UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JOÃO PAULO MENDES DE ALMEIDA

TÓPICOS DE ÁLGEBRA APLICADOS NOS EXAMES MILITARES

BELÉM-PA

2018

JOÃO PAULO MENDES DE ALMEIDA

TÓPICOS DE ÁLGEBRA APLICADOS NOS EXAMES MILITARES

Dissertação apresentada, como requisito parcial, para obtenção do título de Mestre em Matemática do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, orientado pelo Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo.

BELÉM-PA

2018

.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D278t De Almeida, João Paulo Mendes
Tópicos de Álgebra Aplicados nos Exames Militares / João Paulo Mendes De Almeida. — 2018
166 f. : il. color

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

1. Álgebra. 2. Produtos Notáveis. 3. Fatoração Algébrica. 4. Equações. 5. Polinômios. I. Campelo, Anderson David de Souza , *orient.* II. Título

CDD 512.076

JOÃO PAULO MENDES DE ALMEIDA

TÓPICOS DE ÁLGEBRA APLICADOS NOS EXAMES MILITARES

Dissertação apresentada como requisito parcial, para obtenção de grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará.

Data de Aprovação: 16 / 10 / 2018

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (Orientador).

PROFMAT/UFPA

Profa. Dra. Tânia Madeleine Begazo Valdivia (Membro da Banca)

FACULDADE DE MATEMÁTICA/UFPA

Profa. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento (Membro da Banca)

PROFMAT/UFPA

Gesson José Mendes Lima

Prof. Dr. Gesson José Mendes Lima (Membro da Banca)

Dedico este trabalho a minha família e todos que contribuíram com a minha formação educacional e profissional.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Marcilene Souza e Leandro Souza por terem me ajudado e incentivado ao longo de toda minha vida acadêmica.

A toda minha família, em especial as minhas irmãs, Liza Maria Souza e Lizandra Marcela Souza.

A minha namorada, incentivadora, Nayana Silva.

A todos os meus amigos do PROFMAT que batalharam junto comigo nesse curso, são eles Emerson Veiga, Genilson Moraes, Gilson Meireles, Haroldo Aires, José Maria Lobato, Leandro Farias, Leonardo Pantoja, Manoel Sagica, Marcelo Tavares, Ricardo Oliveira, Ronaldo Lima e Valdeíre Guiral.

A coordenação do PROFMAT em nome do Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias.

Ao meu orientador Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo, pela orientação, mas também, pela paciência e compreensão ao longo deste trabalho.

A todos os meus professores do PROFMAT, em especial ao Prof. Dr. Rogélio Guzman e a Prof. Dra. Tânia Begazo.

A todos os meus alunos.

A todos meu muito obrigado!

"Raciocínio matemático pode ser considerado um tanto esquematicamente como o exercício de uma combinação de duas instalações , o que podemos chamar de intuição e criatividade".

Allan Mathison Turing.

TÓPICOS DE ÁLGEBRA APLICADOS NOS EXAMES MILITARES

Resumo

Este trabalho aborda de uma maneira prática, mas sem desprezar a construção do conhecimento, os assuntos mais recorrentes dentro da Álgebra na Educação Básica. Com o intuito de trabalhar essa parte da Matemática, o trabalho apresenta aspectos que vão deste um apanhado histórico e uma apresentação da linguagem algébrica até as operações como adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de termos e expressões algébricos. Além de tratar de equações do 1º e 2º graus e polinômios voltado, especialmente, para expressões do 3º grau. E ainda, uma repleta seleção de exemplos e aplicações em exames militares, todos devidamente resolvidos e explanados, em sua maioria, de maneira clara e concisa.

Palavras-chave: Álgebra, Expressões algébricas, Produtos notáveis, Fatoração algébrica, Frações algébricas, Radicais algébricos, Equações, Polinômios.

ALGEBRA TOPICS APPLIED IN MILITARY EXAMS

Abstract

This work addresses in a practical way, but without neglecting the construction of knowledge, the most recurrent subjects within Algebra in Basic Education. In order to work on this part of Mathematics, the work presents aspects that range from a historical overview and a presentation of algebraic language to operations such as addition, subtraction, multiplication, division, potentiation and radicalization of terms and algebraic expressions. In addition to dealing with 1st and 2nd degree equations and polynomials, especially for 3rd degree expressions. And yet, a full selection of examples and applications in military examinations, all duly solved and explained, mostly, in a clear and concise manner.

Keywords: Algebra, Algebraic Expressions, Remarkable Products, Algebraic Factoring, Algebraic Fractions, Algebraic Radicals, Equations, Polynomials.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Entender, compreender e manipular a Matemática para uma boa parte da sociedade é algo, até certo ponto, extraordinário. Tais indivíduos apresentam uma habilidade para poucos e são considerados "acima da média". De certo modo, essa visão, de imediato, gera a conclusão de que as pessoas que sentem dificuldade na disciplina seriam "abaixo da média" ou pelo menos, não estariam no mesmo nível desses indivíduos. Mas até que ponto essa visão pode prejudicar o ensino de Matemática? Bloquear a aprendizagem de Aritmética, Álgebra e Geometria? Questionamentos como esses levam professores e educadores da área a desenvolverem pesquisas e estratégias que respondam e corrijam esse e muitos outros pensamentos, a priori, questionáveis. Na tentativa de contribuir positivamente com o ensino de matemática, em particular no Álgebra, faz-se de bom grado o presente trabalho. No Brasil o ensino da Álgebra na Educação Básico é visto como algo necessário e fundamental, mas para os professores, funciona mais como um processo mecânico e que gera um baixo rendimento dos alunos, como destacado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN.

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Entretanto, a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40%¸ de acerto em muitas regiões do país. Isso faz com que os professores procurem aumentar ainda mais o tempo dedicado a este assunto, propondo em suas aulas, na maioria das vezes, apenas a repetição mecânica de mais exercícios. Essa solução, além de ser ineficiente, provoca grave prejuízo no trabalho com outros temas da Matemática, [11].

Além do mais, os professores do Ensino Fundamental acabam extrapolando tópicos que vão além do nível requerido, com o intuito de compensar algo não satisfatório.

> Existem também professores que, na tentativa de tornar mais significativa a aprendizagem da Álgebra, simplesmente deslocam para o ensino fundamental conceitos que tradicionalmente eram tratados no ensino médio com uma abordagem excessivamente formal de funções. Convém lembrar que essa abordagem não é adequada a este grau de ensino. Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica, [11].

Álgebra, na vivência cotidiana se apresenta com enorme importância enquanto linguagem, como na variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais, e também enquanto instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral. No ensino básico, esse tema trata de números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos. Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais.

Partindo dessas premissas, o trabalho visa uma aplicabilidade em questões de exames militares, uma vez que esses certames exigem questões de um nível, relativamente, mais elevado e são os que mais contemplam esses tópicos da Álgebra. Além do mais, considerando que o aluno da rede pública, em sua maioria, possui pouco acesso a esses tipos de questões, o que gera um déficit na preparação daqueles que almejam ingressar no ensino militar.

O ensino militar, das forças armadas, no Brasil é um ensino extremamente valorizado. Uma prova disso é o resultado dos alunos pertencentes as escolas militares nas Olimpíadas de Matemática. Entretanto, o ensino militar é ainda mais abrangente e não se resume apenas ao Ensino Básico, hoje a educação militar permite que os jovens tenham acesso ao Ensino Técnico e Superior, seja no Exército, Marinha ou Aeronáutica.

Concursos de admissões aos 13 Colégios Militares(CM) administrados pelo Exército, ao Colégio Naval(CN) e a Escola Preparatória de Cadetes do Ar(EPCAr) são alguns concursos que abrangem o Ensino Fundamental, seja para cursar ou ingressar no mesmo. A Escola Preparatória de Cadetes do Exército(EsPCEx), Escola de Especialistas de Aeronáutica(EEAr), a Academia da Força Aérea(AFA) e a Escola de Sargentos das Armas(EsSA), são concursos que abrangem o Ensino Médio e Técnico. E ainda, a Escola Naval(EN), Instituto Militar de Engenharia(IME) e Instituto Tecnológico da Aeronáutica(ITA), permitem o ingresso no Ensino Superior.

Proporcionar aos alunos da Escola Pública um material adequado para assimilar e fixar conhecimentos de Álgebra, bem como ferramenta preparatória para exames militares. São objetivos, específicos, do trabalho:

1. Apresentar um material que contribua com o ensino da Álgebra;
2. Rever tópicos de Álgebra, como Produtos Notáveis, Fatoração, Radicais e Frações Algébricas;
3. Inserir técnicas que auxiliem no equacionamento de problemas baseadas em equações do 1º e 2º grau e, ainda, sistemas de equações;
4. Apresentar conceitos sobre expressões algébricas e polinômios, em particular para polinômios do 3º grau.
5. Coletar questões de exames militares que abordem os tópicos de álgebra citados.

No presente trabalho, realiza-se uma pesquisa e revisão bibliográfica, a respeito dos materiais disponíveis envolvendo tópicos de Álgebra, visando elaborar um material com questões resolvidas de exames militares voltado a alunos do Ensino Básico da rede pública. O trabalho apresentará os principais tópicos de Álgebra encontrados nos principais exames, como Produtos Notáveis, Fatoração, Radicais e Frações algébricas, Equações e Polinômios.

Capítulo 2

Introdução a Álgebra

2.1 Aspectos Históricos

A Álgebra como se conhece hoje, passou por diversas adaptações e modificações, mudanças essas, construídas ao longo de anos, através de diversas civilizações. Há relatos de problemas algébricos, no Egito, Babilônia, Grécia Antiga e Europa Medieval.

Problemas do Egito Antigo, mostravam que além da Aritmética, existia uma preocupação com problemas algébricos referentes a equações lineares. Havia uma preocupação com a resolução de equações do tipo $x + ax = b$ e $x + ax + bx = c$, onde a,b,c eram conhecidos e a incógnita x era chamada de "aha"! Um exemplo, quando se pede o valor de "aha" sabendo que "aha" mais um sétimo de "aha" dá 19, [3]. A solução se baseava no "método da falsa posição", um método equivalente por tentativas, a grosso modo. Muitos problemas com cálculos de "aha" , muito provavelmente, voltado aos jovens egípcios, eram comumente encontrados no papiro de Rhind.

> Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. O mais extenso dos de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, que está no British Museum(exceto uns poucos fragmentos que estão no Broklyn Museum). Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind, [3].

Os babilônicos para resolver problemas algébricos, consideram útil uma tabulação de valores de $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n. Outro fato interessante, mostrava que os babilônios possuíam mais interesses em resolver problemas relacionados a equações quadráticas do que as equações lineares, tão estimada pelos egípcios. Tal fato, refletia um certo desprezo dos babilônios em relação as equações lineares.

> Muitos textos de problemas do período babilônio antigo mostram que a solução da equação quadrática completa não constituía dificuldade séria para os babilônios, pois tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Podiam transportar termos de uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores, [3].

Na Grécia Antiga, trabalhou-se com a chamada álgebra geométrica, na qual eles eram capazes de resolves equações quadráticas pelo processo conhecido como "aplicação de áreas". Nesse período que surgiu alguns dos produtos notáveis conhecidos hoje, como o quadrado da soma, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ e o produto da soma pela diferença advindos da aplicação de áreas.

> A Álgebra geométrica grega parece, excessivamente artificial; aos que a usaram e tornaram-se hábeis no trato de suas operações, deve ter parecido um instrumento conveniente. A lei distributiva $a(b+c+d) = ab+ac+ad$ era sem duvida muito mais evidente para um estudioso grego do que para um estudante que se inicia em Álgebra hoje, pois o primeiro podia facilmente representar as áreas dos retângulos nesse teorema, que diz simplesmente que o retângulo sobre a e a soma dos segmentos b,c,d é igual a soma dos retângulos sobre a e cada um dos segmentos b,c,d tomados separadamente, [3].

Na Europa Medieval, destaca-se a *Ars Magna* de Cardano que à época foi considerado algo tão notável e impactante que o ano de 1945, tomado como o inicio do período Moderno da Matemática. Surgia assim um método capaz de resolver equações cúbicas e quárticas. Entretanto, Geronimo Cardano(1501-1576) admitiu que as ideias encontradas em sua obra eram sugestões de Tartaglia e Ferrari, respectivamente as soluções das equações cúbicas e quárticas.

> [...] Cardano não foi o descobridor original da solução quer da cúbica quer da quártica. Ele próprio admitiu isso francamente em seu livro. A sugestão para resolvera a cúbica , ele afirma, lhe tinha sido dada por Niccolo Tartaglia(cerca de 1500-1557); a solução da quártica tinha sido descoberta primeiramente pelo antigo amanuense de Cardano, Ludovico Ferrari(1522-1565). O que Cardano deixou de mencionar na *Ars Magna* foi o solene juramento que havia feito a Tartaglia de não revelar o segredo, [3].

A Álgebra evoluiu ainda mais, tanto que, hoje em dia, há uma certa diferença entre a Álgebra Antiga (Elementar) e a Álgebra moderna(Abstrata), do qual o presente trabalho considerou apenas os aspectos históricos mais pertinentes à Álgebra elementar.

2.2 Linguagem Algébrica

A Álgebra é uma das subáreas mais importantes da Matemática. Isso é algo inquestionável para alguns matemáticos, amantes e até curiosos. Mas compreender a linguagem algébrica é algo que poucos conseguem entender dentro do âmbito escolar, por motivos diversos que vão desde a abordagem adotada pelo professor, quanto por um processo mecânico de repetição cultivado pelos alunos.

Segue um quadro abaixo, retirado do livro didático, apresentado por [12]:

Operação	Linguagem matemática	Linguagem comum	Leitura
Adição	$x + 2$	Soma indicada dos números **x** e dois ou soma indicada do número **x** com o número dois.	**x** mais dois
	$a + b$	Soma indicada dos números **a** e **b** ou soma indicada do número **a** com o número **b**.	**a** mais **b**
Subtração	$x - 5$	Diferença indicada dos números **x** e cinco ou diferença indicada do número **x** com o número cinco.	**x** menos cinco
Multiplicação	$2 . x$ ou $2x$	Produto indicado dos números dois e **x** ou o dobro do número **x**.	dois **x**
	$a . b$ ou ab	Produto indicado dos números **a** e **b**.	ab
Divisão	$x : 3$ ou $\frac{x}{3}$	Quociente indicado dos números **x** e três ou a terça parte do número **x**.	**x** dividido por três ou **x** sobre três
Potenciação	a^2	A segunda potência do número **a** ou o quadrado do número **a**.	**a** dois
Radiciação	$\sqrt[3]{y}$	Raiz cúbica do número **y**.	
Adição e multiplicação	$2x + 3y$	Soma indicada do dobro do número **x** com o triplo do número **y**.	Dois **x**, mais três **y**.
Subtração, multiplicação e potenciação	$3a^2 - b^3$	Diferença indicada do triplo do quadrado do número **a** com o cubo do número **b**.	Três **a** dois, menos **b** três.

Figura 2.1: Quadro apresentando a noção da representação e leitura de expressões algébricas, [12].

No quadro percebe-se uma clara preocupação de apresentar a linguagem algébrica, bem como certas operações estão inseridas nas expressões algébricas para que, em linguagem matemática e comum, tenha-se uma leitura coerente dessas expressões. Há uma preocupação com a linguagem algébrica e com o seu entendimento.

2.2.1 Expressões e termos algébricos

Para tentar compreender um pouco mais a linguagem algébrica, segue alguns exemplos interessantes:

Exemplo 1. *Uma locadora de bicicletas esta fazendo muito sucesso. Ao alugar uma bicicleta pela primeira vez, o cliente paga uma taxa única, que é acrescida ao valor diário do aluguel.*

Figura 2.2: A bicicleta é o meio de transporte terrestre mais usado no mundo, figura retirada do livro didático, [5].

Considere a tabela a seguir:

Números de dias	Cálculo do aluguel	Valor a ser pago
1	8 + 5. 1	13
2	8 + 5. 2	18
3	8 + 5. 3	23
5	8 + 5. 5	33
10	8 + 5. 10	58

Para um número qualquer de dias: ***Aluguel = 8 + 5.(número de dias).***

Comentário/Resolução 1. *No lugar da expressão "número de dias" atribui-se uma letra em seu lugar, uma vez que é comum na Álgebra sempre que uma palavra ou expressão se repete constantemente, usa-se uma letra que substitua a mesma. No caso, substituindo "número de dias"por* $\boldsymbol{n}$*, resulta em:* $\boldsymbol{8 + 5.n}$ *ou* $\boldsymbol{8 + 5n}$*.*

Exemplo 2. *Um dos resultados mais importantes da geometria é o Teorema de Pitágoras que relaciona as medidas dos três lados de um triângulo retângulo. "Em um triângulo retângulo a medida da hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos".*

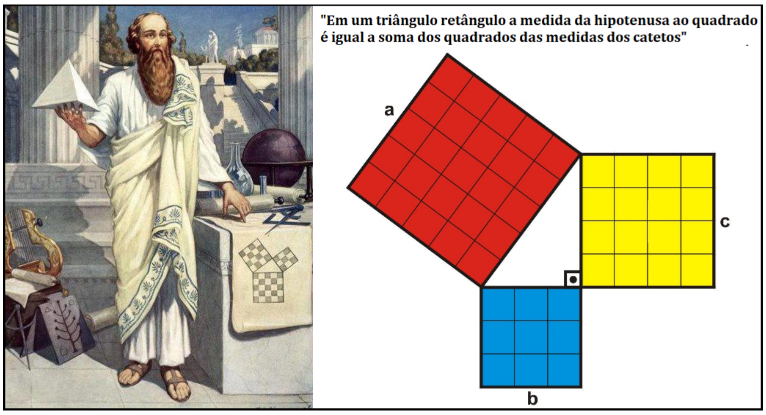


Figura 2.3: Pitágoras e a representação gráfica de seu teorema.

Comentário/Resolução 2. *No triângulo,* $\boldsymbol{a}$ *é a medida da hipotenusa enquanto* $\boldsymbol{b}$ *e* $\boldsymbol{c}$ *são as medidas dos catetos. Substituindo as medidas por suas respectivas letras representativas, segue que* $\boldsymbol{a^2} = \boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{c^2}$.

Exemplo 3. *A paridade dos números inteiros($\mathbb{Z}$) consiste em classificar esses números em dois subconjuntos próprios: números pares($\mathbb{P}$) e ímpares($\mathbb{I}$). Um problema aritmético simples, porém interessante, consiste em analisar a soma de dois números inteiros de mesma paridade. No caso, um número par é aquele inteiro que deixa resto* 0 *na divisão por* 2*, enquanto que um número ímpar é aquele que deixa resto* 1 *na divisão por* 2.

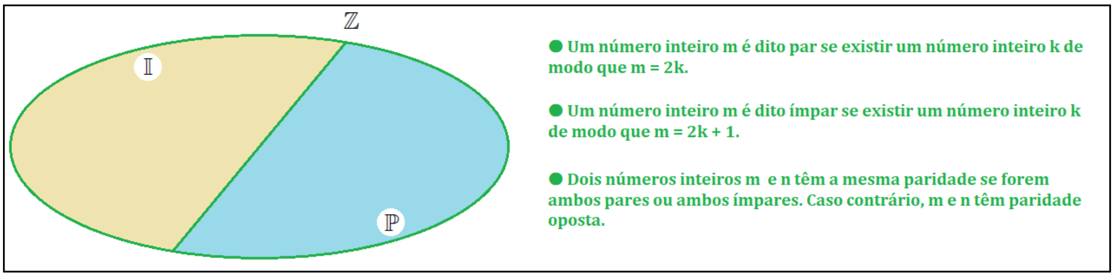


Figura 2.4: Diagrama representando a partição dos inteiros em números pares e ímpares

Comentário/Resolução 3. *Sejam dois números pares, por exemplo,* $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{2k}$ *e* $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{2l}$*, cujo soma é* $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{2k} + \boldsymbol{2l}$*, logo,* $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{2(k} + \boldsymbol{l)}$*. E sejam, ainda, dois números ímpares, representados por* $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{2p} + \boldsymbol{1}$ *e* $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{2q} + \boldsymbol{1}$*, de modo que, para a soma vale,*

$\boldsymbol{M + N = 2p + 1 + 2q + 1 = 2p + 2q + 2}$, portanto, $\boldsymbol{M + N = 2(p + q + 1)}$. Daí, resulta que a soma de dois números de mesma paridade é sempre par.

Fica bastante evidente, nos exemplos apresentados que a linguagem algébrica figura em situações do cotidiano, bem como em problemas geométricos e aritméticos. E sentenças como, $\mathbf{8 + 5n}$, $\mathbf{b^2 + c^2}$, $\mathbf{n + m}$ e $\mathbf{2p + 2q + 2}$ são conhecidas como **expressões algébricas** e os termos que a compõem são chamados de **termos algébricos**.

Abaixo, segue algumas definições para uma expressão algébrica:

Definição 2.2.1. *Expressão algébrica é aquela que envolve numerais e numerais literais(letras), ou então apenas numerais literais(letras) agrupados através de sinais que indicam operações, [12].*

Definição 2.2.2. *Expressão algébrica é uma expressão que envolve números, letras e as operações indicadas entre eles, [5].*

Definição 2.2.3. *Expressão algébrica é uma expressão matemática na qual a variável ou variáveis definem as operações aritméticas(adição, subtração, multiplicação, divisão, potência de expoente inteiro e raiz aritmética) em um número limitado de combinações dessas operações, [1].*

Nas definições apresentadas, embora algumas se completem e representem a mesma ideia, há certas denominações distintas. Em síntese, uma expressão algébrica é aquela que apresenta termos formados por números reais ou literais(letras) envolvidos em operações aritméticas(adição, subtração, multiplicação, divisão, potência de expoente inteiro e raiz aritmética) de modo que essas letras ou literais são ditas variáveis dessa expressão. Por exemplo, $\mathbf{8 + 5n}$ é formada por números e literais tal que $\mathbf{n}$ é a variável da expressão. Mas, $\mathbf{b^2 + c^2}$ é formada apenas por literais e suas variáveis são $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

Toda expressão algébrica é formada por termos, isto é, parcelas da soma das expressões algébricas. Assim, segue algumas definições para termo algébrico:

Definição 2.2.4. *Termo algébrico é o produto de um número(chamado de coeficiente do termo) por potências de expoentes racionais de variáveis, [9].*

Definição 2.2.5. *Termo algébrico é cada uma das partes de uma expressão algébrica separada pelos operacionais $+$(mais) ou $-$(menos), [9].*

A partir das definições apresentadas, fica bem claro que um termo algébrico é uma parcela da soma ou subtração de uma expressão algébrica, de modo que esses termos resultam de um produto entre números reais(coeficientes dos termos) e literais ou variáveis de expoente racional(inteiro ou fracionário). Por exemplo, em ax^3+by^5+1 os termos são ax^3, by^5 e 1(termo algébrico constante); em $\dfrac{3x+4y-z}{y}$ os termos são $\dfrac{3x}{y}$, $\dfrac{4y}{y}=4$(termo algébrico constante) e $\dfrac{-z}{y}$; em $2x^3y^{\frac{2}{3}}$ a expressão é o próprio termo algébrico; em $ax^{-\frac{3}{4}}+by^{-\frac{2}{3}}+ab^{-1}$ os termos são $ax^{-\frac{3}{4}}$, $by^{-\frac{2}{3}}$ e ab^{-1}.

2.2.2 Classificação das expressões algébricas

Uma expressão algébrica pode ser classificada em dois grupos, de acordo com [1] e [12]:

I. **Expressões algébricas racionais** são aquelas que as variáveis apresentam expoentes inteiros, isto é, não se encontra sob um radical. Essas expressões podem ser **racionais inteiras**(variáveis de expoentes positivos - não apresentam variáveis no denominador) ou **racionais fracionárias**(variáveis de expoentes negativos - apresentam variáveis no denominador). Por exemplo, πx^2+y, ax^3+by^5+1 e $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{7}y^4$ são expressões racionais inteiras, enquanto que $2x^3y^{-2}$, $\dfrac{3x+4y-z}{y}$ e $\dfrac{p}{q}-\dfrac{q}{p}+pq$ são expressões racionais fracionárias.

II. **Expressões algébricas irracionais** são aquelas em que pelo menos uma variável apresenta expoente fracionário, isto é, se encontra sob um radical. Essas expressões podem ser **irracionais inteiras**(variáveis de expoente fracionário positivo - não apresentam variáveis sob radical no denominador) ou **irracionais fracionárias**(variáveis de expoentes fracionários negativos - apresentam variáveis sob radical no denominador). Por exemplo, $2x^3y^{\frac{2}{3}}$, $\dfrac{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+1}{2}$ e $\sqrt{\dfrac{p}{3}-\dfrac{q}{2}+1}$ são expressões irracionais inteiras, enquanto que $\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}+y$, $ax^{-\frac{3}{4}}+by^{-\frac{2}{3}}+ab^{-1}$ e $\sqrt[4]{\dfrac{2x}{3y}+\dfrac{3y}{2x}}$ são expressões irracionais fracionárias.

Observação 2.2.2.1. *Em algumas ocasiões torna-se valida a notação $Q_{(x,y,z)}$, adotada por [1], para representar uma expressão algébrica de variáveis x, y e z. Por exemplo, $Q_{(a,b,x,y)}=ax^{-\frac{3}{4}}+by^{-\frac{2}{3}}+ab^{-1}$ e $Q_{(x,y)}=2x^3y^{\frac{2}{3}}$.*

Observação 2.2.2.2. *Existem expressões não algébricas conhecidas como* ***transcendentes****. As principais expressões transcendentes são as* ***expressões exponenciais*** *- aquelas que apresentam no expoente uma variável ou número irracional, como por exemplo,* $x^{\sqrt{5}}$, 2^{3x} *e* 5^{-x}*; as* ***expressões logarítmicas*** *- aquelas definidas por logaritmos, como por exemplo,* $\log(x^2-1)$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right)$ *e* $\log_5 x^3$*; as* ***expressões trigonométricas*** *- aquelas que envolvem operadores trigonométricos, como por exemplo,* $\cos x + \sin y$, $cos^2(3x-1)$, $\tan x + \dfrac{1}{\tan x}$.

2.2.3 Expressões especiais: monômios e polinômios

O importante conceito dentro das expressões e termos algébricos é um caso particular conhecido como monômios e polinômios. Assim, tem-se a seguinte concepção:

I. **Monômio** é um termo algébrico racional inteiro. No caso, ax^3 é um monômio, enquanto que $2b^3y^{-2}$ e $2x^3y^{\frac{2}{3}}$ não são monômios.

II. **Polinômio** é uma soma de monômios. No caso, ax^2+by, x^3+xy+y^2 e $a+3a^2+5a^3+7a^4+11$ são polinômios. Os polinômios recebem denominações baseado na quantidade de monômios que formam os mesmos, assim um **binômio** é formado por dois monômios distintos, um **trinômio** é formados por três monômios distintos e um **polinômio** é a denominação geral para expressões formadas por quatro ou mais monômios distintos. No caso, ax^2+by é um binômio, x^3+xy+y^2 é um trinômio e $a+3a^2+5a^3+7a^4+11$ é um polinômio.

2.3 Cálculo algébrico

O cálculo algébrico aproveita a linguagem algébrica para tratar efetivamente como funcionam as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz aritmética entre termos ou expressões algébricas, bem como monômios e polinômios.

Além de explorar o conceito e o cálculo de grau de uma expressão ou termo algébrico, o valor numérico de algumas expressões ou termos, quando as varáveis assumem certos valores reais.

2.3.1 Cálculos básicos: adição, multiplicação e potenciação

A seguir, tem-se as principais propriedades e características entre ***variáveis ou literais simples***(termo adotado para um termo algébrico de variável única, com coeficiente e expoente unitários) ou números reais, referentes as operações de adição, multiplicação e potenciação.

Adição

A adição de variáveis(ou literais) segue a mesma ideia básica da Aritmética: juntar, reunir ou agrupar quantidades ou valores. Entretanto, para o cálculo algébrico essa ideia está restrita a quantidades de um mesmo grupo de variáveis ou literais. Por exemplo, $x + x$, $2y + y$ ou $3z + 5z + z$, são somas de variáveis de um mesmo grupo, ao contrário das expressões, $x + y$ ou $3y + 4z$ que visa a soma de variáveis de grupos diferentes.

Assim, sejam a, b e c variáveis ou literais simples, tem-se as seguintes propriedades:

i) **Comutatividade**: para a, b é valido que $a + b = b + a$;

ii) **Associatividade**: para a, b e c é valido que $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$;

iii) **Elemento neutro**: para a, existe um termo 0(termo constante nulo), tal que $a + 0 = 0 + a = a$;

iv) **Elemento oposto**: para a, existe um termo $-a$(termo simétrico ou oposto), tal que $a + (-a) = 0$.

Exemplo 4. *Considere os termos $2x$, $4y$, $5z$, $10xy$, $25x^2$ e $\frac{5}{3}x$. Obtenha os seguintes itens abaixo:*

a) $2x + 4y$

b) $10xy + 4y$

c) $5z + 1$

d) $2x + \frac{5}{3}x$

Comentário/Resolução 4. *Tem-se, em (a)* $2x + 4y = 4y + 2x$, *isto é, a soma é indefinida e inalterável, resultado esse da impossibilidade de se somar variáveis distintas(grupos diferentes); em (b)* $10xy + 4y = 4y + 10xy$, *pelo mesmo motivo anterior, uma vez que apesar dos termos possuírem a mesma variável* y, *um dos termos carece da variável* x; *em (c)* $5z + 1 = 1 + 5z$, *pelos mesmos motivos anteriores, mas nesse caso a impossibilidade se dá por um termo de variável* z *e um número real(termo algébrico constante - sem variáveis); em (d)* $2x + \frac{5}{3}x = \frac{6}{3}x + \frac{5}{3}x = \frac{11}{3}x$, *o único caso em que há possibilidade de soma, pois os termos apresentaram a mesma variável.*

Os resultados acima podem parecer estranhos a princípio, talvez pela transição entre a Aritmética e a Álgebra, mas a situação seguinte procura elucidar um pouco mais os exemplos apresentados.

Imaginem a seguinte situação: Um casal resolve fazer um piquenique em uma praça de Belém. Dentre varias coisas, o rapaz leva 3 maçãs e a moça 5 laranjas. Quantas frutas o casal possui? Uma resposta bastante fácil, pois $3 + 5 = 8$, logo o casal possui 8 frutas para o piquenique. Do ponto de vista aritmético, quando se trata de juntar quantidades a resposta está correta. Mas se levar em consideração o tipo de cada fruta, a resposta vai ser 3 maçãs e 5 laranjas, ou ainda, 5 laranjas e 3 maçãs. Nesse, caso a situação é tratada do ponto de vista algébrico, pois há 3 "variáveis maçãs"e 5 "variáveis laranjas", isto é , um cálculo é do tipo $3m + 5l = 5l + 3m$, cujo resultado é invariável!

Agora, considere que a situação fosse o mesmo casal anterior no piquenique, onde o rapaz leva 4 maçãs e a moça, outras, 6 maçãs. Quantas frutas o casal possui? Novamente, tem-se $4 + 6 = 10$, logo o casal possui 10 frutas para o piquenique, do ponto de vista aritmético. Mas esse resultado não destoa tanto do ponto de vista algébrico, pois há 4 "variáveis maçãs"e outras 6 "variáveis maçãs", resultando em 10 "variáveis maçãs", ou seja, segue que $4m + 6m = 10m$.

Outro ponto a considerar é que a soma consiste em englobar a subtração, pois para dois termos do tipo x e y, é valido que $x - y = x + (-y)$(a subtração é a soma de um termo com o oposto de outro). Por exemplo, $x - y = x + (-y)$ é um resultado indefinido e inalterável por se tratar de variáveis distintas, mas $5x - 2x = 5x + (-2x) = 3x$, pois as variáveis não são distintas.

Multiplicação

A multiplicação de variáveis(ou literais) segue a mesma ideia básica da Aritmética: soma de parcelas iguais. Por exemplo, $x + x + x + x = 4.x$(soma de quatro parcelas idênticas do termo x).

A multiplicação entre duas variáveis ou literais simples e a multiplicação entre um número por variável ou literal simples é, também, indefinida e inalterável, porém é representada pela justaposição dos fatores envolvidos, por exemplo $a.b = ab$ ou $3.x = 3x$. Essa representação é uma vantagem na escrita, pois diferentemente da Aritmética que tem, por exemplo, $3.4 = 12$, esse resultado é totalmente incoerente com a justaposição dos fatores, no caso, $3.4 \neq 34$.

Sejam, a, b e c literais ou variáveis simples, tem-se as seguintes propriedades relacionadas a multiplicação:

i) **Comutatividade**: para a, b é valido que $ab = ba$;

ii) **Associatividade**: para a, b e c é valido que $a(bc) = (ab)c = abc$;

iii) **Distributividade em relação a soma e subtração**: para a, b e c é valido que $a(b \pm c) = ab \pm ac$;

iv) **Elemento neutro**: para a, existe um termo 1(termo constante unitário), tal que $a1 = 1a = a$;

v) **Elemento inverso**: para a, existe um termo a^{-1}(termo inverso), com $a \neq 0$, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Exemplo 5. *Considere os termos x, $4y$, $5z$, $2xy$ e $25y$. Obtenha os seguintes itens abaixo:*

a) $x.4y$

b) $2xy.5z$

c) $4y.25y$

Comentário/Resolução 5. *Tem-se, em (a) $x.4y = 4xy$, o resultado é o produto dos coeficientes de cada um dos termos(1 e 4) justaposto as variáveis envolvidas(x e y); em (b) $2xy.5z = 10xyz$, pela mesma justificativa anterior, isto é, o resultado é o produto dos coeficientes de cada um dos termos(2 e 5) justaposto as variáveis envolvidas(x, y e z); em (c)*

$4y.25y = 100y^2$, *o resultado é o produto dos coeficientes de cada um dos termos(*4 *e* 25*) justaposto a uma potência da variável* y*, uma vez que houve um produto entre variáveis idênticas.*

Um ponto a considerar é que a multiplicação engloba a divisão, pois para dois termos x e y, é valido que $\frac{x}{y} = x\left(\frac{1}{y}\right)$(a divisão é o produto de um termo com o inverso de outro, desde que y não assuma valor nulo).

Potenciação

A potência de variáveis(ou literais) simples segue a mesma definição aritmética para números reais, isto é, uma multiplicação de n fatores iguais, com $n \in \mathbb{N}$ $(\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, ...)$. Por exemplo, seja a variável x, então $x^n = \underbrace{xxx \ldots xx}_{\text{n fatores}}$.

Da noção de potência, algumas consequências podem ser consideradas. Daí, adota-se que $0^n = 0$, $x^0 = 1$ e 0^0 não se define, [9].

Sejam, a, b literais ou variáveis simples e m, n expoentes inteiros($m, n \in \mathbb{Z}$, com $n > 1$), tem-se as seguintes propriedades relacionadas a potenciação:

i) **Expoente negativo**: para a e $m(m \in \mathbb{Z}_+^*)$, é valido que $a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}$;

ii) **Expoente fracionário**: para a e m,n é valido que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;

iii) **Potência de potência**: para a,b e m,n é valido que $(a^m)^n = a^{mn}$;

iv) **Produto de potências**: para a,b e m,n, se

- ◇ as bases são iguais $a^m a^n = a^{m+n}$;
- ◇ os expoentes são iguais $a^m b^m = (ab)^m$;

v) **Quociente de potências**: para a,b e m,n, se

- ◇ as bases são iguais $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
- ◇ os expoentes são iguais $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

Exemplo 6. *Considere os termos* x^3*,* $3y^2$*,* $5z^4$*,* $2x^2y^{-2}$ *e* $6yz^7$*. Obtenha os seguintes itens abaixo:*

a) $x^3.3y^2$

b) $x^3.3y^2.2x^2y^{-2}$

c) $5z^4.6yz^7$

d) $\dfrac{6yz^7}{3y^2}$

Comentário/Resolução 6. *Tem-se, em (a) $x^3.3y^2 = 3x^3y^2$, o resultado é o produto dos coeficientes de cada um dos termos(1 e 3) justaposto as potências das variáveis envolvidas(x^3 e y^2); em (b) $x^3.3y^2.2x^2y^{-2} = 6x^2y^0 = 6x^2$, pela mesma justificativa anterior, isto é, o resultado é o produto dos coeficientes de cada um dos termos(1, 3 e 2) justaposto ao produto das potências das variáveis envolvidas(x^2 e y^2, y^{-2}); em (c) $5z^4.6yz^7 = 30yz^{11}$, o resultado é o produto dos coeficientes de cada um dos termos(5 e 6) justaposto ao produto das potências das variáveis(y e z^4,z^7); em (d) $\dfrac{6yz^7}{3y^2} = 2y^{-1}z^7$, o resultado é o quociente dos coeficientes de cada um dos termos(6 e 3) justaposto ao quociente das potências das variáveis(y,y^2 e z^7).*

Exemplo 7. ***Operações com Monômios***. *Considere as seguintes operações envolvendo monômios:*

a) $0,3xy + \dfrac{3}{4}xy + 15ab = 0,3xy + 0,75xy + 15ab = 1,05xy + 15ab$

b) $\dfrac{3}{5}x^3y^2 - \dfrac{4}{7}x^3y^2 = \dfrac{7}{7}.\dfrac{3}{5}x^3y^2 - \dfrac{5}{5}.\dfrac{4}{7}x^3y^2 = \dfrac{21}{35}x^3y^2 - \dfrac{20}{35}x^3y^2 = \dfrac{1}{35}x^3y^2$

c) $\sqrt{5}w^5z^4.2y^2z^5 = 2\sqrt{5}w^5y^2(z^4z^5) = 2\sqrt{5}w^5y^2z^9$

d) $\dfrac{5,4abx^8}{6ax^6} = 0,9b\left(\dfrac{a}{a}\right)\left(\dfrac{x^9}{x^6}\right) = 0,9bx^3$

Comentário/Resolução 7. *Observe que em (a) e (b), os cálculos envolvendo soma e subtração são obtidos se os termos envolvidos são* ***termos semelhantes*** *- apresentam as mesmas variáveis nas mesmas potências, no caso opera-se com os coeficientes mantendo as potências das variáveis dos termos semelhantes. Em (c) e (d), os cálculos de produtos e quocientes ocorre nos coeficientes e nas variáveis dos termos que ficam justapostas no caso de serem distintas ou aplica-se as propriedades de potências casa sejam idênticas. Isso, para quaisquer coeficientes reais(inteiros, racionais e irracionais).*

Exemplo 8. ***Operações com Polinômios***. *Considere as seguintes operações envolvendo polinômios:*

a) $(1,3ax^2+5,2bx+1,5abx-0,05)+(0,35ax^2+0,25ab+1,2) = (1,3ax^2+0,35ax^2)+5,2bx+1,5abx+0,25ab+(1,2-0,05) = 1,65ax^2+0,35ax^2+5,2bx+1,5abx+0,25ab+1,15$

b) $(4my+5m^2-20n)-(my-m^2+10m-4) = (4my+5m^2-20n)+(-my+m^2-10m+4) = (4my-my)+(5m^2+m^2)-20n-10m+4 = 3my+6m^2-20n-10m+4$

c) $(ax+3a-b)(2ax+5a+b) = (ax+3a-b)2ax+(ax+3a-b)5a+(ax+3a-b)b = 2a^2x^2+6a^2x-2abx+5a^2x+15a^2-5ab+abx+3ab-b^2 = 2a^2x^2+(6a^2x+5a^2x)+(-2abx+abx)+15a^2+(-5ab+3ab)-b^2 = 2a^2x^2+11a^2x-abx+15a^2-2ab-b^2$

d) $\dfrac{x^2+a^2+2ax+bx+ab}{6x+6a+6b} = \dfrac{(x+a)(x+a+b)}{6(x+a+b)} = \dfrac{x+a}{6} = \dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{6}a$

Comentário/Resolução 8. *Observe que, em (a) a soma dos polinômios ocorreu a partir da redução dos termos semelhantes de cada um dos polinômios envolvidos e aos não semelhantes restou, repeti-los no resultado, uma vez que essa soma é impossível; em (b), a subtração ocorreu de maneira semelhante ao item anterior, com o diferencial que houve o ajuste de converter a subtração em soma, pois para termos do tipo x e y quaisquer, é valido que $x-y = x+(-y)$; em (c) o produto ocorreu aplicando sucessivamente a propriedade distributiva em relação a soma, isto é, para termos do tipo x, y e z quaisquer $x(y\pm z) = xy \pm xz$, seguido da redução dos termos semelhantes; em (d) a divisão dos polinômios se deu pela fatoração dos mesmos seguido da simplificação dos fatores idênticos, tais técnicas de fatoração e outros conceitos são essenciais para realização da divisão de polinômios, mas isso será detalhado em capítulos posteriores.*

Exemplo 9. *Considere os seguintes polinômios:* $Q_{(x,y,z)} = x^3+x^2z-xy^2-y^2z+x^2-y^2$, $R_{(x,y)} = x^2-y^2$ *e* $S_{(x,y,z)} = 5x+5z+5$. *Determine:*

a) $Q_{(x,y,z)} + R_{(x,y)}$

b) $Q_{(x,y,z)} - S_{(x,y,z)}$

c) $R_{(x,y)}.S_{(x,y,z)}$

d) $\dfrac{Q_{(x,y,z)}}{S_{(x,y,z)}}$

Comentário/Resolução 9. *Tem-se:*

a) $Q_{(x,y,z)}+R_{(x,y)} = (x^3+x^2z-xy^2-y^2z+x^2-y^2)+(x^2-y^2) = x^3+x^2z-xy^2-y^2z+2x^2-2y^2$

b) $Q_{(x,y,z)} - S_{(x,y,z)} = (x^3 + x^2z - xy^2 - y^2z + x^2 - y^2) - (5x + 5z + 5) = x^3 + x^2z - xy^2 - y^2z + x^2 - y^2 - 5x - 5z - 5$

c) $R_{(x,y)}.S_{(x,y,z)} = (x^2 - y^2)(5x+5z+5) = x^2(5x+5z+5) - y^2(5x+5z+5) = 5x^3+5x^2z-5xy^2 - 5y^2z + 5x^2 - 5y^2$

d) $\dfrac{Q_{(x,y,z)}}{S_{(x,y,z)}} = \dfrac{x^3 + x^2z - xy^2 - y^2z + x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{(x^2 - y^2)(x + z + 1)}{5(x + z + 1)} = \dfrac{1}{5}x^2 - \dfrac{1}{5}y^2$

Um importante conceito relacionado aos monômios e polinômios é o grau dessas expressões. O grau de um polinômio é uma característica exclusiva dos polinômios relacionado aos expoentes de suas variáveis.

O grau, dependendo da expressão algébrica considerada, pode ser;

I. **Grau Relativo**: Para um monômio o grau relativo é aquele referente a uma única variável. Para um polinômio é o maior expoente da referida variável. Por exemplo, no monômio $3x^4wz^7$ o grau relativo da variável x é 4, da variável w é 1 e da variável z é 7. Mas no polinômio $ax^3b+a^5b^2+3bx+11a-1$ o grau relativo da variável a é 5(no termo a^5b^2), o grau relativo da variável b é 2(no termo a^5b^2) e o grau relativo da variável x é 3(no termo ax^3b).

I. **Grau Absoluto**: Para um monômio é a soma dos graus relativos de todas as variáveis do termo. Para um polinômio é o maior grau absoluto dos termos do polinômio. Por exemplo, no monômio $3x^4wz^7$ o grau absoluto vale $4 + 1 + 7 = 10$. Mas no polinômio $ax^3b + a^5b^2 + 3bx + 11a - 1$ o grau absoluto do termo ax^3b é 5, do termo a^5b^2 é 7, do termo $3bx$ é 2, do termo $11a$ é 1 e do termo 1 é 0. Logo o grau absoluto do polinômio $ax^3b + a^5b^2 + 3bx + 11a - 1$ é 7, pois $7 > 5 > 2 > 1 > 0$.

2.3.2 Cálculo do valor numérico de expressões algébricas

Denomina-se valor numérico de uma expressão algébrica o valor que ela assume quando as variáveis(ou literais) são substituídas por determinados valores numéricos(valares reais).

Exemplo 10. *Considere a expressão* $\sqrt{a^2+2ab+1}$, *qual o seu valor numérico quando* $a=4$ *e* $b=1$*?*

Comentário/Resolução 10. *Para os seguintes valores atribuídos as variáveis* a *e* b *a expressão* $\sqrt{a^2+2ab+1}$ *assumira o seguinte valor*

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+2ab+1} &= \sqrt{4^2+2.4.1+1},\\ &= \sqrt{16+8+1},\\ &= \sqrt{25},\\ &= 5.\end{aligned}$$

Exemplo 11. *Seja* $Q_{(x,y,z)} = 5x^3+x^2z-zy^2-1$. *Que valor assume essa expressão se* $x=y=\sqrt{3}$ *e* $z=\dfrac{1}{3}$*?*

Comentário/Resolução 11. *Para os seguintes valores atribuídos as variáveis* x, y *e* z *a expressão* $5x^3+x^2z-zy^2-1$ *assumira o seguinte valor*

$$\begin{aligned}5x^3+x^2z-zy^2-1 &= 5.(\sqrt{3})^3+(\sqrt{3})^2.\frac{1}{3}-\frac{1}{3}.(\sqrt{3})^2-1,\\ &= 5.3\sqrt{3}+3.\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right).3-1,\\ &= 15\sqrt{3}+1-1-1 = 15\sqrt{3}-1.\end{aligned}$$

Exemplo 12. *Seja* $x^3-y^2+xy-y^{-2}+y^{-3}$. *Que valor assume essa expressão se* $x=y=\dfrac{1}{2}$*?*

Comentário/Resolução 12. *Para os seguintes valores atribuídos as variáveis* $x=y=\dfrac{1}{2}$ *a expressão* $x^3-y^2+xy-y^-2+y^-2$ *assumirá o seguinte valor*

$$\begin{aligned}x^3-y^2+xy-y^{-2}+y^{-3} &= \left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3},\\ &= \frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2^2+2^3,\\ &= \frac{1}{8}-4+8,\\ &= 4\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

2.4 Aplicações nos Exames Militares

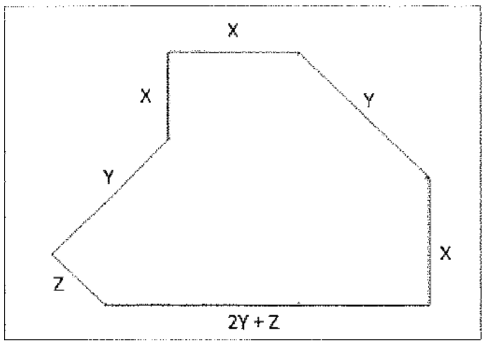
1. (CFN-2006) Quanto deve ser subtraído de $10a^2b$, para que o resultado seja $13a^2b$.

a) $-23a^2b$. b) $-3a^2b$. c) $-3a^4b^2$. d) $23a^2b$. e) $23a^4b^2$.

Solução 1. *Uma simples subtração de dois monômios, onde o problema pede o termo que resulte em* $13a^2b$. *Assim, basta fazer* $10a^2b - 13a^2b = -3a^2b$. *Isso justifica-se, pois* $10a^2b - (-3a^2b) = 10a^2b + 3a^2b = 13a^2b$.

*Alternativa, (**b**).*

2. (EAM-2014) Analise a figura a seguir.



Suponha que o terreno comprado por um proprietário tenha a forma da figura acima e suas medidas sejam representadas, em unidades de comprimento pelas variáveis X, Y e Z. A expressão algébrica que representa o perímetro desse terreno é:

a) $2X + 3Y + Z$.

b) $3X + 4Y + 2Z$.

c) $3X + 3Y + Z$.

d) $3X + 2Y + 3Z$.

e) $4X + 3Y + 2Z$.

Solução 2. *O perímetro da figura é dado por* $2Y + Z + Z + Y + X + X + Y + X$, *reduzindo os termos semelhantes, segue que* $2Y + Z + Z + Y + X + X + Y + X = 3X + 4Y + 2Z$.

*Alternativa, (**b**).*

3. (CFN-2008) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são $3x$, y, $(x+y)$ unidades de comprimento. Qual o polinômio que representa o volume desse paralelepípedo retângulo?

a) $x^2y + 3xy$.

b) $3x^2y + xy$.

c) $3xy^2 + 3xy$.

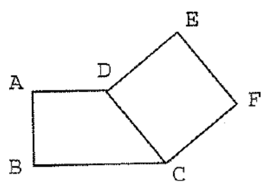
d) $3x^2y + 3xy^2$.

e) $3x^2y^2 + 3xy$.

Solução 3. *O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto entre suas três dimensões, isto é,* $3x.y.(x+y) = 3xy.x + 3xy.y = 3x^2y + 3xy^2$.

Alternativa, ***(d)****.*

4. (EAM-2006) Observe a figura.



Nela, $ABCD$ é um trapézio e $CDEF$, um quadrado. Sabendo que $\overline{AB} = \overline{AD} = x$ e $\overline{BC} = x + 3$, qual a expressão que representa a área da figura?

a) $\dfrac{4x^2 + 3x + 6}{2}$.

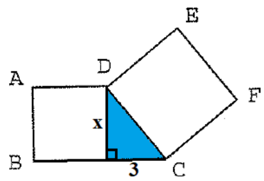
b) $\dfrac{4x^2 + 15x + 18}{2}$.

c) $\dfrac{4x^2 + 3x + 18}{2}$.

d) $\dfrac{20x^2 + 3x}{2}$.

e) $\dfrac{8x^2 + 3x}{2}$.

Solução 4. *Para calcular a altura do trapézio retângulo, traça-se ela no ponto D, de modo que se tenha um triângulo retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras se obtém a área do quadrado dada por* $A_1 = \overline{DC}^2$.



Assim,

$$DC^2 = x^2 + 3^2 = x^2 + 9 = A_1.$$

A área do trapézio é $A_2 = \dfrac{(\overline{AD} + \overline{BC}).\overline{AB}}{2}$.

$$A_2 = \frac{(x + x + 3).x}{2} = \frac{(2x+3).x}{2} = \frac{2x^2+3x}{2}.$$

Portanto, a área da figura é $A = A_1 + A_2$*, isto é,*

$$A = A_1 + A_2 = x^2 + 9 + \frac{2x^2+3x}{2} = \frac{2x^2+18+2x^2+3x}{2} = \frac{4x^2+3x+18}{2}.$$

*Alternativa, (**c**).*

5. (EsSA-1981) Sendo $P_1 = x^3 + 2x^2 - x + 1$; $P_2 = 6 - 5x + 3x^3$, $P_3 = 2x^3 + 2x^2 + 2x$. O resultado de $P_1 - P_2 + P_3$:

a) $2x^2 + 5x + 5$.

b) $6x^3 + 4x^2 - 3x + 7$.

c) $4x^2 + 7x - 5$.

d) $-x^3 - 9x + 7$.

Solução 5. *Para calcular o valor de* $P_1 - P_2 + P_3$*, basta substituir expressão por cada polinômio e reduzir os termos semelhantes da expressão algébrica resultante. Assim,*

Assim,

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 + P_3 &= x^3 + 2x^2 - x + 1 - (6 - 5x + 3x^3) + 2x^3 + 2x^2 + 2x, \\ &= x^3 + 2x^2 - x + 1 - 6 + 5x - 3x^3 + 2x^3 + 2x^2 + 2x, \\ &= 0x^3 + 4x^2 + 7x - 5, \\ &= 4x^2 + 7x - 5. \end{aligned}$$

*Alternativa, (**c**).*

6. (EsSA-1983) A diferença entre $2x^2 - 5x + 3$ e $2x^2 - 6x + 2$ é:

a) $-11x + 5$. b) $x + 1$. c) $x + 5$. d) $11x - 5$.

Solução 6. *Assim,* $2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 - 6x + 2) = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 + 6x - 2$*, reduzindo os termos semelhantes, tem-se que a diferença vale* $x + 1$*.*

*Alternativa, (**b**).*

7. (EsSA-1986) Efetuando a expressão $(x^n + x - 1)(x^{n-1} - 1)$, obtemos:

a) $x^{2n-1} - x^{n-1} - x + 1$.

b) $x^{2n-1} + 2x^n + x - 1$.

c) $x^{2n-2} + x^{n-1} - 2x + 1$.

d) $x^{2n-1} - 2x^{n-1} - 2x - 1$.

e) $x^{2n+1} - x^{n-1} + x + 1$.

Solução 7. *Para calcular o produto basta aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação a soma algébrica. Assim,*

Assim,

$$\begin{aligned}
(x^n + x - 1)(x^{n-1} - 1) &= (x^n + x - 1)x^{n-1} - 1.(x^n + x - 1),\\
&= x^n.x^{n-1} + x.x^{n-1} - 1.x^{n-1} - x^n - x + 1,\\
&= x^{2n-1} + x^n - x^{n-1} - x^n - x + 1,\\
&= x^{2n-1} - x^{n-1} - x + 1.
\end{aligned}$$

*Alternativa, (**a**).*

8. (CFN-2016) Simplifique o radical $\dfrac{1}{xy}\sqrt{12x^3y^5}$.

a) $6x\sqrt{2xy}$. b) $3y\sqrt{3xy}$. c) $2x\sqrt{6xy}$. d) $2y\sqrt{3xy}$. e) $x\sqrt{3xy}$.

Solução 8. *Para simplificar o radical, basta aplicar as propriedades de potenciação algébrica e lembrar que* $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$*.*

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{xy}\sqrt{12x^3y^5} &= \frac{1}{xy}\sqrt{(4x^2y^4).(3xy)},\\
&= \frac{1}{xy}\sqrt{4x^2y^4}.\sqrt{3xy},\\
&= \frac{1}{xy}.2(x^2y^4)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{3xy},\\
&= \frac{1}{\cancel{xy}}.2\cancel{x}y^{\cancel{2}}.\sqrt{3xy} = 2y\sqrt{3xy}.
\end{aligned}$$

*Alternativa, (**d**).*

9. (EAM-2009) O valor de $\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)ab}{a-b}}$ para $a = 12$ e $b = 6$ é

a) 5. b) 6. c) 7. d) 8. e) 9.

Solução 9. *Sendo $a = 12$ e $b = 6$, basta substituir esses valores na expressão dada.*

Assim,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{(a+b)ab}{a-b}} &= \sqrt[3]{\frac{(12+6).12.6}{12-6}},\\
&= \sqrt[3]{\frac{18.12.\cancel{6}}{\cancel{6}}},\\
&= \sqrt[3]{216} = 6.
\end{aligned}$$

*Alternativa, (**b**).*

10. (EsSA-1988) O valor numérico do polinômio $x^3y + x^2y^2 - xy^3$, para $x = -1$ e $y = -2$, é:

a) 4. b) 2. c) 0. d) -2. e) -4.

Solução 10. *Sendo $x = -1$ e $y = -2$, basta substituir esses valores na expressão dada.*

Assim,

$$\begin{aligned}
x^3y + x^2y^2 - xy^3 &= (-1)^3.(-2) + (-1)^2.(-2)^2 - (-1).(-2)^3,\\
&= (-1).(-2) + 1.4 - (-1).(-8),\\
&= 2 + 4 - 8 = -2.
\end{aligned}$$

*Alternativa, (**d**).*

Capítulo 3

Produtos Notáveis e Fatoração

O presente capitulo tratará dos principais produtos notáveis e os casos mais comuns de fatoração das expressões algébricas.

3.1 Produtos Notáveis

Importante conhecimento, dentro das expressões algébricas, os produtos notáveis representam a "padronização"do cálculo de produtos entre binômios ou trinômios.

"Os matemáticos estão sempre atentos a regularidades que aparecem em situações numéricas, geométricas e nas expressões algébricas. Muitas descobertas matemáticas se deram pela percepção de padrões, regularidades e conexões entre números, álgebra e geometria", [2],2015, p. 108.

Dentre os produtos notáveis, os que mais destacam-se são o produto da soma pela diferença de dois termos, o quadrado da soma e diferença de dois termos, o cubo da soma e diferença de dois termos, o produto de Stevin, bem como, o binômio de Newton.

3.1.1 Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos

O **produto da soma pela diferença de dois termos** ou produto de um binômio soma pelo seu binômio diferença, [12]. Consiste num produto do tipo $(a+b)(a-b)$.

Proposição 1. *O produto da soma de dois termos pela diferença desses mesmos termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.*

Demonstração *Considerem o produto* $(a+b)(a-b)$ *, segue:*

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= (a+b)a-(a+b)b,\\ &= a^2+ab-ab-b^2,\\ &= a^2-b^2.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Embora considere-se o produto da soma pela diferença de dois termos, o raciocínio é valido para expressões com mais de dois termos, como por exemplo, três termos, $(a+b+c)(a+b-c) = [(a+b)+c][(a+b)-c] = (a+b)^2-c^2$ ou quatro termos, $(a+b+c+d)(a+b-c-d) = [(a+b)+(c+d)][(a+b)-(c+d)] = (a+b)^2-(c+d)^2$.

O produto da soma pela diferença de dois termos apresenta uma representação geométrica interessante, sugerida por [2].

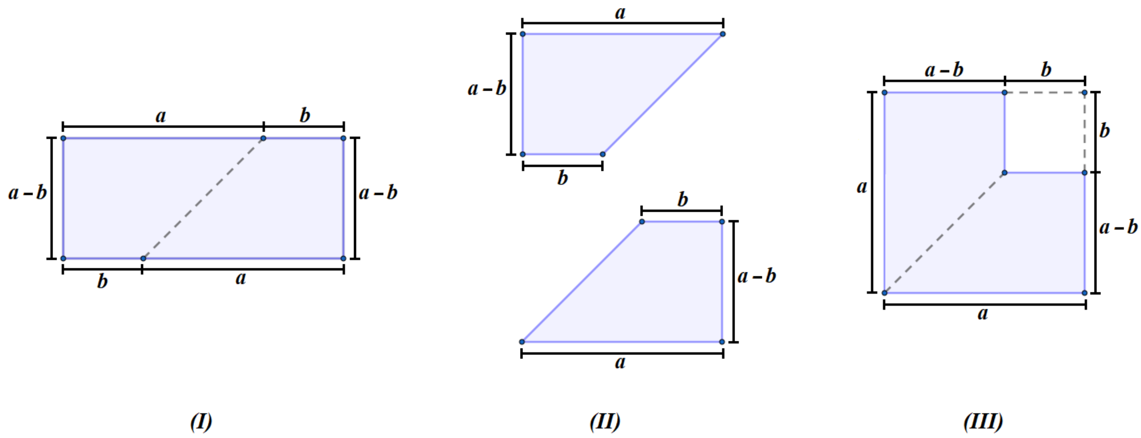


Figura 3.1: Representação geométrica do produto da soma pela diferença de dois termos, baseada em [2].

Na Figura 2.1, *(I)* representa um retângulo de lados medindo $a+b$ e $a-b$, com um corte conveniente e de área $A=(a+b)(a-b)$; *(II)* o retângulo foi desmembrado em dois trapézios retângulos congruentes; *(III)* os trapézios foram unidos pelo corte, de modo a formarem um hexágono não convexo, cuja área é a diferença entre os quadrados de lados medindo a e b, isto é, a área é $A=a^2-b^2$.

3.1.2 Quadrado da Soma e Diferença de Dois Termos

O **quadrado da soma de dois termos** ou quadrado de um binômio soma, [12]. Consiste numa expressão do tipo $(a+b)^2$.

Proposição 2. *O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais o quadrado do segundo termo, mais o dobro do produto entre esses termos.*

Demonstração

Considerem o produto $(a+b)(a+b) = (a+b)^2$ *, segue:*

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b),\\ &= (a+b)a + (a+b)b,\\ &= a^2 + ba + ab + b^2,\\ &= a^2 + b^2 + 2ab.\end{aligned}$$

■

Embora considere-se o quadrado da soma de dois termos, o raciocínio é valido para mais de dois termos, como por exemplo, três termos, $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2+c^2+2(a+b)c = a^2+b^2+2ab+c^2+2ac+2bc = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

Assim, como o produto notável anterior, o quadrado da soma de dois termos apresenta uma representação geométrica interessante, sugerida, novamente por [2].

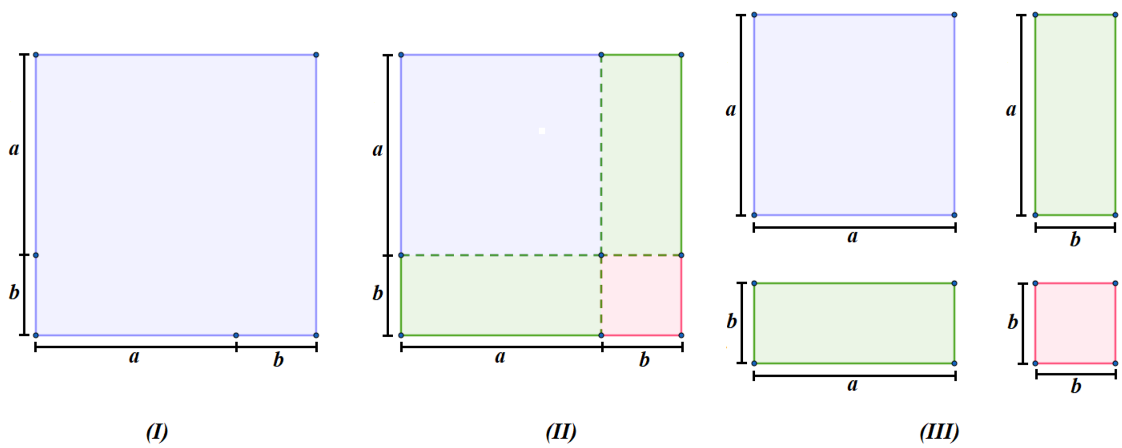


Figura 3.2: Representação geométrica do quadrado da soma de dois termos, baseada em [2].

Na Figura 2.2, *(I)* representa um quadrado cujo lado possui medida $a+b$, no caso o lado do quadrado é a soma dos segmentos adjacentes de medidas a e b, cujo área vale $A = (a+b)^2$;

(II) o quadrado foi dividido em quatro áreas a partir dos pontos de junção dos segmentos adjacentes; *(III)* o quadrado maior se mostra uma união de dois quadrados de lados medindo, um a e outro b, de áreas $A_1 = a^2$ e $A_2 = b^2$ e dois retângulos de lados a e b, de áreas $A_3 = A_4 = ab$, isto é, a área é $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = a^2 + b^2 + 2ab$.

O **quadrado da diferença de dois termos** ou quadrado de um binômio diferença, [12]. Consiste numa expressão do tipo $(a-b)^2$.

Proposição 3. *O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais o quadrado do segundo termo, menos o dobro do produto entre esses termos.*

Demonstração

Considerem o produto $(a-b)(a-b) = (a-b)^2$ *, segue:*

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b),\\ &= (a-b)a - (a-b)b,\\ &= a^2 - ba - ab + b^2,\\ &= a^2 + b^2 - 2ab.\end{aligned}$$

■

Embora considere-se o quadrado da diferença de dois termos, o raciocínio é valido para expressões contendo diferença com mais de dois termos, como por exemplo, $(a+b-c-d)^2 = [(a+b)-(c+d)]^2 = (a+b)^2-(c+d)^2-2(a+b)(c+d) = a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2ac-2ad-2bc-2cd.$

O quadrado da diferença de dois termos não apresenta uma representação geométrica adequada.

Exemplo 13. *Demonstre as identidades de Legendre:*

i) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$*;*

ii) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ *.*

Comentário/Resolução 13. *Para demonstrar uma identidade, uma das opções, consiste em desenvolver um lado da igualdade até obter o outro.*

Para demonstrar (i), desenvolve-se os quadrados da soma e diferença no primeiro lado da identidade, $(a+b)^2+(a-b)^2 = a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab = 2a^2+2b^2$. *Da propriedade distributiva do produto em relação a soma, segue que* $2(a^2+b^2) = 2a^2+2b^2$. *Assim, percebe-se que* $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$.

Para demonstrar (ii), desenvolve-se, novamente, os quadrados da soma e diferença no primeiro lado da identidade, $(a+b)^2-(a-b)^2 = a^2+b^2+2ab-(a^2+b^2-2ab) = a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab = 4ab$. *Portanto,* $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$.

Exemplo 14. *Dados a,b números reais positivos, demonstre a desigualdade* $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. *A conhecida desigualdade entre as Médias Aritméticas e Geométricas, para dois termos.*

Comentário/Resolução 14. *Para todo número real* x, *tem-se que* $x^2 \geq 0$. *Tomando* $x = a-b$, *então,*

$$(a-b)^2 \geq 0,$$

e desenvolvendo o quadrado da diferença de dois termos tem-se

$$a^2+b^2-2ab \geq 0.$$

Somando $4ab$ *em cada lado da desigualdade, segue que*

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab,$$

como $a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$ *e, ainda, dividindo cada lado da desigualdade por* 4, *resulta*

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab.$$

Extraindo a raiz quadrada de cada lado da desigualdade, uma vez que $ab > 0$, *resulta em*

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

para, finalmente, verificar a desigualdade entre as Médias Aritméticas e Geométricas, para dois termos

3.1.3 Cubo da Soma e Diferença de Dois Termos

O **cubo da soma de dois termos** ou cubo de um binômio soma, [12]. Consiste numa expressão do tipo $(a+b)^3$.

Proposição 4. *O cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, mais o cubo do segundo termo, mais o triplo do produto entre os termos e a soma desses termos.*

Demonstração

Considerem o produto $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$ *, segue:*

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a^2+b^2+2ab),\\
&= (a+b)a^2+(a+b)b^2+(a+b)2ab,\\
&= a^3+ba^2+ab^2+b^3+2a^2b+2ab^2,\\
&= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2,
\end{aligned}$$

mas da propriedade distributiva do produto em relação a soma, tem-se que $3ab(a+b) = 3a^2b+3ab^2$. *Daí,*

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b).$$

$\blacksquare$

Seguindo o mesmo raciocínio dos outros produtos anteriores com mais termos, como por exemplo, três termos segue $(a+b+c)^3 = [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3+c^3+3(a+b)c[(a+b)+c] = a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3(ac+bc)(a+b+c) = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+c^3+3(a^2c+abc+ac^2+abc+b^2c+bc^2) = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$.

Exemplo 15. *Considere o cubo da soma de três termos:*

i) Prove que $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$*;*

ii) Se $a+b+c=0$*, determine* $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{4abc}$.

Comentário/Resolução 15. *Para provar (i), sabe-se*

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc,$$

então basta verificar que $3(a+b)(b+c)(a+c) = 3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$. *De fato, pois*

$$\begin{aligned}
3(a+b)(b+c)(a+c) &= 3(ab+ac+b^2+bc)(a+c),\\
&= 3(a^2b+abc+a^2c+ac^2+ab^2+b^2c+abc+bc^2),\\
&= 3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc.
\end{aligned}$$

Para determinar (ii), segue do item anterior, que $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$. *Mas como,*$a+b+c=0$, *então* $a+b=-c$, $b+c=-a$ *e* $a+c=-b$, *segue que* $0^3 = a^3+b^3+c^3+3(-c)(-a)(-b)$, *de modo que,* $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

Portanto,

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc} = \frac{3abc}{4abc} = \frac{3}{4}.$$

O **cubo da diferença de dois termos** ou cubo de um binômio diferença, [12]. Consiste numa expressão do tipo $(a-b)^3$.

Proposição 5. *O cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo,menos o cubo do segundo termo, menos o triplo do produto entre os termos e a diferença desses termos.*

Demonstração

Considerem o produto $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$ *, segue:*

$$\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)(a^2+b^2-2ab),\\
&= (a-b)a^2+(a-b)b^2-(a-b)2ab,\\
&= a^3-ba^2+ab^2-b^3-2a^2b+2ab^2,\\
&= a^3-b^3-3a^2b+3ab^2,
\end{aligned}$$

mas da propriedade distributiva do produto em relação a diferença, tem-se que $-3ab(a-b) = -3a^2b+3ab^2$. *Daí,*

$$(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b).$$

■

3.1.4 Produto de Stevin

Simon Stevin, físico, engenheiro e matemático holandês (1548 - 1620). A ele é atribuído o produto do tipo $(x+a)(x+b)$ ou do tipo $(x+a)(x+b)(x+c)$.

Proposição 6. *O produto de Stevin, para dois binômios do primeiro grau, resulta num trinômio do tipo* $x^2+(a+b)x+ab$.

Demonstração

Considerem o produto $(x+a)(x+b)$ *, segue:*

$$
\begin{aligned}
(x+a)(x+b) &= (x+a)x + (x+a)b,\\
&= x^2 + ax + bx + ab,
\end{aligned}
$$

mas como, $x(a+b) = ax + bx = (a+b)x$*, pela distributividade do produto em relação a soma e pela comutatividade do produto. Segue:*

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

$\blacksquare$

Pode-se observar que do produto de Stevin, para dois binômios, resulta em alguns dos casos notáveis anteriores, produto da soma pela diferença de dois termos ou quadrado da soma ou diferença de dois termos. Basta tomar, por exemplo, $x = A$, $a = B$ e $b = -B$, para se obter o produto da soma pela diferença de dois termos e $x = \pm B$ e $a = b = A$, para o quadrado da soma ou diferença de dois termos.

Proposição 7. *O produto de Stevin, para três binômios, resulta num polinômio do tipo* $x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$*.*

Demonstração

Considerem o produto $(x+a)(x+b)(x+c)$ *, segue:*

$$
\begin{aligned}
(x+a)(x+b)(x+c) &= [x^2 + (a+b)x + ab](x+c),\\
&= [x^2 + (a+b)x + ab]x + [x^2 + (a+b)x + ab]c,\\
&= x^3 + (a+b)x^2 + abx + x^2c + (a+b)cx + abc,
\end{aligned}
$$

mas como, $x^2[(a+b)+c] = (a+b)x^2 + cx^2 = (a+b+c)x^2$*, pela distributividade do produto em relação a soma, pela associatividade da soma e pela comutatividade do produto. Segue:*

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + abx + acx + bcx + abc,$$

e ainda que, $x(ab+ac+bc) = abx + acx + bcx = (ab+ac+bc)x$*, pela distributividade do produto em relação a soma e pela comutatividade do produto.*

Portanto,

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc.$$

$\blacksquare$

Novamente observa-se que do produto de Stevin, para três binômios do primeiro grau, resulta em dois casos notáveis anteriores, o cubo da soma ou diferença de dois termos. Basta tomar, por exemplo, $x = A$, $a = b = c = B$, para se obter o cubo da soma de dois termos e $x = A$ e $a = b = c = -B$, para o cubo da diferença de dois termos.

O produto de Stevin, na verdade, é algo mais geral e resulta em qualquer produto de n binômios do primeiro grau, da forma $(x+a_i)$, isto é, $(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) = \prod_{i=1}^{n}(x+a_i)$. Resultando num polinômio, em x, de grau "n", contendo "$n+1$"termos. Mas esse tópico terá relevância em outro capítulo.

3.1.5 Binômio de Newton

O binômio de Newton é toda potência "n"de um binômio $(x+a)$. Ou seja, toda expressão do tipo $(x+a)^n, \forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

O binômio de Newton pode ser entendido como um caso particular do produto de Stevin geral, quando toma-se $a_i = a$, assim $\prod_{i=1}^{n}(x+a) = (x+a)^n$.

O desenvolvimento de $(x+a)^n$, quando $n = 0, 1, 2, 3$, são casos particulares bem conhecidos

i) $(x+a)^0 = 1$, pois toda potência de expoente nulo vale 1;

ii) $(x+a)^1$, pois toda potência de expoente unitário resulta na própria base;

iii) $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$, resultado de um quadrado da soma de dois termos;

iv) $(x+a)^3 = x^3 + 3xa^2 + 3x^2a + a^3$, resultado de um cubo da soma de dois termos.

O desenvolvimento de $(x+a)^n$, para $n=4$ e $n=5$. É dado por:

$$\begin{aligned}
(x+a)^4 &= [(x^2+a^2)+2ax]^2,\\
&= (x^2+a^2)^2+(2ax)^2+2.2ax(x^2+a^2),\\
&= x^4+a^4+2a^2x^2+4a^2x^2+4ax^3+4a^3x,\\
&= x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4,
\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
(x+a)^5 &= (x+a)^2(x+a)^3,\\
&= (x^2+a^2+2ax)(x^3+3xa^2+3x^2a+a^3),\\
&= x^2(x^3+3xa^2+3x^2a+a^3)+a^2(x^3+3xa^2+3x^2a+a^3)+2ax(x^3+3xa^2+3x^2a+a^3),\\
&= x^5+3x^3a^2+3x^4a+x^2a^3+a^2x^3+3xa^4+3x^2a^3+a^5+2ax^4+6x^2a^3+6x^3a^2+2a^4x,\\
&= x^5+5xa^4+10x^2a^3+10x^3a^2+5x^4a+a^5.
\end{aligned}$$

Pode-se notar um certo padrão nos resultados das potências dos binômios, nos exemplos anteriores ficou perceptível que:

i) todo termo da expansão binomial é um produto de fatores x ou a;

ii) todo termo é um produto do tipo x^pa^q , tal que $p+q=n$;

iii) toda expansão binomial possui $n+1$ termos.

Assim, para desenvolver a expansão binomial recorre-se a Análise Combinatória que, por mais surpreendente que seja, auxilia no cálculo pretendido. Onde, tem-se que $P_n^{p,(n-p)} = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$ representa o número de sequências de n elementos com p e $(n-p)$ repetições. Por exemplo, considere que em uma urna há 3 bolas vermelhas e 2 bolas amarelas. Elas são extraídas uma a uma sem reposição, qual o número de sequências possíveis? A resposta é obtida por $P_5^{3,2} = \binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{120}{6.2} = 10$.

Aplicando esse conceito ao Binômio de Newton, tem-se um exemplo bem conhecido, o cubo da soma de dois termos, no caso $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a) = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$. Todo termo da expansão contém fatores x ou a. Quantos termos são do tipo $x.x.x = x^3$? Isso equivale calcular uma sequência de três termos, com três elementos repetidos x(zero elementos a), isto é,$1 = P_3^{3,0} = \binom{3}{0} = \dfrac{3!}{0!3!} = \dfrac{6}{1.6}$. Quantos termos são do tipo $x.x.a = x^2a$?

Isso equivale calcular todas as sequências de três termos, com dois elementos repetidos x e um a, isto é, $P_3^{3,1} = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{6}{1.2} = 3$. Quantos termos são do tipo $x.a.a = xa^2$? Isso equivale calcular todas as sequências de três termos, com dois elementos repetidos a e um x, isto é, $P_3^{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{6}{1.2} = 3$. Quantos termos são do tipo $a.a.a = a^3$? Isso equivale calcular uma sequência de três termos, com três elementos repetidos a(zero elementos x), isto é,$1 = P_3^{3,3} = \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = \frac{6}{1.6}$, [4].

Como cada termo é da forma $x^q a^p$, com $p+q=n$, então, todo termo é da forma $K.x^{n-p}a^p$, onde K é o coeficiente do termo que resulta da redução dos termos semelhantes oriundos da distributividade do produto em relação a soma do binômio, uma vez que $(x+a)^n$ equivale a um produto de n fatores de $(x+a)$. Logo, K será um coeficiente que indica a quantidade de sequências com um determinado número de elementos x ou a.

De maneira geral, considerando que todo termo $x^{n-p}a^p$ pode ser escrito como uma sequência de fatores $xx\ldots xaa\ldots a$, contendo $(n-p)$ termos x e p termos a. Daí, cada termo pode ser calculado como o número de sequências que satisfazem a condição dada. Por exemplo, x^n possui n termos x e nenhum termo a, logo existe uma única sequência desse tipo dada por $P_n^{n,0} = \binom{n}{0}$, xa^{n-1} possui um termo x e $(n-1)$ termos a, logo o número de sequências desse tipo é dada por $P_n^{1,n-1} = \binom{n}{1}$,$x^2a^{n-2}$ possui dois termo x e $(n-2)$ termos a, logo o número de sequências desse tipo é dada por $P_n^{2,n-2} = \binom{n}{2}$, e assim por diante, até o termo a^n que não possui termo x e possui n termos a, logo existe uma única sequência desse tipo dada por $P_n^{n,n} = \binom{n}{n}$, [4].

Portanto, a expansão geral da potência n do binômio $(x+a)$ é dada por:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \ldots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{n-p} x^{n-p}a^p.$$

Antes da proposição seguinte, segue um importante resultado.

Lema 1. *Para todo m, n naturais, vale a Relação de Stifel* $\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n}$.

Demonstração

Segue que

$$\begin{aligned}
\binom{m}{n-1}+\binom{m}{n} &= \frac{m!}{(m-n+1)!(n-1)!}+\frac{m!}{(m-n)!(n)!},\\
&= \frac{m!}{(m-n+1)!(n-1)!}.\frac{n}{n}+\frac{m!}{(m-n)!(n)!}.\frac{m-n+1}{m-n+1},\\
&= \frac{m!n}{(m-n+1)!n!}+\frac{m!(m+1-n)}{(m-n+1)!n!},\\
&= \frac{m!n}{(m-n+1)!n!}+\frac{m!(m+1)-m!n}{(m-n+1)!n!},\\
&= \frac{(m+1)!}{(m-n+1)!n!}.
\end{aligned}$$

Como, $\binom{m+1}{n}=\dfrac{(m+1)!}{(m-n+1)!n!}$, *segue que*

$$\binom{m+1}{n}=\binom{m}{n-1}+\binom{m}{n}.$$

■

.

Proposição 8. *Para todo n natural resulta que* $(x+a)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{n-p}x^{n-p}a^p$.

Demonstração

Embora seja conhecida a expansão do Binômio de Newton se faz necessário verificar a validade da proposição para todo n natural. A demonstração se dará pelo ***Princípio da Indução Finita****, para um melhor aprofundamento, consulte [8], p.24-34.*

Para n = 1, tem-se

$$(x+a)^1=\binom{1}{0}x+\binom{1}{1}a=x+a;$$

logo, a afirmação é verdadeira para n = 1.

Supondo, então, que a fórmula seja válida para $n=k\geq 1$. *Tem-se que*

$$\begin{aligned}
(x+a)^{k+1} &= (x+a)(x+a)^k,\\
&= x(x+a)^k+a(x+a)^k,\\
&= x\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{k-p}x^{k-p}a^p+a\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{k-p}x^{k-p}a^p;
\end{aligned}$$

mas expandido, separadamente, cada somatório e aplicando a propriedade distributiva do produto em relação a soma para cada termo da expansão, resulta em

$$x\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{k-p}x^{k-p}a^{p} = x\left[\binom{k}{0}x^{k}+\binom{k}{1}x^{k-1}a+\ldots+\binom{k}{k-1}xa^{k-1}+\binom{k}{k}a^{k}\right],$$
$$= \binom{k}{0}x^{k+1}+\binom{k}{1}x^{k}a+\ldots+\binom{k}{k-1}x^{2}a^{k-1}+\binom{k}{k}xa^{k},$$

e ainda,

$$a\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{k-p}x^{k-p}a^{p} = a\left[\binom{k}{0}x^{k}+\binom{k}{1}x^{k-1}a+\ldots+\binom{k}{k-1}xa^{k-1}+\binom{k}{k}a^{k}\right],$$
$$= \binom{k}{0}x^{k}a+\binom{k}{1}x^{k-1}a^{2}+\ldots+\binom{k}{k-1}xa^{k}+\binom{k}{k}a^{k+1}.$$

Somando os termos resultante de cada expansão e agrupando os termos semelhantes , resulta

$$\binom{k}{0}x^{k+1}+\left[\binom{k}{1}x^{k}a+\binom{k}{0}x^{k}a\right]+\ldots+\left[\binom{k}{k}xa^{k}+\binom{k}{k-1}xa^{k}\right]+\binom{k}{k}a^{k+1},$$

mas como, cada agrupamento é resultado da propriedade distributiva do produto em relação a soma, isto é, em geral $\left[\binom{k-p}{p}+\binom{k-p}{p-1}\right]x^{k-p}a^{p} = \binom{k-p}{p}x^{k-p}a^{p}+\binom{k-p}{p-1}x^{k-p}a^{p}$, *logo,*

$$\binom{k}{0}x^{k+1}+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{0}\right]x^{k}a+\ldots+\left[\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}\right]xa^{k}+\binom{k}{k}a^{k+1},$$

aplicando, reiteradamente a relação de Stifel, segue que

$$\binom{k}{0}x^{k+1}+\binom{k+1}{1}x^{k}a+\ldots+\binom{k+1}{k}xa^{k}+\binom{k}{k}a^{k+1},$$

e lembrando que $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}$ *e* $\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$, *então*

$$(x+a)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1}+\binom{k+1}{1}x^{k}a+\ldots+\binom{k+1}{k}xa^{k}+\binom{k+1}{k+1}a^{k+1}.$$

Aplicando o somatório, resulta justamente na expressão para $n = k+1$, *isto é,*

$$(x+a)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{k+1-p}x^{k+1-p}a^{p},$$

como se pretendia verificar, [8].

$\blacksquare$

Apesar da expansão binomial ser um resultado bastante importante, ainda assim não é um processo prático. Para auxiliar, um complemento bastante interessante é o **Triângulo Aritmético de Pascal**. Trata-se de uma tabela disposta em forma triangular que dispõe dos coeficientes binomiais.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Figura 3.3: Triângulo de Pascal com os coeficientes binomiais, [4]

O que torna mais prático o cálculo da expansão binomial é justamente a forma do Triângulo de Pascal que apresenta o resultado dos coeficientes binomiais, uma vez que a partir de propriedades bem simples consegue-se uma construção relativamente fácil desse triângulo.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Figura 3.4: Triângulo de Pascal com coeficientes resolvidos, [4]

Para construção do Triângulo de Pascal segue as seguintes propriedades:

i) Em cada linha do triângulo, o primeiro e o último elemento valem 1. Isso se justifica pelo fato do primeiro elemento ser $\binom{n}{0} = 1$ e o último $\binom{n}{n} = 1$, $\forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$;

ii) A partir da terceira linha(exceto primeiro e último elemento de cada linha) é a soma dos dois elementos da linha anterior, imediatamente acima dele. Isso se justifica pela Relação de Stifel, $\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n}$;

iii) Numa linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais. Isso se justifica por $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Exemplo 16. *Calcule a seguinte potência* $(x+5)^7$.

Comentário/Resolução 16. *O que torna prático expandir essa potência é obter a linha dos coeficientes binomiais sem a necessidade de ter que calcular cada binomial individualmente. Para isso, recorre-se ao Triângulo de Pascal:*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
\boldsymbol{1} & & \boldsymbol{7} & & \boldsymbol{21} & & \boldsymbol{35} & & \boldsymbol{35} & & \boldsymbol{21} & & \boldsymbol{7} & & \boldsymbol{1} \\
 & & & & & & & \cdots & & & & & & &
\end{array}$$

Assim, o desenvolvimento de $(x+5)^7$ *resulta em*

$$\binom{7}{0}x^7 + \binom{7}{1}x^6.5 + \binom{7}{2}x^5.5^2 + \binom{7}{3}x^4.5^3 + \binom{7}{4}x^3.5^4 + \binom{7}{5}x^2.5^5 + \binom{7}{6}x.5^6 + \binom{7}{7}5^7,$$

E como os coeficientes binomiais do desenvolvimento apresentam, respectivamente, os valores da oitava linha do Triângulo de Pascal, resulta

$$\begin{aligned}
(x+5)^7 &= 1.x^7 + 7.x^6.5 + 21.x^5.5^2 + 35.x^4.5^3 + 35.x^3.5^4 + 21.x^2.5^5 + 7.x.5^6 + 1.5^7, \\
&= x^7 + 7.x^6.5 + 21.x^5.25 + 35.x^4.125 + 35.x^3.625 + 21.x^2.3125 + 7.x.15625 + 78125, \\
&= x^7 + 35x^6 + 525x^5 + 4375x^4 + 21875x^3 + 65625x^2 + 109375x + 78125.
\end{aligned}$$

Embora, seja um resultado, de certo modo, trabalhoso é, ainda, o método mais prático e recomendado em situações semelhantes a essa potência.

Exemplo 17. *Calcule o termo independente no desenvolvimento da potência de* $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^9$.

Comentário/Resolução 17. *Para calcular o termo independente, basta perceber que todo termo tem a seguinte forma geral,* $\dbinom{n}{p} x^{n-p} a^p$ *decorrente da expansão em somatório* $(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \dbinom{n}{n-p} x^{n-p} a^p$.

Assim,

$$\binom{n}{p}(x^2)^{n-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p \Rightarrow \binom{n}{p} x^{2n-2p}\left(\frac{1}{x}\right)^p.$$

Para ter um termo independente deve haver o cancelamento do termo x que ocorrerá se os expoentes forem iguais, isto é, $2n - 2p = p$, acarretando em, $2n = 3p$. Daí, $n = 9$ e, $3p = 2.9$, de modo que $p = 6$. Logo,

$$\binom{9}{6}(x^2)^3\left(\frac{1}{x}\right)^6 = \frac{9!}{5!4!}\cancel{x^6}.\frac{1}{\cancel{x^6}} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9.8.7.6}{4.3.2.1} = 126.$$

Portanto, o termo independente da expansão vale 126.

Exemplo 18. *Se* $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Então o valor de* $x^{2000} + \dfrac{1}{x^{2000}}$ *é igual a?*

Comentário/Resolução 18. *O raciocínio se baseia no fato de que* $2000 = 5^3.2^4$. *Primeiramente, procede-se calculando a potência* $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^5$ *para se obter o valor de* $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$. *Tomando,* $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = a$, *segue*

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^5 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 = a^5.$$

Pela sexta linha do Triângulo de Pascal, segue que

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x}\right)^5 &= 1x^5 + 5x^4\left(\frac{1}{x}\right) + 10x^2\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 10x^3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 5x\left(\frac{1}{x}\right) + 1\left(\frac{1}{x}\right)^5,\\ &= x^5 + 5x^3 + 10x + 10\frac{1}{x} + 5\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5},\\ &= x^5 + \frac{1}{x^5} + 5\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Como $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 + 3x\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, *segue que,* $a^3 = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3a$ *e, consequentemente,* $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = a^3 - 3a$. *Daí,*

$$
\begin{aligned}
x^5+\frac{1}{x^5} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^5 - 5\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) - 10\left(x+\frac{1}{x}\right),\\
&= a^5 - 5\left(a^3-3a\right) - 10a,\\
&= a^5 - 5a^3 + 5a,\\
&= a\left(a^4-5a^2+5\right),\\
&= a\left(a^2\left(a^2-5\right)+5\right).
\end{aligned}
$$

Assim, $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ *ficou em função de* $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *e como* $a^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{1+5+2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, *segue que*

$$
\begin{aligned}
x^5+\frac{1}{x^5} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-5\right)+5\right],\\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-7}{2}\right)+5\right],\\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{3\sqrt{5}-21+5-7\sqrt{5}}{4}\right)+5\right],\\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{-16-4\sqrt{5}}{4}\right)+5\right],\\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}(1-5) = -2.
\end{aligned}
$$

Toma-se, agora $x^5+\dfrac{1}{x^5}=b=-2$. *E, de modo análogo ao que se obteve* $x^5+\dfrac{1}{x^5}=a\left(a^2\left(a^2-5\right)+5\right)$ *a partir de* $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$. *Tem-se,* $(x^5)^5+\left(\dfrac{1}{x^5}\right)^5=x^{25}+\dfrac{1}{x^{25}}=b\left(b^2\left(b^2-5\right)+5\right)$. *Assim,*

$$
\begin{aligned}
x^{25}+\frac{1}{x^{25}} &= (-2)\left[(-2)^2\left((-2)^2-5\right)+5\right],\\
&= (-2)[4(4-5)+5],\\
&= (-2)[4(-1)+5],\\
&= (-2)(-4+5) = (-2).1 = -2.
\end{aligned}
$$

Assim, tem-se ainda, pelo procedimento anterior, que $x^{125}+\dfrac{1}{x^{125}}=-2$. *Elevando ao quadrado a expressão anterior,*

$$
\left(x^{125}+\frac{1}{x^{125}}\right)^2 = \left(x^{125}\right)^2+\left(\frac{1}{x^{125}}^2\right)+2x^{125}\frac{1}{x^{125}} \Rightarrow
$$

$$\Rightarrow (-2)^2 = x^{250} + \frac{1}{x^{250}} + 2 \Rightarrow x^{250} + \frac{1}{x^{250}} = 4 - 2 = 2.$$

Novamente, elevando ao quadrado a última expressão,

$$\left(x^{250} + \frac{1}{x^{250}}\right)^2 = \left(x^{250}\right)^2 + \left(\frac{1}{x^{250}}^2\right) + 2x^{250}\frac{1}{x^{250}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^2 = x^{500} + \frac{1}{x^{500}} + 2 \Rightarrow x^{500} + \frac{1}{x^{500}} = 4 - 2 = 2.$$

Assim, por repetição dos processos anteriores, segue que $x^{2000} + \dfrac{1}{x^{2000}} = 2.$

3.2 Fatoração Algébrica

A fatoração de termos algébricos consiste numa importante ferramenta da Álgebra para que uma expressão algébrica seja expressa como um produto de binômios e trinômios, ou ainda, polinômios mais simples que a expressão algébrica original. Daí, pode-se entender algumas das definições a seguir:

Definição 3.2.1. *Fatoração é a operação que permite transformar uma expressão num produto indicado equivalente a esta expressão, [12].*

Definição 3.2.2. *Fatorar um polinômio é transforma-lo num produto de polinômios de grau menores que o grau do polinômio original, [9].*

Definição 3.2.3. *Fatorar um polinômio escrito como expressão algébrica consiste em transforma-lo em um produto de polinômios, [5].*

No que concerne a fatoração, as principais técnicas, métodos ou casos de fatoração são: evidenciação e agrupamento, diferença de dois quadrados, soma e diferença de dois cubos, o trinômio do segundo grau.

3.2.1 Evidenciação e Agrupamento

Evidenciação, [9] ou **Fator Comum em Evidência**, como o próprio nome sugere consiste em evidenciar o fator comum de cada termo da expressão algébrica considerada.

Para fatorar por evidenciação, recorre-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação a soma (ou diferença). E uma vez identificado o fator comum, o outro fator resulta da expressão algébrica no qual cada termo da mesma encontra-se divido pelo fator comum identificado. Assim o fator comum é evidenciado na expressão algébrica.

Exemplo 19. *Considere a expressão $ax^2 + 2bx + x$. Encontre sua fatoração.*

Comentário/Resolução 19. *Nessa expressão, o fator comum é o termo x, logo ele será o fator evidenciado. Daí,*

$$x(\frac{ax^2}{x} + \frac{2bx}{x} + \frac{x}{x}) = x(ax + 2b + 1).$$

Exemplo 20. *Demonstre a seguinte identidade de Cauchy:*

$$(a + b)^3 - (a^3 + b^3) = 3ab(a + b).$$

Comentário/Resolução 20. *Para demonstrar essa identidade, desenvolve-se o cubo da soma no primeiro lado da identidade. Daí,*

$$(a + b)^3 - (a^3 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3 = 3a^2b + 3ab^2,$$

nota-se que o termo $3ab$ é fator comum no binômio resultante, logo

$$(a + b)^3 - (a^3 + b^3) = 3ab\left(\frac{3a^2b}{3ab} + \frac{3ab^2}{3ab}\right) = 3ab(a + b).$$

Agrupamento ou **Grupamento**, [9] consiste na aplicação reiterada da Evidenciação. Aplica-se a Evidenciação a grupos de termos da expressão algébrica e cada fator comum do grupo expõe um novo fator comum, que novamente evidenciado, completa a fatoração.

Exemplo 21. *Considere a expressão $ax^3 + 2bx^2 + abx + 2b^2$.*

Comentário/Resolução 21. *Nessa expressão, o fator comum aos dois primeiros termos é x^2 e dos dois termos restantes é b, logo tem-se $x^2(ax + 2b) + b(ax + 2b)$. Nota-se que na expressão resultante expõem-se um novo fator comum, a expressão $(ax + 2b)$, daí, acarreta em $(ax + 2b)(x^2 + b)$.*

Exemplo 22. *Demonstre a identidade de Bramagupta-Lagrange:*

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2.$$

Comentário/Resolução 22. *Para demonstrar uma identidade, uma das opções, consiste em desenvolver um lado da igualdade até obter o outro. Então, desenvolvendo o segundo lado da igualdade, segue*

$$(ad-bc)^2+(ac+bd)^2=(ad)^2+(bc)^2-2abcd+(ac)^2+(bd)^2+2abcd,$$

pelo quadrado da soma e diferença de dois termo;

$$(ad-bc)^2+(ac+bd)^2=a^2d^2+b^2c^2+a^2c^2+b^2d^2,$$

cancelando os termos simétricos e desenvolvendo as potências;

$$(ad-bc)^2+(ac+bd)^2=a^2(d^2+c^2)+b^2(c^2+d^2)=(a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

finalmente, por fatoração, por Agrupamento demonstra-se a identidade.

3.2.2 Diferença de Dois Quadrados

Diferença de Dois Quadrados nada mais é do que a reciproca do produto da soma pela diferença de dois termos. Assim, num binômio diferença, cujo termos são quadrados perfeitos, este resulta num produto de dois binômios, um do tipo soma e outro diferença, das raízes quadradas dos termos do binômio inicial. Em síntese, se $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Proposição 9. *Todo binômio a^2-b^2, resulta num produto do tipo $(a+b)(a-b)$.*

A demonstração é análoga a proposição 1.

Exemplo 23. *Considerem a expressão $4x^4-1$, qual sua fatoração?*

Comentário/Resolução 23. *como ambos os termos são quadrados perfeitos, segue que $\sqrt{4x^4}=2x^2$ e $\sqrt{1}=1$. Portanto, $4x^4-1=(2x^2+1)(2x^2-1)$.*

Exemplo 24. *(OCM-1985) Encontre o quociente da divisão de $a^{128}-b^{128}$ por*

$$(a^{64}+b^{64})(a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b).$$

Comentário/Resolução 24. *Tomando o quociente por Q e lembrando que $a^{128}-b^{128}=(a^{64}+b^{64})(a^{64}-b^{64})$, $a^{64}-b^{64}=(a^{32}+b^{32})(a^{32}-b^{32})$ e $a^{32}-b^{32}=(a^{16}+b^{16})(a^{16}-b^{16})$ são* *diferenças de dois quadrados, segue que*

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{a^{128}-b^{128}}{(a^{64}+b^{64})(a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{\cancel{(a^{64}+b^{64})}(a^{64}-b^{64})}{\cancel{(a^{64}+b^{64})}(a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{(a^{64}-b^{64})}{(a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{\cancel{(a^{32}+b^{32})}(a^{32}-b^{32})}{\cancel{(a^{32}+b^{32})}(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{(a^{32}-b^{32})}{(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{\cancel{(a^{16}+b^{16})}(a^{16}-b^{16})}{\cancel{(a^{16}+b^{16})}(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{(a^{16}-b^{16})}{(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)}.
\end{aligned}$$

Mas, $a^{16}-b^{16}=(a^8+b^8)(a^8-b^8)$, $a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^4-b^4)$, $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ *e* $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, *ainda são diferenças de dois quadrados. Logo, efetua-se, ainda, a simplificação*

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{(a^{16}-b^{16})}{(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{\cancel{(a^8+b^8)}(a^8-b^8)}{\cancel{(a^8+b^8)}(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{(a^8-b^8)}{(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{\cancel{(a^4+b^4)}(a^4-b^4)}{\cancel{(a^4+b^4)}(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{(a^4-b^4)}{(a^2+b^2)(a+b)},\\
&= \frac{\cancel{(a^2+b^2)}(a^2-b^2)}{\cancel{(a^2+b^2)}(a+b)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$Q=\frac{(a^2-b^2)}{a+b}=\frac{\cancel{(a+b)}(a-b)}{\cancel{a+b}}=(a-b).$$

3.2.3 Soma e Diferença de Dois Cubos

A soma e diferença de dois cubos é uma expressão que admite fatoração.

A **soma de dois cubos**, consiste num binômio soma no qual cada termo está elevado ao cubo. Sua fatoração é um produto entre um binômio por um trinômio.

Proposição 10. *Todo binômio do tipo* a^3+b^3*, resulta num produto do tipo* $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Demonstração

Na expressão $a^3 + b^3$ *, soma-se e subtrai-se* $3ab(a + b)$*, daí*

$$a^3 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) - 3ab(a + b),$$

sabe-se que $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$*, então*

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b),$$

evidenciando $(a+b)$ *no segundo lado da igualdade e, ainda que,* $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$*, segue*

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab], \\ &= (a + b)(a^2 + b^2 + 2ab - 3ab), \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

■

A **diferença de dois cubos**, consiste num binômio diferença no qual cada termo está elevado ao cubo. Sua fatoração é, também, um produto entre um binômio por um trinômio.

Proposição 11. *Todo binômio do tipo* a^3-b^3*, resulta num produto do tipo* $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Demonstração

Na expressão $a^3 - b^3$ *, soma-se e subtrai-se* $-3ab(a - b)$*, daí*

$$a^3 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) + 3ab(a - b),$$

sabe-se que $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$*, então*

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b),$$

evidenciando $(a-b)$ *no segundo lado da igualdade e, ainda que,* $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$, *segue*

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)[(a-b)^2 + 3ab], \\ &= (a-b)(a^2+b^2-2ab+3ab), \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

■

Exemplo 25. *Fatore o binômio* $a^6 - b^6$.

Comentário/Resolução 25. *Como* $a^6 = (a^3)^2$ *e* $b^6 = (b^3)^2$, *ambos os termos são quadrados perfeitos, segue que* $a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3+b^3)(a^3-b^3)$, *pois trata-se de uma diferença de dois quadrados.*

O produto da soma pela diferença resultou, numa produto da soma de dois cubos pela diferença dos cubos desses mesmos termos, logo,

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^3+b^3)(a^3-b^3), \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2), \\ &= (a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

3.2.4 Trinômios Quadrados

Considera-se um **trinômio quadrado** ou **trinômio do** 2^{o} **grau** toda expressão da forma ax^2+bx+c. E caso, seja possível fatorar essa expressão, então dois casos podem ocorrer: um trinômio quadrado perfeito(TQP) ou um produto de Stevin para dois binômios.

Um **Trinômio Quadrado Perfeito** é sempre uma expressão que pode ser fatorada, pois deriva de um quadrado da soma ou diferença de dois termos.

Proposição 12. *Todo trinômio da forma* ax^2+bx+c *é um trinômio quadrado perfeito se* $b^2 = 4ac$, *[1] .*

Demonstração

Para que a expressão ax^2+bx+c *, seja um trinômio quadrado perfeito deve-se ter* $a = A^2$*,* $b = \pm 2AB$ *e* $c = B^2$*, daí*

$$b = \pm 2AB,$$

elevando ao quadrado os dois lados da igualdade, segue

$$b^2 = 4(AB)^2 = 4A^2B^2,$$

substituindo os valores de A^2 *e* B^2 *nessa ultima expressão, resulta*

$$b^2 = 4ac.$$

■

Corolário 1. *Se o trinômio* ax^2+bx+c *é um trinômio quadrado perfeito, então sua fatoração é do tipo* $(\sqrt{a}x \pm \sqrt{c})^2$.

Demonstração

Como o trinômio ax^2+bx+c *é um quadrado perfeito, logo é valido*

$$b^2 = 4ac \Rightarrow b = \pm\sqrt{4ac}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= ax^2 \pm \sqrt{4ac}x + c, \\ &= ax^2 \pm 2\sqrt{ac}x + c, \\ &= (\sqrt{a}x \pm \sqrt{c})^2. \end{aligned}$$

■

Exemplo 26. *(OCM) Prove que não existem inteiros positivos* a *e* b *tais que* $\dfrac{b^2+b}{a^2+a} = 4$.

Comentário/Resolução 26. *Tem-se que* $\dfrac{b^2+b}{a^2+a} = 4 \Rightarrow b^2+b = 4a^2+4a$*. Somando 1 em cada lado da igualdade, resulta que* $b^2+b+1 = 4a^2+4a+1$*. Mas como,* $4a^2+4a+1$ *é um trinômio quadrado perfeito. Então,* $b^2+b+1 = (2a+1)^2$.

Por outro lado, $b^2 < b^2+b+1 < b^2+2b+1 = (b+1)^2$*, pois* $(2b)^2 = 4.b^2.1 = 4b^2$*. Daí, resulta que* $b^2 < (2a+1)^2 < (b+1)^2$*. E, como* b *e* $b+1$ *são inteiros positivos e consecutivos* *não há nenhum inteiro quadrado perfeito situado entre o quadrado desses termos. Logo, não existe inteiros na* $\dfrac{b^2+b}{a^2+a}=4$, *[7].*

Exemplo 27. *Demonstre que cada termo da sequência* $A = 111\cdots 11$, *tendo* $2m$ *algarismos e* $B = 444\cdots 44$, *tendo* m *algarismos na soma* $A+B+1$ *é um quadrado perfeito.*

Comentário/Resolução 27. *Lembrando que a soma dos termos de uma progressão geométrica finita* $(a, aq, aq^2, aq^3, \cdots, aq^{n-1})$ *é dada por* $\dfrac{a.(q^n-1)}{q-1}$. *Tem-se que* $A = 111\cdots 11 = 1 + 1.10 + 1.10^2 + \cdots + 1.10^{2m-1}$ *é uma soma de P.G. de* $2m$ *termos,* $a = 1$ *e* $q = 10$. *Logo,* $A = \dfrac{1.(10^{2m}-1)}{10-1} = \dfrac{10^{2m}-1}{9}$. *Mas,* $B = 444\cdots 44 = 4 + 4.10 + 4.10^2 + \cdots + 4.10^{m-1}$ *é uma soma de P.G. de* m *termos,* $a = 4$ *e* $q = 10$. *Logo,* $A = \dfrac{4.(10^m-1)}{10-1} = \dfrac{4.10^m-4}{9}$.

Tem-se que

$$\begin{aligned} A+B+1 &= \frac{10^{2m}-1}{9} + \frac{4.10^m-4}{9} + 1, \\ &= \frac{10^{2m}-1+4.10^m-4+9}{9}, \\ &= \frac{10^{2m}+4.10^m+4}{9}. \end{aligned}$$

Como, $(4.10^m)^2 = 4.10^{2m}.4 = 16.10^{2m}$, *segue que* $A+B+1$ *é um quadrado perfeito, isto é,* $A+B+1 = \left(\dfrac{10^m+2}{3}\right)^2$, *para todo* m, *logicamente, natural.*

Exemplo 28. *Sendo* $n > 1$ *um inteiro tal que* $N = \underbrace{111\ldots11}_{\text{n}}\underbrace{44\ldots44}_{\text{2n}}$. *Prove que* $\sqrt{N}$ *não é racional.*

Comentário/Resolução 28. *Lembrando da paridade dos números inteiros, isto é, um número é par ou ímpar. Pode-se verificar que o quadrado de um número inteiro dividido por* 4 *só pode deixar resto* 0 *ou* 1. *De fato, sejam os inteiros* $2k$ *e* $2k+1$ *com* $(2k)^2 = 4k^2$*(o quadrado de um número par deixa resto 0 na divisão po* 4*) e* $(2k+1)^2 = (2k)^2 + 1^2 + 2.1.2k = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2+k) + 1$*(o quadrado de um número ímpar deixa resto 1 na divisão por* 4*).*

Para provar que $\sqrt{N}$ *não é racional, basta verificar se* N *é um quadrado perfeito ou não. Tem-se que* $N = \underbrace{111\ldots11}_{\text{n}}\underbrace{44\ldots44}_{\text{2n}} = 4 + 4.10 + 4.10^2 + \cdots + 4.10^{2n-1} + 1.10^{2n} + 1.10^{2n+1} + \cdots + 1.10^{3n-1} = 4 + 4.10 + 4.10^2 + \cdots + 4.10^{2n-1} + 10^{2n}(1 + 1.10 + \cdots + 1.10^{n-1})$.

Como $4+4.10+4.10^2+\cdots+4.10^{2n-1}$ pode ser considerado a soma de uma P.G. de $2n$ termos, $a=4$ e $q=10$. E, ainda, $1+10+1.10^2+\cdots+1.10^{n-1}$ pode ser considerado a soma de uma outra P.G. de n termos, $a=1$ e $q=10$, segue que

$$\begin{aligned}
N &= \frac{4.(10^{2n}-1)}{10-1}+10^{2n}.\frac{1.(10^n-1)}{10-1},\\
&= 4.\left(\frac{10^{2n}-1}{9}\right)+10^{2n}.\left(\frac{10^n-1}{9}\right),\\
&= 4.\left(\frac{(10^n+1)(10^n-1)}{9}\right)+10^{2n}.\left(\frac{10^n-1}{9}\right),\\
&= \left(\frac{10^n-1}{9}\right)(4.(10^n+1)+10^{2n}),\\
&= (10^n-1)\left(\frac{10^{2n}+4.10^n+4}{9}\right).
\end{aligned}$$

Sendo $10^{2n}+4.10^n+4$ um quadrado perfeito, pois $(4.10^n)^2=4.10^{2n}.4=16.10^{2n}$, tal que $N=(10^n-1)\left(\dfrac{10^n+2}{3}\right)^2$. Agora, basta verificar que (10^n-1) nunca é um quadrado perfeito para $n>1$. De fato, pois (10^n-1) deixa resto 3 na divisão por 4 e não existe quadrado perfeito sessa situação, como foi inicialmente demonstrado. Para verificar que 10^n-1 deixa resto 3 na divisão por 4, basta escrevê-lo na forma $4k+3$, para algum k inteiro. Isso é verdade, pois para $n>1$, tem-se $10^n-1=2^n.5^n-1=2^2.2^{n-2}.5^n-4+3=4.2^{n-2}.5^n-4+3=4.(2^{n-2}.5^n-1)+3$.

Exemplo 29. *Seja $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, sendo a e b inteiros consecutivos e $c=ab$. Mostre que D é sempre um inteiro ímpar.*

Comentário/Resolução 29. *Como a e b são inteiros consecutivos, pode-se escrever, por exemplo, $b=a+1$. E ainda, que $c=ab=a(a+1)$. Logo,*

$$\begin{aligned}
D &= \sqrt{a^2+(a+1)^2+[a(a+1)]^2},\\
&= \sqrt{a^2+(a^2+1^2+2.1.a)+a^2(a+1)^2},\\
&= \sqrt{a^2+a^2+2a+1+a^2(a+1)^2},\\
&= \sqrt{2a^2+2a+1+a^2(a+1)^2},\\
&= \sqrt{a^2(a+1)^2+2a(a+1)+1}.
\end{aligned}$$

E como, $a^2(a+1)^2+2a(a+1)+1$ é um trinômio quadrado perfeito, pois $[2a(a+1)]^2=4.a^2(a+1)^2.1=4a^2(a+1)^2$, segue que $D=\sqrt{[a(a+1)+1]^2}=a(a+1)+1$.

Lembrando da paridade dos números inteiros, o produto de dois números inteiros consecutivos é sempre par, pois um é par e o outro é necessariamente ímpar e vice-versa, logo $a(a+1) = 2K$*, para algum* K*. Daí,* $D = a(a+1)+1 = 2K+1$ *é um número inteiro ímpar.*

Caso o trinômio não seja um quadrado perfeito, então sua fatoração será um produto de Stevin do tipo $(x+a)(x+b)$*.*

Proposição 13. *Todo trinômio não quadrado perfeito da forma* x^2+bx+c *é uma expressão cujo fatoração é do tipo* $(x+m)(x+n)$ *com* $b = m+n$ *e* $c = mn$*.*

Demonstração

Para que a expressão x^2+bx+c *, resulte de um produto de Stevin, deve-se ter* $b = m+n$ *e* $c = mn$*, daí*

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= x^2+(m+n)x+mn, \\ &= x^2+xm+xn+mn, \\ &= x(x+m)+n(x+m), \\ &= (x+m)(x+n), \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Corolário 2. *Todo trinômio não quadrado perfeito da forma* ax^2+bx+c *é uma expressão cujo fatoração é do tipo* $a(x+a_1)(x+a_2)$*.*

Demonstração

No trinômio ax^2+bx+c *, divide-se o mesmo por* a*, logo*

$$\frac{ax^2+bx+c}{a} = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}.$$

Tomando agora, $\frac{b}{a} = a_1+a_2$ *e* $\frac{c}{a} = a_1a_2$*, pela proposição anterior, resulta*

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = (x+a_1)(x+a_2),$$

multiplicando cada lado da igualdade por a*, tem-se que*

$$ax^2+bx+c = a(x+a_1)(x+a_2).$$

$\blacksquare$

Exemplo 30. *Fatore, se possível, o trinômio* $x^2 + 4x - 21$.

Comentário/Resolução 30. *Como* $(4x)^2 = 16x^2 \neq 4.x^2.(-21) = -84x^2$, *a expressão não é T.Q.P., logo deverá ter uma fatoração oriunda de um produto de Stevin.*

Considerando que o $x^2 + 4x - 21$ *admite uma fatoração do tipo* $(x + m)(x + n)$. *Então,* $-21 = 3.(-7) = (-3).7 = 21.(-1) = (-21).1$. *Assim, os únicos fatores que resultam em soma são tais que* $4 = (-3) + 7$. *Logo,* $m = -3$ *e* $n = 7$, *ou vice-versa.*

Portanto, vale a fatoração, $x^2 + 4x - 21 = (x + 7)(x - 3)$.

Exemplo 31. *Fatore, se possível, o trinômio* $2x^2 + 16x + 30$.

Comentário/Resolução 31. *Considerando que o* $2x^2 + 16x + 30$ *admite uma fatoração do tipo* $a(x + a_1)(x + a_2)$. *Então,* $2x^2 + 16x + 30 = 2(x^2 + 8x + 15)$.

Da expressão, $x^2 + 8x + 15$. *A soma deve ser* 8 *e o produto* 15. *Assim,* $15 = 15.1 = 3.5$. *Desses fatores os únicos que resultam em soma* 8 *são* 3 *e* 5. *Daí,* $a_1 = 3$ *e* $a_2 = 5$ *ou vice-versa.*

Portanto, a fatoração do trinômio é $2(x + 3)(x + 5)$.

Exemplo 32. *Fatore, se possível, o trinômio* $a^2x^2 + 7a^2bx + 12a^2b^2$.

Comentário/Resolução 32. *Considerando que o* $a^2x^2+7a^2bx+12a^2b^2$ *admite uma fatoração do tipo* $a(x + a_1)(x + a_2)$. *Então,* $a^2x^2 + 7a^2bx + 12a^2b^2 = a^2(x^2 + 7bx + 12b^2)$.

Da expressão, $x^2 + 7bx + 12b^2$. *A soma deve ser* $7b$ *e o produto* $12b^2$. *Assim,* $12b^2 = 12.b^2 = 3.4b^2 = 2.6b^2$ *são algumas das fatorações com o fator* b^2. *Entretanto, nenhum desses fatores pode resultar em* $7b$. *No caso, deve-se ter fatores do tipo* $12b^2 = 2b.6b = 12b.b = 3b.4b$. *Desses fatores os únicos que resultam em soma* $7b$, *são* $3b$ *e* $4b$. *Daí,* $a_1 = 3b$ *e* $a_2 = 4b$ *ou vice-versa.*

Portanto, a fatoração do trinômio é $a^2x^2 + 7a^2bx + 12a^2b^2 = a^2(x + 3b)(x + 4b)$.

3.3 Aplicações nos Exames Militares

11. (EsPCEx-2004) Dados os números $a = \sqrt{3} - 1$, $b = \sqrt{3} + 1$ e $c = 0,1333...$, pode-se afirmar que:

a) ab é um número irracional.

b) $(a - b)c$ é um número irracional.

c) $(a + b)c$ é um número racional.

d) bc é um número racional.

e) abc é um número racional.

Solução 11. *Inicialmente o número $c = 0,1333...$ equivale a uma fração, tal que $c = 0,1 + 0,0333... = 0,1 + (0,1).0,333... = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}.\frac{1}{3} = \frac{2}{15}$. Agora, em relação aos números a e b, consideram-se três resultados baseados nas alternativas, $a - b$, $a + b$ e ab. Assim,*

$$a - b = \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 = -2,$$

$$a + b = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{3},$$

e finalmente $a.b$ que representa um produto da soma pela diferença de dois termos aplicados a aritmética, isto é,

$$ab = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2,$$

logo, $a.b$ é racional, $(a - b)c$ é racional, $(a + b)c$ é irracional, bc é irracional e $abc = (ab)c = 2.\frac{2}{15} = \frac{4}{15}$ é racional.
*Alternativa, (**e**).*

12. (CM/Brasília-2009) Considere a expressão $x = \left(\sqrt{10 + \sqrt{19}}\right)\left(\sqrt{10 - \sqrt{19}}\right)$. O valor positivo de x é

a) 9. b) 19. c) 29. d) 39. e) 9.

Solução 12. *Com, $x = \left(\sqrt{10 + \sqrt{19}}\right)\left(\sqrt{10 - \sqrt{19}}\right) = \sqrt{\left(10 + \sqrt{19}\right)\left(10 - \sqrt{19}\right)}$.*

Daí,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(10)^2 - \left(\sqrt{19}\right)^2}, \\ &= \sqrt{100 - 19}, \\ &= \sqrt{81} = 9. \end{aligned}$$

*Alternativa, (**a**).*

13. (EsSA-1996) A expressão $(a+b)^2(a-b)^2$ é equivalente a:

a) $a^4 - b^4$.

b) $a^4 + b^4$.

c) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$.

d) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$.

e) $a^4 - 2a^2b^2 - b^4$.

Solução 13. *Inicialmente, tem-se* $(a+b)^2.(a-b)^2 = [(a+b).(a-b)]^2$*.Daí,*

$$\begin{aligned} (a+b)^2.(a-b)^2 &= (a^2 - b^2)^2, \\ &= (a^2)^2 + (b^2)^2 - 2.a^2.b^2, \\ &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4. \end{aligned}$$

*Alternativa, (**e**).*

14. (ITA-2005) O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, fica menor que $0,01$ é

a) 2499. b) 2501. c) 2500. d) 3600. e) 4900.

Solução 14. *Da questão, tem-se* $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0,01 \Rightarrow \sqrt{n} - 0,01 < \sqrt{n-1}$. *Elevando ao quadrado, a segunda expressão, segue que* $(\sqrt{n} - 0,01)^2 < (\sqrt{n-1})^2 \Rightarrow (\sqrt{n})^2 - 2.0,01.\sqrt{n} + (0,01)^2 < (\sqrt{n-1})^2 \Rightarrow n - 0,02\sqrt{n} + 0,0001 < n - 1 \Rightarrow -0,02\sqrt{n} + 0,0001 < -1$.

Multiplicando a desigualdade resultante por -10000 *para deixar os valores inteiros,*

$$(-10000).(-0,02\sqrt{n}+0,0001) < -1.(-10000)$$

e, ainda, alterar o sentido da mesma, então,

$$200\sqrt{n}-1 > 10000 \Rightarrow 200\sqrt{n}-1+1 < 1000+1 \Rightarrow 200\sqrt{n} < 1001 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{200}}.\cancel{200}\sqrt{n} < 1001.\frac{1}{200} \Rightarrow \sqrt{n} > 50,005 \Rightarrow \sqrt{n} > 50,005 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\sqrt{n})^2 > (50,005)^2 \Rightarrow n > (50,005)^2.$$

Como, $n > (50,005)^2 > 2500$, *ou seja, o próximo inteiro é* $n = 2501$.

*Alternativa, (**b**).*

15. (CN-2002) Se $2 < x < 3$, então $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ é igual a:

a) 2. b) $\sqrt{x}$. c) $2\sqrt{x-1}$. d) $2\sqrt{x}$. e) 3.

Solução 15. *Tomando* $N = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ *e elevando ao quadrado,*

$$\begin{aligned}
N^2 &= \left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2,\\
&= \left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\right)^2+\left(\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2-2\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\sqrt{x-2\sqrt{x-1}},\\
&= x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}-2\sqrt{\left(x+2\sqrt{x-1}\right)\left(x-2\sqrt{x-1}\right)},\\
&= 2x-2\sqrt{x^2-(2\sqrt{x-1})^2},\\
&= 2x-2\sqrt{x^2-4(x-1)},\\
&= 2x-2\sqrt{x^2-4x+4}.
\end{aligned}$$

Mas como, $(x-2)^2 = x^2-4x+4$, *então,*

$$\begin{aligned}
N^2 &= 2x-2\sqrt{(x-2)^2},\\
&= 2x-2(x-2),\\
&= 2x-2x+4 = 4 \Rightarrow N^2 = 4 \Rightarrow N = 2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$.

*Alternativa, (**a**).*

16. (EEAr-2002) Se $k = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ então $\sqrt{15}$ é igual a

a) $\dfrac{k^2 - 8}{2}$.   b) $\dfrac{k^2}{2}$.   c) $k^2 - 8$.   d) k^2.

Solução 16. *Considerando a expressão* $k = \sqrt{3} + \sqrt{5}$*, eleva-se, ao quadrado, cada lado da igualdade, de modo que o lado direito da igualdade resulta num quadrado da soma de dois termos:*

$$k^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 = 3 + 5 + 2\sqrt{3.5} = 8 + 2\sqrt{15},$$

logo,

$$k^2 = 8 + 2\sqrt{15},$$

subtraindo 8 *e depois dividindo por* 2*, em cada lado da igualdade , resulta*

$$\sqrt{15} = \frac{k^2 - 8}{2}.$$

*Alternativa, (**a**).*

17. (AFA-1999) Se $x + \dfrac{1}{x} = 2$, então, $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ é

a) 1.   b) 2.   c) 6.   d) 8.

Solução 17. *Elevando ao cubo cada lado da igualdade* $x + \dfrac{1}{x} = 2$*, segue que*

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 2^3,$$

pelo cubo da soma de dois termos,

$$x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 3x\left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 8 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\cancel{x}.\frac{1}{\cancel{x}}.2 = 8 \Rightarrow$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 6 = 8 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 8 - 6,$$

logo, $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 2$.

*Alternativa, (**b**).*

18. (CM/Rio de Janeiro-2007) Se $\left(n+\frac{1}{n}\right)^2=5$, então, $n^6+\frac{1}{n^6}$ vale:

a) 9. b) $5\sqrt{5}$. c) 18. d) 27. e) 125.

Solução 18. *Resolvendo* $\left(n+\frac{1}{n}\right)^2=5$, *segue que*

$$\left(n+\frac{1}{n}\right)^2=5\Rightarrow n^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2+2.\cancel{n}.\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right)=5\Rightarrow n^2+\frac{1}{n^2}+2=5,$$

e subtraindo 2 *de cada lado da igualdade, resulta em,* $n^2+\frac{1}{n^2}=3$.

Elevando ao cubo cada lado da igualdade resultante $n^2+\frac{1}{n^2}=3$, *segue que*

$$\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)^3=3^3,$$

pelo cubo da soma de dois termos,

$$\left(n^2\right)^3+\left(\frac{1}{n^2}\right)^3+3.n^2\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)=27\Rightarrow n^6+\frac{1}{n^6}+3\cancel{n^2}.\frac{1}{\cancel{n^2}}.3=27\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^6+\frac{1}{n^6}+9=27.$$

Subtraindo 9 *de cada lado da última igualdade, resulta em,*

$$n^6+\frac{1}{n^6}=18.$$

*Alternativa, (**c**).*

19. (EsPCEx-2016) O valor da expressão

$E=(999)^5+5.(999)^4+10.(999)^3+10.(999)^2+5.(999)+1$ é igual a

a) 9.10^3. b) 9.10^5. c) 10^{15}. d) 999999. e) 999.10^15.

Solução 19. *Sendo,*$E=(999)^5+5.(999)^4+10.(999)^3+10.(999)^2+5.(999)+1$ *pode ser escrita como,* $E=(999)^5+5.(999)^4.1+10.(999)^3.1^2+10.(999)^2.1^3+5.(999).1^4+1^5$. *Tal expressão equivale a sexta linha do Triângulo de Pascal para o binômio* $(999+1)^5$. *Assim,*

$$(999+1)^5=1000^5=(10^3)^5=10^{15}.$$

*Alternativa, (**c**).*

20. (EsPCEx-1997) O termo independente no desenvolvimento de $\left(\dfrac{1}{x^2}-\sqrt[4]{x}\right)^{18}$ é:

a) 153. b) 261. c) 149. d) 457. e) 361.

Solução 20. *O termo geral desse binômio de Newton,* $\left(\dfrac{1}{x^2}-\sqrt[4]{x}\right)^{18}$ *, é dado por,*

$\dbinom{18}{p}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{18-p}(\sqrt[4]{x})^p=\dbinom{18}{p}\left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^2\right]^{18-p}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^p=\dbinom{18}{p}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{36-2p}(x)^{\frac{p}{4}}.$

Para que seja o termo independente, deve-se ter $36-2p=\dfrac{p}{4}\Rightarrow\dfrac{p}{4}+2p=36-2p+2p\Rightarrow$ $\dfrac{9p}{4}=36\Rightarrow\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{9}}.\dfrac{\cancel{9}p}{\cancel{4}}=36.\dfrac{4}{9}\Rightarrow p=16.$

Portanto, o valor de $p=16$*, resulta no coeficiente,* $\dbinom{18}{16}=\dfrac{18!}{16!2!}=\dfrac{18.17}{2}=153.$

*Alternativa, (**a**).*

21. (ITA-1994) No desenvolvimento de $A=\left(\dfrac{3a^2}{2}+\dfrac{2m}{3}\right)^{10}$, a razão entre a parcela contendo o fator $a^{16}m^2$ e a parcela contendo o fator $a^{14}m^3$ é igual a $\dfrac{9}{16}$. Se a e m são números reais positivos tais que $A=(m^2+4)^5$ então:

a) $am=\dfrac{2}{3}$. b) $am=\dfrac{1}{3}$. c) $a+m=\dfrac{5}{2}$. d) $a+m=5$. e) $a-m=\dfrac{5}{2}$.

Solução 21. *O termo que contém* $a^{16}m^2$ *resulta de* $\dbinom{10}{8}\left(\dfrac{3a^2}{2}\right)^8\left(\dfrac{2m}{3}\right)^2$*, tal que*

$$\binom{10}{8}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^8\left(\frac{2m}{3}\right)^2=\frac{10!}{8!2!}.\frac{6561a^{16}}{256}.\frac{4m^2}{9}=\frac{90}{2}.\frac{6561a^{16}}{256}.\frac{4m^2}{9}=\frac{32805a^{16}m^2}{64}.$$

E o termo que contém $a^{14}m^3$ *resulta de* $\dbinom{10}{7}\left(\dfrac{3a^2}{2}\right)^7.\left(\dfrac{2m}{3}\right)^3$*, de modo que*

$$\binom{10}{7}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^7.\left(\frac{2m}{3}\right)^3=\frac{10!}{7!3!}.\frac{2187a^{14}}{128}.\frac{8m^3}{27}=\frac{720}{6}.\frac{1215a^{14}}{2}.\frac{8m^3}{27}=\frac{1215a^{14}m^3}{2}.$$

Da razão entre esses termos, tem-se

$$\frac{\dfrac{32805a^{16}m^2}{64}}{\dfrac{1215a^{14}m^3}{2}}=\frac{9}{16}\Rightarrow\frac{32805a^{16}m^2}{64}.\frac{2}{1215a^{14}m^3}=\frac{9}{16}\Rightarrow\frac{27a^2m^{-1}}{32}=\frac{9}{16}\Rightarrow\frac{a^2}{m}=\frac{2}{3}.$$

Ainda, tem-se $\left(\dfrac{3a^2}{2}+\dfrac{2m}{3}\right)^{10}=(m^2+4)^5\Rightarrow\sqrt[5]{\left(\dfrac{3a^2}{2}+\dfrac{2m}{3}\right)^{10}}=\sqrt[5]{(m^2+4)^5}\Rightarrow$ $\left(\dfrac{3a^2}{2}+\dfrac{2m}{3}\right)^2=m^2+4.$ *E como,* $3a^2=2m$*, então*

$\left(\dfrac{2m}{2}+\dfrac{2m}{3}\right)^2=m^2+4\Rightarrow\left(\dfrac{5m}{3}\right)^2=m^2+4\Rightarrow\dfrac{25m^2}{9}=m^2+4\Rightarrow\dfrac{25m^2}{9}-m^2=4\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{16m^2}{9} = 4 \Rightarrow m^2 = 4.\frac{9}{16} = \frac{9}{4} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Sendo $m = \frac{3}{2} \Rightarrow 3a^2 = 2.\frac{3}{2} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = 1$. *Portanto,* $m + a = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$.

*Alternativa, (**c**).*

22. (AFA-1990) No desenvolvimento do binômio $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$, o valor do termo independente de x é:

a) -70. b) -35. c) 35. d) 70.

Solução 22. *No binômio de Newton,* $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$ *, o valor do termo independente é dado ela expressão,* $\binom{8}{p}(x)^{8-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p$.

Para que seja o termo independente, deve-se ter $8 - p = p \Rightarrow 8 - p + p = p + p \Rightarrow 2p = 8 \Rightarrow \frac{1}{2}.2p = 8.\frac{1}{2} \Rightarrow p = 4$.

Portanto, o valor de $p = 4$*, resulta no coeficiente,* $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = 70$. *Como o termo negativo do binômio apresenta expoente ímpar, o coeficiente é positivo.*

*Alternativa, (**d**).*

23. (ITA-2004) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é

a) $729\sqrt[3]{45}$. b) $972\sqrt[3]{15}$. c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$. d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$. e) $165\sqrt[3]{75}$.

Solução 23. *Primeiramente, deve-se simplificar cada termo do binômio. No caso, tem-se* $\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{x}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{x^{\frac{1}{3}-1}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{x^{-\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}x^{-\frac{1}{3}}$. *E ainda,* $\sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x^{1-\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}x^{\frac{1}{6}}$. *Daí,*

$$\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12} = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}x^{-\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{\frac{5}{3}}x^{\frac{1}{6}}\right)^{12}.$$

O termo geral é dado por

$$\binom{12}{p}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x^{-\frac{1}{3}}\right)^{12-p}.\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}x^{\frac{1}{6}}\right)^p = \binom{12}{p}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{12-p}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{12-p}.\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^p\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^p.$$

Para que se tenha um termo independente, tem-se

$$-\frac{1}{3}(12-p) = -\frac{1}{6}p \Rightarrow \frac{p-12}{3} = -\frac{p}{6} \Rightarrow 6.\frac{p-12}{3} = -\frac{p}{\cancel{6}}.\cancel{6} \Rightarrow 2p-24 = -p \Rightarrow$$

$$2p+p = 24 \Rightarrow 3p = 24 \Rightarrow \frac{1}{3}.3p = 24.\frac{1}{3} \Rightarrow p = 8.$$

Portanto, tem-se $\binom{12}{8}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4.\cancel{\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^4}.\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^8.\cancel{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^8} = \frac{12!}{8!4!}.\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4.\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^8 =$
$\frac{12.11.10.9}{4.3.2.1}.\frac{\cancel{9}}{\cancel{25}}.\frac{\cancel{25}\sqrt[3]{25}}{\cancel{9}\sqrt[3]{9}} = 495.\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{9}}.$

Para eliminar o radical do denominador, multiplica-se a fração por $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$*, isto é,* $495.\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{9}} =$
$495.\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{9}}.\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = 495.\frac{\sqrt[3]{75}}{3} = 165\sqrt[3]{75}.$

*Alternativa, (**e**).*

24. (EsSA-2004) Sendo $x = 19$ e $y = 81$, então a expressão $(x+y)^2 + x^2 - y^2 + 2x$ é divisível por:

a) 2 , 19 e 81.

b) 2 , 19 e 101.

c) 2 , 81 e 101.

d) 19 , 100 e 101.

e) 81 , 100 e 101.

Solução 24. *Fatorando, por diferença de dois quadrados e evidenciação, segue*

$$\begin{aligned}(x+y)^2 + x^2 - y^2 + 2x &= \left[(x+y)^2 - y^2\right] + (2x + x^2),\\ &= (x+y+y)(x+y-y) + x(2+x),\\ &= (2y+x)x + x(2+x),\\ &= x(2y+x+2+x),\\ &= x(2y+2x+2) = 2x(y+x+1).\end{aligned}$$

Substituindo os valores numéricos na expressão fatorada, $2x(y+x+1) = 2.19.(81+19+1) = 2.19.101.$

*Alternativa, (**b**).*

25. (EsSA-1992) A forma simplificada da expressão $(x-y)^2 - (x+y)(x-y)$ é:

a) $-2xy$. b) $2x^2 - 2xy$. c) $2xy$. d) $y^2 - 2xy$. e) $2y(y-x)$.

Solução 25. *Tem-se,* $(x-y)^2-(x+y)(x-y) = (x-y)^2-(x^2-y^2) = (x-y)^2-x^2+y^2$. *Assim, por diferença de dois quadrados, segue*

$$\begin{aligned}(x-y)^2-(x+y)(x-y) &= (x-y)^2-x^2+y^2,\\ &= (x-y+x)(x-y-x)+y^2,\\ &= (2x)(-y)+y^2,\\ &= y^2-2xy = y(y-2x).\end{aligned}$$

*Alternativa, (**d**).*

26. (CN-2001) O valor de $\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ é:

a) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

b) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

c) $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

d) $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

e) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Solução 26. *Tem-se, por evidenciação em cada parcela da soma, que*

$$\begin{aligned}\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2+a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left[a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}},\\ &= \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}},\\ &= a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}},\\ &= \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right),\\ &= \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}+1} = \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

*Alternativa, (**e**).*

27. (EsSA-1984) A forma fatorada da expressão $ax - ay + 2x - 2y$ é:

a) $(a+2)(x+y)$.

b) $2(x-y)$.

c) $(a+y)(x-2)$.

d) $(a+2)(x-y)$.

Solução 27. *Tem-se por agrupamento,*

$$\begin{aligned} ax - ay + 2x - 2y &= a(x-y) + 2(x-y), \\ &= (x-y)(a+2). \end{aligned}$$

*Alternativa, (**d**).*

28. (EsSA-2002) A expressão algébrica $X^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ + X + Y - Z$ admite como fator

a) $-X + Y + Z + 1$.

b) $X - Y - Z + 1$.

c) $X + Y - Z + 1$.

d) $X - Y + Z + 1$.

e) $X + Y + Z + 1$.

Solução 28. *Tem-se por T.Q.P., pois em $-Y^2 - Z^2 + 2YZ$ é fato que $(2YZ)^2 = 4.(-Y^2)(-Z^2) = 4Y^2Z^2$, diferença de dois quadrados e evidenciação, que*

$$\begin{aligned} X^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ + X + Y - Z &= X^2 - (Y^2 + Z^2 - 2YZ) + X + Y - Z, \\ &= X^2 - (Y-Z)^2 + X + Y - Z, \\ &= (X+Y-Z)(X-Y+Z) + X + Y - Z, \\ &= (X+Y-Z)(X-Y+Z+1). \end{aligned}$$

*Alternativa, (**d**).*

29. (CN-1992) O valor numérico da expressão $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ para $a = \dfrac{8}{17}$ e $b = \dfrac{9}{17}$ é um número N tal que:

a) $N < 0$.

b) $10^{-4} < N < 10^{-3}$.

c) $10^{-3} < N < 10^{-2}$.

d) $10^{-2} < N < 10^{-1}$.

e) $10^{-1} < N < 1$.

Solução 29. *Como a expressão é um T.Q.P., pois* $(-2a^2b^2)^2 = 4.a^4.b^4 = 4a^4b^4$. *Então,* $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2$.

Substituindo os valores numéricos de a e b segue, $\left[\left(\frac{8}{17}\right)^2 - \left(\frac{9}{17}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{64}{289} - \frac{81}{289}\right)^2 = \left(\frac{-17}{289}\right)^2 = \left(\frac{-1}{17}\right)^2 = \frac{1}{289}$.

Portanto, sendo $\frac{1}{289} = 0,00346....$

Alternativa, ***(c)****.*

30. (CN-2016) Sejam x e y números reis tais que $xy = 2\sqrt{3}$. Sendo assim, o valor mínimo de $x^8 + y^8$ é

a) múltiplo de 18.

b) um número primo.

c) divisível por 5.

d) divisível por 13.

e) par maior que 30.

Solução 30. *Como* x^8 *e* y^8 *são números reais positivos. Segue que* $\left(x^8 - y^8\right)^2 \geq 0$. *Daí, segue que* $x^{16} + y^{16} - 2x^4y^4 \geq 0$. *Somando* $4x^8y^8$ *em cada lado da desigualdade, então,*

$$x^{16}+y^{16}-2x^8y^8 \geq 0 \Rightarrow x^{16}+y^{16}-2x^8y^8+4x^8y^8 \geq 0+4x^8y^8 \Rightarrow x^{16}+y^{16}+2x^8y^8 \geq 4x^8y^8.$$

Fatorando o lado esquerdo da última desigualdade e extraindo a raiz quadrada de cada lado, segue

$$\left(x^8 + y^8\right)^2 \geq 4x^4y^4 \Rightarrow \sqrt{\left(x^8 + y^8\right)^2} \geq \sqrt{4x^8y^8} \Rightarrow x^8 + y^8 \geq 2x^4y^4 = 2\left(xy\right)^4.$$

Como, $xy = 2\sqrt{3}$, *então,* $x^8 + y^8 \geq 2\left(2\sqrt{3}\right)^4 = 2.16.9 = 288$.

Alternativa, ***(a)****.*

31. (CN - 2017) Sejam a, b e c números reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 - 4a + 2b - 2c + 6 = 0$. Sobre a, b e c são feitas as seguintes afirmações:

I. $a^b < b^a$;

II. $c^{b^a} = 1$;

III. $b^{(-a)} = (-c)^b$;

IV. $a > b > c$;

Sendo assim, é correto afirmar que a quantidade de afirmativas verdadeiras é

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

Solução 31. *Primeiramente, agrupando os termos de* $a^2 + b^2 + c^2 - 4a + 2b - 2c + 6 = 0 \Rightarrow (a^2 - 4a + 4) + (b^2 + 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = 0$, *onde cada trinômio destacado é um T.Q.P., pois* $(-4a)^2 = 4.a^2.4$, $(2a)^2 = 4.b^2.1$ *e* $(-2c)^2 = 4.c^2.1$. *Daí,*

$$(a^2 - 4a + 4) + (b^2 + 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = 0 \Rightarrow (a - 2)^2 + (b + 1)^2 + (c - 1)^2 = 0.$$

Como a soma de três quadrados resulta nula, isso só ocorrerá se cada um desses quadrados também for nulo, isto é, os valores numéricos que a, b e c assumem são dados por 2, -1 *e* 1, *respectivamente.*

Com os valores de a, b e c é fácil jugar os itens:

(I) $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ *e* $(-1)^2 = 1$, *verdadeiro;*

(II) $1^{(-1)^2} = 1^1 = 1$, *verdadeiro;*

(III) $(-1)^{-2} = 1$ *e* $(-1)^{-1} = -1$, *falso;*

(IV) $2 > -1 > 1$, *falso.*

*Alternativa, (**c**).*

32. (IME-1981) Mostre que que o número $\underbrace{4444\ldots4}_{\text{n vezes}}\underbrace{8888\ldots8}_{\text{(n-1) vezes}}9$ é um quadrado perfeito.

Solução 32. *Para provar o que se pede, uma das maneiras é toma-lo como uma soma de outros três números, isto é,* $A = \underbrace{4444\ldots4}_{\text{2n vezes}}$, $B = \underbrace{8888\ldots8}_{\text{n vezes}}$ *e o 1.*

Como $A = \underbrace{4444\ldots4}_{\text{2n vezes}} = 4+4.10+4.10^2+\cdots+4.10^{2n-1} = \dfrac{4(10^{2n}-1)}{10-1} = \dfrac{4(10^{2n}-1)}{9}$ *por ser a soma de uma P.G. de 2n termos, com* $a = 4$ *e* $q = 10$. *E, ainda,* $B = \underbrace{4444\ldots4}_{\text{n vezes}} =$

$4+4.10+4.10^2+\cdots+4.10^{n-1}=\dfrac{4(10^n-1)}{10-1}=\dfrac{4(10^n-1)}{9}$ *por ser a soma de uma outra P.G. de n termos, com $a=4$ e $q=10$, segue que*

$$\begin{aligned} N &= A+B+1,\\ &= \frac{4(10^{2n}-1)}{9}+\frac{4(10^n-1)}{9}+1,\\ &= \frac{4.10^{2n}-4}{9}+\frac{4.10^n-4}{9}+\frac{9}{9},\\ &= \frac{4.10^{2n}-4+4.10^n-4+9}{9},\\ &= \frac{4.10^{2n}+4.10^n+1}{9}. \end{aligned}$$

E sendo $(4.10^n)^2=16.10^{2n}=4.4.10^{2n}.1$, *a expressão* $\dfrac{4.10^{2n}+4.10^n+1}{9}$ *é um T.Q.P., tal que* $N=\left(\dfrac{2.10^n-1}{3}\right)^2$ *é, realmente, um quadrado perfeito.*

33. (IME-2004) Demonstre que o número $\underbrace{111\ldots1}_{\text{(n-1) vezes}}\underbrace{222\ldots2}_{\text{n vezes}}5$ é quadrado perfeito.

Solução 33. *Tem-se que* $N=\underbrace{111\ldots1}_{\text{(n-1) vezes}}\underbrace{222\ldots2}_{\text{n vezes}}5=5+2.10+2.10^2+\cdots+2.10^n+1.10^{n+1}+1.10^{n+2}+\cdots+1.10^{2n-1}$.

Como $2.10+2.10^2+\cdots+2.10^n$ *é a soma de uma PG de n termos, com $a=2.10$ e $q=10$. E ainda,* $1.10^{n+1}+1.10^{n+2}+\cdots+1.10^{2n-1}$ *é a soma de uma PG de $(n-1)$ termos, com $a=1.10^{n+1}$ e $q=10$, segue que*

$$\begin{aligned} N &= 5+\frac{2.10(10^n-1)}{10-1}+\frac{1.10^{n+1}(10^{n-1}-1)}{10-1},\\ &= \frac{45}{9}+\frac{20.10^n-20}{9}+\frac{10^{2n}-10^{n+1}}{9},\\ &= \frac{45}{9}+\frac{20.10^n-20}{9}+\frac{10^{2n}-10.10^n}{9}\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N=\frac{45+20.10^n-20+10^{2n}-10.10^n}{9}=\frac{10^{2n}+10.10^n+25}{9}.$$

E sendo $(10.10^n)^2=100.10^{2n}=4.25.10^{2n}$, *a expressão* $\dfrac{10^{2n}+10.10^n+25}{9}$ *é um T.Q.P., tal que* $N=\left(\dfrac{10^n+5}{3}\right)^2$, *demonstra-se que realmente é um quadrado perfeito.*

34. (EsSA-1979) A expressão $a^2 - 7a + 12$, depois de fatorada, resulta:

a) $(a-4)(a-3)$.

b) $(a+4)(a-3)$.

c) $(a-4)(a+3)$.

d) $(a+4)(a+3)$.

Solução 34. *A expressão não é um T.Q.P., pois* $(-7a)^2 = 49a^2 \neq 4.a^2.12 = 48a^2$. *Então, a expressão é um produto de Stevin na forma* $(x+m)(x+n)$.

Como $12 = 3.4 = (-3).(-4) = 2.6 = (-2).(-6) = 1.12 = (-1).(-12)$. *Logo, os únicos fatores que resultam em soma* $-7 = -3 - 4$. *Com* $m = -3$ *e* $n = -4$ *ou vice-versa.*

Portanto, $a^2 - 7a + 12 = (a-3)(a-4)$ *é sua fatoração.*

*Alternativa, (**a**).*

35. (EsSA-1994) Fatorando a expressão $x^2 + 100x + 99$, obtemos:

a) $(x+1)(x+99)$.

b) $(x+1)(x-99)$.

c) $(x-1)(x+99)$.

d) $(x-1)(x-99)$.

e) $(x+100)(x+99)$.

Solução 35. *A expressão não é um T.Q.P., pois* $(100x)^2 = 10000x^2 \neq 4.x^2.99 = 396x^2$. *Então, a expressão é um produto de Stevin na forma* $(x+m)(x+n)$.

Como $99 = 11.9 = (-11).(-9) = 1.99 = (-1).(-99)$. *Logo, os únicos fatores que resultam em soma* $100 = 1 + 99$. *Com* $m = 1$ *e* $n = 99$ *ou vice-versa.*

Portanto, $x^2 + 100x + 99 = (x+1)(x+99)$ *é sua fatoração.*

*Alternativa, (**a**).*

Capítulo 4

Frações e Radicais Algébricos

Este capitulo abordará as frações algébricas e os radicais algébricos, uma vez que esses tópicos são essenciais para o conhecimento e entendimento da Álgebra.

4.1 Frações Algébricas

As frações algébricas constituem algo fundamental para se entender profundamente a Álgebra, pois exige um conhecimento bem estruturado dos produtos e das fatorações algébricas. Além de tratar do MMC e MDC de termos e expressões algébricas.

Uma fração é a divisão indicada de dois números inteiros como, por exemplo $\frac{3}{4}$ ou $\frac{2}{13}$. Toda fração é composta por dois termos: um numerador(termo que está sendo dividido) e um denominador(termo que divide). Quando a fração apresentar um termo ou expressão algébrica no numerador ou denominador, pode-se ter uma fração algébrica.

4.1.1 Noção de Fração Algébrica

Para entender fração algébrica segue algumas definições:

Definição 4.1.1. *Fração algébrica ou literal é a fração em que pelo menos um de seus termos contém numeral literal(variável), [12].*

Definição 4.1.2. *Uma fração algébrica se define como a divisão indicada de duas expressões algébricas N e D, sendo D diferente de um número real. Denotado por $\frac{N}{D}$, [1].*

Seguindo as definições apresentadas, percebe-se que ambas, a priori são semelhantes, mas a segunda definição acaba sendo mais coerente, pois em [12] o autor afirma que, pelo menos um de seus termos deve conter um literal(variável), porém se o numerador contém um numeral literal e o denominador é um numero real, então trata-se de uma expressão algébrica de coeficientes fracionários e não uma fração algébrica. Entretanto, essa possibilidade está descartada na definição apresentada por [1]. Sendo assim, são exemplos de frações algébricas, $\frac{x+5}{xy}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{x+y+z}{a+b-1}$ e $\frac{a+x}{y^2-3}$. Enquanto que $\frac{x-y}{5}$ não é uma fração algébrica, pois o denominador é um número real.

A partir das definições, nota-se um problema que decorre da própria noção de fração como divisão indicada por números inteiros. Não existe fração com denominador nulo. Portanto, se faz necessário atribuir uma certa condição de existência para as frações algébricas. A **condição de existência** de uma fração algébrica estabelece para quais valores reais as variáveis do denominador são restritas a mesma, uma vez que podem anular esse denominador, para que assim, não haja impossibilidade operatória. Nos exemplos apresentados, em $\frac{x+5}{xy}$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$; em $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$; em $\frac{x+y+z}{a+b-1}$, $a+b \neq 1$; em $\frac{a+x}{y^2-3}$, $y \neq \sqrt{3}$.

4.1.2 Classificação das Frações Algébricas

As frações algébricas podem ser classificadas de diversas maneiras, assim como uma fração de números inteiros apresenta diversas classificações, tais como próprias, improprias, simples, mistas, etc. As classificações adotadas por uma fração algébrica leva em consideração algumas características interessantes, tais como grau e variáveis.

I. De acordo com o número de variáveis

Quando uma fração algébrica $\frac{N}{D}$ apresenta uma única variável então ela é uma **fração algébrica simples**, caso a fração apresente mais de uma variável, então ela é dita **fração algébrica de múltiplas variáveis**. Por exemplo, as frações $\frac{x+5}{x-1}$ e $\frac{y^2+5}{2y+1}$ são simples, enquanto que as frações $\frac{x+y+z}{a+b-1}$ e $\frac{a+x}{y^2-3}$ são de múltiplas variáveis.

II. De acordo com o grau dos termos

Quando uma fração algébrica simples apresenta o grau do numerador menor ou igual ao grau do denominador ela é dita **fração algébrica própria**, caso a fração apresente o grau do numerador maior que o grau do denominador ela é dita **fração algébrica imprópria**. Por exemplo, as frações $\frac{x+1}{x^3-1}$ e $\frac{2+a}{a^2-3}$ são próprias, enquanto que as frações $\frac{x^2+5x-1}{x+1}$ e $\frac{y^2+5}{2y+1}$ são frações impróprias.

III. Em grupos de características semelhantes

Quando um determinado grupo de frações algébricas apresenta o mesmo denominador algébrico, essas são ditas **frações algébricas homogêneas**, caso um grupo de frações apresente denominadores algébricos diferentes, então essas são ditas **frações algébricas heterogêneas**. Por exemplo, o grupo de frações $\frac{x}{x+1}$, $\frac{x-1}{x+1}$ e $\frac{x^2+1}{x+1}$ são homogêneas, enquanto que as frações $\frac{x}{y-2}$, $\frac{x-1}{x+1}$ e $\frac{x^2+2x}{x+y}$ são heterogêneas.

4.1.3 Simplificação de Frações Algébricas

Simplificar uma fração algébrica significa proceder de modo análogo a simplificação de frações de números inteiros, isto é, simplifica-se a fração pelo maior divisor comum entre numerador e denominador. Mas, como deve-se calcular o MDC de termos ou expressões algébricas? Simplesmente, fatorando-as e efetuando o produto dos fatores comuns de menor expoentes. Assim, sendo uma fração algébrica $\frac{N}{D}$, simplifica-se essa fração por $mdc(N, D)$.

Exemplo 33. *Simplifique a fração* $\frac{4ab^2}{6a^2b}$.

Comentário/Resolução 33. *Primeiramente, obtém-se a fatoração do numerador* $N = 4ab^2 = 2^2.a.b^2$ *e do denominador é tal que,* $D = 6a^2b = 2.3.a^2.b$*. Dessas fatorações, percebe-se que o fator comum é* $mdc(N, D) = 2ab$*. Assim,*

$$\frac{4ab^2}{6a^2b} = \frac{2a.\cancel{2ab}}{\cancel{2ab}.3b} = \frac{2a}{3b}.$$

Exemplo 34. *Simplifique a fração* $\frac{x^2-a^2}{x^2+xa}$.

Comentário/Resolução 34. *O numerador, por diferença de dois quadrados, fatora-se* $N = x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ *e o denominador, por fator comum,* $D = x^2 + xa = x(x+a)$*. Daí, nota-se que o fator comum é* $mdc(N, D) = x + a$*. Assim,*

$$\frac{x^2-a^2}{x^2+xa} = \frac{\cancel{(x+a)}(x-a)}{x\cancel{(x+a)}} = \frac{x-a}{x}.$$

Exemplo 35. *Simplifique a fração* $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}$.

Comentário/Resolução 35. *O numerador, fatora-se* $N = x^3+x^2-x-1 = x(x^2-1)+(x^2-1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$ *e o denominador,* $D = x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$. *Daí, nota-se que o fator comum é* $mdc(N,D) = (x+1)^2$. *Assim,*

$$\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x} = \frac{\cancel{(x+1)^2}(x-1)}{x\cancel{(x+1)^2}} = \frac{x-1}{x}.$$

4.1.4 Operações com Frações Algébricas

As operações mais recorrentes envolvendo as frações algébricas e, também, as frações de números inteiros, são as operações básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação. Para tratar essas operações segue algumas ideias adotadas por [10].

A **multiplicação** de frações algébricas dá-se pelo produto dos numeradores entre si, bem como o produto dos denominadores, também, entre si. Sejam as frações algébricas $\dfrac{N_1}{D_1}$ e $\dfrac{N_2}{D_2}$, então

$$\frac{N_1}{D_1}.\frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1.N_2}{D_1.D_2}$$

Exemplo 36. *Efetue* $\dfrac{4ab^2}{a+b}.\dfrac{9ab}{a-b}$.

Comentário/Resolução 36. *Tem-se,*

$$\frac{4ab^2}{a+b}.\frac{9ab}{a-b} = \frac{4ab^2.9ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{36a^2b^3}{a^2-b^2}.$$

A **divisão** de frações algébricas dá-se pelo produto da primeira fração(dividendo) pelo inverso da segunda fração(divisor). Sejam as frações algébricas $\dfrac{N_1}{D_1}$ e $\dfrac{N_2}{D_2}$, então

$$\frac{N_1}{D_1} : \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1}{D_1}.\frac{D_2}{N_2} = \frac{N_1.D_2}{D_1.N_2}$$

ou

$$\frac{\frac{N_1}{D_1}}{\frac{N_2}{D_2}} = \frac{N_1}{D_1}.\frac{D_2}{N_2} = \frac{N_1.D_2}{D_1.N_2}$$

Exemplo 37. *Resolva* $\dfrac{\dfrac{m+n}{d}}{\dfrac{d+1}{m-n}}$.

Comentário/Resolução 37. *Tem-se,*

$$\frac{\dfrac{m+n}{d}}{\dfrac{d+1}{m-n}} = \frac{m+n}{d}.\frac{m-n}{d+1} = \frac{(m+n)(m-n)}{d(d+1)} = \frac{m^2-n^2}{d^2+d}.$$

A **adição** e **subtração** de frações seguem um mesmo raciocínio e para tal essas operações serão tratadas de uma única maneira, de modo mais geral, a partir da expressão **adição algébrica**. Para tal operação consideram-se dois casos: frações algébricas homogêneas e heterogêneas.

Para frações algébricas homogêneas, efetua-se a soma algébrica dos numeradores e conserva-se o denominador. Sejam as frações algébricas $\frac{N_1}{D}$ e $\frac{N_2}{D}$, então

$$\frac{N_1}{D} \pm \frac{N_2}{D} = \frac{N_1 \pm N_2}{D}$$

Exemplo 38. *Considere as frações* $A = \dfrac{x^2+ab}{4ab}$ *e* $\dfrac{x^2-ab}{4ab}$. *Calcule:*

a) $A+B$;

a) $A-B$.

Comentário/Resolução 38. *Tem-se,*

$$A+B = \frac{x^2+ab}{4ab} + \frac{x^2-ab}{4ab} = \frac{x^2+ab+x^2-ab}{4ab} = \frac{2x^2}{4ab} = \frac{x^2}{2ab}.$$

$$A-B = \frac{x^2+ab}{4ab} - \frac{x^2-ab}{4ab} = \frac{x^2+ab-(x^2-ab)}{4ab} = \frac{x^2+ab-x^2+ab}{4ab} = \frac{2ab}{4ab} = \frac{1}{2}.$$

Para frações algébricas heterogêneas, deve-se, primeiramente, reduzir as frações ao mesmo denominador seguido pela soma algébrica, como no caso anterior. Para igualar os denominadores de frações algébricas basta determinar o MMC desses termos, no caso o MMC será o produto de todos os fatores comuns ou não e de maiores expoentes da fatoração dos denominadores envolvidos na soma algébrica. Sejam as frações algébricas $\frac{N_1}{D_1}$ e $\frac{N_2}{D_2}$, então

$$\frac{N_1}{D_1} \pm \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1.\frac{E}{D_1}}{E} \pm \frac{N_2.\frac{E}{D_2}}{E} = \frac{M_1}{E} \pm \frac{M_2}{E} = \frac{M_1 \pm M_2}{E},$$

onde $M_1 = N_1.\frac{E}{D_1}$, $M_2 = N_2.\frac{E}{D_2}$ e $E = mdc(D_1, D_2)$

Exemplo 39. *Calcule* $\frac{x^2+1}{x-y} + \frac{y^2}{x+y}$.

Comentário/Resolução 39. *Como as frações são heterogêneas, antes de realizar a soma algébrica, precisa-se igualar os denominadores. No caso,* $D_1 = x - y$ *e* $D_2 = x + y$ *, onde* $mmc(D_1, D_2) = (x-y)(x+y) = x^2 - y^2$. *Assim,*

$$\frac{x^2+1}{x-y} + \frac{y^2}{x+y} = \frac{(x^2+1)(x+y)}{(x+y)(x-y)} + \frac{y^2(x-y)}{(x+y)(x-y)} =$$

$$= \frac{x^3+x^2y+x+y}{x^2-y^2} + \frac{y^2x-y^3}{x^2-y^2} = \frac{x^3-y^3+x^2y+y^2x+x+y}{x^2-y^2} = \frac{x^3-y^3+(x+y)(xy+1)}{x^2-y^2}.$$

Exemplo 40. *Calcule* $\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^3+1}$.

Comentário/Resolução 40. *Primeiramente, deve-se igualar os denominadores. Seja,* $D_1 = x^2-1 = (x+1)(x-1)$, *por ser uma diferença de dois quadrados. E, ainda,* $D_2 = x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, *por ser uma soma de dois cubos. Então,* $mmc(D_1, D_2) = (x+1)(x-1)(x^2-x+1)$. *Assim,*

$$\frac{1}{x^3+1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1.(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)} - \frac{1.(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{x^2-x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{x^2-x+1-x+1}{(x^2-1)(x^2-x+1)} = \frac{(x-1)^2+1}{(x^4-1)-x(x^2-1)}.$$

A **potenciação**, simplesmente eleva a fração à uma potência de expoente natural, de modo que cada termo seja elevado. Seja a fração $\frac{N}{D}$, então

$$\left(\frac{N}{D}\right)^n = \frac{N^n}{D^n}$$

Exemplo 41. *Resolva* $\left(\dfrac{x+1}{3x^2}\right)^3$.

Comentário/Resolução 41. *Tem-se,*

$$\left(\frac{x+1}{3x^2}\right)^3 = \frac{(x+1)^3}{(3x^2)^3} = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{27x^6}.$$

A seguir, um interessante exemplo que envolve as diversas operações em um único problema.

Exemplo 42. *(Fatec - 1998) Simplificando a expressão*

$$\frac{\dfrac{m}{m+n}+\dfrac{n}{m-n}}{\dfrac{n}{m+n}-\dfrac{m}{m-n}} + \frac{1+\dfrac{m}{n}}{1+\dfrac{(m-n)^2}{4mn}} \times \left(1+\frac{n}{m}\right),$$

com $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$, $m \neq \pm n$ *e* $mn \neq 0$, *obtém-se*

a) 0; *b)* 1; *c)* 2; *d)* 3; *e)* $\dfrac{5(m+n)}{3mn}$;

Comentário/Resolução 42. *Como* $m \neq \pm n$ *e* $mn \neq 0$ *e fazendo* $1 = \dfrac{m}{m} = \dfrac{n}{n} = \dfrac{4mn}{4mn}$, *tem-se*

$$X = \frac{\dfrac{m}{m+n}+\dfrac{n}{m-n}}{\dfrac{n}{m+n}-\dfrac{m}{m-n}} + \frac{1+\dfrac{m}{n}}{1+\dfrac{(m-n)^2}{4mn}} \times \left(1+\frac{n}{m}\right).$$

Simplificando, primeiramente, a fração seguinte,

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{m}{m+n}+\dfrac{n}{m-n}}{\dfrac{n}{m+n}-\dfrac{m}{m-n}} &= \frac{\dfrac{m(m-n)}{(m+n)(m-n)}+\dfrac{n(m+n)}{(m+n)(m-n)}}{\dfrac{n(m-n)}{(m+n)(m-n)}-\dfrac{m(m+n)}{(m+n)(m-n)}}, \\
&= \frac{\dfrac{m^2-mn}{m^2-n^2}+\dfrac{mn+n^2}{m^2-n^2}}{\dfrac{mn-n^2}{m^2-n^2}-\dfrac{m^2+mn}{m^2-n^2}}, \\
&= \frac{\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}}{\dfrac{-n^2-m^2}{m^2-n^2}}, \\
&= \frac{\cancel{m^2+n^2}}{\cancel{m^2-n^2}} \times \frac{\cancel{m^2-n^2}}{-\cancel{(m^2+n^2)}}, \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Agora, simplificando a fração

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\dfrac{m}{n}}{1+\dfrac{(m-n)^2}{4mn}} &= \frac{\dfrac{n}{n}+\dfrac{m}{n}}{\dfrac{4mn}{4mn}+\dfrac{(m-n)^2}{4mn}},\\
&= \frac{\dfrac{n+m}{n}}{\dfrac{4mn+(m-n)^2}{4mn}},\\
&= \frac{\dfrac{n+m}{n}}{\dfrac{4mn+m^2+n^2-2mn}{4mn}},\\
&= \frac{\dfrac{n+m}{n}}{\dfrac{m^2+n^2+2mn}{4mn}},\\
&= \frac{\dfrac{n+m}{n}}{\dfrac{(m+n)^2}{4mn}},\\
&= \frac{\cancel{n+m}}{\cancel{n}} \times \frac{4m\cancel{n}}{(m+n)^{\cancel{2}}},\\
&= \frac{4m}{m+n}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
X &= -1+\frac{4m}{m+n}\times\left(1+\frac{n}{m}\right),\\
&= -1+\frac{4\cancel{m}}{\cancel{m+n}}\times\left(\frac{\cancel{m+n}}{\cancel{m}}\right),\\
&= -1+4=3.
\end{aligned}
$$

Letra, (d).

4.2 Radicais Algébricos

Os radicais algébricos, apresentam algumas particularidades interessantes do ponto de vista de comparação com a raiz aritmética. Daí, surge a importância de conhecer, manipular e calcular, em alguns casos, tais expressões. Os radicais algébricos detalhados nesse capítulo serão restritos as raízes quadradas e cúbicas. A expressão algébrica contida nesses radicais, também, serão especificas, no caso, a expressões polinomiais de uma única variável, por serem as mais comuns. As técnicas apresentadas, embora aplique-se a radicais algébricos, são mais comumente usadas em radicais aritméticos, porém resolvidas por métodos puramente algébricos.

4.2.1 Raiz Algébrica

Primeiramente, para determinar, entender um radical algébrico precisa-se diferenciar o mesmo de uma raiz aritmética.

Definição 4.2.1. *Seja a um número real positivo e n um número natural maior que 1. Chama-se raiz n-ésima aritmética de a um número real positivo b, tal que $a = b^n$. Assim, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$, [1].*

Definição 4.2.2. *Dado um polinômio $P(x)$ de grau par, sua raiz quadrada consiste em encontrar outros dois polinômios $q(x)$ e $n(x)$ de modo que $P(x) = q(x)^2 + n(x)$, [1].*

Nessa definição, apenas para deixar mais claro, que $q(x)$ é o polinômio raiz e $n(x)$ é o polinômio resíduo. Caso o polinômio resíduo seja nulo, então a raiz quadrada é exata, mas se o resíduo não é nulo, então a raiz quadrada é inexata. Por exemplo, $\sqrt{x^2 + 10x + 25}$ é uma raiz quadrada exata, pois $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$, tal que $\sqrt{x^2 + 10x + 25} = \sqrt{(x + 5)^2} = x + 5$. Enquanto que, $\sqrt{x^2 + 6x + 3}$ é uma raiz quadrada inexata, porém $x^2 + 6x + 3 = x^2 + 6x + 9 - 6 = (x + 3)^2 - 6$, onde $q(x) = x + 3$ e $n(x) = -6$. Para determinar o polinômio resíduo numa raiz quadrada inexata, completa-se quadrados para obter um trinômio quadrado perfeito, no caso. Um outro exemplo, $\sqrt{x^6 + 5x^3 + 15}$ é uma raiz quadrada inexata, porém $x^6 + 5x^3 + 15 = x^6 + 4x^3 + 4 + (x^3 + 11) = (x^3 + 2)^2 + (x^3 + 11)$, onde $q(x) = x^3 + 2$ e $n(x) = x^3 + 11$.

4.2.2 Tipo de Radicais Algébricos

Os casos mais comuns de radicais algébricos são os radicais duplos, que podem ser de uma raiz quadrada ou cúbica. A ideia geral desses radicais consiste em elevar ao quadrado ou ao cubo pra eliminar os radicais e reescrevê-los como uma soma algébrica de radicais simples.

A) Radical Duplo do tipo $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Proposição 14. *Um radical* $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$, *com* $C = \sqrt{A^2 - B}$.

Demonstração

Se $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ *deve ser escrito na forma de radicais simples, então deve ser da forma* $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$. *Logo,*

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$
$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Somando as duas equações,

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{x},$$

elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade,

$$\begin{aligned}(2\sqrt{x})^2 = 4x &= \left(\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}}\right)^2, \\ &= A + \sqrt{B} + A - \sqrt{B} + 2\sqrt{\left(A + \sqrt{B}\right) . \left(A + \sqrt{B}\right)}, \\ &= 2A + 2\sqrt{A^2 - B}.\end{aligned}$$

De onde resulta que $x = \dfrac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$. *De modo análogo, conclui-se que* $y = \dfrac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$. *E ainda, tomando* $C = \sqrt{A^2 - B}$.

Portanto,

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

■

Um modo alternativo para encontrar essa simplificação consiste em encontrar uma fatoração em forma de T.Q.P. para o radicando. Para que $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ possa ser escrito como uma soma algébrica de radicais simples, então $A \pm \sqrt{B}$ deve ser um quadrado perfeito da forma $(\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$. Assim,

$$A \pm \sqrt{B} = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2 = m + n \pm 2\sqrt{mn}.$$

Daí, conclui-se que $A = m + n$ e $\sqrt{B} = 2\sqrt{mn} \Rightarrow B = 4mn$. Em suma, basta então encontrar números reais m,n tais que $A = m+n$ e $B = 4mn$, pois $A\pm\sqrt{B} = (m+n)\pm\sqrt{4mn} = (m + n) \pm 2\sqrt{mn}$.

Exemplo 43. *Expressar em radicais simples* $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

Comentário/Resolução 43. *Tem-se,* $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{11 + \sqrt{72}}$*. Onde,* $A = 11$ *e* $B = 72$*. Como* $C = \sqrt{A^2 - B}$*, segue que*

$$C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{11^2 - 72} = \sqrt{121 - 72} = \sqrt{49} = 7.$$

Daí,

$$\sqrt{11 + \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11 + 7}{2}} + \sqrt{\frac{11 - 7}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}.$$

Portanto, $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$.

Pelo outro método, escrevendo $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{18}}$*, então tem-se que* $18 = 1.18 = 2.9 = 3.6$ *e como* $11 = 2{+}9$ *segue que* $m = 9$ *e* $n = 2$*. Portanto,* $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{18}} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$*. A vantagem está no fato de se trabalhar com números racionais, geralmente, inteiros positivos nos coeficientes desses radicais.*

B) Radical Duplo do tipo $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$

Esse tipo de radical não admite uma fórmula de redução em radicais simples, como no tipo anterior. Entretanto, há um método, quando possível, eficaz nessa redução em radicais simples.

Para que o radical do tipo $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ possa ser escrito a partir de radicais mais simples deve-se ter $A \pm \sqrt{B} = \left(x \pm \sqrt{y}\right)^3$. Daí, existe um método que consiste em transformar a expressão num polinômio do terceiro grau em uma variável, como sugerido por [1]. Porém, entende-se esse método como demasiado inapropriado, nesse momento, devido ao conteúdo requerido.

Tem-se então, o seguinte procedimento:

i. Escrever o radical $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ na forma $\sqrt[3]{a \pm b\sqrt{c}}$. De fato, se $A \pm \sqrt{B} = \left(x \pm \sqrt{y}\right)^3 = x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+(\sqrt{y})^3 = (x^3+3xy)+(3x^2+y)\sqrt{y}$. Tomando $a = x^3+3xy$, $b = 3x^2+y$ e $c = y$, tem-se $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt[3]{a \pm b\sqrt{c}}$.

ii. Basta, por tentativas, tomar uma expressão $(m \pm n\sqrt{c})^3$ que seja idêntica $\sqrt[3]{a \pm b\sqrt{c}}$. É válido obter o resultado por tentativas pois m e n são valores racionais, geralmente inteiros, que resultam em $a \pm b\sqrt{c}$.

Exemplo 44. *Expressar em radicais simples* $\sqrt[3]{-7+\sqrt{50}}$.

Comentário/Resolução 44. *Tem-se,* $\sqrt[3]{-7+\sqrt{50}} = \sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}}$.

Tomando, $\left(m+n\sqrt{2}\right)^3 = (m^3+6mn^2)+(3m^2n+2n^3)\sqrt{2}$, *tem-se* $m^3+6mn^2 = -7$ *e* $3m^2n+2n^3 = 5$.

As duas igualdades serão válidas se $m = -1$ *e* $n = 1$. *De fato,* $m^3+6mn^2 = (-1)^3 + 6.(-1).1 = -1-6 = -7$ *e* $3m^2n+2n^3 = 3.(-1)^2.1+2.1^3 = 3+2 = 5$.

Portanto, $\sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(-1+\sqrt{2}\right)^3} = \sqrt{2}-1$.

Exemplo 45. *Expressar em radicais simples* $\sqrt[3]{60\sqrt{3}-42\sqrt{6}}$.

Comentário/Resolução 45. *Primeiro, tem-se* $\sqrt[3]{60\sqrt{3}-42\sqrt{6}} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}\left(20-14\sqrt{2}\right)} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}}.\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^3}.\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt{3}.\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

De $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, *faz-se a analise separadamente.*

Tomando, $\left(m+n\sqrt{2}\right)^3 = (m^3+6mn^2)+(3m^2n+2n^3)\sqrt{2}$, *tem-se* $m^3+6mn^2 = 20$ *e* $3m^2n+2n^3 = -14$.

As duas igualdades serão válidas se $m = 2$ *e* $n = -1$. *De fato,* $m^3+6mn^2 = 2^3 + 6.2.(-1)^2 = 8+12 = 20$ *e* $3m^2n+2n^3 = 3.(2)^2.(-1)+2.(-1)^3 = -12-2 = -14$.

Assim, $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(2-1\sqrt{2}\right)^3} = 2-\sqrt{2}$.

Portanto, $\sqrt[3]{60\sqrt{3}-42\sqrt{6}} = \sqrt{3}.(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

Embora não seja tão prático quanto a fórmula que reduz um radical duplo do tipo $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, o procedimento para reduzir a expressão $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ é valido, pois só é possível fazê-lo se um radical é resultado do cubo da soma ou diferença de uma soma algébrica do tipo $a \pm b\sqrt{c}$.

4.3 Aplicações nos Exames Militares

36. (EAM-2010) O valor da expressão $\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{(x+1)(x-2)}$ quando $x = 987$ é:

a) 987. b) 988. c) 989. d) 990. e) 991.

Solução 36. *Para calcular o valor numérico basta substituir o valor da variável na expressão. Porém essa questão apresentar um valor numérico muito elevado para se calcular quadrados e cubos. Um procedimento que permite facilitar isso é realizar, antes de tudo, a simplificação dessa fração algébrica.*

Fatorando o numerador, por agrupamento e diferença de dois quadrados, segue $N = x^3+x^2-4x-4 = x^2(x+1)-4(x+1) = (x^2-4)(x+1) = (x+2)(x-2)(x+1)$ *e* $D = (x+1)(x-2)$, *pois já está fatorado. Então, percebe-se que* $mdc(N,D) = (x+1)(x-2)$.

$$\frac{x^3+x^2-4x-4}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x-2)(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)(x-2)}} = x+2.$$

Portanto, o valor numérico é, $x+2 = 987+2 = 989$.

*Alternativa, (**c**).*

37. (CM/Fortaleza-1983) Se $\dfrac{a}{b} = 5$ e $\dfrac{c}{d} = \dfrac{1}{2}$, então o valor de $\dfrac{20ac-9bd}{7ac+3db}$ é

a) -2. b) -1. c) 0. d) 1. e) 2.

Solução 37. *Fatorando o numerador e o denominador por evidenciação de db, tem-se* $N = 20ac-9bd = db\left(\dfrac{20ac}{bd}-9\right) = db\left(20\dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d}-9\right)$ *e* $D = 7ac+3bd = db\left(\dfrac{7ac}{bd}+3\right) = db\left(7\dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d}+3\right)$, *com* $mdc(N,D) = db$. *Assim,*

$$\frac{20ac-9bd}{7ac+3db} = \frac{\cancel{db}\left(20\frac{a}{b}\frac{c}{d}-9\right)}{\cancel{db}\left(7\frac{a}{b}\frac{c}{d}+3\right)} = \frac{20\frac{a}{b}\frac{c}{d}-9}{7\frac{a}{b}\frac{c}{d}+3}.$$

Logo, $\dfrac{20\frac{a}{b}\frac{c}{d}-9}{7\frac{a}{b}\frac{c}{d}+3} = \dfrac{20.5.\frac{1}{2}-9}{7.5.\frac{1}{2}+3} = \dfrac{50-9}{17,5+3} = \dfrac{41}{20,5} = 2.$

Uma outra opção, consiste em escrever uma variável em função da outra, $\dfrac{a}{b} = 5 \Rightarrow a = 5b$ *e* $\dfrac{c}{d} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow c = \dfrac{d}{2}$. *Substituindo, os valores de a e c na fração inicial:*

$$\frac{20ac-9bd}{7ac+3db}=\frac{20.5b.\dfrac{d}{2}-9bd}{7.5b.\dfrac{d}{2}+3bd}=\frac{50bd-9bd}{17,5bd+3bd}=\frac{41\cancel{bd}}{20,5\cancel{bd}}=2.$$

*Alternativa, (**e**).*

38. (EsSA-1990) Simplificando a fração $\dfrac{a^2+7a+12}{a^2+6a+9}$, encontramos:

a) $\dfrac{a+4}{a+3}$. b) $\dfrac{12}{9}$. c) $\dfrac{19}{15}$. d) $\dfrac{a+7}{a+6}$. e) $\dfrac{4}{3}$.

Solução 38. *Fatorando o numerador, tem-se que $N=a^2+7a+12$ não é um T.Q.P., pois $(7a)^2=49a^2\neq 4.a^2.12=48a^2$. Assim, sua fatoração é um produto de Stevin do tipo $(x+m)(x+n)$ tal que $12=1.12=3.4=2.6$ e que $7=3+4$, logo $m=3$ e $n=4$ ou vice-versa; então, $N=a^2+7a+12=(a+3)(a+4)$. E ainda, fatorando o denominador, $D=a^2+6a+9=(\sqrt{a^2}+\sqrt{9})^2=(a+3)^2$, pois é um T.Q.P., uma vez que $(6a)^2=36a^2=4.a^2.9$. Daí, $mdc(N,D)=a+3$.*

$$\frac{a^2+7a+12}{a^2+6a+9}=\frac{(a+3)(a+4)}{(a+3)^2}=\frac{\cancel{(a+3)}(a+4)}{(a+3)^{\cancel{2}}}=\frac{a+4}{a+3}.$$

*Alternativa, (**a**).*

39. (CN-1983) $\dfrac{(zx^2+y^2z+2xyz)\,(x^2-y^2)}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$ é igual a:

a) $z(x+y)$. b) $z(x-y)$. c) $zx+y$. d) $zx-y$. e) $z+y$.

Solução 39. *Fatorando os fatores do numerador, sendo um por evidenciação e T.Q.P. e o outro por diferença de dois quadrados. E considerando que denominador, resulta de um cubo da soma, então,*

$$\begin{aligned}\frac{(zx^2+y^2z+2xyz)\,(x^2-y^2)}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}&=\frac{z\,(x^2+y^2+2xy)\,(x+y)(x-y)}{(x+y)^3},\\&=\frac{z(x+y)^2(x+y)(x-y)}{(x+y)^3},\\&=\frac{z\cancel{(x+y)^3}(x-y)}{\cancel{(x+y)^3}}=z(x-y).\end{aligned}$$

*Alternativa, (**b**).*

40. (EsSA-1991) Simplificando a fração algébrica $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-x}$, para $x\neq 0$, $x\neq 1$ e $x\neq -1$, obtemos:

a) $\dfrac{x}{x+1}$. b) $\dfrac{1}{x-1}$. c) $\dfrac{x-1}{x}$. d) $\dfrac{x-1}{x+1}$. e) $\dfrac{1}{x+1}$.

Solução 40. *Fatorando o numerador por agrupamento e o denominador por evidenciação. Então,*

$$\begin{aligned}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-x} &= \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x(x^2-1)},\\ &= \frac{(x^2-1)(x-1)}{x(x^2-1)},\\ &= \frac{\cancel{(x^2-1)}(x-1)}{x\cancel{(x^2-1)}} = \frac{x-1}{x}.\end{aligned}$$

*Alternativa, (**c**).*

41. (CN-1991) Simplificando a expressão abaixo, para os valores de a, b e c que não anulam o denominador, obtém-se:

$$\frac{(a^2-b^2-c^2-2bc)(a+b-c)}{(a+b+c)(a^2+c^2-2ac-b^2)}$$

a) 1. b) 2. c) 3. d) $a+b+c$. e) $a-b+c$.

Solução 41. *Primeiramente, agrupando os T.Q.P.,*

$$\frac{(a^2-b^2-c^2-2bc)(a+b-c)}{(a+b+c)(a^2+c^2-2ac-b^2)} = \frac{[a^2-(b^2+c^2+2bc)](a+b-c)}{(a+b+c)[(a^2+c^2-2ac)-b^2]}.$$

Fatorando os trinômios, seguido da fatoração por diferença de dois quadrados no numerador e denominador:

$$\begin{aligned}\frac{(a^2-b^2-c^2-2bc)(a+b-c)}{(a+b+c)(a^2+c^2-2ac-b^2)} &= \frac{[a^2-(b+c)^2](a+b-c)}{(a+b+c)[(a-c)^2-b^2]},\\ &= \frac{(a-b-c)(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(a-c-b)(a-c+b)},\\ &= \frac{(a-b-c)\cancel{(a+b+c)}\cancel{(a+b-c)}}{\cancel{(a+b+c)}(a-c-b)\cancel{(a-c+b)}},\\ &= \frac{a-b-c}{a-c-b} = 1.\end{aligned}$$

*Alternativa, (**a**).*

42. (CM/Rio de Janeiro-2007) A forma simplificada da expressão

$$\frac{a^2c-(b^2c+b^2d)+a^2d}{c(a^2+b^2)+2(abc+abd)+d(a^2+b^2)}.$$

a) $\dfrac{a+b}{ab}$. b) $\dfrac{c-d}{c+d}$. c) $\dfrac{a-b}{ab}$. d) $\dfrac{a-b}{a+b}$. e) $\dfrac{d+c}{dc}$.

Solução 42. *Fatorando o numerador e denominador por agrupamento, seguido por uma fatoração por diferença de dois quadrados e T.Q.P., respectivamente,*

$$\begin{aligned}\frac{a^2c-(b^2c+b^2d)+a^2d}{c(a^2+b^2)+2(abc+abd)+d(a^2+b^2)} &= \frac{a^2(c+d)-b^2(c+d)}{(a^2+b^2)(c+d)+2ab(c+d)},\\ &= \frac{(a^2-b^2)\cancel{(c+d)}}{\cancel{(c+d)}(a^2+b^2+2ab)},\\ &= \frac{(a^2-b^2)}{(a^2+b^2+2ab)},\\ &= \frac{\cancel{(a+b)}(a-b)}{(a+b)^{\cancel{2}}} = \frac{a-b}{a+b}.\end{aligned}$$

*Alternativa, (**d**).*

43. (CN - 2016) Analise as afirmativas abaixo:

I. Se $\dfrac{x+y+z}{3}=7$ e $\dfrac{x+y+z+t}{4}=5$, então $t=2$.

II. Se $\dfrac{16+20+x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}}{12}=8$, então $\dfrac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}}{10}=6$.

III. Se $\dfrac{x+y+z}{3}=a$ e $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}=b$, então $\dfrac{xy+xz+yz}{3}=\dfrac{3a^2-b}{2}$.

Assinale a opção correta.

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

b) Apenas a afirmativa III é verdadeira.

c) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

d) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

Solução 43. *Considerando que*

$$\frac{x+y+z+t}{4}=5 \Rightarrow \frac{3}{4}.\frac{x+y+z+t}{3}=5 \Rightarrow \frac{3}{4}.\left(\frac{x+y+z}{3}+\frac{t}{3}\right)=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}.\left(7+\frac{t}{3}\right)=5 \Rightarrow 7+\frac{t}{3}=5.\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{t}{3}=\frac{20}{3}-7 \Rightarrow \frac{t}{3}=\frac{20-21}{3} \Rightarrow t=-1,$$

falsa.

De

$$\frac{16+20+x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}}{12}=8 \Rightarrow \frac{36}{12}+\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}}{12}=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}}{12}=8 \Rightarrow \frac{12}{10}.\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}}{12}=5.\frac{12}{10}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}}{10}=6,$$

verdadeira.

E, ainda,

$$\frac{x+y+z}{3}=a \Rightarrow \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2=a^2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)}{9}=a^2.$$

Como, $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}=b$, *segue*

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{9}+\frac{2(xy+xz+yz)}{9}=a^2 \Rightarrow \frac{1}{3}b+\frac{2}{3}.\frac{xy+xz+yz}{3}=a^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}.\frac{xy+xz+yz}{3}=\frac{3a^2-b}{3}\Rightarrow \frac{xy+xz+yz}{3}=\frac{3a^2-b}{\cancel{3}}.\frac{\cancel{3}}{2}=\frac{3a^2-b}{2},$$

verdadeira.

Alternativa, (***c***).

44. (CN-1984) Se $\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}+\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{xz}+\dfrac{z}{xy}=\dfrac{8}{3}$ e $x+y+z=16$, o produto xyz é:

a) 192. b) 48. c) 32. d) 108. e) 96.

Solução 44. *Para efetuar a soma das frações heterogêneas da primeira igualdade, deve-se igualar os denominadores. Sendo* $D_1=x$, $D_2=y$, $D_3=z$, $D_4=yz$, $D_5=xz$ *e* $D_6=xy$. *Então,* $mmc(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)=xyz$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
\frac{8}{3}&=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy},\\
&=\frac{2}{x}.\frac{yz}{yz}+\frac{2}{y}.\frac{xz}{xz}+\frac{2}{z}.\frac{xy}{xy}+\frac{x}{yz}.\frac{x}{x}+\frac{y}{xz}.\frac{y}{y}+\frac{z}{xy}.\frac{z}{z},\\
&=\frac{2yz}{xyz}+\frac{2xz}{xyz}+\frac{2xy}{xyz}+\frac{x^2}{xyz}+\frac{y^2}{xyz}+\frac{z^2}{xyz},\\
&=\frac{2yz+2xz+2xy+x^2+y^2+z^2}{xyz}.
\end{aligned}$$

Como $2yz+2xz+2xy+x^2+y^2+z^2=2z(y+x)+(2xy+x^2+y^2)+z^2=2z(y+x)+(x+y)^2+z^2=[(x+y)+z]^2=(x+y+z)^2$, *então,*

$$\frac{8}{3}=\frac{(x+y+z)^2}{xyz}\Rightarrow\frac{8}{3}=\frac{16^2}{xyz}\Rightarrow\frac{8}{3}=\frac{256}{xyz}\Rightarrow\frac{xyz}{\cancel{256}}.\cancel{256}=\frac{3}{8}.256\Rightarrow xyz=96.$$

Alternativa, (***e***).

45. (CN-1982) $x^2-\dfrac{4x}{x-3}$ dividido por $x+\dfrac{4x^2+4x}{x^2-2x-3}$ para $x\neq 3$ e $x\neq -1$ dá

a) $x+1$.   b) $x-4$.   c) $x+4$.   d) x^2-3.   e) $x-1$.

Solução 45. *Efetuando a diferença* $x^2-\dfrac{4x}{x-3}$, *onde* $D_1=x-3$ *e* $mmc(1,D_1)=x-3$. *Então,* $x^2-\dfrac{4x}{x-3}=x^2.\dfrac{x-3}{x-3}-\dfrac{4x}{x-3}=\dfrac{x^3-3x^2}{x-3}-\dfrac{4x}{x-3}=\dfrac{x^3-3x^2-4x}{x-3}$.
E somando $x+\dfrac{4x^2+4x}{x^2-2x-3}$, *onde* $D_2=x^2-2x-3$ *e* $mmc(1,D_2)=x^2-2x-3$. *Daí,* $x+\dfrac{4x^2+4x}{x^2-2x-3}=x.\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x-3}+\dfrac{4x^2+4x}{x^2-2x-3}=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-2x-3}+\dfrac{4x^2+4x}{x^2-2x-3}=\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-2x-3}$.
Assim, o quociente vale:

$$\begin{aligned}\frac{x^3-3x^2-4x}{x-3}:\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-2x-3}&=\frac{x^3-3x^2-4x}{x-3}.\frac{x^2-2x-3}{x^3+2x^2+x},\\&=\frac{\cancel{x}(x^2-3x-4)}{x-3}.\frac{x^2-2x-3}{\cancel{x}(x^2+2x+1)},\\&=\frac{x^2-3x-4}{x-3}.\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x+1}.\end{aligned}$$

Como x^2-3x-4 *e* x^2-2x-3 *não são T.Q.P., mas sim produtos de Stevin na forma* $(x+m)(x+n)$, *tem-se que* $-4=2.(-2)=1.(-4)=4.(-1)$ *e* $-3=1-4$, *então* $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$. *E,* $-3=1.(-3)=3.(-1)$ *e* $-2=1-3$, *com* $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{x^3-3x^2-4x}{x-3}:\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-2x-3}&=\frac{(x+1)(x-4)}{\cancel{x-3}}.\frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{x^2+2x+1},\\&=\frac{(x-4)(x+1)^2}{x^2+2x+1},\\&=\frac{(x-4)\cancel{(x+1)^2}}{\cancel{(x+1)^2}}=x-4.\end{aligned}$$

*Alternativa, (**b**).*

46. (CN-1994) Efetuando-se $\dfrac{x}{2+y}+\dfrac{4-4x+x^2}{y^2+4y+4}:\dfrac{2-x}{2+y}$, encontra-se:

a) $\dfrac{x}{y+2}$.   b) $\dfrac{2}{y+2}$.   c) $\dfrac{2-x}{y+2}$.   d) $\dfrac{x+2}{y+2}$.   e) $\dfrac{2x}{y+2}$.

Solução 46. *Primeiramente, deve-se calcular o quociente,*

$$\frac{4-4x+x^2}{y^2+4y+4}:\frac{2-x}{2+y}=\frac{4-4x+x^2}{y^2+4y+4}.\frac{2+y}{2-x}.$$

Fatorando os T.Q.P do numerador e denominador da primeira fração,

$$\begin{aligned}
\frac{4-4x+x^2}{y^2+4y+4} : \frac{2-x}{2+y} &= \frac{4-4x+x^2}{y^2+4y+4}.\frac{2+y}{2-x},\\
&= \frac{(2-x)^2}{(y+2)^2}.\frac{2+y}{2-x},\\
&= \frac{(2-x)\cancel{(2-x)}}{(y+2)\cancel{(y+2)}}.\frac{\cancel{2+y}}{\cancel{2-x}} = \frac{2-x}{y+2}.
\end{aligned}$$

Agora efetuando a soma, $\dfrac{x}{2+y} + \dfrac{2-x}{y+2} = \dfrac{x+2-x}{y+2} = \dfrac{2}{y+2}.$

*Alternativa, (**b**).*

47. (EPCAr-2000) A expressão $\dfrac{1-x+\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-x^2}}$ é equivalente a

a) x^2-1. b) $(x-1)^2$. c) $(x+1)^2$. d) x^2+1.

Solução 47. *Efetuando,* $1-x+\dfrac{1-x}{1+x} = (1-x).\dfrac{1+x}{1+x} + \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1-x^2}{1+x} + \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2-x-x^2}{1+x}.$

Seguindo com, $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x}.\dfrac{1+x}{1+x} + \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{x+1}{1-x^2} + \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{x+2}{1-x^2}.$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{1-x+\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x^2-1}} &= \frac{\dfrac{2-x-x^2}{1+x}}{\dfrac{x+2}{1-x^2}},\\
&= \frac{2-x-x^2}{1+x}.\frac{1-x^2}{x+2},\\
&= \frac{(x-1)\cancel{(x+2)}}{\cancel{1+x}}.\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+2}},\\
&= (x-1)^2.
\end{aligned}$$

*Alternativa, (**b**).*

48. (EPCAr-2003) Se a e b são números reais não nulos, então, simplificando a expressão $(a^2b+ab^2).\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$, obtém-se:

a) $a+b$. b) a^2+ab+b^2. c) a^2+b^2. d) $b-a$.

Solução 48. *Resolvendo as diferenças,* $\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}=\dfrac{b^3-a^3}{a^3b^3}=\dfrac{(b-a)(b^2+ab+b^2)}{a^3b^3}$ *e* $\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\dfrac{(b-a)(a+b)}{a^2b^2}$*. Daí,*

$$\begin{aligned}(a^2b+ab^2).\frac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}} &= (a^2b+ab^2).\frac{\dfrac{(b-a)(b^2+ab+b^2)}{a^3b^3}}{\dfrac{(b-a)(a+b)}{a^2b^2}},\\ &= (a^2b+ab^2).\frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+b^2)}{a^3b^3}.\frac{a^2b^2}{\cancel{(b-a)}(a+b)},\\ &= ab\cancel{(a+b)}.\frac{b^2+ab+b^2}{a^3b^3}.\frac{a^2b^2}{\cancel{a+b}},\\ &= \frac{b^2+ab+b^2}{\cancel{a^3b^3}}.\cancel{a^3b^3}=a^2+ab+b^2.\end{aligned}$$

*Alternativa, (**b**).*

49. (ITA-2014) Sabendo que $senx=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$, $a\neq 0$ e $b\neq 0$, um possível valor para $cossec2x-\dfrac{1}{2}tgx$ é

a) $\dfrac{a-b}{ab}$. b) $\dfrac{a+b}{2ab}$. c) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$. d) $\dfrac{a^2+b^2}{4ab}$. e) $\dfrac{a^2-b^2}{4ab}$.

Solução 49. *A questão aproveita para escrever uma expressão transcendente como uma fração algébrica. Basta, então, encontrar as frações algébricas que representam cossec2x e tgx.*

Da Relação Fundamental da Trigonometria, tem-se
$sen^2x+cos^2x=1\Rightarrow\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2+cos^2x=1\Rightarrow cos^2x=1-\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2\Rightarrow cos^2x=1-\dfrac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\Rightarrow cos^2x=1-\dfrac{4a^2b^2}{b^4+a^4+2a^2b^2}\Rightarrow cos^2x=\dfrac{b^4+a^4+2a^2b^2-4a^2b^2}{b^4+a^4+2a^2b^2}\Rightarrow cos^2x=\dfrac{b^4+a^4-2a^2b^2}{b^4+a^4+2a^2b^2}=\dfrac{(b^2-a^2)^2}{(b^2+a^2)^2}\Rightarrow cosx=\sqrt{\dfrac{(b^2-a^2)^2}{(b^2+a^2)^2}}\Rightarrow cosx=\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$.

E ainda, $tgx=\dfrac{senx}{cosx}$ *e* $cossec2x=\dfrac{1}{2senxcosx}$*. Daí,*

$$cossec2x-\frac{1}{2}tgx=\frac{1}{2senxcosx}-\frac{1}{2}\frac{senx}{cosx}=\frac{1}{2.\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)}-\frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)}{\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)}.$$

Agora, basta simplificar a expressão algébrica resultante,

$$\begin{aligned}
cossec2x - \frac{1}{2}tgx &= \frac{1}{2.\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)}{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)},\\
&= \frac{1}{\frac{4ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}} - \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}ab}{\cancel{a^2+b^2}}\right)\left(\frac{\cancel{a^2+b^2}}{a^2-b^2}\right),\\
&= \frac{(a^2+b^2)^2}{4ab(a^2-b^2)} - \frac{ab}{a^2-b^2},\\
&= \frac{(a^2+b^2)^2}{4ab(a^2-b^2)} - \frac{ab}{a^2-b^2}.\frac{4ab}{4ab},\\
&= \frac{(a^2+b^2)^2}{4ab(a^2-b^2)} - \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)4ab},\\
&= \frac{(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2}{4ab(a^2-b^2)},\\
&= \frac{a^4+b^4-2a^2b^2}{4ab(a^2-b^2)},\\
&= \frac{(a^2-b^2)^{\cancel{2}}}{4ab\cancel{(a^2-b^2)}} = \frac{a^2-b^2}{4ab}.
\end{aligned}$$

*Alternativa, (**e**).*

50. (CM/Rio de Janeiro-2006) Simplificando $\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}} + \frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}$, encontramos:

a) 0. b) 1. c) $2a^2$. d) $\sqrt{a^2+1}$. e) $\sqrt{a^2-1}$.

Solução 50. *Tem-se,*

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}} &= \frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}.\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}},\\
&= \frac{\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}\right)^2}{\left(\sqrt{a^2+1}\right)^2 - \left(\sqrt{a^2-1}\right)^2},\\
&= \frac{a^2+1+a^2-1+2\sqrt{(a^2+1)(a^2-1)}}{a^2+1-(a^2-1)},\\
&= \frac{\cancel{2}a^2+\cancel{2}\sqrt{a^4-1}}{\cancel{2}},\\
&= a^2+\sqrt{a^4-1}.
\end{aligned}$$

Como, $\dfrac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}} = \dfrac{1}{a^2+\sqrt{a^4-1}}$, *pois é o inverso da primeira fração, segue que*

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}} &= \frac{1}{a^2+\sqrt{a^4-1}}.\frac{a^2-\sqrt{a^4-1}}{a^2-\sqrt{a^4-1}},\\ &= \frac{a^2-\sqrt{a^4-1}}{(a^2)^2-\left(\sqrt{a^4-1}\right)^2},\\ &= \frac{a^2-\sqrt{a^4-1}}{a^4-(a^4-1)},\\ &= a^2-\sqrt{a^4-1}.\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}+\dfrac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}} = a^2+\sqrt{a^4-1}+a^2-\sqrt{a^4-1} = 2a^2$. *Alternativa, (**c**).*

51. (CN-2004) Um aluno resolvendo uma questão de múltipla escolha chegou ao seguinte resultado $\sqrt[4]{\left(49+20\sqrt{6}\right)^2}$, no entanto as opções estavam em números decimais e pedia-se a mais próxima do valor encontrado para resultado, e, assim sendo, procurou simplificar esse resultado, a fim de melhor estimar a resposta. Percebendo que o radicando da raiz de índice 4 é quarta potência de uma soma de dois radicais simples, concluiu, com maior facilidade, que a opção para a resposta foi

a) $3,00$. b) $3,05$. c) $3,15$. d) $3,25$. e) $3,35$.

Solução 51. *Tem-se,* $\sqrt[4]{\left(49+20\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{49+20\sqrt{6}} = \sqrt{49+\sqrt{2400}}$. *Onde,* $A=49$ *e* $B=2400$. *Como* $C=\sqrt{A^2-B}$, *segue que*

$$C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{49^2-2400}=\sqrt{2401-2400}=\sqrt{1}=1.$$

Daí,

$$\sqrt{49+\sqrt{2400}}=\sqrt{\frac{49+1}{2}}+\sqrt{\frac{49-1}{2}}=\sqrt{\frac{50}{2}}+\sqrt{\frac{48}{2}}=\sqrt{25}+\sqrt{24}=5+\sqrt{24}.$$

Agora, $\sqrt{5+\sqrt{24}}$. *Sendo,* $A=5$ *e* $B=24$, *com* $C=\sqrt{A^2-B}$, *segue que*

$$C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{5^2-24}=\sqrt{25-24}=\sqrt{1}=1.$$

Daí,

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{5+1}{2}}+\sqrt{\frac{5-1}{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}+\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Portanto, $\sqrt{3}+\sqrt{2}=1,73+1,41=3,14,$ *aproximadamente.*

Alternativa, $(\boldsymbol{c})$.

52. (ITA-2005) Sobre o número $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$ é correto afirmar que

a) $x\in]0,2[$.

b) x é racional.

c) $\sqrt{2x}$ é irracional.

d) x^2 é irracional.

e) $x\in]2,3[$.

Solução 52. *Tem-se, primeiramente,* $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-\sqrt{48}}$. *Onde,* $A=7$ *e* $B=48$. *Como* $C=\sqrt{A^2-B}$, *segue que*

$$C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{7^2-48}=\sqrt{49-48}=\sqrt{1}=1.$$

Daí,

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}-\sqrt{\frac{7-1}{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}-\sqrt{\frac{6}{2}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}.$$

Assim, $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

Portanto, $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}=2$

Alternativa, $(\boldsymbol{b})$.

53. (CN-1984) $\sqrt{3+2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}-\sqrt{3-2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ é igual a:

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Solução 53. *Tem-se* $\sqrt{3+2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}-\sqrt{3-2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, *pois* $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(\sqrt{2})^3}=\sqrt{2}$.

De, $\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}=\sqrt{m}\pm\sqrt{n}$. *Como,* $2=1.2$ *e* $3=1+2$, *segue que* $m=1$ *e* $n=2$. *Assim,* $\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pm\sqrt{1}=\sqrt{2}\pm1$.

Portanto, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2.$

Alternativa, $(\boldsymbol{b})$.

54. (CN-1982) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$ é igual a:

a) $1+\sqrt{7}$. b) $1+\sqrt{6}$. c) $1+\sqrt{5}$. d) $1+\sqrt{3}$. e) $1+\sqrt{2}$.

Solução 54. *Tem-se,* $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$.

Tomando, $\left(m+n\sqrt{3}\right)^3 = (m^3+9mn^2)+(3m^2n+3n^3)\sqrt{3}$, *tem-se* $m^3+9mn^2 = 10$ *e* $3m^2n+3n^3 = 6$.

As duas igualdades serão válidas se $m=1$ *e* $n=1$. *De fato,* $m^3+9mn^2 = 1^3+9.1.1^2 = 1+9 = 10$ *e* $3m^2n+3n^3 = 3.1^2.1+3.1^3 = 3+3 = 6$.

Portanto, $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\left(1+1\sqrt{3}\right)^3} = \sqrt{3}+1$.

*Alternativa, (**d**).*

55. (CN-2011) O número real $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ é igual a

a) $5-\sqrt{3}$.

b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

c) $2-\sqrt{3}$.

d) $\sqrt{13-3\sqrt{3}}$.

e) 2.

Solução 55. *Tem-se,* $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$.

Tomando, $\left(m+n\sqrt{3}\right)^3 = (m^3+9mn^2)+(3m^2n+3n^3)\sqrt{3}$, *tem-se* $m^3+9mn^2 = 26$ *e* $3m^2n+3n^3 = -15$.

As duas igualdades serão válidas se $m=2$ *e* $n=-1$. *De fato,* $m^3+9mn^2 = 2^3+9.2.(-1)^2 = 8+18 = 26$ *e* $3m^2n+3n^3 = 3.2^2.(-1)+3.(-1)^3 = -12-3 = -15$.

Portanto, $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\left(2-1\sqrt{3}\right)^3} = 2-\sqrt{3}$.

*Alternativa, (**c**).*

Capítulo 5

Equações e Sistema de Equações

Na Matemática, resolver um problema, geralmente, consiste em resolve-lo a partir de uma equação ou conjunto de equações. Em suma, entender o conceito de equação e sua aplicabilidade em resoluções de problemas, constitui num dos pilares do estudo da Álgebra. Para o entendimento inicial, segue uma situação problema que reflete muito bem uma noção intuitiva, a ideia proposta por [5] mostra uma balança de pratos iguais equilibrada.

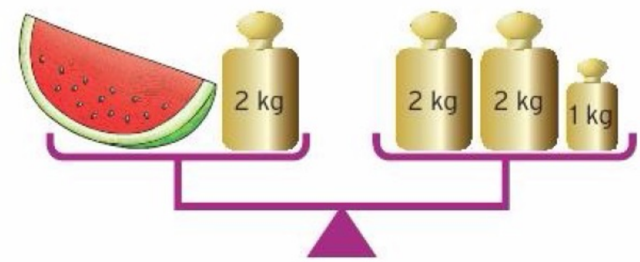


Figura 5.1: Balança de pratos iguais

Quantos quilogramas tem o pedaço de melancia? Uma questão bem simples, 3 kg, pois retirando-se de cada lado da balança "pesos" de 2kg, resulta num equilíbrio entre o pedaço de melancia e os "pesos"que somam 3 kg. Problemas desse tipo podem ser solucionados pelo equacionamento do mesmo, uma vez que resultaria numa equação do tipo $x + 2 = 5$, onde x é variável, cuja denominação adotada, por se tratar de uma equação, é **incógnita**(valor desconhecido a ser calculado) e representa o "peso" do pedaço de melancia a ser determinado no problema proposto.

Definição 5.0.1. *Uma equação é uma sentença matemática que expressa igualdade entre duas expressões algébricas [5].*

Definição 5.0.2. *Uma equação em linguagem matemática é uma sentença aberta expressa por uma igualdade [12].*

Definição 5.0.3. *Uma identidade é uma igualdade que se verifica para todos os valores das variáveis. Uma equação é uma igualdade que se verifica apenas para alguns valores das variáveis [9].*

Por exemplo, a expressão $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$ é uma identidade, pois para todo valor de x a igualdade é sempre verdadeira, enquanto que na expressão $x + 2 = 6 - x$, esta é verdadeira apenas se $x = 2$.

Uma equação pode ser classificada de diversas maneiras. De acordo com o critério adotado, as classificações mais interessantes foram apresentadas por [1]. Segue então algumas dessas classificações:

I. **Por sua estrutura**, nessa perspectiva uma equação se encontra em dois subgrupos: equações algébricas ou transcendentes. Uma equação algébrica é aquela formada apenas por expressões algébricas enquanto que uma equação transcendente apresenta pelo menos uma expressão transcendente. Por exemplo, a equação $2x^3 + 6x - 9 = 10x - 1$ é algébrica, mas a equação $2^x = 2x$ é transcendente.

II. **Por seu conjunto solução**, o conjunto solução de uma equação é o conjunto que possui como elementos os valores que solucionam a referida equação. Logo, nesse aspecto uma equação pode ser classificada em compatível, incompatível e equivalente. Uma equação é compatível se seu conjunto solução apresenta pelo menos um elemento (uma solução), uma equação é incompatível se seu conjunto solução é vazio (nenhuma solução) e uma equação é equivalente se apresenta o mesmo conjunto solução que outra equação. Por exemplo, $x^2 - 9 = 0$ é compatível, $\dfrac{5}{x-2} + 2x = 4 + \dfrac{5}{x-2}$ é incompatível e as equações $3x = 15$ e $15x - 8 = 12x + 7$ são equivalentes.

III. **Por sua quantidade de incógnitas**, uma dada equação pode apresentar de uma a varias incógnitas. Por exemplo, a equação $x + 2 = 5$ apresenta uma incógnita, mas a equação $2x + 4 = 5 - y$ apresenta duas incógnitas e a equação $x + y + 2z = 0$ apresenta três incógnitas.

IV. **Por seu grau**, de acordo com grau da incógnita, uma equação pode ser do 1º grau, 2º grau e assim, por diante. Por exemplo, $x + 2 = 5$ é do 1º grau, $2x^3 + 6x - 9 = 10x - 1$ é do 2º grau e a equação $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ é do 4º grau.

Um aspecto mais importante do que classificar uma equação, está em soluciona-la. Esse é, na verdade, o verdadeiro motivo do estudo de qualquer equação: a buscar para encontrar sua solução. Para resolver uma determinada equação, embora haja certas particularidades em determinados grupos de equações, há alguns princípios gerais que podem ser aplicados nos mais diversos tipos de equações. Esses princípios foram apresentados por [9] e apresenta-los, tornará esse estudo mais claro. **Princípios gerais para solução de uma equação**:

A) **Princípio da transposição de termos**, numa equação pode-se transpor um termo de um membro da equação para outro, desde que o multiplique por -1. Considerando que igualdade separa uma equação em dois membros, isto é, os termos a esquerda da igualdade(1º membro) e os termos a direita da igualdade(2º membro) ou vice-versa uma vez que a igualdade goza da propriedade reflexiva, isto é, se $a = b$ então $b = a$.

   Em suma, $a + b = c \Leftrightarrow a = c - b$.

B) **Princípio da multiplicação mútua**, uma equação não se altera quando se multiplicam ambos os membros por um mesmo número diferente de zero.

   Em suma, se $k \neq 0$, $a = b \Leftrightarrow ka = kb$.

C) **Princípio do fator comum**, se $AB = AC$, então $A = 0$ ou $B = C$. Esse princípio auxilia resolver equações onde há um fator comum aos dois membros. Estas equações se desdobram em outras duas.

Por exemplo, a equação $3x - 1 = 5$ pode ser resolvida pelos dois primeiros princípios, como pode-se verificar: $3x - 1 = 5 \Rightarrow 3x = 5 + 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{3}}.\cancel{3}x = 6.\frac{1}{3} \Rightarrow x = 2$. Entretanto, esses dois princípios não são suficientes para resolver a equação $2x^2 + 7x + 5 = 13x + 5$, isto é, $2x^2 + 7x + 5 = 13x + 5 \Rightarrow 2x^2 + 7x - 13x = 5 - 5 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}.\cancel{2}(x^2 - 3x) = 0.\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 3x = 0$, porém fatorando e aplicando o terceiro princípio, segue $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. Pode ser que os três princípios não sejam suficientes para resolver um tipo especifico de equação, porém tais princípios são suficientes pelo menos para adequar esse certo tipo de equação para a aplicação do método especifico de resolução. Metaforicamente, seria ter um revolver com três balas que não são suficientes para matar sua caça, entretanto elas são suficientes para ferir o animal a ponto de que outra arma, mais potente, o mate em um outro momento.

Para efeitos práticos, as equações serão detalhadas em equacionamentos do 1º e 2º graus e, ainda, sistemas restritos a duas incógnitas com duas equações, uma vez que sistemas contendo mais incógnitas e equações fogem à proposta do presente trabalho.

5.1 Equação do 1º Grau

5.1.1 Noção de equação do 1º Grau

Uma equação do 1º Grau, conhecida também por equação linear é uma igualdade do tipo A = B, onde A e B são expressões algébricas tal que uma delas é de grau um e a outra de grau menor ou igual a um, [10]. Por exemplo, $3x + 7 = y + 4$ é uma equação do 1º Grau com duas incógnitas. A seguir será apresentado o conceito de equação do 1º Grau em uma incógnita.

Definição 5.1.1. *Chama-se equação do 1º Grau ou Linear, em uma incógnita, toda equação da forma $ax + b = 0$, [1].*

Por exemplo, $3x + 5 = 20$ e $\dfrac{x-4}{6} = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{4}$ são equações do 1º Grau.

5.1.2 Solução de uma equação do 1º Grau

Para solucionar uma equação na forma geral, primeiro aplica-se o princípio da transposição de termos de uma equação,

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = 0 - b \Rightarrow ax = -b.$$

Depois, multiplica-se por $\dfrac{1}{a}$, pelo princípio da multiplicação mútua, com $a \neq 0$,

$$\cancel{a}x\frac{1}{\cancel{a}} = -b\frac{1}{a} \Rightarrow x = \frac{-b}{a}.$$

Sobre a solução da equação geral pode-se fazer uma analise da mesma e considerar os quatro casos abaixo, como proposto por [10]:

i. $a \neq 0$ e $b \neq 0$: a equação possui uma única solução, no caso, $x = \frac{-b}{a}$; logo seu conjunto solução é $\mathrm{S} = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$;

ii. $a \neq 0$ e $b = 0$: a equação admite somente a solução $x = 0$; logo seu conjunto solução é $\mathrm{S} = \{0\}$;

iii. $a = 0$ e $b \neq 0$: a equação não admite solução nenhuma, pois não existe um número que multiplicado por zero não resulte em zero; logo seu conjunto solução é $\mathrm{S} = \varnothing$;

iv. $a = 0$ e $b = 0$: a equação admite infinitas soluções, pois todo número multiplicado por zero resulta em zero; logo seu conjunto solução é $\mathrm{S} = \mathbb{U} = \mathbb{R}$.

Embora pareça estranho os dois últimos casos, eles são bastante plausíveis. Por exemplo, nas equações $7x - 4x - 1 = x + 2x + 3$ não admite nenhuma solução, pois:

$$7x-4x-1 = x+2x+3 \Rightarrow 3x-1 = 3x+3 \Rightarrow 3x = 2x+3+1 \Rightarrow 3x = 3x+4 \Rightarrow 3x-3x = 4 \Rightarrow$$

$$0x = 4.$$

A equação $8x - 4x + 2 = x + 3x + 2$, admite infinitas soluções, pois:

$$8x - 4x + 2 = x + 3x + 2 \Rightarrow 4x + 2 = 4x + 2 \Rightarrow 4x = 4x + 2 - 2 \Rightarrow 4x = 4x + 0 \Rightarrow$$

$$4x - 4x = 0 \Rightarrow 0x = 0.$$

Exemplo 46. *Resolva a equação* $\frac{x+3}{4} = \frac{x-2}{3}$.

Comentário/Resolução 46. *Tem-se,*

$$\frac{x+3}{4} = \frac{x-2}{3} \Rightarrow 12.\frac{x+3}{4} = \frac{x-2}{3}.12 \Rightarrow 3(x+3) = 4(x-2) \Rightarrow 3x+9 = 4x-8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 = 4x - 3x - 8 \Rightarrow 9 = x - 8 \Rightarrow 9 + 8 = x \Rightarrow 17 = x.$$

De fato, $x = 17$ *é solução, pois*

$$\frac{x+3}{4} = \frac{x-2}{3} \Rightarrow \frac{17+3}{4} = \frac{17-2}{3} \Rightarrow \frac{20}{4} = \frac{15}{3} \Rightarrow 5 = 5.$$

Exemplo 47. *Determine o valor de* p *para que a equação* $(5p-1)x + p - 3 = 0$ *seja incompatível, isto é, não admita solução nenhuma.*

Comentário/Resolução 47. *Para que a equação seja incompatível seu conjunto solução deve ser vazio, logo o coeficiente de x deve ser nulo. Logo,*

$$(5p-1)x+p-3=0 \Rightarrow (5p-1)x=0-(p-3) \Rightarrow (5p-1)x=3-p.$$

Assim, deve-se ter $5p-1=0$,

$$5p-1=0 \Rightarrow 5p=0+1 \Rightarrow 5p=1 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{5}}.\cancel{5}p=1.\frac{1}{5} \Rightarrow p=\frac{1}{5}.$$

Como, $3-p=3-\frac{1}{5}=\frac{14}{5}\neq 0$, então $p=\frac{1}{5}$ é o valor que torna a equação incompatível.

Exemplo 48. *Resolva, em x, a equação $a^2x-ac=b^2x+bc$.*

Comentário/Resolução 48. *Tem-se,*

$$a^2x-b^2x-ac=bc \Rightarrow (a^2-b^2)x-ac=bc \Rightarrow$$

$$(a^2-b^2)x=bc+ac \Rightarrow \frac{1}{\cancel{(a^2-b^2)}}.\cancel{(a^2-b^2)}x=c(a+b).\frac{1}{(a^2-b^2)} \Rightarrow$$

$$x=\frac{c(b+a)}{a^2-b^2} \Rightarrow x=\frac{c\cancel{(b+a)}}{\cancel{(a+b)}(a-b)} \Rightarrow x=\frac{c}{a-b}.$$

De fato, $x=\frac{c}{a-b}$ é solução, pois

$$a^2x-ac=b^2x+bc \Rightarrow a^2.\frac{c}{a-b}-ac=b^2.\frac{c}{a-b}+bc \Rightarrow a^2.\frac{c}{a-b}-ac.\frac{a-b}{a-b}=b^2.\frac{c}{a-b}+bc.\frac{a-b}{a-b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2c-a^2+abc}{a-b}=\frac{b^2c+abc-b^2c}{a-b} \Rightarrow \frac{abc}{a-b}=\frac{abc}{a-b} \Rightarrow \frac{abc}{\cancel{(a-b)}}=\frac{abc}{\cancel{(a-b)}} \Rightarrow abc=abc.$$

Exemplo 49. *Se os números positivos a,b e c satisfazem $abc=1$, resolva a equação em x:*

$$\frac{2ax}{ab+a+1}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2cx}{ca+c+1}=1.$$

Comentário/Resolução 49. *Basta multiplicar a primeira e a terceira parcelas, respectivamente, por $\frac{bc}{bc}$ e $\frac{b}{b}$.*

$$\left(\frac{bc}{bc}\right)\frac{2ax}{ab+a+1}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\left(\frac{b}{b}\right)\frac{2cx}{ca+c+1}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{2abcx}{abc.b+abc+bc}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2bcx}{bca+bc+b}=1,$$

Como $abc = 1$, segue

$$\frac{2x}{b+1+bc}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2bcx}{1+bc+b}=1 \Rightarrow 2x\left(\frac{1}{bc+b+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{bc+b+1}\right).$$

Finalmente,

$$2x\left(\frac{\cancel{bc+b+1}}{\cancel{bc+b+1}}\right)=1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

5.1.3 Problemas equacionados por equação do 1º Grau

Embora seja comum, uma determinada questão trazer uma equação para que se obtenha sua solução, é também comum, algumas questões trazerem um problema que deverá ser equacionado, isto é, com os dados retirados no texto do problema, primeiro monta-se a equação para só depois resolvê-la.

Por exemplo, o problema 1: ache sete números inteiros consecutivos tais que a soma dos primeiros quatro seja igual à soma dos últimos três. Outro exemplo, o problema 2: um prêmio de 12000 reais foi oferecido aos 3 primeiros colocados num concurso de contos. O segundo colocado recebeu 1000 reais a mais que o terceiro e Pedro, primeiro colocado, recebeu o dobro do prêmio do segundo. O prêmio de Pedro, em reais foi de?

O problema 1 pertence ao grupo de problemas que envolvem operações aritméticas entre números. Já o problema 2 está no grupo de problemas contextualizados que envolvem as operações aritméticas relacionadas as mais diversas situações, sejam elas cotidianas, financeiras, quantitativas, etc.

Não existem uma fórmula mágica para que se equacione um problema. Entretanto, para problemas do primeiro grupo, expressões como o triplo de um número, a diferença entre a terça parte de um número com o sua quarta parte e o dobro do sucessor de um número inteiro, podem ser expressas, respectivamente, por $3x$, $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}$ e $2(x+1)$, isto é, obtidos a partir da interpretação da linguagem algébrica relacionado a incógnita. Enquanto que problemas do segundo grupo, a incógnita resulta da indubitável interpretação do problema onde a incógnita pode representar números, quantidades, valores, idades, etc.

Exemplo 50. *Ache sete números inteiros consecutivos tais que a soma dos primeiros quatro seja igual à soma dos últimos três.*

Comentário/Resolução 50. *Sendo sete números inteiros consecutivos e partindo do ponto que não se sabe o valor de nenhum, basta atribuir que x é o primeiro. Assim, os setes números serão dados por x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$, $x+6$. E ainda, igualdade proposta no problema estabelece que $x+x+1+x+2+x+3 = x+4+x+5+x+6$. Portanto,*

$$4x+6 = 3x+15 \Rightarrow 4x-3x+6 = 15 \Rightarrow x+6 = 15 \Rightarrow x = 15-6 \Rightarrow x = 9.$$

Então, os números procurados são, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Exemplo 51. *Um prêmio de 12000 reais foi oferecido aos 3 primeiros colocados num concurso de contos. O segundo colocado recebeu 1000 reais a mais que o terceiro e Pedro, primeiro colocado, recebeu o dobro do prêmio do segundo. O prêmio de Pedro, em reais foi de?*

Comentário/Resolução 51. *Nesse problema, toma-se como incógnita o prêmio de Pedro, assim ele como primeiro colocado ganhou x; o segundo recebeu a metade desse valor(se A ganha o dobro de B é válido dizer que B ganhou a metade de A), ou seja, um valor de $\frac{x}{2}$ e o terceiro ganhou 1000 reais a menos que o segundo, isto é, um valor de $\frac{x}{2}-1000$.*

A igualdade proposta no problema estabelece que a soma dos três prêmios resultam na premiação total. Assim, $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}-1000 = 12000$. Portanto,

$$2x-1000 = 1200 \Rightarrow 2x = 12000+1000 \Rightarrow 2x = 13000 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}.\cancel{2}x = 1300.\frac{1}{2} \Rightarrow x = 6500.$$

Então, o prêmio do primeiro colocado, Pedro, foi de 6500 *reais. Por questão de curiosidade, o secundo e terceiro colocados, ganharam, respectivamente,* 3250 *e* 2250 *reais.*

Exemplo 52. *Três números naturais e múltiplos consecutivos de* 5 *são tais que o triplo do menor é igual ao dobro do maior. Dentre esses números, determine o maior deles.*

Comentário/Resolução 52. *Considerando um número natural múltiplo de* 5 *de valor desconhecido, sua representação é dada por $5x$, os outros por serem consecutivos, são representados por $5x+5$ e $(5x+5)+5 = 5x+10$. A igualdade proposta no problema estabelece que $3.5x = 2(5x+10)$. Assim,*

$$15x = 10x+20 \Rightarrow 15x-10x = 20 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{5}}.\cancel{5}x = 20.\frac{1}{5} \Rightarrow x = 4.$$

Portanto, os números são $5x = 5.4 = 20$, $5x+5 = 5.4+5 = 25$ e $5x+10 = 5.4+10 = 30$. Dentre os números, 20, 25 *e* 30, *o maior deles é, logicamente, o* 30.

Exemplo 53. *Um pai, tem hoje,* 50 *anos e os seus três filhos tem* 5, 7 *e* 10 *anos, respectivamente. Daqui a quantos anos a soma das idades dos três filhos será igual à idade do pai?*

Comentário/Resolução 53. *Como todo problema de equacionamento contextualizado, a dificuldade está em atribuir a incógnita na situação pedida. No caso, desse problema x representa "anos decorridos". Assim a idade do pai após x anos decorridos será dada por $50 + x$ e de cada filho por $5 + x$, $7 + x$ e $10 + x$, respectivamente. Da igualdade proposta pede-se a soma das idades dos três filhos igual a idade do pai, decorrido esse tempo x, isto é, $5 + x + 7 + x + 10 + x = 50 + x$. Daí,*

$$22+3x = 50+x \Rightarrow 3x = x+50-22 \Rightarrow 3x = x+28 \Rightarrow 3x-x = 28 \Rightarrow 2x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{2} = 14.$$

Portanto, levará 14 *anos para que ocorra a igualdade entre as idades propostas no problema. De fato, após esse tempo o pai terá* 64 *anos e os filhos* 19, 21 *e* 24 *anos, cujo soma é* $19 + 21 + 24 = 64$.

5.1.4 Sistemas de duas equações do 1º Grau

Um sistema de duas equações e duas incógnitas, como o próprio nome diz é composto por duas equações do 1º Grau contendo duas incógnitas, cujo solução, quando possível, baseia-se na resolução em conjunto dessas duas equações. Sendo x e y duas incógnitas, um sistema de duas equações possui a forma geral:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Para resolver um sistema desse tipo, seguem os métodos abordados por [10]:

A) **Método da Comparação**

Consiste em isolar a mesma incógnita em ambas equações e pela propriedade transitiva da igualdade, isto é, se $a = b$ e $a = c$, então $b = c$. Daí, obtém-se uma equação com incógnita única, cujo resolução é de uma simples equação do 1º Grau.

Dado o sistema na forma geral, isolando x em ambas as equações:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \\ dx + ey = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax = c - by \\ \\ dx = f - ey \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cancel{a}}\cancel{a}x = (c - by)\frac{1}{a} \\ \frac{1}{\cancel{d}}\cancel{d}x = (f - ey)\frac{1}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c - by}{a} \\ x = \dfrac{f - ey}{d} \end{cases}.$$

Aplicando a transitividade da igualdade e resolvendo a equação,

$$\frac{c - by}{a} = \frac{f - ey}{d} \Rightarrow \cancel{a}d\frac{c - by}{\cancel{a}} = \frac{f - ey}{\cancel{d}}a\cancel{d} \Rightarrow cd - bdy = af - aey \Rightarrow$$

$$cd + aey - bdy = af \Rightarrow (ae - bd)y + cd = af \Rightarrow (ae - bd)y = af - cd \Rightarrow$$

$$(ae - bd)y = af - cd \Rightarrow \cancel{\frac{1}{(ae - bd)}(ae - bd)}y = (af - cd)\frac{1}{(ae - bd)} \Rightarrow y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Portanto, $y = \dfrac{af - cd}{ae - bd}$. De modo análogo, isto é, isolando y em cada uma das equações seguido pela transitividade da igualdade, obtém-se $x = \dfrac{ce - bf}{ae - bd}$.

B) **Método da Substituição**

Consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e em seguida substituir o valor encontrado, obtido obviamente em função da outra incógnita, na outra equação. Assim, resulta numa equação do 1º Grau com incógnita única. Depois, basta substituir o valor encontrado na equação resultante que se obtém a primeira incógnita a ter sido isolada.

Dado o sistema na forma geral, isolando-se y na primeira equação, tem-se:

$$ax + by = c \Rightarrow by = c - ax \Rightarrow \frac{1}{\cancel{b}}\cancel{b}y = (c - ax)\frac{1}{b} \Rightarrow y = \frac{c - ax}{b}.$$

Substituindo esse valor encontrado na segunda equação,

$$dx + ey = f \Rightarrow dx + e\frac{c - ax}{b} = f \Rightarrow dx + \frac{ce - aex}{b} = f \Rightarrow b\left(dx + \frac{ce - aex}{b}\right) = fb \Rightarrow$$

$$bdx + \cancel{b}\frac{ce - aex}{\cancel{b}} = bf \Rightarrow (bd - ae)x + ce = bf \Rightarrow (bd - ae)x = bf - ce \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{(bd - ae)}(bd - ae)}x = (bf - ce)\frac{1}{(bd - ae)} \Rightarrow x = \frac{bf - ce}{bd - ae}.$$

agora, substituindo o valor de x na expressão de y:

$$y = \frac{c - ax}{b} \Rightarrow y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(\frac{bf - ce}{bd - ae}\right) \Rightarrow y = \frac{c}{b}\left(\frac{bd - ae}{bd - ae}\right) - \frac{a}{b}\left(\frac{bf - ce}{bd - ae}\right) \Rightarrow$$

$$y = \left(\frac{bcd - ace}{b^2d - abe}\right) - \left(\frac{abf - ace}{b^2d - abe}\right) \Rightarrow y = \frac{bcd - ace - (abf - ace)}{b^2d - abe} \Rightarrow$$

$$y = \frac{bcd - ace - abf + ace}{b^2d - abe} \Rightarrow y = \frac{bcd - abf}{b^2d - abe} \Rightarrow y = \frac{\cancel{b}(cd - af)}{\cancel{b}(bd - ae)} \Rightarrow y = \frac{cd - af}{bd - ae}.$$

C) **Método da Eliminação**

Consiste em multiplicar as equações por constantes reais de modo que uma das incógnitas apresente termos simétricos nas equações resultantes, consequentemente, essa incógnita será eliminada quando se somar algebricamente os membros correspondentes dessas equações.

Dado o sistema na forma geral, para eliminar a incógnita y, deve-se multiplicar todos os membros da primeira equação por e e todos os membros da segunda equação por $-b$:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} eax = (c - by)e \\ (-b)dx = (f - ey)(-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aex + bey = ce \\ -bdx - bey = -bf \end{cases}.$$

Somando membro a membro as duas equações resultantes, tem-se:

$$aex+bey+(-bdx-bey)=ce+(-bf) \Rightarrow aex+bey-bdx-bey=ce-bf \Rightarrow (ae-db)x=ce-bf \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cancel{(ae-db)}}.\cancel{(ae-db)}x = (ce-bf)\frac{1}{(ae-db)} \Rightarrow x = \frac{ce-bf}{ae-db}.$$

De modo análogo, obtém-se o valor de $y = \dfrac{cd-af}{bd-ae}$.

Observe que os três métodos chegam a mesma solução, entretanto, verifica-se claramente a solução desse sistema quando substitui-se os valores de x e y no sistema geral. Sendo assim, com $x = \dfrac{bf-ce}{bd-ae}$ e $y = \dfrac{cd-af}{bd-ae}$.

Na primeira equação,

$$\begin{aligned} c &= ax + by, \\ &= a\frac{bf-ce}{bd-ae} + b\frac{cd-af}{bd-ae} = \frac{abf-ace}{bd-ae} + \frac{bcd-abf}{bd-ae}, \\ &= \frac{abf-ace+bcd-abf}{bd-ae} = \frac{bcd-ace}{bd-ae}, \\ &= \frac{c\cancel{(bd-ae)}}{\cancel{(bd-ae)}} = c. \end{aligned}$$

E na segunda equação,

$$\begin{aligned} f &= dx + ey, \\ &= d\frac{bf-ce}{bd-ae} + e\frac{cd-af}{bd-ae} = \frac{bdf-cde}{bd-ae} + \frac{cde-aef}{bd-ae}, \\ &= \frac{bdf-cde+cde-aef}{bd-ae} = \frac{bdf-aef}{bd-ae}, \\ &= \frac{f\cancel{(bd-ae)}}{\cancel{(bd-ae)}} = f. \end{aligned}$$

Exemplo 54. *Resolva o sistema abaixo:*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 20 \\ x + 5y = 37 \end{cases}.$$

Comentário/Resolução 54. *Pelo **método da comparação**, isola-se x em cada equação,*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 20 \\ x + 5y = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20 - 2y}{3} \\ x = 37 - 5y \end{cases}.$$

Assim,

$$\frac{20 - 2y}{3} = 37 - 5y \Rightarrow 3.\frac{20 - 2y}{\cancel{3}} = (37 - 5y).3 \Rightarrow 20 - 2y = 111 - 15y \Rightarrow 15y - 2y + 20 = 111 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13y = 111 - 20 \Rightarrow y = \frac{91}{13} \Rightarrow y = 7.$$

De modo análogo, obtém-se $x = 2$.

*Pelo **método da substituição**, isola-se y na primeira equação e a expressão encontrada é substituída na segunda equação, isto é,*

$$3x + 2y = 20 \Rightarrow 2y = 20 - 3x \Rightarrow y = \frac{20 - 3x}{2}.$$

Assim,

$$x + 5.\frac{20 - 3x}{2} = 37 \Rightarrow x + 50 - \frac{15x}{2} = 37 \Rightarrow \frac{-13x}{2} + 50 = 37 \Rightarrow \frac{-13x}{2} = -13 \Rightarrow x = 2.$$

E substituindo o valor encontrado de x, na expressão de y, tem-se

$$y = \frac{20 - 3x}{2} \Rightarrow y = \frac{20 - 3.2}{2} = \frac{20 - 6}{2} = \frac{14}{2} \Rightarrow y = 7$$

*Pelo **método da eliminação**, multiplica-se a primeira equação por 5 e a segunda equação por -2, para que o termo em y fique simétrico,*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 20 \\ x + 5y = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3x + 2y) = 20.5 \\ (-2)(x + 5y) = 37.(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 10y = 100 \\ -2x - 10y = -74 \end{cases}.$$

Somando as equações resultantes, os termos simétricos se anulam, então,

$$15x - 2x = 100 - 74 \Rightarrow 13x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{13} \Rightarrow x = 2.$$

De modo análogo, obtém-se $y = 7$.

Para resolver um sistema, qualquer um dos métodos é válido. As vezes, alguns métodos se tornam mais práticos que outro devido aos tipos de coeficientes do sistema. Por exemplo, os sistemas:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x = 3y \end{cases}, \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y - 2x = 30 \\ y = 4x \end{cases}.$$

Os sistemas, apresentarão mais praticidade em suas resoluções se forem resolvidos, respectivamente, pelos métodos da substituição(a incógnitas x já está isolada), eliminação(os coeficientes da incógnita y já são simétricos) e comparação(a incógnita y já está isolada na segunda equação e praticamente isolada na primeira equação).

Exemplo 55. *Dois amigos foram juntos ao supermercado para comprar vinhos. Um deles comprou 3 garrafas do vinho A e 2 do vinho B, pagando o total de 79 reais. O outro comprou 5 garrafas do vinho A e 1 do vinho B, pagando o total de 92 reais. Pode-se concluir que 1 garrafa do vinho A e 1 garrafa do vinho B, custam?*

Comentário/Resolução 55. *O problema pede o valor unitário de cada tipo do vinho A e B. Designa-se, então, as incógnitas x como sendo o "preço unitário do vinho A"e y o "preço unitário do vinho B". Das igualdades estabelecidas, baseadas no valor pago pelos amigos, surge as equações: $3x + 2y = 79$, referente ao preço pago por um dos amigos e $5x + y = 92$ o preço pago pelo outro amigo. Daí, surge o sistema,*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 79 \\ 5x + y = 92 \end{cases}.$$

Pelo método, da comparação, tem-se

$$\begin{cases} 3x + 2y = 79 \\ 5x + y = 92 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{79 - 3x}{2} \\ y = 92 - 5x \end{cases}.$$

Portanto,

$$\frac{79 - 3x}{2} = 92 - 5x \Rightarrow 2.\frac{79 - 3x}{2} = (92 - 5x)2 \Rightarrow 79 - 3x = 184 - 10x \Rightarrow 10x - 3x + 79 = 184 \Rightarrow$$

$$7x = 184 - 79 \Rightarrow x = \frac{105}{7} \Rightarrow x = 15.$$

Por substituição na segunda equação, tem-se $y = 92-5x$ *com* $y = 92-5.15 = 92-75 = 17$. *Os preços das unidades dos vinhos A e B são, respectivamente, iguais a* 15 *e* 17 *reais.*

Exemplo 56. *Numa fazenda há ovelhas e avestruzes, totalizando* 90 *cabeças e* 260 *patas. Determine o número de avestruzes e o de ovelhas dessa fazenda.*

Comentário/Resolução 56. *O problema pede o número de ovelhas e avestruzes da fazenda. Designa-se, então, as incógnitas* x *como sendo o "número de ovelhas"e* y *o "número de avestruzes". Das igualdades estabelecidas, baseadas no número total de animais, surge a equação* $x+y = 90$ *e, ainda, no número total de patas(quatro patas para uma ovelha e apenas duas patas para um avestruz), surge a outra equação* $4x + 2y = 260$. *Daí, surge o sistema,*

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 4x + 2y = 260 \end{cases}.$$

Pelo método da substituição, tem-se $x + y = 90 \Rightarrow x = 90 - y$. *Substituindo na segunda equação,*

$$4x + 2y = 260 \Rightarrow 4.(90 - y) + 2y = 260 \Rightarrow 360 - 4y + 2y = 260 \Rightarrow 360 - 2y = 260 \Rightarrow$$

$$-2y = 260 - 360 \Rightarrow -2y = -100 \Rightarrow y = \frac{-100}{-2} \Rightarrow y = 50.$$

Por substituição na primeira equação, tem-se $x = 90 - y$, *logo* $x = 90 - 50 = 40$. *Na fazenda há* 40 *ovelhas e* 50 *avestruzes.*

Exemplo 57. *Um professor instituiu uma gincana de conhecimento. A cada questão que o aluno acertava, ganhava* 10 *pontos, e a cada questão errada, perdia* 5 *pontos. Um aluno que respondeu a* 20 *questões e totalizou* 65 *pontos acertou quantas questões?*

Comentário/Resolução 57. *O problema pede o número de acertos e erros da gincana. Designa-se, então, as incógnitas* x *como sendo a "quantidade de acertos"e* y *a "quantidade de erros". Das igualdades estabelecidas, baseadas no número total de questões, surge a equação* $x + y = 20$ *e, ainda, na pontuação obtida pelo aluno, surge a outra equação* $10x - 5y = 65$. *Daí, surge o sistema,*

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 10x - 5y = 65 \end{cases}.$$

Pelo método da eliminação, multiplica-se a primeira equação por 5*, de onde surge,*

$$\begin{cases} 5(x+y) = 20.5 \\ 10x - 5y = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 100 \\ 10x - 5y = 65 \end{cases}.$$

Somando as duas equações resultantes, os termos simétricos são eliminados, e

$$5x + 15x = 100 + 65 \Rightarrow 15x = 165 \Rightarrow x = \frac{165}{15} \Rightarrow x = 11.$$

Por substituição na primeira equação, tem-se $x + y = 20$ *tal que* $11 + y = 20$*, com* $y = 9$*. O aluno acertou* 11 *questões e errou* 9 *questões.*

5.2 Equação do 2º Grau

5.2.1 Noção de equação do 2º Grau

Uma equação do 2º Grau, conhecida também por equação quadrática é uma igualdade do tipo A = B, onde A e B são expressões algébricas tal que uma delas é de grau dois e a outra de grau menor ou igual a dois. Por exemplo, $5x^2 + 7x = 3x^2 - 4$ e $x^2 + 25 = 10x$ são equações do 2º Grau de uma incógnita.

Definição 5.2.1. *Chama-se equação do 2º Grau ou Quadrática, em uma incógnita, toda equação da forma geral* $ax^2 + bx + c = 0$*, com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$*, [1].*

Afirmar que a forma geral de uma equação é dada por $ax^2 + bx + c = 0$ significa que as equações do tipo 2º Grau são todas redutíveis a essa expressão por simples translação dos termos para um dos membros da referida equação. Por exemplo, $5x^2 + 7x = 3x^2 - 4 \Rightarrow 5x^2 + 7x - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 7x + 4 = 0$. Enquanto, $x^2 + 25 = 10x \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$.

5.2.2 Solução de uma equação do 2º Grau

A resolução de uma equação do 2º Grau consiste em determinar os elementos do conjunto solução que tornam a igualdade verdadeira, no coso esse tipo de equação pode admitir até duas soluções. Como $a \neq 0$ então toda equação do 2º Grau não pode ser reduzida a uma equação do 1º Grau.

Primeiramente, antes da resolução na forma geral, existe duas formas incompletas que apresentam solução mais simples. Tem-se:

A) Quando $b = 0$ e $c \neq 0$ - Equação da forma $ax^2 + c = 0$;

Nessa forma incompleta, a resolução se dá a partir do momento que isola-se a incógnita, basicamente pelos princípios da transposição de termos e da multiplicação mútua, ou seja,

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow \frac{1}{\cancel{a}}\cancel{a}x^2 = -c\frac{1}{a} \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Resultando no conjunto solução, $S = \left\{-\sqrt{\frac{-c}{a}}, \sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$.

B) Quando $b \neq 0$ e $c = 0$ - Equação da forma $ax^2 + bx = 0$;

Nessa forma incompleta, a resolução se dá a partir da fatoração por evidenciação da incógnita seguido da aplicação do princípio do fator comum, ou seja,

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x.(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases}.$$

Resultando em, $x = 0$ e $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \frac{1}{\cancel{a}}\cancel{a}x = -b.\frac{1}{a} \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$, isto é, o conjunto solução é $S = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$.

Para resolver a equação geral, faz-se uso, novamente, dos princípios gerais e fatoração algébrica. Esse conjunto de procedimentos, resulta numa fórmula de resolução dada pela seguinte proposição

Proposição 15. *Uma equação do 2º Grau, de forma geral,* $ax^2 + bx + c = 0$ *é resolvida pela fórmula* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Demonstração

Assim, multiplica-se toda a equação por $4a$, visando transformar o trinômio em um trinômio quadrado perfeito, segue que

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow 4a(ax^2 + bx + c) = 0 \Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Somando b^2 em cada lado da equação e transladando $4ac$:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Finalmente, fatorando o trinômio quadrado resultante,

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow \sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2a}}\cancel{2a}x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})\frac{1}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$\blacksquare$

Da solução, obtém-se o conjunto solução $S = \left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$.

Exemplo 58. *Resolva a equação* $x^2 - 25 = 0$.

Comentário/Resolução 58. *A equação é incompleta, tal que* $b = 0$, *logo*

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{25} \Rightarrow x = \pm 5.$$

Portanto, $x_1 = -5$ *e* $x_2 = 5$, *logo* $S = \{-5, 5\}$.

De fato, ${x_1}^2 - 25 = 0 \Rightarrow (-5)^2 - 25 = 25 - 25 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ *e* ${x_2}^2 - 25 = 0 \Rightarrow 5^2 - 25 = 25 - 25 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Exemplo 59. *Resolva a equação* $x^2 + 7x = 0$.

Comentário/Resolução 59. *A equação é incompleta, tal que* $c = 0$, *logo*

$$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0.$$

Daí, tem-se que $x = 0$ *e* $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$. *Portanto,* $x_1 = 0$ *e* $x_2 = -7$, *logo* $S = \{0, -7\}$.

De fato, ${x_1}^2 + 7x_1 = 0 \Rightarrow 0^2 + 7.0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ *e* ${x_2}^2 + 7x_2 = 0 \Rightarrow (-7)^2 + 7.(-7) = 0 \Rightarrow 49 - 49 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Exemplo 60. *Resolva a equação* $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Comentário/Resolução 60. *Tem-se, nessa equação, que* $a = 1$, $b = -3$ *e* $c = -4$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3 + 5}{2} = 4, x_2 = \frac{3 - 5}{2} = -1.$$

Portanto, $S = \{-1, 4\}$.

De fato, ${x_1}^2 - 3x_1 - 4 = 0 \Rightarrow (-1)^2 - 3.(-1) - 4 = 1 + 3 - 40 \Rightarrow 0 = 0$ *e* ${x_2}^2 - 3x_2 - 4 = 0 \Rightarrow 4^2 - 3.4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Exemplo 61. *Resolva a equação* $4x^2 - 12x + 7 = 0$.

Comentário/Resolução 61. *Tem-se, nessa equação, que* $a = 4$, $b = -12$ *e* $c = 7$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.4.7}}{2.4} \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 112}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{32}}{8} \Rightarrow x = \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{8} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}.$$

Outra opção de resolução dessa equação, seria completar valores para formar um quadrado perfeito, idêntico ao mostrado na demonstração da fórmula. Para que a equação fosse um T.Q.P. basta somar 2 *em ambos os membros da equação,*

$$4x^2 - 12x + 7 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 7 + 2 = 0 + 2 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 2 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2x - 3)^2} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow 2x - 3 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow 2x = 3 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, $S = \left\{\frac{3 + \sqrt{2}}{2}, \frac{3 - \sqrt{2}}{2}\right\}$.

De fato, $4x^2 - 12x + 7 = 0$, *então*

$$4\left(\frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}\right) + 7 = 0 \Rightarrow \cancel{4}\left(\frac{9 + 2 \pm 6\sqrt{2}}{\cancel{4}}\right) - 12\left(\frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}\right) + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$11 \pm 6\sqrt{2} - 6.(3 \pm \sqrt{2}) + 7 = 0 \Rightarrow 11 \pm 6\sqrt{2} - 18 \mp 6\sqrt{2} + 7 = 0 \Rightarrow \pm 6\sqrt{2} \mp 6\sqrt{2} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

No que concerne as soluções ou raízes de uma equação do 2º Grau, é possível analisar o tipo dessas raízes sem efetuar o seu cálculo. Tal analise é feita a partir do discriminante da equação do segundo grau. Chama-se discriminante da equação do 2º Grau o valor $\Delta = b^2 - 4ac$. Então, tem-se os seguintes casos:

i. $\Delta > 0$: Se o discriminante é positivo, então a equação do 2º Grau, $ax^2 + bx + c = 0$, possui duas raízes reais e distintas;

ii. $\Delta = 0$: Se o discriminante é nulo, então a equação do 2º Grau, $ax^2 + bx + c = 0$, possui duas raízes reais e idênticas;

iii. $\Delta < 0$: Se o discriminante é negativo, então a equação do 2º Grau, $ax^2 + bx + c = 0$, não possui raízes reais, mas duas raízes complexas;

Exemplo 62. *Na equação $x^2 + kx + 4 = 0$. Determine o valor de k para que a equação dada tenha duas raízes reais idênticas.*

Comentário/Resolução 62. *Para que isso ocorra, deve-se ter $\Delta = 0$. Assim,*

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow k^2 - 4.1.4 = 0 \Rightarrow k^2 - 16 = 0 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{k^2} = \pm\sqrt{16} \Rightarrow k = \pm 4.$$

Portanto, $k = \pm 4$.

Ainda sobre as soluções ou raízes da equação do 2º Grau há uma importante relação entre as mesmas. Essas relações são estabelecidas por soma ou produto entre as raízes.

Proposição 16. *A soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$.*

Demonstração

Da fórmula de resolução, tem-se $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ &= \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = \frac{-b}{a}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposição 17. *O produto das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é dado por $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.*

Demonstração

Da fórmula de resolução, tem-se $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. *Tem-se:*

$$
\begin{aligned}
x_1 x_2 &= \left(\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right),\\
&= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2},\\
&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2},\\
&= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2},\\
&= \frac{\cancel{4}ac}{\cancel{4}a^2} = \frac{\cancel{a}c}{a^{\cancel{2}}} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 63. *Dada a equação* $2x^2-4x+3=0$*. Se* x_1 *e* x_2 *as raízes dessa equação, determine o valor de* $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$.

Comentário/Resolução 63. *Como* $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$ *e* $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-4)}{2} = 2$*. Então,*

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = 2.\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{4}{3}.$$

Assim, elevando ao quadrado a igualdade resultante,

$$\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{16}{9}.x_1x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} + \frac{2\cancel{x_1x_2}}{\cancel{x_1x_2}} = \frac{16}{9}.\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} + 2 = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} = \frac{2}{3}.$$

5.2.3 Problemas equacionados por equação do 2º Grau

Problemas equacionados por equações do 2º Grau são um pouco menos comum que os problemas relacionados a equações do 1º Grau. Entretanto, o grupo de problemas envolvendo as operações aritméticas entre números ocorre, geralmente, envolta da soma algébrica do inverso, do quadrado da soma ou diferença e de alguns produtos, como por exemplo, os representados por $\frac{1}{x} \pm x$, $(x \pm k)^2$ e $x.(x \pm k)$, onde x é a incógnita e k um número qualquer.

No caso do grupo de problemas contextualizados, geralmente ocorre um produto ou quociente do tipo $x.(x \pm k)$ ou $\frac{(x \pm k)}{(x \pm l)} = x$, onde x é incógnita e, k e l números quaisquer.

Exemplo 64. *A soma de um número racional não inteiro com o dobro do seu inverso multiplicativo é 33/4. Esse número está compreendido em qual intervalo inteiro?*

Comentário/Resolução 64. *Tomando a incógnita x e o dobro do seu inverso por $2\frac{1}{x}$. Da igualdade proposta no problema, tem-se*

$$x + \frac{2}{x} = \frac{33}{4} \Rightarrow 4x\left(x + \frac{2}{x}\right) = \frac{33}{\cancel{4}}\cancel{4}x \Rightarrow 4x^2 + 4\cancel{x}\frac{2}{\cancel{x}} = 33x \Rightarrow 4x^2 - 33x + 8 = 0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a = 4$, $b = -33$ e $c = 8$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-33) \pm \sqrt{(-33)^2 - 4.4.8}}{2.4} \Rightarrow x = \frac{33 \pm \sqrt{1089 - 128}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{33 \pm \sqrt{961}}{8} \Rightarrow x = \frac{33 \pm 31}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{33 - 31}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{33 + 31}{8} = \frac{64}{8} = 8.$$

Portanto, número procurado é $\frac{1}{4}$, pois é a solução racional não inteira. No caso, o intervalo inteiro é $0 < \frac{1}{4} < 1$.

Exemplo 65. *Se x é um número real positivo tal que ao adicionarmos 1 ao seu inverso obtemos como resultado o número x, qual é o valor de x?*

Comentário/Resolução 65. *No problema, basta tomar a incógnita x e o seu inverso $\frac{1}{x}$. Da igualdade proposta no problema, tem-se*

$$x = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow x = \frac{1 + x}{x} \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a = 1$, $b = 1$ e $c = -1$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, número procurado é $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, pois é a solução positiva do problema.

Exemplo 66. *Sejam x um número real tal que a soma do seu quadrado com o seu triplo é menor do que o próprio número mais três. Determine os valores de x que satisfazem a condição anterior.*

Comentário/Resolução 66. *Como a incógnita é x, tem-se que o quadrado e o triplo são dados, respectivamente, por x^2 e $3x$. Embora o problema insinue uma desigualdade, toma-se uma igualdade. Assim,*

$$x^2 + 3x = x + 3 \Rightarrow x^2 + 3x - x - 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a = 1$, $b = 2$ e $c = -3$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3, x_2 = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Da solução positiva, qualquer valor menor que 1 torna o primeiro membro menor que o segundo em $x^2 + 3x = x + 3$, por exemplo $(0,9)^2 + 3.0,9 < 0,9 + 3 \Rightarrow 0,81 + 2,7 < 3,9 \Rightarrow 3,51 < 3,9$.

Da solução negativa, qualquer valor maior que -3 torna o primeiro membro menor que o segundo na $x^2 + 3x = x + 3$, por exemplo $(-2,9)^2 + 3.(-2,9) < -2,9 + 3 \Rightarrow 8,41 - 8,7 < 0,1 \Rightarrow -0,29 < 0,1$.

Então, os valores de x que satisfazem a condição, $-3 < x < 1$.

Exemplo 67. *Na divisão dos lucros com seus* 20 *acionistas, uma empresa distribuiu* 600 *reais entre os preferenciais e* 600 *reais entre os ordinários. Sabe-se que cada acionista preferencial recebeu* 80 *reais a menos do que cada acionista ordinário. Determine quantos acionistas preferenciais esta empresa possui.*

Comentário/Resolução 67. *A empresa possui* 20 *acionista, dos quais x são preferenciais, consequentemente, $20 - x$ são ordinários. Se a empresa pagou 600 reais a todos os acionistas preferenciais, então cada acionista dessa categoria recebeu $\frac{600}{x}$. Enquanto que cada acionista ordinário recebeu $\frac{600}{20 - x}$.*

A igualdade proposta no problema, garante que cada acionista preferencial recebeu 80 *reais a menos que um acionista ordinário, ou seja, um acionista preferencial precisa de* 80 *reais a* *mais para se equiparar a um acionista ordinário. Daí,*

$$\frac{600}{x}+80=\frac{600}{20-x}\Rightarrow x\left(\frac{600}{x}+80\right)=\frac{600}{20-x}x\Rightarrow 600+80x=\frac{600x}{20-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (20-x)(600+80x)=\frac{600x}{\cancel{(20-x)}}\cancel{(20-x)}\Rightarrow 12000+1600x-600x-80x^2=600x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -80x^2+1600x-600x-600x+12000=0\Rightarrow -80x^2+400x+12000=0\Rightarrow x^2-5x-150=0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a=1$, $b=-5$ e $c=-150$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.(-150)}}{2.1}\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+600}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\pm\sqrt{625}}{2}\Rightarrow x=\frac{5\pm 25}{2}\Rightarrow x_1=\frac{5-25}{2}=\frac{-20}{2}=-10, x_2=\frac{5+25}{2}=\frac{30}{2}=15.$$

Como x é um valor positivo por se tratar de quantidades de acionistas. Então, são 15 acionistas preferenciais. Logicamente, os 5 restantes são acionistas ordinários.

Exemplo 68. *Uma transportadora entrega, com caminhões, 60 toneladas de açúcar por dia. Devido a problemas operacionais, em um certo dia cada caminhão foi carregado com 500 kg a menos que o usual, tendo sido necessário, naquele dia, alugar mais 4 caminhões.*

a) Quantos caminhões foram necessários naquele dia?

b) Quantos quilos transportou cada caminhão naquele dia?

Comentário/Resolução 68. *Tomando o número de caminhões por x. Então por dia cada caminhão transporta $\frac{60}{x}$ toneladas. No dia atípico, a quantidade que cada caminhão leva foi reduzida em 500kg $\left(\frac{1}{2}\text{ tonelada}\right)$, isto é, cada caminhão levou $\left(\frac{60}{x}-\frac{1}{2}\right)$ toneladas nesse dia. Para compensar a cota diária de transportar 60 toneladas, aumentou-se em 4 o número de caminhões, no caso $x+4$.*

A igualdade se dá pelo fato de que a carga diária de 60 toneladas é obtida pelo produto entre o número de caminhões e a quantidade de carga que cada caminhão leva. Assim, no dia atípico, tem-se

$$\left(\frac{60}{x}-\frac{1}{2}\right)(x+4)=60\Rightarrow 2x\left(\frac{60}{x}-\frac{1}{2}\right)(x+4)=60.2x\Rightarrow(120-x)(x+4)=120x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 120x+480-x^2-4x=120x\Rightarrow x^2+4x-480=0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a=1$, $b=4$ e $c=-480$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.1.(-480)}}{2.1}\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+1920}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{1936}}{2} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 44}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-4+44}{2} = \frac{40}{2} = 20, x_2 = \frac{-4-44}{2} = \frac{-48}{2} = -24.$$

Portanto, o valor de $x = 20$. São 20 caminhões transportando 3 toneladas cada. No dia atípico, foram 24 caminhões levando $2,5$ toneladas cada.

5.2.4 Sistemas de duas equações do 2º Grau

Um sistema de duas equações do 2º Grau será a denominação adotada para um sistema não linear de duas equações no qual será reduzido a uma equação do 2º Grau quando aplicado um dos métodos de resolução conhecido. Um sistema de equações é chamado de não linear se é possível identificar algum termo que não seja do 1º Grau em uma incógnita, em pelo menos uma das equações que compõem o sistema, [10].

Não há como considerar uma forma geral para esses tipos de sistemas de equações, entretanto pode-se agrupar os mesmos em alguns dos tipos mais comuns. Para isso, considere os casos abaixo:

A) Sistemas do tipo 1

São aqueles em que pelo menos uma das equações apresenta uma das incógnitas de grau dois. Assim, são sistemas na forma:

$$\begin{cases} ax^2 + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Para resolver o sistema acima, basta aplicar o método da substituição. A opção mais pratica é substituir a incógnita que não é de grau dois. Assim, isolando y na segunda equação, $dx + ey = f \Rightarrow ey = f - dx \Rightarrow y = \dfrac{f - dx}{e}$. E substituindo na primeira equação,

$$ax^2 + by = c \Rightarrow ax^2 + b\frac{f-dx}{e} = c \Rightarrow e\left(ax^2 + b\frac{f-dx}{e}\right) = c.e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow aex^2 + bf - bdx = ce \Rightarrow aex^2 - bdx + (bf - ce) = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º Grau, obtém-se x_1 e x_2. Substituindo, os valores x encontrados na expressão de y, obtém-se y_1 e y_2. Assim, o sistema admite os pares de soluções (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

B) Sistemas do tipo 2

Sistemas do tipo 2, são aqueles em que pelo menos uma das equações apresenta um produto das incógnitas. Assim, são sistemas na forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ xy = d \end{cases}$$

Para resolver o sistema acima, basta aplicar o método da substituição. A opção mais pratica é substituir uma das incógnita na equação que não contém o produto das incógnitas. Assim, isolando y na primeira equação, $ax+by = c \Rightarrow by = c-ax \Rightarrow y = \dfrac{c-ax}{b}$. E substituindo na segunda equação,

$$xy = c \Rightarrow x\frac{c-ax}{b} = c \Rightarrow \cancel{b}x\frac{c-ax}{\cancel{b}} = cb \Rightarrow cx - ax^2 = bc \Rightarrow ax^2 - cx + ab = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º Grau, obtém-se x_1 e x_2. Substituindo, os valores x encontrados na expressão de y, obtém-se y_1 e y_2. Assim, o sistema admite os pares de soluções (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

B) Sistemas do tipo 3

Sistemas do tipo 3, são aqueles em que há soma dos inversos das incógnitas. Assim, são sistemas na forma:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = c \\ dx + ey = f \end{cases}.$$

Para resolver o sistema acima, basta aplicar o método da substituição. A opção mais pratica é substituir uma das incógnita na equação que não contém os inversos das incógnitas. Assim, isolando y na segunda equação, $dx + ey = f \Rightarrow ey = f - dx \Rightarrow y = \dfrac{f-dx}{e}$. E substituindo na primeira equação,

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{b}{\dfrac{f-dx}{e}} = c \Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{be}{f-dx} = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(f-dx)\left(\frac{a}{x} + \frac{be}{f-dx}\right) = cx(f-dx) \Rightarrow a(f-dx) + bex = cx(f-dx) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow af - adx + bex = cfx - cdx^2 \Rightarrow cdx^2 + (be - ad - cf)x + af = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º Grau, obtém-se x_1 e x_2. Substituindo, os valores x encontrados na expressão de y, obtém-se y_1 e y_2. Assim, o sistema admite os pares de soluções (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

Exemplo 69. *Resolva o sistema,*

$$\begin{cases} x + 3y = 14 \\ xy = 15 \end{cases}.$$

Comentário/Resolução 69. *Isolando a incógnita x na primeira equação e substituindo o resultado na segunda equação, $x + 3y = 14 \Rightarrow x = 14 - 3y$. Assim,*

$$xy = 15 \Rightarrow (14 - 3y)y = 15 \Rightarrow 14y - 3y^2 = 15 \Rightarrow 3y^2 - 14y + 15 = 0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a = 3$, $b = -14$ e $c = 15$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4.3.15}}{2.3} \Rightarrow y = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 180}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{14 \pm \sqrt{16}}{6} \Rightarrow y = \frac{14 \pm 4}{6} \Rightarrow y_1 = \frac{14 + 4}{6} = \frac{18}{6} = 3, y_2 = \frac{14 - 4}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Portanto, o valor de $y = 3$, $x = 14 - 3.3 = 5$ ou $y = \frac{5}{3}$, $x = 14 - 3.\frac{5}{3} = 9$. São as soluções.

Exemplo 70. *Resolva o sistema, para x e y positivos,*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

Comentário/Resolução 70. *Isolando a incógnita x na segunda equação e substituindo o resultado na primeira equação, $x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + y$. Assim,*

$$x^2 + y^2 = 49 \Rightarrow (1 + y)^2 + y^2 = 49 \Rightarrow 1 + 4y + y^2 + y^2 = 49 \Rightarrow 2y^2 + 4y - 48 = 0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a = 2$, $b = 4$ e $c = -48$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.2.(-48)}}{2.2} \Rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 384}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{400}}{4} \Rightarrow y = \frac{-4 \pm 20}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{-4 + 20}{4} = \frac{16}{4} = 4, y_2 = \frac{-4 - 20}{4} = \frac{-24}{4} = -6.$$

Portanto, o valor de $y = 4$, $x = 1 + 4 = 5$ são as soluções.

Exemplo 71. *(CN-1961) Resolver:*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{16} \end{cases}.$$

Comentário/Resolução 71. *No sistema, isolando a fração de y na primeira equação, isto é,* $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{x}$, *tem-se*

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{16}\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{5}{16}\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{9}{16}+\frac{1}{x^2}-2.\frac{3}{4}.\frac{1}{x}=\frac{5}{16}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{x^2}-\frac{3}{2x}+\frac{9}{16}=\frac{5}{16}\Rightarrow\frac{2}{x^2}-\frac{3}{2x}+\frac{9}{16}-\frac{5}{16}=0\Rightarrow\frac{2}{x^2}-\frac{3}{2x}+\frac{4}{16}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{2x}+\frac{4}{16}\right)=0\Rightarrow x^2-6x+8=0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a=1$, $b=-6$ *e* $c=8$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4.1.8}}{2.1}\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}\Rightarrow x=\frac{6\pm2}{2}\Rightarrow x_1=\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4, x_2=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Logo, o valor de $x=4$, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=2$ *ou 2 e 4(resultantes do outro valor de x), são as soluções.*

5.2.5 Equações redutíveis a equação do 2º Grau

Existem alguns tipos de equações que são redutíveis a uma equação do 2º Grau:

Equações Fracionárias

As equações fracionarias são aquelas cuja incógnita apresenta expoente negativo, isto é, encontram-se no denominador da fração algébrica. São exemplos, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{3}{x+2}=x$ e $\dfrac{2}{x^2+5x-6}=1$.

Para resolver esse tipo de equação, se faz necessário eliminar a incógnita do denominador da fração algébrica.

Exemplo 72. *Resolva a equação* $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{1}{x^2-4}$.

Comentário/Resolução 72. *Adequando a equação,*

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}\Rightarrow\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}.\frac{x+2}{x+2}+\frac{2}{x+2}.\frac{x-2}{x-2}=\frac{1}{x^2-4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{x}+\frac{x+2}{x^2-4}+\frac{2x-4}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-4}\Rightarrow\frac{2}{x}+\frac{x+2+2x-4}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-4}\Rightarrow\frac{2}{x}=\frac{1}{x^2-4}-\frac{3x-2}{x^2-4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{x}=\frac{3-3x}{x^2-4}\Rightarrow\cancel{x}(x^2-4)\frac{2}{\cancel{x}}=\frac{3-3x}{\cancel{x^2-4}}x\cancel{(x^2-4)}\Rightarrow 2x^2-8=3x-3x^2\Rightarrow 5x^2-3x-8=0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a=5$, $b=-3$ *e* $c=-8$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4.5.(-8)}}{2.5}\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+160}}{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3\pm\sqrt{169}}{10}\Rightarrow x=\frac{3\pm 13}{10}\Rightarrow x_1=\frac{3+13}{10}=\frac{16}{10}=1,6, x_2=\frac{3-13}{10}=\frac{-10}{10}=-1.$$

Portanto, $1,6$ *e* -1 *são as soluções. Lembrando que* $x\neq 0$ *e* $x\neq -2$.

Equações Irracionais

As equações irracionais são aquelas cuja incógnita apresenta expoente fracionário, isto é, encontram-se sob um radical algébrico. São exemplos, $\sqrt{x+1}=x+2$, $\sqrt{2x+\sqrt{x}}=4$ e $\sqrt{x^2+4x+3}=1$.

Para resolver esse tipo de equação, se faz necessário eliminar a incógnita do radical algébrico.

Exemplo 73. *Resolva a equação* $\sqrt{x(x+1)}=2\sqrt{5}$.

Comentário/Resolução 73. *Adequando a equação,*

$$\sqrt{x(x+1)}=2\sqrt{5}\Rightarrow\left(\sqrt{x(x+1)}\right)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2\Rightarrow x(x+1)=20\Rightarrow x^2+x-20=0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a=1$, $b=1$ *e* $c=-20$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1.(-20)}}{2.1}\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-1\pm\sqrt{81}}{2}\Rightarrow x=\frac{-1\pm 9}{2}\Rightarrow x_1=\frac{-1+9}{2}=\frac{8}{2}=4, x_2=\frac{-1-9}{2}=\frac{-10}{2}=-5.$$

Portanto, os valores 4 *e* -5 *são as soluções. Lembrando que* $x(x+1)>0$.

Equações Biquadradas

Proposição 18. *Uma equação biquadrada é do tipo* $ax^{2n}+bx^n+c=0$*, com* $a\neq 0$ *é redutível a quadrática.*

Demonstração *Fazendo* $y=x^n$*, uma substituição de variável, segue que* $ay^2+by+c=0$*, pois* $x^{2n}=(x^n)^2=y^2$*. A equação é redutível a uma equação do 2º Grau.*

Resolvendo, em y, resulta nas soluções, $y_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $y_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Daí, $x_1^n=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2^n=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

∎

Exemplo 74. *Resolva a equação* $x^4+7x^2-8=0$.

Comentário/Resolução 74. *Tomando* $y=x^2\Rightarrow y^2+7y-8=0$.

Resolvendo a equação resultante, com $a=1$, $b=7$ *e* $c=-8$.

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow y=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4.1.(-8)}}{2.1}\Rightarrow y=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2}\Rightarrow y=\frac{-7\pm 9}{2}\Rightarrow y_1=\frac{-7+9}{2}=\frac{2}{2}=1, y_2=\frac{-7-9}{2}=\frac{-16}{2}=-8.$$

Logo, as soluções, em y, são 1 *e* -8.

Mas, em x, tem-se $x_1^2=1\Rightarrow x_1=\pm\sqrt{1}=\pm 1$ *e* $x_2^2=-8\Rightarrow x_2=\pm\sqrt{-8}\Rightarrow\nexists x_2\in\mathbb{R}$.

Portanto, $S=\{-1,1\}$.

Exemplo 75. *Resolva a equação* $x+\sqrt{x}-6=0$.

Comentário/Resolução 75. *Tomando* $y=\sqrt{x}\Rightarrow y^2+y-6=0$.

Resolvendo a equação resultante, com $a=1$, $b=1$ *e* $c=-6$.

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1.(-6)}}{2.1}\Rightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}\Rightarrow y=\frac{-1\pm 5}{2}\Rightarrow y_1=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2, y_2=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3.$$

Logo, as soluções, em y, são 2 *e* -3.

Mas, em x, como $x>0$*, tem-se, somente,* $y=\sqrt{x}=2$*, então* $x=4$.

Portanto, $S=\{4\}$.

5.3 Aplicações nos Exames Militares

56. (EPCAr-2002) O valor de x que é solução da equação $3x - 2(x-5) - \dfrac{5-3x}{2} = 0$ é tal que

a) $-6 < x < 0$.

b) $-12 < x < -8$.

c) $3 < x < 10$.

d) $12 < x < 18$.

Solução 56. *Tem-se,*

$$3x - 2(x-5) - \frac{5-3x}{2} = 0 \Rightarrow 3x - 2x + 10 = \frac{5-3x}{2} \Rightarrow 2(x+10) = \frac{5-3x}{\cancel{2}}\cancel{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 20 = 5 - 3x \Rightarrow 2x + 3x = 5 - 20 \Rightarrow 5x = -15 \Rightarrow x = -3.$$

*Alternativa, (**a**).*

57. (CN-1994) Considere a equação do primeiro grau em "x": $m^2x + 3 = m + 9x$. Pode-se afirmar que a equação tem conjunto verdade unitário se:

a) $m = 3$.

b) $m = -3$.

c) $m \neq 3$.

d) $m \neq -3$.

d) $m = 3$ e $m \neq -3$.

Solução 57. *Tem-se,*

$$m^2x + 3 = m + 9x \Rightarrow m^2x - 9x = m - 3 \Rightarrow (m^2 - 9)x = m - 3 \Rightarrow (m+3)(m-3)x = m - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{m-3}}(m+3)\cancel{(m-3)}x = \cancel{(m-3)}\frac{1}{\cancel{m-3}} \Rightarrow (m+3)x = 1.$$

Para que o conjunto verdade ou solução da equação seja unitário, basta que $m + 3 \neq 0$. Logo, $m \neq -3$.

*Alternativa, (**d**).*

58. (EPCAr-2002) Uma senhora vai à feira e gasta, em frutas, $\dfrac{2}{9}$ do que tem na bolsa. Gasta depois $\dfrac{3}{7}$ do resto em verduras e ainda lhe sobraram $R\$8,00$. Ela levava, em reais, ao sair de casa

a) $45,00$. b) $36,00$. c) $27,00$. d) $18,00$.

Solução 58. *Considerando x o valor, em reais, inicialmente encontrado na bolsa da senhora. Tem-se, $x\dfrac{2}{9}$ foi gasto com frutas, $x\left(1-\dfrac{2}{9}\right)\dfrac{3}{7} = x\dfrac{7}{9}.\dfrac{3}{7} = x\dfrac{1}{3}$ foi gasto com verduras e ainda sobrou 8 reais. A soma de todos os gastos e a sobra equivalem ao valor x. Garantido a igualdade do equacionamento. Logo,*

$$x\frac{2}{9}+x\frac{7}{9}.\frac{3}{7}+8=x \Rightarrow x\frac{2}{9}+x\frac{1}{3}+8=x \Rightarrow 9\left(x\frac{2}{9}+x\frac{1}{3}+8\right)=x.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+3x+8.9=9x \Rightarrow 9x-5x=72 \Rightarrow 4x=72 \Rightarrow x=18.$$

*Alternativa, (**d**).*

59. (EN-2013) De um curso preparatório de matemática para o concurso público de ingresso à Marinha participaram menos que 150 pessoas. Destas, o número de mulheres estava para o de homens na razão de 2 para 5, respectivamente. Considerando que a quantidade de participantes foi a maior possível,de quantas unidades o número de homens excedia o de mulheres?

a) 50. b) 55. c) 57. d) 60. e) 63.

Solução 59. *Como a razão entre mulheres e homens é de 2 para 5, então pode -se dizer que há $2x$ mulheres e $5x$ homens.*

A soma desses valores devem ser inferior a 150. Assim, $2x+5x<150 \Rightarrow 7x<150$. Como a quantidade de pessoas é sempre um valor inteiro positivo e, ainda, a maior quantidade possível, então há 147 no preparatório, pois é o maior múltiplo de 7 inferior a 150.

Portanto,

$$7x=147 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{7}}.\cancel{7}x = 147.\frac{1}{7} \Rightarrow x=21.$$

Assim, há $2.21=42$ mulheres e $5.21=105$ homens. Então, $105-42=63$ é o número de homens excedente ao de mulheres.

*Alternativa, (**e**).*

60. (EPCAr-2002) Um caixa automático de um banco so libera notas de $R\$5,00$ e $R\$10,00$. Uma pessoa retirou desse caixa uma importância de $R\$65,00$, recebendo 10 notas. O produto do número de notas de $R\$5,00$ pelo número de notas de $R\$10,00$ é igual a

a) 16. b) 25. c) 24. d) 21.

Solução 60. *Considerando x a quantidade de notas de $R\$5,00$ e y a quantidade de notas de $R\$10,00$. Tem-se, o seguinte sistem de duas equações do 1º Grau:*

$$\begin{cases} 5x + 10y = 65 \\ x + y = 10 \end{cases}.$$

Pelo método da eliminação,

$$\begin{cases} 5x + 10y = 65 \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 10y = 65 \\ (-5).x + y = 10.(-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 10y = 65 \\ -5x - 5y = -50 \end{cases}.$$

Somando as duas equações resultantes,

$$10y - 5y = 65 - 50 \Rightarrow 5y = 15 \Rightarrow y = 3$$

Sendo, $y = 3$, então $x = 10 - y = 10 - 3 = 7$. Fazendo $3.7 = 21$.

*Alternativa, (**d**).*

61. (CM/Brasília-2005) Um burro disse a um jumento:- se eu te passar um dos sacos de farinha que carrego, ficaremos com cargas iguais; mas, se você passar um dos sacos que carrega, minha carga ficará sendo o dobro da sua". Se a quantidade de sacos carregado pelo burro é X e pelo jumento é Y, então $X + Y$ é igual a

a) 3. b) 8. c) 11. d) 12. e) 13.

Solução 61. *Se o burro passar um de seus sacos, as cargas serão iguais, logo, $X - 1 = Y + 1 \Rightarrow X - Y = 2$. No outro caso, tem-se, $X + 1 = 2(Y - 1) \Rightarrow X + 1 = 2Y - 2 \Rightarrow X - 2Y = -3$. Resultando no seguinte sistema de duas equações do 1º Grau:*

$$\begin{cases} X - Y = 2 \\ X - 2Y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 2 + Y \\ X - 2Y = -3 \end{cases}.$$

Pelo método da substituição, da primeira equação na segunda, tem-se

$$Y + 2 - 2Y = -3 \Rightarrow 2 - Y = -3 \Rightarrow Y = 2 + 3 \Rightarrow Y = 5.$$

Daí, $X = 2 + Y \Rightarrow X = 2 + 5 = 7$. *Portanto, a soma* $X + Y = 5 + 7 = 12$.

*Alternativa, (**d**).*

62. (EPCAr-2005) Uma empresa produz quantidades x e y de dois modelos de camisas por hora, utilizando o mesmo processo de produção. A relação entre x e y é dada por $(y-2)(x-3) = 48$. As quantidades x e y que devem ser produzidas por hora de modo a se ter $y = 2x$ são tais que:

a) $x > 10$ e $y < 20$.

b) $x > 20$ e $y < 10$.

c) $x < 20$ e $y < 20$.

d) $x < 10$ e $y < 20$.

Solução 62. *Tem-se,* $(y-2)(x-3) = 48 \Rightarrow (2x-2)(x-3) = 48 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 48 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 42 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$.

Resolvendo a equação resultante, com $a = 1$, $b = -4$ *e* $c = -21$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.(-21)}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 10}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{4 - 10}{2} = \frac{-6}{2} = -3, x_2 = \frac{4 + 10}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Como x *representa uma quantidade de modelos de camisas, deve ser um número inteiro positivo, logo* $x = 7$ *e* $y = 14$.

*Alternativa, (**d**).*

63. (CN-2018) O maior valor inteiro de "k"para que $x^2 + 2018x + 2018k = 0$ tenha soluções reais é:

a) 2018. b) 1010. c) 1009. d) 505. e) 504.

Solução 63. *Para que uma equação do 2º grau admita raízes reais positivas deve-se ter o discriminante não negativo, no caso,* $b^2 - 4ac \geq 0$. *Assim,*

$$2018^2 - 4.2018k \geq 0 \Rightarrow 2018.\cancel{2018} \geq 4.\cancel{2018}k \Rightarrow \frac{1}{4}.4k \leq 2018.\frac{1}{4} \Rightarrow k \leq 504,5.$$

O próximo inteiro menor que $504,4$ *é* 504.

*Alternativa, (**d**).*

64. (EsPCEx-1997) Sejam m e n dois números inteiros tais que m e n são ímpares consecutivos, com $mn = 483$. Nestas condições, o valor de $m + n$ é igual a:

a) 64. b) 52. c) 46. d) 44. e) 32.

Solução 64. *Sendo* m *e* n *dois números inteiros consecutivos, então* $m = 2x + 1$ *e* $n = 2x + 3$. *Assim,*

$$mn = 483 \Rightarrow (2x+1)(2x+3) = 483 \Rightarrow 4x^2 + 6x + 2x + 3 = 483 \Rightarrow 4x^2 + 8x - 480 = 0.$$

Dividindo toda a equação por 4, *resulta em* $x^2 + 2x - 120 = 0$.

Resolvendo a equação resultante, com $a = 1$, $b = 2$ *e* $c = -120$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-120)}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 480}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 22}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-2-22}{8} = \frac{-24}{2} = -12, x_2 = \frac{-2+22}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Portanto, os números procurados são $2.10 + 1 = 21$ *e* $2.10 + 3 = 23$. *Logo,* $m + n = 21 + 23 = 44$.

*Alternativa, (**d**).*

65. (EFOMM-2005)Trabalhando x horas por semana um operário ganha $R\$60,00$ por semana trabalhada. Em um novo emprego, esse mesmo operário, continua ganhando os mesmos $R\$60,00$ por semana, porém trabalha 4 horas a mais por semana e recebe $R\$4,00$ a menos por hora trabalhada. Determine o valor de x.

a) 6. b) 8. c) 10. d) 12. e) 14.

Solução 65. *No antigo emprego, ganhando* 60 *reais por semana e trabalhando* x *horas nessa semana, significa que essa pessoa ganha* $\dfrac{60}{x}$ *por hora trabalhada. Entretanto, no novo emprego para ganhar os mesmos* 60 *reais ele trabalha* 4 *horas a mais, ou seja, ela ganha* $\dfrac{60}{x+4}$ *por hora trabalhada. Mas esse valor significa, que ele recebe* 4 *a menos que a hora trabalhado no emprego anterior, ou seja,* $\dfrac{60}{x} - 4$ *por hora trabalhada.*

A igualdade surge do fato de que a hora trabalhada em relação ao calculo do novo emprego é $\dfrac{60}{x+4}$*, mas essa mesma hora trabalhada equivale a* $\dfrac{60}{x} - 4$ *em relação a uma comparação com o hora trabalhada no emprego anterior, Daí,*

$$\frac{60}{x+4} = \frac{60}{x} - 4 \Rightarrow x\frac{60}{x+4} = \left(\frac{60}{x} - 4\right)x \Rightarrow \frac{60x}{x+4} = 60 - 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(x+4)}\frac{60x}{\cancel{(x+4)}} = (60-4x)(x+4) \Rightarrow 60x = 60x + 240 - 4x^2 - 16x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x^2 - 16x + 240 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a = 1$, $b = 4$ *e* $c = -60$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.(-60)}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 240}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{2} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 16}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-4-16}{2} = \frac{-20}{2} = -10, x_2 = \frac{-4+16}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Como x é um valor positivo por se tratar de quantidades de horas trabalhadas. Então, são 6 horas trabalhadas por semana no antigo emprego.

*Alternativa, (**a**).*

66. (CM/Salvador-2007) A soma dos cubos das raízes da equação $x^2 - 3x + 7 = 0$ é

a) -12. b) -27. c) -36. d) -42. e) -63.

Solução 66. *No caso, vale a seguinte relação entre as raízes e os coeficientes,* $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-3)}{1} = 3$ *e* $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{1} = 7$.

De, $x_1 + x_2 = 3$*, eleva-se ao cubo cada lado da igualdade.*

$$x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow (x_1 + x_2)^3 = 3^3 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2\,(x_1 + x_2) = 27.$$

Substituindo os valores de $x_1 + x_2 = 3$ *e* $x_1x_2 = 7$*, resulta,*

$$x_1^3 + x_2^3 + 3.7.3 = 27 \Rightarrow x_1^2 + x_2^3 = 27 - 63 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = -36.$$

*Alternativa, (**c**).*

67. (EPCAr-2000)A razão entre dois números naturais é igual a $0,333...$ e o quadrado do menor é igual ao maior acrescido de 10 unidades. A soma desses números é igual a

a) 3. b) 5. c) 12. d) 20.

Solução 67. *Tem-se que* $\frac{x}{y} = 0,333... = \frac{1}{3}$. *Dessa fração, percebe-se que* $y > x$, *logo* $x^2 = y + 10$. *Resultando no sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{3} \\ x^2 = y + 10 \end{cases}.$$

Isolando x, *isto é,* $\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{y}{3}$. *Substituindo o valor encontrado na segunda igualdade,*

$$x^2 = y + 10 \Rightarrow \left(\frac{y}{3}\right)^2 = y + 10 \Rightarrow \frac{y^2}{9} = y + 10 \Rightarrow y^2 = 9y + 90 \Rightarrow y^2 - 9y - 90 = 0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a = 1$, $b = -9$ *e* $c = -90$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.1.(-90)}}{2.1} \Rightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 360}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9 \pm \sqrt{441}}{2} \Rightarrow y = \frac{9 \pm 21}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{9 + 21}{2} = \frac{30}{2} = 15, y_2 = \frac{9 - 21}{2} = \frac{-12}{2} = -6.$$

Logo, o valor de $y = 15$, $x = \frac{15}{3} = 5$ *ou* $y = -6$, $x = \frac{-6}{3} = -2$ *são as soluções. Portanto, vale como solução, apenas* 5 *e* 15, *pois o maior divide o menor resultando em* $\frac{1}{3}$, *mas em* $\frac{-2}{-6}$ *o menor divide o maior. No caso, então,* $5 + 15 = 20$.
Alternativa, ***(d)****.*

68. (CM/Fortaleza-2007) Sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

, em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, então $y_1 + y_2$ é igual a

a) $-\frac{5}{2}$. b) $-\frac{3}{2}$. c) $\frac{3}{2}$. d) $\frac{5}{2}$. e) 3.

Solução 68. *Isolando y na segunda equação, tem-se $y = x - 2$. Substituindo o valor encontrado na primeira equação,*

$$x^2 + 3xy = 0 \Rightarrow x^2 + 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 6x = 0.$$

Resolvendo a equação resultante, no caso, uma equação incompleta do 2º Grau. Assim, $x^2 + 3x^2 - 6 = x(4x-6) = 0$. Resultando em, $x_1 = 0$.

E, ainda, $4x_2 - 6 = 0$. Daí,

$$4x_2 - 6 = 0 \Rightarrow 4x_2 = 6 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{4}}\cancel{4}x_2 = 6.\frac{1}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}.$$

Logo, o valor de $y_1 = x_1 - 2$, com $y_1 = 0 - 2 = -2$. E, $y_2 = x_2 - 2$, logo $y_2 = \dfrac{3}{2} - 2$.

Portanto, $y_1 + y_2 = -2 + \dfrac{3}{2} - 2 = \dfrac{3}{2} - 4 = -\dfrac{5}{2}$.

*Alternativa, (**a**).*

69. (CN-1992) O conjunto verdade da equação $\dfrac{x^2-1}{2x+2} - \dfrac{x-1}{2} = -\dfrac{x+1}{2}$ em $\mathbb{Q}$ é:

a) $\varnothing$. b) $\{-1\}$. c) $\mathbb{Q}$. d) $\{-1, 1\}$. e) $\{1\}$.

Solução 69. *Tem-se*

$$\frac{x^2-1}{2x+2} - \frac{x-1}{2} = -\frac{x+1}{2} \Rightarrow \frac{x^2-1}{2x+2} = \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{2} \Rightarrow \frac{x^2-1}{2x+2} = \frac{x-1-x-1}{2} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{2x+2} = -1 \Rightarrow \cancel{(2x+2)}\frac{x^2-1}{\cancel{2x+2}} = (-1)(2x+2) \Rightarrow x^2 - 1 = -2x - 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Como, $x^2 + 2x + 1$ é um T.Q.P., segue

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

*Alternativa, (**b**).*

70. (CN-2009) Qual é a soma dos quadrados das raízes da equação $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} = 1$, com x real e $x \neq \pm 1$?

a) 16. b) 20. c) 23. d) 25. e) 30.

Solução 70. *Tem-se*

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1\Rightarrow\frac{2}{x-1}.\frac{x+1}{x+1}+\frac{3}{x+1}.\frac{x-1}{x-1}=1\Rightarrow\frac{2x+2}{x^2-1}+\frac{3x-3}{x^2-1}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x+2+3x-3}{x^2-1}=1\Rightarrow\frac{5x-1}{x^2-1}=1\Rightarrow\cancel{(x^2-1)}\frac{5x-1}{\cancel{x^2-1}}=1(x^2-1)\Rightarrow x^2-5x=0.$$

Como, $x^2-5x=0$ *é incompleta, segue* $x(x-5)=0$*, resultando em* $x_1=0; x_2=5$*. Daí,* $0^2+5^2=0+25=25$.

*Alternativa, (**d**).*

71. (CN-2015) A solução real da equação $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$ é:

a) múltiplo de 3.

b) par e maior que 17.

c) ímpar e não primo.

d) um divisor de 130.

e) uma potência de 2.

Solução 71. *Elevando ao quadrado os dois lados da igualdade para eliminar o radical,*

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5\Rightarrow\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}\right)^2=5^2\Rightarrow 2x+3+2\sqrt{(x+4)(x-1)}=25\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2-x+4x-4}=25-2x-3\Rightarrow 2\sqrt{x^2+3x-4}=22-2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cancel{2}}.\cancel{2}\sqrt{x^2+3x-4}=\cancel{2}(11-x)\frac{1}{\cancel{2}}\Rightarrow\left(\sqrt{x^2+3x-4}\right)^2=(11-x)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+3x-4=121+x^2-22x\Rightarrow 3x+23x=121+4\Rightarrow 25x=125\Rightarrow x=5.$$

A alternativa que convém, traz um múltiplo de 5.

*Alternativa, (**d**).*

72. (CPCAr-2002) O produto das raízes da equação $7+\sqrt{x^2-1}=x^2$ é:

a) -50. b) -10. c) -5. d) 50.

Solução 72. *Isolando o radical de um lado da igualdade e elevando a expressão resultante ao quadrado,*

$$7+\sqrt{x^2-1}=x^2\Rightarrow\sqrt{x^2-1}=x^2-7\Rightarrow\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=\left(x^2-7\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = x^4 - 14x^2 + 49 \Rightarrow x^4 - 14x^2 + 49 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 - 15x^2 + 50 = 0.$$

Uma equação biquadrada, tomando $y = x^2 \Rightarrow y^2 - 15y + 50 = 0$.

Resolvendo a equação resultante, com $a = 1$, $b = -15$ *e* $c = 50$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4.1.50}}{2.1} \Rightarrow y = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow y = \frac{15 \pm 5}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{15+5}{2} = \frac{20}{2} = 10, y_2 = \frac{15-5}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Mas como, $x^2 = y$, *então,* $x_1^2 = 10 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{10}$ *e* $x_2^2 = 5 \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{5}$. *Daí, tem-se o produto* $\left(-\sqrt{5}\right)\sqrt{5}\left(-\sqrt{10}\right)\sqrt{10} = 5.10 = 50$.

*Alternativa, (**d**).*

73. (CN-2007) Qual é a solução, no conjunto dos números reais, da equação $\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} = x$?

a) $x = \dfrac{1}{2}$.

b) $x = -1$.

c) $x = 1$.

d) $x = -1$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

e) $x = -\dfrac{1}{2}$.

Solução 73. *Elevando a expressão resultante ao quadrado,*

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = x \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^2 = x^2 \Rightarrow \frac{1-x}{2} = x^2 \Rightarrow 1 - x = 2x^2 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação resultante, com $a = 2$, $b = 1$ *e* $c = -1$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.2.(-1)}}{2.2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

São soluções, $x_1 = \dfrac{1}{2}$ *e* $x_2 = -1$.

*Alternativa, (**d**).*

Capítulo 6

Polinômios

Um importante tópico da Álgebra é o estudo dos polinômios de uma única variável, cujo denominação mais precisa é de função polinomial. A ênfase do capítulo se dará aos polinômios de 3º Grau.

6.1 Definição de Polinômios

A definição de polinômios ou função polinomial apresenta poucas diferenças de um autor para outro. A definição a seguir é a adotada por [6]

Definição 6.1.1. *Dada uma sequência de números complexos* $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *A função* $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *é denominada função polinomial ou polinômio, [6].*

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são os coeficientes do polinômio p enquanto que $a_0, a_1x, \ldots, a_nx^n$ são os termos desse polinômio p. Uma maneira mais "econômica"de se escrever um polinômio é adotar sua representação por somatório. No caso,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i.$$

São exemplos de polinômios, $p_1(x) = x^3 + x^2 - 6$, $p_2(x) = 2x^5 + 6x^4 + x^3 + x^2 - x - 1$ e $p_3(x) = x^2 - 9$.

6.1.1 Polinômios idênticos

Dois polinômios p_1 e p_2 são ditos idênticos, se e somente se, os seus coeficientes são ordenadamente, iguais. Assim, se $p_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $p_2(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ são dois polinômios. Então,

$$p_1(x) = p_2(x) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Exemplo 76. *Considere os polinômios $m(x) = ax^3 + 6x^2 - bx + 1$ e $n(x) = 3x^3 + cx^2 + (2 + b)x + 1$. Qual o valor de $a + b + c$ para que os polinômios sejam idênticos?*

Comentário/Resolução 76. *Os coeficientes devem ser iguais na devida ordem de seus termos, ou seja, os coeficientes de x^3, x^2 e x devem ser, respectivamente, iguais. Portanto, $a = 3$, $c = 6$ e $-b = 2 + b$ com $b = -1$. Acarretando em, $a + b + c = 3 - 1 + 6 = 8$.*

6.1.2 Grau dos Polinômios

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chama-se de grau de p, denotado por ∂p, [6], o número natural k tal que $a_k \neq 0$ e $a_i = 0$, para todo $i > k$.

Por exemplos, os polinômios $a(x) = x^3 + 6x^2 - 6x + 1$ e $n(x) = 4x^2 + 4x - 1$, são polinômios tal que $\partial a = 3$ e $\partial b = 2$.

Exemplo 77. *Determine o grau do polinômio $p(x) = (a - 4)x^3 + 3x^2 - x + 1$.*

Comentário/Resolução 77. *O grau do polinômio depende do valor assumido por a, isto é, se $a \neq 4$ o coeficiente de x^3 não é nulo, logo $\partial p = 3$. Mas, se $a = 4$ então o coeficiente de x^3 é nulo e o $\partial p = 2$.*

6.1.3 Valor numérico dos Polinômios

Dado um número complexo a e o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, chama-se valor numérico de p em a valor que se obtém quando $x = a$, isto é,

$$p(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n.$$

Por exemplo, o polinômio $p(x) = x^3 + 5x^2 - x + 7$ toma o seguinte valor quando $x = 2$, $p(2) = 2^3 + 5.2^2 - 2 + 7 = 33$. E ainda, quando $x = -1$ o valor $p(-1) = (-1)^3 + 5.(-1)^2 - (-1) + 7 = 12$.

6.2 Operações com Polinômios

As operações mais comuns envolvendo polinômios são adição, subtração, multiplicação e divisão.

6.2.1 Adição de Polinômios

Dados dois polinômios $p_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $p_2(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, define-se a soma como sendo,

$$p_1(x) + p_2(x) = (p_1 + p_2)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i x^i + b_i x^i).$$

Em sumo, a soma de dois polinômios nada mais é do que a soma dos coeficientes daqueles termos de mesmo grau, ou seja uma redução dos termos semelhantes.

Um importante resultado, refere-se ao grau da soma entre dois polinômios.

Proposição 19. *Se p, f e $p+f$ são polinômios não nulos, então o grau de $p+f$ é menor ou igual ao maior dos graus entre p e f, isto é, $\partial(p+f) \leq max\{\partial p, \partial f\}$.*

Demonstração *Seja $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $f(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ tal que $\partial p = n$ e $\partial f = m$, com $n \neq m$. Considerando $n > m$. Então há $c_i = a_i + b_i$ de modo que;*

$$c_m = a_m + b_m = a_m + 0 = a_m \neq 0, e c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \ \forall i > m.$$

Portanto, $\partial(p+f) = n = max\{\partial p, \partial f\}$.

Se $n = m$, tem-se $c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0$, $\forall i > m$; $c_m = a_m + b_m$ pode ser nulo, então $\partial(p+f) \leq max\{\partial p, \partial f\}$, [6].

∎

6.2.2 Subtração de Polinômios

Dados dois polinômios $p_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $p_2(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, define-se a diferença como $p_1 - p_2 = p_1 + (-p_2)$, logo

$$p_1(x) - p_2(x) = (p_1 - p_2)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i x^i - b_i x^i).$$

Em sumo, a subtração de dois polinômios nada mais é do que a somar um polinômio ao oposto de outro, reduzindo sempre que possível os termos semelhantes.

Exemplo 78. *Considere os polinômios* $p_1(x) = 2x^3+x^2-x+1$ *e* $p_2(x) = x^4+x^3+4x^2-x-1$. *Obtenha,*

a) $p_1(x) + p_2(x)$*;*

b) $p_2(x) - p_1(x)$*.*

Comentário/Resolução 78. *Considerando, separadamente, adição e subtração.*

Da soma dos polinômios, tem-se

$$\begin{aligned} p_1(x) + p_2(x) &= 2x^3 + x^2 - x + 1 + x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 1, \\ &= x^4 + (2x^3 + x^3) + (x^2 + 4x^2) + (-x - x) + (1 - 1), \\ &= x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Da subtração dos polinômios, tem-se

$$\begin{aligned} p_2(x) - p_1(x) &= p_2(x) + (-p_1(x)), \\ &= x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 1 - (2x^3 + x^2 - x + 1), \\ &= x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 1 - 2x^3 - x^2 + x - 1, \\ &= x^4 + (x^3 - 2x^3) + (4x^2 - x^2) + (-x + x) + (-1 - 1), \\ &= x^4 - x^3 + 3x^2 - 2. \end{aligned}$$

6.2.3 Multiplicação de Polinômios

Dados dois polinômios $p_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $p_2(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, define-se produto desses polinômios por p_1p_2 o polinômio , $p_1p_2(x)$

$$p_1(x).p_2(x) = (p_1p_2)(x) = \sum_{i=0}^{k} c_k x^k.$$

Onde $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-1} x^k$.

Em sumo, o produto de dois polinômios é o resultado da aplicação da propriedade distributiva reiterada vezes seguida por uma redução de termos semelhantes. Em outras, palavras todo o termo do polinômio p_1 multiplica cada termo do polinômio p_2.

Exemplo 79. *Considere os polinômios* $p_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ *e* $p_2(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$ *. Obtenha,* $p_1(x)p_2(x)$*.*

Comentário/Resolução 79. *Tem-se*

$$\begin{aligned} p_1(x)p_2(x) &= (2x^3 + 3x^2 - 1)(x^4 + x^3 - x^2 + 1), \\ &= 2x^3(x^4 + x^3 - x^2 + 1) + 3x^2(x^4 + x^3 - x^2 + 1) - 1(x^4 + x^3 - x^2 + 1), \\ &= 2x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 2x^3 + 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^2 - x^4 - x^3 + x^2 - 1, \\ &= 2x^7 + 5x^6 + x^5 - 4x^2 + x^3 + 4x^2 - 1. \end{aligned}$$

Exemplo 80. *Considere os polinômios* $p_1(x) = 5x^2 + x - 1$ *e* $p_2(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ *. Obtenha,* $p_1(x)p_2(x)$*.*

Comentário/Resolução 80. *Tem-se*

$$\begin{aligned} p_1(x)p_2(x) &= (5x^2 + x - 1)(2x^3 - x^2 + 1), \\ &= 5x^2(2x^3 - x^2 + 1) + x(2x^3 - x^2 + 1) - 1(2x^3 - x^2 + 1), \\ &= 10x^5 - 5x^4 + 5x^2 + 2x^4 + -x^3 + x - 2x^3 + x^2 - 1, \\ &= 10x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

Assim como a soma, o produto de dois polinômios possui um importante resultado dessa operação, referente ao grau.

Proposição 20. *Se* p *e* f *e* $p + f$ *são polinômios não nulos, então o grau de* pf *é igual a soma dos graus de* p *e* f*, isto é,* $\partial(pf) = \partial p + \partial f$*.*

Demonstração *Seja* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *e* $f(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ *tal que* $\partial p = n$ *e* $\partial f = m$*, seja*

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

Tem-se: $c_{n+m} = a_n . b_m \neq 0$ *,* $c_k = 0, \forall k > n + m$ *. Então,* $\partial(pf) = n + m \Rightarrow \partial(pf) = \partial p + \partial f$*, [6].*

■

6.2.4 Divisão de Polinômios

Dados dois polinômios $p(x)$(dividendo) e $d(x)$(divisor), dividir $p(x)$ por $d(x)$ é determinar dois outros polinômios $q(x)$(quociente) e $r(x)$(resto) de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

i. $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$;

ii. $\partial r < \partial d$.

Observação 6.2.4.1. *Chama-se polinômio nulo, o polinômio* $0(x)$ *cujo coeficientes são todos nulos. Então, se* $p(x) = 0(x)$ *segue que* $q(x) = r(x) = 0(x)$.

Observação 6.2.4.2. *Se* $p(x) \neq 0(x)$, *mas* $\partial p < \partial d$. *Então,* $q(x) = 0(x)$ *e* $r(x) = p(x)$.

Observação 6.2.4.3. *Se* $p(x) \neq 0(x)$ *e* $r(x) = 0(x)$. *Então* $p(x) = q(x)d(x)$ *e a divisão dos polinômios é exata.*

Para dividir dois polinômios o grande problema está em determinar os polinômios $q(x)$ e $r(x)$. Para realizar tal determinação será apresentado alguns métodos e teoremas.

Métodos de divisão

A) Método de Descartes

O **método de Descartes** ou **método dos coeficientes a determinar**, baseia-se nos seguintes fatos:

i. $\partial q = \partial p - \partial d$, uma consequência imediata. De fato, $p(x) = q(x)d(x) = r(x) \Rightarrow \partial(qd + r) = \partial p \Rightarrow \partial q + \partial d = \partial p$;

ii. $\partial r < \partial d$.

Esse método é aplicado da seguinte forma: (1) calcular ∂q e ∂r; (2) construir os polinômios $q(x)$ e $r(x)$, deixando incógnitos os seus coeficientes; (3) determinar os coeficientes impondo a igualdade $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$.

B) Método das chaves

O **método das Chaves** efetua a divisão de maneira semelhante a divisão numérica, dividindo o termo de maior grau de $p(x)$ pelo termo de maior grau de $d(x)$, deixando assim restos parciais. O processo se repete até o termino da divisão.

Exemplo 81. *Sejam os polinômios* $p_1(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2$ *e* $p_2(x) = x^2 + x + 1$. *Obtenha,* $\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$.

Comentário/Resolução 81. *Resolvendo pelos dois métodos apresentados.*

Pelo método de Descartes. Tem-se que $\partial q = \partial p_1 - \partial p_2 = 4 - 2 = 2$. *Portanto,* $q(x)$ *tem grau dois e como* $\partial r < \partial p_2 = 2$, $r(x)$ *tem grau um. Representa-se genericamente, por* $q(x) = ax^2 + bx + c$ *e* $r(x) = dx + e$. *Assim,*

$$p_1(x) = p_2(x)q(x) + r(x) \Rightarrow x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2 = (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c) + (dx + e).$$

Resultando, em

$$\begin{aligned}
x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2 &= (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c) + (dx + e),\\
&= x^2(ax^2 + bx + c) + x(ax^2 + bx + c) + ax^2 + bx + c + dx + e,\\
&= ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c + dx + e,\\
&= ax^2 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (c + b + d)x + c + e.
\end{aligned}$$

Da igualdade de polinômios segue que, $a = 1$, $a + b = 1 \Rightarrow a + 1 = 1 \Rightarrow b = 0$, $a + b + c = 3 \Rightarrow c + 0 + 1 = 3 \Rightarrow c = 2$, $c + b + d = 1 \Rightarrow d + 2 + 0 = 1 \Rightarrow d = -1$ *e* $c + e = 2 \Rightarrow 2 + e = 2 \Rightarrow e = 0$.

Pelo método das chaves,

$$\begin{array}{rrr|l}
x^4 + x^3 + 3x^2 & & + x + 2 & x^2 + x + 1 \\ \cline{4-4}
-x^4 - x^3 - x^2 & & & x^2 + 2 \\ \cline{1-1}
& 2x^2 & + x + 2 & \\
& -2x^2 & - 2x - 2 & \\ \cline{2-3}
& & -x &
\end{array}$$

Portando, $q(x) = x^2 + 2$ *e* $r(x) = -x$.

Exemplo 82. *Encontre o quociente de* $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x - 1$ *por* $x^3 + 2x^2 - x + 1$.

Comentário/Resolução 82. *Pelo método das chaves,*

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +4x^3 & +3x^2 & +x & -1 & x^3+2x^2-x+1 \\ \cline{6-6} -x^4 & -2x^3 & +x^2 & -x & & x+2 \\ \cline{1-4} & 2x^3 & +4x^2 & & -1 & \\ & -2x^3 & -4x^2 & +2x & -2 & \\ \cline{2-5} & & & 2x & -3 & \end{array}$$

Teoremas sobre divisão

Teorema 1. ***(Teorema do Resto)***

O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x-a$ é igual ao valor numérico de p em a, isto é, $r(x)=p(a)$.

Demonstração *Da definição de divisão, tem-se*

$$p(x)=q(x).(x-a)+r(x),$$

onde, q e r representam, respectivamente, o quociente e o resto. Como $x-a$ tem grau 1, o resto r é nulo ou tem grau zero, logo, r é um polinômio constante.

Calculando o valor numérico, em a, dos polinômios da igualdade acima,

$$p(a)=q(a).(a-a)+r(a)\Rightarrow p(a)=q(a).0+r(a)\Rightarrow p(a)=r(a).$$

Como $r(x)$ é constante. Então, $r(x)=p(a)$.

■

Teorema 2. ***(Teorema de D'Alembert)***

Um polinômio $p(x)$ é divisível $x-a$ se, e somente se, a anula $p(x)$, isto é, $r(x)=0$ se $p(a)=0$.

Demonstração *De acordo com o Teorema do Resto, tem-se*

$$p(a)=r(x)\Rightarrow r(x)=p(a)=0,$$

então, como $r(x)=0$ a divisão é exata, logo $p(x)$ é divisível por $x-a$.

■

Teorema 3. *Se um polinômio $p(x)$ é divisível separadamente por $x - a$ e $x - b$, com $a \neq b$, então $p(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.*

Demonstração *Sejam $q(x)$ o quociente e $r(x) = cx + d$ o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - a)(x - b)$, pois é uma divisão por um polinômio de grau 2º, logo o resto tem grau 1, pelo menos. Então,*

$$p(x) = q(x)(x - a)(x - b) + r(x) \Rightarrow p(x) = q(x)(x - a)(x - b) + (cx + d).$$

Calculando o valor numérico, em a, desses polinômios, tem-se que

$$p(a) = q(a)(a - a)(a - b) + (ca + d) \Rightarrow 0 = q(a).0.(a - b) + (ca + d) \Rightarrow ca + d = 0.$$

Agora, calculando o valor numérico, em b, desses polinômios, tem-se

$$p(b) = q(b)(b - a)(b - b) + (cb + d) \Rightarrow 0 = q(a)(a - b).0 + (cb + d) \Rightarrow cb + d = 0.$$

Dessas duas igualdades, resulta o sistema,

$$\begin{cases} ca + d = 0 \\ cb + d = 0 \end{cases},$$

de onde vem que $c = d = 0$. Portanto, $r(x) = 0$.

■

Exemplo 83. *Determine a real, de modo que o polinômio*

$f(x) = ax^3 + (2a - 10)x^2 + (3a - 20)x + 4a$ seja divisível por $g(x) = x - 1$. Obtenha o quociente.

Comentário/Resolução 83. *Sendo $f(x)$ divisível por $x - 1$, tem-se que $f(1) = 0$. Daí, $f(1) = a.1^3 + (2a - 10).1^2 + (3a - 20).1 + 4a = 0 \Rightarrow a + 2a - 10 + 3a - 20 + 4a = 0 \Rightarrow 10a = 30 \Rightarrow a = 3$. Assim, o polinômio f é dado por $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 11x + 12$.*

Pelo método das chaves,

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 - 4x^2 - 11x + 12 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-3x^3 + 3x^2 \qquad\qquad\quad & 3x^2 - x - 12 \\
\hline
-x^2 - 11x \qquad & \\
x^2 \quad - x \qquad & \\
\hline
-12x + 12 & \\
12x - 12 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Exemplo 84. *Determine o polinômio f do segundo grau que, dividido por x, $x-1$ e $x-2$, apresenta restos 4, 9 e 18, respectivamente.*

Comentário/Resolução 84. *Considerando $f(x) = ax^2 + bx + c$, então*

$$
\begin{aligned}
f(0) = 4 = a.0^2 + b.0 + c \Rightarrow c = 4, \\
f(1) = 9 = a.1^2 + b.1 + c \Rightarrow a + b = 5, \\
f(2) = 18 = a.2^2 + b.2 + c \Rightarrow 4a + 2b = 12.
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema encontrado, tem-se $a = 2$ e $b = 3$. O polinômio procurado é $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$.

Exemplo 85. *Determine a e b reais de modo que $f(x) = x^2+(a-b)x+2a$ e $g(x) = x^3+(a+b)$ sejam ambos divisíveis por $2 - x$.*

Comentário/Resolução 85. *Tem-se,*

$$
\begin{aligned}
f(2) = 0 = 2^2 + (a-b).2 + 2a \Rightarrow 4 + 2a - 2b + 2a = 0 \Rightarrow 4a - 2b = -4, \\
g(2) = 0 = 2^3 + a + b \Rightarrow 8 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -8.
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema encontrado, tem-se $a = \dfrac{-10}{3}$ e $b = \dfrac{-14}{3}$.

Exemplo 86. *Sendo 5 e -2 os restos da divisão de um polinômio f por $x-1$ e $x+3$, respectivamente, determine o resto da divisão de f por $(x-1)(x+3)$.*

Comentário/Resolução 86. *Pelo Teorema do Resto, tem-se $f(1) = 5$ e $f(-3) = -2$.*

Sejam $q(x)$ e $r(x) = ax + b$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de f por $(x-1)(x+3)$. Tem-se, $f(x) = q(x)(x-1)(x+3) + (ax + b)$.

Tomando o valor numérico desses polinômios em 1 *e* -3,

$$f(1) = q(1)(1-1)(1+3) + (a.1+b) \Rightarrow 5 = q(1).0.(1+3) + a + b \Rightarrow a + b = 5,$$

$$f(-3) = q(-3)(-3-1)(-3+3) + (a.(-3)+b) \Rightarrow -2 = q(-3)(-3-1).0 - 3a + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3a + b = -2.$$

Resolvendo o sistema, $a = \dfrac{7}{4}$ *e* $b = \dfrac{13}{4}$*. Portanto,* $r(x) = \dfrac{7}{4}x + \dfrac{13}{4}$.

6.3 Raízes de um Polinômio

Determinar a raiz ou raízes de um polinômio $p(x)$ é um dos grandes desafios referentes a esse tópico. Sendo assim, defini-se como sendo o valor numérico de r que anula o polinômio, isto é, $p(r) = 0$. A definição, estende-se a uma equação polinomial do tipo $p(x) = f(x)$.

Definição 6.3.1. *Dada uma uma equação polinomial* $p(x) = f(x)$*, chama-se raiz da equação todo número que, substituído no lugar de* x*, torna a sentença verdadeira. Assim, o número* r *é raiz de* $p(x) = f(x)$ *se, e só se,* $p(r) = f(r)$ *é uma sentença verdadeira, [6].*

O intuito do trabalho, nesse momento, é priorizar a resolução de equações do 3º grau proveniente de uma equação polinomial.

O seguinte teorema será apresentado e considerado sem sua demonstração, por ser consequência de outro teorema(Teorema Fundamental da Álgebra) por exigir conhecimentos inapropriados para o nível presente.

Teorema 4. *Todo polinômio* $P(x)$ *de grau* n*, pode ser decomposto em* n *fatores do primeiro grau, isto é,* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = a_n(x-r_1)(x-r_2)\dot{(}x-r_n)$.

Esse teorema garante, na verdade, que todo polinômio pode ser decomposto num produto de Stevin de n fatores.

6.3.1 Multiplicidade das raízes

Um polinômio possui raiz de multiplicidade m quando $p(x) = q(x).(x-r)^m$, com $q(r) \neq 0$, isto é, o polinômio é divisível por uma potência de $(x-r)$. E como dizer que r é raiz do polinômio m vezes. Por exemplo, o polinômio $p(x) = x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 4x^2 - x - 1$ é igual a $(x+1)^3(x^2+x-1)$, a raiz -1 tem multiplicidade 3.

Exemplo 87. *O valor de n de modo que a equação $x^3 + nx - 2 = 0$ admita uma raiz de multiplicidade 2.*

Comentário/Resolução 87. *Sejam a e b e, ainda, considerando b como a raiz de multiplicidade 2. Assim,*

$$\begin{aligned} x^3 + nx - 2 &= (x-a)(x-b)^2, \\ &= (x-a)(x^2 + b^2 - 2bx), \\ &= x^3 + b^2x - 2bx^2 - ax^2 - ab^2 - 2abx, \\ &= x^3 - (a+2b)x^2 + (b^2 - 2ab)x - ab^2. \end{aligned}$$

Da igualdade de polinômios, resulta que $a + 2b = 0$, $b^2 - 2ab = n$ e $ab^2 = 2$. Da primeira relação, resulta que $a = -2b$ e substituindo na última igualdade, tem-se

$$ab^2 = 2 \Rightarrow -2b.b^2 = 2 \Rightarrow b^3 = \frac{2}{-2} \Rightarrow b = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

Com, $b = -1$, resulta da primeira relação que $a = -2$. Assim,

$$n = b^2 - 2ab \Rightarrow n = (-1)^2 - 2.(-1).(-2) = 1 - 4 = -3.$$

6.3.2 Relações de Girard

As relações de Girard estabelecem um relação direta entre as raízes da equação e os coeficientes da mesma. Tal relação é conhecida para uma equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$, tal que $r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a}$ e $r_1r_2 = \dfrac{c}{a}$. Essas relações são válidas para qualquer polinômio de grau n proveniente de uma equação polinomial. Entretanto, prioriza-se neste trabalho, apenas as relações para polinômios do 3º grau.

Proposição 21. *Se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e r_1, r_2 e r_3 suas raízes, então são válidas as relações: $r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{-b}{a}$, $r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = \dfrac{c}{a}$ e $r_1r_2r_3 = \dfrac{-d}{a}$.*

Demonstração *Seja $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e sua forma decomposta em fatores do* *primeiro grau,* $p(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$. *Então,*

$$\begin{aligned}
ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3), \\
&= a(x - r_1)(x^2 - r_3x - r_2x + r_2r_3), \\
&= a(x^3 - r_3x^2 - r_2x^2 + r_2r_3x - r_1x^2 + r_1r_3x + r_1r_2x - r_1r_2r_3), \\
&= a\left(x^3 - (r_1 + r_2 + r_2)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)x - r_1r_2r_3\right), \\
&= ax^3 - a(r_1 + r_2 + r_2)x^2 + a(r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)x - ar_1r_2r_3.
\end{aligned}$$

Da igualdade de polinômios resulta, $r_1+r_2+r_3 = \dfrac{-b}{a}$, $r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3 = \dfrac{c}{a}$ *e* $r_1r_2r_3 = \dfrac{-d}{a}$.

$\blacksquare$

Exemplo 88. *(ITA-1980) Se as dimensões, em centímetros, de um paralelepípedo reto-retângulo são dadas pelas raízes da equação* $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$, *então o comprimento da diagonal é igual a:*

a) $\dfrac{1}{12}$ *cm.* *b)* $\dfrac{9}{24}$ *cm.* *c)* $\dfrac{\sqrt{24}}{12}$ *cm.* *d)* $\dfrac{\sqrt{61}}{12}$ *cm.* *e)* $\dfrac{\sqrt{73}}{12}$ *cm.*

Comentário/Resolução 88. *Sendo, a, b e c as raízes do polinômio. Pelas Relações de Girard:*

$$\begin{cases} a + b + c = \dfrac{-(-26)}{24} = \dfrac{13}{12} \\ ab + bc + ac = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8} \\ abc = \dfrac{-(-1)}{24} = \dfrac{1}{24} \end{cases}.$$

Como a diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é dado por $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. *Então,*

$$a + b + c = \frac{13}{12} \Rightarrow (a + b + c)^2 = \left(\frac{13}{12}\right)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = \frac{169}{144} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2.\frac{3}{8} = \frac{169}{144} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{169}{144} - \frac{3}{4} = \frac{169 - 108}{144} = \frac{61}{144}.$$

Portanto, $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\dfrac{61}{144}} = \dfrac{\sqrt{61}}{12}$. *Letra, (d).*

6.3.3 Teorema das Raízes Racionais

Teorema 5. *Se uma equação polinomial* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$*, com* $a_n \neq 0$*. De coeficientes inteiros, admite uma raiz* $\dfrac{p}{q}$*, com p,q inteiros e* $q \neq 0$*, e ainda, p e p primos entre si, então p é divisor de* a_0 *e q é divisor de* a_n*.*

Demonstração *Se* $\dfrac{p}{q}$ *é uma raiz de* $p(x)$*, tem-se*

$$a_0 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$$

Multiplicando por q^n*:*

$$a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_np^n = 0$$

Isolando a_np^n*,*

$$a_np^n = -q\left[a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^n - 1\right]$$

Tomando, $\alpha = [a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^n - 1]$*, tem-se que* α *é inteiro, pois todos os termos* $a_0, a_, \ldots a_n$ *são inteiros. Daí,* $a_np^n = -q\alpha \Rightarrow -\alpha = \dfrac{a_np^n}{q}$*. Isso significa que* a_np^n *é divisível por q e, como* p^n *e q são primos entre si,* a_n *é divisível por q.*

■

De modo análogo, verifica-se que a_0 *é divisível por p.*

Exemplo 89. *Quais as possíveis raízes inteiras da equação* $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$*?*

Comentário/Resolução 89. *Pelo Teorema das raízes Racionais, as possíveis raízes inteiras são* 1*,* -1*,* 2*,* -2*,* 4 *e* -4*. Dessas possíveis raízes. O* -2 *é a única raiz inteira. Pois,* $(-2)^3 + 4(-2)^2 + 2(-2) - 4 = -8 + 16 - 4 - 4 = 0$*.*

Efetuando a divisão por $x + 2$*:*

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 4x^2 + 2x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2}
-\,x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & x^2 + 2x - 2 \\ \hline
2x^2 + 2x \quad\; & \\
-\,2x^2 - 4x \quad\; & \\ \cline{1-1}
-\,2x - 4 & \\
2x + 4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Resolvendo, a equação proveniente da divisão, $x^2+2x-2=0$*, encontra-se as raízes* $\sqrt{3}-1$ *e* $-\sqrt{3}-1$*. Realmente,* -2 *é a raiz inteira da equação.*

Exemplo 90. *Encontre os valores inteiros de* m *para os quais a equação* $x^3 - mx^2 + mx - m^2 - 1 = 0$ *tem pelo menos uma raiz inteira. Para cada um desses valores de* m*, ache as raízes inteiras das equações (do terceiro grau) correspondentes.*

Comentário/Resolução 90. *Considerando que* a *seja a raiz inteira da equação. Então,*

$$x^3 - mx^2 + mx - m^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^3 - ma^2 + am - m^2 = 1,$$

fatorando o lado esquerdo dessa última expressão, segue

$$a^2(a-m) + m(a-m) = 1 \Rightarrow (a^2+m)(a-m) = 1.$$

Como a *é inteiro e* m *deve ser inteiro, então* (a^2+m) *e* $(a-m)$ *são inteiros. Para que o produto de dois inteiros seja* 1*, ambos são* 1 *ou* -1*.*

Caso (1). Para $a^2+m=1$ *e* $a-m=1$*, tem-se que* $a=1+m$*, da segunda relação. Substituindo esta última na primeira equação, resulta*

$$a^2+m=1 \Rightarrow (1+m)^2+m=1 \Rightarrow 1+m^2+2m+m=1 \Rightarrow m^2+3m=0.$$

Logo, $m_1=0$ *ou* $m_2=-3$*, acarretando em,* $a_1=1$ *ou* $a_2=-2$*. Isso significa que as equações* $x^3-1=0$ *e* $x^3+3x^2-3x-10=0$*, possuem, respectivamente,* 1 *e* -2 *como raízes inteiras.*

Caso (2). Para $a^2+m=-1$ *e* $a-m=-1$*, tem-se que* $a=m-1$*, da segunda relação. Substituindo esta última na primeira equação, resulta*

$$a^2+m=-1 \Rightarrow (m-1)^2+m=-1 \Rightarrow 1+m^2-2m+m=-1 \Rightarrow m^2-m+2=0.$$

Como $m^2-m+2=0$ *não admite solução real, então esse caso não serve para que* m *admita raízes inteiras.*

Portanto, são validos os valores de m *do primeiro caso.*

6.4 Aplicações nos Exames Militares

74. (EEAr-2018) Sejam os polinômios $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$, $B(x) = ax^3 - bx^2 - 4x + 1$ e $P(x) = A(x) - B(x)$. Para que $P(x)$ seja de grau 2, é necessário que

a) $a \neq -1$ e $b = -2$.

b) $a = 1$ e $b = -2$.

c) $a = 1$ e $b \neq -2$.

d) $a \neq 1$ e $b \neq 2$.

Solução 74. *Tem-se* $A(x) - B(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4 - (ax^3 - bx^2 - 4x + 1) = x^3 + 2x^2 - x - 4 - ax^3 + bx^2 + 4x - 1 = (1-a)x^3 + (2+b)x^2 + 3x - 5$.

Deve-se ter $1 - a = 0$, *então* $a = 1$. *E,* $2 + b \neq 0$, *tal que* $b \neq -2$.

*Alternativa, (**c**).*

75. (EFOMM-2016) Sabendo que $\dfrac{5}{2}$ é uma raiz do polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$, a soma das outras raízes é igual a:

a) -2. b) 0. c) 10. d) 1. e) -1.

Solução 75. *Efetuando a divisão de* $2P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 18x + 20$ *por* $2x - 5$, *cujo modificação foi realizada para se ter valores inteiros. Pelo método das chaves, segue*

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -6x^2 & -18x & +20 & 2x-5 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & +10x^2 & & & 2x^2+2x-4 \\ \cline{1-2}
 & 4x^2 & -18x & & \\
 & -4x^2 & +10x & & \\ \cline{2-3}
 & & -8x & +20 & \\
 & & 8x & -20 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Resultando no quociente $2x^2 + 2x - 4$. *Acarretando na equação,* $2x^2 + 2x - 4 = 0$. *Para saber a soma dessas raízes, basta lembrar que* $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

*Alternativa, (**e**).*

76. (EN-2000) Dividindo-se $(2x^3 - x^2 + mx + 8)$, onde $m \in \mathbb{R}$, por $(x + 2)$ obtém-se o resto igual a -6. Qual o polinômio que representa o quociente da divisão de $(4x^3 - 7x + 3)$ por $(2x - m)$?

a) $-2x^2 + 3x + 1$.

b) $2x^2 + 2x - 1$.

c) $-x^2 + 2x - 1$.

d) $x^2 + 3x + 1$.

e) $2x^2 - 3x + 1$.

Solução 76. *Sendo,* $p(x) = 2x^3 - x^2 + mx + 8$. *então,* $p(-2) = -6$. *Assim,*

$$2.(-2)^3 - (-2)^2 - 2m + 8 = -6 \Rightarrow -16 - 4 - 2m + 8 = -6 \Rightarrow -2m = 6 \Rightarrow m = -3.$$

Agora é só efetuar a divisão de $4x^3 - 7x + 3$ *por* $2x + 3$. *Pelo método das chaves,*

$$\begin{array}{rrr|l}
4x^3 & & -7x+3 & 2x+3 \\ \cline{4-4}
-4x^3 & -6x^2 & & 2x^2-3x+1 \\ \cline{1-2}
 & -6x^2 & -7x & \\
 & 6x^2 & +9x & \\ \cline{2-3}
 & & 2x+3 & \\
 & & -2x-3 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Alternativa, ***(e)***.

77. (EFOMM-2014) O valor da soma de a e b, para que a divisão de $f(x) = x^3 + ax + b$ por $g(x) = 2x^2 + 2x - 6$, seja exata é,

a) -1. b) 0. c) 1. d) 2. e) 3.

Solução 77. *Para a divisão ser exata,* $r(x) = 0$ *e* $q(x) = mx + n$. *Assim,* $f(x) = g(x)q(x)$. *Daí,*

$$\begin{aligned}
x^3 + ax + b &= (2x^2 + 2x - 6)(mx + n), \\
&= 2x^2(mx + n) + 2x(mx + n) - 6(mx + n), \\
&= 2mx^3 + 2nx^2 + 2mx^2 + 2nx - 6mx - 6n, \\
&= 2mx^3 + (2n + 2m)x^2 + (2n - 6m)x - 6n.
\end{aligned}$$

Resultando,

$$2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}; 2n + 2m = 0 \Rightarrow 2n = -2m \Rightarrow n = -\frac{1}{2};$$

$a = 2n - 6m = -1 - 3 = -4$ *e* $b = -6n = -\frac{1}{2}.(-6) = 3$. *Assim,* $a + b = -4 + 3 = -1$.

*Alternativa, (**a**).*

78. (EN-2003) Se uma das raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$ é a média harmônica das outras duas, então $9pq - 2q^3$ é igual a:

a) 18. b) 24. c) 27. d) 36. e) 81.

Solução 78. *Sendo, a, b e c as raízes da equação. Pelas relações de Girard:*

$$\begin{cases} a + b + c = \dfrac{-q}{1} = -q \\ ab + bc + ac = \dfrac{p}{1} = p \\ abc = -1 \end{cases}.$$

Supondo a, como a raiz que é a média harmônica de b e c, então

$$a = \frac{2}{\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}} \Rightarrow a = \frac{2}{\dfrac{b+c}{bc}} \Rightarrow a = \frac{2bc}{b+c}.$$

Substituindo o valor de a na relação, $ab + bc + ac = a(b + c) + bc = p$, *segue*

$$\frac{2bc}{\cancel{b+c}}(\cancel{b+c}) + bc = p \Rightarrow 2bc + bc = p \Rightarrow 3bc = p \Rightarrow bc = \frac{p}{3}.$$

Substituindo o valor de bc na relação, $abc = -1$, *segue que* $a = -\frac{3}{q}$.

Substituindo o valor de a e bc na relação, $a = \frac{2bc}{b+c}$, *segue que*

$$-\frac{3}{q} = \frac{2.\dfrac{q}{3}}{b+c} \Rightarrow b + c = \frac{2.\dfrac{q}{3}}{-\dfrac{3}{q}} \Rightarrow b + c = \frac{2q}{3}.\left(-\frac{q}{3}\right) = -\frac{2q^2}{9}.$$

Da relação, $a + b + c = -q$, *segue que*

$$a + b + c = -q \Rightarrow -\frac{3}{q} - \frac{2q^2}{9} = -p \Rightarrow p = \frac{3}{q} + \frac{2q^2}{9}.$$

Então, o valor $9pq - 2q^3 = 9q\left(\frac{3}{q} + \frac{2q^2}{9}\right) - 2q^3 = 27 + 2q^3 - 2q^3 = 27.$

*Alternativa, (**c**).*

79. (EEAr-2014) A equação $x^3 - 4x^2 + 5x + 3 = 0$ possui as raízes m,p e q. O valor da expressão $\dfrac{m}{pq} + \dfrac{p}{mq} + \dfrac{q}{mp}$ é

a) -2. b) -3. c) 2. d) 3.

Solução 79. *Pelas relações de Girard:*

$$\begin{cases} m+p+q = \dfrac{-(-4)}{1} = 4 \\ mp+qp+mq = \dfrac{5}{1} = 5 \\ mpq = \dfrac{-3}{1} = -3 \end{cases}.$$

De,

$$m+p+q = 4 \Rightarrow (m+p+q)^2 = 4^2 \Rightarrow m^2+p^2+q^2+2(mp+pq+mq) = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2+p^2+q^2+2.5 = 16 \Rightarrow m^2+p^2+q^2 = 6.$$

Assim, $\dfrac{m}{pq} + \dfrac{p}{mq} + \dfrac{q}{mp} = \dfrac{m^2}{mpq} + \dfrac{p^2}{mpq} + \dfrac{q^2}{mpq} = \dfrac{m^2+p^2+q^2}{mpq} = \dfrac{6}{-3} = -2$.

*Alternativa, (**a**).*

80. (EN-2010) Sejam a,b,c as raízes da equação de valor $12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$. Qual o valor de $\sqrt{a^3+b^3+c^3+1}$?

a) $\dfrac{2\sqrt{21}}{9}$. b) $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. c) $\dfrac{2\sqrt{7}}{9}$. d) $\dfrac{\sqrt{21}}{9}$. e) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

Solução 80. *Pelas relações de Girard:*

$$\begin{cases} a+b+c = \dfrac{-(-4)}{12} = \dfrac{1}{3} \\ ab+bc+ac = \dfrac{-3}{12} = -\dfrac{1}{4} \\ abc = \dfrac{-1}{12} \end{cases}.$$

Tem-se,

$$(a+b+c)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc = \frac{1}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+\cancel{3}.\frac{1}{\cancel{3}}.\left(-\frac{1}{4}\right)-3.\left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{27} \Rightarrow a^3+b^3+c^3-\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{27} \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = \frac{1}{27}.$$

Dai, tem-se $\sqrt{a^3+b^3+c^3+1} = \sqrt{\dfrac{1}{27}+1} = \sqrt{\dfrac{28}{27}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{9}$.

*Alternativa, (**a**).*

81. (IME-2018) Sejam x_1,x_2 e x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo a um número real, o valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ é igual a:

a) $32 - a$. b) $48 - 2a$. c) 48. d) $48 + 2a$. e) $32 + a$.

Solução 81. *Pelas relações de Girard,*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -a \\ x_1x_2x_3 = 16 \end{cases}.$$

Tem-se,

$$(x_1+x_2+x_3)^3 = 0^3 \Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-3x_1x_2x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3.0.(-a) - 3.16 = 0 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 48.$$

*Alternativa, (**c**).*

82. (IME-2015) O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tem raízes α, $-\alpha$ e $\frac{1}{\alpha}$. Portanto o valor da soma $b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2}$ é:

a) -2. b) -1. c) 0. d) 1. e) 2.

Solução 82. *Pelas relações de Girard,*

$$\begin{cases} \alpha + (-\alpha) + \frac{1}{\alpha} = -a \\ \alpha(-\alpha) + (-\alpha)\frac{1}{\alpha} + \alpha\frac{1}{\alpha} = b \\ \alpha(-\alpha)\frac{1}{\alpha} = -c \end{cases}.$$

Da primeira relação tem-se, $a = -\frac{1}{\alpha}$, *da segunda relação,* $b = -\alpha^2$ *e da terceira relação,* $c = \alpha$.

Então, $b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2} = -\alpha^2 + \alpha^2 + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\alpha + \frac{-\alpha^2}{\alpha^2} = -1 - 1 = -2.$

*Alternativa, (**a**).*

83. (ITA-2009) Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$; com coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\frac{a}{b}$ é igual a

a) -3. b) $-\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{3}$. d) 1. e) 3.

Solução 83. *Como as raízes estão em P.G., pode-se considerar que elas são do tipo* $\frac{k}{q}$, k *e* kq.

Das relações de Girard, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{k}{q} + k + kq = \frac{a}{2} \\ \frac{k}{q}k + kqk + \frac{k}{q}kq = \frac{b}{2} \\ k\frac{k}{q}kq = \frac{54}{2} \end{cases}.$$

Da primeira relação tem-se, $\frac{a}{2} = k\left(1 + \frac{1}{q} + q\right)$, *da segunda relação,* $\frac{b}{2} = k^2\left(1 + \frac{1}{q} + q\right)$ *e da terceira relação,* $k^2 = 27$, *resultando em* $k = 3$.

Daí, $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{\cancel{2}}}{\frac{b}{\cancel{2}}} = \frac{k\cancel{\left(1 + \frac{1}{q} + q\right)}}{k^2\cancel{\left(1 + \frac{1}{q} + q\right)}} = \frac{1}{k} = \frac{1}{3}$.

Alternativa, (**c**).

84. (AFA-1998) As raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ formam uma Progressão Geométrica de razão

a) 2. b) 3. c) 4. d) 5.

Solução 84. *Pelo Teorema das Raízes Racionais, tem-se que as possíveis raízes inteiras do polinômio, são* 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8.

No caso, 1 *é uma raiz. Daí, efetuando a divisão por* $x - 1$:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 - 7x^2 + 14x - 8 & x - 1 \\ \cline{3-3} & -x^3 + x^2 & x^2 - 6x + 8 \\ \hline & -6x^2 + 14x & \\ & 6x^2 - 6x & \\ \hline & 8x - 8 & \\ & -8x + 8 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Resolvendo, a equação $x^2 - 6x + 8 = 0$, *encontra-se as raízes* 2 *e* 4. *Portanto, as raízes* 1, 2, 4 *formam uma P.G. de razão* $q = 2$.

*Alternativa, (**a**).*

85. (ITA-2013) A soma de todos os números reais x que satisfazem a equação

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19\left(4^{\sqrt{x+1}}\right)$$

é igual a

a) 8. b) 12. c) 16. d) 18. e) 20.

Solução 85. *Tomando,* $2^{\sqrt{x+1}} = X$:

$(2^3)^{\sqrt{x+1}} + 44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19\left((2^2)^{\sqrt{x+1}}\right) \Rightarrow X^3 - 19X^2 + 44X + 64 = 0.$

Pelo Teorema das raízes racionais, uma raiz divide 64. *No caso,* 4, *pois,*

$4^3 - 19.4^2 + 44.4 + 64 = 64 - 304 + 176 + 64 = 0.$

Dai, segue a divisão de $X^3 - 19X^2 + 44X + 64$ *por* $X - 4$,

$$\begin{array}{rl|l}
 & X^3 - 19X^2 + 44X + 64 & X - 4 \\ \cline{3-3}
 & -X^3 \ \ + 4X^2 & X^2 - 15X - 16 \\ \hline
 & -15X^2 + 44X & \\
 & 15X^2 - 60X & \\ \hline
 & -16X + 64 & \\
 & 16X - 64 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Logo, resulta na equação, $(X^2 - 15X - 16)(X - 4) = 0 \Rightarrow X^2 - 15X - 16 = 0.$

Resolvendo a equação resultante, com $a = 1$, $b = -15$ *e* $c = -16$.

$X = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow X = \dfrac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4.1.(-16)}}{2.1} \Rightarrow X = \dfrac{15 \pm \sqrt{225 + 64}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{15 \pm \sqrt{289}}{2} \Rightarrow X = \dfrac{9 \pm 17}{2} \Rightarrow X_1 = \dfrac{15 + 17}{2} = \dfrac{32}{2} = 16, X_2 = \dfrac{15 - 17}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1.$

Logo, são soluções possíveis, apenas $X = 4$ *e* $X = 16$. *Portanto,* $2^{\sqrt{x+1}} = 16 = 2^4 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 4 \Rightarrow x = 15$. *E,* $2^{\sqrt{x+1}} = 4 = 2^2 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x = 3$. *As raízes são* 15 *e* 3, *cuja soma é* 18.

*Alternativa, (**d**).*

Capítulo 7

Conclusão

O trabalho aborda vários aspectos da Álgebra elementar. Com isso espera-se que o aluno da Educação básica tenha um material de apoio que sirva de ferramenta auxiliadora no processo de aprendizagem da Álgebra. O trabalho não é apenas voltado para o aluno. Docentes da rede pública podem, também, aproveitar o material para enriquecer materiais de estudos elaborados através da abordagem proposta e da ampla gama de exemplos e aplicações apresentados.

Com o trabalho e seus estudos sobre Álgebra estima-se que o aluno da rede pública, tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio possam ter um material de estudo que auxiliem no ingresso de instituições militares, sejam elas do Ensino Médio, Técnico ou Superior, independente da opção de carreira, isto é, no Exercito, Marinha ou Aeronáutica.

Por fim, espera-se, também, que o trabalho sirva como fonte de inspiração para alunos que não só desejem ingressar no ensino militar, mas que possam ganhar conhecimento extra ou, ainda, aprimorar conhecimentos adquiridos anteriormente.

Bibliografia

[1] ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. Algebra. Vol 1. Lima: Lumbreras, 2013.

[2] BIGODE, Antônio Lopes. **Matemática do cotidiano**. 1 Ed. São Paulo: Scipione, 2015.

[3] BOYER, Carl. GOMIDE, Elza(tradução) **História da matemática**. 2 Ed. São Paulo: Editora Edgar Blucher, 1996.

[4] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**: combinátoria e probabilidade. Vol 5. 3 Ed. São Paulo: Atual, 1977.

[5] IRACEMA, Mori; DULCE, Satiko Onaga. **Matemática**:idéias e desafios. 18 Ed. São Paulo: Saraiva, 2015.

[6] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**: complexos, polinômios e equações. Vol 6. 7 Ed. São Paulo: Atual, 2005.

[7] MENDES, Marcelo. Polos Olímpicos de Treinamento. Produtos notáveis. Disponível em: < `http://poti.impa.br/uploads/material_teorico/cqvxcxke2hsg8.pdf` >. Acesso em 09 Abr. 2018.

[8] MILIES, César Polcino; COELHO, Sônia Pitta. **Números**: Uma introdução à matemática. 3 Ed. São Paulo: EdUsp,2013.

[9] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; JORGE, Miguel. **Álgebra I**. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora, 1974.

[10] OLIVEIRA, Marcelo Rufino; PINHEIRO, Márcio Rodrigo. **Elementos da Matemática**: álgebra, proporções e frações. Vol 0. 3 Ed. Editora Vest Seller, 2016.

[11] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: TERCEIRO E QUARTO CICLOS DO ENSINO FUNDAMENTAL. Disponível em:< `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf` >. Acesso em: 02 nov. 2017.

[12] SARDELLA, Antônio; MATTA, Edilson.**Matemática**. São Paulo:Ática, 1981.