada uma dessas áreas por suas fórmulas, como segue:

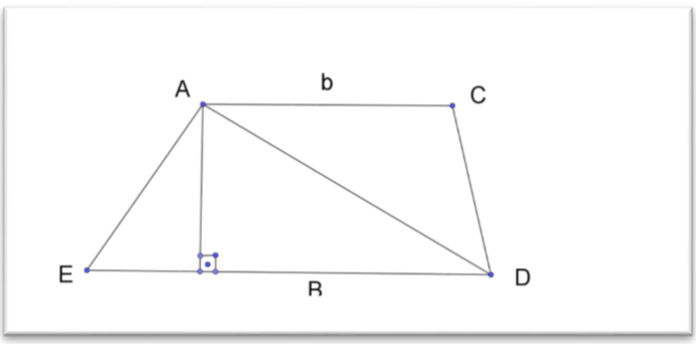
$$(ABC) = (\mathrm{x.r} + \mathrm{y.r} + \mathrm{z.r})/2 = \mathrm{r.}(\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z})/2$$

Chamando, como de costume nos livros didáticos, $(\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z})/2$ de P, onde P é o semiperímetro do triângulo, e de S a área do triângulo, chega-se na sucinta expressão pretendida:

$$\mathrm{S} = \mathrm{P.r}$$

Esta relação não é tão intuitiva ou óbvia ao ponto de gerar no aluno uma "certeza" imediata de sua veracidade, da mesma forma, a expressão da área de um trapézio em função de suas bases pode não ser de imediata dedução para um aluno, em que pese a simplicidade de sua obtenção. Observemos como a imagem abaixo torna a situação mais amena:

Figura 23: Área do trapézio



Fonte: autor

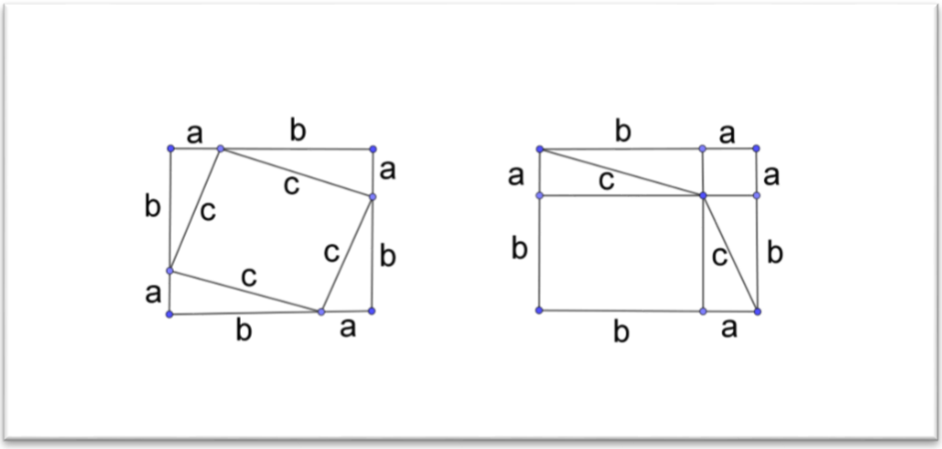
Neste caso temos o trapézio ACDE de bases b e B e altura h, representar o trapézio dividido em dois triângulos deixa evidente que a área do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos e consequentemente:

$(\mathrm{ACDE}) = (\mathrm{ADC}) + (\mathrm{ADE}) = \mathrm{b.h}/2 + \mathrm{B.h}/2 = (\mathrm{b} + \mathrm{B}).\mathrm{h}/2.$

Certamente uma abordagem como a mostrada acima está mais próximo da intuição do que uma abordagem utilizando a base média por exemplo.

O célebre Teorema de Pitágoras pode ser obtido de forma muita simples, sem a necessidade de manuseio algébrico, com a utilização da decomposição de áreas, como mostrado na figura abaixo:

Figura 24: Teorema de Pitágoras

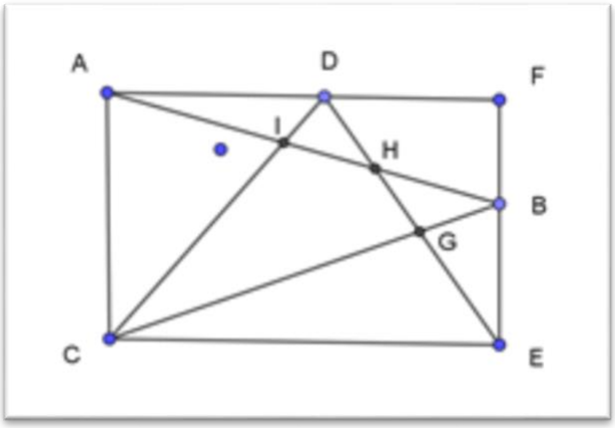


Fonte: Autor

Nas imagens acima, a área do quadrado de lado medindo a+ b é decomposta de duas maneiras diferentes, como resultado, é imediato que $\mathrm{c}^2 = \mathrm{b}^2 + \mathrm{a}^2$, ou seja, o Teorema de Pitágoras decorre de forma direta.

Uma demonstração pode apresentar graus de dificuldades de grande variedade, há aquelas que se dão de forma mais imediata, há aquelas que exigem artifícios que não são apontados diretamente pelos elementos do fato a ser demonstrado, há as que necessitam apoiar-se em fatos anteriormente demostrados (lemas). Além disso, há variadas técnicas de demonstração que podem ser utilizadas de forma mais adequada como a técnica da indução ou da redução ao absurdo. No entanto, didaticamente é vantajoso a escolha de demonstrações, a serem realizadas sob a forma de exercícios, que apresentem certa facilidade. Alguns exercícios apresentados com enunciado do tipo “calcule” podem ter o enunciado alterado para algo do tipo “mostre”, “prove”, “demonstre”, estas expressões familiarizam o aluno com as demonstrações e podem ser usadas em problemas simples como o problema seguinte adaptado de (NUNES, 2015, p. 6)

Figura 25: Teorema dos carpetes



Fonte: Nunes (2015)

O problema consiste em: dado o retângulo ACEF, provar que a área de CGHI é igual à soma das áreas de $\mathrm{BEG}, \mathrm{BHDF}$ e DAI. Para mostrar o resultado solicitado observa-se que a soma das áreas de ABC e CDE é igual à área de ACEF, logo:

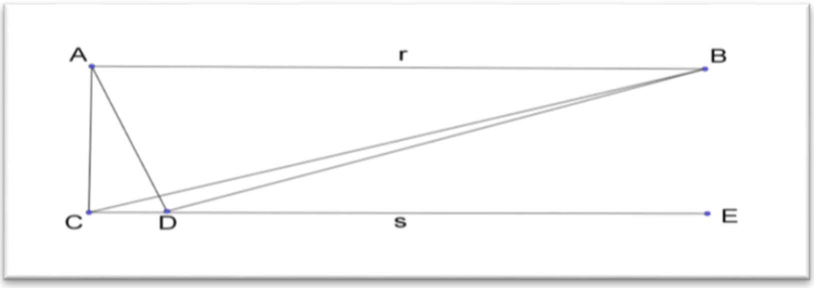
$$(\mathrm{ACEF}) - (\mathrm{ABC}) - (\mathrm{CDE}) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{CGHI}) - (\mathrm{BEG}) - (\mathrm{BHDF}) - (\mathrm{AID}) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\mathrm{CGHI}) = (\mathrm{BEG}) + (\mathrm{BHDF}) + (\mathrm{AID})$$

Os passos suprimidos nas passagens consistem apenas na decomposição das áreas das figuras apresentadas na primeira linha conforme figura 24, cancelamento de áreas iguais e mudança de membro.

Neste exemplo a intuição da igualdade não é imediata, no entanto, a simplicidade do argumento, bem como dos passos para se chegar à igualdade solicitada, tornam o problema adequado para o exercício de demonstrações simples.

Há, evidentemente, que se ter cautela, nem sempre o uso de imagens será capaz de reduzir dúvidas ou facilitar a compreensão de determinado conteúdo, vejamos o exemplo abaixo:

Figura 26: Triângulos de áreas iguais



Fonte: Autor

Na figura acima, sendo os segmentos de retas r e s paralelos, os triângulos ACD e BCD têm áreas iguais, no entanto, a imagem por si não fornece base a uma intuição de tal fato, a igualdade evidencia-se quando realizado o cálculo das áreas dos triângulos pelo semiproduto da base pela altura. De fato, há situações em que os recursos visuais serão insuficientes.

Não pretendemos aqui apresentar uma lista extensiva de exemplos, cabe ao professor selecionar demonstrações de forma que estas sejam as mais diretas possíveis e selecionar também, sempre que possível, imagens que auxiliem o aluno dando maior confiança a este. Notoriamente, as demonstrações não devem ser restritas à geometria, pelo contrário, devem estar presentes em todas as áreas e conteúdos apresentados ao aluno, no entanto, na medida do possível, as imagens devem auxiliar.

Por fim, a introdução das demonstrações não precisa, em absoluto, esperar que o aluno chegue ao ensino médio, pelo contrário, quanto antes o aluno tenha contato com demonstrações melhor será para a familiarização deste aluno com as provas matemáticas e mais natural lhe será tal tarefa. É no ensino fundamental que devem ser introduzidas as demonstrações, mantendo, evidentemente, o cuidado para não afastar-se demasiadamente da intuição. Para tal, a Geometria com o apelo às figuras geométricas constitui-se em meio adequado e pode contribuir decisivamente para o desenvolvimento da autonomia do pensamento matemático.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De tudo que foi exposto nas páginas precedentes constata-se que a autonomia do pensamento matemático aparece não como conceito, mas, como uma série de objetivos sob a forma de competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos ao longo do Ensino Médio, no entanto, os dados referentes a tal desenvolvimento mostram que tais objetivos estão longe de serem alcançados. Em várias áreas da Educação Matemática encontramos pensadores que expressam, embora não sob essa ótica, a importância do desenvolvimento da autonomia como um fim da educação. Os professores que participaram desta pesquisa não apresentaram indicadores de que estão alinhados com os objetivos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais e que conduzem a um melhor desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Os alunos participantes da pesquisa apresentaram preocupante nível de desenvolvimento do pensamento matemático, apresentaram ainda grande tendência a recorrer a fórmulas para resolução de problemas. A mínima quantidade de problemas solicitando demonstração de resultados por parte dos alunos foi observado como fator negativo no livro didático adotado na escola pesquisada.

Destacamos, mais uma vez, o papel do professor e do livro didático, bem como a viabilidade do uso da Geometria como meio de desenvolvimento do pensamento matemático, sobretudo, dado o seu suporte visual que aproxima o pensamento do aluno da intuição, constituindo meio que suaviza e torna gradativo o desenvolvimento do pensamento abstrato. Certamente os problemas apontados na análise aqui apresentada não são os únicos que concorrem para o quadro de desenvolvimento dos alunos, dificuldades de leitura e interpretação de modo geral, por exemplo, podem contribuir para o baixo desempenho em matemática, cabe aos professores e gestores escolares conhecerem o melhor possível os alunos e os objetivos do ensino da matemática para que se possa direcionar esforços aos pontos críticos do processo de ensino e aprendizagem.

Para melhorar tal panorama faz-se necessário uma revisão que propicie uma ligação imediata dos objetivos a cada conteúdo componente do currículo, um permanente contato dos professores com tais objetivos através de estudos e orientação pedagógica que não permita o distanciamento da prática docente desses objetivos.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6023**: informação e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro, 2002.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 92 p.

______. **Filosofia da Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Editora Unijuí, 2014.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL; MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO; SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA; FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO. **Guia de Livros Didáticos:** PNLD 2015: matemática: ensino médio. Brasilia: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. 23. ed. São Paulo - SP: Papirus, 2012.

ELLENBERG, J. **O poder do pensamento matemático:** a ciência de como não está errado. Tradução de George Schlesinger. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

FALCÃO, J. T. D. R. **Psicologia da Educação matemática:** uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3ª. ed. Campinas - SP: Autores associados, 2012.

FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora livraria da física, 2009.

______. **Teoria Intuicionista da Educação Matemética**. Tradução de Alberta M. R. B. Ladchumamanandasivan. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

FREIRE, P. **Pedagogia da autoomia**. 54. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2016.

HELLMEISTER, A. C. P. **Geometria em Sala de Aula**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

INEP. **Brasil no Pisa 2015: Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros**. INEP. Brasília, p. 274. 2016.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3ª. ed. Cmpinas: Autores associados, 2010.

Melhorescola.net. Disponivel em: <https://www.melhorescola.net/escola/caic-professor-balduino-barbosa-de-deus>. Acesso em: 10 Janeiro 2018.

MOREIRA, P. C. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

NUNES, A. L. T. O Teorema dos Carpetes. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 86, p. 61, 1º quadrimestre 2015.

Paiva, Manoel. **Matemática Paiva**. Vol. 1. 3ª. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

_______. **Matemática Paiva**. Vol. 2. 3ª. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

_______. **Matemática Paiva**. Vol. 3. 3ª. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SPERANDIO, D. S. (ORG.). **Manual de Normalização de Trabalhos Acadêmicos do IFPI**. teresina: [s.n.], 2017.

SPNOSA, B. D. **Ética Demonstrada à Maneira dos Geômetras**. Tradução de Marilena de Souza Chauí; Carlos Lopes de Mattos, *et al.* São Paulo: Abril Cultural, 1979.

ZATTI, V. **Autonomia e educação em Immanuel Kant e Paulo Freire**. Porto Alegre: EDPUCRS, 2007.

APÊNDICE I

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ

CAMPUS FLORIANO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

TESTE DIAGNÓSTICO

TERESINA

2017

Caro aluno(a),

O ensino brasileiro tem apresentado dificuldades diversas concernentes à consecução dos seus objetivos, o que tem levantado frentes de ação e reflexão que visam contribuir com uma melhor compreensão dos fatores envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem e apresentar propostas de melhorias, seja através da implementação de mudanças curriculares, de ações desenvolvidas no campo da didática, no uso de tecnologias como meio auxiliar, da melhoria das condições de trabalho ou do desenvolvimento de pesquisas no âmbito educacional.

Este teste diagnóstico é instrumento de coleta de dados que visa constituir material de análise para a pesquisa em curso, cujo título é: A AUTONOMIA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: OS FATORES QUE AFETAM A SUA CONSTRUÇÃO NO ENSINO MÉDIO. Esta pesquisa visa realizar uma análise dos fatores que afetam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos ao final do ensino médio, portanto, sua contribuição é de fundamental importância, sobretudo pela experiência cotidiana como educador.

Agradecemos a sua cooperação e esperamos que possamos contribuir para melhorias no ensino da matemática.

1) Para combater a um incêndio em um edifício a equipe do corpo de bombeiros estacionou a uma distância de 15m deste edifício, situação em que visualizava o topo do prédio sob um ângulo de 60°. Para saber se era possível atingir o topo do edifício com um jato de água o comandante da equipe calculou a altura do edifício. Se o comandante acertou nos cálculos, qual a altura que ele encontrou?

2) Ao realizar a contagem de caixas de um determinado produto em uma fábrica Pedro percebeu que do primeiro ao décimo quinto setor a quantidade produzida dia por setor seguia ordenadamente a sequência (23, 26, 29, ..., 65), no entanto, Ricardo havia lhe informado que a produção total em determinado dia havia sido de 628 caixas. Qual o setor que Ricardo esqueceu de contar?

3) Um esperto fazendeiro resolveu fazer uma plantação de cana em forma circular com centro na casa sede da fazenda, para ocupar a maior área possível e percorrer a menor distância para visitar qualquer parte do canavial, como no primeiro ano ele viu que a ideia deu muito certo, então resolveu aumentar em 20% o raio do círculo da área plantada. Nestas condições, qual o aumento percentual esperado na produção de cana na fazenda?

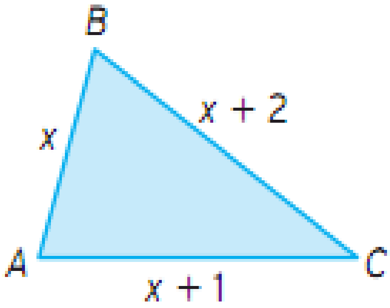
4) Um biólogo que acompanhava uma população de macacos da noite de uma reserva ambiental concluiu que esta aumentava a uma taxa de 20% ao ano. Qual o percentual de aumento dessa população esperado para um trimestre?

5) Encontre a soma e o produto das raízes da função $y = 2x^2 - 9x + 4$.

6) Uma função de $R -> R +$ possui as seguintes propriedades: 1ª propriedade $f(0) = 1$; segunda propriedade $f(a + b) = f(a).f(b)$ para todo a e todo b reais. Então essa função é:

a) Quadrática;
b) Linear;
c) Exponencial;
d) Logarítmica;
e) Periódica.

7) Sabendo que no triângulo abaixo a soma dos ângulos de vértices B e C é 90°, calcule o perímetro do triângulo.



8) A soma dos comprimentos de todas as arestas de um cubo é 72m. Calcule o volume deste cubo.

9) Em uma urna são colocadas 3 bolas pretas, 4 bolas brancas e 5 bolas vermelhas, todas iguais exceto pela cor. Em um sorteio que consiste em retirar consecutivamente 3 bolas dessa urna, qual a probabilidade de que as 3 bolas retiradas sejam pretas?

10) Em um quadrado de 5 linhas por 5 colunas foram distribuídos os números de 1 a 25 de forma que a soma dos números de qualquer linha é igual à soma dos números de qualquer coluna. Quanto vale a soma dos números da 4ª linha?

APÊNDICE II

INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ

CAMPUS FLORIANO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO

TERESINA

2017

Caro professor(a),

O ensino brasileiro tem apresentado dificuldades diversas concernentes à consecução dos seus objetivos, o que tem levantado frentes de ação e reflexão que visam contribuir com uma melhor compreensão dos fatores envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem e apresentar propostas de melhorias, seja através da implementação de mudanças curriculares, de ações desenvolvidas no campo da didática, no uso de tecnologias como meio auxiliar, da melhoria das condições de trabalho ou do desenvolvimento de pesquisas no âmbito educacional.

Este questionário é instrumento de coleta de dados que visa constituir material de análise para a pesquisa em curso, cujo título é: A AUTONOMIA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: OS FATORES QUE AFETAM A SUA CONSTRUÇÃO NO ENSINO MÉDIO. Esta pesquisa visa realizar uma análise dos fatores que afetam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos ao final do ensino médio, portanto, sua contribuição é de fundamental importância, sobretudo pela experiência cotidiana como educador.

Agradecemos a sua cooperação e esperamos que possamos contribuir para melhorias no ensino da matemática.

1) Qual a sua área de formação?

( ) Matemática ( ) Física ( ) Química ( ) outros

2) Qual o seu nível de formação?

( ) graduação incompleta ( ) graduação completa

( ) especialização ( ) mestrado ( ) doutorado

3) Qual a sua área de especialização? Caso possua.

4) Qual (ou quais) disciplinas da sua graduação você considera mais importante(s) para a sua prática docente?

5) Considerando os conteúdos estudados na sua graduação e sua relação com os conteúdos que você ministra no Ensino Médio, você consideraria que a grade curricular da graduação está:

( ) inadequada ( ) parcialmente adequada ( ) adequada

6) Há quanto tempo você leciona matemática nessa escola?

7) Considerando as áreas da matemática abaixo, como você ordenaria (do maior para o menor) o grau de dificuldade de aprendizagem apresentado pelos alunos do Ensino Médio?

a) Aritmética b) Álgebra c) Geometria

8) Considere as etapas abaixo vivenciadas pelos alunos durante o aprendizado de determinado conteúdo de matemática.

a) Compreensão correta do conceito apresentado.

b) Manipulação das expressões envolvidas (cálculos algébricos ou aritméticos).
c) Aplicação do conteúdo diante de um problema em que o conceito não aparece explícito no enunciado.

Como você ordenaria (do maior para o menor) as etapas em que os alunos apresentam maior dificuldade?

9) Na resolução de um problema pelos alunos, considere os itens abaixo:
a) Aplicar corretamente uma fórmula.
b) Reconhecer o conteúdo a ser aplicado para a solução do problema.
c) Realizar as manipulações necessárias para chegar à resposta.
d) Analisar e argumentar corretamente sobre a validade (ou adequação) de uma resposta encontrada diante do problema proposto.

Como você ordenaria as etapas acima quanto ao grau de dificuldade (do maior para o menor) apresentado pelos alunos?

10) Em qual das situações abaixo os alunos apresentam menor desempenho?
a) Resolver um problema em que o enunciado remete a uma situação concreta, contextualizada.
b) Resolver um problema em que o enunciado refere-se a uma situação abstrata, não contextualizada.

11) Na sua opinião, os alunos apresentam maiores dificuldades com raciocínios do tipo:

a) Dedutivo b) Indutivo

12) Considere:

Domínio de conteúdo b) Didática c) Definição de objetivos.

Como você definiria uma ordem de relevância (de maior para menor) para estes fatores na atividade docente?

13) Na sua opinião, quais são os principais objetivos do ensino de matemática no Ensino Médio?

14) Como você descreveria a contribuição do aprendizado dos conteúdos do Ensino Médio na formação do pensamento crítico geral do aluno?

15) Você consegue cobrir, durante o ano letivo, todo o conteúdo do livro didático? caso não consiga, qual o percentual do conteúdo que é coberto durante o ano?

16) Qual o percentual de questões do livro didático que você acha que os alunos trabalham durante o ano letivo?

17) Considerando o livro didático adotado na escola, que aspectos do livro você considera adequados, ou que favoreçam o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno?

18) Considerando o livro didático adotado na escola, que aspectos do livro você considera inadequados, ou que NÃO favoreçam o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno?