

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional

André Luiz Goulart Matos

APLICAÇÕES DOS TEOREMAS DE PAPPUS - GULDIN NO  
ENSINO MÉDIO: CORPOS REDONDOS

Campo Grande - MS

2018

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional

André Luiz Goulart Matos

APLICAÇÕES DOS TEOREMAS DE PAPPUS - GULDIN  
NO ENSINO MÉDIO: CORPOS REDONDOS

Orientador Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do  
Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato  
Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos  
para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2018

# APLICAÇÕES DOS TEOREMAS DE PAPPUS - GULDIN NO ENSINO MÉDIO: CORPOS REDONDOS

**André Luiz Goulart Matos**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela banca examinadora:

Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini (Orientador)  
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Claudemir Aniz  
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Ruikson Sillas de Oliveira Nunes  
Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT

Campo Grande - MS, 26 de Outubro de 2018

*“Eduquem as crianças e não será necessário castigar os homens.”*

*Pitágoras*

# Agradecimentos

Agradeço aos discentes do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Thiago, Éder, Clayton, Maiara e Estevão que, desde o início, sempre me ajudaram e incentivaram a prosseguir na árdua, porém nobre, missão de se tornar um mestre em Matemática; aos extraordinários professores das diversas disciplinas do PROFMAT, à Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Elizabeth, pelo exemplo de amor à docência e inigualável transmissão dos conhecimentos, sempre repletos de extrema sabedoria e algumas "sutilezas"; a senhora é divina!; ao Prof Dr<sup>o</sup> Edson, pelos ensinamentos transmitidos em cálculo numérico; à Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Elen, por sua lealdade, profissionalismo e dedicação. Por último, quero agradecer, em especial, a dois professores. Inicialmente, à Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Rúbia, que foi determinante por ocasião de minha matrícula e, durante todo o curso, sempre muito atenciosa, generosa e competente, obrigado por suas palavras de incentivo e força; ao Prof Dr<sup>o</sup> Claudemir, por suas inúmeras orientações inteligentes, oportunas e, quando a situação permitia, descontraídas; abaixo de Deus, devo este curso aos senhores.

De maneira ímpar, agradeço ao Prof Dr<sup>o</sup> Alex Ferreira Rossini (UFMS) que, além de ter sido um excelente professor da disciplina de geometria no mestrado, aceitou a missão de me orientar neste trabalho; obrigado por sua paciência, compreensão, humildade, disponibilidade e equilíbrio; suas colocações, sugestões e observações, sempre oportunas e coerentes, possibilitaram-me produzir uma dissertação organizada e de fácil compreensão para o leitor.

Ao Prof Me Eliel Villanova grande incentivador, sendo o primeiro a me apresentar o mestrado do PROFMAT e ao Prof Luiz Cláudio, de língua portuguesa, grande amigo que me ajudou na correção gramatical e ortográfica deste trabalho.

Aos meus pais, Sidney (in memoriam) e Maria Augusta que educaram com muito amor, ensinando-me princípios e valores morais fundamentais para a formação de um homem de caráter; em especial, a minha amada esposa, Andréa Mendonça, que sempre

me apoiou e incentivou nos momentos que mais precisei e; aos meus amados filhos Pedro Henrique e Thiago Henrique pela paciência e compreensão nas situações de turbulência e aflição. Saibam que todos vocês me serviram de alicerce imprescindível à realização deste mestrado, obrigado por tudo. Por fim, agradeço a Deus pois, sem Ele nada somos, nada seremos.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar aos professores e alunos de matemática e física do ensino médio a aplicação dos Teoremas de Pappus-Guldin na dedução não tradicional, que chamaremos de 2º MODO, das fórmulas do volume e da área da superfície dos corpos redondos, além disso, a resolução de alguns exemplos envolvendo sólidos e superfícies de revolução sobre essa ótica.

**Palavras-chave:** Teoremas de Pappus-Guldin, corpos redondos, volume e área da superfície.

# Abstract

The aim of this work is to present to teachers and students of mathematics and physics of high school the application of Pappus-Guldin's Theorems in the non-traditional deduction, which we will call 2° MODO, of the formulas of volume and surface area of round bodies, in addition, solving some examples involving solids and surfaces of revolution on this optics.

**Keywords:** 1st and 2nd Pappus-Guldin theorem, round bodies, volume and surface area.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Definições e Conceitos Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1	Centro de Gravidade . . . . .	4
1.1.1.	Centro de gravidade de um conjunto de partículas . . . . .	5
1.1.2.	Centro de gravidade de figuras planas . . . . .	5
1.1.3.	Exemplos: centro de gravidade . . . . .	6
1.1.4.	Exemplo experimental: a prática . . . . .	7
1.1.5.	Composição de figuras planas . . . . .	7
1.2	Ângulo de Revolução . . . . .	8
1.3	Sólido de Revolução . . . . .	9
1.4	Superfície de Revolução . . . . .	9
1.5	Corpos Redondos . . . . .	11
1.6	1º Teorema de Pappus - Guldin . . . . .	12
1.7	2º Teorema de Pappus - Guldin . . . . .	13
1.8	Volume de um Sólido e Área de uma Superfície . . . . .	13
1.8.1.	Cálculo do volume de um sólido de revolução ( $V$ ) . . . . .	13
1.8.2.	Cálculo da área de uma superfície de revolução ( $A$ ) . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Os Principais Corpos Redondos no Ensino Médio</b>	<b>15</b>
2.1	Cilindro . . . . .	15
2.1.1.	Volume de um cilindro . . . . .	16
2.1.2.	Área da superfície de um cilindro . . . . .	16
2.2	Cone . . . . .	17
2.2.1.	Volume de um cone . . . . .	17
2.2.2.	Área da superfície de um cone . . . . .	18
2.3	Esfera . . . . .	19

2.3.1.	Volume da esfera - Princípio de Cavalieri . . . . .	20
2.3.2.	Área da superfície da esfera - Noção intuitiva . . . . .	21
2.4	Tronco de Cone . . . . .	22
2.4.1.	Volume de um tronco de cone . . . . .	22
2.4.2.	Área da superfície de um tronco de cone . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Aplicações dos Teoremas de Pappus - Guldin</b>	<b>25</b>
3.1	Volume do Cilindro . . . . .	25
3.1.1.	Construção geométrica do volume do cilindro . . . . .	26
3.1.2.	Obtenção das <i>2(duas) medidas</i> do ( $V$ ) . . . . .	27
3.1.3.	Volume do cilindro pelo 2º MODO . . . . .	27
3.2	Área da Superfície do Cilindro . . . . .	28
3.2.1.	Construção geométrica da superfície da base do cilindro . . . . .	28
3.2.2.	Obtenção das <i>2(duas) medidas</i> da ( $A_b$ ) . . . . .	29
3.2.3.	Área da base do cilindro pelo 2º MODO . . . . .	29
3.2.4.	Construção geométrica da superfície lateral do cilindro . . . . .	30
3.2.5.	Obtenção das <i>2(duas) medidas</i> da ( $A_l$ ) . . . . .	30
3.2.6.	Área lateral do cilindro pelo 2º MODO . . . . .	31
3.2.7.	Área total da superfície do cilindro pelo 2º MODO . . . . .	31
3.3	Volume do Cone . . . . .	32
3.3.1.	Construção geométrica do volume do cone . . . . .	32
3.3.2.	Obtenção das <i>2(duas) medidas</i> do ( $V_c$ ) . . . . .	33
3.3.3.	Volume do cone pelo 2º MODO . . . . .	35
3.4	Área da Superfície do Cone . . . . .	35
3.4.1.	Construção geométrica da superfície da base do cone . . . . .	36
3.4.2.	Obtenção das <i>2(duas) medidas</i> da ( $A_{bc}$ ) . . . . .	36
3.4.3.	Área da base do cone pelo 2º MODO . . . . .	37
3.4.4.	Construção geométrica da superfície lateral do cone . . . . .	37
3.4.5.	Obtenção das <i>2(duas) medidas</i> da ( $A_{lc}$ ) . . . . .	38
3.4.6.	Área lateral do cone pelo 2º MODO . . . . .	38
3.4.7.	Área total da superfície do cone pelo 2º MODO . . . . .	39
3.5	Volume da Esfera . . . . .	39
3.5.1.	Construção geométrica do volume da esfera . . . . .	39

3.5.2.	Obtenção das <i>2(duas) medidas</i> do $(V_e)$ . . . . .	40
3.5.3.	Volume da esfera pelo 2° MODO . . . . .	41
3.6	Área da Superfície da Esfera . . . . .	41
3.6.1.	Construção geométrica da superfície da esfera . . . . .	41
3.6.2.	Obtenção das <i>2(duas) medidas</i> da $(A_e)$ . . . . .	42
3.6.3.	Área da superfície da esfera pelo 2° MODO . . . . .	43
3.7	Volume do Tronco de Cone . . . . .	43
3.7.1.	Construção geométrica do volume do tronco de cone . . . . .	43
3.7.2.	Obtenção das <i>2(duas) medidas</i> do $(V_t)$ . . . . .	44
3.7.3.	Volume do tronco de cone pelo 2° MODO . . . . .	46
3.8	Superfície do Tronco de Cone . . . . .	46
3.8.1.	Construção geométrica da superfície da base do tronco de cone . . . . .	47
3.8.2.	Obtenção das <i>4(quatro) medidas</i> da $(A_{bt})$ . . . . .	47
3.8.3.	Área da base do tronco de cone pelo 2° MODO . . . . .	48
3.8.4.	Construção geométrica da superfície lateral do tronco de cone . . . . .	49
3.8.5.	Obtenção das <i>2(duas) medidas</i> da $(A_{lt})$ . . . . .	49
3.8.6.	Área lateral do cone pelo 2° MODO . . . . .	50
3.8.7.	Área total da superfície do tronco de cone . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Algumas Aplicações</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>6</b>	<b>Apêndice</b> . . . . .	<b>61</b>
6.1	Obtenção da distância do centro de gravidade do semicírculo ao eixo de revolução . . . . .	61
6.2	Obtenção da distância do centro de gravidade da semicircunferência ao eixo de revolução . . . . .	62
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>63</b>

# Introdução

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacional de Matemática (PCN), o estudo de Geometria deve possibilitar ao aluno ver, analisar e compreender as formas presentes no espaço em que vive, fazendo a conexão entre o mundo sensível e a estrutura no mundo geométrico, desenvolvendo o raciocínio ao lidar com entes como pontos, linhas, superfícies e volumes. Assim, de acordo com os PCN de 1997, passa-se do mundo sensível ao mundo geométrico, multiplicando suas experiências sobre os objetos do espaço em que vive a construir uma rede de conhecimentos relativos à localização, à orientação, que lhe permitirá penetrar no domínio da representação dos objetos e, assim, distanciar-se do espaço sensorial ou físico. É o aspecto experimental que colocará em relação esses dois espaços: o sensível e o geométrico. De um lado, a experimentação permite agir, antecipar, ver, explicar o que se passa no espaço sensível e, de outro, possibilita o trabalho sobre as representações dos objetos do espaço geométrico e, assim, desprender-se da manipulação dos objetos reais para raciocinar sobre representações mentais [3].

Neste contexto, nós, professores de matemática, devemos desenvolver habilidades que nos permitam estabelecer a ligação entre as experiências da vida real e o campo geométrico, por intermédio da construção de figuras planas e espaciais em sala de aula, laboratórios e/ou oficinas. Diante deste desafio, podemos desenvolver algumas atividades práticas que visem ao desenvolvimento cognitivo de todos os alunos, incluindo os especiais. Uma sugestão é o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar (matemática e física), que iniciar-se-ia com uma construção geométrica, seguida de experimentos reais, envolvendo as demonstrações das fórmulas utilizadas na obtenção do volume e da área da superfície dos sólidos de revolução mais comuns.

Tradicionalmente, os professores de matemática do ensino médio justificam aos seus alunos as fórmulas do volume e da área de superfície dos sólidos de revolução, por meio do emprego combinado de expressões matemáticas predefinidas que, quando empregadas

adequadamente, fornecem a medida do volume e da área da superfície. Evidenciaremos, ao longo do trabalho, este método de ensino por 1º MODO [6]. Cabe salientar que os cálculos presentes nesse modo, em geral, são tarefas complexas e difíceis de serem concluídas. Além disso, nota-se que alguns alunos apresentam dificuldades em visualizar a revolução de uma linha ou superfície em torno de um eixo.

Apresentamos uma outra abordagem para calcular o volume e a área de superfícies de revolução. Indicamos esta por 2º MODO [6]. Esta abordagem será utilizada na obtenção das fórmulas do volume e da área da superfície de alguns sólidos de revolução, a saber: cilindro, cone, esfera e tronco de cone.

No primeiro capítulo, iniciamos apresentando alguns conceitos e definições preliminares que servirão de alicerce às demonstrações apresentadas ao longo deste trabalho. São exemplos dessas: centro de gravidade, sólido de revolução, superfície de revolução, ângulo de revolução, corpos redondos e os teoremas de Pappus - Guldin. Encerrando este capítulo, definimos, respectivamente, o 1º e 2º MODO, tanto para o cálculo do volume, quanto para o cálculo da área da superfície de revolução.

No segundo capítulo são definidos os entes geométricos: cilindro, cone, esfera e tronco de cone. Tais entes serão chamados de corpos redondos, ou seja, sólidos obtidos por meio de uma revolução completa de uma forma plana em torno de um eixo. Ao fim de cada subseção, apresentamos as fórmulas do volume e da área de superfície, de acordo com o 1º MODO.

No terceiro capítulo exploramos a construção dos corpos redondos e por fim a comprovação das fórmulas de seus volumes e de suas áreas de superfície; por meio do emprego do 2º MODO, que essencialmente trata-se de uma aplicação direta dos teoremas de Pappus - Guldin.

O quarto capítulo é inteiramente dedicado a simples aplicações ao ensino médio. Paralelamente, vamos apresentar a resolução de alguns exemplos por meio das duas metodologias. Mais explicitamente, cada exemplo será desenvolvido, inicialmente, de maneira tradicional (1º MODO), ou seja, sem a aplicação dos teoremas de Pappus-Guldin e, em seguida, com a aplicação dos referidos teoremas (2º MODO). Para efeito de entendimento em cada solução apresentada, iremos gerar o sólido envolvido usando o software (gratuito) Geogebra.

Finalmente, no quinto, apresentamos as considerações finais com o objetivo de des-

pertar no leitor uma reflexão sobre o que foi apresentado neste trabalho, em particular, no que se refere à inclusão do 2º MODO nos estudos da geometria espacial posicional e métrica, ensinada durante o ensino médio.

No apêndice, deixamos a dedução das distâncias dos centros de gravidades do semicírculo e da semicircunferência a um eixo de revolução sobreposto aos seus diâmetros, utilizadas no capítulo 3.

# Capítulo 1

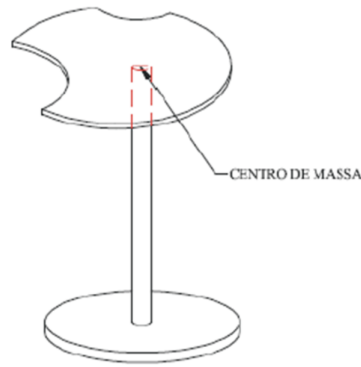
## Definições e Conceitos Preliminares

Aqui recordamos alguns conceitos básicos de matemática/física, e fixamos as notações que utilizaremos neste trabalho. Por fim, definimos as metodologias 1º e 2º MODOS a fim de aplicá-los em questões envolvendo sólidos e superfícies de revolução.

### 1.1 Centro de Gravidade

**Definição 1.** É o ponto de aplicação da força peso. A terra atrai o corpo como se toda sua massa estivesse localizada no seu centro de gravidade. Para corpos homogêneos, isto é, de massa uniformemente distribuída, que admitem um eixo de simetria, seus centros de gravidade estão sobre esse eixo. O centro de gravidade de um corpo coincide sempre com o centro de sua massa, apesar de o conceito de centro de massa ser mais amplo do que o conceito de centro de gravidade [2].

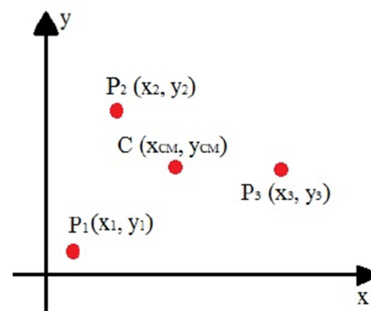
Se tivéssemos que localizar um corpo homogêneo no espaço tridimensional, ele seria representado por um ponto, e este ponto é o centro de gravidade. De outra forma, pode-se dizer que se tivéssemos que concentrar toda a massa de um corpo homogêneo em um único ponto, este ponto seria o centro de gravidade. Em tese, um objeto plano, apoiado sobre uma haste fina, estará em equilíbrio se o ponto de apoio estiver localizado no centro de gravidade, conforme figura a seguir.



Importante ressaltarmos que neste trabalho as formas geométricas são corpos homogêneos e, sendo assim, seus centros de gravidade coincidem com os seus centros geométricos.

### 1.1.1. Centro de gravidade de um conjunto de partículas

Inicialmente, observamos que as coordenadas do centro de gravidade  $G = (X_G; Y_G)$  de um sistema de partículas num plano, conforme mostra a figura a seguir, são calculadas a



partir das médias ponderadas, conforme as equações:

$$X_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k} \text{ e } Y_G = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ky_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}.$$

### 1.1.2. Centro de gravidade de figuras planas

Outro caso de interesse deste trabalho é a localização do centro de gravidade de certas figuras planas. Em geral, utilizamos a seguinte regra:

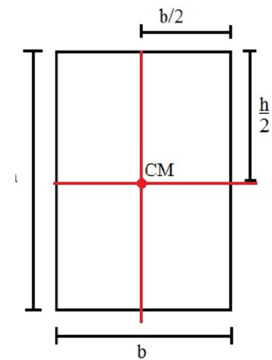
✓ O centro de gravidade de uma figura plana homogênea localiza-se sobre o seu eixo de simetria.

✓ Se o corpo possuir dois eixos de simetria, o centro de gravidade estará na intersecção entre os eixos.

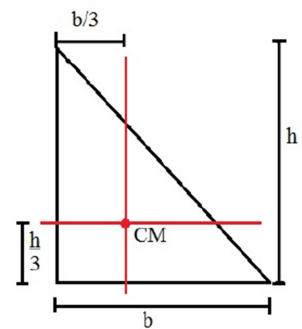


Para as figuras a seguir localizamos os eixos de simetria e seus respectivos centros de gravidade:

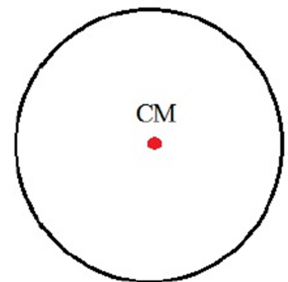
**Retângulo:** o centro de gravidade do retângulo fica sobre os eixos de simetria que dividem ao meio a altura  $h$  e a base  $b$ . Portanto, para calculá-lo, basta dividir a altura e a base por dois.



**Triângulo retângulo:** como a base do triângulo retângulo é mais larga, a maior parte de sua massa encontra-se na parte inferior. Conforme mostra a figura, o centro de gravidade do triângulo retângulo localiza-se a um terço de sua altura e base.

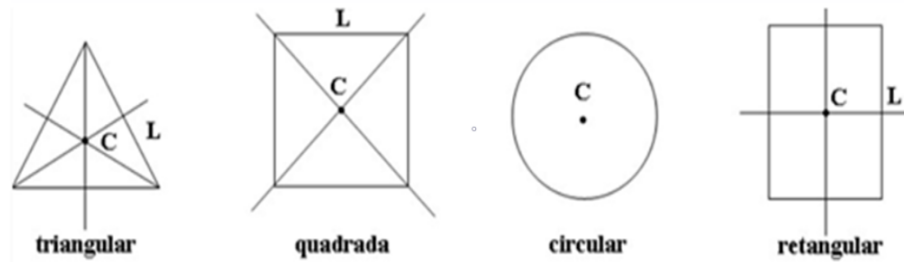


**Círculo:** o centro de gravidade da circunferência fica exatamente em seu centro, porque o eixo de simetria do círculo é uma reta que vai de uma de suas extremidades à outra, passando exatamente pelo seu centro.



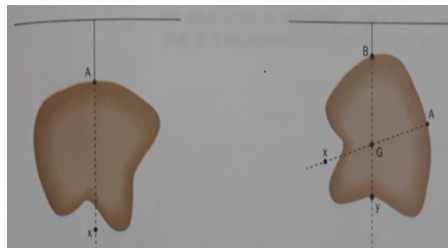
### 1.1.3. Exemplos: centro de gravidade

Uma vez definido, vamos apresentar alguns exemplos de centros de gravidade de corpos homogêneos (em campo gravitacional uniforme). O centro de gravidade de uma barra cilíndrica ou prismática, de um disco ou de uma placa retangular de espessura uniforme, de uma esfera, de um cilindro ou de um cubo, encontra-se no centro geométrico desses corpos, desde que sejam homogêneos. Especificamente, o centro de gravidade de uma placa triangular homogênea, de espessura uniforme, será no ponto de encontro de suas medianas (Baricentro) [2].



#### 1.1.4. Exemplo experimental: a prática

Vejamos agora uma maneira de obtermos o centro de gravidade (G) de uma forma irregular. Se o corpo tiver forma irregular e não for homogêneo, utiliza-se a regra prática descrita a seguir. Em primeiro lugar, pendura-se o corpo por um de seus pontos (A) e traça-se a vertical correspondente (AX). A seguir pendura-se o corpo por um outro ponto (B) e traça-se a vertical correspondente (BY). Como em qualquer caso há equilíbrio, o centro de gravidade (G) tem que pertencer, ao mesmo tempo, às duas verticais. Portanto, G é o ponto de cruzamento dessas verticais [2].

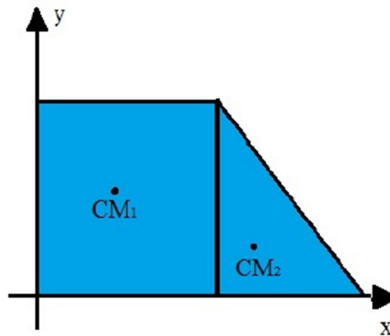


#### 1.1.5. Composição de figuras planas

Para calcular o centro de gravidade de figuras planas compostas, devemos considerar cada parte da figura individualmente, encontrar os seus centros de gravidade e, em seguida, somá-los. Para isso, devemos adotar um sistema de referência, conforme mostra a figura. A imagem a seguir mostra uma figura plana composta por um quadrado e um triângulo retângulo. Após adotar o sistema de referência (X; Y); devemos considerar o centro de gravidade de cada uma das figuras. Para isso, utilizamos o índice 1 para o quadrado e 2 para o triângulo. Para calcular as coordenadas do centro de massa da figura inteira, devemos somar as coordenadas das figuras individuais através da equação:

$$X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \text{ e } Y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2},$$

aqui os pesos  $m_1$  e  $m_2$  são as áreas, respectivamente, do quadrilátero e do triângulo.



Com base nos conceitos físicos e matemáticos apresentados, podemos concluir que o cálculo do centro de gravidade ( $G$ ) de um corpo, resume-se a obtenção da média ponderada. Perceba que essa média determina, no campo aritmético, um número que representa a coleção dos  $k$  números que a geraram. Analogamente, no campo geométrico, podemos afirmar que o centro de gravidade ( $G$ ) é o ponto de equilíbrio, ou seja, concentra de forma única a reunião de infinitos pontos de uma linha ou de uma região.

Seria ainda conveniente lembrar o que se entende por centro geométrico ou centroide de uma figura plana. Essa noção depende do conceito de momento de área, intimamente relacionado com o conceito físico de momento de massa. Isto posto, entendemos por centro geométrico de uma figura plana aquele ponto que, caso imaginássemos que nele se concentrasse toda a área ou perímetro da figura, exerceria um momento equivalente ao momento total da figura. Quando uma figura se compõe de duas ou mais figuras, cujos centroides são de fácil determinação, o cálculo do centroide da figura composta pode ser realizado a partir do somatório dos momentos de área de cada uma das figuras [13].

## 1.2 Ângulo de Revolução

Antes de apresentarmos a definição de ângulo de revolução, observamos que, para os fins deste trabalho, tomamos  $\alpha = 2\pi$  radianos, uma vez que os corpos redondos são sólidos obtidos através de uma revolução completa.

**Definição 2.** Trata-se do ângulo determinado pela revolução do semiplano que contém a geratriz em torno de um eixo fixo (eixo de revolução), sua medida corresponde à trajetória percorrida pelo centro de gravidade ( $G$ ) em torno de um eixo de revolução, conforme [14].

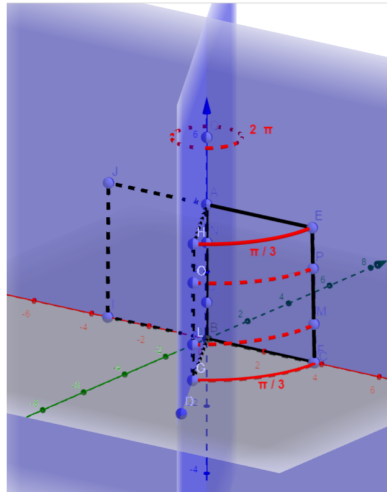
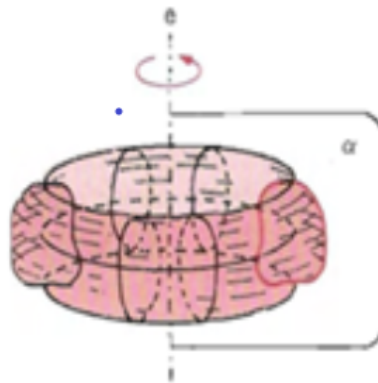


Figura 1.1: Ângulo de revolução de medida  $\frac{\pi}{3}$  rad

### 1.3 Sólido de Revolução

**Definição 3.** Consideramos um semiplano de origem  $e$  (eixo) e nele uma região  $S$  (geratriz); girando o semiplano em torno de  $e$  e ao longo do ângulo  $\alpha$ , a região  $S$  gera um sólido chamado sólido de revolução. Salvo aviso em contrário, considera-se revolução completa (de  $360^\circ$  em torno de eixo).

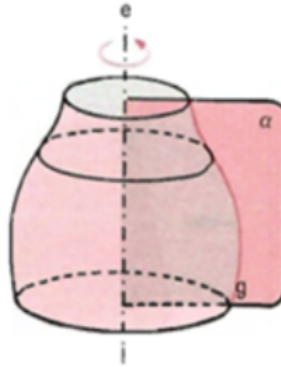


A geratriz do sólido de revolução é a área da região  $S$  que, após a revolução em torno de um eixo, gera esse sólido. A distância do centro de gravidade da geratriz de um sólido de revolução ao eixo de revolução, será denotada por  $(d)$  [6].

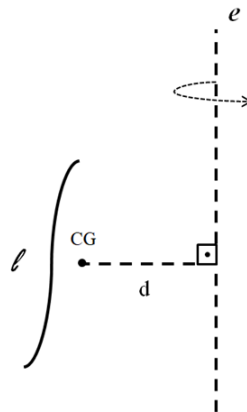
### 1.4 Superfície de Revolução

**Definição 4.** Consideremos um semiplano de origem  $e$  (eixo) e nele uma linha  $g$  (geratriz); girando esse semiplano em torno de  $e$  e ao longo do ângulo  $\alpha$ , a linha geratriz gera uma

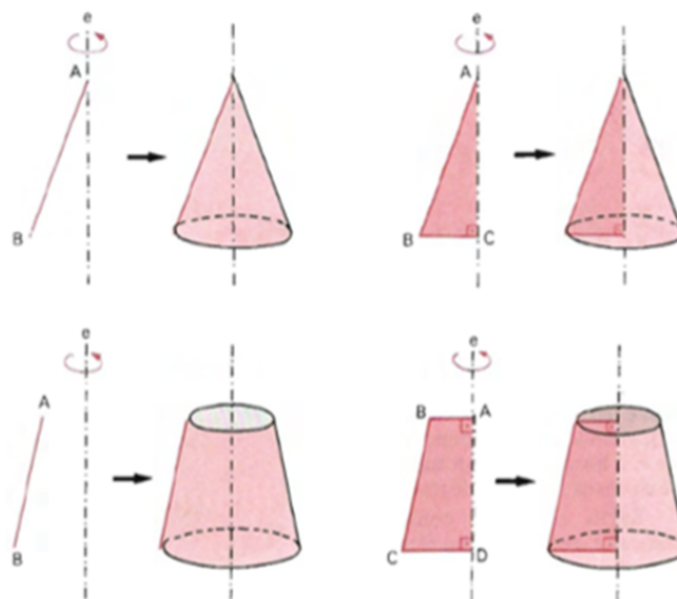
superfície, que é chamada superfície de revolução. Salvo aviso em contrário, considera-se revolução completa (de  $360^\circ$  em torno de eixo).



A geratriz da superfície de revolução ( $g$ ) é (são) a(s) linha(s) geradora(s) da superfície de revolução, conforme o caso. Seu comprimento (perímetro) será representado por ( $l$ ). A distância do centro de gravidade da geratriz de uma superfície de revolução ao eixo de revolução também será denotada por ( $d$ ) [6].



Ressaltamos que para polígonos, a geratriz corresponderá ao seu perímetro ( $2P$ ), do mesmo modo que, na circunferência, corresponde ao seu comprimento ( $C = 2\pi r$ ). Nos casos em que o lado de um polígono estiver sobreposto ao eixo de rotação, a sua medida será desconsiderada, para fins de obtenção da área da superfície gerada por esse polígono. Denotaremos a área da superfície de revolução por ( $A$ ).



## 1.5 Corpos Redondos

Provavelmente você já tenha iniciado o estudo dos sólidos geométricos, com os poliedros e, em especial, os prismas e as pirâmides, durante o 2º ano do Ensino Médio. Agora, nesta seção, estudaremos os sólidos que possuem superfícies curvas, os chamados corpos redondos. Os principais corpos redondos estudados no ensino médio são: cilindro, cone,

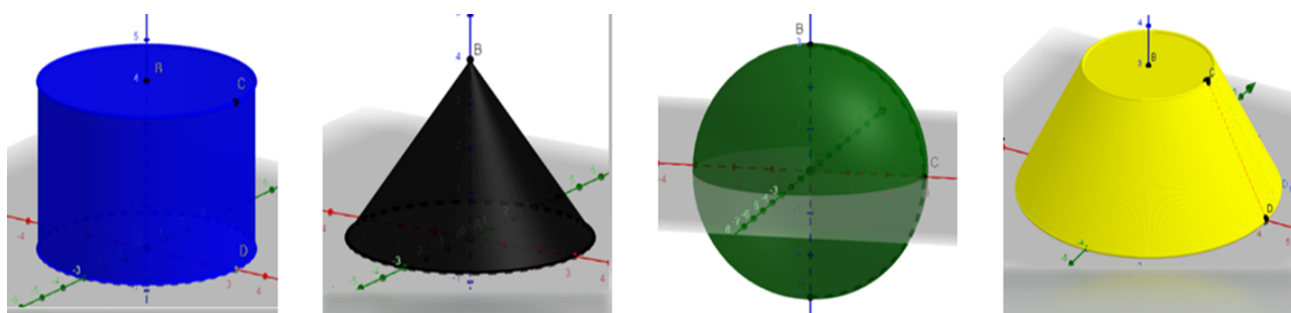


Figura 1.2: Os principais corpos redondos

Estudar os corpos redondos e conhecer suas características e propriedades permite-nos representar teoricamente uma grande quantidade de elementos da vida cotidiana [5].



Figura 1.3: Objetos que lembram os corpos redondos

De posse dos conceitos e definições preliminares apresentados na parte inicial deste capítulo, agora podemos enunciar o 1° e 2° teoremas de Pappus - Guldin.

## 1.6 1° Teorema de Pappus - Guldin

**Teorema 1.** Girando-se uma região  $S$  (ao longo do ângulo  $\alpha$ ) em torno de um eixo de seu plano, eixo este que não corte a região, o volume ( $V$ ) do sólido de revolução assim formado é igual ao produto da área da região  $S$  pelo comprimento ( $d\alpha$ ) da trajetória descrita pelo centro de gravidade da região [8].

$$\boxed{V = S(d\alpha)} \quad (1.1)$$

**Comentário 1** (sobre o teorema). *Se uma figura plana é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então o volume do sólido de revolução gerado é dado pelo produto entre a área da figura rotacionada e o comprimento da circunferência, cujo raio é a distância ( $d$ ) entre o centro de gravidade dessa figura e o eixo de revolução [14].*

## 1.7 2º Teorema de Pappus - Guldin

**Teorema 2.** Girando-se uma curva ( ao longo do ângulo  $\alpha$ ) em torno de um eixo de seu plano, eixo este que não corte a curva, a área da superfície assim formada é igual ao produto do comprimento ( $l$ ) da curva pelo comprimento ( $d\alpha$ ) da trajetória descrito pelo centro de gravidade da curva [8].

$$\boxed{A = l(d\alpha)} \quad (1.2)$$

**Comentário 2** (sobre o teorema). *Se uma figura plana é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então a área da superfície gerada é dada pelo produto entre o perímetro da figura rotacionada e o comprimento da circunferência, cujo raio é a distância ( $d$ ) entre o centro de gravidade desse perímetro e o eixo de revolução [14].*

*Cabe salientar que Pappus de Alexandria é considerado historicamente o último grande geômetra grego e, em 320 d.C., compôs uma obra com o nome de Coleção (Synagoge), que continha oito livros dos quais o primeiro e parte do segundo se perderam. No livro VII constam os dois teoremas, não demonstrados na referida obra [1].*

*Entretanto, atualmente, os leitores que queiram aprofundar seus conhecimentos acerca das demonstrações do 1º e 2º teoremas de Pappus - Guldin, realizadas pelo matemático escocês James Gregory, sugerimos o estudo da dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, do Professor RAUTENBERG, R. R. [14].*

## 1.8 Volume de um Sólido e Área de uma Superfície

Seguindo a metodologia apresentada em [6], podemos calcular o volume ( $V$ ) de um sólido de revolução e a área ( $A$ ) de uma superfície de revolução por meio de dois MODOS. A seguir, enunciaremos, detalhadamente, o 1º e 2º MODO.

### 1.8.1. Cálculo do volume de um sólido de revolução ( $V$ )

Entende-se por 1º MODO quando o volume do sólido de revolução for obtido por meio do Princípio de Cavalieri ou por intermédio de adição(ões)/supressão(ões) de volume(s) do(s) sólido(s) que compõe(m) o sólido de revolução primitivo completo. Para aplicarmos



este método, usamos as expressões dos volumes dos sólidos (cilindros, cones, tronco de cones, etc).

Adotamos por 2º MODO a cômputo do volume do sólido de revolução por meio do 1º teorema de Pappus - Guldin, assumindo  $\alpha = 2\pi$ , por intermédio da equação:

$$\boxed{V = 2\pi(S)(d)} \quad (1.3)$$

Em que:

( $V$ ) é o volume do sólido gerado;

( $S$ ) é a área da região (geratriz do sólido de revolução); e

( $d$ ) é a distância do centro de gravidade da geratriz ao eixo de revolução, conforme metodologia encontrada em [6].

### 1.8.2. Cálculo da área de uma superfície de revolução ( $A$ )

Entende-se por 1º MODO a obtenção da área da superfície de revolução via adição das áreas das superfícies que compõem a área total da superfície gerada pela revolução. Para isto, normalmente, usamos as expressões das áreas das superfícies dos sólidos (cilindros, cones, tronco de cones, etc).

Adotamos por 2º MODO a cômputo da área da superfície de revolução por meio do 2º teorema de Pappus - Guldin, assumindo  $\alpha = 2\pi$ , por intermédio da equação:

$$\boxed{A = 2\pi(l)(d)} \quad (1.4)$$

Em que:

( $A$ ) é a área da superfície gerada;

( $l$ ) é o comprimento ou perímetro da linha (geratriz da superfície de revolução); e

( $d$ ) é a distância do centro de gravidade da geratriz ao eixo de revolução [6].

Note que as equações empregadas no 2º MODO, tanto para o cálculo do volume do sólido de revolução quanto para o cálculo da área da superfície de revolução, tratam-se, respectivamente, da aplicação do 1º e 2º teoremas de Pappus - Guldin, com o ângulo de revolução igual à  $2\pi$ . Em geral, o 2º MODO, normalmente, não é conhecido e, por conseguinte, não é ensinado pelos docentes do ensino médio.

## Capítulo 2

# Os Principais Corpos Redondos no Ensino Médio

Neste capítulo, vamos definir e apresentar as fórmulas tradicionalmente utilizadas no cálculo do volume e da área da superfície dos principais corpos redondos (cilindro, cone, esfera e tronco de cone), todos estudados no ensino médio.

### 2.1 Cilindro

**Definição 5.** Considere dois planos,  $\alpha$  e  $\beta$ , distintos e paralelos, e um segmento de reta  $MN$ , com  $M$  pertencente a  $\alpha$  e  $N$  pertencente a  $\beta$ . Dado um círculo  $C$ , de centro  $O$  e raio  $R$ , contido em  $\alpha$ , chamamos cilindro circular (ou simplesmente cilindro) à reunião de todos os segmentos de reta, paralelos e congruentes ao segmento de reta  $MN$ , que unem um ponto do círculo  $C$  a um ponto de  $\beta$ . No caso de  $MN$  ser perpendicular a  $\alpha$ , o cilindro é reto, como se vê em [5].

Um *cilindro reto* é um sólido obtido pela revolução de um retângulo em torno de um eixo sobreposto por um de seus lados. Especificamente, um cilindro reto também pode ser obtido ao girar um retângulo em torno de uma reta que contém um de seus lados. Por isso, o cilindro circular reto pode ser chamado também cilindro de revolução, como se vê em [5].

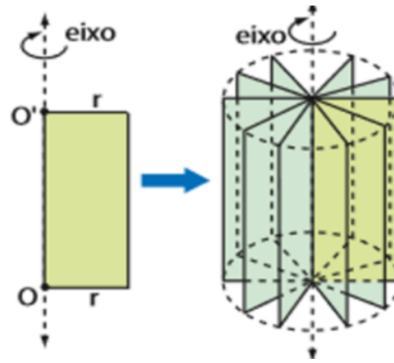


Figura 2.1: Cilindro de revolução

### 2.1.1. Volume de um cilindro

Para obtermos a fórmula do volume do cilindro, vamos usar o Princípio de Cavalieri. Dado um cilindro com base  $C$ , contida em um plano  $\alpha$ , vamos considerar um paralelepípedo retângulo  $P$ , também com base contida em  $\alpha$ , que tem área da base igual à área da base do cilindro e a altura igual à do cilindro. Cada plano  $\beta$ , paralelo  $\alpha$ , que secciona um dos sólidos, também secciona o outro, e as secções determinadas por  $\beta$  em cada um deles têm a mesma área de suas bases. Como área  $(\beta \cap C) = (\beta \cap P) = A_b$ , temos pelo Princípio de Cavalieri que o volume do cilindro é igual ao volume do paralelepípedo retângulo [5].

Como o volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto da área da base pela altura e como a base do cilindro é um círculo de raio  $R$ , temos:

$$\boxed{V = \pi R^2 h} \quad (2.1)$$

### 2.1.2. Área da superfície de um cilindro

Para obtermos a área  $A$  da superfície do cilindro, devemos notar que a superfície do cilindro é formada por duas partes planas, que são as bases, e uma parte não plana, arredondada, que é a superfície lateral. Daí, a superfície total do cilindro é formada pela superfície lateral mais as superfícies das duas bases. Portanto,

$$\boxed{A = A_l + A_b = 2\pi r(h + r)}$$

Em que:

$$A_b = 2\pi r^2 \quad \text{e} \quad A_l = 2\pi r h.$$

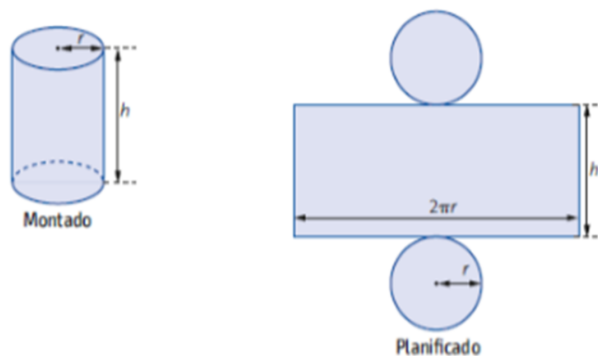


Figura 2.2: Cilindro montado e planificado

## 2.2 Cone

**Definição 6.** Vamos considerar um plano  $\alpha$ , um círculo  $\beta$  nesse plano e um ponto  $P \notin \alpha$ . A reunião de todos os segmentos de reta que ligam cada ponto de  $\beta$  ao ponto  $P$  é um sólido chamado cone circular. Se o eixo é perpendicular à base, o cone denomina-se cone reto. Se o eixo é oblíquo à base, o cone é chamado cone oblíquo. No cone reto, cada segmento de reta que liga o vértice a um ponto da circunferência da base é chamado geratriz do cone [5].

Um *cone reto* pode ser obtido girando-se uma região triangular, cujo contorno é um triângulo retângulo em torno de uma reta que contém um dos catetos. Por esse motivo, o cone reto é considerado um sólido ou corpo de revolução e é chamado *cone de revolução*.

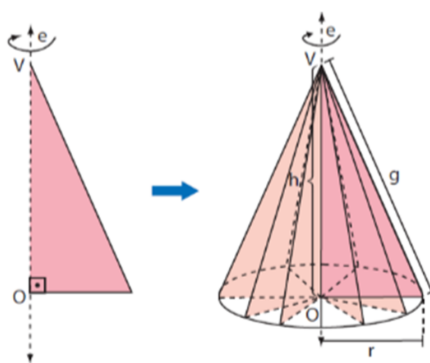


Figura 2.3: Cone de revolução

### 2.2.1. Volume de um cone

Mais uma vez usaremos o Princípio de Cavalieri. Consideramos um cone de altura  $H$  e base de área  $A$ , contida em um plano horizontal  $\alpha$ . Também consideramos uma pirâmide

de altura  $H$  e base de área  $A$ , contida em  $\alpha$ . Se um plano horizontal  $\beta$ , com distância  $h$  dos vértices, secciona os dois sólidos, determinando regiões planas de áreas  $A_1$  e  $A_2$ , temos: pelo Princípio de Cavalieri que o cone e a pirâmide iniciais têm o mesmo volume. Como já sabemos o volume da pirâmide ( $V = \frac{AH}{3}$ ), o volume do cone também é o mesmo. Podemos comprovar isso experimentalmente: para encher de água uma vasilha em forma de cilindro, usando como medida um recipiente em forma de cone, de mesma área da base e mesma altura do cilindro, será necessário usar o recipiente três vezes [5]:

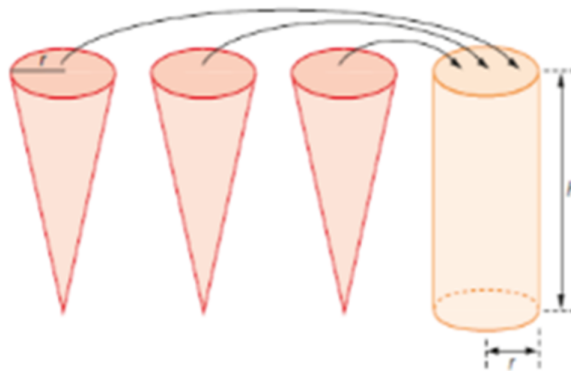


Figura 2.4: Relação entre cilindro e cones

Portanto, o volume do cone é dado pela fórmula:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

### 2.2.2. Área da superfície de um cone

A superfície do cone é formada por uma parte plana, o círculo, que é a sua base, e uma parte não plana, curva, arredondada, que é a sua superfície lateral.

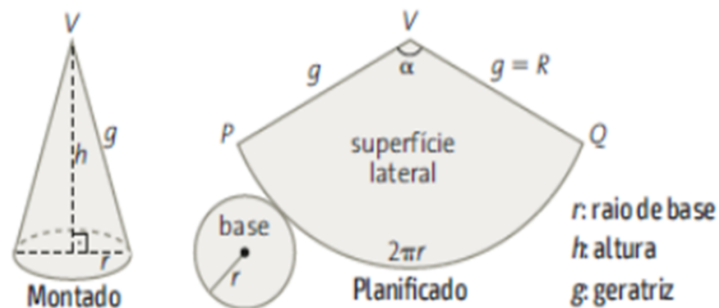


Figura 2.5: Área da superfície de um cone reto

A superfície total  $A_c$  do cone reto é formada pela superfície lateral (um setor circular) mais a superfície da base (um círculo), isto é,

$$(A_c) = (A_{lc}) + (A_{bc}).$$

Inicialmente, calculamos a área do setor  $A_{bc}$ . Como a área da base é a área do círculo de raio  $r$  temos:

$$A_{bc} = \pi r^2.$$

Uma vez que a área de um setor circular é proporcional à área do círculo correspondente, segue que:

$$\frac{A_{setor}}{\pi R^2} = \frac{\alpha(\text{graus})}{360(\text{graus})} = \frac{\alpha(\text{radianos})}{2\pi} = \frac{l}{2\pi R}.$$

Daí,

$$A_{setor} = \frac{l\pi R^2}{2\pi R}.$$

Nesse caso temos  $l = 2\pi r$  e  $R = g$ . Logo,  $A_{lc} = \pi rg$ . Portanto, a área da superfície total do cone reto é

$$\boxed{A_c = \pi r(g + r)} \quad (2.2)$$

## 2.3 Esfera

**Definição 7.** Consideremos um ponto  $O$  e um número real positivo  $r$  qualquer. A esfera de centro  $O$  e raio de medida  $r$  é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a  $r$  do ponto  $O$ .

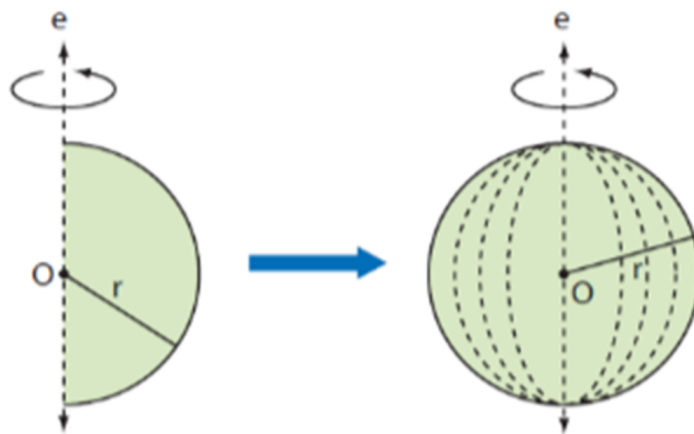
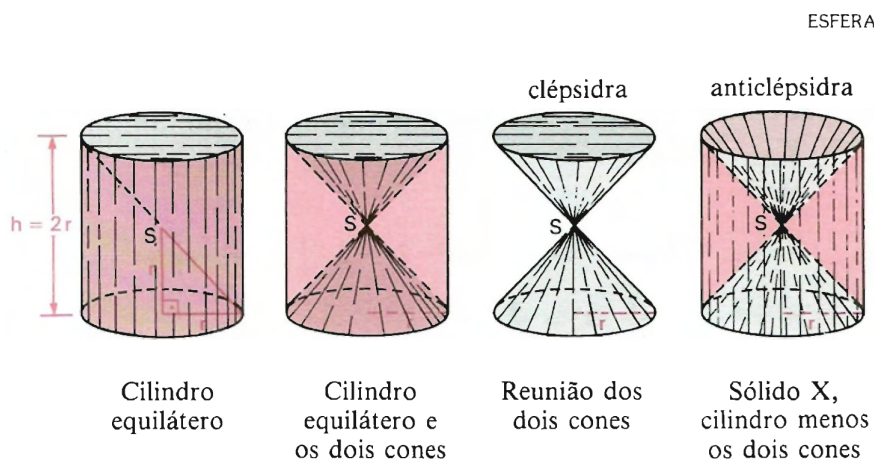


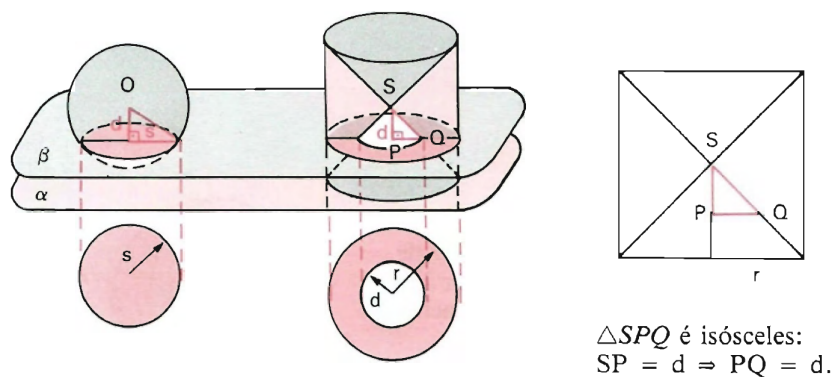
Figura 2.6: Esfera de revolução

### 2.3.1. Volume da esfera - Princípio de Cavalieri

Consideremos um cilindro equilátero de raio da base  $r$  (a altura é  $2r$ ) e seja  $S$  o ponto médio do eixo do cilindro. Tomemos dois cones, tendo como bases as do cilindro e  $S$  como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado clépsidra). O sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido  $X$  (este sólido é chamado de anticlépsidra), conforme [6].



Consideremos agora uma esfera de raio  $r$  e o sólido  $X$  descrito acima.



Suponhamos que a esfera seja tangente ao plano  $\alpha$ , que o cilindro (que originou o sólido  $X$ ) tenha base em  $\alpha$  e que os dois sólidos, esfera e sólido  $X$ , estejam num mesmo semiespaço determinado por  $\alpha$ . Qualquer plano secante  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , distando ( $d$ ) do centro da esfera ( e do vértice do sólido  $X$ ), também secciona o sólido  $X$ . Daí, temos:

$$\text{Área da secção na esfera (círculo)} = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2).$$

$$\text{Área da secção no sólido X (coroa circular)} = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2).$$

As áreas das secções na esfera e no sólido  $X$  são iguais; então, pelo Princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido  $X$  têm volumes iguais, isto é,  $V_e = V_{\text{sólido X}}$ .

Desde que  $V_e = V_{\text{sólido}X} = V_{\text{cilindro}} - 2(V_{\text{cone}})$ , segue que

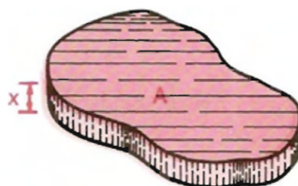
$$V_e = \pi(r^2)(2r) - (2) \left(\frac{1}{3}\right) (\pi)(r^2)(r) = (\pi)(r^2)(2r) - \left(\frac{2}{3}\right) (\pi)(r^3).$$

O volume de uma esfera de raio  $r$  é

$$\boxed{V_e = \frac{4}{3}\pi R^3} \quad (2.3)$$

### 2.3.2. Área da superfície da esfera - Noção intuitiva

Se considerarmos uma superfície limitada de área  $A$  e sobre ela formarmos um sólido de altura  $x$  de bases paralelas, teremos, indicando com  $V$ , o volume do sólido (prismas reunidos com cilindros) de base  $A$  e altura  $x$ , cujo volume é  $V = Ax$ .

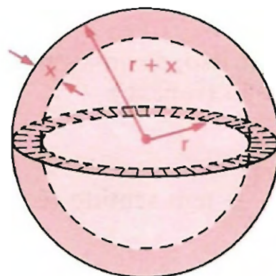


esta última igualdade é verificada para qualquer  $x$ . Intuitivamente, uma superfície imaginada como uma placa sólida de espessura infinitamente pequena.

Por isso, se uma placa sólida de volume  $V$ , e espessura  $x$  for tal que a expressão  $\frac{V}{x}$  tem sentido é definida para  $x = 0$ , então  $\frac{V}{x}$  (para  $x = 0$ ) será definida como área da placa.

Assim agindo, podemos deduzir as expressões das área: lateral do cilindro, superfície esférica, lateral do cone. Nestes casos, o artifício que acima procuramos generalizar é mais real e simples, como veremos a seguir.

Para a área da superfície esférica, temos:



$$V = \frac{4}{3}\pi(r+x)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi[(r+x)^3 - r^3] = \frac{4}{3}\pi[3r^2x + 3rx^2 + x^3] = \frac{4}{3}\pi x(3r^2 + 3rx + x^2),$$

como  $V_e = Ax$ , segue

$$A_e x = \frac{4}{3}\pi x(3r^2 + 3rx + x^2) \implies A_e = \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3rx + x^2). \text{ Então, para } x = 0, \text{ vem:}$$



$$A_e = \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3r(0) + (0)^2] =$$

$$\boxed{A_e = 4\pi r^2} \quad (2.4)$$

## 2.4 Tronco de Cone

Apresentamos nesta seção, respectivamente, o volume e a área da superfície de um tronco de cone de bases paralelas.

### 2.4.1. Volume de um tronco de cone

Para a dedução da fórmula que dá o volume do tronco de cone de bases paralelas [6], vamos fixar algumas notações:

- $R$  é o raio da base maior;
- $r$  é o raio da base menor;
- $h$  é a altura;
- $V_1$  é o volume do cone retirado do cone primitivo;
- $V_2$  é volume do cone primitivo;
- $V_t$  volume do tronco de cone.

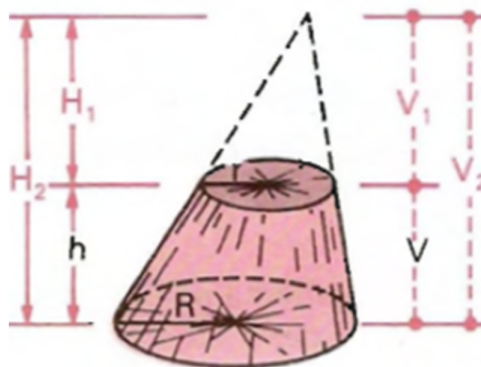


Figura 2.7: Tronco de cone

Em vista da figura acima, temos:

$$V_t = V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2(H_2) - \frac{1}{3}\pi r^2(H_1)$$

Substituindo  $H_2$  por  $(H_1 + h)$ , obteremos:

$$V_t = \frac{\pi}{3}[R^2(H_1 + h) - r^2(H_1)] \quad (2.5)$$

No que segue, expressamos  $H_1$  em função dos raios e da altura:

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{(H_1 + h)}{H_1} = \frac{R}{r} \implies H_1 = \frac{hr}{R - r}.$$

Substituindo  $H_1$  em (2.5) e após algumas manipulações algébricas, obteremos:

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{\pi}{3} \left[ R^2h + (R^2 - r^2)\frac{hr}{(R - r)} \right] \\ &= \frac{\pi h}{3} \left[ R^2 + (R + r)(R - r)\frac{r}{(R - r)} \right] \\ &= \frac{\pi h}{3} [R^2 + (R + r)r] \\ &\boxed{V_t = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 2.4.2. Área da superfície de um tronco de cone

Para determinarmos a área  $A_t$  da superfície de tronco de cone de bases paralelas, precisamos encontrar a sua área da base  $A_b$  e sua área lateral  $A_l$ . Façamos isto, nesta ordem, de acordo com a metodologia de [6]. Fixemos as seguintes notações:

- $R$  é o raio da base maior;
- $r$  é o raio da base menor;
- $g$  é a geratriz do tronco.

Para calcularmos a área da base de um tronco de cone ( $A_{bt}$ ), basta adicionar as áreas das duas circunferências de raios  $R$  e  $r$ . Logo,

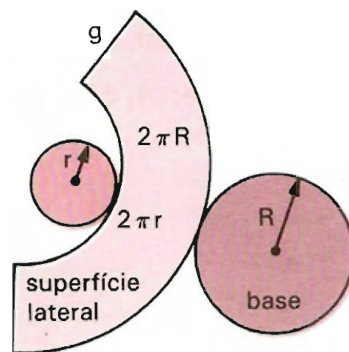
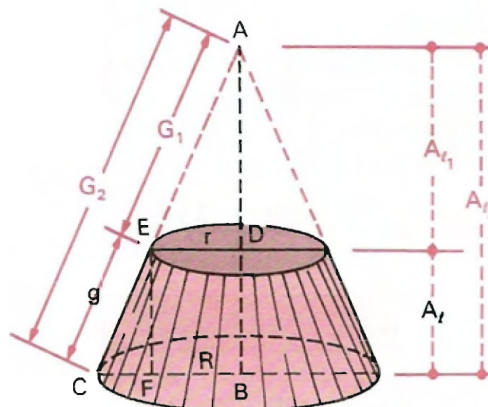


Figura 2.8: Tronco de cone planificado

$$A_{bt} = \pi(R^2 + r^2). \tag{2.7}$$

Para a área lateral do tronco de cone procedemos da seguinte maneira.



Sejam  $A_{lt_1}$  e  $A_{lt_2}$  as áreas laterais, respectivamente, do cone destacado e do cone primitivo. Então:

$$\begin{aligned} A_{lt} &= (A_{lt_2}) - (A_{lt_1}) = (\pi R G_2) - (\pi r G_1) \\ &= \pi[Rg + (R - r)G_1] \end{aligned} \tag{2.8}$$

Temos, por definição, que  $A_t = A_{bt} + A_{lt}$ , e em vista de (2.7) e (2.8), obtemos:

$$\boxed{A_t = \pi[R(g + R) + r(g + r)]} \tag{2.9}$$

## Capítulo 3

# Aplicações dos Teoremas de Pappus - Guldin

Neste capítulo apresentamos uma outra metodologia para demonstrar as fórmulas apresentadas no capítulo anterior. Isto é, aplicaremos o 1º e 2º teoremas de Pappus - Guldin, método dado por 2º MODO para deduzir as fórmulas do volume dos sólidos de revolução e da área das superfícies de revolução, especificamente, dos corpos redondos (cilindro, cone, esfera e tronco de cone).

Para isso, vamos padronizar a aplicação do 2º MODO, visando a evitar repetições desnecessárias, da seguinte maneira: primeiro, apresentamos a construção geométrica espacial de cada corpo redondo; em seguida, determinamos as constantes necessárias à aplicação do 1º e 2º teoremas de Pappus - Guldin, recorde que o ângulo de revolução foi fixado em  $2\pi$  radianos.

Para as construções geométricas espaciais, utilizamos as seguintes notações: (OX) eixo das abscissas (vermelho), (OY) eixo das ordenadas (verde) e (OZ) eixo das cotas (azul).

### 3.1 Volume do Cilindro

Para demonstrarmos a fórmula do volume de um cilindro através do 2º MODO, sem perda de generalidade, seguimos a padronização estabelecida na introdução deste capítulo.

### 3.1.1. Construção geométrica do volume do cilindro

Apresentamos uma visão da construção geométrica espacial do volume do cilindro por meio da revolução completa de um retângulo  $ABCD$  em torno do eixo de revolução  $(0Z)$ . Tomemos a área de um retângulo  $ABCD$  qualquer, de forma que dois de seus lados  $AB$  e  $AD$  fiquem sobrepostos, respectivamente, aos eixos coordenados  $(0Z)$  e  $(0X)$ .

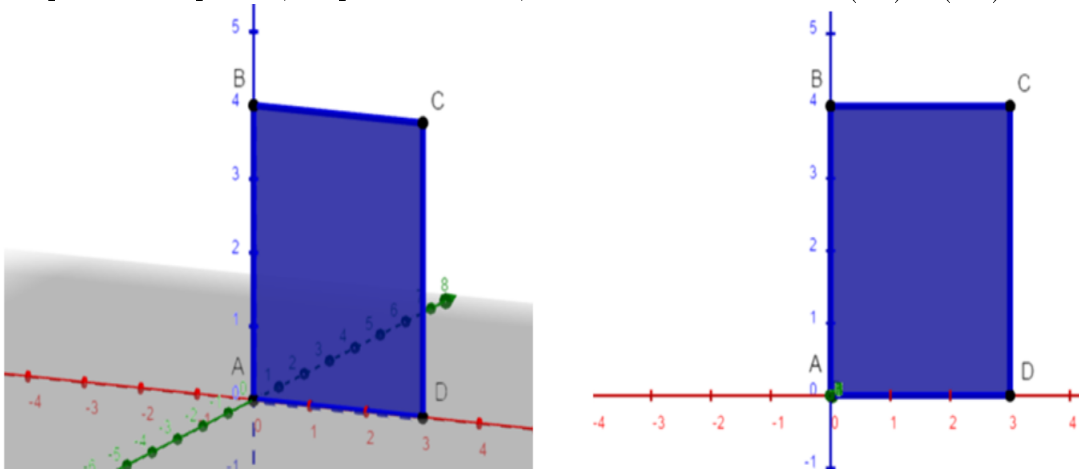


Figura 3.1: Área da superfície do retângulo  $ABCD$

Mantendo o lado  $AB$  sobreposto ao eixo de revolução  $(0Z)$ , realizamos a revolução completa da área do retângulo  $ABCD$  em torno de  $(0Z)$ . Note que a reunião das infinitas áreas dos retângulos congruentes ao retângulo  $ABCD$ , após a revolução completa em torno do eixo  $(0Z)$ , gera o volume do cilindro ilustrado abaixo:

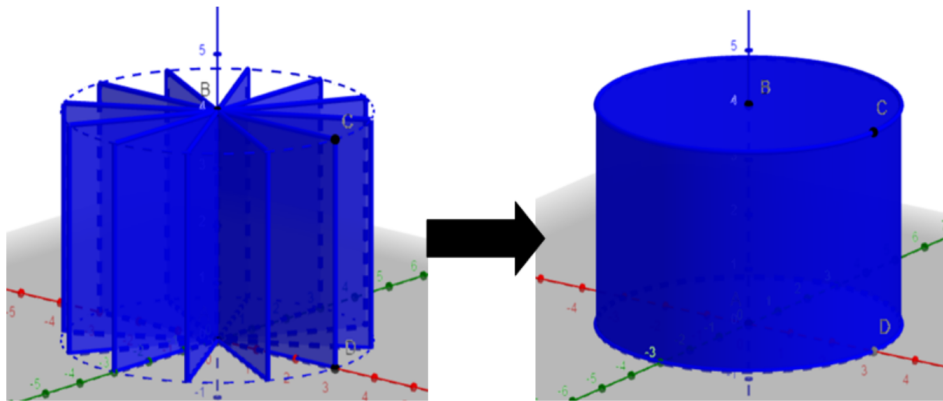
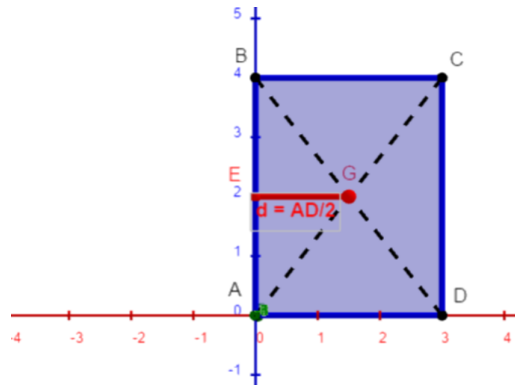


Figura 3.2: Revolução da área do retângulo  $ABCD$  em torno do eixo  $(0Z)$

### 3.1.2. Obtenção das 2(duas) medidas do (V)

**1ª medida:** distância do centro de gravidade do retângulo ABCD ao eixo de revolução (0Z)

Inicialmente, admitimos conhecido que o centro de gravidade de qualquer retângulo é o encontro de suas diagonais.



Note que  $GE$  é a base média do triângulo retângulo  $ABD$ , uma vez que  $G$  é ponto médio de  $BD$  e  $GE$  é paralelo a  $AD$ , daí, podemos concluir que  $GE = \frac{AD}{2}$ , conforme a figura acima.

Denotando  $GE$  por  $d$ , concluímos que a distância do centro de gravidade do retângulo ABCD ao eixo de revolução (0Z) é:

$$d = \left( \frac{AD}{2} \right).$$

**2ª medida:** obtenção da geratriz - área do retângulo ABCD

Para calcularmos a geratriz do volume do cilindro (área do retângulo ABCD), realizamos o produto da medida de sua base pela medida de sua altura.

Considerando a base  $AD$  e a altura  $AB$ , segue:

$$S_{(ABCD)} = (AD)(AB).$$

### 3.1.3. Volume do cilindro pelo 2º MODO

*Demonstração.* Em vista do 1º teorema de Pappus - Guldin, temos:

$$V = 2\pi(S)(d) = 2\pi(AD)(AB) \left( \frac{AD}{2} \right) = \pi(AB)(AD)^2$$

Note que  $AD = R$  (raio do cilindro) e que  $AB = h$  (altura do cilindro), logo:

$$\boxed{V = \pi R^2 h} \quad (3.1)$$

□

## 3.2 Área da Superfície do Cilindro

Para demonstrarmos a fórmula da área da superfície de um cilindro, por intermédio do 2º MODO, vamos obter, separadamente, a área ( $A_b$ ) da base do cilindro e a área ( $A_l$ ) lateral do cilindro. Para isso, sem perda de generalidade, tomamos o perímetro de um retângulo ABCD qualquer, de forma que seus lados  $AB$  e  $AD$  fiquem sobrepostos, respectivamente, aos eixos coordenados ( $0Z$ ) e ( $0X$ ), seguindo o previsto na introdução deste capítulo, temos:

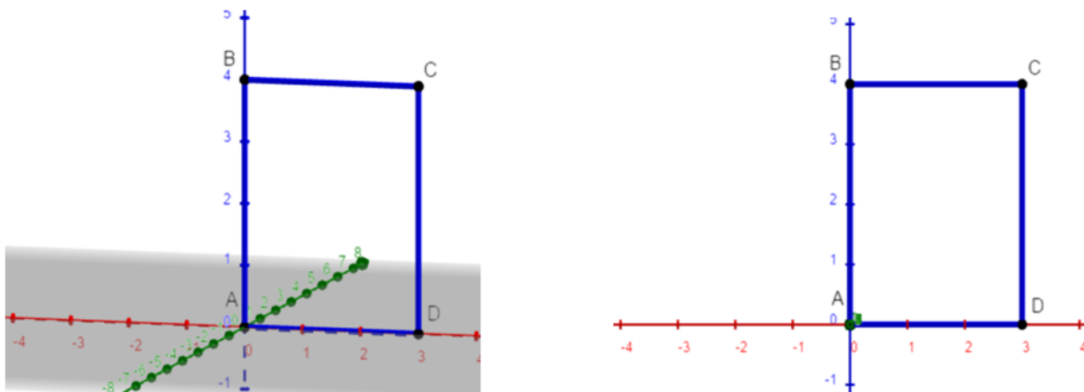


Figura 3.3: Perímetro do retângulo ABCD

Já que o lado  $AB$  está sobreposto ao eixo de revolução ( $0Z$ ), ele deve ser desconsiderado, uma vez que sua revolução nada formará.

### 3.2.1. Construção geométrica da superfície da base do cilindro

Para a construção geométrica da superfície da base de um cilindro, considera-se a revolução completa dos lados  $AD$  e  $BC$  em torno do eixo de revolução ( $0Z$ ). Note que a reunião dos infinitos segmentos congruentes à  $AD$  e  $BC$ , após a revolução completa em torno do eixo ( $0Z$ ), gera a área da superfície das bases do cilindro ( $A_{b1}$ ) e ( $A_{b2}$ ), conforme ilustrado abaixo.

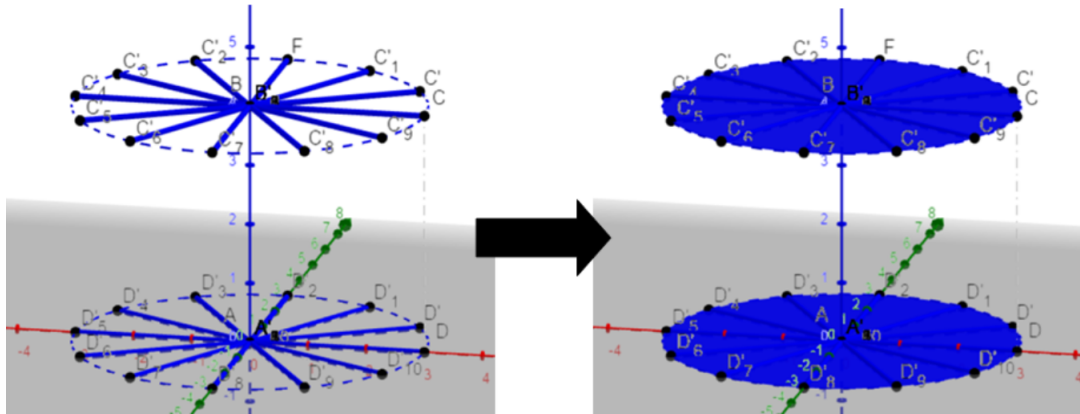


Figura 3.4: Revolução dos segmentos  $AD$  e  $BC$  em torno do eixo  $(OZ)$

### 3.2.2. Obtenção das 2(duas) medidas da $(A_b)$

**1ª medida:** distância dos centros de gravidade dos segmentos  $AD$  e  $BC$  ao eixo de revolução  $(OZ)$

Inicialmente, devemos recordar que o centros de gravidade dos segmentos de reta  $AD$  e  $BC$ , ambos de densidade uniforme, são os seus respectivos pontos médios  $G$  e  $H$ .

Denotando  $AG = BH$  por  $d$ , concluímos que as distâncias dos centros de gravidade dos segmentos  $AD$  e  $BC$  ao eixo de revolução  $(OZ)$  são:

$$AG = BH = \frac{AD}{2} \implies d = \left(\frac{AD}{2}\right) = \left(\frac{BC}{2}\right).$$

**2ª medida:** obtenção das geratrizes - comprimentos dos segmentos  $AD$  e  $BC$

Para calcularmos o comprimento da geratrizes (segmentos  $AD$  e  $BC$ ), nada temos a fazer, pois  $AD = BC$  são as bases do retângulo  $ABCD$ . Logo,

$$l = (AD) = (BC).$$

### 3.2.3. Área da base do cilindro pelo 2º MODO

Note que as áreas das superfícies geradas pela revolução de  $AD$  e  $BC$  são congruentes, por isso, vamos apresentar a demonstração da área da superfície gerada pela revolução de  $AD$  e, uma vez obtida, dobramos a expressão encontrada para obtermos a área da base do cilindro.

Em vista do 2º teorema de Pappus - Guldin, temos:



$$A_{b1} = 2\pi(l)(d) = 2\pi(AD) \left( \frac{AD}{2} \right) = \pi(AD)^2.$$

Considerando  $A_{b2} = A_{b1}$ , segue:

$A_b = A_{b1} + A_{b2} = \pi(AD)^2 + \pi(AD)^2 = 2\pi(AD)^2 = 2\pi R^2$ , sendo  $R$  o raio das bases do cilindro.

Portanto, temos:

$$\boxed{A_b = 2\pi R^2} \quad (3.2)$$

### 3.2.4. Construção geométrica da superfície lateral do cilindro

Obtemos a construção geométrica da superfície lateral de um cilindro por intermédio da revolução completa do lado  $CD$  em torno do eixo de revolução  $(0Z)$ . Note que a reunião dos infinitos segmentos congruentes à  $CD$ , após a revolução completa em torno do eixo  $(0Z)$ , gera a superfície lateral do cilindro  $(A_l)$ , conforme as figuras a seguir.

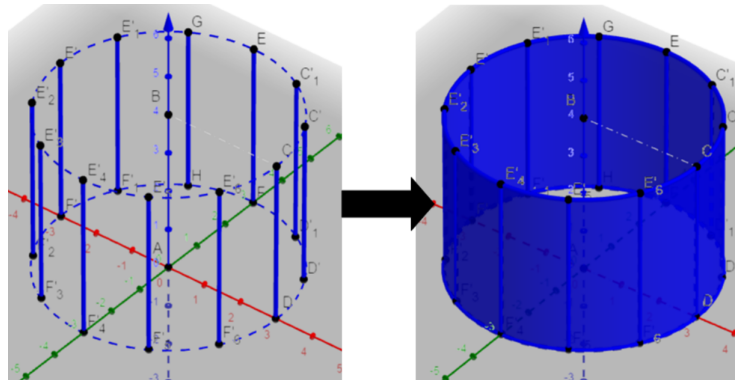
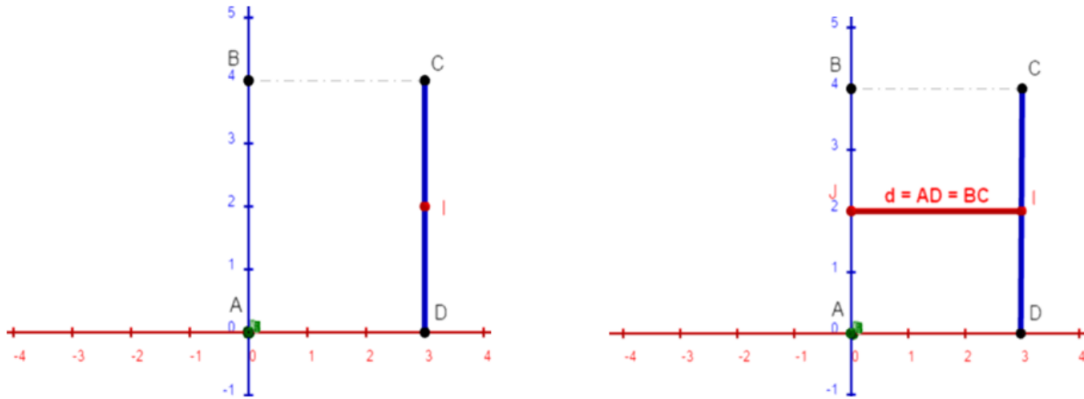


Figura 3.5: Revolução do segmento  $CD$  em torno do eixo  $(0Z)$

### 3.2.5. Obtenção das 2(duas) medidas da $(A_l)$

**1ª medida:** distância do centro de gravidade do segmento  $CD$  ao eixo de revolução  $(0Z)$

Determinamos o centro de gravidade de  $CD$ , através do seu ponto médio  $(I)$ . Tracemos, partindo de  $I$ , a reta perpendicular ao eixo de revolução  $(0Z)$ , conforme mostra as figuras a seguir.



Para determinarmos a distância do ponto médio (I) ao eixo de revolução (0Z), nada temos a fazer, pois  $IJ = AD = BC$ , conforme ilustra a figura acima.

Portanto,

$$d = (AD).$$

### 2ª medida: obtenção da geratriz - comprimento do segmento $CD$

Nada temos a fazer para obtermos o comprimento do segmento  $CD$ , uma vez que é fácil ver que  $AB = CD$ . Assim,

$$l = (AB) = (CD).$$

### 3.2.6. Área lateral do cilindro pelo 2º MODO

Tomando o 2º teorema de Pappus - Guldin, temos

$$A_l = 2\pi(l)(d) = 2\pi(AD)(CD), \text{ como } AD = R \text{ e } AB = h, \text{ segue:}$$

$$\boxed{A_l = 2\pi Rh} \quad (3.3)$$

### 3.2.7. Área total da superfície do cilindro pelo 2º MODO

*Demonstração.* Tendo determinado as fórmulas da  $(A_b)$  e da  $(A_l)$ , podemos concluir a demonstração, pois temos, por definição, que  $A = A_b + A_l$ , substituindo (3.2) e (3.3) em  $A$ , temos:

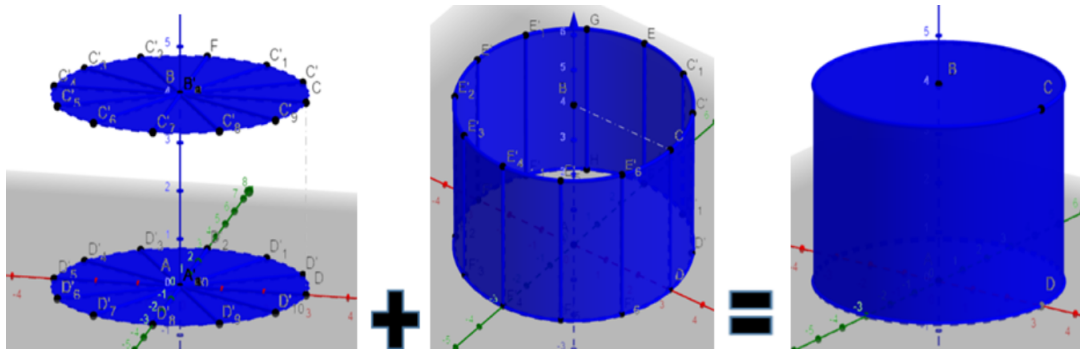


Figura 3.6: Área total do cilindro

$$A = 2\pi R(R + h) \quad (3.4)$$

□

### 3.3 Volume do Cone

Para demonstrarmos a fórmula do volume de um cone através do 2º MODO, sem perda de generalidade, seguimos a padronização estabelecida na introdução deste capítulo.

#### 3.3.1. Construção geométrica do volume do cone

Apresentamos uma visão da construção geométrica espacial do volume do cone por meio da revolução completa de um triângulo retângulo ABC em torno do eixo de revolução (0Z).

Tomemos a área de um triângulo ABC qualquer, retângulo em A, de forma que seus catetos AB e AC fiquem sobrepostos, respectivamente, aos eixos coordenados (0Z) e (0X).

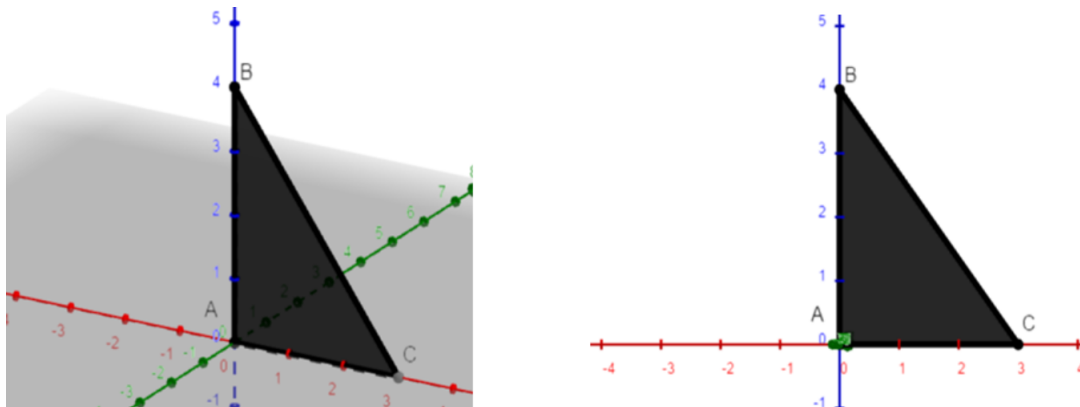


Figura 3.7: Área da superfície do triângulo retângulo ABC

Mantendo o cateto  $AB$  sobreposto ao eixo  $(OZ)$ , realizemos a revolução completa da área do triângulo retângulo  $ABC$  em torno do eixo  $(OZ)$ . Note que a reunião das infinitas áreas dos triângulos retângulos congruentes ao triângulo retângulo  $ABC$ , após a revolução completa em torno do eixo  $(OZ)$ , gera o volume do cone ilustrado a seguir.

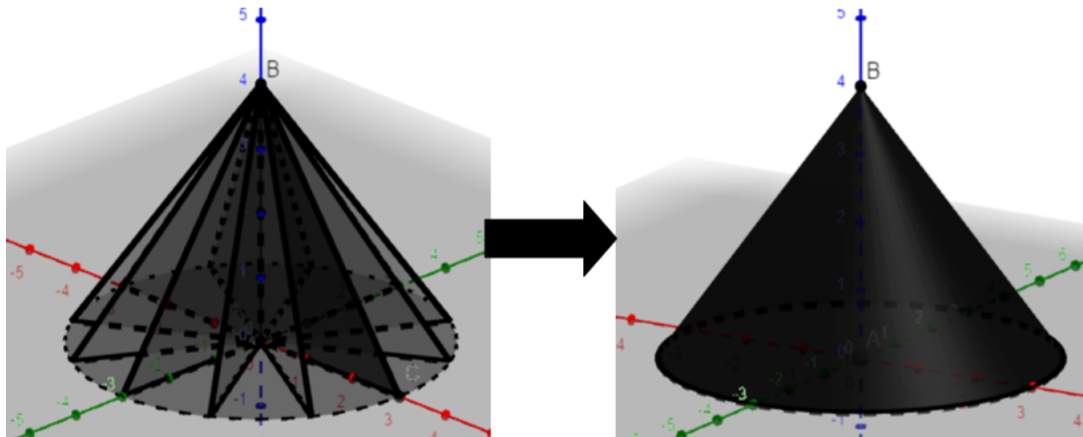


Figura 3.8: Revolução da área do triângulo retângulo  $ABC$  em torno do eixo  $(OZ)$

### 3.3.2. Obtenção das *2(duas) medidas* do $(V_c)$

*1ª medida:* distância do centro de gravidade do triângulo retângulo  $ABC$  ao eixo  $(OZ)$

Vamos assumir, por um momento, que o centro de gravidade de qualquer triângulo é o seu baricentro (encontro de suas medianas). Em seguida determinemos a distância  $(d)$  do baricentro  $(G)$  do triângulo  $ABC$  ao eixo de rotação  $(OZ)$ . Para isso, partindo dele, tracemos uma perpendicular ao eixo de revolução  $(OZ)$ , conforme ilustra a figura abaixo.

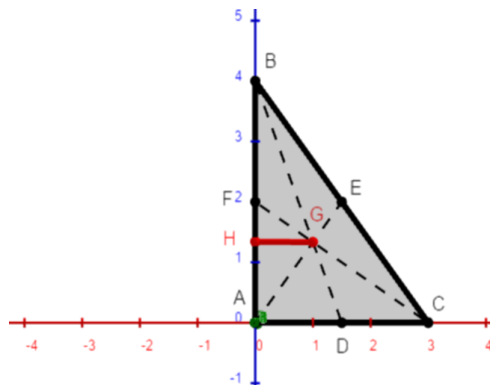


Figura 3.9: Distância de  $G$  ao eixo  $(OZ)$

Seja  $BC = g$  e note que a hipotenusa  $BC$  do triângulo retângulo  $ABC$  é igual ao

diâmetro do círculo que o circunscreve. Como E é ponto médio de  $BC$ , concluímos que  $AE$  é mediana e raio desse círculo, logo  $AE = \frac{g}{2}$ .

Além disso,  $AE$  divide o triângulo retângulo  $(ABC)$  em dois triângulos isósceles  $(ABE)$  e  $(ACE)$ .

✓ A mediana relativa à hipotenusa em um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa [7], conforme mostra a figura abaixo.

✓ Sabemos que o baricentro (G) divide as medianas de um triângulo na razão de 2 : 1, conforme mostra a figura abaixo.

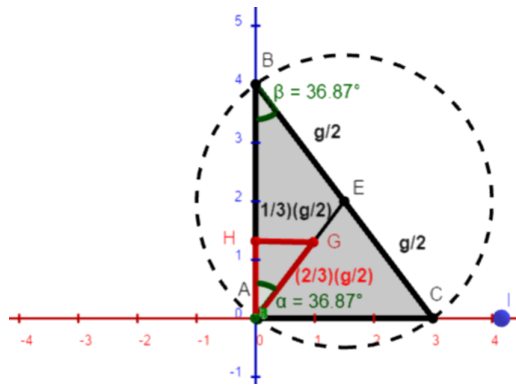


Figura 3.10: Semelhança entre os triângulos AGH e ABC

Logo, podemos afirmar que

$$AG = \frac{2}{3} (AE), \text{ substituindo } AE = \frac{g}{2}, \text{ temos } AG = \frac{g}{3}.$$

Agora, traçando uma perpendicular partindo de (G) ao eixo  $(OZ)$ , determinamos o segmento  $GH$  e, conseqüentemente, o triângulo retângulo  $AGH$ , como os ângulos  $\hat{GAH}$  e  $\hat{ABE}$  são congruentes, temos:  $\text{sen}(\hat{GAH}) = \text{sen}(\hat{ABE})$ . Logo,

$$\frac{GH}{AG} = \frac{AC}{BC} \implies \frac{d}{\left(\frac{g}{3}\right)} = \frac{AC}{g} \implies d = \left(\frac{AC}{3}\right).$$

### 2ª medida: obtenção da geratriz - área do triângulo retângulo ABC

Para calcularmos a geratriz do volume do cone (área do triângulo retângulo  $S_{ABC}$ ), calculamos o semiproduto de seus catetos, temos:

$$S_{ABC} = \frac{(AC)(AB)}{2}.$$

### 3.3.3. Volume do cone pelo 2º MODO

*Demonstração.* Em vista do 1º teorema de Pappus - Guldin, temos:

$$\begin{aligned} V_c &= 2\pi(S)(d) \\ &= 2\pi \left( \frac{AC \times AB}{2} \right) \left( \frac{AC}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 h. \end{aligned}$$

onde  $AC$  e  $AB$  são, respectivamente, o raio da base e a altura do cone.

$$V_c = \frac{1}{3}\pi R^2 h \quad (3.5)$$

□

## 3.4 Área da Superfície do Cone

Para a fórmula da área da superfície de um cone pelo 2º MODO, tomemos, sem perda de generalidade, um triângulo retângulo  $ABC$  qualquer, de forma que seus catetos  $AB$  e  $AC$  fiquem sobrepostos, respectivamente, aos eixos coordenados  $(0Z)$  e  $(0X)$ .

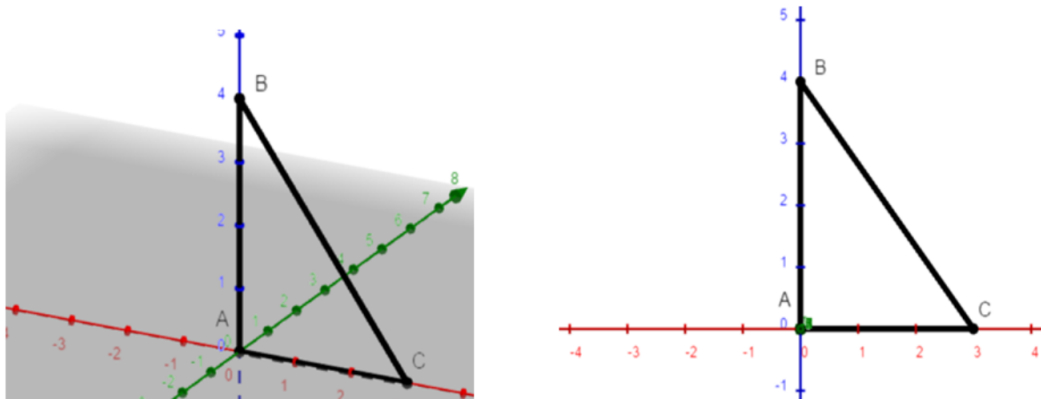


Figura 3.11: Perímetro do triângulo retângulo  $ABC$

Vamos realizar a revolução completa dos lados  $AC$  e  $BC$  do triângulo retângulo  $ABC$ , separadamente, em torno do eixo  $(0Z)$ , para obtermos, respectivamente, a sua área da base ( $A_{bc}$ ) e a sua área lateral ( $A_{lc}$ ).

### 3.4.1. Construção geométrica da superfície da base do cone

Mantendo o lado  $AB$  sobreposto ao eixo  $(0Z)$ , realizamos a revolução completa do lado  $AC$  em torno do eixo  $(0Z)$ , conforme as figuras abaixo. Note que a reunião dos infinitos segmentos congruentes à  $AC$ , após a revolução completa em torno do eixo  $(0Z)$ , gera a área da base do cone  $(A_{bc})$ , conforme figura abaixo.

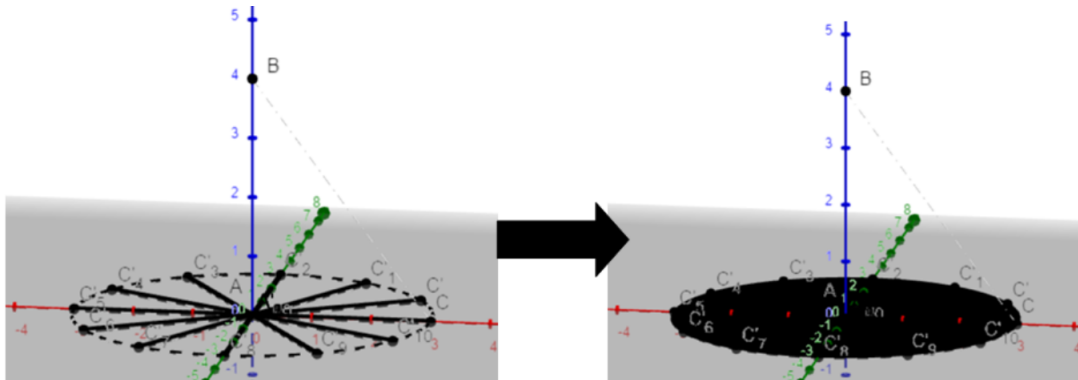
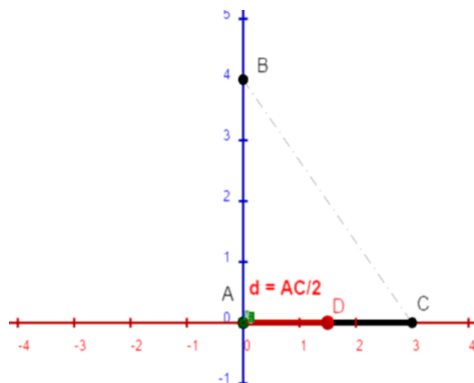


Figura 3.12: Revolução do segmento  $AC$  em torno do eixo  $(0Z)$

### 3.4.2. Obtenção das 2(duas) medidas da $(A_{bc})$

**1ª medida:** distância do centro de gravidade do cateto  $AC$  ao eixo de revolução  $(0Z)$

Determinamos o centro de gravidade de  $AC$ , através do seu ponto médio  $(D)$ , conforme mostra a figura a seguir:



Podemos afirmar que  $AD = \frac{AC}{2}$ , como  $AD = d$ , podemos concluir que:

$$d = \left( \frac{AC}{2} \right).$$

*2ª medida:* obtenção da geratriz - comprimento do segmento  $AC$

Para calcularmos o comprimento do segmento  $AC$ , nada temos a fazer, pois  $AC$  é o cateto do triângulo retângulo  $ABC$ . Podemos afirmar, sem perda de generalidade, que:

$$l = (AC).$$

### 3.4.3. Área da base do cone pelo 2º MODO

Em vista do 2º teorema de Pappus - Guldin, temos:

$$A_{bc} = 2\pi(l)(d) = 2\pi(AC) \left( \frac{AC}{2} \right) = (AC)^2\pi$$

Note que  $AC = R$  (raio da base do cone), logo

$$\boxed{A_{bc} = \pi R^2} \quad (3.6)$$

### 3.4.4. Construção geométrica da superfície lateral do cone

Mantendo o lado  $AB$  sobreposto ao eixo  $(0Z)$ , realizemos a revolução completa do lado  $BC$  em torno do eixo  $(0Z)$ . Perceba que a reunião dos infinitos segmentos congruentes à  $BC$ , após a revolução completa em torno do mesmo eixo, gera a superfície lateral do cone ( $A_{lc}$ ), conforme ilustrado abaixo.

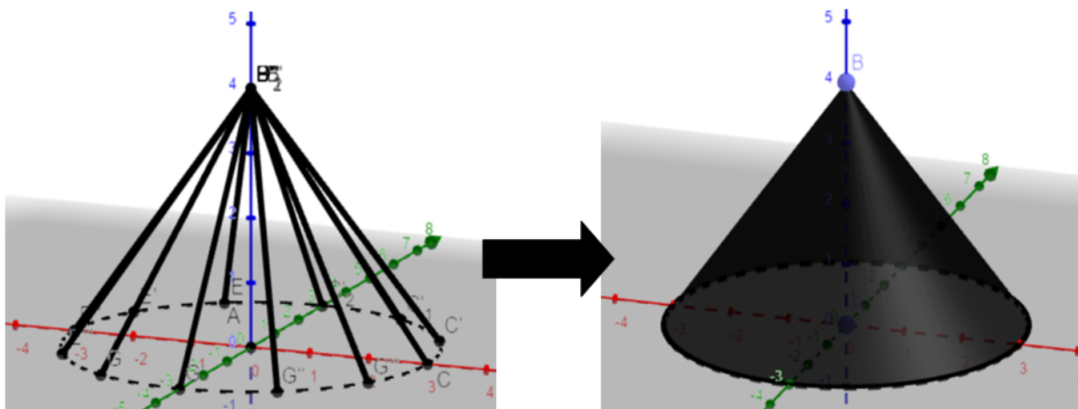


Figura 3.13: Revolução do segmento  $BC$  em torno do eixo  $(0Z)$



### 3.4.5. Obtenção das 2(duas) medidas da ( $A_{lc}$ )

**1ª medida:** distância do centro de gravidade do segmento  $BC$  ao eixo de revolução ( $OZ$ )

Determinamos o centro de gravidade de  $BC$ , através do seu ponto médio ( $E$ ), traçamos, partindo de  $E$  uma a reta perpendicular ao eixo de revolução ( $OZ$ ).

Note que o segmento  $EF$  é a base média do triângulo retângulo  $ABC$ . Logo,  $EF = \frac{AC}{2}$ , como  $d = EF$ . Assim, temos:

$$d = \left( \frac{AC}{2} \right).$$

**2ª medida:** obtenção da geratriz - comprimento do segmento  $BC$

Para calcularmos o comprimento da geratriz da área lateral do cone (segmento  $BC$ ), basta observarmos que  $BC$  é a hipotenusa de um triângulo retângulo  $ABC$ , aplicando Pitágoras, temos:

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto}')^2 \quad (3.7)$$

Logo,  $BC^2 = AC^2 + AB^2 \implies BC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2}$ .

Para fins de aplicação, consideremos  $BC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2} = g$ , simplesmente para facilitar os cálculos. Denotemos  $g$  a geratriz do cone.

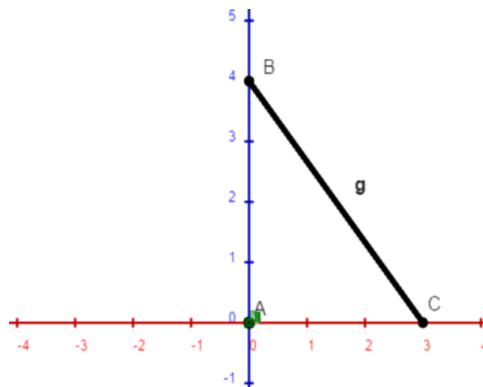


Figura 3.14: Geratriz do cone

$$l = (g).$$

### 3.4.6. Área lateral do cone pelo 2º MODO

Em vista do 2º teorema de Pappus - Guldin, temos:  $A_{lc} = 2\pi(l)(d) = 2\pi(g) \left( \frac{AC}{2} \right)$

Note que  $AC = R$ , logo

$$\boxed{A_{lc} = \pi Rg} \quad (3.8)$$

### 3.4.7. Área total da superfície do cone pelo 2º MODO

*Demonstração.* Tendo determinado as fórmulas da  $(A_{bc})$  e da  $(A_{lc})$ , podemos concluir a demonstração, pois temos, por definição, que  $A_c = A_{bc} + A_{lc}$ , substituindo (3.6) e (3.8) em  $A_c$ . Assim, segue:  $A_c = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ .

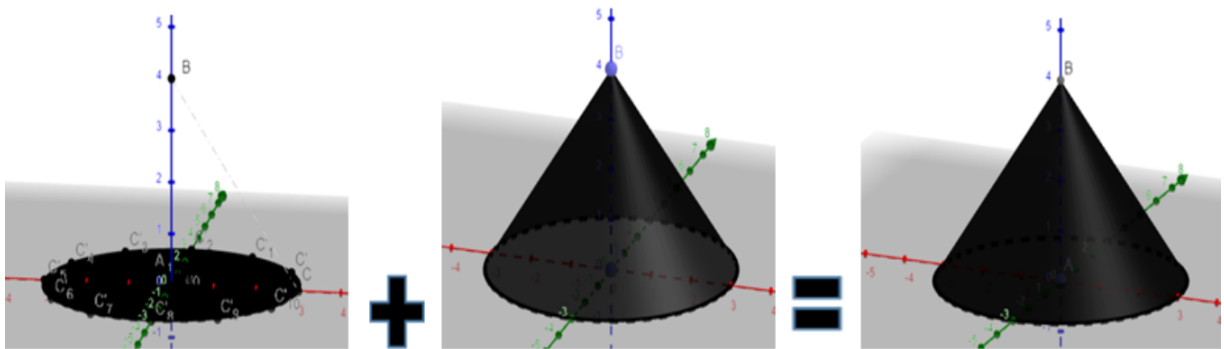


Figura 3.15: Área total da superfície do cone

Portanto, temos:

$$\boxed{A_c = \pi R(R + g)} \quad (3.9)$$

□

## 3.5 Volume da Esfera

De maneira análoga ao que foi realizado na obtenção do volume do cilindro e do cone, para a fórmula do volume de uma esfera através do 2º MODO, sem perda de generalidade, seguimos a padronização estabelecida na introdução deste capítulo.

### 3.5.1. Construção geométrica do volume da esfera

Apresentamos uma construção do volume de uma esfera por meio da revolução completa de um semicírculo em torno do eixo  $(0Z)$ .

Tomemos a área de um semicírculo qualquer, de forma que seu diâmetro  $AB$  fique sobreposto ao eixo coordenado  $(0Z)$ .

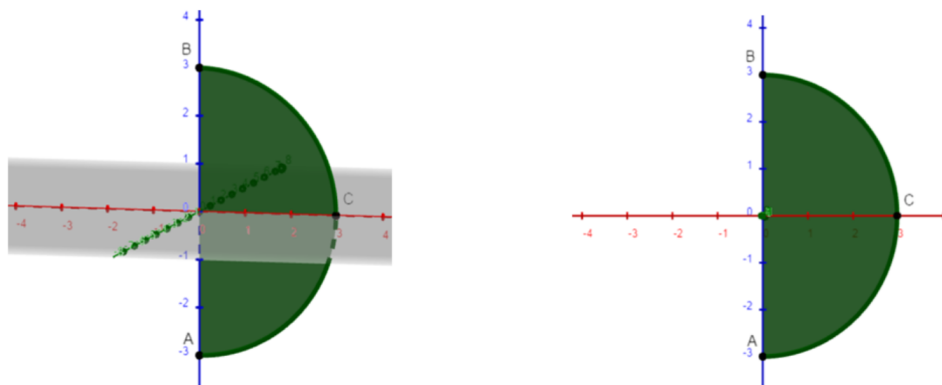


Figura 3.16: Área da superfície do semicírculo de diâmetro  $AB$

Mantendo o diâmetro  $AB$  sobreposto ao eixo  $(0Z)$ , realizemos a revolução completa da área do semicírculo em torno do eixo  $(0Z)$ . Note que a reunião das infinitas áreas dos semicírculos congruentes ao referido semicírculo, após a revolução completa em torno do eixo  $(0Z)$ , gera o volume da esfera, conforme as figuras abaixo.

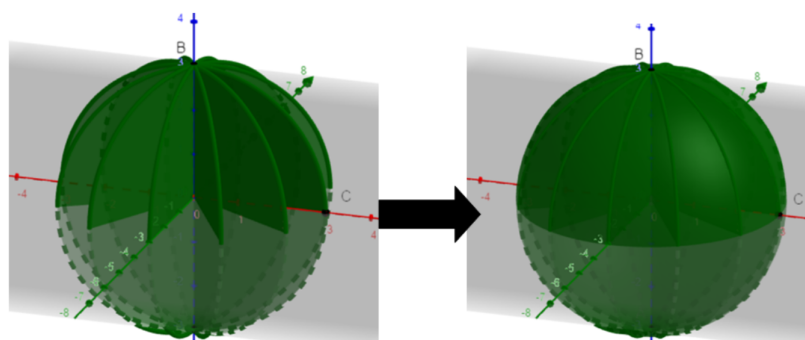


Figura 3.17: Revolução da área do semicírculo de diâmetro  $AB$  em torno do eixo  $(0Z)$

### 3.5.2. Obtenção das *2(duas) medidas* do $(V_e)$

**1ª medida:** distância do centro de gravidade do semicírculo ao eixo de revolução  $(0Z)$ .

Aqui assumiremos que a distância do centro de gravidade do semicírculo ao eixo de revolução  $(0Z)$  vale  $d = \left(\frac{4R}{3\pi}\right)$ , onde  $2R = AB$  (diâmetro). Deixamos a dedução desta constante no apêndice.

**2ª medida:** obtenção da geratriz - área do semicírculo de diâmetro  $AB$

Sabemos que a geratriz do volume de uma esfera é a área do semicírculo, como  $R = \frac{AB}{2}$ , segue:

$$S_{\text{semicirculo}} = \frac{\pi \left( \frac{AB}{2} \right)^2}{2} = \left( \frac{\pi(AB)^2}{8} \right).$$

### 3.5.3. Volume da esfera pelo 2º MODO

*Demonstração.* Pelo 1º Teorema de Pappus - Guldin o volume da esfera é dado por

$$V_e = 2\pi(S)(d) = 2\pi \left( \frac{\pi(AB)^2}{8} \right) \times \left( \frac{4R}{3\pi} \right) = \frac{\pi R(AB)^2}{3}.$$

Note que  $AB = 2R$  (diâmetro do semicírculo), segue  
 $V_e = \frac{\pi R(AB)^2}{3} \implies V_e = \frac{\pi R(2R)^2}{3} \implies V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\boxed{V_e = \frac{4}{3}\pi R^3} \quad (3.10)$$

□

## 3.6 Área da Superfície da Esfera

Para demonstrarmos a fórmula da área da superfície de uma esfera através do 2º MODO, sem perda de generalidade, seguimos a padronização estabelecida na introdução deste capítulo.

### 3.6.1. Construção geométrica da superfície da esfera

Vejam os uma construção geométrica espacial da superfície de uma esfera, por intermédio da revolução completa de uma semicircunferência em torno do eixo de revolução (0Z).

Tomemos, sem perda de generalidade, o comprimento de uma semicircunferência qualquer, de forma que seu diâmetro  $AB$  fique sobreposto ao eixo de revolução (0Z).

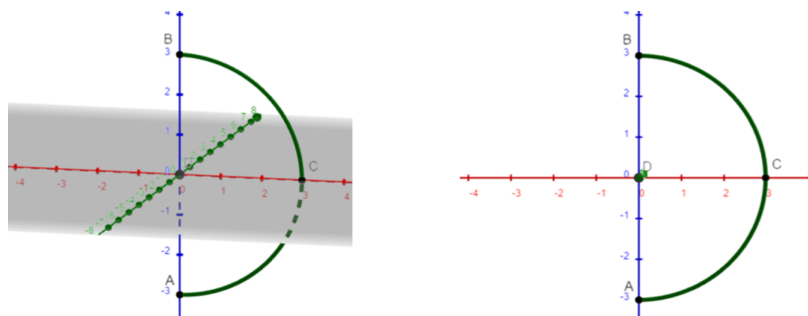


Figura 3.18: Comprimento da semicircunferência de diâmetro  $AB$

Mantendo o diâmetro  $AB$  sobreposto ao eixo  $(0Z)$ , realizemos a revolução completa do comprimento da semicircunferência em torno do eixo  $(0Z)$ . Note que a reunião dos infinitos comprimentos das semicircunferências congruentes à semicircunferência de diâmetro  $AB$ , após a revolução completa em torno do eixo  $(0Z)$ , gera a área da superfície da esfera.

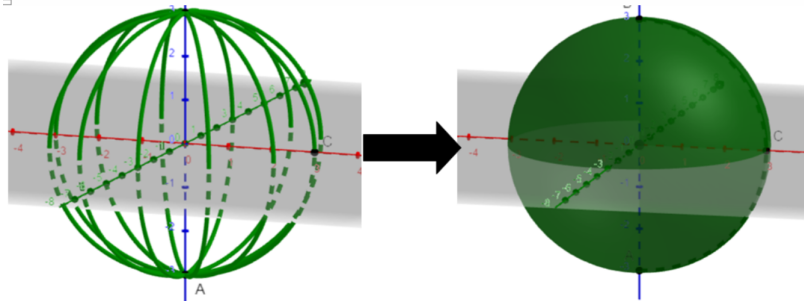
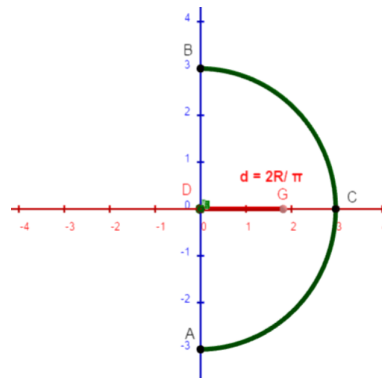


Figura 3.19: Revolução da semicircunferência de diâmetro  $AB$  em torno do eixo  $(0Z)$

### 3.6.2. Obtenção das $2(\text{duas})$ medidas da $(A_e)$

**1ª medida:** distância do centro de gravidade da semicircunferência ao eixo de revolução  $(0Z)$ .



A distância do centro de gravidade da semicircunferência ao eixo de revolução  $(0Z)$ , cuja dedução é deixada para o apêndice, corresponde a:

$$d = \left( \frac{2R}{\pi} \right)$$

em que  $AB = 2R$  (diâmetro).

**2ª medida:** obtenção da geratriz - comprimento da semicircunferência de diâmetro  $AB$

Sabemos que o comprimento da semicircunferência é  $\pi R$ , logo, temos:

$$l = \left( \frac{\pi(AB)}{2} \right).$$

### 3.6.3. Área da superfície da esfera pelo 2º MODO

*Demonstração.* Pelo 2º Teorema de Pappus - Guldin a área da superfície da esfera é dada por

$$A_e = 2\pi(l)(d) = 2\pi \left( \frac{\pi(AB)}{2} \right) \times \left( \frac{2R}{\pi} \right) = 2\pi R(AB).$$

Note que  $AB = 2R$  (diâmetro da semicircunferência), segue

$$A_e = 2\pi R(AB) \implies A_e = 2\pi R(2R) \implies A_e = 4\pi R^2$$

$$\boxed{A_e = 4\pi R^2} \quad (3.11)$$

□

## 3.7 Volume do Tronco de Cone

Para demonstrarmos a fórmula do volume de um tronco de cone através do 2º MODO, sem perda de generalidade, seguimos a padronização estabelecida na introdução deste capítulo.

### 3.7.1. Construção geométrica do volume do tronco de cone

Apresentamos uma visão da construção geométrica do volume tronco de cone por meio da revolução completa de um trapézio retângulo ABCD qualquer em torno do eixo de rotação (0Z), de forma que o lado  $AB$  e sua base maior  $AD$  fiquem sobrepostos, respectivamente aos eixos coordenado (0Z) e (0X).

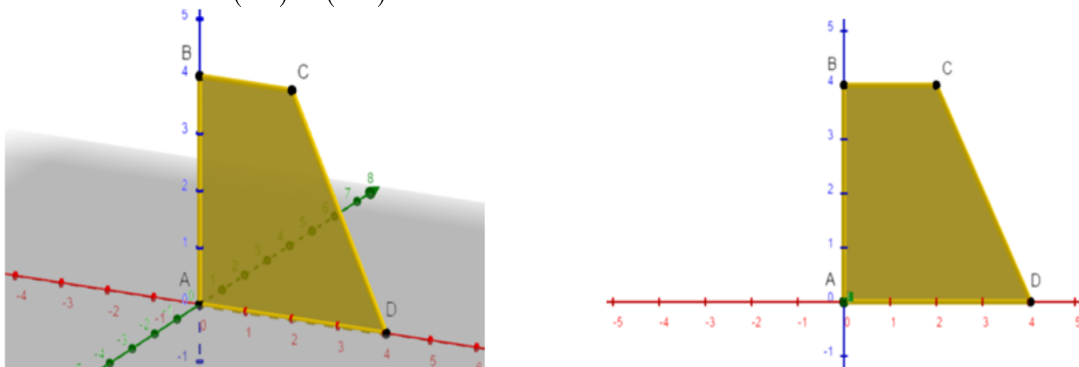


Figura 3.20: Área da superfície do trapézio retângulo ABCD

Mantendo o lado  $AB$  sobreposto ao eixo (0Z), realizemos a revolução completa da área do referido trapézio em torno do eixo (0Z). Note que a reunião das infinitas áreas dos

trapézios retângulos congruentes ao trapézio retangular ABCD, após a revolução completa em torno do eixo (0Z), gera o volume do tronco de cone, conforme figura abaixo.

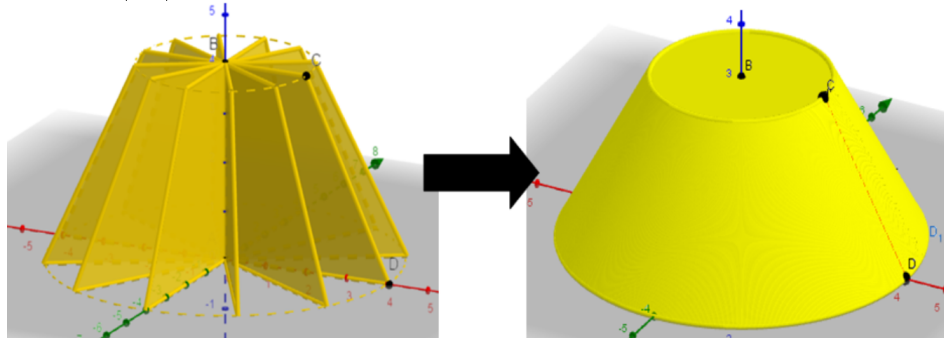


Figura 3.21: Revolução da área do trapézio retângulo ABCD em torno do eixo (0Z)

### 3.7.2. Obtenção das 2(*duas*) medidas do ( $V_t$ )

**1ª medida:** distância do centro de gravidade do trapézio retângulo ABCD ao eixo de revolução (0Z)

Para determinarmos  $d$  do trapézio retangular ABCD, inicialmente, vamos dividir o trapézio ABCD em um retângulo ABCE e um triângulo retângulo CDE. Em seguida, locamos os centros de gravidade do retângulo ABCE ( $G_1$ ) e do triângulo retângulo CDE ( $G_2$ ) e suas respectivas distâncias ao eixo de revolução (0Z), aqui denotadas por ( $d_1$ ) e ( $d_2$ ), conforme ilustra a figura abaixo.

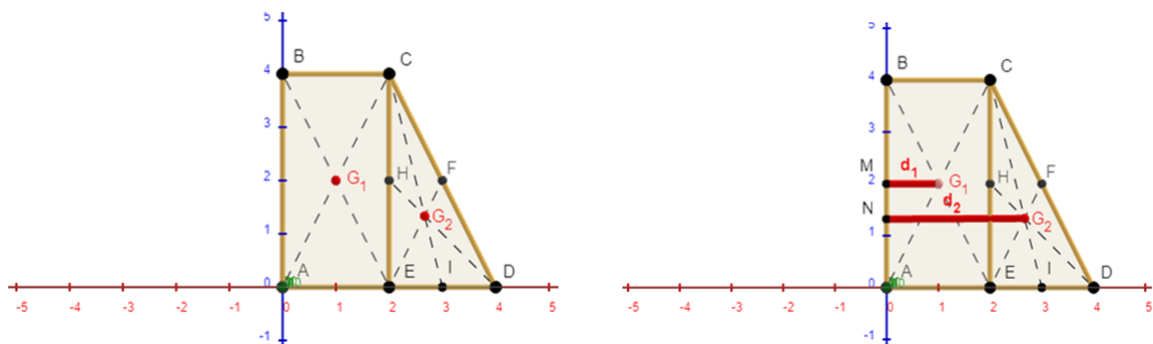


Figura 3.22: Distâncias dos centros de gravidade do retângulo ABCE e do triângulo retângulo CDE

Consideramos, sem perda de generalidade,  $AD$  a base maior do trapézio ABCD e  $BC$  a sua base menor.

De maneira análoga a demonstração do cilindro e do cone, temos:

$$d_1 = \left(\frac{BC}{2}\right) \quad \text{e} \quad d_3 = \frac{(AD - BC)}{3},$$

Em que  $d_3$  é a distância do centro de gravidade ( $G_2$ ) do triângulo CDE ao eixo (EC).

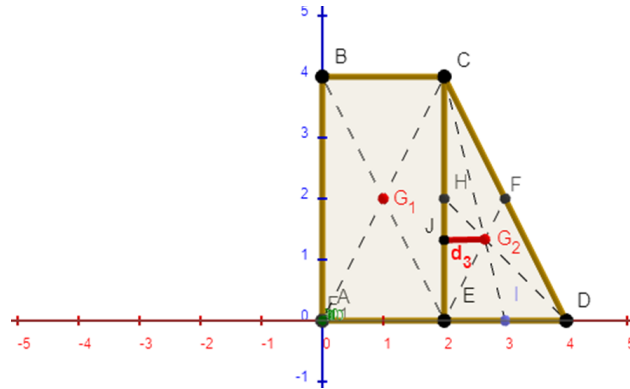


Figura 3.23: Distância do centro de gravidade do triângulo retângulo CDE ao eixo (CE)

Logo,

$$d_2 = (d_3) + (BC) = \frac{(AD - BC)}{3} + (BC) = \frac{(AD + 2BC)}{3}.$$

$$d_2 = \left(\frac{(AD + 2BC)}{3}\right).$$

Agora expressamos a área  $S_1$  do retângulo ABCE e a área  $S_2$  do triângulo CDE, em função das medidas  $AD$ ,  $BC$  e  $AB$  da seguinte maneira, respectivamente:

$$S_1 = (BC)(AB) \quad , \quad S_2 = \frac{(AD)(AB) - (BC)(AB)}{2}.$$

Para calcularmos a distância do centro gravitacional do trapézio retângulo ABCD ao eixo (0Z), devemos calcular a média ponderada tomando as distâncias  $d_1$  e  $d_2$  como valores e as respectivas áreas como pesos. Assim temos:

$$d = \frac{(d_1)(S_1) + (d_2)(S_2)}{(S_1) + (S_2)}.$$

Substituindo as expressões literais encontradas anteriormente, nesta subseção, obtemos:



$$\begin{aligned}
d &= \frac{\left[\left(\frac{BC}{2}\right)(BC)(AB)\right] + \left[\frac{(AD+2BC)(AD-BC)(AB)}{3 \cdot 2}\right]}{(BC)(AB) + \left[\frac{(AD)(AB)-(BC)(AB)}{2}\right]} \\
&= \frac{(BC)^2 + \frac{((AD)^2 + (AD)(BC) - 2(BC)^2)}{3}}{(AD + BC)} \\
&= \frac{1}{3} \frac{((AD)^2 + (AD)(BC) + (BC)^2)}{(AD + BC)}
\end{aligned}$$

**2ª medida: obtenção da geratriz - área do trapézio retângulo ABCD**

Sabemos que área do trapézio retangular ABCD ( $ST_{ABCD}$ ) é dada por:

$$ST_{ABCD} = \left( \frac{[(AD + BC)(AB)]}{2} \right).$$

### 3.7.3. Volume do tronco de cone pelo 2º MODO

*Demonstração.* Em vista do 1º teorema de Pappus - Guldin, temos

$$\begin{aligned}
V_t &= 2\pi(S)(d) \\
&= 2\pi \left( \frac{[(AD + BC)(AB)]}{2} \right) \left( \frac{1}{3} \frac{((AD)^2 + (AD)(BC) + (BC)^2)}{(AD + BC)} \right) \\
&= \frac{1}{3}\pi(AB)((AD)^2 + (AD)(BC) + (BC)^2).
\end{aligned}$$

Note que  $AD$ ,  $BC$  e  $AB$  são, respectivamente, o raio da base maior  $R$ , o raio da base menor  $r$  e a altura  $h$  do trapézio retângulo ABCD. Substituindo os valores, temos:

$$\boxed{V_t = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)} \quad (3.12)$$

□

## 3.8 Superfície do Tronco de Cone

Tomamos um trapézio retângulo ABCD qualquer, de forma que seus lados  $AB$  e  $AD$  fiquem sobrepostos, respectivamente, aos eixos coordenados  $(0Z)$  e  $(0X)$ .

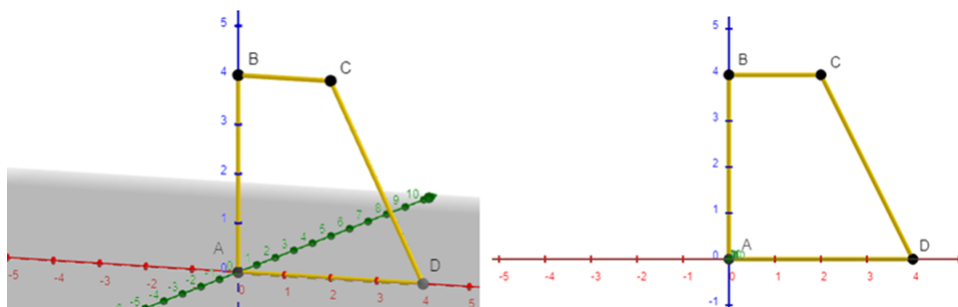


Figura 3.24: Perímetro do trapézio retângulo ABCD

### 3.8.1. Construção geométrica da superfície da base do tronco de cone

Mantendo o lado  $AB$  sobreposto ao eixo  $(0Z)$ , realizemos a revolução completa das bases  $AD$  e  $BC$  em torno do eixo  $(0Z)$ . Note que a reunião dos infinitos segmentos congruentes à  $AD$  e  $BC$ , após a revolução completa em torno do eixo  $(0Z)$ , gera, respectivamente, a área da base maior ( $A_{BM}$ ) e a área da base menor ( $A_{bm}$ ) do tronco cone. Note que a área da base do tronco de cone ( $A_{bt}$ ) é igual a soma das áreas de suas bases, conforme figura abaixo.

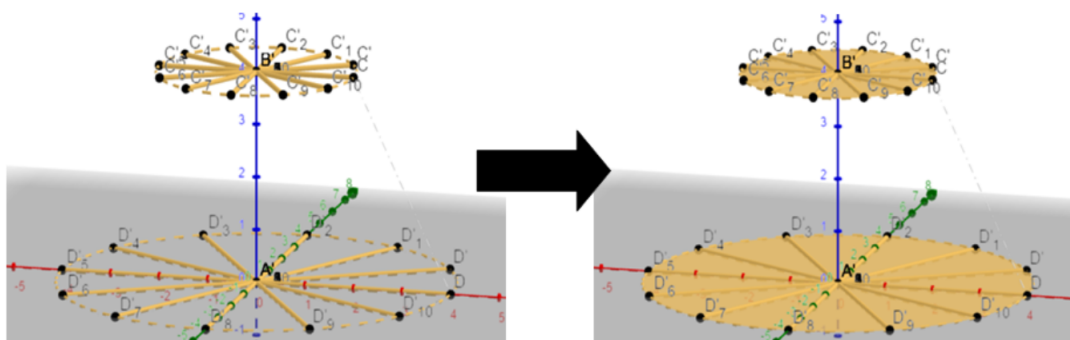
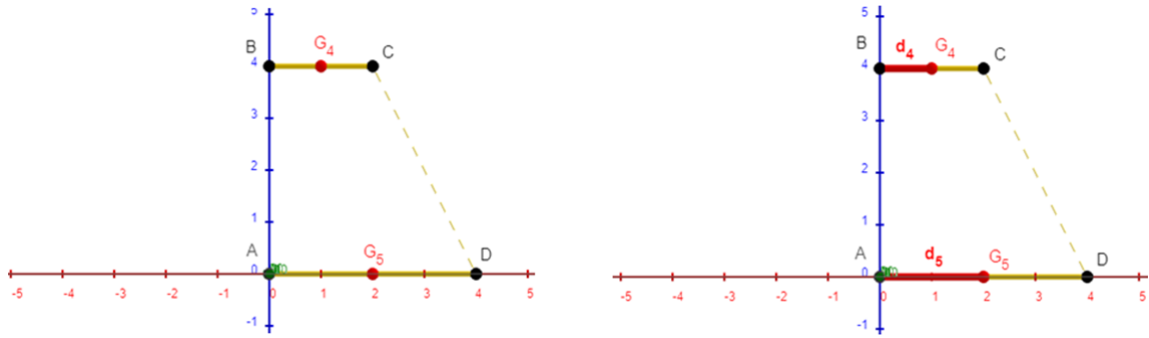


Figura 3.25: Revolução das bases  $AD$  e  $BC$  do trapézio retângulo ABCD em torno do eixo  $(0Z)$

### 3.8.2. Obtenção das 4(quatro) medidas da ( $A_{bt}$ )

**1ª e 2ª medidas:** distância dos centros de gravidade dos lados  $AD$  e  $BC$  ao eixo de revolução  $(0Z)$

Perceba que neste caso, em particular, nada temos a fazer, pois  $G_4$  e  $G_5$  são, respectivamente, os pontos médios de  $BC$  e  $AD$ , conforme mostra a figura a seguir:



Assumimos  $d_4$  e  $d_5$  como as distâncias dos centros de gravidades de  $BC$  e  $AD$ , respectivamente, ao eixo de revolução ( $OZ$ ), temos:

$$d_4 = \left(\frac{BC}{2}\right) \quad \text{e} \quad d_5 = \left(\frac{AD}{2}\right).$$

**3ª e 4ª medidas: obtenção das geratrizes - comprimento dos segmentos  $BC$  e  $AD$**

Para calcularmos o comprimento dos segmentos  $BC$  e  $AD$ , nada temos a fazer, segue:

$$l_4 = (BC) \quad \text{e} \quad l_5 = (AD).$$

### 3.8.3. Área da base do tronco de cone pelo 2º MODO

Invocando 2º teorema de Pappus - Guldin para determinar ( $A_{bm}$ ), temos:

$$A_{bm} = 2\pi(l_4)(d_4) = 2\pi(BC) \left(\frac{BC}{2}\right) = \pi(BC)^2, \text{ substituindo } BC \text{ por } r, \text{ temos:}$$

$$A_{bm} = \pi r^2.$$

Analogamente, invocando 2º teorema de Pappus - Guldin para determinar ( $A_{BM}$ ), obtemos:

$$A_{BM} = 2\pi(l_5)(d_5) = 2\pi(AD) \left(\frac{AD}{2}\right) = \pi(AD)^2, \text{ substituindo } AD \text{ por } R, \text{ temos:}$$

$$A_{BM} = \pi R^2.$$

Sabemos que  $A_{bt} = A_{bm} + A_{BM}$ , substituindo (3.8.3.) e (3.8.3.), temos:

$$\boxed{A_{bt} = \pi(R^2 + r^2)} \quad (3.13)$$

### 3.8.4. Construção geométrica da superfície lateral do tronco de cone

Mantendo o lado  $AB$  sobreposto ao eixo  $(0Z)$ , realizemos a revolução completa do lado  $CD$  em torno do eixo  $(0Z)$ .

Perceba que a reunião dos infinitos segmentos congruentes à  $CD$ , após a revolução completa em torno do mesmo eixo, gera a superfície lateral do tronco de cone ( $A_{lt}$ ), conforme ilustrado abaixo.

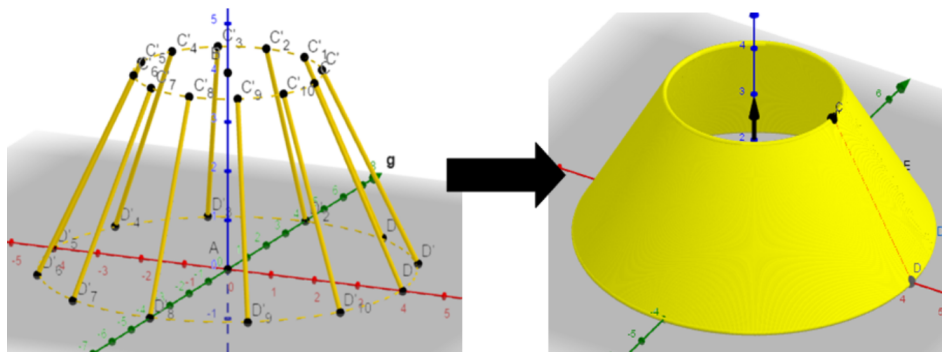
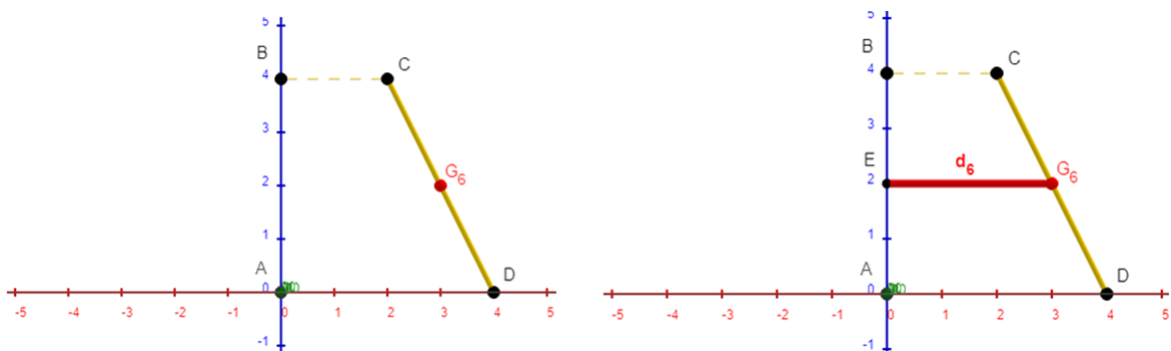


Figura 3.26: Revolução do lado  $CD$  do trapézio retângulo  $ABCD$  em torno do eixo  $(0Z)$

### 3.8.5. Obtenção das 2(duas) medidas da ( $A_{lt}$ )

**1ª medida:** distância do centro de gravidade do segmento  $CD$  ao eixo de revolução  $(0Z)$

Determinamos o centro de gravidade de  $CD$ , através do seu ponto médio ( $G_6$ ), traçamos, partindo de  $G_6$ , a reta perpendicular ao eixo de revolução  $(0Z)$ . Note que o segmento de reta  $G_6E$  é a base média do trapézio retângulo  $ABCD$ . Logo,  $G_6E = \left( \frac{(AD) + (BC)}{2} \right)$ , conforme mostra as figuras abaixo:



Assumimos  $d_6 = G_6E$ , podemos concluir que:

$$d_6 = \left( \frac{AD + BC}{2} \right).$$

**2ª medida: obtenção da geratriz - comprimento do segmento  $CD$**

Para calcularmos o comprimento do segmento  $CD$ , basta observarmos que  $CD$  é a hipotenusa de um triângulo retângulo  $CDE$ , aplicando Pitágoras, assim temos:

$$CD = \sqrt{(AB)^2 + (AD - BC)^2}.$$

Para facilitar os cálculos algébricos, denotemos  $g$  a geratriz do tronco de cone. Isto é:

$$l_6 = CD = (g).$$

### 3.8.6. Área lateral do cone pelo 2º MODO

Invocando 2º teorema de Pappus - Guldin para determinar  $(A_{lt})$ , segue:

$A_{lt} = 2\pi(l_6)(d_6) = 2\pi(CD) \left( \frac{AD + BC}{2} \right) = \pi(CD)(AD + BC)$ , substituindo  $BC$  por  $r$ ,  $AD$  por  $R$  e  $CD$  por  $g$ , temos:

$$\boxed{A_{lt} = \pi(g)(R + r)} \quad (3.14)$$

### 3.8.7. Área total da superfície do tronco de cone

*Demonstração.* Tendo determinado as fórmulas da  $(A_{bt})$  e da  $(A_{lt})$ , sabemos que  $A_t = A_{bt} + A_{lt}$ , substituindo (3.13) e (3.14) em  $A_t$ , segue:

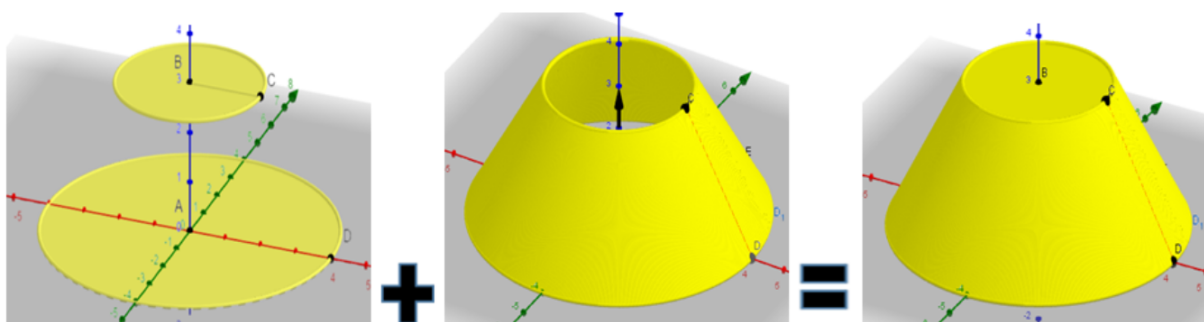


Figura 3.27: Área total da superfície do tronco de cone

$$\boxed{A_t = \pi[R(g + R) + r(g + r)]} \quad (3.15)$$

□

# Capítulo 4

## Algumas Aplicações

Neste capítulo, apresentamos três exemplos sobre os sólidos de revolução estudados neste trabalho. O primeiro traz a revolução de um triângulo isósceles; o segundo, a revolução de um retângulo e; o terceiro, a revolução de um círculo, todos em torno de um determinado eixo de revolução. Para cada exercício, serão apresentadas duas soluções: na primeira, utilizamos o 1° MODO (método normalmente ensinado pelos professores do ensino médio) e, na segunda, aplicamos o 2° MODO (método que se utiliza o 1° e 2° teoremas de Pappus - Guldin, ambos definidos no primeiro capítulo deste trabalho).

A intenção é compararmos a eficiência entre os dois métodos apresentados (1° MODO e 2° MODO), ou seja, refletirmos sobre a eficiência desses na resolução de exercícios envolvendo sólidos e superfícies de revolução. Tudo com a finalidade de levar aos professores do ensino médio mais uma opção, no tocante à construção do conhecimento geométrico espacial posicional e métrico dos alunos.

**Exemplo 1** (ITA - 2014). *Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles  $ABC$  em torno de uma reta paralela à base que dista  $0,25$  cm do vértice  $A$  e  $0,75$  cm da base  $BC$ . Se o lado mede  $AB = \frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}$  cm, o volume desse sólido, em  $\text{cm}^3$ , é igual a:*

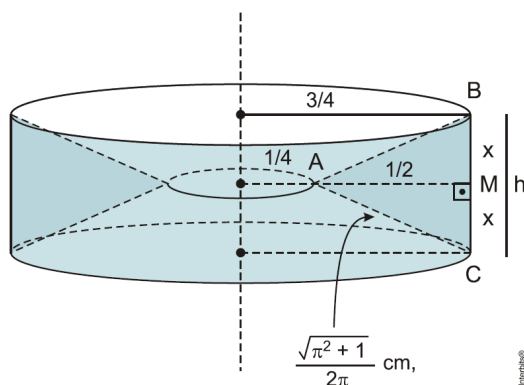
(a)  $\frac{9}{16}$

(b)  $\frac{13}{96}$

(c)  $\frac{7}{24}$

(d)  $\frac{9}{24}$

(e)  $\frac{11}{96}$



**Solução 1** (1° MODO). No triângulo  $AMC$ , aplicando o teorema de Pitágoras, temos que  $X = \frac{1}{2}\pi$ . Logo,  $h = 2X = 2(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{\pi}$ . Por um lado, o volume  $V_c$  do cilindro gerado pelo segmento  $BC$  é igual à:

$$V_c = S \times h = \frac{9\pi}{16} \times h = \frac{9}{16}\text{cm}^3.$$

Por outro lado, o volume de cada tronco de cone é:

$$V_{tr} = \frac{1}{3} \cdot H \cdot \pi (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

onde a altura e os raios das bases são, respectivamente:

$$H = X = \frac{1}{2\pi}; R = \frac{3}{4}; e r = \frac{1}{4}. \text{ Daí, substituindo em } V_{tr} \text{ temos:}$$

$$V_{tr} = \frac{13}{96}\text{cm}^3.$$

Portanto, o volume do sólido gerado é:

$$V = V_c - 2V_{tr} = \frac{7}{24}\text{cm}^3.$$

**Solução 2** (2° MODO). Considerando  $G$  o centro de gravidade da geratriz (triângulo  $ABC$ ), podemos concluir que  $G$  é o baricentro de  $ABC$ , segue:

$$AG = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}, \quad e \quad d = \frac{1}{4} + AG.$$

Logo,

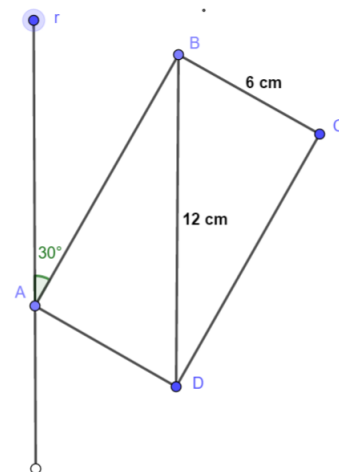
$$d = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

Denote por  $S$  a área do triângulo  $ABC$ , então  $S = \frac{1}{4\pi}$ . Portanto, pelo 1° Teorema de Pappus-Guldin, o volume do sólido de revolução gerado pelo triângulo  $ABC$ , é:

$$V = 2\pi Sd = 2\pi \left(\frac{7}{12}\right) \left(\frac{1}{4\pi}\right) = \frac{7}{24}\text{cm}^3.$$

**Exemplo 2** (autor). Considere o sólido de revolução obtido pela revolução de um retângulo ( $ABCD$ ) em torno de um eixo  $r$ . Sabendo que o lado  $BC$  mede 6 cm; que a diagonal  $BD$ , paralela à  $r$ , mede 12 cm e; que o vértice  $A$  pertence a esse eixo, conforme ilustra a figura abaixo. Podemos afirmar, com base nos dados fornecidos, que o volume e a área da superfície desse sólido, respectivamente, são iguais a:

- (a)  $632 \text{ cm}^3$  e  $72\pi(\sqrt{3} + 3)\text{cm}^2$ .  
 (b)  $632 \text{ cm}^3$  e  $36\pi(\sqrt{3} + 3)\text{cm}^2$ .  
 (c)  $648 \text{ cm}^3$  e  $36\pi(\sqrt{3} + 3)\text{cm}^2$ .  
 (d)  $632 \text{ cm}^3$  e  $108\pi(\sqrt{3} + 3)\text{cm}^2$ .  
 (e)  $648 \text{ cm}^3$  e  $72\pi(\sqrt{3} + 3)\text{cm}^2$ .



Antes de apresentarmos as duas soluções, considere a seguinte nomenclatura, tanto para o cálculo do volume, quanto para o da área da superfície:

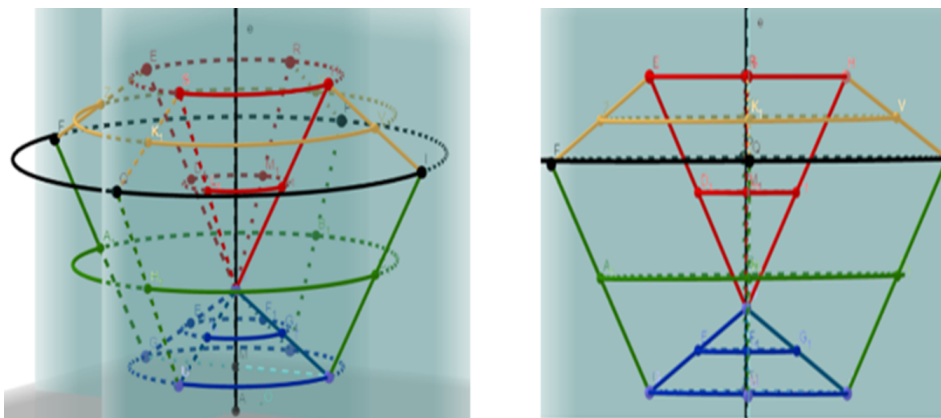
- Volume do Sólido de Revolução ( $V_{sr}$ );
- Área da Superfície de Revolução ( $A_{sr}$ );
- Tronco de Cone amarelo ( $TC_a$ );
- Volume do Tronco de Cone amarelo ( $VTC_a$ );
- Área Lateral do Tronco de Cone amarelo ( $ALTC_a$ );
- Tronco de Cone verde = ( $TC_v$ );
- Volume do Tronco de Cone verde ( $VTC_v$ );
- Área Lateral do Tronco de Cone verde ( $ALTC_v$ );
- Cone vermelho ( $C_{vm}$ );
- Volume do cone vermelho ( $VC_{vm}$ );
- Área Lateral do Cone vermelho ( $ALC_{vm}$ );
- Cone azul ( $C_{az}$ );



- Volume do Cone azul ( $VC_{az}$ );
- Área Lateral do Cone azul ( $ALC_{az}$ );
- Altura do Tronco de Cone verde ( $HTC_v$ ) =  $H$ ;
- Altura do Cone vermelho ( $HC_{vm}$ ) =  $H$ ;
- Altura do Tronco de Cone amarelo ( $HTC_a$ ) =  $h$ ;
- Altura do Cone azul ( $HC_{az}$ ) =  $h$ ;
- Raio Maior do Tronco de Cone amarelo ( $RTC_a$ ) =  $R$ ;
- Raio Maior do Tronco de Cone verde ( $RTC_v$ ) =  $R$ ;
- Raio menor do Tronco de Cone amarelo ( $rTCa$ ) =  $r$ ;
- Raio menor do Tronco de Cone verde ( $rTC_v$ ) =  $r$ ;
- Raio do Cone azul ( $RC_{az}$ ) =  $r$ ;
- Raio do Cone vermelho ( $RC_{vm}$ ) =  $r$ .

### O volume do sólido de revolução pelo 1º MODO

Para que possamos traçar a estratégia, precisamos visualizar o sólido gerado pela revolução.



Projetando o sólido gerado no plano vertical, realizamos distribuições angulares e métricas em virtude do fato de  $AB$  ser paralelo ao eixo  $r$  e haver uma simetria entre os retângulos  $ABCD$  e  $AB'C'D'$ , chegando as seguintes conclusões:

1. Os ângulos BDC, ABD e BAE são congruentes e medem  $30^\circ$ , pois o cateto BC do triângulo retângulo BCD mede a metade da hipotenusa  $BD$ . Logo, os ângulos CBD, BDA e DAG, também são congruentes e medem  $60^\circ$ .
2. Pela simetria gerada pela revolução, podemos afirmar que os triângulos  $ABB'$ ,  $CDF$  e  $FC'D'$  são congruentes e equiláteros, assim como os triângulos  $ADD'$ ,  $BCF$  e  $FB'C'$  são congruentes e isósceles. Com base nesses triângulos, conseguimos determinar todas as medidas necessárias para solucionar a questão, além de justificar o emprego de letras iguais para representar dimensões denominadas de maneira diferente, como por exemplo,  $(rTC_a) = (rTC_v) = (RC_{az}) = (RC_{vm}) = r$ . Para cálculo do  $V_{sr}$ , temos:

$$\begin{aligned}
V_{sr} &= (VTC_a) + (VTC_v) - (VC_{vm}) - (VC_{az}) \\
&= \left[ \left(\frac{1}{3}\right)(\pi)(HTC_a)(R^2 + Rr + r^2) \right] + \left[ \left(\frac{1}{3}\right)(\pi)(HTC_v)(R^2 + Rr + r^2) \right] \\
&\quad - \left[ \left(\frac{1}{3}\right)(r^2\pi)(HC_{vm}) \right] - \left[ \left(\frac{1}{3}\right)(r^2\pi)(HC_{az}) \right] \\
&= \pi \left[ \frac{(hR^2 + Rrh + hr^2) + (HR^2 + RrH + Hr^2) - (Hr^2) - (hr^2)}{3} \right] \\
&= \pi \left[ \frac{(H+h)(R^2 + Rr + r^2) - (H+h)(r^2)}{3} \right] \\
&= \pi \left[ \frac{(H+h)(R^2 + Rr + r^2 - r^2)}{3} \right] \\
&= \pi \left[ \frac{(H+h)(R^2 + Rr)}{3} \right].
\end{aligned}$$

Vamos determinar as medidas de  $R$ ;  $r$ ;  $H$  e  $h$ . Note que  $AE = H$  é a altura do triângulo equilátero  $ABB'$ , segue:  $AB = (12) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$ ; então

$$AE = H = (AB) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (6\sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9 \text{ cm.}$$

Temos que  $BC = AD = 6$  cm;  $AG = h = (AD)(\sin(30^\circ)) = (6) \left(\frac{1}{2}\right) = 3$  cm;  $CF = R = DC = AB = (9) \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 6\sqrt{3}$  cm; e  $DG = r = (AD)(\cos(30^\circ)) = (6) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$  cm. Substituindo os valores encontrados, obtemos:

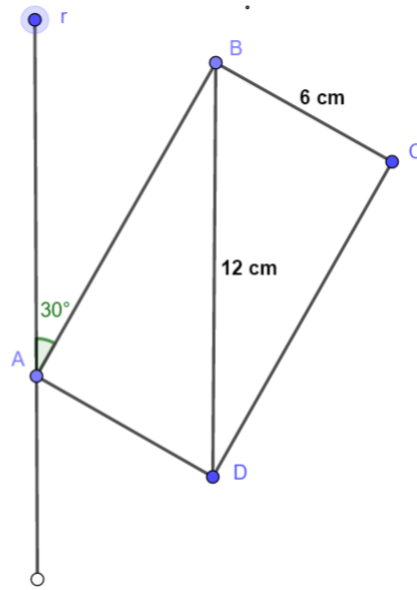
$$V_{sr} = 648\pi \text{ cm}^3.$$

## O volume do sólido de revolução pelo 2º MODO

1. Pelo 1º Teorema de Pappus - Guldin, temos:

$$V = 2\pi Sd$$

Realizando distribuições angulares e métricas em virtude do fato de  $AB$  ser paralelo ao eixo  $r$  e haver uma simetria entre os retângulos  $ABCD$  e  $AB'C'D'$ , chegamos à seguinte conclusão:



- Os ângulos  $\hat{B}DC$ ,  $\hat{A}BD$  e  $\hat{B}AE$  são congruentes, medindo  $30^\circ$ , pois o cateto  $BC$  do triângulo retângulo  $BCD$  mede a metade da hipotenusa  $BD$ . Logo, os ângulos  $\hat{C}BD$ ,  $\hat{B}DA$  e  $\hat{D}AG$ , também são congruentes e medem  $60^\circ$ .
- Considere a área do retângulo  $S_{(ABCD)}$  como a geratriz do sólido de revolução, segue:

$$S_{(ABCD)} = (BC)(CD) = (6)(12)(\cos(30^\circ)) = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ e}$$

$$d = EB = (AB)(\sin(30^\circ)) = (6\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Portanto, o volume procurado vale:

$$V_{sr} = 648\pi \text{ cm}^3.$$

## Área da superfície do sólido de revolução pelo 1° MODO

Consideramos todas as conclusões obtidas para o cálculo do volume, para calcularmos a área da superfície do sólido gerado pela revolução do retângulo ABCD em torno do eixo  $r$ .

1. Pelo 1° Teorema de Pappus-Guldin,

$$A_{sr} = (ALC_{vm}) + (ALC_{az}) + (ALTC_a) + (ALTC_v).$$

2. Note que  $BC = AB$  é a geratriz do Tronco de Cone verde e do Cone vermelho, assim como,  $CD = AD$  é a geratriz do Tronco de Cone amarelo e do Cone azul, segue:

$$\begin{aligned} A_{sr} &= \pi(RC_{vm})(AB) + \pi(RC_{az})(AD) + \pi(AD)(RTC_a + rTC_a) + \pi(AB)(RTC_v + rTC_v) \\ &= \pi(r)(AB) + \pi(r)(AD) + \pi(AD)(R + r) + \pi(AB)(R + r) \\ &= \pi(r)(AB + AD) + \pi(R + r)(AD + AB) \\ &= \pi(AB + AD)(r + (R + r)) \\ &= \pi(AB + AD)(R + 2r). \end{aligned}$$

3. Vamos determinar as medidas de  $AB$ ;  $AD$ ;  $R$  e  $r$  e em seguida substituir em  $A_{sr}$ .

Temos:

- (i)  $AB = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}cm$ ;
- (ii)  $AD = 6cm$ ;
- (iii)  $CF = DC = AB = R = (9)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 6\sqrt{3}cm$ ;
- (iv)  $DG = r = (AD)(\cos(30^\circ)) = (6)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}cm$ ;

substituindo os valores, obtemos:

$$A_{sr} = 72\pi(3 + \sqrt{3})cm^2.$$

## Área da superfície do sólido de revolução pelo 2° MODO

1. Pelo 2° Teorema de Pappus - Guldin, temos:

$$A_{sr} = 2\pi ld$$

2. Considere  $2P_{(ABCD)}$  o perímetro do retângulo ABCD o comprimento da geratriz da superfície de revolução, segue:

$$(i) 2P_{(ABCD)} = AB + BC + CD + DA = 6\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{3} + 6 = 12(1 + \sqrt{3})cm; e$$

$$(ii) d = EB = (AB)(\text{sen}(30^\circ)) = (6\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3}cm,$$

substituindo os valores, obtemos:

$$A_{sr} = 72\pi(3 + \sqrt{3})cm^2.$$

**Exemplo 3** (autor). Considere o círculo  $\lambda$  de centro  $O(3, 0, 0)$  contido no plano XZ, sabendo que sua área é  $4\pi$  u.a., conforme a ilustração abaixo. Determine a área da superfície do sólido gerado pela revolução de  $\lambda$  em torno do eixo Z.

- a)  $24\pi^2$  u.a.      b)  $22\pi^2$  u.a.      c)  $20\pi^2$  u.a.      d)  $18\pi^2$  u.a.      e)  $16\pi^2$  u.a.

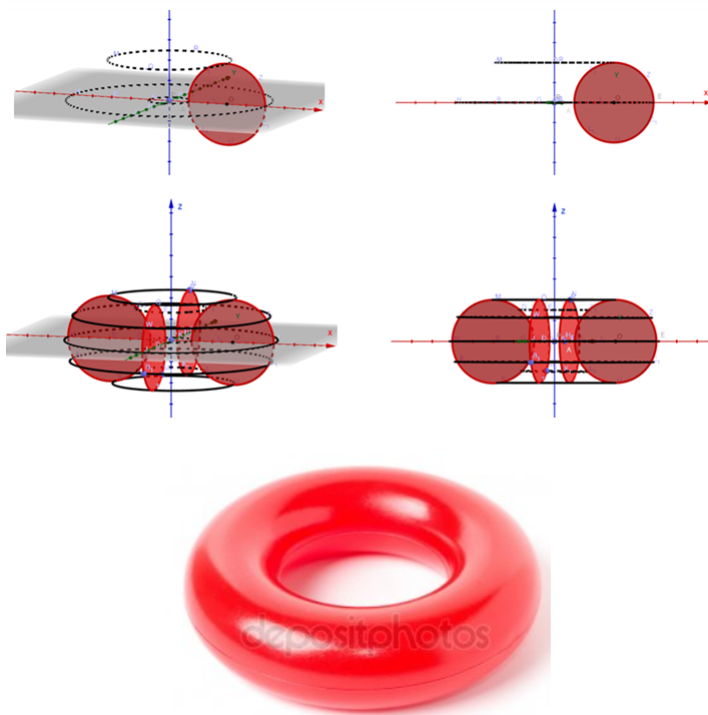


Figura 4.1: Toróide

### Área da superfície do sólido de revolução pelo 1º MODO

Neste exemplo não é de nosso conhecimento uma solução através do 1º MODO no âmbito da matemática básica, que possa ser transmitida aos alunos do ensino médio. Entretanto, a solução pelo 2º MODO é simplória.

**Área da superfície do sólido de revolução pelo 2º MODO**

1. Pelo 2º Teorema de Pappus - Guldin, temos:

$$A_{gr} = 2\pi ld$$

2. Considerando G o centro de gravidade da geratriz (circunferência que limita o círculo  $(\lambda)$  da superfície de revolução, podemos concluir que  $G \simeq O$  que é centro de  $(\lambda)$ .

3. Sabemos que  $S = \pi R^2 = 4\pi \implies R = 2u.c.$

4. O perímetro do círculo  $2P_{(\lambda)}$  é dado por

(i)  $2P_{(\lambda)} = 2\pi R = 2\pi(2) = 4\pi u.c.$ ; e

(ii)  $d = 1 + R = 1 + 2 = 3u.c.$ ,

substituindo os valores encontrados, obtemos:

$$A_{gr} = 24\pi^2 u.a.$$

# Capítulo 5

## Considerações Finais

A motivação deste trabalho reside no fato de que os resultados de Pappus - Guldin são desconhecidos pela maioria dos docentes e discentes do ensino médio, apesar de serem de inquestionável valia e comprovação científica matemática. Para divulgar tais resultados, propomos neste trabalho, o uso de uma linguagem mais apropriada à realidade dos professores e alunos do ensino médio. E de um ponto de vista mais objetivo, escolhemos alguns exemplos que possibilitem o entendimento destes resultados.

Acreditamos que estas poucas aplicações dos 1º e 2º Teoremas de Pappus-Guldin, apresentadas neste material, tenham o efeito de colaborar com a transmissão e amadurecimento deste assunto. Além disso, esperamos que por intermédio do estudo desta obra, os professores do ensino médio, em particular, aqueles que lecionam geometria espacial posicional e métrica, possam difundir entre seus alunos o 2º MODO de abordar problemas relativos a sólidos e superfícies de revolução.

Salientamos que a finalidade deste trabalho não é desconsiderar, abolir ou substituir o denotado 1º MODO pelo 2º aqui apresentado, muito pelo contrário, acreditamos que os dois devem ser lecionados paralelamente, sempre que possível aos alunos, uma vez que ambos possuem sua relevância no processo de ensino aprendizagem.

# Capítulo 6

## Apêndice

Nesta parte do trabalho, apresentamos as demonstrações das distâncias do centro de gravidade do semicírculo e da semicircunferência, respectivamente, aos seus eixos de revolução que sobrepõem os seus diâmetros, visando fundamentar as aplicações realizadas no terceiro capítulo, quando assumimos que  $\frac{4R}{3\pi}$  é a distância do centro de gravidade do semicírculo ao eixo de revolução e que  $\frac{2R}{\pi}$  é a distância do centro de gravidade da semicircunferência ao eixo de revolução. Tal dedução, justifica-se pelo fato de não ser possível determinar os centros de gravidade do semicírculo e da semicircunferência por meio dos conhecimentos da matemática básica (geometria/geometria analítica), como foi apresentado nos casos do cilindro, do cone e do trono de cone.

### 6.1 Obtenção da distância do centro de gravidade do semicírculo ao eixo de revolução

Vamos igualar a fórmula do volume de uma esfera demonstrada no segundo capítulo, por intermédio do Princípio de Cavalieri 1º **MODO**, com a expressão do mesmo volume obtida pelo 1º teorema de Pappus - Guldin 2º **MODO**. Assim, determinarmos uma expressão de  $d$  em função de  $R$ .

*Demonstração.* Conforme demonstração apresentada no segundo capítulo deste trabalho, temos:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (6.1)$$



Pela aplicação do 2º **MODO**, apresentada no primeiro capítulo, podemos afirmar que o volume de uma esfera é obtido pela seguinte equação:

$$V_e = 2\pi(S)(d) = 2\pi\pi\frac{R^2}{2}d$$

$$V_e = d\pi^2R^2. \quad (6.2)$$

Igualando as expressões (6.1) e (6.2), obtemos:

$$\pi^2R^2d = \frac{4}{3}\pi r^3 \implies d = \frac{4R}{3\pi},$$

$$\boxed{d = \frac{4R}{3\pi}.} \quad (6.3)$$

□

## 6.2 Obtenção da distância do centro de gravidade da semicircunferência ao eixo de revolução

Vamos igualar a fórmula da área da superfície de uma esfera demonstrada no segundo capítulo por intermédio de uma noção intuitiva, com a mesma área obtida pelo 2º teorema de Pappus - Guldin 2º **MODO**. Assim, determinamos uma expressão de  $d$  em função de  $R$ .

*Demonstração.* Conforme demonstração apresentada no segundo capítulo deste trabalho, podemos afirmar que a área da superfície da esfera é obtida pela equação:

$$A_e = 4\pi R^2. \quad (6.4)$$

Pela aplicação do 2º **MODO**, apresentada no primeiro capítulo, podemos afirmar que a área da superfície de uma esfera é obtido pela seguinte equação:

$$A_e = 2\pi(l)(d) = 2\pi(\pi R)d$$

$$A_e = 2d\pi^2R. \quad (6.5)$$

Igualando as expressões (6.4) e (6.5), obtemos:

$$4\pi R^2 = 2d\pi^2R \implies d = \frac{2R}{\pi}.$$

$$\boxed{d = \frac{2R}{\pi}.} \quad (6.6)$$

□

# Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, CARL B. História da Matemática, São Paulo, Edgard Blucher, 1974.
- [2] BONJORNO, J.R.; BONJORNO, R.A.; BONJORNO, V.; RAMOS, C.M. Física: História e Cotidiano-Mecânica 1, São Paulo, Ed. FTD S.A., 2003.
- [3] BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei n. 9394 de 20 de dezembro de 1996. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- [4] CAMINHA, A.M.N. Tópicos de Matemática Elementar-Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Professor de Matemática).
- [5] DANTE, L.R. Matemática-Contexto e Aplicações: volume 2. ed. Ática, São Paulo, 2013.
- [6] DOLCE, O.; POMPEO, J.N. Fundamentos de matemática elementar-Geometria espacial posicional e métrica, vol. 9, São Paulo: Ed. Atual, 2007.
- [7] DOLCE, O.; POMPEO, J.N. Fundamentos de matemática elementar-Geometria plana, vol. 9, São Paulo: Ed. Atual, 2007.
- [8] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de Cálculo. v. 01. 5ª ed. Rio de Janeiro: Editora S.A, Livros técnicos e científicos, 2001.
- [9] HELOU, R. D.; BISCOLOLA, G.J.; VILLAS BÔAS, N. Física 1-Mecânica 1, São Paulo, Ed. Saraiva, 2ª edição, PNLD, 2015.
- [10] IEZZI, G., DOLCE, O., etc. MATEMÁTICA-Ciências e Aplicações, vol. 2, São Paulo: Ed. Saraiva, 9ª edição, Manual do Professor, 2016.

- [11] LEAHY, A. James Gregory and the Pappus-Guldin Theorem. 2009. Disponível em: <<http://mathdl.maa.org/mathDL>>. Acesso em: 19 de dezembro de 2012.
- [12] RPM 47.
- [13] RPM 97.
- [14] RAUTENBERG, R. R. Os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução. 2013, (57 f.). Dissertação (Mestrado em Matemática). Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- [15] FEIJOO, AMLC. Medidas de tendência central. In: A pesquisa e a estatística na psicologia e na educação [on line]. Rio de Janeiro: Centro Edelstein de Pesquisas Sociais, 2010,pp. 14-22.
- [16] TREVISAN E. P. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO E O TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN: UMA EXPERIÊNCIA EM UMA TURMA DE CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS. 2017, (4 f.). Artigo publicado EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista ISSN 2317-904X, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Brasília-DF, 2017.