UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

CLAYTON MOTA DA SILVA

PONTOS PERIÓDICOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS EM INTERVALOS

CAMPO GRANDE - MS

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLAYTON MOTA DA SILVA

PONTOS PERIÓDICOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS EM INTERVALOS

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Aniz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2018

PONTOS PERIÓDICOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS EM INTERVALOS

Clayton Mota da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Aniz – UFMS (Presidente)

Prof. Dr. André Nagamine – UESB

Profa. Dra. Rúbia Mara de Oliveira Santos – UFMS

Campo Grande – MS, 24 de outubro de 2018

Agradecimentos

À minha querida esposa, Ariane, pelo carinho, apoio e pela revisão ortográfica do texto desta dissertação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Claudemir Aniz, pelos conselhos, sugestões e correções.

Aos professores do INMA que tive o privilégio de conhecer, em especial ao Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini por suas contribuições a este trabalho.

Aos colegas do mestrado.

Às instituições ligadas ao PROFMAT. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Algumas funções contínuas têm a propriedade de terem um único ponto fixo, que é o caso das contrações definidas em intervalos fechados. Por sua vez, o Teorema de Li-Yorke afirma que uma função contínua que possui um ponto periódico de período três possui também pontos periódicos de qualquer outro período. Para demonstrar estes fatos, desenvolveremos alguns tópicos de Análise Real. Apresentaremos também algumas aplicações do conceitos estudados: o método de Newton, para o cálculo da raiz n-ésima de um número real, e o método da bissecção para determinar zeros reais de funções reais.

Palavras-chave: Funções Lipschitzianas, Teorema de Li-Yorke, Contrações, Teorema do Valor Médio.

Abstract

Some continuous functions has property to have a unique fixed point, that is the case of the contractions mapping defined on closed intervals. In turn, the Li-Yorke Theorem states that continuous functions with periodic point of period three have too periodics points of any other period. In order to demonstrate this facts, we will be developed some topics of Real Analysis. In addition, we will show some applications of studied concepts: the Newton's method, to calculate the nth root of a real number, and the bissection's method to determinate real zeros of real funtions.

Keywords: Functions Lipschitz Continuos, Li-Yorke Theorem, Contrations Mapping, Mean-Value Theorem

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O nosso ponto de ignição, que também servirá como ponto motivador para a apresentação deste trabalho de dissertação, está baseado na seguinte experiência: pegue uma calculadora e calcule o valor de $cos(1)$. Em seguida, aperte a tecla "cos"(cosseno) e depois "="(igual). Repita o procedimento por pelo menos cinquenta vezes. Após efetuar essas iterações, o leitor deve notar que o valor começa a se estabilizar em $0,739085133...$. Execute a mesma experiência, trocando 1 por 100. O valor obtido após cinquenta iterações começa a se estabilizar em $0,739085133...$. Escolha agora um número positivo qualquer e repita a experiência anterior. Qual o valor obtido? Novamente, o valor se estabiliza em $0,739085133...$. Nos perguntamos então: o que há por trás dos cálculos, isto é, qual a matemática envolvida no processo de cálculo? Existem outros tipos de funções com essa propriedade? Existem funções que se estabilizam em pontos diferentes?

Para entender o problema, precisaremos abordar alguns conceitos como composição de funções, aproximações sucessivas, continuidade de funções, pontos periódicos, contrações e sequências de Cauchy.

Este trabalho será dividido em cinco capítulos. Começaremos por estudar os conceitos de intervalos de números reais, funções de uma variável real e sequências de números reais. Sobre as funções, nosso interesse especial será em entender sob que condições é possível realizar a composição de duas funções. No caso das sequências, nosso interesse estará nas sequências de Cauchy. Definiremos o que é uma sequência convergente, apresentaremos algumas propriedades do limite de sequências e falaremos sobre aproximações sucessivas, que será um dos pilares desta dissertação. Encerraremos o primeiro capítulo falando sobre limite de funções. Para isso, definiremos o que é limite de uma função e apresentaremos algumas propriedades do limite que serão úteis para fundamentar nosso trabalho e explicaremos quando é possível determinar o limite da função composta.

No segundo capítulo estudaremos o conceito de continuidade de funções. Os resultados que apresentaremos serão fundamentais para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Em particular, destacaremos duas propriedades importantes para funções definidas em intervalos reais fechados e limitados: a propriedade do valor intermediário e a propriedade dos valores máximo e mínimo. Mostraremos também outros dois conceitos que, em alguns casos, são equivalentes ao de continuidade: continuidade uniforme e continuidade lipschitziana.

No terceiro capítulo estudaremos o conceito de ponto periódico e apresentaremos dois resultados que têm relevância em grau superior aos demais para a dissertação. O primeiro afirma que funções contínuas definidas em intervalos com ponto períodico de período 3 possuem pontos periódicos de qualquer outro período. O segundo afirma que funções contínuas definidas em intervalos fechados e que são contrações possuem um único ponto periódico de período 1.

No quarto capítulo apresentaremos a definição de derivabilidade de funções. Os resultados principais deste capítulo se concentram no Teorema do Valor Médio, de Lagrange, e em algumas de suas aplicações. Em particular, ele será usado para mostrar que a função $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$, dada por $f(x) = cos(x)$, é uma contração.

No capítulo final apresentaremos algumas aplicações dos conteúdos estudados neste trabalho. Dentre as mais importantes para a dissertação estão o Método de Newton, para o cálculo aritmético da raiz n-ésima de um número real, e o Método da Bissecção para determinar o(s) zero(s) de uma função.

Capítulo 1

Pré-Requisitos

As referências que utilizamos para escrever o primeiro capítulo estão baseadas em [2], [6], [7], [8] e [9].

1.1 Intervalos

Definição 1 *Sejam a e b números reais, com $a < b$. Chamamos de* ***intervalos*** *os nove subconjuntos de $\mathbb{R}$ abaixo:*

(1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;

(2) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;

(3) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;

(4) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;

(5) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$;

(6) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$;

(7) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$;

(8) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;

(9) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Os primeiros quatro intervalos acima são *limitados*, com extremos a e b: $[a, b]$ é *fechado*, (a, b) é *aberto*, $[a, b)$ é *fechado à esquerda* e $(a, b]$ é *fechado à direita*. Os demais intervalos são *ilimitados*: $(-\infty, b]$ é a semirreta à esquerda com origem, fechada, em b; $(-\infty, b)$ é a semirreta à esquerda com origem, aberta, em b; $[a, +\infty)$ é a semirreta à direita com origem, fechada, em a; $(a, +\infty)$ é a semirreta à direita com origem, aberta, em a; e $(-\infty, +\infty)$ é a reta $\mathbb{R}$. A respeito deste último, é conveniente imaginar o conjunto $\mathbb{R}$ como uma *reta* e os números reais como *pontos* dessa reta.

São considerados intervalos *fechados* aqueles em (1), (5), (7) e (9).

Definição 2 *Definimos o* ***valor absoluto****, ou módulo, de um número real x, e indicamos por $|x|$, ao maior dos números x e $-x$. Assim,*

$$|x| = \begin{cases} x, & \textit{se } x \geq 0, \\ -x, & \textit{se } x < 0; \end{cases}$$

ou ainda,

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Lema 1 *Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $-|x| \leq x \leq |x|$.*

Demonstração: Segue imediatamente da *Definição 2* que $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$. Desta última desigualdade, vem que $-|x| \leq x$. Logo, $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Lema 2 *Sejam a e x números reais, com $a \geq 0$. Então,*

$$-a \leq x \leq a \quad \textit{se, e somente se,} \quad |x| \leq a.$$

Demonstração: Temos que $-a \leq x \leq a$ se, e somente se, $x \geq -a$ e $x \leq a$ se, e somente se, $a \geq -x$ e $a \geq x$ se, e somente se, $a \geq \max\{-x, x\}$ se, e somente se, $a \geq |x|$. ■

Proposição 1 *Dados $a, \delta, x \in \mathbb{R}$, com $\delta \geq 0$, temos que*

$$|x - a| \leq \delta \quad \textit{se, e somente se,} \quad a - \delta \leq x \leq a + \delta.$$

Demonstração: Pelo *Lema 2*, $|x-a| \leq \delta$ se, e somente se, $-\delta \leq x-a \leq \delta$. Somando a a ambos os membros desta última desigualdade, temos que $a-\delta \leq x \leq a+\delta$. ■

Observação: Se trocarmos o símbolo $\leq$ por $<$, as afirmações do *Lema 2* e da *Proposição 1* ainda continuam válidas. A relação $x < a$ significa que o ponto x está à esquerda de a (ou, equivalentemente, que o ponto a está à direita de x).

Em termos de intervalos, a *Proposição 1* afirma que $|x-a| \leq \delta$ se, e somente se, x pertence ao intervalo fechado de extremos $a-\delta$ e $a+\delta$ se, e somente se, $x \in [a-\delta, a+\delta]$. Analogamente, $|x-a| < \delta$ se, e somente se, x pertence ao intervalo aberto de extremos $a-\delta$ e $a+\delta$ se, e somente se, $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Geometricamente, a expressão $|x-a|$ pode ser interpretada como a *distância* entre os pontos x e a. Logo, a desigualdade $|x-a| < \delta$ indica que a distância entre os pontos x e a é menor que δ.

Teorema 1 *Para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *temos que*

(i) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ *(Desigualdade Triangular);*

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$*;*

(iii) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, *se* $y \neq 0$.

Demonstração:

(i) Pelo *Lema 1*, temos que $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Somando membro a membro essas duas desigualdades, vem que $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$. Pelo *Lema 2*, concluímos que $|x+y| \leq |x|+|y|$. Além disso, observando que $|x-y| = |x+(-y)|$, temos que $|x-y| \leq |x| + |(-y)| = |x| + |y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Primeiramente, notemos que $k^2 = (-k)^2 = |k|^2$, para todo número real k. Daí,

$$|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2 .$$

Como $|x \cdot y| \geq 0$ e $|x| \cdot |y| \geq 0$, extraindo a raiz quadrada no primeiro e no último membro da igualdade acima, temos que $\sqrt{|x \cdot y|^2} = |x \cdot y|$ e $\sqrt{(|x| \cdot |y|)^2} = |x| \cdot |y|$. Logo, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) Com efeito, para todo $y \neq 0$, temos que

$$\left|\frac{1}{y}\right|^2 = \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{|y|^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada no primeiro e no último membro da igualdade acima, vem que $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$. Pelo item (ii), segue imediatamente que

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x \cdot \frac{1}{y}\right| = |x| \cdot \left|\frac{1}{y}\right| = |x| \cdot \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|},$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, com $y \neq 0$. ■

1.2 Funções

Definição 3 *Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Dizemos que f é uma **função** de X em Y, e indicamos por $f : X \to Y$, se existe uma regra $x \mapsto y$ que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$. Neste caso, dizemos que y é a **imagem** de x através de f e escrevemos $y = f(x)$.*

O conjunto X, chamado o *domínio* da função, é o conjunto onde f está definida. O conjunto Y, chamado o *contradomínio* da função, é o conjunto onde f assume os valores $f(x)$.

Neste trabalho usaremos funções de uma variável real do tipo $f : X \to \mathbb{R}$ em que X denota um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definição 4 *Se $f : X \to Y$ é uma função e A é um subconjunto de X, dizemos que o conjunto*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

*é a **imagem direta** de A pela função f.*

Definição 5 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que o conjunto*

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

*é o **gráfico** da função f.*

Geometricamente, adotando um sistema ortogonal de coordenadas, o conjunto $G(f)$ é o lugar geométrico descrito pelos pontos $P = (x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f. (Veja a *Figura 1.1*.)

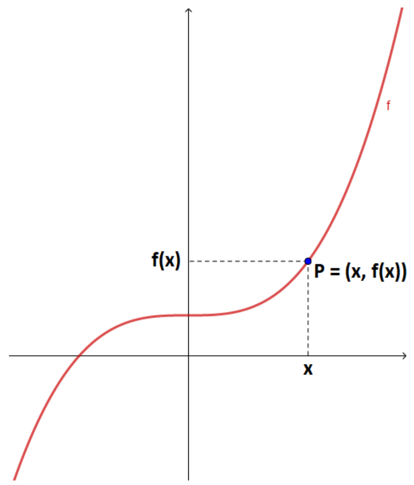

Figura 1.1: Gráfico de uma função f

Definição 6 *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função, definida num conjunto* $X \subset \mathbb{R}$.

(i) *Dizemos que um número* $y_0 \in \mathbb{R}$ *é o* ***valor mínimo*** *de* f, *se* $y_0 \leq f(x)$, *para todo* $x \in X$, *e existe* $x_0 \in X$ *tal que* $f(x_0) = y_0$. *Neste caso,* x_0 *é chamado o* ***ponto de mínimo*** *da função* f.

(ii) *Dizemos que um número* $y_0 \in \mathbb{R}$ *é o* ***valor máximo*** *de* f, *se* $f(x) \leq y_0$, *para todo* $x \in X$, *e existe* $x_0 \in X$ *tal que* $f(x_0) = y_0$. *Neste caso,* x_0 *é chamado o* ***ponto de máximo*** *da função* f.

Definição 7 *Seja* $f : X \to Y$ *uma função.*

(i) *Dizemos que* f *é* ***injetora***, *ou injetiva, sempre que* $x_1 \neq x_2$ *implicar* $f(x_1) \neq f(x_2)$, *para quaisquer* $x_1, x_2 \in X$.

(ii) *Dizemos que* f *é* ***sobrejetora***, *ou sobrejetiva, se o conjunto formado pelas imagens de* f *é igual ao seu contradomínio, indicado por* $Im(f) = Y$. *Ou seja, para todo* $y \in Y$, *deve existir* $x \in X$ *tal que* $f(x) = y$.

(iii) *Dizemos que* f *é* ***bijetora***, *ou bijetiva, se* f *é injetora e sobrejetora.*

Definição 8 *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função, definida num subconjunto* $X \subset \mathbb{R}$*. Para quaisquer* $x_1, x_2 \in X$,

(i) *dizemos que* f *é uma função* ***estritamente crescente*** *em* X, *se* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1) < f(x_2)$;

(ii) *dizemos que* f *é uma função* ***estritamente decrescente*** *em* X, *se* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1) > f(x_2)$.

Proposição 2 *Se* $X \subset \mathbb{R}$ *é um subconjunto e* $f : X \to \mathbb{R}$ *é uma função estritamente crescente ou estritamente decrescente, então* f *é injetiva.*

Demonstração: Sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $x_1 \neq x_2$. Então, ou $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$.

(i) Se f é crescente, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$. Por sua vez, $x_1 > x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$. Em ambos os casos, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(ii) Se f é decrescente, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$. Por sua vez, $x_1 > x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$. Em ambos os casos, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

De (i) e (ii), segue que f é injetiva. ■

Definição 9 *Dados um conjunto não vazio* $X \subset \mathbb{R}$, *um número real* c *e as funções de uma variável real* $f, g : X \to \mathbb{R}$, *definimos:*

(i) *A função* ***soma***, *indicada por* $f + g : X \to \mathbb{R}$ *e dada por*

$$(f+g)(x) \ = \ f(x) + g(x);$$

(ii) *A função* ***produto***, *indicada por* $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ *e dada por*

$$(f \cdot g)(x) \ = \ f(x) \cdot g(x);$$

(iii) *O* ***produto de uma constante pela função***, *indicada por* $c \cdot f : X \to \mathbb{R}$ *e dada por*

$$(c \cdot f)(x) \ = \ c \cdot f(x);$$

(iv) *A função* ***quociente***, *indicada por* $\dfrac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ *e dada por*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \ = \ \frac{f(x)}{g(x)},$$

com $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in X$.

Definição 10 *Dadas as funções* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$, *a* ***função composta*** *de* f *e* g, *nessa ordem, é a função* $g \circ f : X \to Z$, *dada por* $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$, *para todo* $x \in X$.

Notemos que a imagem $f(X)$ deve estar contida no domínio Y da função g para que a expressão $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$ faça sentido e nos forneça a função composta $g \circ f : X \to Z$.

1.3 Sequências

Definição 11 *Uma* ***sequência*** *de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *definida no conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais e assumindo valores no conjunto* $\mathbb{R}$. *Além disso, para todo* $n \in \mathbb{N}$, *a imagem* $x(n)$ *de* n *é indicada por* x_n.

As notações para sequência são $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(x_n)_{x \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n). Assim, uma sequência (x_n) qualquer de números reais é uma função $1 \mapsto x_1$, $2 \mapsto x_2$, $\ldots$, $n \mapsto x_n$, $\ldots$, que associa a cada número natural n o número real x_n, chamado o *n-ésimo termo* da sequência, ou o *termo de ordem n*.

Definição 12 *Dizemos que uma sequência* (x_n) *é:*

(i) ***limitada inferiormente****, se existe um número real a tal que* $x_n \geq a$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Neste caso, temos que* $x_n \in [a, +\infty)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) ***limitada superiormente****, se existe um número real b tal que* $x_n \leq b$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Neste caso, temos que* $x_n \in (-\infty, b]$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(iii) ***limitada****, se é limitada inferior e superiormente, ou seja, se existe um número real* $c > 0$ *tal que* $|x_n| \leq c$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Neste caso, temos que* $x_n \in [-c, c]$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definição 13 *Dizemos que uma sequência* (x_n) *é:*

(i) ***crescente****, se* $x_n < x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) ***não decrescente****, se* $x_n \leq x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(iii) ***decrescente****, se* $x_n > x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(iv) ***não crescente****, se* $x_n \geq x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes e não crescentes também são chamadas de sequências *monótonas*.

Definição 14 *Dizemos que uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge*** *para um número real* l *se, para cada real* $\varepsilon > 0$ *fixado arbitrariamente, existir um índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - l| < \varepsilon$, *para todo* $n > n_0$.

Alternativamente, se (x_n) converge para l, dizemos que a sequência é *convergente* e que o número real l é o *limite* da sequência, fato que indicaremos por:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l.$$

Lema 3 *Se uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, então seu limite é único.*

Demonstração: Por absurdo, suponhamos que existissem números reais distintos l_1 e l_2 tais que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \;=\; l_1 \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} x_n \;=\; l_2.$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$, a definição de limite de sequências nos garantiria a existência de índices $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \;\Rightarrow\; |x_n - l_1| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad n > n_2 \;\Rightarrow\; |x_n - l_2| < \varepsilon.$$

Pondo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, seguiria, pela desigualdade triangular, que

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; |l_1 - l_2| \;=\; |l_1 - x_n + x_n - l_2| \;\leq\; |x_n - l_1| + |x_n - l_2| \;<\; 2\varepsilon \;=\; |l_1 - l_2|\,,$$

o que claramente é uma contradição. ■

Proposição 3 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge para a. Tomando $\varepsilon = 1$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|x_n - a| < 1$. Ou seja, para todo $n > n_0$, temos que $x_n \in (a-1, a+1)$. Seja

$$c = \min\{x_1, x_2, ..., x_{n_0}, a-1, a+1\} \qquad \text{e} \qquad d = \max\{x_1, x_2, ..., x_{n_0}, a-1, a+1\}.$$

Então, todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[c, d]$, o que mostra que (x_n) é limitada. ∎

Proposição 4 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Exemplo 1 *Seja a um número real tal que $0 < a < 1$. Mostre que a sequência $(a, a^2, a^3, \ldots)$ converge e encontre seu limite.*

Solução: Se $0 < a < 1$, multiplicando a desigualdade por a em ambos os membros, temos que $0 < a^2 < a$. Logo,

$$0 < \cdots < a^{n+1} < a^n < \cdots < a^3 < a^2 < a < 1, \tag{1.1}$$

isto é, $(a, a^2, a^3, \ldots)$ é uma sequência decrescente e, além disso, $a^n \in (0, 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela *Proposição 4*, a sequência converge. A desigualdade em (1.1) nos sugere que a sequência está convergindo para zero. De fato, como $\dfrac{1}{a} > 1$, as potências de $\dfrac{1}{a}$ formam uma sequência crescente e ilimitada. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \ \Rightarrow \ \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon},$$

isto é, $\varepsilon > a^n$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \ \Rightarrow \ |a^n - 0| = |a^n| = a^n < \varepsilon,$$

o que mostra que a sequência $(a, a^2, a^3, \ldots)$ converge para zero.

Proposição 5 *Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências tais que (x_n) converge para zero e (y_n) é limitada. Então, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \cdot y_n = 0$.*

Demonstração: Por hipótese, (y_n) é limitada. Logo, existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (x_n) converge para zero, dado $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \quad \text{implica} \quad |x_n - 0| = |x_n| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Portanto, $n > n_0$ implica $|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$ ∎

Notemos que a *Proposição 5* nada afirma sobre a convergência de (y_n). Seu resultado é válido mesmo que (y_n) não seja convergente.

Proposição 6 *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *duas sequências tais que* (x_n) *converge para o número real* a *e* (y_n) *converge para o número real* b. *Então,* $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \pm y_n) \; = \; a \pm b$.

Demonstração:

(i) Dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \;\; \Rightarrow \;\; |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad n > n_2 \;\; \Rightarrow \;\; |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e utilizando a desigualdade triangular, vem que

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (a - b)| \;\; &= \;\; |(x_n - a) - (y_n - b)| \\ &\leq \;\; |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \;\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) \; = \; a - b$.

(ii) Analogamente, temos que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \; = \; a + b$. ■

Proposição 7 *Se* (x_n) *converge para* a *e* (y_n) *converge para* b, *então,* $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) \; = \; a \cdot b$.

Demonstração: Como, por hipótese, (y_n) é convergente, a *Proposição 3* nos afirma que essa sequência é limitada, isto é, existe $k > 0$ tal que $|y_n| < k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \;\; \Rightarrow \;\; |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2k} \qquad \text{e} \qquad n > n_2 \;\; \Rightarrow \;\; |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2\,(|a| + 1)}.$$

Tomando $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e utilizando a desigualdade triangular, vem que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| \;\; &= \;\; |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\ &\leq \;\; |x_n - a|\,|y_n| + |a|\,|y_n - b| \\ &< \;\; \frac{\varepsilon}{2k} \cdot k \; + \; |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2\,(|a| + 1)} \\ &= \;\; \frac{\varepsilon}{2} \; + \; \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|a|}{(|a| + 1)} \\ &< \;\; \frac{\varepsilon}{2} \; + \; \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 \\ &= \;\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência $(x_n \cdot y_n)$ converge para $a \cdot b$. ■

Teorema 2 (Teorema do Confronto para Sequências) *Fixemos* $a \in \mathbb{R}$. *Sejam* (x_n), (y_n) *e* (z_n) *três sequências tais que, para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \; \leq \; z_n \; \leq \; y_n.$$

Se as sequências (x_n) *e* (y_n) *convergem para o mesmo número* a, *então* (z_n) *converge para* a.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, existem índices $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon \; < \; x_n \; < \; a + \varepsilon$$

e

$$n > n_2 \quad \Rightarrow \quad |y_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon \; < \; y_n \; < \; a + \varepsilon.$$

Pondo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e usando a hipótese, concluímos que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad a - \varepsilon \; < \; x_n \; \leq \; z_n \; \leq \; y_n \; < \; a + \varepsilon,$$

logo $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n \; = \; a$. ∎

Lema 4 *Sejam* $J \subsetneq \mathbb{R}$ *um intervalo fechado,* $c \in \mathbb{R}$, *e* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in J$ *e* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \; = \; c$. *Então,* $c \in J$.

Demonstração: Seja $J = [a, b]$ e suponhamos, por absurdo, que $c \notin J$. Então, $c < a$ ou $c > b$. Se $c < a$, tomemos $\varepsilon_1 = \dfrac{a - c}{2} > 0$. Como, por hipótese, (x_n) converge para c, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $|x_n - c| < \varepsilon$, isto é, implica $x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Porém, $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a, b] = \emptyset$, contradizendo a hipótese de que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a, b]$. Por outro lado, se $c > b$, tomamos $\varepsilon_2 = \dfrac{c - b}{2} > 0$ e obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Novamente, temos que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a, b] = \emptyset$, o que é uma contradição.

Analogamente, se $J = [a, +\infty)$ ou $J = (-\infty, b]$, tomaríamos, respectivamente, ε_1 ou ε_2, chegando a uma contradição. ∎

Definição 15 *Dizemos que uma sequência* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de números reais é uma* ***sequência de Cauchy*** *se, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existir um índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$m, n > n_0 \;\; \Rightarrow \;\; |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Proposição 8 *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e suponhamos que exista um número real c tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n_0 \;\; \Rightarrow \;\; |x_m - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n > n_0 \;\; \Rightarrow \;\; |x_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, pela desigualdade triangular, $m, n > n_0$ implica

$$|x_m - x_n| = |x_m - c + c - x_n| = |(x_m - c) - (x_n - c)| \leq |x_m - c| + |x_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e, portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. ■

Proposição 9 *Toda sequência de Cauchy é convergente.*

Lema 5 (Lema das Aproximações Sucessivas) *Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq k < 1$. Suponhamos que a sequência (x_n) seja tal que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k\,|x_{n+1} - x_n|$, para qualquer número natural n. Então, (x_n) converge.*

Demonstração: Para mostrarmos que (x_n) converge, basta mostrarmos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Com efeito, temos que

$$|x_3 - x_2| \leq k\,|x_2 - x_1|;$$

$$|x_4 - x_3| \leq k\,|x_3 - x_2| \leq k^2\,|x_2 - x_1|;$$

$$|x_5 - x_4| \leq k\,|x_4 - x_3| \leq k^2\,|x_3 - x_2| \leq k^3\,|x_2 - x_1|;$$

$$\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k\,|x_n - x_{n-1}| \leq k^2\,|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq ... \leq k^{n-1}\,|x_2 - x_1|.$$

De onde,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^{n-1}\left|x_2 - x_1\right|, \tag{1.2}$$

seja qual for o natural n. Agora, do fato de $\mathbb{N}$ ser superiormente ilimitado, tomando dois números naturais m e n, com $m \geq n$, sempre existe $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $m = n + p$. Aplicando sucessivamente a desigualdade triangular em conjunto com a desigualdade em (1.2) e a fórmula da soma dos termos de uma PG, segue que

$$
\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |x_{n+p} - x_n| \\
&\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + ... + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq k^{n+p-2} |x_2 - x_1| + k^{n+p-3} |x_2 - x_1| + ... + k^{n-1} |x_2 - x_1| \\
&= \left(k^{n+p-2} + k^{n+p-3} + ... + k^{n-1}\right) |x_2 - x_1| \\
&= k^{n-1} \left(k^{p-1} + k^{p-2} + ... + k + 1\right) |x_2 - x_1| \\
&= k^{n-1} \left(\frac{1 - k^p}{1 - k}\right) |x_2 - x_1| \\
&\leq \frac{k^{n-1}}{1-k} |x_2 - x_1| .
\end{aligned}
$$

Finalmente, dado qualquer $\varepsilon > 0$:

(i) se $k = 0$, então $|x_m - x_n| = 0 < \varepsilon$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$;

(ii) no caso de ser $0 < k < 1$, como $\lim\limits_{n \to +\infty} k^{n-1} = 0$ e $\dfrac{|x_2 - x_1|}{1-k}$ é constante, temos que $\lim\limits_{n \to +\infty} k^{n-1} \dfrac{|x_2 - x_1|}{1-k} = 0$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n > n_0 \;\Rightarrow\; 0 < |x_m - x_n| < \frac{k^{n-1}}{1-k} |x_2 - x_1| < \varepsilon.$$

Em qualquer um dos casos, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implicam $|x_m - x_n| < \varepsilon$ e, portanto, (x_n) é de Cauchy. ∎

Uma aplicação interessante das aproximações sucessivas está no chamado *Método de Newton* para o cálculo da *raiz n-ésima* de um número real $-$ assunto que trataremos no Capítulo 5.

1.4 Limite de Funções

Definição 16 *Fixando um número* $a \in \mathbb{R}$, *dizemos que uma* ***vizinhança*** *de* a *é um intervalo da forma* $(a - \delta, a + \delta)$, *de centro* a *e raio* $\delta > 0$.

Definição 17 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$. *Dizemos que o número real a é um* ***ponto de acumulação*** *do conjunto* X, *e indicamos por* $a \in X'$, *se toda vizinhança de a contém algum* $x \in X$ *tal que* $x \neq a$.

Simbolicamente, a condição $a \in X'$ é dada por:

$$\text{dado qualquer } \delta > 0, \text{ existe } x \in X \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Definição 18 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *um subconjunto,* x_0 *um ponto de acumulação do conjunto* X *e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função. Dizemos que* f *tem* ***limite*** M *quando* x *tende a* x_0, *e indicamos por*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = M,$$

se, para cada $\varepsilon > 0$ *dado arbitrariamente, existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in X \quad e \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \textit{implicam} \quad |f(x) - M| < \varepsilon.$$

Lema 6 (Unicidade do Limite) *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ *e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função. Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M_1$ *e* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M_2$, *então* $M_1 = M_2$.

Demonstração: Seja a um ponto de acumulação do conjunto X e suponhamos, por absurdo, que existam $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ tais que $M_1 > M_2$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M_2$. Pela definição de limite, dado $\varepsilon = \dfrac{M_1 - M_2}{2} > 0$, existiriam $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - M_1| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{M_1 + M_2}{2} < f(x) < \frac{3M_1 - M_2}{2}$$

e

$$x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - M_2| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{3M_2 - M_1}{2} < f(x) < \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

Porém, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, chegaríamos à seguinte contradição:

$$x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{M_1 + M_2}{2} < f(x) < \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

O mesmo aconteceria se fosse $M_1 < M_2$, em vez de $M_1 > M_2$. Portanto, deve ser $M_1 = M_2$. ∎

Proposição 10 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ *e consideremos duas funções* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(x) \geq g(x)$, *para todo* $x \in X - \{a\}$. *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = M_1$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M_2$, *então* $M_1 \geq M_2$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que fosse $M_1 < M_2$. Pela definição de limite, dado $\varepsilon = -\dfrac{M_1 - M_2}{2} > 0$, existiriam $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - M_1| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \frac{3M_1 - M_2}{2} < f(x) < \frac{M_1 + M_2}{2}$$

e

$$x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |g(x) - M_2| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \frac{M_1 + M_2}{2} < g(x) < \frac{3M_2 - M_1}{2}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, seguiria que

$$x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ \frac{M_1 + M_2}{2} < g(x) \leq f(x) < \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

Uma contradição. ∎

Definição 19 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$.

(i) *Dizemos que a é um* ***ponto de acumulação à direita*** *de* X *e indicamos por* $a \in X'_+$, *se* $X \cap (a, a + \delta) \neq \emptyset$, *para todo* $\delta > 0$.

(ii) *Dizemos que a é um* ***ponto de acumulação à esquerda*** *de* X *e indicamos por* $a \in X'_-$, *se* $X \cap (a - \delta, a) \neq \emptyset$, *para todo* $\delta > 0$.

Definição 20 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $b \in X'_+$ *e* $c \in X'_-$.

(i) *Dizemos que o número real* L *é o* ***limite lateral à direita*** *de* f *quando* x *tende a* b, *e indicamos por*

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = L,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in X \quad e \quad 0 < x - b < \delta \quad implicam \quad |f(x) - L| < \varepsilon;$$

(ii) *Dizemos que o número real* M *é o* ***limite lateral à esquerda*** *de* f *quando* x *tende a* c, *e indicamos por*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = M,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in X \quad e \quad 0 < c - x < \delta \quad implicam \quad |f(x) - M| < \varepsilon.$$

Proposição 11 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $a \in X'_+ \cap X'_-$. *Então, o limite* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Proposição 12 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ *e* $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Se* $k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M_1$ *e* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M_2$, *então*

(i) $\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = M_1 \pm M_2$;

(ii) $\lim\limits_{x \to a} (k \cdot f)(x) = k \cdot M_1 = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

(iii) $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = M_1 \cdot M_2$.

Demonstração:

(i) Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - M_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e utilizando a desigualdade triangular, vem que

$$\begin{aligned}
|(f + g)(x) - [M_1 + M_2]| &= |[f(x) + g(x)] - [M_1 + M_2]| \\
&= |[f(x) - M_1] + [g(x) - M_2]| \\
&\leq |f(x) - M_1| + |g(x) - M_2| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = M_1 + M_2$.

Analogamente, temos que $\lim\limits_{x \to a} (f - g)(x) = M_1 - M_2$.

(ii) Se $k \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - M_1| < \frac{\varepsilon}{|k|}.$$

Usando a propriedade do módulo do produto, segue que

$$\begin{aligned}
|(k \cdot f)(x) - k \cdot M_1| &= |k \cdot f(x) - k \cdot M_1| \\
&= |k \cdot (f(x) - M_1)| \\
&= |k| \cdot |f(x) - M_1| \\
&< |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Se $k = 0$, então $k \cdot f(x) = 0$ para todo $x \in X$. Logo,

$$|(k \cdot f)(x) - k \cdot M_1| \;=\; |0 \cdot f(x) - 0 \cdot M_1| \;=\; |0 - 0| \;=\; 0 \;<\; \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a}(k \cdot f)(x) \;=\; k \cdot M_1 \;=\; k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

(iii) Pela desigualdade triangular, para todo $x \in X - \{a\}$ temos que

$$\begin{aligned}
|(f \cdot g)(x) - M_1M_2| \;&=\; |f(x)g(x) - M_1M_2| \\
&=\; |f(x)g(x) - M_1g(x) \;+\; M_1g(x) - M_1M_2]| \\
&=\; |[f(x) - M_1]\; g(x) \;+\; M_1\; [g(x) - M_2]| \\
&\leq\; |f(x) - M_1|\, |g(x)| \;+\; |M_1|\, |g(x) - M_2| \\
&\leq\; |f(x) - M_1|\; (|g(x) - M_2| + |M_2|) \;+\; |M_1|\, |g(x) - M_2| \\
&=\; |f(x) - M_1|\, |g(x) - M_2| \;+\; |f(x) - M_1|\, |M_2| \;+\; |M_1|\, |g(x) - M_2|\,.
\end{aligned}$$

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, para que tenhamos $|(f \cdot g)(x) - M_1M_2| < \varepsilon$ é suficiente que cada uma das três parcelas acima seja menor que $\dfrac{\varepsilon}{3}$. Para isso, primeiramente, devemos observar que a definição de limite garante a existência de $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \;\;\Rightarrow\;\; |f(x) - M_1| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

e

$$0 < |x - a| < \delta_2 \;\;\Rightarrow\;\; |g(x) - M_2| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}.$$

Assim, tomando $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue que

$$|f(x) - M_1|\, |g(x) - M_2| \;<\; \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \;=\; \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.3}$$

Por outro lado, existem $\delta_3 > 0$ e $\delta_4 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_3 \;\;\Rightarrow\;\; |f(x) - M_1| < \frac{\varepsilon}{3\,(|M_2| + 1)}$$

e

$$0 < |x - a| < \delta_4 \;\;\Rightarrow\;\; |g(x) - M_2| < \frac{\varepsilon}{3\,(|M_1| + 1)}.$$

Assim, tomando $\delta'' = \min\{\delta_3, \delta_4\}$, vem que

$$\begin{aligned}
|f(x) - M_1|\,|M_2| \; + \; |M_1|\,|g(x) - M_2| \quad &< \quad \frac{\varepsilon}{3\,(|M_2|+1)}\,|M_2| \; + \; |M_1|\,\frac{\varepsilon}{3\,(|M_1|+1)} \\
&= \quad \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{|M_2|}{(|M_2|+1)} \; + \; \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{|M_1|}{(|M_1|+1)} \\
&< \quad \frac{\varepsilon}{3} \cdot 1 \; + \; \frac{\varepsilon}{3} \cdot 1 \\
&= \quad \frac{\varepsilon}{3} \; + \; \frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

isto é,

$$|f(x) - M_1|\,|M_2| \; + \; |M_1|\,|g(x) - M_2| \; < \; \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{1.4}$$

Tomando agora $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, a concomitância das observações em (1.3) e (1.4) garante que

$$|(f \cdot g)(x) - M_1 M_2| \; < \; \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} \; = \; \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) \; = \; M_1 \cdot M_2$. ■

Vamos estudar agora o limite da *função composta.*

Proposição 13 *Sejam* $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $g : Y \to \mathbb{R}$, *com* $f(X) \subset Y$, *e sejam* $a \in X'$ *e* $b \in Y' \cap Y$. *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \; = \; b$, $\lim\limits_{y \to b} g(y) \; = \; c$ *e* $c = g(b)$, *então*

$$\lim_{x \to a} g\,(f(x)) \; = \; c.$$

Demonstração: Por hipótese, temos que $b \in Y' \cap Y$ e $c = g(b)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\alpha > 0$ tal que

$$y \in Y \;\text{ e }\; |y - b| < \alpha \;\Rightarrow\; |g(y) - c| < \varepsilon.$$

A partir de α, é possível obter um $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \;\text{ e }\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \alpha.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \;\text{ e }\; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |g\,(f(x)) - c| < \varepsilon,$$

que nos fornece o resultado desejado. ■

Abordamos agora algumas extensões do conceito de *limite*. Nosso objetivo é atribuir um significado para as expressões do tipo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \;=\; M \qquad e \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \;=\; \pm\infty. \tag{1.5}$$

As definições que seguem serão válidas sempre que o domínio de uma função for um conjunto ilimitado superior ou inferiormente. Entretanto, como os símbolos $+\infty$ ou $-\infty$ *não representam números reais*, a segunda expressão em (1.5) não exprime um limite no sentido estrito do termo.

Definição 21 (Limites no Infinito) *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *um subconjunto e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função.*

(i) Se X *é ilimitado superiormente, dizemos que* f *tem* ***limite*** M *quando* x *tende a* $+\infty$*, e indicamos por* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = M$*, se, para cada* $\varepsilon > 0$ *dado arbitrariamente, existe um* $\delta > 0$ *tal que* $x \in X$ *e* $x > \delta$ *implicam* $|f(x) - M| < \varepsilon$.

(ii) Se X *é ilimitado inferiormente, dizemos que* f *tem* ***limite*** M *quando* x *tende a* $-\infty$*, e indicamos por* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = M$*, se, para cada* $\varepsilon > 0$ *dado arbitrariamente, existe um* $\delta > 0$ *tal que* $x \in X$ *e* $x < -\delta$ *implicam* $|f(x) - M| < \varepsilon$.

Exemplo 2 *Se* n *é um número natural arbitrário, então*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} \;=\; 0.$$

Solução:

(i) Notemos que se $x > \delta > 0$, então $x^n > \delta^n$, logo $0 < \dfrac{1}{x^n} < \dfrac{1}{\delta^n}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ tal que $x \in X$ e $x > \delta$ implicam $\left|\dfrac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$.

(ii) Por outro lado, se $x < -\delta < 0$, então $|x| > \delta > 0$, logo $|x|^n > \delta^n$ e, assim, $0 < \left|\dfrac{1}{x^n}\right| < \dfrac{1}{\delta^n}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ tal que $x \in X$ e $x < -\delta$ implicam $\left|\dfrac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$.

Por (i) e (ii), temos que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$

Proposição 14 *Se* $k \in \mathbb{R}$ *é uma constante e* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M$, *então*

$$\lim_{x\to\pm\infty} (k \cdot g)(x) = k \cdot M = k \cdot \lim_{x\to\pm\infty} g(x).$$

Demonstração: Suponhamos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = M$ (o caso em que x tende a $-\infty$ pode ser tratado de modo análogo). Se $k \neq 0$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x > \delta$, então $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$. Usando a propriedade do módulo do produto, se $x \in X$ e $x > \delta$, segue que

$$\begin{aligned} |(k \cdot g)(x) - k \cdot M| &= |k \cdot g(x) - k \cdot M| \\ &= |k \cdot (g(x) - M)| \\ &= |k| \cdot |g(x) - M| \\ &< |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Se $k = 0$, então $k \cdot g(x) = 0$ para todo $x \in X$. Logo,

$$|(k \cdot g)(x) - k \cdot M| = |0 \cdot g(x) - 0 \cdot M| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon.$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (k \cdot g)(x) = k \cdot M = k \cdot \lim_{x\to+\infty} g(x).$ ∎

Proposição 15 *Se* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = M_1$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M_2$, *então* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (f+g)(x) = M_1 + M_2$.

Demonstração: Suponhamos $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = M_1$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = M_2$ (o caso em que x tende a $+\infty$ pode ser tratado de modo análogo). Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$x \in X,\ x < -\delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - M_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$x \in X,\ x < -\delta_2 \ \Rightarrow\ |g(x) - M_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ e usando a desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x) - (M_1 + M_2)| &= |(f(x) + g(x)) - (M_1 + M_2)| \\
&= |(f(x) - M_1) - (g(x) - M_2)| \\
&\leq |f(x) - M_1| + |g(x) - M_2| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $x \in X$ e $x < -\delta$ implicam $|(f+g)(x) - (M_1 + M_2)| < \varepsilon$. Portanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} (f+g)(x) = M_1 + M_2$. ∎

Definição 22 (Limites Infinitos) *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função.*

(i) Seja X ilimitado superiormente. Escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se, para cada $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $x > \delta$ implicam $f(x) > \varepsilon$.

(ii) Seja X ilimitado superiormente. Escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se, para cada $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $x > \delta$ implicam $f(x) < -\varepsilon$.

(iii) Seja X ilimitado inferiormente. Escrevemos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se, para cada $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $x < -\delta$ implicam $f(x) > \varepsilon$.

(iv) Seja X ilimitado inferiormente. Escrevemos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se, para cada $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $x < -\delta$ implicam $f(x) < -\varepsilon$.

Proposição 16 *Sejam $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = M$ $(M > 0)$. Então,*

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} (h \cdot g)(x) = -\infty$.

Demonstração:

(i) Se $M > 0$, do item (i) das definições 21 e 22 segue imediatamente que, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$x \in X, \;\; x > \delta_1 \;\;\Rightarrow\;\; f(x) > \frac{2\varepsilon}{M}$$

e

$$x \in X, \;\; x > \delta_2 \;\;\Rightarrow\;\; |g(x) - M| < \frac{M}{2} \;\;\Rightarrow\;\; g(x) > \frac{M}{2}.$$

Tomando $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $x \in X$ e $x > \delta$ implicam

$$(f \cdot g)(x) \;=\; f(x) \cdot g(x) \;>\; \frac{2\varepsilon}{M} \cdot \frac{M}{2} \;=\; \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) \;=\; +\infty.$

(ii) Se $M > 0$, do item (ii) das definições 21 e 22 segue imediatamente que, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$x \in X, \;\; x < -\delta_1 \;\;\Rightarrow\;\; h(x) < -\frac{2\varepsilon}{M} \;\;\Rightarrow\;\; -h(x) > \frac{2\varepsilon}{M}$$

e

$$x \in X, \;\; x < -\delta_2 \;\;\Rightarrow\;\; |g(x) - M| < \frac{M}{2} \;\;\Rightarrow\;\; g(x) > \frac{M}{2},$$

Daí, tomando $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $x \in X$ e $x < -\delta$ implicam

$$-h(x) \cdot g(x) \;>\; \frac{2\varepsilon}{M} \cdot \frac{M}{2} \;=\; \varepsilon,$$

ou seja, $x \in X$ e $x < -\delta$ implicam $h(x) \cdot g(x) < -\varepsilon$ e, portanto, $\lim_{x \to -\infty} (h \cdot g)(x) \;=\; -\infty.$ ∎

Exemplo 3 *Seja* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* ***função polinomial*** *dada por*

$$p(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

para $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ *e* $a_n > 0$. *Se* n *é ímpar, então*

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) \;=\; -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} p(x) \;=\; +\infty.$$

Solução: Por hipótese, temos que

$$p(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n > 0.$$

Colocando o fator x^n em evidência, podemos reescrever o polinômio como o produto:

$$p(x) \;=\; x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Para valores demasiadamente grandes de x, notemos que os termos $\dfrac{a_{n-i}}{x^i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se reduzem a tal ponto que podem ser desprezados, prevalecendo assim o sinal do coeficiente dominante $a_n > 0$ dentro dos parênteses. De fato, pela *Proposição 14* e pelo *Exemplo 2*, temos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-i}}{x^i} = a_{n-i} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^i} = a_{n-i} \cdot 0 = 0.$$

Agora, pela *Proposição 15*, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) &= \lim_{x\to\pm\infty} a_n + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{x^n} \\
&= a_n \cdot \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \cdots + a_0 \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} \\
&= a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 0 + \cdots + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0 \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

Além disso, se n é ímpar, temos que $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$. Logo, pela *Proposição 16*, se x é negativamente muito grande e n é ímpar, então

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = -\infty \cdot a_n = -\infty.$$

Por outro lado, se x é positivamente muito grande e n é ímpar, segue que

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = +\infty \cdot a_n = +\infty.$$

Capítulo 2

Continuidade

A bibliografia utilizada para escrever este capítulo está baseada em [1], [2], [6], [7] e [9].

2.1 A Definição de Função Contínua

Quando estudamos o conceito de continuidade de uma função f num ponto x_0, exigimos rigorosamente que x_0 pertença ao domínio dessa função.

Definição 23 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função* ***contínua no ponto*** *$x_0 \in X$ se a seguinte condição for satisfeita:*

$$\textit{dado } \ \varepsilon > 0, \ \ \textit{existe } \ \delta > 0 \ \ \textit{tal que } \ x \in X \ \ \textit{e } \ |x - x_0| < \delta \ \ \textit{implicam } \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definição 24 *Dizemos que f é uma função* ***contínua****, se f é contínua em todo ponto do seu domínio.*

Lema 7 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ e para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, vale a seguinte identidade algébrica:*

$$a^n - b^n \ = \ (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right). \tag{2.1}$$

Exemplo 4 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a* ***função raiz n-ésima****, dada por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, para todo $x \geq 0$. Mostre que f é contínua em $x_0 \in [0, +\infty)$.*

Solução

(i) f é contínua em $x_0 = 0$. De fato, para todo $x \geq 0$, temos que $|x| = x$ e assim

$$|x - x_0| = |x - 0| = |x| = x < \delta$$

implica

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}\right| = |\sqrt[n]{x} - 0| = |\sqrt[n]{x}| = \sqrt[n]{x} \;<\; \sqrt[n]{\delta} \leq \varepsilon.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta = \varepsilon^n$ tal que $x \geq 0$ e $|x| < \delta$ implicam $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(ii) f é contínua em $x_0 \in (0, +\infty)$. Fazendo $x = a^n$ e $x_0 = b^n$ na igualdade em (2.1), vem que $\sqrt[n]{x} = a$ e $\sqrt[n]{x_0} = b$, logo

$$x - x_0 \;=\; \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right)\left((\sqrt[n]{x})^{n-1} + (\sqrt[n]{x})^{n-2}(\sqrt[n]{x_0}) + \cdots + (\sqrt[n]{x})(\sqrt[n]{x_0})^{n-2} + (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}\right).$$

Daí, se $|x - x_0| < \delta$, então

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right| \\
&= \left|\frac{x - x_0}{(\sqrt[n]{x})^{n-1} + (\sqrt[n]{x})^{n-2}(\sqrt[n]{x_0}) + \cdots + (\sqrt[n]{x})(\sqrt[n]{x_0})^{n-2} + (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}\right| \\
&= \frac{|x - x_0|}{(\sqrt[n]{x})^{n-1} + (\sqrt[n]{x})^{n-2}(\sqrt[n]{x_0}) + \cdots + (\sqrt[n]{x})(\sqrt[n]{x_0})^{n-2} + (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}} \\
&< \frac{1}{(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}\,|x - x_0| \\
&< \frac{1}{(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}\,\delta.
\end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta = \varepsilon(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}$ tal que $x > 0$ e $|x - x_0| < \delta$ implicam $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Por (i) e (ii), temos a continuidade da função *raiz n-ésima* no intervalo $[0, +\infty)$.

Comparando as definições de continuidade e limite de uma função, segue o próximo resultado.

Proposição 17 *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função, definida num subconjunto* $X \subset \mathbb{R}$. *Se* $x_0 \in X' \cap X$, *então,* f *é contínua no ponto* x_0 *se, e somente, se* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Assim, quando x_0 é ponto de acumulação de X e está em X, para que uma função f seja contínua no ponto x_0 é necessário e suficiente que exista o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0, e seja igual ao valor que f assume em x_0.

Relacionamos agora os conceitos de *limite de uma sequência convergente* e *continuidade de uma função.* O próximo resultado nos assegura que as funções contínuas são caracterizadas pela *propriedade* de transformarem sequências convergentes em sequências convergentes.

Proposição 18 *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função, definida num subconjunto* $X \subset \mathbb{R}$. *Para que* f *seja contínua num ponto* $x_0 \in X$ *é necessário e suficiente que, para toda sequência* $x_n \in X$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Demonstração:

(i) Inicialmente, suponhamos que f seja contínua num ponto $x_0 \in X$. Por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in X,\ |x - x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Agora, a hipótese de que (x_n) converge para x_0 garante que, para $\delta_1 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_0| < \delta_1. \tag{2.3}$$

Logo, pela conjunção das condições estabelecidas em (2.2) e (2.3), dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

O que equivale a dizer que a sequência $(f(x_n))$ converge para $f(x_0)$.

(ii) Por outro lado, suponhamos que f não seja contínua no ponto $x_0 \in X$. Então, negando a definição de continuidade, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$,

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \ \text{ para algum } \ x \in X \ \text{ satisfazendo } \ |x - x_0| < \delta.$$

Em particular, tomando $n \in \mathbb{N}$ e $\delta = \dfrac{1}{n}$, a hipótese garante a existência de uma sequência $x_n \in X$ tal que

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Ou seja, a sequência (x_n) converge para x_0, ao passo que a sequência $(f(x_n))$ não converge para $f(x_0)$. Uma contradição resultante da premissa de que f não era contínua em x_0. ∎

Proposição 19 *Se* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas num ponto* $x_0 \in X$, *então as funções* $f+g$, $f-g$ *e* $f \cdot g$ *também são contínuas em* x_0.

Demonstração:

(i) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais que converge para $x_0 \in X$. Como, por hipótese, f e g são funções contínuas em x_0, pela *Proposição 18* segue que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(f\pm g)(x_n) &= \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)\pm g(x_n))\\ &= \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \pm \lim_{n\to+\infty} g(x_n)\\ &= f(x_0)\pm g(x_0)\\ &= (f\pm g)(x_0).\end{aligned}$$

Novamente, usando a *Proposição 18*, temos que a função $f \pm g$ é contínua em x_0. Portanto, a *soma* $f+g$ e a *diferença* $f-g$ também são contínuas em x_0.

(ii) Analogamente, trocando $\pm$ por $\cdot$ no item (i) e usando a *Proposição 18*, vem que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n)) = (f\cdot g)(x_0)$$

se, e somente se, a função $f \cdot g$ é contínua em x_0. Portanto, o *produto* $f \cdot g$ também é contínuo em x_0. ∎

Exemplo 5 *A* ***função polinomial*** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{2.4}$$

para $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ *e* $a_n \neq 0$, *é contínua em* $\mathbb{R}$.

Solução: A função *constante* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a_i$, é contínua em $\mathbb{R}$. A função *identidade* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$, também é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, pela *Proposição 19*, as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = x^i \qquad \text{e} \qquad f(x) = a_i x^i$$

também são contínuas, pois podem ser vistas como *produto* de funções contínuas. Portanto, toda função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela *soma* de um número finito de funções contínuas em (2.4) é contínua.

Teorema 3 (Teorema da Continuidade da Função Composta) *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e suponhamos que $f : X \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua num ponto $x_0 \in X$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua num ponto $x_1 \in Y$. Se $f(X) \subset Y$ e $x_1 = f(x_0)$, então a função $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0.*

Demonstração: Sejam $y_n \in Y$ e $x_n \in X$ sequências de números reais tais que (y_n) converge para x_1 e (x_n) converge para x_0. Como, por hipótese, g é contínua em x_1 e f é contínua em x_0, pela *Proposição 18* temos, respectivamente, que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = x_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} g(y_n) = g(x_1)$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Como $x_1 = f(x_0)$, segue que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} g\left(f(x_n)\right) = g(f(x_0)).$$

Em virtude da *Proposição 18*, concluímos que a função $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0. ∎

Em particular, a composição de funções contínuas também é contínua.

2.2 Funções Contínuas em Intervalos

Lema 8 (Bolzano) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

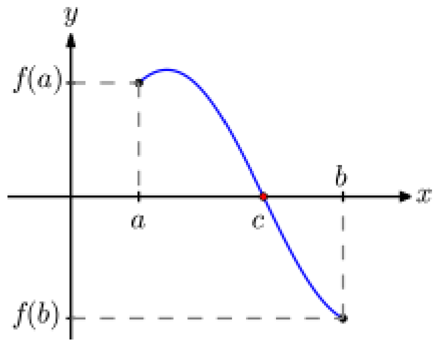

Figura 2.1: Lema de Bolzano

Teorema 4 (Teorema do Valor Intermediário) *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas. Se* $f(a) < g(a)$ *e* $f(b) > g(b)$ *(ou vice-versa), então existe um* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = g(c)$. *Em particular, para cada número real* d *tal que* $f(a) < d < f(b)$, *existe um* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = d$.

Demonstração: Tomemos a função auxiliar $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) - g(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Certamente, h é uma função contínua, pois é a diferença de funções contínuas. Agora, das hipóteses $f(a) - g(a) < 0$ e $f(b) - g(b) > 0$, segue que $h(a)h(b) < 0$. Pelo *Lema 8*, existe um $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$, isto é, existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Em particular, se g é a função constante, isto é, se $g(x) = d$ para todo $x \in [a, b]$, basta tomar a a função auxiliar $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) - d$. Pelo mesmo argumento usado anteriormente, existe um $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$, isto é, tal que $f(c) = d$. ■

Teorema 5 (Teorema de Weierstrass) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$, *então existem* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *tais que* $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, *para todo* $x \in [a, b]$.

Corolário 1 *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$, *então* $f([a, b]) = [c, d]$, *para alguns* $c, d \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Por hipótese, f é contínua em $[a, b]$. Pelo *Teorema de Weierstrass* f é limitada e possui valores máximo e mínimo, isto é, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

(i) Se $y \in f([a,b])$, então $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$. Pondo $c = f(x_1)$ e $d = f(x_2)$, temos que $y \in [c,d]$.

(ii) Reciprocamente, seja $y \in [c,d]$. Pelo *Teorema do Valor Intermediário*, existe $\bar{x} \in [a,b]$ tal que $f(\bar{x}) = y$ e, portanto, $y \in f([a,b])$.

Por (i) e (ii), temos que $f([a,b]) = [c,d]$. ∎

2.3 Continuidade Uniforme

Quando falamos de continuidade, em geral, não é possível obter um δ que dependa apenas do ε dado e que sirva para todos os pontos do domínio D_f da função. Tal δ depende tanto de ε como do ponto $x_0 \in D_f$ onde estamos analisando a continuidade. No entanto, se introduzirmos um conceito *mais forte* de continuidade, podemos obter funções cujo δ dependa apenas do ε dado.

Definição 25 *Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **uniformemente contínua**, se a seguinte condição for satisfeita:*

$$\textit{dado } \varepsilon > 0, \textit{ existe } \delta > 0 \textit{ tal que } x, y \in X \textit{ e } |x - y| < \delta \textit{ implicam } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Lema 9 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em X, então $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in X,\ |x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \ < \ \varepsilon. \tag{2.5}$$

Por sua vez, como (x_n) é uma sequência de Cauchy, escolhido $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \ \Rightarrow\ |x_m - x_n| < \delta. \tag{2.6}$$

Logo, pela conjunção de (2.5) e (2.6), dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \ \Rightarrow\ |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon.$$

Portanto, $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy. ■

É importante notar que se a função f for apenas contínua, o resultado do *Lema 9* não é válido.

Exemplo 6 *Seja* $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ *a função dada por* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *e seja* (x_n) *uma sequência, dada por* $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$. *Mostre que a sequência* $(f(x_n))$ *não é de Cauchy.*

Solução: Decorre da hipótese que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ e, portanto, (x_n) converge. Pela *Proposição 8*, (x_n) é de Cauchy. Agora, seja $(f(x_n))$ a sequência dada por $f(x_n) = \dfrac{1}{x_n} = n$, $n \geq 1$. Então, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$, logo $(f(x_n))$ não converge. A forma contrapositiva da *Proposição 9* garante que $(f(x_n))$ não é de Cauchy.

Proposição 20 *Toda função uniformemente contínua é contínua.*

Demonstração: Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Fixando arbitrariamente $y = x_0 \in X$, segue imediatamente da *Definição 25* que, dado $\varepsilon > 0$, que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \;\text{ e }\; |x - x_0| < \delta \;\text{ implicam }\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua. ■

Em geral, não vale a recíproca da *Proposição 20.* Porém, para funções definidas exclusivamente em intervalos fechados e limitados, a próxima proposição garante que os conceitos de continuidade e continuidade uniforme coincidem.

Proposição 21 *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em um intervalo fechado e limitado* $[a,b]$, *então* f *é uniformemente contínua em* $[a,b]$.

Exemplo 7 *Seja a um número real positivo. A função raiz n-enésima* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = \sqrt[n]{x}$, *é uniformemente contínua em qualquer intervalo do tipo* $[0,a]$.

Solução: Pelo *Exemplo 4*, f é sempre contínua em $[0, +\infty)$. Em particular, f é contínua em qualquer intervalo do tipo $[0, a]$, com $a > 0$. Pela *Proposição 21*, segue que f é uniformemente contínua em qualquer intervalo do tipo $[0, a]$.

Mais geralmente, a função *raiz n-ésima* é uniformemente contínua em qualquer intervalo do tipo $[a, +\infty)$, $a > 0$. Isso será mostrado mais adiante no *Exemplo 10.*

2.4 Um Conceito de Continuidade Segundo Lipschitz

A definição que segue introduz um outro conceito de continuidade, devido ao matemático alemão Rudolf Lipschitz (1832-1903). Este conceito é *mais forte* que o de continuidade uniforme.

Definição 26 *Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é* **lipschitziana** *em I, se existir uma constante real $L > 0$ (denominada constante de Lipschitz) tal que*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|, \tag{2.7}$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$. Ou ainda,

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq L, \tag{2.8}$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 \neq x_2$.

Observação: Em alguns casos bem específicos, pode acontecer de uma função ser lipschitziana em todo o conjunto $\mathbb{R}$. Nos casos em que isto ocorrer, diremos que a função é **globalmente lipschitziana** em $\mathbb{R}$.

Exemplo 8 *Toda função afim é globalmente lipschitziana em $\mathbb{R}$.*

Solução: Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Para quaisquer x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, temos que:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(ax_1 + b) - (ax_2 + b)| = |a(x_1 - x_2)| = |a|\, |x_1 - x_2|.$$

Pondo $L = |a| > 0$, segue que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$, $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Portanto, f é globalmente lipschitziana em $\mathbb{R}$.

Teorema 6 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, f é uniformemente contínua em I e, portanto, é contínua em I.*

Demonstração: Devemos mostrar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um $\delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, sempre que $|x_1 - x_2| < \delta$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in I$.

Seja L a constante de Lipschitz. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L} > 0$ (δ depende de ε) tal que $x_1, x_2 \in I$ e $|x_1 - x_2| < \dfrac{\varepsilon}{L}$ impliquem

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| < L\ \delta = L\ \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Portanto, f é uniformemente contínua em I. ■

Naturalmente, nos perguntamos se vale a recíproca deste teorema. Supondo f continuamente uniforme em I, será que podemos afirmar que f é lipschitziana em I ? A resposta é não!

Exemplo 9 *Seja a um número real positivo. A função raiz quadrada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$, não é lipschitziana num intervalo do tipo $[0, a]$. Embora seja uniformemente contínua em $[0, a]$.*

Solução: Com efeito, para quaisquer $x_1, x_2 \in [0, a]$, com $x_1 \neq x_2$, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| &= \left|\frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2}\right| \\
&= \left|\frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})}{(x_1 - x_2)} \cdot \frac{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}\right| \\
&= \left|\frac{(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}\right| \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}.
\end{aligned}$$

Fazendo $x_2 = 4x_1$, notemos que $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \ = \ \sqrt{x_1} + \sqrt{4x_1} \ = \ 3\sqrt{x_1}$ e

$$\lim_{x_1 \to 0^+} 3\sqrt{x_1} \ = \ 0.$$

Assim, dado $L > 0$, existe $0 < \delta \leq a$ tal que $x_1 \in (0, a]$ e $0 < x_1 < \delta$ implicam

$$|3\sqrt{x_1} - 0| \;=\; |3\sqrt{x_1}| \;=\; 3\sqrt{x_1} \;<\; \frac{1}{L},$$

isto é, $\dfrac{1}{3\sqrt{x_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} > L$. Logo, existem $x_1, x_2 \in [0, a]$ tais que

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \;>\; L$$

e, portanto, a função *raiz quadrada* não é lipschitziana num intervalo do tipo $[0, a]$. No entanto, o *Exemplo 7* garante que a função é uniformemente contínua em $[0, a]$.

Exemplo 10 *Seja a um número real positivo. A função raiz n-enésima* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = \sqrt[n]{x}$, *é lipschitziana em qualquer intervalo do tipo* $[a, +\infty)$.

Solução: Dados $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, temos que $x_1 \geq a$ e $x_2 \geq a$. Logo,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |\sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x_2}| \\ &= \left|\frac{x_1 - x_2}{(\sqrt[n]{x_1})^{n-1} + (\sqrt[n]{x_1})^{n-2}(\sqrt[n]{x_2}) + \cdots + (\sqrt[n]{x_1})(\sqrt[n]{x_2})^{n-2} + (\sqrt[n]{x_2})^{n-1}}\right| \\ &= \frac{|x_1 - x_2|}{(\sqrt[n]{x_1})^{n-1} + (\sqrt[n]{x_1})^{n-2}(\sqrt[n]{x_2}) + \cdots + (\sqrt[n]{x_1})(\sqrt[n]{x_2})^{n-2} + (\sqrt[n]{x_2})^{n-1}} \\ &\leq \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{a})^{n-1}}\,|x_1 - x_2|\,, \end{aligned}$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$. Pondo $L = \dfrac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{a})^{n-1}} > 0$, vem que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$$

e, portanto, f é lipschitziana em $[a, +\infty)$. Pelo *Teorema 6*, f também é continuamente uniforme em $[a, +\infty)$.

Proposição 22 *A soma de funções lipschitzianas é lipschitziana.*

Demonstração: Suponhamos que f e g sejam funções reais lipschitzianas definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com constantes reais positivas L_1 e L_2 respectivamente. Vamos mostrar que a função $f + g : I \to \mathbb{R}$ também é lipschitziana em I, com constante $L = L_1 + L_2 > 0$.

Sendo f e g funções lipschitzianas em I, temos que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_1 |x_1 - x_2|$ e $|g(x_1) - g(x_2)| \leq L_2 |x_1 - x_2|$. Agora, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |(f+g)(x_1) - (f+g)(x_2)| &= |f(x_1) - f(x_2) + g(x_1) - g(x_2)| \\ &\leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \\ &\leq L_1 |x_1 - x_2| + L_2 |x_1 - x_2| \\ &= (L_1 + L_2) |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$. Portanto, pondo $L = L_1 + L_2$, temos

$$|(f+g)(x_1) - (f+g)(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|,$$

seguindo a tese. ∎

Proposição 23 *Seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Se f é uma função lipschitziana num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com constante $L > 0$, então $k \cdot f$ também é uma função lipschitziana em I com constante $|k| \cdot L > 0$.*

Demonstração: Consideremos uma função $f : I \to \mathbb{R}$, lipschitziana em I, com constante $L > 0$. Com efeito,

$$|(k \cdot f)(x_1) - (k \cdot f)(x_2)| = |k \cdot (f(x_1) - f(x_2))| = |k| \cdot |f(x_1) - f(x_2)| \leq |k| \cdot L |x_1 - x_2|,$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$. O que nos mostra que $k \cdot f$ é lipschitziana em I. ∎

Lema 10 *Uma função lipschitziana definida num intervalo limitado é limitada.*

Demonstração: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana, definida num intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$, com constante L. Então, existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k$, para todo $x \in I$. Assim, dados $x_1, x_2 \in I$, decorre da desigualdade triangular que $|x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq k + k = 2k$ e, portanto

$$\begin{aligned} |f(x_1)| &= |f(x_1) - f(x_2) + f(x_2)| \\ &\leq |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2)| \\ &\leq L |x_1 - x_2| + |f(x_2)| \\ &\leq 2kL + |f(x_2)|. \end{aligned}$$

Fixando x_2 e pondo $M = 2kL + |f(x_2)|$, temos que $|f(x_1)| \leq M$, para todo $x_1 \in I$. ∎

Proposição 24 *O produto de funções lipschitzianas é lipschitziano, desde que as funções estejam definidas num intervalo limitado.*

Demonstração: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo *limitado* e suponhamos que $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ sejam funções lipschitzianas com constantes reais positivas L_1 e L_2, respectivamente. Vamos mostrar que a função $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ também é lipschitziana em I.

Pelas hipóteses, temos que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_1 |x_1 - x_2|$, $|g(x_1) - g(x_2)| \leq L_2 |x_1 - x_2|$. Pelo *Lema 10*, existe uma constante real $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ e $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in I$. Da desigualdade triangular, segue agora que

$$\begin{aligned}
|(f \cdot g)(x_1) - (f \cdot g)(x_2)| &= |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \\
&= |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_1) + f(x_2)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \\
&= |[f(x_1) - f(x_2)]g(x_1) \ + \ f(x_2)[g(x_1) - g(x_2)]| \\
&\leq |f(x_1) - f(x_2)|\,|g(x_1)| \ + \ |f(x_2)|\,|g(x_1) - g(x_2)| \\
&\leq L_1 |x_1 - x_2| \cdot M \ + \ M \cdot L_2 |x_1 - x_2| \\
&= M \cdot (L_1 + L_2)\,|x_1 - x_2|\,,
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$. Portanto, pondo $L = M \cdot (L_1 + L_2)$, temos

$$|(f \cdot g)(x_1) - (f \cdot g)(x_2)| \ \leq \ L\,|x_1 - x_2|,$$

seguindo a tese. ∎

Exemplo 11 *Se* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo limitado, então a função* $f : I \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = x^n$, *para todo* $x \in I$ *e para todo* $n \in \mathbb{N}$, *é lipschitziana em* I.

Solução: Tomando arbitrariamente $x, y \in I$, com $x > y$, pela identidade algébrica em (2.1) temos que

$$x^n - y^n \ = \ (x - y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right).$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |x^n - y^n| \\
&= \left|(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)\right| \\
&= |x-y|\left|x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right|.
\end{aligned}
$$

Como I é limitado, existe $c>0$ tal que $|x|\le c$, para todo $x\in I$. Segue, pela desigualdade triangular, que

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\le |x-y|\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|y| + \cdots + |x||y|^{n-2} + |y|^{n-1}\right) \\
&\le |x-y|\left(c^{n-1} + c^{n-2}\cdot c + \cdots + c\cdot c^{n-2} + c^{n-1}\right) \\
&= |x-y|\left(n\cdot c^{n-1}\right).
\end{aligned}
$$

Assim, pondo $L=nc^{n-1}>0$, temos que $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$, para quaisquer $x,y\in I$, isto é, f é lipschitziana em I.

Proposição 25 *A função polinomial* $p: I\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$
p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,
$$

para $n\in\mathbb{N}$, $a_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1,\ldots,n$ *e* $a_n\neq 0$, *é lipschitziana em qualquer intervalo limitado* $I\subset\mathbb{R}$.

Demonstração: A função *constante*, dada por $p(x)=a_i$, é lipschitziana em I. Além disso, pela *Proposição 23* e pelo *Exemplo 11*, cada monômio a_ix^i, $i=1,\ldots,n$, é lipschitziano em I. Por sua vez, a *Proposição 22* garante que a soma dos $n+1$ monômios também é lipschitziana em I. Portanto, o polinômio dado por

$$
p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0
$$

é lipschitziano em I. A constante L de Lipschitz pode ser obtida com base no *Exemplo 11*, observando que em cada monômio a_ix^i a constante é dada por $L_i = i\cdot|a_i|\,c^{i-1}>0$, para $I=[-c,c]$. Assim,

$$
L = \sum_{i=1}^{n} i\cdot|a_i|\,c^{i-1}.
$$

■

Exemplo 12 *Considere o intervalo* $I = [-2, 2]$. *Determine a constante* L *de Lipschitz da função polinomial* $p : I \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$p(x) \;=\; x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 20x - 50.$$

Solução: Por hipótese, como $I = [-2, 2]$ é um intervalo limitado, temos que $|x| \leq 2$, para todo $x \in I$. Pela *Proposição 25*, p é lipschitziana em I. Portanto, faz sentido querer determinar a constante de Lipschitz. Sejam $p_0 = -50$, $p_1 = 20x$, $p_2 = -3x^2$, $p_3 = 5x^3$ e $p_4 = x^4$. Em cada um dos monômios, a constante de Lipschitz é dada, respectivamente, por

$$\begin{aligned} L_0 \;&=\; 0, \\ L_1 \;&=\; 1 \cdot |20|\, 2^0 \;=\; 20, \\ L_2 \;&=\; 2 \cdot |-3|\, 2^1 \;=\; 12, \\ L_3 \;&=\; 3 \cdot |5|\, 2^2 \;=\; 60, \\ \text{e} \quad L_4 \;&=\; 4 \cdot 2^3 \;=\; 32. \end{aligned}$$

Logo, $L \;=\; L_4 + L_3 + L_2 + L_1 + L_0 \;=\; 32 + 60 + 12 + 20 + 0 \;=\; 124.$

Concluímos este capítulo com um resultado sobre a composição de funções lipschitzianas.

Teorema 7 *Sejam* $I_1 \subset \mathbb{R}$ *e* $I_2 \subset \mathbb{R}$ *intervalos,* $f : I_1 \to \mathbb{R}$ *uma função lipschitziana em* I_1, *com constante* L_1, *e* $g : I_2 \to \mathbb{R}$ *uma função lipschitziana em* I_2, *com constante* L_2. *Se* $f(I_1) \subset I_2$, *então a função composta* $g \circ f : I_1 \to \mathbb{R}$ *é lipschitziana em* I_1, *com constante* $L \;=\; L_1 \cdot L_2$.

Demonstração: Por hipótese, como g é lipschitziana em I_2, com constante L_2, dados $y_1, y_2 \in I_2$, temos que

$$|g(y_1) - g(y_2)| \;\leq\; L_2\, |y_1 - y_2|\,.$$

Pelo fato de f ser lipschitziana em I_1, segue que

$$|(g \circ f)(x_1) - (g \circ f)(x_2)| \;=\; |g\,(f(x_1)) - g\,(f(x_2))| \;\leq\; L_2\,|f(x_1) - f(x_2)| \;\leq\; L_2 L_1\,|x_1 - x_2|$$

e, portanto, $g \circ f : I_1 \to \mathbb{R}$ é lipschitziana em I_1, com constante $L \;=\; L_1 \cdot L_2$. ∎

Exemplo 13 *Consideremos* $f : [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = 2x - 1$, *e* $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, *dada por* $g(x) = x^4$. *É possível realizar a composição* $g \circ f : [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$*? Em caso afirmativo, a função composta* $g \circ f$ *é lipschitziana em* $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$*?*

Solução: Como f é estritamente crescente em $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ e

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \qquad \text{e} \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$$

são, respectivamente, os valores mínimo e máximo que f assume nesse intervalo, temos que $f\left([-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]\right) \subset [-2, 2]$ e, portanto, faz sentido realizar a composição $g \circ f : [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$, dada por $(g \circ f)(x) = (2x - 1)^4$.

Pelo *Exemplo 8*, f é lipschitziana em $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, com constante $L_1 = |2| = 2$. Pelo *Exemplo 11*, g é lipschitziana em $[-2, 2]$, com constante $L_2 = 4 \cdot 2^3 = 32$. Pelo *Teorema 7*, $g \circ f$ é lipschitziana em $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, com constante $L = L_1 \cdot L_2 = 2 \cdot 32 = 64$.

Capítulo 3

Pontos Periódicos

As referências que utilizamos para escrever este capítulo podem ser encontradas em [4], [6], [7], [9] e [10].

3.1 Ponto Fixo

Definição 27 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *um conjunto não vazio e* $f : X \to X$ *uma função. Dizemos que o elemento* $x_0 \in X$ *é um* ***ponto fixo*** *de* f*, se* $f(x_0) = x_0$.

Existem pelo menos duas maneiras de encontrar o(s) ponto(s) fixo(s) de uma função f. A primeira é resolvendo a equação algébrica $f(x) = x$. A outra é analisar graficamente a interseção de f com a bissetriz dos quadrantes ímpares, $y = x$. Nem sempre, porém, é fácil determinar o ponto fixo de uma função.

A pergunta que surge agora é: uma função sempre tem ponto fixo? O próximo resultado afirma que toda função contínua que leva um intervalo real nele próprio possui pelo menos um fixo nesse intervalo.

Teorema 8 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 1) *Se* $f : [a, b] \to [a, b]$ *é uma função contínua, então* f *tem pelo menos um ponto fixo no intervalo* $[a, b]$.

Demonstração: Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, nada temos a provar. Caso contrário, $f(a) > a$ e $f(b) < b$. Nosso objetivo é mostrar que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Consideremos a função auxiliar $\phi : [a,b] \to [a,b]$ dada por $\phi(x) = f(x) - x$, para todo $x \in [a,b]$. Certamente, ϕ é uma função contínua, pois é a diferença entre funções contínuas. Como, por hipótese, $f(a) - a > 0$ e $f(b) - b < 0$, temos que $\phi(a)\phi(b) < 0$. Concluímos, então, pelo *Lema 8*, que existe um $x_0 \in [a,b]$ tal que $\phi(x_0) = 0$, isto é, tal que $f(x_0) = x_0$. ∎

Definição 28 *Seja* $f : X \to X$ *uma função, definida em um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$. *Para todo número* n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *definimos* f^n *como:*

$f^0 = id$ *(Função Identidade)*

$f^1 = f$

$f^n = f \circ f^{n-1}$

Observação: Quando usarmos a notação $f^n(x_0)$ estaremos indicando *a n-ésima iteração de f no ponto* x_0, ou seja, a n-ésima *composição* de f sobre si mesma no ponto x_0. Assim, estabelecemos que

$f^2(x_0) = (f \circ f)(x_0) = f(f(x_0))$ é a segunda iteração de f em x_0;

$f^3(x_0) = (f \circ f^2)(x_0) = f(f(f(x_0)))$ é a terceira iteração de f em x_0;

. . .

$f^n(x_0) = (f \circ f^{n-1})(x_0) = f(f(...f(x_0)...))$ é a n-ésima iteração de f em x_0.

3.2 O Teorema de Li e Yorke

Nesta seção vamos estudar um resultado que, na literatura matemática, ficou conhecido como *Teorema de Li-Yorke.* Este afirma que a existência de um ponto periódico de período 3, numa função contínua, garante a existência de pontos periódicos de qualquer outro período. Para prosseguirmos com o assunto, passemos primeiramente à definição de *ponto periódico.*

Definição 29 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *um subconjunto qualquer. Dizemos que* x_0 *é um* ***ponto periódico*** *de uma função contínua* $f : X \to X$, *se* $f^n(x_0) = x_0$, *para algum* $n > 0$.

Além disso, quando k *é o menor número natural satisfazendo* $f^k(x_0) = x_0$, *dizemos que* x_0 *é um ponto periódico de* ***período*** k. *Neste caso, temos que* $f^k(x_0) = x_0$ *e* $f^j(x_0) \neq x_0$

para $1 \leq j < k$.

O *ponto fixo* é um caso particular de ponto periódico. Se x_0 é um ponto fixo, então $f(x_0) = x_0$. Obviamente, o *período* do ponto fixo é 1.

Definição 30 *Seja $f : X \to X$ uma função, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. A **órbita** de um ponto $x_0 \in X$ em relação à f é o conjunto*

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), ...\} = \{f^n(x_0) : n \geq 0\}.$$

Se x_0 é um ponto periódico de período k, então $\mathcal{O}_f(x_0)$ é o conjunto finito:

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^j(x_0)\} = \{f^j(x_0) : 0 \leq j \leq k-1\}.$$

Lema 11 *Se x_0 é um ponto periódico de período k, então o conjunto $\mathcal{O}_f(x_0)$ possui exatamente k elementos distintos.*

Demonstração: Por hipótese, temos que $f^k(x_0) = x_0$ e $f^j(x_0) \neq x_0$, para $1 \leq j < k$. Suponhamos, por absurdo, que existissem números naturais r e s tais que $1 \leq r < s < k$ e $f^r(x_0) = f^s(x_0)$. Fazendo $k - s = p$, teríamos que

$$f^{p+r}(x_0) = f^p\left(f^r(x_0)\right) = f^p\left(f^s(x_0)\right) = f^{p+s}(x_0) = f^{(k-s)+s}(x_0) = f^k(x_0) = x_0.$$

Mas isso contradiz a hipótese, visto que $p + r < k$. ∎

Exemplo 14 *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos determinar o conjunto $\mathcal{O}_f(0)$.*

Solução: Temos que:

$$\begin{gathered} f(0) = -1, \\ f^2(0) = f(f(0)) = f(-1) = 0 \qquad \text{e} \\ f^3(0) = f(f^2(0)) = f(0) = -1. \end{gathered}$$

Logo,

$$\mathcal{O}_f(0) = \{0, -1\}.$$

O *Teorema de Li-Yorke* contém uma afirmação simples, porém surpreendente, a respeito de pontos periódicos. Ele nos diz que se uma função contínua tem um ponto periódico de período 3, então a função também tem pontos periódicos de todos os outros períodos. Antes, porém, de prosseguirmos com o teorema, vejamos três lemas importantes que serão utilizados na sua demonstração.

Lema 12 *Seja* $F : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, definida num intervalo* $I \subset \mathbb{R}$. *Para qualquer intervalo fechado e limitado* $J \subset F(I)$, *existe um intervalo fechado e limitado* $I' \subset I$ *tal que* $F(I') = J$.

Demonstração: Seja $J = [F(p), F(q)]$, onde $p, q \in I = [a, b]$. Há duas possibilidades:

(i) $p < q$. Consideremos $r, s \in [p, q]$ satisfazendo as seguintes condições: $r < s$, r é o último ponto do intervalo tal que $F(r) = F(p)$ e s é o primeiro ponto do intervalo tal que $F(s) = F(q)$. Pondo $I' = [r, s]$, temos que $F(I') = J$. (Veja a *Figura 3.1.*)

(ii) $q < p$. Seja r o último ponto do intervalo $[a, b]$ tal que $F(r) = F(q)$ e seja s o primeiro ponto do intervalo $[a, b]$ tal que $F(s) = F(p)$, com $r < s$. Pondo $I' = [r, s]$, temos também que $F(I') = J$. (Veja a *Figura 3.2.*) ■

Lema 13 *Sejam* $f : I \to I$ *uma função contínua e* $(I_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ *uma sequência de intervalos fechados e limitados, com* $I_n \subset I$ *e* $I_{n+1} \subset f(I_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então, existe uma sequência* $(Q_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ *de intervalos fechados e limitados tal que* $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ *e* $f^n(Q_n) = I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstração: Por indução sobre n.

(i) Definindo $Q_0 = I_0$, observemos que $f^0(Q_0) = I_0$. Por hipótese, existe o intervalo fechado e limitado I_1 tal que $I_1 \subset f(I_0) = f(Q_0)$. Pelo *Lema 12*, existe $Q_1 \subset Q_0$, fechado e limitado, tal que $f^1(Q_1) = f(Q_1) = I_1$. Portanto, a afirmação é válida para $n = 1$.

(ii) Agora, vamos supor que Q_r foi definido de tal forma que $f^r(Q_r) = I_r$. Então,

$$I_{r+1} \subset f(I_r) = f \circ f^r(Q_r) = f^{r+1}(Q_r).$$

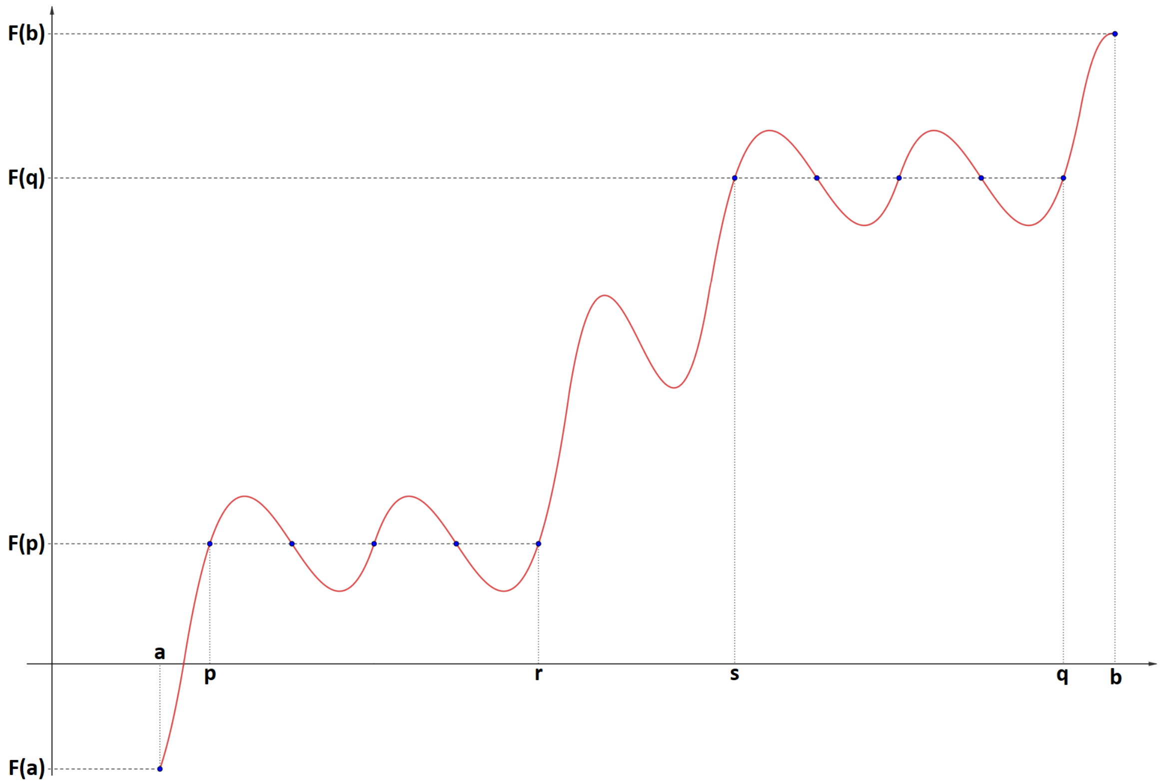

Figura 3.1: Caso 1: $p < q$

Pelo *Lema 12*, aplicado à função f^{r+1}, existe $Q_{r+1} \subset Q_r$ tal que $f^{r+1}(Q_{r+1}) = I_{r+1}$.

Pelo Princípio da Indução Finita, segue a tese. ■

O próximo lema é uma aplicação imediata do *Lema de Bolzano*.

Lema 14 *Sejam* $G : J \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, definida num intervalo* $J \subset \mathbb{R}$, *e* $I \subset J$ *um intervalo fechado e limitado. Se* $I \subset G(I)$, *a função* G *tem ponto fixo no intervalo* I.

Demonstração: Seja $I = [a, b]$. Tomemos os pontos α e β no intervalo I tais que $G(\alpha) = a$, $G(\beta) = b$ e consideremos a função auxiliar $H : J \to \mathbb{R}$, dada por $H(x) = x - G(x)$, para todo $x \in J$. Notemos que H é a diferença de funções contínuas e, portanto, também é contínua. Além disso, como $\alpha > a$ e $\beta < b$, temos que $\alpha > G(\alpha)$ e $\beta < G(\beta)$, ou seja, $\beta - G(\beta) < 0 < \alpha - G(\alpha)$. Concluímos, pelo *Lema 8*, que existe pelo menos um $x_0 \in I \subset J$ tal que $H(x_0) = 0$, ou seja, tal que $G(x_0) = x_0$. ■

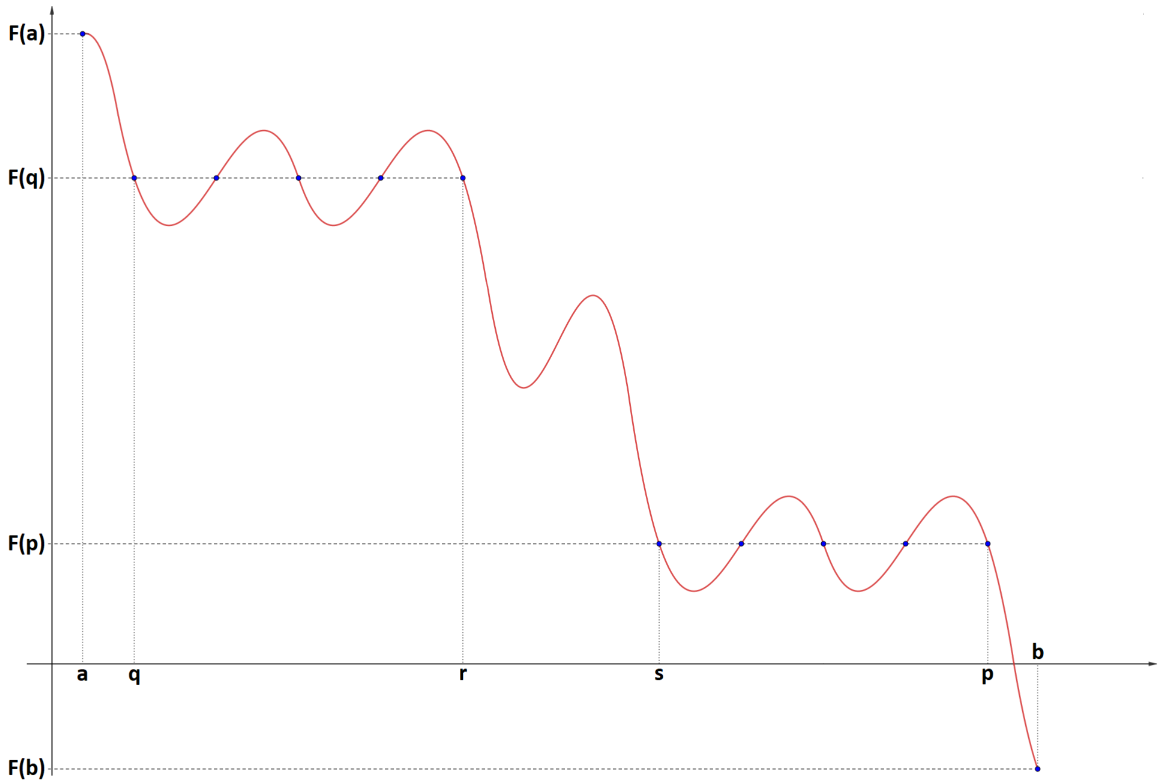

Figura 3.2: Caso 2: $q < p$

Exemplo 15 *Seja* $\varphi : [1,3] \to [1,3]$ *definida de tal forma que em cada intervalo* $[n, n+1]$, $1 \leq n \leq 2$, φ *é uma função afim, com* $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 3$ *e* $\varphi(3) = 1$*. Vamos mostrar que* φ *possui pontos periódicos de períodos 1, 2, 3 e 4.*

Solução:

(i) Existe ponto periódico de período 1.

Como $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 3$ e $\varphi(3) = 1$, temos que φ é a função dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} x+1, & se\ 1 \leq x \leq 2; \\ -2x+7, & se\ 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Notemos que

$$[2,3] \subset \varphi\left([2,3]\right) = [1,3].$$

Pelo *Lema 14*, φ tem ponto fixo no intervalo $[2,3]$. De fato, neste intervalo φ é uma função afim, estritamente descrescente, dada por $\varphi(x) = -2x + 7$. Logo,

$$\varphi(p) = p \quad \Leftrightarrow \quad -2p + 7 = p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{7}{3} \tag{3.1}$$

e, assim, $p = \dfrac{7}{3}$ é um ponto periódico de período 1. Portanto, a reta $y = x$ intersecta o gráfico de φ no ponto $P = \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$. (Veja a *Figura 3.3.*)

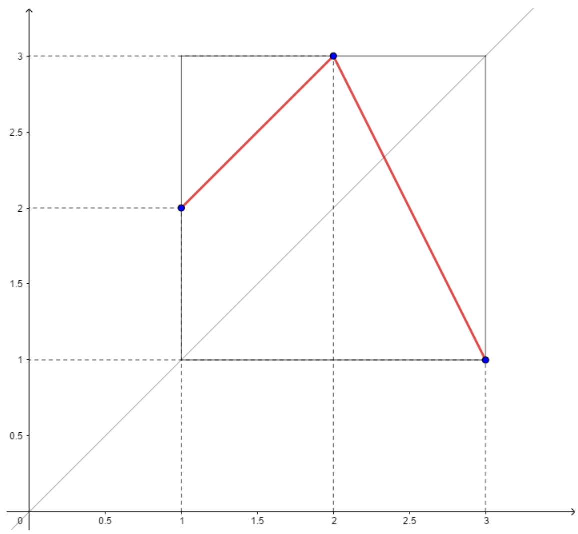

Figura 3.3: Gráfico de φ

***(ii)* Existem pontos periódicos de período 2.**

Primeiramente, vamos determinar a lei de formação de φ^2.

(a) Se $1 \leq x \leq 2$, então $2 \leq \varphi(x) \leq 3$ e $\varphi(x) = x + 1$. Daí,

$$\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(x+1) = -2(x+1) + 7 = -2x + 5. \tag{3.2}$$

Notemos que, $\varphi^2(1) = 3$ e $\varphi^2(2) = 1$, logo $\varphi^2([1, 2]) \subset [1, 3]$.

(b) Agora, se $2 \leq x \leq \dfrac{5}{2}$, então $2 \leq \varphi(x) \leq 3$ e $\varphi(x) = -2x + 7$. Logo,

$$\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(-2x+7) = -2(-2x+7) + 7 = 4x - 7 \tag{3.3}$$

e, portanto, $\varphi^2\left([2, \frac{5}{2}]\right) \subset [1, 3]$.

(c) Por último, se $\dfrac{5}{2} \leq x \leq 3$, então $1 \leq \varphi(x) \leq 2$ e $\varphi(x) = -2x + 7$. Daí,

$$\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(-2x+7) = (-2x+7) + 1 = -2x + 8. \tag{3.4}$$

Como $\varphi^2(\frac{5}{2}) = 3$ e $\varphi^2(3) = 2$, temos que $\varphi^2\left([\frac{5}{2}, 3]\right) \subset [1, 3]$.

De (a), (b) e (c), segue que φ^2 é a função dada por

$$\varphi^2(x) = \begin{cases} -2x + 5, & se\ 1 \leq x \leq 2; \\ 4x - 7, & se\ 2 \leq x \leq \frac{5}{2}; \\ -2x + 8, & se\ \frac{5}{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Seja $Q_2 = [\frac{5}{2}, 3]$. Como $Q_2 \subset \varphi^2(Q_2) = [2, 3]$, segue do *Lema 14* que φ^2 tem ponto fixo no intervalo Q_2. De fato, neste intervalo φ^2 é uma função afim, estritamente decrescente, dada por $\varphi^2(x) = -2x + 8$. Logo,

$$\varphi^2(q) = q \quad \Leftrightarrow \quad -2q + 8 = q \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{8}{3}$$

Como $\varphi(q) = \dfrac{5}{3}$, temos que $q = \dfrac{8}{3}$ é um ponto periódico de período 2 e sua órbita em relação a φ é:

$$\mathcal{O}_\varphi(q) = \{q,\ \varphi(q)\} = \left\{\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right\}. \tag{3.5}$$

Notemos que a reta $y = x$ deve intersectar o gráfico de φ^2 em pelo menos 3 pontos. De fato, além de $R_1 = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ e $R_3 = \left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$ a interseção também ocorre em $R_2 = \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$. Contudo, em razão de (4.1), embora seja ponto fixo de φ^2, $p = \dfrac{7}{3}$ é um ponto periódico de período 1. (Veja a *Figura 3.4.*)

(iii) Existem pontos periódicos de período 3.

É claro que φ tem pontos periódicos de período 3, pois, por hipótese, 1 é um ponto de período 3. Logo, a órbita de 1 em relação a φ é:

$$\mathcal{O}_\varphi(1) = \left\{1, \varphi(1),\ \varphi^2(1)\right\} = \{1, 2, 3\}. \tag{3.6}$$

A lei de formação de φ^3 é dada por

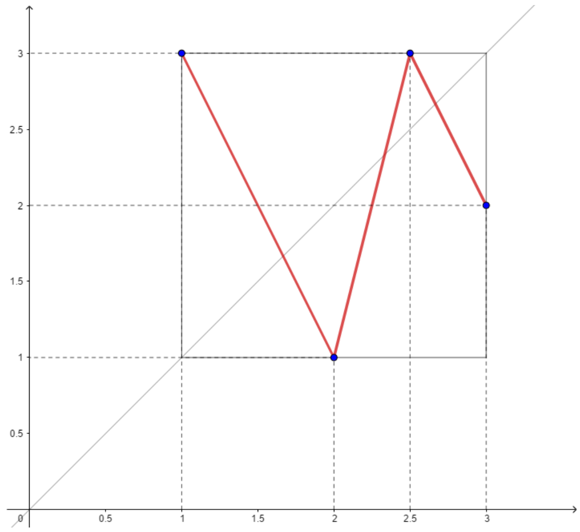

Figura 3.4: Gráfico de φ^2

$$\varphi^3(x) = \begin{cases} 4x-3, & se\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2}; \\ -2x+6, & se\ \frac{3}{2} \leq x \leq 2; \\ 4x-6, & se\ 2 \leq x \leq \frac{9}{4}; \\ -8x+21, & se\ \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{5}{2}; \\ 4x-9, & se\ \frac{5}{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Notemos que a reta $y = x$ intersecta o gráfico de φ^3 em pelo menos 4 pontos. De fato, além de $S_1 = (1,1)$, $S_2 = (2,2)$ e $S_4 = (3,3)$ a interseção também ocorre em $S_3 = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$, porém, em razão de (4.1), $p = \frac{7}{3}$ é um ponto periódico de período 1. (Veja a *Figura 3.5.*)

(iv) Existem pontos periódicos de período 4.

Vamos determinar primeiro a lei de formação de φ^4.

(a) Se $1 \leq x \leq \frac{5}{4}$, então $1 \leq \varphi^3(x) \leq 3$ e $\varphi^3(x) = 4x - 3$. Daí,

$$\varphi^4(x) = \varphi\left(\varphi^3(x)\right) = \varphi(4x-3) = (4x-3)+1 = 4x-2. \tag{3.7}$$

Notemos que $\varphi^4(1) = 2$ e $\varphi^4(\frac{5}{4}) = 3$, logo $\varphi^4\left([1, \frac{5}{4}]\right) \subset [1,3]$.

(b) Se $\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}$, então $1 \leq \varphi^3(x) \leq 3$ e $\varphi^3(x) = 4x - 3$. Logo,

$$\varphi^4(x) = \varphi\left(\varphi^3(x)\right) = \varphi(4x-3) = -2(4x-3)+7 = -8x+13. \tag{3.8}$$

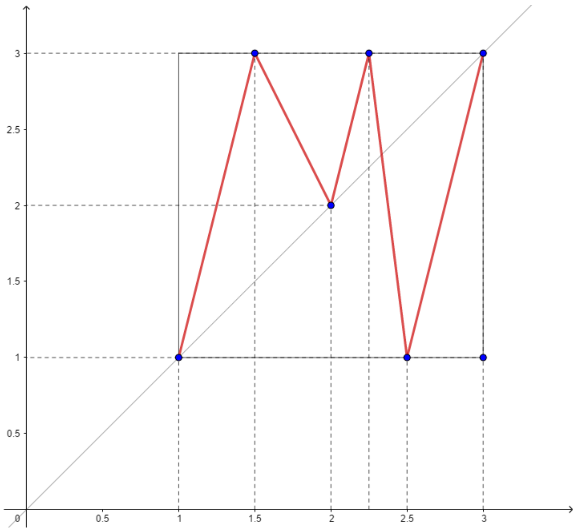

Figura 3.5: Gráfico de φ^3

Como $\varphi^4(\frac{5}{4}) = 3$ e $\varphi^4(\frac{3}{2}) = 1$, temos que $\varphi^4\left([\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]\right) \subset [1,3]$.

(c) Se $\dfrac{3}{2} \leq x \leq 2$, então $2 \leq \varphi^3(x) \leq 3$ e $\varphi^3(x) = -2x + 6$. Assim,

$$\varphi^4(x) = \varphi\left(\varphi^3(x)\right) = \varphi\left(-2x+6\right) = -2(-2x+6) + 7 = 4x - 5 \tag{3.9}$$

e, portanto, $\varphi^4\left([\frac{3}{2}, 2]\right) \subset [1,3]$.

(d) Se $2 \leq x \leq \dfrac{9}{4}$, então $2 \leq \varphi^3(x) \leq 3$ e $\varphi^3(x) = 4x - 6$. Daí,

$$\varphi^4(x) = \varphi\left(\varphi^3(x)\right) = \varphi\left(4x-6\right) = -2(4x-6) + 7 = -8x + 19. \tag{3.10}$$

Notemos que $\varphi^4(2) = 3$ e $\varphi^4(\frac{9}{4}) = 1$, logo $\varphi^4\left([2, \frac{9}{4}]\right) \subset [1,3]$.

(e) Se $\dfrac{9}{4} \leq x \leq \dfrac{19}{8}$, então $1 \leq \varphi^3(x) \leq 3$ e $\varphi^3(x) = -8x + 21$. Logo,

$$\varphi^4(x) = \varphi\left(\varphi^3(x)\right) = \varphi\left(-8x+21\right) = -2(-8x+21) + 7 = 16x - 35. \tag{3.11}$$

Como $\varphi^4(\frac{9}{4}) = 1$ e $\varphi^4(\frac{19}{8}) = 3$, temos que $\varphi^4\left([\frac{9}{4}, \frac{19}{8}]\right) \subset [1,3]$.

(f) Se $\dfrac{19}{8} \leq x \leq \dfrac{5}{2}$, então $1 \leq \varphi^3(x) \leq 3$ e $\varphi^3(x) = -8x + 21$. Assim,

$$\varphi^4(x) = \varphi\left(\varphi^3(x)\right) = \varphi\left(-8x+21\right) = (-8x+21) + 1 = -8x + 22. \tag{3.12}$$

Visto que $\varphi^4(\frac{19}{8}) = 3$ e $\varphi^4(\frac{5}{2}) = 2$, concluímos que $\varphi^4\left([\frac{19}{8}, \frac{5}{2}]\right) \subset [1,3]$.

(g) Se $\dfrac{5}{2} \leq x \leq \dfrac{11}{4}$, então $1 \leq \varphi^3(x) \leq 3$ e $\varphi^3(x) = 4x - 9$. Daí,

$$\varphi^4(x) = \varphi\left(\varphi^3(x)\right) = \varphi\left(4x - 9\right) = (4x - 9) + 1 = 4x - 8. \tag{3.13}$$

Como $\varphi^4(\frac{5}{2}) = 2$ e $\varphi^4(\frac{11}{4}) = 3$, temos que $\varphi^4\left([\frac{5}{2}, \frac{11}{4}]\right) \subset [1, 3]$.

(h) Por último, se $\dfrac{11}{4} \leq x \leq 3$, então $1 \leq \varphi^3(x) \leq 3$ e $\varphi^3(x) = 4x - 9$. Assim,

$$\varphi^4(x) = \varphi\left(\varphi^3(x)\right) = \varphi\left(4x - 9\right) = -2(4x - 9) + 7 = -8x + 25. \tag{3.14}$$

e, portanto, $\varphi^4\left([\frac{11}{4}, 3]\right) \subset [1, 3]$, pois $\varphi^4(\frac{11}{4}) = 3$ e $\varphi^4(3) = 1$.

Dos itens (a) até (h), segue que φ^4 é a função dada por

$$\varphi^4(x) = \begin{cases} 4x - 2, & se\ 1 \leq x \leq \frac{5}{4}; \\ -8x + 13, & se\ \frac{5}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}; \\ 4x - 5, & se\ \frac{3}{2} \leq x \leq 2; \\ -8x + 19, & se\ 2 \leq x \leq \frac{9}{4}; \\ 16x - 35, & se\ \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{19}{8}; \\ -8x + 22, & se\ \frac{19}{8} \leq x \leq \frac{5}{2}; \\ 4x - 8, & se\ \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{11}{4}; \\ -8x + 25, & se\ \frac{11}{4} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Agora, seja $Q_4 = [\frac{19}{8}, \frac{5}{2}]$. Como $Q_4 \subset \varphi^4(Q_4) = [2, 3]$, segue do *Lema 14* que φ^4 tem ponto fixo no intervalo Q_4. De fato, neste intervalo φ^4 é uma função afim, estritamente decrescente, dada por $\varphi^4(x) = -8x + 22$. Logo,

$$\varphi^4(r) = r \quad \Leftrightarrow \quad -8r + 22 = r \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{22}{9}.$$

Como $\varphi(r) = \dfrac{19}{9}$, $\varphi^2(r) = \dfrac{25}{9}$ e $\varphi^3(r) = \dfrac{13}{9}$, concluímos que $r = \dfrac{22}{9}$ é um ponto periódico de período 4 e sua órbita em relação a φ é:

$$\mathcal{O}_\varphi(r) = \left\{r,\ \varphi\left(r\right),\ \varphi^2\left(r\right),\ \varphi^3\left(r\right)\right\} = \left\{\frac{22}{9}, \frac{19}{9}, \frac{25}{9}, \frac{13}{9}\right\}. \tag{3.15}$$

Notemos que a reta $y = x$ deve intersectar o gráfico de φ^4 em pelo menos 7 pontos: $T_1 = \left(\frac{13}{9}, \frac{13}{9}\right)$, $T_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$, $T_3 = \left(\frac{19}{9}, \frac{19}{9}\right)$, $T_4 = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $T_5 = \left(\frac{22}{9}, \frac{22}{9}\right)$, $T_6 = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ e $T_7 = \left(\frac{25}{9}, \frac{25}{9}\right)$. (Veja a *Figura 3.6.*)

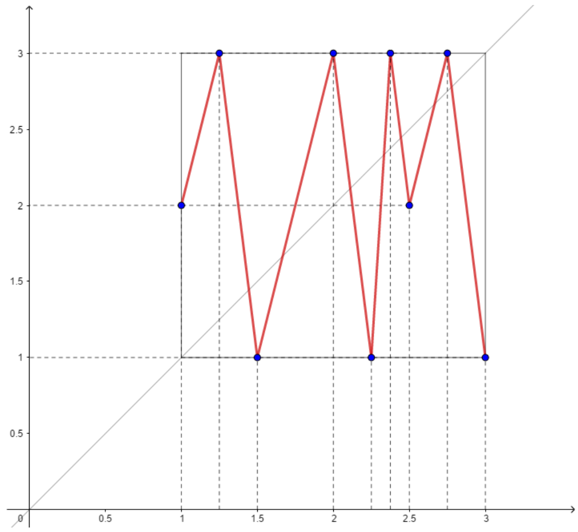

Figura 3.6: Gráfico de φ^4

Exemplo 16 *Seja* φ *a função do Exemplo 15. Para* $n = 0, 1, 2, 3, 4,$ *seja* $I_n \subset [1, 3]$ *a sequência de intervalos tais que* $I_0 = [2, 3]$, $I_1 = [2, 3]$, $I_2 = [2, 3]$, $I_3 = [1, 2]$ *e* $I_4 = [2, 3]$. *Vamos encontrar a sequência de intervalos* $Q_4 \subset Q_3 \subset Q_2 \subset Q_1 \subset Q_0$ *tais que* $\varphi^n(Q_n) = I_n$.

Solução: Como

$$[2, 3] \subset \varphi\left([2, 3]\right) = [1, 3],$$

$$[1, 2] \subset \varphi\left([2, 3]\right) = [1, 3] \quad \text{e}$$

$$[2, 3] \subset \varphi\left([1, 2]\right) = [2, 3],$$

temos que $I_{\lambda+1} \subset \varphi\left(I_\lambda\right)$, para $\lambda = 0, 1, 2, 3$. Pelo *Lema 13*, existe uma sequência de intervalos (Q_n) tal que $Q_4 \subset Q_3 \subset Q_2 \subset Q_1 \subset Q_0$ e $\varphi^n(Q_n) = I_n$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4$. De fato:

(i) $\varphi^0(Q_0) = Q_0 = I_0 = [2, 3]$.

(ii) Seja $Q_1 = [2, \frac{5}{2}]$. Então,

$$\varphi(2) = 3 \qquad \text{e} \qquad \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = -2\frac{5}{2} + 7 = 2$$

e, portanto, $Q_1 \subset \varphi\left(Q_1\right) = I_1 = [2, 3]$.

(iii) Agora, seja $Q_2 = [\frac{9}{4}, \frac{5}{2}]$. Temos que

$$\varphi^2\left(\frac{9}{4}\right) = 4\frac{9}{4} - 7 = 2 \qquad \text{e} \qquad \varphi^2\left(\frac{5}{2}\right) = 4\frac{5}{2} - 7 = 3$$

e, assim, $Q_2 \subset \varphi^2\left(Q_2\right) = I_2 = [2, 3]$.

(iv) Se $Q_3 = [\frac{19}{8}, \frac{5}{2}]$, então

$$\varphi^3\left(\frac{19}{8}\right) = -8\frac{19}{8} + 21 = 2 \qquad \text{e} \qquad \varphi^3\left(\frac{5}{2}\right) = -8\frac{5}{2} + 21 = 1,$$

logo $Q_3 \subset \varphi^3\left(Q_3\right) = I_3 = [1, 2]$.

(v) Por último, se $Q_4 = [\frac{19}{8}, \frac{5}{2}]$, temos que

$$\varphi^4\left(\frac{19}{8}\right) = -8\frac{19}{8} + 22 = 3 \qquad \text{e} \qquad \varphi^4\left(\frac{5}{2}\right) = -8\frac{5}{2} + 22 = 2,$$

e, portanto, $Q_4 \subset \varphi^4\left(Q_4\right) = I_4 = [2, 3]$.

Teorema 9 (Li-Yorke) *Seja $\varphi : I \to I$ uma função contínua, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Suponhamos que exista um ponto $a \in I$ para o qual os pontos $b = \varphi(a)$, $c = \varphi^2(a)$ e $d = \varphi^3(a)$ satisfaçam as desigualdades $d \leq a < b < c$ ou $d \geq a > b > c$. Então, φ tem pontos periódicos de período k, para todo natural k.*

Demonstração:

(a) Consideremos a primeira desigualdade: $d \leq a < b < c$.

(i) Como, por hipótese, $\varphi(b) = c$ e $\varphi(c) = d \leq a$, temos que $[b, c] \subset \varphi\left([b, c]\right)$. Pelo *Lema 14*, segue que φ tem ponto fixo no intervalo $[b, c]$, isto é, existe $x_0 \in [b, c]$ tal que $f(x_0) = x_0$. Portanto, φ tem ponto periódico de período 1.

(ii) Para $k > 1$, definimos $I_n = [b, c]$, para $0 \leq n \leq k - 2$, $I_{k-1} = [a, b]$ e $I_{k+n} = I_n$. Como $[b, c] \subset \varphi\left([b, c]\right)$, $[b, c] \subset \varphi\left([a, b]\right)$ e $[a, b] \subset \varphi\left([b, c]\right)$, temos que $I_{n+1} \subset \varphi(I_n)$. Pelo *Lema 13*, existe uma sequência de intervalos fechados e limitados $(Q_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tal que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset ... \subset Q_0 = I_0 = [b, c]$ e $\varphi^n(Q_n) = I_n$. Logo,

$$Q_k \subset Q_{k-1} \subset Q_{k-2} \subset ... \subset Q_0 = I_0 = [b,c] \quad \text{e} \quad \varphi^k(Q_k) = I_k = I_0 = [b,c].$$

Assim, temos que $Q_k \subset \varphi^k(Q_k)$. Pelo *Lema 14*, concluímos que φ^k tem ponto fixo no intervalo $[b,c]$, isto é, existe $x_0 \in Q_k \subset [b,c]$ tal que $\varphi^k(x_0) = x_0$.

Ainda resta provarmos que o período de x_0 é k, isto é, resta provar que $\varphi^j(x_0) \neq x_0$ para $1 \leq j < k$. Por absurdo, suponhamos que existisse algum $j \leq k-1$ tal que $\varphi^j(x_0) = x_0$. Então, a órbita de x_0 em φ seria

$$\mathcal{O}_\varphi(x_0) = \{x_0, \varphi(x_0), \varphi^2(x_0), \varphi^3(x_0), ..., \varphi^{j-1}(x_0)\} \subset [b,c],$$

pois $I_n = [b,c]$, para $0 \leq n \leq k-2$, $I_{n+k} = I_n$ e $\varphi^n(Q_n) = I_n$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por outro lado, como $I_{k-1} = [a,b]$, teríamos que $\varphi^{k-1}(x_0) \in [a,b]$, ou seja, $\varphi^{k-1}(x_0) \in [a,b] \cap [b,c] = \{b\}$. Disso, seguiria que $\varphi^k(x_0) = \varphi(b) = c$ e daí

$$\varphi^{k+1}(x_0) = \varphi(c) = d \leq a \notin [b,c],$$

o que é uma contradição, uma vez que $\varphi^{k+1}(x_0)$ pertence a $\mathcal{O}_\varphi(x_0)$.

(b) Consideremos agora a segunda desigualdade: $c < b < a \leq d$.

(i) Como, por hipótese, $\varphi(b) = c$ e $\varphi(c) = d \geq a$, temos que $[c,b] \subset \varphi([c,b])$. Pelo *Lema 14*, segue que φ tem ponto fixo no intervalo $[c,b]$, isto é, existe $x_0 \in [c,b]$ tal que $f(x_0) = x_0$. Portanto, φ tem ponto periódico de período 1.

(ii) Para $k > 1$, definimos $I_n = [c,b]$, para $0 \leq n \leq k-2$, $I_{k-1} = [b,a]$ e $I_{k+n} = I_n$. Como $[c,b] \subset \varphi([c,b])$, $[c,b] \subset \varphi([b,a])$ e $[b,a] \subset \varphi([c,b])$, temos que $I_{n+1} \subset \varphi(I_n)$. Pelo *Lema 13*, existe uma sequência de intervalos fechados e limitados $(Q_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tal que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset ... \subset Q_0 = I_0 = [c,b]$ e $\varphi^n(Q_n) = I_n$. Logo,

$$Q_k \subset Q_{k-1} \subset Q_{k-2} \subset ... \subset Q_0 = I_0 = [c,b] \quad \text{e} \quad \varphi^k(Q_k) = I_k = I_0 = [c,b].$$

Assim, temos que $Q_k \subset \varphi^k(Q_k)$. Pelo *Lema 14*, concluímos que φ^k tem ponto fixo no intervalo $[c,b]$, isto é, existe $x_0 \in Q_k \subset [c,b]$ tal que $\varphi^k(x_0) = x_0$.

Ainda resta provarmos que o período de x_0 é k, isto é, resta provar que $\varphi^j(x_0) \neq x_0$ para $1 \leq j < k$. Por absurdo, suponhamos que existisse algum $j \leq k-1$ tal que $\varphi^j(x_0) = x_0$. Então, a órbita de x_0 em φ seria

$$\mathcal{O}_\varphi(x_0) = \{x_0, \varphi(x_0), \varphi^2(x_0), \varphi^3(x_0), ..., \varphi^{j-1}(x_0)\} \subset [c, b],$$

pois $I_n = [c, b]$, para $0 \leq n \leq k-2$, $I_{n+k} = I_n$ e $\varphi^n(Q_n) = I_n$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por outro lado, como $I_{k-1} = [b, a]$, teríamos que $\varphi^{k-1}(x_0) \in [b, a]$, ou seja, $\varphi^{k-1}(x_0) \in [c, b] \cap [b, a] = \{b\}$. Disso, seguiria que $\varphi^k(x_0) = \varphi(b) = c$ e daí

$$\varphi^{k+1}(x_0) = \varphi(c) = d \geq a \notin [c, b],$$

o que é uma contradição, uma vez que $\varphi^{k+1}(x_0)$ pertence a $\mathcal{O}_\varphi(x_0)$. ■

Lema 15 *Se x_0 é um ponto periódico de período 3 em φ, então os pontos x_0, $\varphi(x_0)$ e $\varphi^2(x_0)$ podem ser ordenados de modo a satisfazerem uma das duas desigualdades do Teorema de Li-Yorke, com $d = a$.*

Demonstração: Por hipótese, temos que $\varphi^3(x_0) = x_0$, $\varphi^2(x_0) \neq x_0$ e $\varphi(x_0) \neq x_0$.

(i) Inicialmente, vamos supor que $x_0 < \varphi(x_0)$.

(a) Se $\varphi^2(x_0) > \varphi(x_0)$, então $x_0 < \varphi(x_0) < \varphi^2(x_0)$, com $a = x_0$, $b = \varphi(x_0)$ e $c = \varphi^2(x_0)$, obedecem à primeira desigualdade.

(b) Suponhamos agora $\varphi^2(x_0) < \varphi(x_0)$. Neste caso, podemos ter $x_0 < \varphi^2(x_0) < \varphi(x_0)$, com $a = \varphi(x_0)$, $b = \varphi^2(x_0)$ e $c = \varphi^3(x_0) = x_0$, obedecendo à segunda desigualdade; ou podemos ter ainda $\varphi^2(x_0) < x_0 < \varphi(x_0)$, com $a = \varphi^2(x_0)$, $b = \varphi^3(x_0) = x_0$ e $c = \varphi^4(x_0) = \varphi(x_0)$, obedecendo à primeira desigualdade.

(ii) Consideremos agora $x_0 > \varphi(x_0)$.

(a) Seja $\varphi^2(x_0) < \varphi(x_0)$. Então, $\varphi^2(x_0) < \varphi(x_0) < x_0$, com $a = x_0$, $b = \varphi(x_0)$ e $c = \varphi^2(x_0)$, obedecem à segunda desigualdade.

(b) Suponhamos agora $\varphi^2(x_0) > \varphi(x_0)$. Neste caso, podemos ter $\varphi(x_0) < x_0 < \varphi^2(x_0)$, com $a = \varphi^2(x_0)$, $b = \varphi^3(x_0) = x_0$ e $c = \varphi^4(x_0) = \varphi(x_0)$, obedecendo à segunda desigualdade; ou podemos ter ainda $\varphi(x_0) < \varphi^2(x_0) < x_0$, com $a = \varphi(x_0)$, $b = \varphi^2(x_0)$ e $c = \varphi^3(x_0) = x_0$, obedecendo à primeira desigualdade. ■

Corolário 2 *Se $\varphi : I \to I$ tem um ponto periódico de período 3, então φ também tem pontos periódicos de todos os outros períodos.*

Demonstração: Pelo *Lema 15*, φ satisfaz umas das duas desigualdades: $d \leq a < b < c$ ou $d \geq a > b > c$. Daí, o *Teorema de Li-Yorke* garante que φ tem ponto periódico de qualquer período. ■

A seguir daremos um exemplo para mostrar que período 5 não implica período 3.

Exemplo 17 *Seja* $F : [1, 5] \to [1, 5]$ *definida de tal forma que em cada intervalo* $[n, n + 1]$, $1 \leq n \leq 4$, *F é uma função afim, com* $F(1) = 3$, $F(2) = 5$, $F(3) = 4$, $F(4) = 2$ *e* $F(5) = 1$. *Vamos mostrar que F possui pontos de período 1 e 2, mas nenhum de período 3.*

Solução:

***(i)* Existe ponto periódico de período 1.**

Como, por hipótese, $F(1) = 3$, $F(2) = 5$, $F(3) = 4$, $F(4) = 2$ e $F(5) = 1$, então F é a função dada por

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1, & se\ 1 \leq x \leq 2; \\ -x + 7, & se\ 2 \leq x \leq 3; \\ -2x + 10, & se\ 3 \leq x \leq 4; \\ -x + 6, & se\ 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Notemos que

$$[1, 2] \not\subset F([1, 2]) = [3, 5],$$
$$[2, 3] \not\subset F([2, 3]) = [4, 5] \text{ e}$$
$$[4, 5] \not\subset F([4, 5]) = [1, 2].$$

Logo, não há pontos fixos nos intervalos $[1, 2]$, $[2, 3]$ e $[4, 5]$. Por outro lado,

$$[3, 4] \subset F([3, 4]) = [2, 4].$$

Pelo *Lema 14*, F tem ponto fixo no intervalo $[3, 4]$. De fato, neste intervalo F é uma função afim, estritamente decrescente, dada por $F(x) = -2x + 10$. Logo,

$$F(p) = p \quad \Leftrightarrow \quad -2p + 10 = p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{10}{3} \tag{3.16}$$

e, assim, $p = \dfrac{10}{3}$ é um ponto periódico de período 1. Portanto, a reta $y = x$ deve intersectar o gráfico de F apenas no ponto $P = \left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$. (Veja a *Figura 3.7.*)

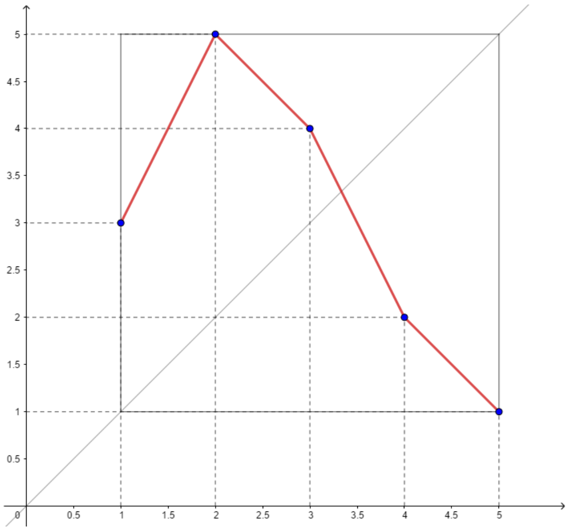

Figura 3.7: Gráfico de F

(*ii*) Existem pontos periódicos de período 2.

Por composição, F^2 é a função dada por

$$F^2(x) = \begin{cases} -4x+8, & se\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2}; \\ -2x+5, & se\ \frac{3}{2} \leq x \leq 2; \\ x-1, & se\ 2 \leq x \leq 3; \\ 4x-10, & se\ 3 \leq x \leq \frac{7}{2}; \\ 2x-3, & se\ \frac{7}{2} \leq x \leq 4; \\ -2x+13, & se\ 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Por inspeção, temos que

$$[2,3] \not\subset F^2([2,3]) = [1,2].$$

Como $[2,3] \cap [1,2] = \{2\}$, mas $F^2(2) = 1$, concluímos que não existe ponto fixo no intervalo $[2,3]$. Por outro lado,

$$[1,2] \subset F^2([1,2]) = [1,4],$$
$$[3,4] \subset F^2([3,4]) = [2,5] \quad \text{e}$$
$$[4,5] \subset F^2([4,5]) = [3,5].$$

Pelo *Lema 14*, F^2 tem ponto fixo em cada um dos intervalos $[1,2]$, $[3,4]$ e $[4,5]$. Por exemplo, no intervalo $[4,5]$, F^2 é uma função afim, estritamente decrescente, dada por $F(x) = -2x+13$. Logo,

$$F^2(q) = q \quad \Leftrightarrow \quad -2q+13 = q \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{13}{3}.$$

Como $F(q) = \dfrac{5}{3}$, temos que $q = \dfrac{13}{3}$ é um ponto periódico de período 2 e sua órbita em relação a F é:

$$\mathcal{O}_F(q) = \{\, q,\ F(q)\} = \left\{\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right\}. \tag{3.17}$$

De (3.17), segue que $\dfrac{5}{3} \in [1,2]$ também é um ponto de período 2 e, portanto, ponto fixo de F^2.

Notemos que a reta $y = x$ intersecta o gráfico de F^2 em exatamente 3 pontos. De fato, além de $Q_1 = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ e $Q_3 = \left(\dfrac{13}{3}, \dfrac{13}{3}\right)$ a interseção também ocorre em $Q_2 = \left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$. Contudo, em razão de (3.16), embora seja ponto fixo de F^2, $p = \dfrac{10}{3} \in [3,4]$ é um ponto periódico de período 1. (Veja a *Figura 3.8.*)

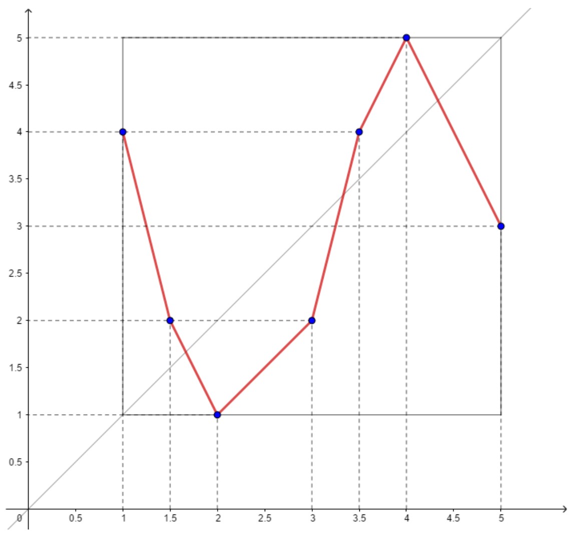

Figura 3.8: Gráfico de F^2

***(iii)* Não existe ponto periódico de período 3.**

Por composição, F^3 é a função dada por

$$F^3(x) = \begin{cases} 8x-6, & se\ 1 \leq x \leq \frac{5}{4}; \\ 4x-1, & se\ \frac{5}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}; \\ -4x+11, & se\ \frac{3}{2} \leq x \leq 2; \\ 2x-1, & se\ 2 \leq x \leq 3; \\ -4x+17, & se\ 3 \leq x \leq \frac{13}{4}; \\ -8x+30, & se\ \frac{13}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}; \\ -2x+9, & se\ \frac{7}{2} \leq x \leq 4; \\ 2x-7, & se\ 4 \leq x \leq \frac{9}{2}; \\ 4x-16, & se\ \frac{9}{2} \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Vamos mostrar agora que F^3 admite apenas um ponto fixo, pertencente ao intervalo $[3,4]$. Por inspeção, é possível observarmos que

$$[1,2] \not\subset F^3([1,2]) = [2,5],$$
$$[2,3] \not\subset F^3([2,3]) = [3,5] \quad \text{e}$$
$$[4,5] \not\subset F^3([4,5]) = [1,4].$$

Como $[1,2] \cap [2,5] = \{2\}$, $[2,3] \cap [3,5] = \{3\}$ e $[4,5] \cap [1,4] = \{4\}$, mas $F^3(2) = 3$, $F^3(3) = 5$ e $F^3(4) = 1$, concluímos que F^3 não tem ponto fixo nos intervalos $[1,2]$, $[2,3]$ e $[4,5]$. Por outro lado,

$$[3,4] \subset F^3([3,4]) = [1,5].$$

Segue, do *Lema 14*, que F^3 tem ponto fixo no intervalo $[3,4]$. De fato, neste intervalo, F^3 é uma função afim dada por

$$F^3(x) = \begin{cases} -4x+17, & se\ 3 \leq x \leq \frac{13}{4}; \\ -8x+30, & se\ \frac{13}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}; \\ -2x+9, & se\ \frac{7}{2} \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Daí, se $r_1 \in [3, \frac{13}{4}]$, $r_2 \in [\frac{13}{4}, \frac{7}{2}]$ e $r_2 \in [\frac{7}{2}, 4]$ são pontos fixos, temos que

$$
\begin{array}{lclclclcl}
F^3(r_1) = r_1 & \Leftrightarrow & -4r_1 + 17 = r_1 & \Leftrightarrow & r_1 = \dfrac{17}{5} & \Rightarrow & r_1 \notin \left[3, \dfrac{13}{4}\right]; \\
F^3(r_2) = r_2 & \Leftrightarrow & -8r_2 + 30 = r_2 & \Leftrightarrow & r_2 = \dfrac{10}{3} & \Rightarrow & r_2 \in \left[\dfrac{13}{4}, \dfrac{7}{2}\right]; \\
F^3(r_3) = r_3 & \Leftrightarrow & -2r_3 + 9 = r_3 & \Leftrightarrow & r_3 = 3 & \Rightarrow & r_3 \notin \left[\dfrac{7}{2}, 4\right];
\end{array}
$$

e, portanto, $r_2 = \dfrac{10}{3}$ é o único ponto fixo de F^3. Porém, em razão de (3.16), $r_2 = p = \dfrac{10}{3}$ é um ponto periódico de período 1.

Logo, a reta $y = x$ intersecta o gráfico de F^3 apenas no ponto $R = \left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$. (Veja a *Figura 3.9.*)

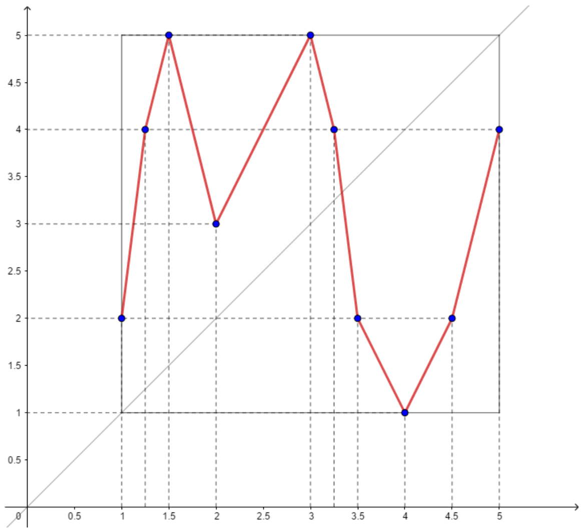

Figura 3.9: Gráfico de F^3

Assim, concluímos que F não admite ponto periódico de período 3.

O *Teorema de Li-Yorke* fornece, portanto, uma condição para que funções do tipo $f : I \to I$ tenham pontos periódicos de todos os períodos. Por outro lado, surge a seguinte questão: *existem funções do tipo $f : I \to I$ que possuam um único ponto periódico?*

No outro extremo a seguir, apresentaremos uma condição para que funções de intervalos em intervalos tenham um único ponto periódico de período 1.

3.3 Contrações

Definição 31 *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, definida num intervalo* $I \subset \mathbb{R}$, *que satisfaça a condição de Lipschitz, com constante* L.

(i) Se $0 \le L < 1$, *dizemos que* f *é uma* ***contração****;*

(ii) Se $L = 1$, *dizemos que* f *é uma* ***contração fraca****.*

Teorema 10 (Teorema do Ponto Fixo das Contrações, de Banach) *Se* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo fechado, então toda contração* $\phi : I \to I$ *possui um único ponto fixo. Mais precisamente, fixando qualquer* $x_0 \in I$, *a sequência das aproximações sucessivas*

$$x_1 = \phi(x_0), \quad x_2 = \phi(x_1), \quad \dots , \quad x_{n+1} = \phi(x_n), \quad \dots$$

converge para o único ponto $\bar{x} \in I$ *tal que* $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$.

Demonstração:

***(i)* Existência.** Vamos mostrar primeiramente que (x_n) é uma sequência de Cauchy e, portanto, converge. Por hipótese, $\phi : I \to I$ é uma contração, logo existe um número real $0 \le k < 1$ tal que

$$|\phi(y) - \phi(x)| \le k\,|y - x|,$$

para quaisquer $x, y \in I$. Neste caso, temos também que

$$|x_{n+1} - x_n| = |\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})| \le k\,|x_n - x_{n-1}|,$$

de onde, $|x_{n+1} - x_n| \le k\,|x_n - x_{n-1}|$. Pelo *Lema 5*, concluímos que (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Agora, a hipótese de I ser fechado garante a existência de um número real $\bar{x} \in I$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$. Além disso, como ϕ é uma função *lipschitziana*, então ϕ é também contínua. Finalmente, da continuidade de ϕ, segue que

$$\phi(\bar{x}) \;=\; \phi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \;=\; \bar{x},$$

de onde, $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$.

***(ii)* Unicidade.** Suponhamos $a, b \in I$, tais que $\phi(a) = a$ e $\phi(b) = b$. Segue que

$$|a-b| = |\phi(a) - \phi(b)| \leq k\,|a-b|,$$

ou seja, $(1-k)\,|a-b| \leq 0$. Como $1-k > 0$, concluímos que $|a-b| = 0$, de onde $a = b$. O que completa a demonstração. ∎

Exemplo 18 *Seja* $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *a função dada por* $f(x) = cos(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Digite numa calculadora científica* $cos(1)$ *e aperte a tecla "* $=$*"(igual). Perceba que, reiterando o processo* n *vezes* $(n \geq 50)$, *isto é, calculando* $f^n(1)$, *o valor começa a convergir para* $0,739085133...$, *que é o ponto fixo da função cosseno.*

Mais adiante, no *Exemplo 24*, provaremos que a função $f : [-1,1] \to [-1,1]$, dada por $f(x) = cos(x)$, é uma contração.

Exemplo 19 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, *dada por* $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, *é uma contração fraca, mas não possui ponto fixo.*

Solução:

$(\star)$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $x \neq y$, sempre temos $(x-y)^2 > 0$, isto é, $x^2+y^2 > 2xy$. Disso, segue que

$$\begin{aligned}
\sqrt{(1+y^2)\,(1+x^2)} \quad &= \quad \sqrt{1+x^2+y^2+(yx)^2} \;\;>^{(\star)}\;\; \sqrt{1+2xy+(yx)^2} \;\; = \\
&= \quad \sqrt{(1+yx)^2} \;\; = \;\; |1+yx| \;\; \geq \;\; yx+1.
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que f é uma contração fraca. Com efeito,

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| \; < \; |y-x| \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2}\right| \; < \; |y-x| \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2}\right)^2 < \; (y-x)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(1+y^2\right) - 2\sqrt{(1+y^2)\,(1+x^2)} + \left(1+x^2\right) \; < \; y^2 - 2yx + x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad -2\sqrt{(1+y^2)\,(1+x^2)} + 2 \; < \; -2yx \\
&\Leftrightarrow \quad -2\sqrt{(1+y^2)\,(1+x^2)} \; < \; -2(yx+1) \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(1+y^2)\,(1+x^2)} \; > \; yx+1.
\end{aligned}$$

A última equivalência da cadeia garante, em virtude de $(\star)$, que f é uma contração fraca. Porém, $f(x) > x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 20 *Se uma função φ satisfaz as hipóteses do Teorema de Li-Yorke, então φ não é uma contração.*

Solução: Seja $\varphi : I \to I$ uma função contínua, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e suponhamos que exista um ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $b = \varphi(a)$, $c = \varphi^2(a)$ e $d = \varphi^3(a)$, com $d \leq a < b < c$ (o caso em que $d \geq a > b > c$ pode ser tratado de modo análogo). Temos que

$$[b, c] \subset [d, c] = \varphi([b, c]) .$$

Assim, se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ designam, respectivamente, as amplitudes dos intervalos $[b, c]$ e $[d, c]$, então $\lambda_1 < \lambda_2$. Logo,

$$\frac{|\varphi(b) - \varphi(c)|}{|b - c|} = \frac{|c - d|}{|b - c|} = \frac{|c - d|}{|c - b|} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1.$$

Capítulo 4

Derivabilidade

A bibliografia utilizada para escrever este capítulo está baseada em [6], [7] e [9].

4.1 A Definição de Função Derivável

Definição 32 *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função, definida num subconjunto* $X \subset \mathbb{R}$, *e um ponto* $a \in X' \cap X$. *Dizemos que* f *é uma função* ***derivável no ponto*** a, *se existe o limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Neste caso, indicamos por $f'(a)$ *a derivada de* f *no ponto* a.

Definição 33 *Dizemos que* f *é uma função* ***derivável***, *se* f *é derivável em todo ponto do seu domínio.*

Definição 34 *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função, definida num subconjunto* $X \subset \mathbb{R}$, *e um ponto* $a \in X'_{+} \cap X$. *Dizemos que* f *é uma função* ***derivável à direita no ponto*** a, *se existe o limite*

$$\lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_{+}(a).$$

Neste caso, indicamos por $f'_{+}(a)$ *a derivada lateral à direita no ponto* a.

Definição 35 *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função, definida num subconjunto* $X \subset \mathbb{R}$, *e um ponto* $a \in X'_{-} \cap X$. *Dizemos que* f *é uma função* ***derivável à esquerda no ponto*** a, *se* *existe o limite*

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;=\; f'_-(a).$$

Neste caso, indicamos por $f'_-(a)$ *a derivada lateral à esquerda no ponto* a.

Proposição 26 *Seja* $a \in X$ *um ponto de acumulação à direita e à esquerda. Então,* $f'(a)$ *existe se, e somente se, existem, e são iguais, as derivadas* $f'_-(a)$ *e* $f'_+(a)$.

Exemplo 21 *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por* $f(x) = x^n$. *Mostre que* f *é derivável em* $\mathbb{R}$ *e que*

$$f'(a) = n \cdot a^{n-1}$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Solução: Para que f seja derivável num ponto $a \in \mathbb{R}$ é suficiente que exista o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Com efeito, usando a identidade algébrica em (2.1) e as propriedades de limite, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\
&= \lim_{x \to a} x^{n-1} \; + \; a \lim_{x \to a} x^{n-2} \; + \; \cdots \; + \; a^{n-2} \lim_{x \to a} x \; + \; a^{n-1} \lim_{x \to a} 1 \\
&= a^{n-1} \; + \; a^{n-1} \; + \; \cdots \; + \; a^{n-1} \; + \; a^{n-1} \\
&= n \cdot a^{n-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, f é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e sua derivada, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é dada por

$$f'(a) = n \cdot a^{n-1}$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Vamos passar agora para algumas propriedades da derivada de uma função.

Proposição 27 *Se* $f : X \to \mathbb{R}$ *é uma função derivável num ponto* $x_0 \in X$, *então* f *é contínua em* x_0.

Demonstração: Para todo $x \in X - \{x_0\}$, temos que

$$f(x) \;=\; f(x_0) + \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)(x - x_0).$$

Usando limites e a hipótese de que existe $f'(x_0)$, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) + \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)(x - x_0)\right] \\
&= \lim_{x \to x_0} f(x_0) \;+\; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\
&= f(x_0) \;+\; f'(x_0) \cdot 0 \\
&= f(x_0).
\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em x_0. ∎

Proposição 28 *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funções deriváveis num ponto* $a \in X' \cap X$ *e* k *uma constante real não nula. Então,*

(i) *a função* $f \pm g : X \to \mathbb{R}$ *é derivável em* a, *com* $(f \pm g)'(a) \;=\; f'(a) \pm g'(a)$;

(ii) *a função* $k \cdot g : X \to \mathbb{R}$ *é derivável em* a, *com* $(k \cdot g)'(a) \;=\; k \cdot g'(a)$;

(iii) *a função* $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ *é derivável em* a, *com* $(f \cdot g)'(a) \;=\; f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Demonstração:

(i) Vamos mostrar que $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$. Com efeito, como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, para todo $x \in X$, e ainda f e g são deriváveis em a, temos que

$$\begin{aligned}
(f + g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{[(f + g)(x)] - [(f + g)(a)]}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(a) + g(a)]}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{[f(x) - f(a)] + [g(x) - g(a)]}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right] \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;+\; \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= f'(a) \;+\; g'(a).
\end{aligned}$$

O raciocínio seria o mesmo se trocássemos $+$ por $-$. Portanto, $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.

(ii) Vamos mostrar que $(k \cdot g)'(a) = k \cdot g'(a)$. Por hipótese, temos que f e g são deriváveis em a e, além disso, $(k \cdot g)(x) = k \cdot g(x)$ para todo $x \in X$. Logo,

$$\begin{aligned}
(k \cdot g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(k \cdot g)(x) - (k \cdot g)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{k \cdot g(x) - k \cdot g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} k \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= k \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= k \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

(iii) Vamos mostrar que $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Como f e g são deriváveis em a e $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ para todo $x \in X$, segue que

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{[f(x) - f(a)] \cdot g(x) + f(a) \cdot [g(x) - g(a)]}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) \;+\; f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) \;+\; f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= f'(a) \cdot g(a) \;+\; f(a) \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 22 *A função polinomial* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

para $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ *e* $a_n \neq 0$, *é derivável em* $\mathbb{R}$, *com*

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, pelo *Exemplo 21* e pela *Proposição 28* concluímos que

$$p'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1.$$

Teorema 11 (Regra da Cadeia) *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $g : Y \to \mathbb{R}$ *funções tais que* $f(X) \subset Y$, $a \in X' \cap X$ *e* $f(a) = b \in Y' \cap Y$. *Se existem as derivadas* $f'(a)$ *e* $g'(b)$, *então a função composta* $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ *é derivável em* a, *com*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a).$$

4.2 O Teorema do Valor Médio

Lema 16 (Rôlle) *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b). *Se* $f(a) = f(b)$, *então existe um* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demonstração: Como, por hipótese, f é contínua em $[a, b]$, segue do *Teorema 5* que f possui pontos de máximo e mínimo neste intervalo. Existem, portanto, $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que, para todo $x \in [a, b]$,

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$

(i) Se $c_1, c_2 \in \{a, b\}$, então decorre da hipótese que

$$f(c_1) = f(c_2) = f(a) = f(b)$$

Ou seja, f é uma função constante em $[a, b]$ e, portanto, $f'(c) = 0$ para todo $c \in [a, b]$.

(ii) Seja $c_1, c_2 \in (a, b)$. Nosso objetivo é mostrar que as derivadas laterais

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad e \quad f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existem e são iguais a zero, para $c \in \{c_1, c_2\}$, de onde seguirá que $f'(c) = 0$. Temos, portanto, dois casos a considerar:

(a) Se $c = c_1$, para todo $x \in [a, c_1)$, temos que $x < c_1$ e $f(c_1) \leq f(x)$, isto é, $x - c_1 < 0$ e $f(x) - f(c_1) \geq 0$; e para todo $x \in (c_1, b]$, temos que $c_1 < x$ e $f(c_1) \leq f(x)$, isto é, $x - c_1 > 0$ e $f(x) - f(c_1) \geq 0$. Pela hipótese de f ser derivável em (a, b), segue que

$$\lim_{x \to c_1^-} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} = f'_-(c_1) \leq 0 \leq f'_+(c_1) = \lim_{x \to c_1^+} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1}.$$

O que acarreta $f'(c_1) = 0$.

(b) Se $c = c_2$, para todo $x \in [a, c_2)$, temos que $x < c_2$ e $f(x) \leq f(c_2)$, isto é, $x - c_2 < 0$ e $f(x) - f(c_2) \leq 0$; e para todo $x \in (c_2, b]$, temos que $c_2 < x$ e $f(x) \leq f(c_2)$, isto é, $x - c_2 > 0$ e $f(x) - f(c_2) \leq 0$. Pela hipótese de f ser derivável em (a, b), segue que

$$\lim_{x \to c_2^+} \frac{f(x) - f(c_2)}{x - c_2} = f'_+(c_2) \leq 0 \leq f'_-(c_2) = \lim_{x \to c_2^-} \frac{f(x) - f(c_2)}{x - c_2}.$$

O que também acarreta $f'(c_2) = 0$. ■

A condição $f(a) = f(b)$ imposta para o *Lema de Rôlle* é essencial.

Exemplo 23 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ *a função dada por* $f(x) = e^x$, *para todo* $x \in [a, b]$. *Mostre que não existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Solução: Como f é estritamente crescente em $[a, b]$, temos $f(a) < f(b)$. Suponhamos que a derivada f' se anulasse em algum ponto $c \in (a, b)$. Então, existiria um $c \in (a, b)$ tal que $e^c = 0$, o que é impossível.

Definição 36 *Dizemos que a* ***reta secante*** *ao gráfico de uma função contínua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nos pontos* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$ *é a função* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$s(x) = \left(\frac{b - x}{b - a}\right) f(a) + \left(\frac{x - a}{b - a}\right) f(b), \qquad b \neq a. \tag{4.1}$$

Evidentemente, s é uma função afim e, portanto, é contínua e derivável em $\mathbb{R}$.

Teorema 12 (Teorema do Valor Médio, de Lagrange) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b), *então existe um* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Demonstração: Seja $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ a função auxiliar dada por $h(x) = f(x) - s(x)$, para todo $x \in [a,b]$, em que $s(x)$ é a *reta secante* de (4.1). Temos que h é contínua em $[a,b]$, pois é a diferença de funções contínuas; h é derivável em (a,b), pois é a diferença de funções deriváveis; e temos também que

$$h(a) \;=\; f(a) - s(a) \;=\; f(a) - \left[\left(\frac{b-a}{b-a}\right) f(a) + \left(\frac{a-a}{b-a}\right) f(b)\right] \;=\; f(a) - f(a) \;=\; 0$$

e

$$h(b) \;=\; f(b) - s(b) \;=\; f(b) - \left[\left(\frac{b-b}{b-a}\right) f(a) + \left(\frac{b-a}{b-a}\right) f(b)\right] \;=\; f(b) - f(b) \;=\; 0,$$

ou seja, a função h satisfaz as hipóteses do *Lema de Rôlle*, com $h(a) = h(b) = 0$. Logo, existe um $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 \;=\; h'(c) \;=\; f'(c) - s'(c) \;=\; f'(c) - \left[-\frac{f(a)}{b-a} + \frac{f(b)}{b-a}\right] \;=\; f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

seguindo a tese. ∎

O próximo teorema é uma generalização do *TVM de Lagrange* e ficou conhecido na literatura matemática como o *Teorema do Valor Médio de Cauchy.*

Teorema 13 (Cauchy) *Se* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas em* $[a,b]$ *e deriváveis em* (a,b)*, então existe um* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Demonstração: Seja $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ a função auxiliar dada por

$$h(x) \;=\; [g(b) - g(a)]\, f(x) \;-\; [f(b) - f(a)]\, g(x).$$

Decorre imediatamente das hipóteses que h é contínua em $[a,b]$, pois é a diferença de funções contínuas, e h é derivável em (a,b), pois é a diferença de funções deriváveis. Pelo *TVM de Lagrange*, existe um $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{h(b) - h(a)}{b-a} = h'(c).$$

Além disso, podemos observar que

$$h(a) \;=\; [g(b)-g(a)]\,f(a) \;-\; [f(b)-f(a)]\,g(a) \;=\; g(b)f(a)-f(b)g(a)$$

e

$$h(b) \;=\; [g(b)-g(a)]\,f(b) \;-\; [f(b)-f(a)]\,g(b) \;=\; -g(a)f(b)+f(a)g(b),$$

ou seja, a função h satisfaz as hipóteses do *Lema 16*, uma vez que $h(a)=h(b)$. Portanto,

$$0 \;=\; h'(c) \;=\; [g(b)-g(a)]\,f'(c) \;-\; [f(b)-f(a)]\,g'(c),$$

seguindo a tese. ■

Proposição 29 *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função lipschitziana em $[a,b]$, com constante real $L>0$, e derivável em (a,b). Então, $|f'(x)|\le L$, para todo $x\in(a,b)$.*

Demonstração: Por hipótese, dados $x_1,x_2\in[a,b]$ com $x_1\neq x_2$, temos que

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \;\le\; L.$$

Além disso, f é contínua em $[x_1,x_2]$, pois é lipschitziana em $[x_1,x_2]$. Como f é também derivável em (x_1,x_2), segue do *Teorema do Valor Médio* que existe $\bar{x}\in(x_1,x_2)$ tal que

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \;=\; |f'(\bar{x})| \;\le\; L$$

Pela arbitrariedade de x_1 e x_2, temos que $|f'(x)|\le L$, para todo $x\in(a,b)$. ■

Proposição 30 *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e existe uma constante real $L>0$ tal que $|f'(x)|\le L$ para todo $x\in(a,b)$, então f é lipschitziana em $[a,b]$.*

Demonstração: Por hipótese, a função f é contínua em $[a,b]$. Daí, para quaisquer x_1 e x_2 em $[a,b]$, o *Teorema do Valor Médio* afirma que existe ao menos um $\bar{x}\in(x_1,x_2)$ tal que

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\bar{x})\,(x_2-x_1),$$

pois f é contínua em $[x_1,x_2]$ e derivável em (x_1,x_2). Tomando módulos na igualdade anterior e usando a hipótese de que $|f'(x)|\le L$ para todo $x\in(x_1,x_2)$, segue que

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\bar{x})|\,|x_2 - x_1| \leq L\,|x_2 - x_1|.$$

Logo, pela arbitrariedade de x_1 e x_2, f é lipschitiziana em $[a, b]$. ■

Corolário 3 *Seja* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$, *derivável em* (a, b), *com* $|g'(x)| \leq k < 1$, *para todo* $x \in (a, b)$. *Então,* g *é uma contração.*

Demonstração: Por hipótese, g é contínua em $[a, b]$. Daí, para quaisquer x_1 e x_2 em $[a, b]$, o *Teorema do Valor Médio* nos assegura que existe ao menos um $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tal que

$$g(x_2) - g(x_1) = g'(\bar{x})\,(x_2 - x_1).$$

Tomando módulos na igualdade anterior e usando a hipótese de que $|g'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in (a, b)$, vem que

$$|g(x_2) - g(x_1)| = |g'(\bar{x})|\,|x_2 - x_1| \leq k\,|x_2 - x_1| < |x_2 - x_1|,$$

ou seja, existe $0 \leq k < 1$ tal que $|g(x_2) - g(x_1)| \leq k\,|x_2 - x_1|$, para quaisquer x_1 e x_2 em $[a, b]$. Portanto, g é uma contração. ■

Exemplo 24 *A função* $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, *dada por* $g(x) = cos(x)$, *é uma contração.*

Solução: A função g é derivável em $(-1, 1)$ e sua derivada é dada por $g'(x) = -sen(x)$. Assim, temos que $|g'(x)| = |-sen(x)| = |sen(x)|$, para todo $x \in (-1, 1)$. Notemos que a função *seno* é estritamente crescente no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $|sen(x)| \leq 1$, para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Como $[-1, 1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, segue em particular que a função *seno* é estritamente crescente em $[-1, 1]$ e, portanto, $sen(1) < sen(\frac{\pi}{2}) = 1$. Logo, para todo $x \in [-1, 1]$, temos que

$$|g'(x)| \;=\; |sen(x)| \;\leq\; |sen(1)| \;<\; 1,$$

ou seja, existe o número real $k = |sen(1)|$ tal que $|g'(x)| \leq k < 1$. Pelo *Corolário 3*, segue que g é uma contração.

Voltando ao *Exemplo 18*, como o intervalo $[-1, 1]$ é fechado, o *Teorema 10* garante que o ponto fixo $0,739085133...$ da função *cosseno* é único.

A *Proposição 29* e sua recíproca (a *Proposição 30*) nos fornecem um critério interessante para determinar quando uma função é lipschitziana:

Teorema 14 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b). *Então,* f *é lipschitziana em* $[a, b]$ *com constante* $L > 0$ *se, e somente se,* $|f'(x)| \leq L$, *para todo* $x \in (a, b)$.

Exemplo 25 *A função quadrática não é lipschitziana em* $\mathbb{R}$.

Solução: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. De fato, f é derivável em $\mathbb{R}$ e sua derivada é dada por $f'(x) = 2ax + b$. Porém, o conjunto $\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ é ilimitado. Pelo *Teorema 14*, f não é lipschitziana em $\mathbb{R}$.

Capítulo 5

Aplicações

As referências que utilizamos para escrever este capítulo estão baseadas em [3], [5], [7], [9], [11] e [12].

5.1 Crescimento e Decrescimento de Funções

Definição 37 *Dizemos que um número real ξ é o* ***zero*** *de uma função f, se $f(\xi) = 0$. Neste caso, dizemos também que ξ é a* ***raiz*** *da equação $f(x) = 0$.*

Definição 38 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que x_0 é um* ***ponto interior*** *ao conjunto I, se $x_0 \in I$ mas x_0 não é extremidade de I.*

Teorema 15 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, contínua no intervalo $I \subset \mathbb{R}$.*

(i) Se $f'(x) > 0$, para todo x interior a I, então f é estritamente crescente em I;

(ii) Se $f'(x) < 0$, para todo x interior a I, então f é estritamente decrescente em I.

Demonstração: Consideremos $x_1, x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$. Das hipóteses, temos que f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Daí, o *Teorema do Valor Médio* nos assegura de que existe ao menos um $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})\,(x_2 - x_1)\,. \tag{5.1}$$

(i) Da hipótese de que $f'(x) > 0$, para todo x interior a I, vem que $f'(\bar{x}) > 0$. Como $x_2 - x_1 > 0$, segue de (5.1) que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, de onde $f(x_1) < f(x_2)$. O que significa que f é estritamente crescente em $[x_1, x_2]$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in I$.

(ii) Da hipótese $f'(x) < 0$, para todo x interior a I, vem que $f'(\bar{x}) < 0$. Como $x_2 - x_1 > 0$, segue de (5.1) que $f(x_2) - f(x_1) < 0$, de onde $f(x_1) > f(x_2)$. O que significa que f é estritamente decrescente em $[x_1, x_2]$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in I$. ∎

Exemplo 26 *Prove que a equação* $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ *admite três raízes reais distintas.*

Solução: Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função, dada por

$$g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que g é contínua em $\mathbb{R}$ e, além disso, g é derivável em $\mathbb{R}$, com $g'(x) = 3x^2 + 2x - 5$. Daí, $g'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 1$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$. Vamos estudar a função g em relação a seu crescimento e decrescimento. Pelo *Teorema 15*, temos que g é estritamente crescente no intervalo $(-\infty, -\frac{5}{3}]$, estritamente decrescente no intervalo $[-\frac{5}{3}, 1]$ e estritamente crescente no intervalo $[1, +\infty)$.

(i) Notemos que

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left[1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right] = -\infty.$$

e $g(-\frac{5}{3}) = \frac{202}{27} > 0$. Como $g(-3) = -2 < 0$, pelo *Lema 8* existe um zero de g em $[-3, -\frac{5}{3}]$. O fato de g ser estritamente crescente em $(-\infty, -\frac{5}{3}]$ garante que o zero de g é único neste intervalo.

(ii) Mais uma vez, pelo *Lema 8*, é imediato que também existe um zero de g em $[-\frac{5}{3}, 1]$, pois $g(1) = -2 < 0$. A unicidade desse zero está garantida, pois g é estritamente decrescente em $[-\frac{5}{3}, 1]$.

(iii) Por último, como g é estritamente crescente no intervalo $[1, +\infty)$,

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left[1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right] = +\infty$$

e $g(2) = 3 > 0$, resulta novamente do *Lema 8* que g possui outro zero em $[1, 2]$. O fato de g ser estritamente crescente em $[1, +\infty)$ garante também que o zero de g é único neste intervalo.

Por (i), (ii) e (iii), concluímos que g admite três raízes reais distintas.

5.2 Discriminante de uma Equação de Grau 3

Na álgebra clássica, o completamento de quadrado é um recurso eficiente na resolução de equações de segundo grau. É por meio desta técnica, inclusive, que chegamos à solução geral de uma equação genérica do tipo $ax^2+bx+c=0$, expressando suas raízes por meio de radicais:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{sendo} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

A letra grega Δ (delta) usada no radicando é chamada de *discriminante* da equação. A partir do estudo de sinal do discriminante da equação de segundo grau é possível descrever a natureza de suas raízes: reais ou complexas. Analogamente, uma equação do terceiro grau também possui tal "discriminante". Nesta seção, veremos como é possível descrever a natureza das raízes de uma equação do terceiro grau do tipo $x^3+px+q=0$ a partir do estudo de sinal de seu *discriminante*.

Uma equação genérica de terceiro grau tem a forma $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, com $\alpha \neq 0$. Dividindo todos os termos por α, chegamos a outra forma equivalente da mesma equação:

$$x^3 + \frac{\beta}{\alpha}x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}x + \frac{\delta}{\alpha} = 0.$$

Para simplificar a escrita desta equação, podemos reescrevê-la com os coeficientes $\dfrac{\beta}{\alpha} = a$, $\dfrac{\gamma}{\alpha} = b$ e $\dfrac{\delta}{\alpha} = c$, obtendo:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{5.2}$$

que possui coeficiente dominante igual a 1.

Fazendo a substituição $x = y - \dfrac{a}{3}$, podemos observar o anulamento do termo de segundo grau:

$$\begin{aligned}
&\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y^3 - 3\frac{a}{3}y^2 + 3\frac{a^2}{9}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - 2\frac{a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0.
\end{aligned}$$

Simplificando novamente, reescrevemos a última equação na incógnita y com os coeficientes $\left(b - \dfrac{a^2}{3}\right) = p$ e $\left(\dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ab}{3} + c\right) = q$, obtendo:

$$y^3 + py + q = 0 \tag{5.3}$$

Portanto, acabamos transformando o problema de resolver a equação (5.2) em um outro equivalente, resolver a equação (5.3). Assim, para encontrar as raízes de (5.2), basta achar as raízes de (5.3) e delas subtrair $\dfrac{a}{3}$, uma vez que $x = y - \dfrac{a}{3}$.

É possível chegar à fórmula geral de resolução por radicais da equação (5.3), conhecida como *Fórmula de Cardano*, cujo *discriminante* da equação é dado por

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{5.4}$$

No entanto, para deduzi-la é necessário usar conceitos e argumentos que fogem ao objetivo deste trabalho. O leitor interessado poderá encontrá-la na bibliografia [12], a partir da página 173.

Agora, para todo $x \in \mathbb{R}$, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = x^3 + px + q = x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right),$$

uma função polinomial de grau 3. Pelo *Exemplo 3* do primeiro capítulo, temos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty.$$

Isto significa que em algum momento ocorre $f(x) = 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$, isto é, o gráfico da função intersecta o eixo das abscissas pelo menos uma vez. Mas, como saber quantas vezes ocorre esta interseção?

Teorema 16 *Sejam f a função dada por $f(x) = x^3 + px + q$ e $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ o discriminate da equação $f(x) = 0$. Então,*

(i) $\Delta > 0$ é uma condição suficiente para que a equação $f(x) = 0$ possua uma única raiz real;

(ii) $\Delta = 0$ *é uma condição suficiente para que a equação* $f(x) = 0$ *possua duas raízes reais distintas ou uma única raiz nula de multiplicidade três.*

(iii) $\Delta < 0$ *é uma condição suficiente para que a equação* $f(x) = 0$ *possua três raízes reais e distintas.*

Demonstração:

(*i*) Há três possibilidades.

(a) Vamos considerar primeiramente $p > 0$. Então, para qualquer $q \in \mathbb{R}$, temos $\Delta > 0$. Além disso, a derivada $f'(x) = 3x^2 + p$ é positiva para qualquer x real e, consequentemente, f é uma função estritamente crescente em $\mathbb{R}$. Por ser crescente, o gráfico de f intersecta o eixo das abscissas uma única vez. Isso mostra que, quando $p > 0$, a equação $f(x) = 0$ tem uma única raiz real, que pode ser negativa, nula ou positiva. (Veja a *Figura 5.1.*)

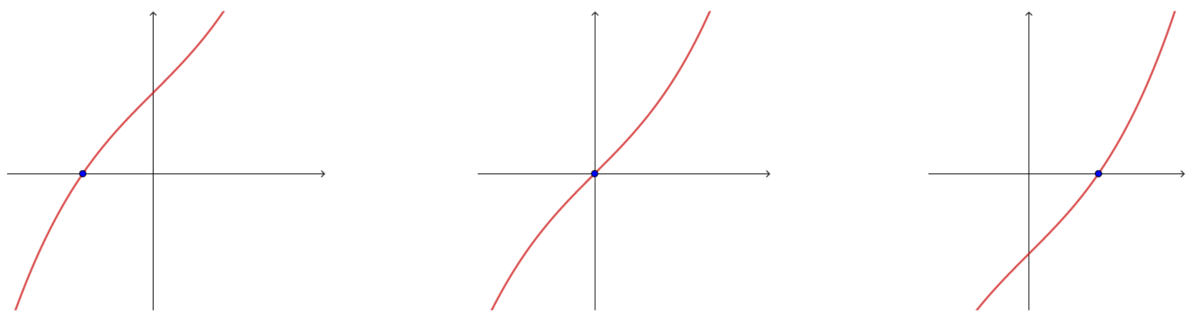

Figura 5.1: Caso $\Delta > 0$, quando $p > 0$.

(b) Suponhamos agora $p = 0$ e $q \neq 0$. É evidente que $\Delta > 0$. Além disso, $f(x) = 0$ se, e somente se, $x^3 = -q$ e, portanto, a equação tem solução única. Se $q > 0$, a equação possui uma raiz real negativa; e se $q < 0$, a equação possui uma raiz real positiva.

(c) No caso de ser $p < 0$, reescrevendo a lei de formação de f com coeficiente $p = -3a^2$ $(a > 0)$, temos que $f(x) = x^3 - 3a^2x + q$. Daí,

$$f(a)f(-a) = \left(q - 2a^3\right)\left(q + 2a^3\right) = q^2 - 4a^6 = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = 4\Delta. \qquad (5.5)$$

Notemos que $\Delta > 0$ se, e somente se, $f(a)f(-a) > 0$. Nesse caso, $f(a)$ e $f(-a)$ podem ser ambos positivos ou ambos negativos. Façamos o estudo de f em relação a seu crescimento e decrescimento. A derivada f' é dada por

$$f'(x) \;=\; 3x^2 - 3a^2 \;=\; 3\left(x^2 - a^2\right) \;=\; 3\,(x-a)\,(x+a)$$

e, portanto, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = \pm a$. Pelo *Teorema 15*, f é estritamente decrescente no intervalo $[-a, a]$ e estritamente crescente nos intervalos $(-\infty, -a]$ e $[a, +\infty)$. Logo, se $f(a) > 0$ e $f(-a) > 0$, então existe um $\xi \in (-\infty, -a]$ tal que $f(\xi) = 0$. Analogamente, se $f(a) < 0$ e $f(-a) < 0$, então existe um $\xi \in [a, +\infty)$ tal que $f(\xi) = 0$. Em ambos os casos, o gráfico de f intersecta o eixo das abscissas uma única vez. (Veja a *Figura 5.2.*)

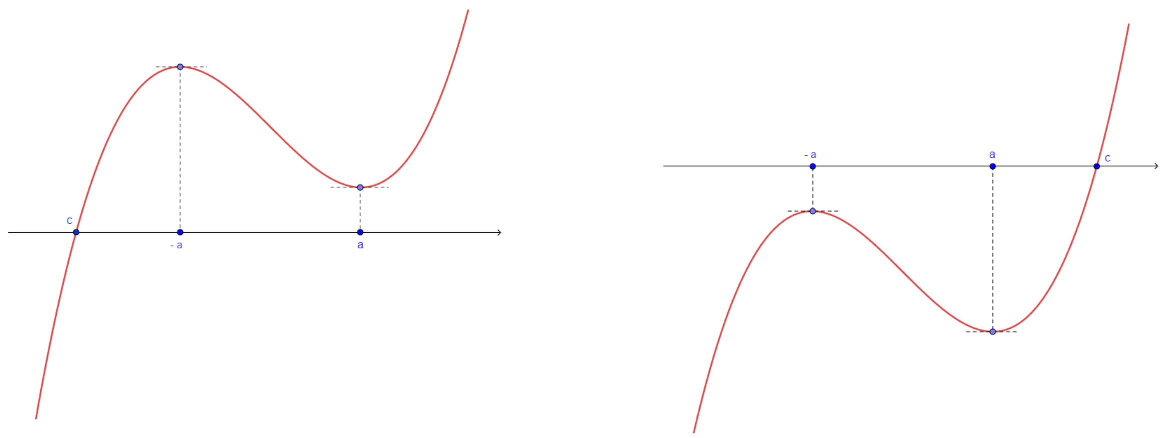

Figura 5.2: Caso $\Delta > 0$, quando $p < 0$.

Por (a), (b) e (c), $\Delta > 0$ é uma condição suficiente para que a equação $f(x) = 0$ possua uma única raiz real.

(ii) Há duas possibilidades.

(a) Notemos que se $p = q = 0$, então $\Delta = 0$. Daí, como $f(x) = x^3$, a equação $f(x) = 0$ se reduz a $x^3 = 0$ e, portanto, tem uma raiz nula de multiplicidade três.

(b) Se $p < 0$, por (5.5) temos que $\Delta = 0$ se, e somente se, $f(a)f(-a) = 0$. Nesse caso, pelo fato de f ser uma função injetiva no intervalo $[-a, a]$, notemos que $f(a)$ e $f(-a)$ não podem ser ambos nulos. Como $-a < a$ (uma vez que $a > 0$) e f é estritamente decrescente em $[-a, a]$, então devemos ter $f(-a) > f(a) = 0$ ou $f(a) < f(-a) = 0$. Portanto, a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais e distintas. (Veja a *Figura 5.3.*)

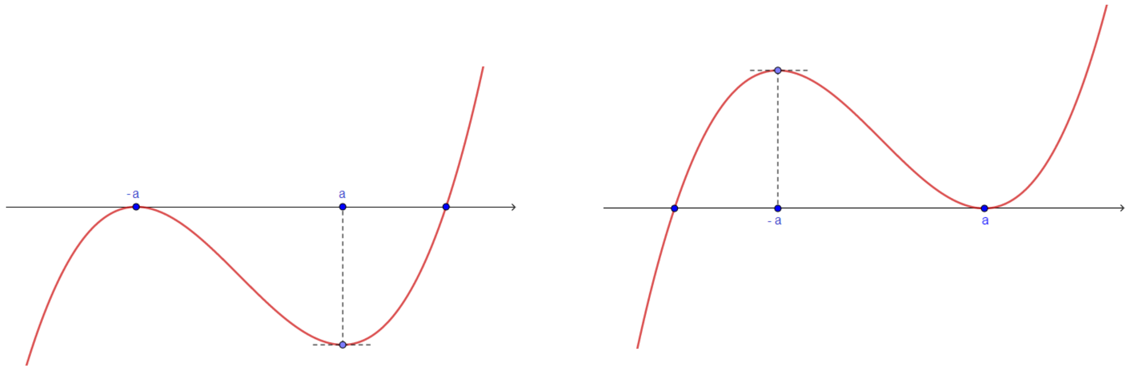

Figura 5.3: Caso $\Delta = 0$, quando $p < 0$.

Por (a) e (b), $\Delta = 0$ é uma condição suficiente para que a equação $f(x) = 0$ possua duas raízes reais distintas ou uma única raiz nula de multiplicidade três.

(iii) Seja $p < 0$. Por (5.5), temos que $\Delta < 0$ se, e somente se, $f(a)f(-a) < 0$. Nesse caso, $f(a)$ e $f(-a)$ têm sinais opostos. Como $-a < a$ (uma vez que $a > 0$) e f é estritamente decrescente no intervalo $[-a, a]$, segue que $f(-a) > f(a)$. Logo, devemos ter $f(-a) > 0$ e $f(a) < 0$. Isto significa que existe um único $\xi \in [-a, a]$ tal que $f(\xi) = 0$. Além disso, como f é estritamente crescente no intervalo $(-\infty, -a]$, $f(-a) > 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, temos também que existe um único $\xi \in (-\infty, -a]$ tal que $f(\xi) = 0$. Por último, como f também é estritamente crescente no intervalo $[a, +\infty)$, $f(a) < 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, fica claro que existe também um único $\xi \in [a, +\infty)$ tal que $f(\xi) = 0$. Portanto, $\Delta < 0$ é uma condição suficiente para que a equação $f(x) = 0$ possua três raízes reais e distintas. (Veja a *Figura 5.4.*)

De (i), (ii) e (iii), segue o teorema. ■

Vamos retomar a equação de grau 3 do *Exemplo 26* e resolvê-la aplicando o *Teorema 16.*

Exemplo 27 *Prove que a equação* $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ *admite três raízes reais distintas.*

Solução: Para obtermos as hipóteses do *Teorema 16* devemos provocar a anulação do termo de segundo grau por meio da substituição $x = y - \frac{1}{3}$, da mesma forma como procedemos em

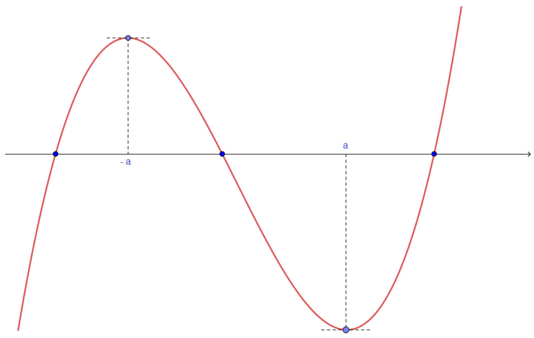

Figura 5.4: Caso $\Delta < 0$

(5.2). Com efeito,

$$\begin{aligned} \left(y-\frac{1}{3}\right)^3+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-5\left(y-\frac{1}{3}\right)+1=0 \\ \Leftrightarrow \quad y^3-3\frac{1}{3}y^2+3\frac{1}{9}y-\frac{1}{27}+y^2-2\frac{1}{3}y+\frac{1}{9}-5y+\frac{5}{3}+1=0 \\ \Leftrightarrow \quad y^3+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-5\right)y-\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{5}{3}+1=0 \\ \Leftrightarrow \quad y^3-\frac{16}{3}y+\frac{74}{27}=0. \end{aligned}$$

Fazendo agora $p=-\dfrac{16}{3}$ e $q=\dfrac{74}{27}$ em (5.4), temos que

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{\frac{74}{27}}{2}\right)^2+\left(\frac{-\frac{16}{3}}{3}\right)^3 = \frac{1369}{729}-\frac{4096}{729} = -\frac{2727}{729} < 0.$$

Pelo *Teorema 16*, segue que $x^3+x^2-5x+1=0$ possui três raízes reais distintas.

5.3 Cálculo da raiz n-ésima

A questão que suscitamos agora é a seguinte: dada uma equação $f(x)=0$, cuja raiz α pertença a um intervalo I, é possível obter uma sequência (x_n) de aproximações sucessivas para a raiz de tal forma que a sequência convirja para α? A resposta depende tanto do intervalo que estamos considerando quanto da função f escolhida.

Nesta seção, apresentaremos um método para se calcular a *raiz n-ésima* de um número real, chamado *Método de Newton*. A função que usaremos para apresentar o método será do tipo $f: I \to \mathbb{R}$, derivável em $I \subset \mathbb{R}$, com derivada contínua.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Basicamente, o *Método de Newton* consiste em, fixando x_0 como uma aproximação inicial para o zero da função, gerar uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujos termos são dados pela seguinte recorrência:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)};$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)};$$
$$\cdots$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.6}$$

Geometricamente, o número real $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ é a abscissa do ponto em que a reta tangente ao gráfico de f em x_i intersecta o eixo horizontal. A ideia por trás do método é a seguinte: dado um valor inicial x_0 suficientemente próximo da raiz α, $(x_0, f(x_0))$ é o ponto onde a reta tangente intersecta o gráfico de f e, por sua vez, a interseção da tangente com o eixo das abscissas ocorre em x_1; do mesmo modo, $(x_1, f(x_1))$ é outro ponto onde a reta tangente intersecta o gráfico de f e, por sua vez, a interseção da tangente com o eixo das abscissas ocorre em x_2. Continuando esse processo por n vezes, chegamos a um valor x_n que é uma aproximação ideal para α, raiz da equação $f(x) = 0$. A *Figura 5.5* fornece tal interpretação geométrica.

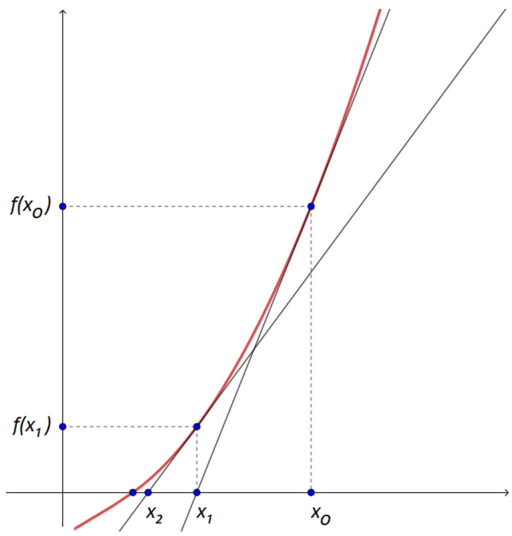

Figura 5.5: Método de Newton

Se θ_1 é o ângulo que a reta tangente, que passa por x_1, faz com o eixo das abscissas, então podemos escrever

$$\tan\theta_1 = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1},$$

de onde vem

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

De forma análoga, se θ_n é o ângulo que a reta tangente, que passa por x_n, faz com o eixo das abscissas, então chegamos à recorrência em (5.6).

Proposição 31 *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função derivável em* $I \subset \mathbb{R}$, *com derivada contínua, tal que* $f'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$. *Se a sequência* (x_n) *de aproximações sucessivas converge para algum número real* $\alpha \in I$, *então* $f(\alpha) = 0$.

Demonstração: Seja $\alpha \in I$ um número real tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$. Usando limites em (5.6) e o fato de que f é uma função derivável em I, com derivada contínua, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} x_n - \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n)} \\
&= \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},
\end{aligned}$$

ou seja, $\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0$, de onde $f(\alpha) = 0$. ∎

Um aprimoramento do *Método de Newton* resulta da observação de que as raízes da equação $f(x) = 0$ são os pontos fixos da função de Newton $\eta : I \to \mathbb{R}$, dada por $\eta(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Lema 17 *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função derivável em* $I \subset \mathbb{R}$, *com* $f'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in I$. *Então,* $f(\alpha) = 0$ *se, e somente se,* α *é ponto fixo da função de Newton.*

Demonstração: De fato, se $\alpha \in I$, então $f'(\alpha) \neq 0$, logo

$$f(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha \;\Leftrightarrow\; \eta(\alpha) = \alpha.$$

■

Assim, transformamos o problema de determinar os valores de x para os quais $f(x) = 0$ (zeros de f) em outro, equivalente, de determinar os valores de x para os quais $\eta(x) = x$ (pontos fixos de η).

A importância da função η, de Newton, está na rapidez com que as aproximações sucessivas convergem para a raiz α, quando convergem.

Lema 18 *Sejam* $x_1, x_2, ..., x_n$ *números reais não negativos. Então,*

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$$

Teorema 17 (Cálculo da raiz n-ésima) *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função, dada por* $f(x) = x^n - c$, *com* $n \geq 2$, $c > 0$ *e seja* $J = [\sqrt[n]{c}, +\infty)$ *um intervalo. A função* η *de Newton satisfaz:*

(i) $\eta(x_0) \in J$, *para todo* $x_0 > 0$. *Em particular,* $\eta : J \to J$;

(ii) η *é uma contração.*

Demonstração:

(i) Sendo f' a derivada de f, temos que $f'(x) = nx^{n-1}$, para todo $x \in J$. Em particular, $f'(x) \neq 0$, para $x \neq 0$. Agora, substituindo $f'(x)$ na função de Newton, segue que

$$\begin{aligned}\eta(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^n - c}{nx^{n-1}} = \\ &= \frac{nx^n - x^n + c}{nx^{n-1}} = \frac{(n-1)x^n + c}{nx^{n-1}} = \\ &= \frac{(n-1)x + \dfrac{c}{x^{n-1}}}{n} = \frac{1}{n}\left[(n-1)x + \frac{c}{x^{n-1}}\right].\end{aligned}$$

Assim, para todo $x > 0$ e para todo $n \geq 2$, $\eta(x)$ é a *média aritmética* dos n números: x, x, x, ..., x e $\frac{c}{x^{n-1}}$. Como a *média geométrica* desses números é $\sqrt[n]{c}$, concluímos que $\eta(x) \geq \sqrt[n]{c}$, para todo $x > 0$. Portanto, fixando qualquer $x_0 > 0$, temos que $\eta(x_0) = x_1 \in J$. Em particular, temos que $\eta(x) \in J$, para todo $x \in J$.

(ii) Para a segunda parte da demonstração, devemos provar que $|\eta'(x)| \leq k < 1$, para todo $x \in J$. Seguirá, do *Corolário 3*, que $\eta : J \to J$ é uma contração e a unicidade de α, ponto fixo de η, estará garantida pelo *Teorema 10.*

Sendo f'' a segunda derivada de f, temos que $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, para todo $x \in J$. Em particular, $f''(x) \neq 0$, para $x \neq 0$. Daí, se η' é a derivada da função de Newton, então

$$\begin{aligned}
\eta'(x) &= \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]' = [x]' - \left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]' = \\
&= 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \\
&= 1 - \frac{n^2x^{2n-2} - (x^n - c)n(n-1)x^{n-2}}{n^2x^{2n-2}} = \\
&= \frac{n^2x^{2n-2} - n^2x^{2n-2} + (x^n - c)n(n-1)x^{n-2}}{n^2x^{2n-2}} = \\
&= \frac{(x^n - c)n(n-1)x^{n-2}}{n^2x^{2n-2}} = \\
&= \frac{x^n n(n-1)x^{n-2} - cn(n-1)x^{n-2}}{n^2x^{2n-2}} = \\
&= \frac{n(n-1)x^{2n-2} - cn(n-1)x^{n-2}}{n^2x^{2n-2}} = \\
&= \frac{n(n-1)x^{2n-2}}{n^2x^{2n-2}} - \frac{cn(n-1)x^{n-2}}{n^2x^nx^{n-2}} = \\
&= \frac{(n-1)}{n} - \frac{c}{x^n}\frac{(n-1)}{n} = \\
&= \frac{(n-1)}{n}\left[1 - \frac{c}{x^n}\right].
\end{aligned}$$

Assim, para concluirmos que $|\eta'(x)| \leq k < 1$, para todo $x \in J$, basta observar que $0 \leq \eta'(x) \leq \dfrac{(n-1)}{n}$ se, e somente, se $0 \leq 1 - \dfrac{c}{x^n} \leq 1$, pois:

$$x > \sqrt[n]{c} \;\Rightarrow\; x^n > c \;\Rightarrow\; 1 > \frac{c}{x^n} \;\Rightarrow\; 0 < \frac{c}{x^n} < 1 \;\Rightarrow\; -1 < -\frac{c}{x^n} < 0.$$

■

Observação: Escolhendo inicialmente qualquer número $x_0 > 0$, as aproximações sucessivas $x_{n+1} = \eta(x_n)$ convergem, de fato, para $\alpha = \sqrt[n]{c}$ (único ponto fixo de η). Notemos que, pelo *Teorema 10*, existe um único α tal que $\eta(\alpha) = \alpha$. Como $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in J$, segue do *Lema 17* que α é a raiz de f. Logo,

$$\eta(\alpha) = \alpha \;\Leftrightarrow\; f(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha^n - c = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha^n = c \;\Leftrightarrow\; \alpha = \sqrt[n]{c}.$$

Exemplo 28 *Tomando* $n = 3$, $c = 4$ *e* $x_0 = 10$ *no Teorema 17, vamos obter uma sequência de aproximações sucessivas para* $\sqrt[3]{4}$.

Solução: Se $f : J \to \mathbb{R}$ é a função definida no intervalo $J = [\sqrt[3]{4}, +\infty)$, dada por $f(x) = x^3 - 4$, temos que $f'(x) = 3x^2$, para todo $x \in J$. Substituindo $f'(x)$ na função de Newton, segue que

$$\eta(x) \;=\; x - \frac{f(x)}{f'(x)} \;=\; x - \frac{x^3 - 4}{3x^2} \;=\; \frac{3x^3 - x^3 + 4}{3x^2} \;=\; \frac{2x^3 + 4}{3x^2}.$$

Fazendo $x_0 = 10$, vamos obter uma sequência de aproximações sucessivas de 8 termos, dada por $x_{n+1} = \eta(x_n)$:

$$\begin{array}{lcl}
x_1 &=& \eta(10) \;=\; \dfrac{2000+4}{300} \;=\; \dfrac{2004}{300} \;=\; 6,68 \\
x_2 &=& \eta(6,68) \;=\; \dfrac{596,155264+4}{133,8672} \;=\; \dfrac{600,155264}{133,8672} \;\approx\; 4,48321369 \\
x_3 &=& \eta(4,48321369) \;=\; \dfrac{180,21806194+4}{60,29761497} \;=\; \dfrac{184,21806194}{60,29761497} \;\approx\; 3,05514674 \\
x_4 &=& \eta(3,05514674) \;=\; \dfrac{57,03300031+4}{28,00176480} \;=\; \dfrac{61,03300031}{28,00176480} \;\approx\; 2,17961263 \\
x_5 &=& \eta(2,17961263) \;=\; \dfrac{20,70942034+4}{14,25213365} \;=\; \dfrac{24,70942034}{14,25213365} \;\approx\; 1,73373481 \\
x_6 &=& \eta(1,73373481) \;=\; \dfrac{10,42264637+4}{9,01750917} \;=\; \dfrac{14,42264637}{9,01750917} \;\approx\; 1,[5]9940468 \\
x_7 &=& \eta(1,59940468) \;=\; \dfrac{8,18285928+4}{7,67428599} \;=\; \dfrac{12,18285928}{7,67428599} \;\approx\; 1,[5874]9091 \\
x_8 &=& \eta(1,58749091) \;=\; \dfrac{8,00135864+4}{7,56038216} \;=\; \dfrac{12,00135864}{7,56038216} \;\approx\; 1,[58740105].
\end{array}$$

Para este exemplo foram consideradas oito iterações para encontrar uma aproximação para $\sqrt[3]{4}$, com uma precisão de oito casas decimais após a vírgula.

Exemplo 29 *Se a função* η *não for uma contração, não há garantia de que a sequência dada pelo Método de Newton converge.*

Solução: Consideremos, por exemplo, a função $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x - x^3$. A função η de Newton é dada por

$$\eta(x) \;=\; x - \frac{f(x)}{f'(x)} \;=\; x - \frac{x - x^3}{1 - 3x^2} \;=\; \frac{x(1-3x^2) - (x - x^3)}{1 - 3x^2} \;=\; -\frac{2x^3}{1 - 3x^2}.$$

Se $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, temos que

$$\begin{aligned} \eta(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{2x^3}{1-3x^2} = x \\ &\Leftrightarrow \quad x + \frac{2x^3}{1-3x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x(1-3x^2)+2x^3}{1-3x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x-x^3}{1-3x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x(1-x)(1+x)}{1-3x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0. \end{aligned}$$

Escolhendo inicialmente $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, as aproximações sucessivas $x_{n+1} = \eta(x_n)$ não convergem para zero (ponto fixo de η), pois

$$\eta\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3}{1-3\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -\frac{2\cdot\frac{5\sqrt{5}}{125}}{1-3\cdot\frac{5}{25}} = -\frac{\frac{2\sqrt{5}}{25}}{\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

e

$$\eta^2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \eta\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3}{1-3\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = +\frac{2\cdot\frac{5\sqrt{5}}{125}}{1-3\cdot\frac{5}{25}} = +\frac{\frac{2\sqrt{5}}{25}}{\frac{2}{5}} = +\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ou seja, $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ é um ponto de periódico de período 2 e, portanto, fica oscilando numa órbita cíclica e finita.

5.4 Método da Bissecção

No caso das raízes de equações polinomiais de segundo grau, sabemos que é fácil determiná-las, pois essas equações possuem fórmula de resolução que nos fornecem as raízes em função dos coeficientes. Porém, no caso de equações polinomiais de grau mais elevado, ou equações não lineares de outros tipos, a tarefa de encontrar as raízes, quando existem, fica um tanto mais complicada. Isso acontece porque nem sempre é possível aplicar métodos algébricos para obter a solução de uma equação. Às vezes, tudo o que conseguimos são aproximações para as raízes. Por isso, a questão que apresentamos agora é: *existe um método para se obter as raízes de uma equação qualquer?*

O objetivo desta seção é o estudo de um método numérico para a resolução de equações, inclusive as não lineares, denominado *Método da Bissecção.*

A ideia central do *Método da Bissecção* é partir de um intervalo inicial que contenha um zero da função, definindo neste intervalo a primeira aproximação para a raiz, e em seguida refinar essa aproximação através de um processo iterativo. Podemos dividi-lo em duas fases:

Fase I: (Localização) Obter um intervalo que contenha apenas uma raiz, escolhendo o número real definido pela *média aritmética* dos extremos deste intervalo como aproximação inicial para a raiz.

Fase II: (Refinamento) Aplicar um processo iterativo que consista em *bissectar* (isto é, reduzir pela metade) cada subintervalo a partir do intervalo definido na Fase I, e considerar apenas os subintervalos que contenham a raiz, melhorando as aproximações a cada subintervalo, até que se chegue a uma aproximação para a raiz que esteja dentro de um limite de erro aceitável e prefixado no início do processo.

Vamos mostrar que, de fato, o método converge, desde que exista uma raiz no intervalo inicial escolhido.

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, o *Teorema do Valor Intermediário* nos garante que existe pelo menos uma raiz ξ de $f(x) = 0$ em (a,b). Se, além disso, a derivada f' não muda de sinal no intervalo (a,b), então o *Teorema 15* afirma que f é uma função monótona e, portanto, o zero da função é único nesse intervalo. É com base nesse argumento que construiremos uma sequência (x_n) de aproximações sucessivas que convergirá para a raiz ξ.

Primeiramente, é preciso definir um intervalo que contenha apenas um zero de f. Então, seja $I_0 = [a_0, b_0]$ esse intervalo inicial. Agora, bissectamos o intervalo I_0 em seu ponto médio

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Se $x_0 = \xi$ é a raiz procurada, nada mais temos a fazer. Suponhamos, então, que x_0 não seja a raiz. Então, há dois subintervalos a serem analisados a seguir: caso $f(a_0)f(x_0) < 0$, temos que $\xi \in (a_0, x_0)$; caso contrário, temos que $\xi \in (x_0, b_0)$. Obtemos assim um subintervalo, que possui a raiz ξ, de amplitude igual à metade da amplitude do intervalo inicial I_0. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\xi \in I_1 = (a_0, x_0)$. Repetindo o procedimento, bissectamos o intervalo I_1 em seu ponto médio

$$x_1 = \frac{a_0 + x_0}{2}.$$

Se $x_1 = \xi$ é a raiz procurada, nada mais temos a fazer. Se x_1 não é a raiz, temos dois novos subintervalos a serem analisados: caso $f(a_0)f(x_1) < 0$, temos que $\xi \in (a_0, x_1)$; caso contrário, temos que $\xi \in (x_1, x_0)$. Obtemos assim outro subintervalo, que possui a raiz ξ, de amplitude igual à metade da amplitude do intervalo I_1. Se $\xi \in I_2 = (x_1, x_0)$, procedemos com a bissecção desse intervalo de forma totalmente análoga ao passo anterior.

Assim, bissectando em seu ponto médio cada subintervalo I_k que contém a raiz ξ, obtemos um novo subintervalo I_{k+1}, que também contém a raiz ξ, de amplitude igual à metade da amplitude do subintervalo I_k, gerando dessa forma uma sequência (x_n) de aproximações sucessivas para a raiz ξ. Essas iterações são realizadas da seguinte forma:

1ª iteração: Seja $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Se $f(a_0) < 0$, $f(b_0) > 0$ e $f(x_0) > 0$, então

$$\begin{cases} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0. \end{cases}$$

2ª iteração: Suponhamos agora que $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Se $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ e $f(x_1) < 0$, então

$$\begin{cases} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1. \end{cases}$$

$\vdots$

***n*-ésima iteração:** Seja $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Há duas possibilidades:

Se $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ e $f(x_n) > 0$, então

$$\begin{cases} \xi \in (a_n, x_n) \\ \\ a_{n+1} = a_n \\ \\ b_{n+1} = x_n. \end{cases}$$

Se $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ e $f(x_n) < 0$, então

$$\begin{cases} \xi \in (x_n, b_n) \\ \\ a_{n+1} = x_n \\ \\ b_{n+1} = b_n. \end{cases}$$

O *Método da Bissecção* gera, portanto, três sequências: (a_n), (b_n) e (x_n), definida por

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Teorema 18 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, com* $f(a)f(b) < 0$. *As sequências* (a_n), (b_n) *e* (x_n), *geradas pelo Método da Bissecção, convergem. Em particular,* (x_n) *converge para o zero* ξ *de* f.

Demonstração: De fato, a sequência (a_n) é não decrescente e limitada superiormente por b_0, logo existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$. A sequência (b_n) é não crescente e limitada inferiormente por a_0, logo existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = s$. Vamos mostrar agora que a sequência (x_n), definida por $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, tal que $a_n < x_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, é convergente.

A amplitude λ de cada intervalo bissectado é a metade da amplitude do intervalo anterior. Assim, para todo n, temos que

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_0 - a_0}{2^n} \right) = 0.$$

Como (a_n) e (b_n) são convergentes,

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} b_n \;-\; \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n) \;=\; \lim_{n\to\infty}(b_n)\,,$$

de onde $r = s$, ou seja, as sequências (a_n) e (b_n) possuem limites iguais. Seja então $\xi = r = s$ o limite das duas sequências. Como $a_n < x_n < b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, pelo *Teorema 2* segue que $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Por último, resta provarmos que ξ é o zero da função f. Para isso, notemos que a cada iteração n, temos que $f(a_n)f(b_n) < 0$. Segue, pela continuidade de f, que

$$\begin{aligned}
0 \;&\geq\; \lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n)\\
&=\; \lim_{n\to+\infty} f(a_n)\lim_{n\to+\infty} f(b_n)\\
&=\; f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) f\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right)\\
&=\; f(\xi)f(\xi)\\
&=\; f(\xi)^2,
\end{aligned}$$

isto é, $0 \leq f(\xi)^2 \leq 0$, de onde $f(\xi) = 0$. ∎

Concluímos, assim, que o *Método da Bissecção* gera uma sequência (x_n) que converge para o zero ξ da função f, desde que f seja contínua em $[a,b]$, com $f(a)f(b) < 0$.

Dada uma precisão ε e um intervalo inicial $[a_0, b_0]$, é possível saber, *a priori*, quantas iterações serão efetuadas pelo método até que obtenhamos $a_0 - b_0 < \varepsilon$.

Proposição 32 *Seja $\lambda > 0$ a amplitude do intervalo inicial $[a_0, b_0]$ que contém um só zero de f. O número k de iterações necessárias para garantir uma aproximação da raiz com precisão $\varepsilon > 0$ é dado por* $k > \dfrac{ln\frac{\lambda}{\varepsilon}}{ln2}$.

Demonstração: Por hipótese, após k iterações, temos que

$$x_k \;=\; \frac{b_k - a_k}{2} \;=\; \frac{\frac{b_0 - a_0}{2^k}}{2} \;=\; \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} \;=\; \frac{\lambda}{2^{k+1}}.$$

Assim, $b_k - a_k < \varepsilon$ se, e somente se, $\dfrac{\lambda}{2^k} < \varepsilon$. Logo,

$$\frac{\lambda}{2^k} < \varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{\lambda}{\varepsilon} < 2^k \;\Rightarrow\; ln\frac{\lambda}{\varepsilon} < ln\;2^k \;\Rightarrow\; ln\frac{\lambda}{\varepsilon} < k\cdot ln\;2 \;\Rightarrow\; k > \frac{ln\frac{\lambda}{\varepsilon}}{ln2}.$$

O que completa a demonstração. ■

Este método possui vantagens e desvantagens quando comparado ao de Newton. Uma grande vantagem é que o método converge sempre, desde que a função f seja contínua num intervalo $[a, b]$, que contém uma raiz, com $f(a)f(b) < 0$. Outra vantagem é que existe uma possibilidade de, *a priori*, podermos indicar um majorante para o erro cometido ao fim de um certo número de iterações. Por outro lado, uma desvantagem do método está no fato de a sua velocidade de convergência ser muito lenta, uma vez que quanto menor for o limite de erro ε exigido, maior será o número de iterações.

Exemplo 30 *Consideremos a função* $g : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, *dada por* $g(x) = x^3 - 6x - 4$. *Vamos determinar* $\xi \in [-1, 0]$ *tal que* $f(\xi) = 0$, *com uma precisão* $\varepsilon = 10^{-3}$.

Solução: A função g é contínua em $[-1, 0]$ e $g(-1)g(0) < 0$, pois $g(-1) = 1$ e $g(0) = -4$. Além disso, a derivada g' é dada por $g'(x) = 3x^2 - 6$. Como $g'(x) < 0$ para todo $x \in (-1, 0)$, temos pelo *Teorema 15* que g é estritamente decrescente no intervalo $[-1, 0]$. Pelo *Lema 8*, existe $\xi \in [-1, 0]$ tal que $g(\xi) = 0$. A unicidade do zero da função decorre do fato de que g é decrescente. Temos também que a amplitude do intervalo $[-1, 0]$ é $\lambda = 1$. Logo, o número k de iterações necessárias para garantir uma aproximação da raiz com precisão $\varepsilon = 10^{-3}$ é dado por

$$k > \frac{ln\frac{\lambda}{\varepsilon}}{ln2} = \frac{ln\frac{1}{10^{-3}}}{ln2} = \frac{ln10^3}{ln2} = 3\,\frac{ln10}{ln2} = 9,965784285,$$

ou seja, $k = 10$.

A tabela a seguir fornece a sequência de aproximações sucessivas que converge para a raiz ξ da equação $g(x) = 0$.

Iteração	Sequência (a_n)	Sequência (b_n)	Sequência (x_n)	$g(x_n)$
1	-1	0	$-0,5$	$-1,125$
2	-1	$-0,5$	$-0,75$	$0,078125$
3	$-0,75$	$-0,5$	$-0,625$	$-0,49414063$
4	$-0,75$	$-0,625$	$-0,6875$	$-0,19995117$
5	$-0,75$	$-0,6875$	$-0,71875$	$-0,05880737$
6	$-0,75$	$-0,71875$	$-0,734375$	$0,01019669$
7	$-0,734375$	$-0,71875$	$-0,7265625$	$-0,02417231$
8	$-0,734375$	$-0,7265625$	$-0,73046875$	$-0,00695437$
9	$-0,734375$	$-0,73046875$	$-0,73242188$	$0,00162954$
10	$-0,73242188$	$-0,73046875$	$-0,73144531$	$-0,00266032$

Assim, $\xi = x_{10} = -0,73144531$ é a raiz procurada, com precisão $\varepsilon = 10^{-3}$.

Conclusão

Quando pegamos uma calculadora e começamos a iterar várias vezes a função cosseno, a partir de um número real positivo qualquer, o valor obtido converge para $0,739085133...$, que é o único ponto fixo da função. Isso acontece devido ao fato de a função cosseno ser uma contração no intervalo $[-1,1]$. Pelo Teorema de Banach, todas as contrações definidas em intervalos fechados possuem essa propriedade. Mais ainda, dado qualquer ponto do domínio de uma contração, a órbita desse ponto nos fornece uma sequência de Cauchy que converge diretamente para o ponto fixo. Como aplicação, transformamos o problema de encontrar o zero da função raiz n-ésima em outro, equivalente, de determinar o ponto fixo da função η de Newton.

Já num outro extremo, o Teorema de Li-Yorke garante que se uma função tiver pelo menos um ponto periódico de período três, então a função possuirá também pontos periódicos de todos os períodos. Neste caso, como a órbita dos pontos de período maior que um é finita e cíclica, as iterações dessa função não convergem para um ponto fixo.

Para encerrar, apresentamos um método numérico para resolver equações de qualquer tipo, inclusive as não lineares. Usando o Teorema do Valor Intermediário para obter um intervalo adequado que contenha um zero da função, é possível construir, por meio do Método da Bissecção, uma sequência de aproximações sucessivas que converge para esse zero. Uma grande vantagem em usar este método é que ele converge sempre.

Referências Bibliográficas

[1] *ERIKSSON, K; ESTEP D; JOHNSON C.* **Lipschitz Continuity**. Applied Mathematics: Body and Soul, Vol. 1, p. 149-164, Springer, 2004.

[2] *GUIDORIZZI, H. L.* **Um Curso de Cálculo, volume 1**, 5ª edição. Editora LTC, 2007.

[3] *HEFEZ, A; VILLELA, M. L. T.* **Polinômios e Equações Algébricas**. Coleção PROFMAT, SBM, 2015.

[4] *LI, T.-Y; YORKE, J. A.* **Period Three Implies Chaos**. The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10, p. 985-992, 1975.

[5] *LIMA, E. L.* **A Equação do Terceiro Grau**. Matemática Universitária, nº. 5, p. 9-23, IMPA, 1987.

[6] *LIMA, E. L.* **Análise Real, volume 1**, 6ª edição. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2002.

[7] *LIMA, E. L.* **Curso de Análise, volume 1**, 12ª edição. IMPA, 2009.

[8] *LIMA, E. L.* **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT, SBM, 2014.

[9] *NETO, A. C. M.* **Fundamentos de Cálculo**. Coleção PROFMAT, SBM, 2015.

[10] *POLEZZI, M; ANIZ, C.* **Ordens de Contato entre Aplicações**. Matemática Universitária, nº. 46, p. 61-65, IMPA, 2006.

[11] *RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R.* **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**, 2ª edição. Editora Makron Books, 1997.

[12] *SILVA, Z. C.* **A raiz n-ésima pelo método das aproximações sucessivas**. Revista do Professor de Matemática, nº. 4, p. 1-4, SBM, 2011.