



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU $N > 2$ NO ENSINO MÉDIO, POR QUE NÃO?

Marcia Walkiria da Silva Santos

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira

Campina Grande - PB
Outubro/2018

S237r Santos, Marcia Walkiria da Silva.
Resolução numérica de equações polinomiais de grau $N > 2$ no ensino médio, por que não? / Marcia Walkiria da Silva Santos. – Campina Grande, 2018.
62 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira".
Referências.

1. Equações – Estudo e Ensino. 2. Equações Polinomiais – Ensino Médio. 3. Matemática – Estudo e Ensino. 4. Métodos Numéricos. 5. Soluções Aproximadas. I. Ferreira, Marcelo Carvalho. II. Título.

CDU 517.9(07)(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU $N > 2$ NO ENSINO MÉDIO, POR QUE NÃO?

por

Marcia Walkiria da Silva Santos[†]

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

[†]Bolsista CAPES

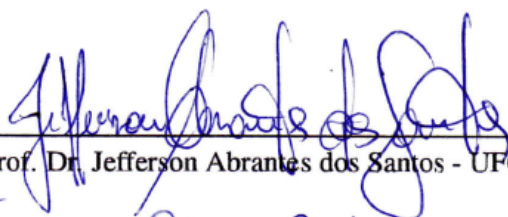
RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU $N > 2$ NO ENSINO MÉDIO, POR QUE NÃO?

por

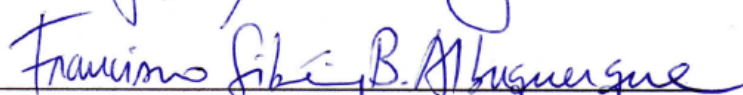
Marcia Walkiria da Silva Santos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG



Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque - UEPB



Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Outubro/2018

Dedicatória

À minha família, em especial a minha mãe, Reinalda Maria da Silva Santos, e a meu esposo, Daniel Luis Lindenmeyer, por compreenderem todos os momentos em que estive ausente, como também por me incentivarem a ser vitoriosa.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, por sustentar-me nesta vida, fornecendo-me energia para que todos os dias eu consiga enfrentar os meus desafios.

Aos meus pais, Reinalda Maria da Silva Santos e Ernande Delfino dos Santos, pela paciência, compreensão e dedicação que me deram toda a vida, oferecendo-me o melhor que podiam dentro de suas condições, e sempre incentivando o estudo.

A meu irmão, Bruno Leonardo da Silva Santos, mesmo distante geograficamente, proferia palavras de incentivo nos momentos angustiantes pelo qual passei, sempre confiando em mim.

A minha irmã, Glauce Angela da Silva Santos, que não pertence mais ao nosso plano terrestre, mas sei o quanto está feliz pelo meu sucesso.

A meu esposo, Daniel Luis Lindenmeyer, por estar sempre presente, seja nas inúmeras aflições ou felicidades que tive durante esse curso. Acompanhando e incentivando cada momento pelo qual passei, através de gestos de amor, carinho, apoio, além do seu companheirismo desses anos.

A meu orientador, Marcelo Carvalho Ferreira, pela compreensão, paciência, dedicação, compromisso e ensinamentos, possibilitando assim a realização desse trabalho.

Aos professores, Jefferson Abrantes dos Santos e Francisco Sibério Bezerra Albuquerque por aceitarem participar da Banca.

Ao corpo docente do PROFMAT/UFCG, além da direção e administração, que trabalham incessantemente para que tenhamos um ensino de qualidade, especialmente ao coordenador Luiz Antônio da Silva Medeiros.

Agradeço aos meus amigos da turma PROFMAT-UFCG 2016, pelas contribuições em conjunto das nossas valiosas aprendizagens e pelas inúmeras palavras de incentivos nos momentos difíceis que atravessamos nesse período. Não foram somente amigos de estudos, os tenho para o resto da vida.

A todas as pessoas que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização desse sonho.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

A Matemática é vista pela maioria dos nossos alunos como algo sem sentido, como se fosse apenas um conhecimento inútil. Muitos problemas envolvendo situações do dia-a-dia recaem na resolução de uma equação polinomial de grau superior a dois. Estes problemas não são apresentados aos alunos devido a ausência de fórmulas algébricas para resolvê-los. Todavia, vivemos numa era digital e necessitamos de inovação no ensino. Diante disso, aplicamos alguns métodos numéricos simples, intuitivos, de fácil compreensão, implementados com a utilização dos softwares Excel e Geogebra, para uma abordagem mais realística de tais problemas.

Palavras Chaves: Equações polinomiais. Métodos numéricos. Soluções aproximadas.

Abstract

For the most of the students, Mathematics is viewed as a nonsense stuff, just only a useless knowledge. A number of problems involving day-to-day situations lead to a resolution of a polynomial equation of degree greater than two. These problems are not introduced to the students due to the lack of algebraic formulas to solve them. However, as we have been living in a digital age, it has been required some innovations in teaching. In this way, we apply some simple numerical methods, intuitive, of easy comprehension, implemented with the use of Excel and Geogebra, for a more realistic approach of such problems.

Keywords: Polynomial equations. Numerical methods. Approximate solutions.

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Objetivos	3
1.2	Organização	3
1.3	Caráter da Pesquisa	4
1.4	Público-Alvo	4
2	O desenvolvimento histórico das equações polinomiais	5
3	As soluções gerais das equações polinomiais de grau $n \leq 4$	12
3.1	Equações polinomiais de 3º grau	12
3.2	Equações polinomiais de 4º grau	16
4	Como solucionar equações polinomiais de grau superior a 4	19
4.1	Métodos Numéricos	19
4.1.1	Método da Bisseccção	21
4.1.2	Método da Secante	26
5	Atividades de sistematização de conteúdo	31
5.1	Atividade 1: Construção de um caixa com volume dado	31
5.2	Atividade 2: Dimensionamento de um reservatório	33
5.3	Atividade 3: Cálculo da taxa mensal de juros em uma compra em prestações	36
5.4	Atividade 4: Cálculo do ponto de encontro de duas curvas	39
5.5	Atividade 5: Percalços da produção de tilápia	41
5.6	Atividade 6: Controle de populações	46
5.7	Atividade 7: Desmatamento da Amazônia Legal	48
5.8	Atividade 8: Aplicação de equação polinomial na trigonometria	51
6	Conclusões	54
	Referências	56
A	Análise de convergência do método da secante	58

Capítulo 1

Introdução

O acesso à informação pode ser descrito conforme uma trajetória exponencial, na qual, em questão de minutos, uma notícia é viralizada e fica conhecida mundialmente, tudo isso devido às inovações tecnológicas que estamos vivenciando. Infelizmente, o ensino da Matemática não avança nessa proporção, isto é, continuamos com a mesmice, quase sempre retratando os conteúdos da mesma maneira de quando descobertos.

Há cerca de 4000 anos, o conhecimento matemático era exclusivamente motivado a partir de situações envolvendo problemas práticos, como, por exemplo, a troca e estocagem de produtos, divisão de terras produtivas, entre outros. Observamos que muitas vezes as soluções para tais problemas envolviam (ainda que implicitamente) o uso de equações polinomiais de grau 1 e 2. As equações polinomiais do 1º grau eram resolvidas pelo método denominado *falsa posição*, já as do 2º grau eram solucionadas por *completamento de quadrados*, sendo este último ainda hoje utilizado.

Apenas na primeira metade do século XVI surgiram, na Itália, idéias que levaram às soluções das equações polinomiais de grau 3 e 4, com as equações de grau superior resistindo às tentativas de resolução. No século XIX, devido ao esforço de grandes matemáticos, sobretudo Lagrange, Abel e Galois, demonstrou-se que as equações polinomiais gerais cujo grau era superior a 4 são irresolúveis por meio de métodos análogos àqueles utilizados para as equações de grau até 4, qual sejam, métodos que envolvem apenas as operações aritméticas fundamentais mais extração de raízes.

Em que pese o fracasso da Álgebra no que tange à resolução das equações polinomiais, com o advento do Cálculo Infinitesimal, essas equações puderam ser tratadas através da utilização dos denominados métodos numéricos. Embora esse conteúdo não seja geralmente abordado no Ensino Médio, a exemplo das Escolas Públicas do Estado de Pernambuco, onde a autora exerce atividades de ensino. O *propósito* desse trabalho é demonstrar que alguns métodos numéricos são simples e de fácil entendimento, podendo ser perfeitamente explicados no Ensino Médio. Haja vista que necessitamos apenas das operações fundamentais para executá-los e, uma vez que os aliamos aos recursos computacionais disponíveis e conhecidos pela sociedade, tudo se torna ainda mais leve, compreensivo e prático. É possível

desenvolver soluções para problemas realísticos interessantes, utilizando métodos numéricos implementados em softwares como o Excel e o Geogebra, conforme ilustraremos com alguns exemplos neste trabalho, em áreas tais como: Meio ambiente, Biologia, Engenharia, Matemática Financeira, Trigonometria, entre outros.

Por meio de situações mais reais, mais próximas do imaginário do aluno, pretendemos despertar e instigar o interesse dele pela Matemática e pelo conhecimento científico, mesmo que seja timidamente. Daremos a oportunidade de terem um contato com equações polinomiais de grau superior a dois e, por conseguinte, com o relevante conceito de *solução aproximada*.

1.1 Objetivos

O objetivo geral do nosso trabalho é propor a resolução de equações polinomiais de grau $n > 2$ no Ensino Médio, através da inserção de métodos numéricos com o auxílio de softwares computacionais, tendo os seguintes objetivos específicos:

- Conhecer um breve histórico das equações polinomiais;
- Observar o desenvolvimento referente às deduções das fórmulas para resolução de equações polinomiais de grau 3 e 4;
- Entender os métodos numéricos da bisseção e secante;
- Disseminar na mente dos jovens o conceito de solução aproximada para uma equação;
- Aplicar o método numérico adequadamente para a resolução das equações polinomiais, principalmente as de grau superior a 2, utilizando para tal os softwares Excel e Geogebra;
- Atualizar o ensino das equações polinomiais no Ensino Médio das Escolas Públicas do Estado de Pernambuco.

1.2 Organização

A organização do trabalho está composta de 6 capítulos, de acordo com a descrição abaixo:

- Capítulo 1 - Esta parte contempla o resumo, a introdução e os objetivos gerais e específicos, explanando de forma sintética o conteúdo desse trabalho;
- Capítulo 2 - Apresentamos um breve histórico a respeito das equações polinomiais, desde as contribuições dos povos antigos (egípcios e babilônios) até o século XIX

com Abel e Galois, quando finalmente se demonstrou que não existia uma fórmula algébrica geral para resolução de equações polinomiais de grau superior a quatro;

- Capítulo 3 - Exibimos toda o desenvolvimento das resoluções das equações polinomiais de grau 3 e 4, seguindo as idéias de Del Ferro, Tartaglia e Ferrari;
- Capítulo 4 - Abordamos os métodos numéricos da bissecção e secante, os quais não necessitam de um conhecimento superior ao do Ensino Médio para a sua compreensão;
- Capítulo 5 - Mostramos aplicações de equações polinomiais de grau superior a dois, desde situações reais instigando o tímido senso científico, até problemas clássicos da Matemática, através da utilização do método numérico com o auxílio dos softwares Excel e Geogebra;
- Capítulo 6 - Apresentamos as nossas considerações finais.

1.3 Caráter da Pesquisa

Essa pesquisa possui caráter tipo bibliográfico, ou seja, realizamos a partir da busca de informações por meio dos registros disponíveis, seja consultas a livros, artigos publicados na internet, revistas acadêmicas e em sites de periódicos.

1.4 Público-Alvo

O nosso público-alvo são professores do Ensino Médio e alunos de graduação em Matemática que tenham interesse em inovar a abordagem metodológica utilizada atualmente a respeito de como solucionar equações polinomiais de grau superior a 2, por meio de uma forma prática, intuitiva e contemporânea, uma vez que fazemos uso da tecnologia para auxiliar-nos. Ainda, pode ser utilizada pelos professores como uma ideia para o desenvolvimento de um projeto em sala de aula com uma turma do Ensino Médio.

Capítulo 2

O desenvolvimento histórico das equações polinomiais

É bastante difícil definir o início do uso da Matemática pela humanidade. Sabe-se todavia que há cerca de 10.000 anos, no Oriente Médio, onde atualmente localiza-se o Iraque, surgiu a necessidade de dividir a terra e a produção entre as pessoas. Para tal feito foram desenvolvidos métodos matemáticos para a divisão de terras, como também técnicas para estocagem da produção excedente.

No tocante à existência de problemas relacionados ao uso de equações, há registros históricos, grafados em papiros egípcios, como, por exemplo, o *Papiro de Moscou*, de cerca de 1850 a.C., e o *Papiro de Ahmes (ou Rhind)* que data cerca de 1650 a.C. Ambos abordavam, dentre outros, problemas envolvendo equações polinomiais de 1º grau.

Figura 2.1: Papiro de Ahmes (Rhind)



As soluções apresentadas para tais problemas utilizavam o *método de falsa posição* ou *regra do falso*, método pouco conhecido e não utilizado atualmente, que entretanto perdurou

até muito recentemente (vide, por exemplo, [19]).

E no mesmo período referenciado aos papiros supracitados, os babilônios, matematicamente mais evoluídos do que os egípcios, já vivenciavam experiências com problemas relacionados às equações polinomiais do 2º grau. Igualmente aos abordados nos papiros egípcios, tais problemas usualmente advinham do dia-a-dia. Basicamente, os problemas de 2º grau enfrentados pelos Babilônios eram resolvidos pelo método do *completamento de quadrados*. Um exemplo de problema extraído de um texto babilônico é o seguinte:

Multipliquei comprimento e largura obtendo área 10. O excesso do comprimento sobre a largura multiplicou por si mesmo e o resultado por 9 e esta área é aquela obtida multiplicando o comprimento por si mesmo. Quais são o comprimento e a largura?

Hoje nós escreveríamos tal problema como

$$xy = 10 \quad \text{e} \quad 9(x - y)^2 = x^2, \quad (2.1)$$

diferentemente daqueles tempos, onde todos os problemas eram resolvidos verbalmente devido à inexistência da álgebra simbólica. É fácil verificar que (2.1) leva a uma equação do quarto grau sem termos em x e x^3 , podendo então ser resolvida como uma equação quadrática em x^2 .

Durante toda a antiguidade clássica, período compreendido aproximadamente do século VIII a.C. à queda do Império Romano em V d.C., o estudo da Álgebra (em particular, o estudo das equações) foi realizado por meio de uma abordagem mais geométrica definida para a Matemática pelos antigos gregos. Talvez ainda como consequência do fracasso do sonho pitagórico de exprimir todos os fenômenos universais por meio de números. Além disso, o desinteresse dos romanos pela Matemática contribuiu para uma certa estagnação do estudo desta. Porém, com a derrocada do império romano e ascensão do império mulçumano durante a Idade Média, a situação se modificou. Obras como *Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah*, traduzida aproximadamente como "O livro da restauração e do balanceamento", e *Kitab al-jami wa'l tafriq bi hisab al hindi*, traduzida aproximadamente como "Livro sobre o método hindu de adição e subtração", ambas do matemático *Al-Khwarizmi*, foram responsáveis, respectivamente, pela popularização da Álgebra e de um novo sistema de numeração desenvolvido pelos indianos, hoje conhecido como sistema de numeração indo-arábico. É importante dizer que tais obras influenciaram, naquela época, o conhecimento mundial da Matemática. Um dos mais significativos resultados desse período mulçumano é, sem dúvida, a solução algébrica geral da equação do 2º grau, cujas raízes são dadas pela fórmula amplamente conhecida. Até então porém nenhum indício de estudo sistemático da equação geral do 3º grau.

Os séculos XI, XII e XIII presenciaram o surgimento das primeiras universidades da Europa Ocidental, mas é somente em fins do século XV e início do século XVI, em Bologna, na Itália, que surgem investigações sistemáticas sobre a solução algébrica geral da equação do 3º grau. A história desse surgimento é uma das páginas mais belas e ricas da Matemática.

Figura 2.2: Niccoló Fontana



No ano de 1500, nasceu em Bréscia, Itália, um matemático cuja história está fortemente relacionada à descoberta de uma fórmula para as raízes da equação polinomial do 3º grau. Seu nome era *Niccoló Fontana* (ver figura 2.2), sua alcunha *Tartaglia*. A alcunha teve origem em uma tragédia: Aos 11 anos, refugiou-se com sua mãe em uma igreja para esconder-se de tropas francesas que invadiram sua cidade. Insensivelmente, soldados adentraram a igreja golpeando quem estivesse na frente. Niccoló foi gravemente ferido. Despejado entre os cadáveres, conseguiu reestabelecer-se, porém teve uma enorme cicatriz na boca, o que provocou defeito na sua fala, por isso o apelidaram de *Tartaglia*, que significa em seu idioma, gago.

Tartaglia, por não ter subsídios financeiros, estudava por si mesmo, nos raros livros que conseguia obter. Tornou-se professor de ciências em províncias e cidades italianas, e publicou diversas obras, sendo o primeiro a realizar cálculos na técnica da artilharia. Porém, evidenciou-se nas suas disputas sobre as equações do 3º grau.

Um fato importante ocorreu por volta de 1510, Scipione del Ferro, matemático italiano, desenvolveu uma forma geral de resolver as equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Anos depois, após a morte de del Ferro, um de seus alunos, Antonio Maria Fior, que conhecia o método do mestre, tentou se aproveitar, desafiando Tartaglia. Um desafio que consistia na resolução de problemas que cada deveria propor ao outro. Fior, obviamente, apresentaria problemas que dependessem da equação acima mencionada. Tartaglia, sabendo dias antes do confronto do plano de Fior, empenhou-se ao máximo e aprendeu a resolver, não somente o tipo de equação proposta por Fior, como também aprendeu a resolver as do tipo

$$x^3 + px^2 + q = 0,$$

que Fior não conhecia. Como era de se esperar, o desfecho desse desafio foi a humilhação sofrida por Fior, que não solucionou nenhuma das questões apresentadas por Tartaglia, este tendo solucionado todas as questões propostas por aquele.

Figura 2.3: Girolamo Cardano



A fama de Tartaglia, após vencer essa disputa, chegou ao conhecimento de *Girolamo Cardano* (ver figura 2.3), matemático nascido em Pavia, Itália, em 1501, e que, na época, ocupava uma cadeira de Medicina na Universidade de Pavia e era membro do Colégio Médico de Milão. Ele soube que Tartaglia havia resolvido casos particulares da equação cúbica e que mantinha segredo para utilizá-las em um momento propício. Assim, Cardano convidou-o para uma conversa e insistiu para que este revelasse o segredo. Após, muita persistência, Tartaglia o revelou.

Essa revelação ocorreu com a condição de que Cardano jurasse guardar segredo. Entretanto, Cardano quebrou a promessa.

Em 1545, Cardano publicou sua principal obra, o *Ars Magna*. Lá divulgou a fórmula para as raízes da equação cúbica do tipo

$$x^3 + px + q = 0,$$

a ele revelada por Tartaglia, fazendo a este rasgados elogios, porém acrescentando que Scipione del Ferro já havia chegado aos mesmos resultados cerca de 30 anos antes. Tartaglia, naturalmente, sentiu-se traído, tendo prontamente publicado sua versão dos fatos e denunciado Cardano por perjúrio. O fato é que hoje em dia, a fórmula descoberta por Tartaglia é conhecida como *fórmula de Cardano*. Essa fórmula será apresentada no próximo capítulo, e tem natureza similar a fórmula para as raízes da equação do 2º grau. Ou seja, envolve apenas as quatro operações aritméticas fundamentais e expressões radicais. Além disso, mediante uma mudança de variáveis adequada, a equação geral do 3º grau é reduzida a uma equação cúbica do tipo acima. Sendo assim, a solução algébrica geral da equação do 3º grau foi levada a cabo.

Como era de se esperar, os matemáticos seguiram incessantemente à procura da solução algébrica geral da equação do 4º grau. Um desafio lançado a Cardano pelo matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi, a saber, "*Dividir 10 em três partes numa proporção contínua de forma que o produto das duas primeiras seja 6*", foi a motivação para que *Ludovico Ferrari*, matemático nascido em Bolonha em 1522, discípulo de Cardano, encontrasse tal solução. Após algumas manipulações algébricas, o desafio reduzia-se a resolver a equação

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0.$$

Cardano, sem saber resolvê-lo, repassou-o para Ferrari, que determinou uma fórmula algébrica geral, sendo um método bastante trabalhoso, porém utilizando apenas as quatro operações aritméticas fundamentais mais expressões radicais. Igualmente às de Tartaglia, Cardano

publicou as fórmulas encontradas por Ferrari no *Ars Magna*. O método de Ferrari será apresentado no terceiro capítulo.

Duas indagações surgiram após a resolução das equações polinomiais do 4º grau, são elas:

- As equações de grau superior a 4 sempre possuem raízes ?
- Já que as equações polinomiais de grau até 4º são dadas por expressões envolvendo as quatro operações aritméticas usuais mais radicais, o mesmo é válido para as equações de grau superior ?

Segundo [7], a primeira pergunta é verdadeira conforme o Teorema Fundamental da Álgebra que será enunciado no quarto capítulo. Alguns estudiosos como Girard, D'Alembert, Argand, Weierstrass, Euler, Laplace, Gauss, Lagrange deram suas contribuições para a demonstração desse importante teorema.

Com relação a segunda pergunta, a resposta não é simples e foram precisos mais de 200 anos após a publicação de *Ars Magna*, para que algo relevante viesse à tona. Em 1770, o grande matemático francês *Joseph Louis Lagrange* conseguiu um resultado profundo, o qual unificava os argumentos nos casos das equações polinomiais 3º e 4º graus e que também deixava claro porque tal argumento falhava no caso da equação polinomial do 5º grau. A partir daí, o sentimento de resposta negativa para a pergunta acima começou a se fortalecer entre os matemáticos.

Em 1815, *Niels Henrik Abel*, matemático norueguês que estudava na Escola Catedral de Oslo, chegou a acreditar que havia deduzido uma fórmula algébrica geral para as raízes da equação polinomial do 5º grau, tendo submetido seu trabalho à apreciação de Ferdinand Degen, então o maior matemático da Escandinávia, que não encontrou falhas, mas solicitou esclarecimentos. Em sua revisão, Abel descobriu então que sua solução estava incorreta, passando a ser uma obsessão resolvê-la. Em 1823, demonstrou que, exceto em casos particulares, de um modo geral é impossível resolver as equações polinomiais do 5º grau utilizando apenas as quatro operações aritméticas fundamentais mais extração de raízes. Abel pagou a impressão desse trabalho com o intuito de alcançar o reconhecimento da cúpula matemática da época, o que infelizmente não aconteceu. Devido a má alimentação, fruto de sua pobreza extrema, Abel faleceu precocemente em abril de 1829 após contrair tuberculose. Consternados, Legendre, Schumacher, Crelle, Gauss e tantos outros, elogiaram o raro talento condenado ao abandono. Somente em 1830, a Academia de Ciências de Paris concedeu seu Grande Prêmio a Abel e Jacobi pelas contribuições feitas à Matemática.

Figura 2.4: Évariste Galois



Coube a outro gênio da Matemática nesse período a resposta negativa definitiva. Seu nome era *Évariste Galois* (ver figura 2.4). Em 1828, Galois acreditou ter encontrado a fórmula geral para as raízes da equação polinomial do 5º grau, incorrendo em erro parecido ao de Abel. Em 1829, publicou seu primeiro artigo: *Demonstração de um teorema sobre as frações contínuas periódicas*. Todavia, já havia escrito um trabalho intitulado *Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo*, apresentado à Academia de Ciências de Paris. Baseando-se nas leis de permutações, Galois desenvolveu uma forma incomparável de lidar com as equações polinomiais.

Publicou, em 1830, três artigos do mais alto nível: *Análise de uma Memória sobre a Resolução Algébrica de Equações*, *Resolução de Equações Numéricas e Teoria dos Números*. Fez um manuscrito para a apreciação da Academia de Ciências de Paris, e, após alguns meses, Cauchy o leu, mas no dia de apresentar aos seus pares, adoeceu. Posteriormente, solicitou seu manuscrito à secretaria que não o encontrou. Refez, enriquecendo-o ainda mais, a fim de disputar o Grande Prêmio de Matemática, sob o título: *Memória sobre as condições de resolubilidade das equações por radicais*, sendo Fourier seu relator. Infelizmente, Fourier faleceu antes de apreciá-lo. E mais uma vez seu trabalho ficou perdido, sem ter concorrido ao prêmio.

Por volta de 1830, Galois também envolveu-se em movimentos políticos clandestinos, sendo então preso. No cárcere, soube da desaprovação de seu trabalho, enviado pela 3ª vez à Academia. Inconformado providenciou a publicação de suas descobertas. Escreveu também um artigo esclarecendo suas teorias. Eram distintas das teorias de Abel. Enquanto este empregou instrumentos da Álgebra Clássica, aquele inventava uma nova teoria, marcando o início da Álgebra Moderna. Mais precisamente, a solução apresentada por Galois caracterizava as equações polinomiais resolúveis por radicais por meio do grupo de automorfismos de um determinado corpo e é considerada uma das grandes conquistas da Álgebra no século XIX.

Infelizmente, Galois faleceu muito jovem. Por causa de uma paixão não correspondida acabou por envolver-se em um duelo. Sendo golpeado no abdômen, agonizou lentamente e faleceu em 31 de maio de 1832.

Após 14 anos de sua morte, em 1846, o matemático Joseph Liouville, se deu conta da importância das obras de Galois e as publicou em *Obras Matemáticas de Évariste Galois*. Em 1870, Camille Jordan classificou as teorias de Galois como fundamentais. E a sua teoria

consagração aconteceu em 1895, a partir do estudo do norueguês Sophus Lie, sob o título: *Influência de Galois sobre o Desenvolvimento da Matemática*.

Conforme relatamos anteriormente, as soluções algébricas gerais das equações polinomiais de 3º e 4º graus existem, contudo são bastante trabalhosas e complexas. No terceiro capítulo, apresentaremos as deduções destas soluções realizadas pelos notáveis matemáticos acima mencionados.

Informamos ao leitor que toda essa belíssima história das equações polinomiais está fundamentada nas obras de [6], [10], [11], [13] e [20].

Capítulo 3

As soluções gerais das equações polinomiais de grau $n \leq 4$

Na Matemática, as equações são consideradas de extrema importância, haja vista que muitos dos problemas fundamentais as envolvem direta ou indiretamente.

Como dissemos no segundo capítulo, podemos obter a solução geral de uma equação polinomial de grau $n \leq 4$ por meio de uma fórmula explícita envolvendo apenas os coeficientes da equação submetidos às quatro operações aritméticas fundamentais, ou seja, adição, subtração, multiplicação e divisão, mais extração de raízes.

Em virtude do amplo conhecimento atual a respeito das soluções gerais das equações de 1º e 2º graus, apresentaremos neste capítulo somente as soluções gerais das equações de 3º e 4º graus. Informamos ainda ao leitor, que esse capítulo está fundamentado nas obras de [6], [11], [10].

3.1 Equações polinomiais de 3º grau

Uma *equação polinomial real do 3º grau* é uma equação do tipo

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (3.1)$$

em que $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$, e $a_0 \neq 0$.

A equação

$$x^3 + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)x^2 + \left(\frac{a_2}{a_0}\right)x + \frac{a_3}{a_0} = 0, \quad (3.2)$$

é equivalente à (3.1), logo é suficiente analisarmos as equações cujo coeficiente de x^3 é igual a 1. Para uma melhor compreensão didática, adotaremos na equação (3.2): $\frac{a_1}{a_0} = a$, $\frac{a_2}{a_0} = b$ e $\frac{a_3}{a_0} = c$, ou seja,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (3.3)$$

Para solucionarmos a equação (3.3), utilizaremos a fórmula de Cardano, que em verdade é devida a Tartaglia e del Ferro. Para isso, vamos realizar uma mudança da variável com o intuito de reduzi-la a uma do tipo

$$x^3 + px + q = 0,$$

onde $p, q \in \mathbb{R}$. Tomamos $x = y - \frac{a}{3}$. Daí

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0. \quad (3.4)$$

Após desenvolvermos a equação (3.4), obtemos

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0,$$

ou seja,

$$y^3 + py + q = 0, \quad (3.5)$$

com $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$.

A simples e valiosa estratégia realizada por Tartaglia foi expressar uma potencial raiz y da equação (3.5) como soma de 2 parcelas. Assim, y será constituída da seguinte maneira:

$$y = A + B. \quad (3.6)$$

A questão é: Como determinar A e B ? Por se tratar de uma raiz da equação (3.5), a substituímos na própria equação, obtendo

$$(A + B)^3 + p(A + B) + q = 0. \quad (3.7)$$

Após desenvolvermos a equação (3.7), chegamos a seguinte equação:

$$A^3 + B^3 + (A + B)(3AB + p) + q = 0.$$

Se pudermos concluir que a raiz y pode ser decomposta em números A e B tais que

$$\begin{cases} A^3 + B^3 = -q, \\ 3AB + p = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

então estamos feitos. Ora, (3.8) é equivalente a

$$\begin{cases} A^3 + B^3 = -q, \\ A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27}, \end{cases}$$

um problema relacionado a uma equação do 2º grau. Mais precisamente, conhecemos a soma e o produto dos números A^3 e B^3 e, assim sendo, a equação do 2º grau

$$z^2 - Sz + P = 0, \quad (3.9)$$

em que

$$\begin{cases} P = A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27}, \\ S = A^3 + B^3 = -q \end{cases}$$

garante a existência dos números A^3 e B^3 e, portanto, a existência de A e B . Aplicando a fórmula para determinar as raízes de uma equação polinomial de 2º grau em (3.9), deduzimos que

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ e } B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Ao extrairmos as raízes cúbicas dos números acima, temos

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (3.10)$$

e,

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \quad (3.11)$$

Substituindo os resultados (3.10) e (3.11) em (3.6), deduzimos, finalmente, a famosa Fórmula de Cardano:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad (3.12)$$

que fornece uma raiz da equação (3.5).

Observação 3.1 *Inicialmente, imaginou-se que a equação polinomial real geral do 3º grau possuía apenas uma raiz. Com o advento dos números complexos, aprendemos que qualquer número não nulo tem exatamente n raízes enésimas. Portanto, há três números complexos $\alpha + \beta i$ tais que*

$$(\alpha + \beta i)^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Analogamente, há outros 3 números complexos $\gamma + \delta i$ tais que

$$(\gamma + \delta i)^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Observamos que ao determinar um número complexo $(\alpha + \beta i)$, simultaneamente determinamos um outro complexo $\gamma + \delta i$ cuja soma resultará em uma raiz da equação. Com isso, determinamos todas as três raízes da equação polinomial

$$y^3 + py + q = 0.$$

Encontramos as raízes da equação original em x retomando a mudança de variável $x = y - \frac{a}{3}$.

Observamos ainda que o radicando $R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ determinará o tipo das raízes da equação (3.12), conforme se segue:

- Se $R > 0$, teremos uma raiz real e duas raízes complexas;
- Se $R = 0$, teremos três raízes reais, sendo uma delas dupla;
- Se $R < 0$, caso em que os números complexos surgiram pela primeira vez na Matemática, teremos três raízes reais e distintas.

Vejam os seguintes exemplos quanto à aplicação da fórmula (3.12).

Exemplo 1 Resolver a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Resolução:

Neste exemplo, a equação já é do tipo $x^3 + px + q = 0$. A aplicação da fórmula (3.12), com $p = -6$ e $q = -9$ nos dá

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} = 2 + 1 = 3$$

Como $R = \frac{49}{4} > 0$, além de $x=3$, teremos outras 2 raízes complexas conjugadas. A saber,

$$-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Exemplo 2 Resolver a equação $x^3 - 24x^2 + 36x + 1296 = 0$.

Resolução:

Este exemplo lida com uma equação polinomial de 3º grau completa, necessitamos fazer uma mudança de variável com o intuito de reduzi-la a uma equação desprovida do termo de 2º grau. Tomamos $x = y + 8$ e ao substituirmos na equação original, chegamos a

$$y^3 - 156y + 560 = 0.$$

A aplicação da fórmula (3.12), com $p = -156$ e $q = 560$ nos dá

$$y = \sqrt[3]{-\frac{(560)}{2} + \sqrt{\left(\frac{560}{2}\right)^2 + \left(\frac{-156}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{(560)}{2} - \sqrt{\left(\frac{560}{2}\right)^2 + \left(\frac{-156}{3}\right)^3}},$$

ou seja,

$$y = \sqrt[3]{-280 + \sqrt{-62208}} + \sqrt[3]{-280 - \sqrt{-62208}} \tag{3.13}$$

Como $R = -62208 < 0$, sabemos que há 3 raízes reais distintas, porém já sentimos uma certa dificuldade em compreender essa solução representada em (3.13). Denominamos de $z_1 = -280 + i\sqrt{62208}$ e $z_2 = -280 - i\sqrt{62208}$, e buscamos as raízes cúbicas desses números complexos. Precisamos de um maior domínio das propriedades envolvendo os números complexos e chegamos as seguintes soluções $y = 10, -14$ e 4 . Em posse dessas soluções, retomamos a mudança de variável para, assim, determinarmos as raízes da equação original. São elas: $x = 18, -6$ e 12 .

3.2 Equações polinomiais de 4º grau

Uma equação polinomial real do 4º grau é uma equação do tipo

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \quad (3.14)$$

em que $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, e $a_0 \neq 0$.

De forma análoga ao que desenvolvemos na seção anterior, podemos escrever uma equação equivalente a (3.14), como sendo

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (3.15)$$

Para solucionarmos a equação acima, vamos reproduzir aqui o método descoberto por Ludovico Ferrari. A essência do método de Ferrari está em reduzir a resolução da equação (3.15) à resolução de uma equação polinomial real do 3º grau, para a qual dispomos da fórmula de Cardano.

O primeiro passo é reescrever (3.15) sem o termo de grau 3. Para esse fim, tomamos $x = y - \frac{a}{4}$ na equação (3.15), obtendo

$$\left(y - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(y - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(y - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d = 0. \quad (3.16)$$

Após desenvolvermos algebricamente a equação (3.16), chegamos a

$$y^4 + \left(b - \frac{3a^2}{8}\right)y^2 + \left(c + \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2}\right)y + d + \frac{a^4}{4^4} - \frac{a^3}{4^3} + \frac{a^2b}{4^2} - \frac{ac}{4} = 0,$$

ou seja,

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \quad (3.17)$$

com

$$p = b - \frac{3a^2}{8}, \quad q = c + \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} \quad \text{e} \quad r = d + \frac{a^4}{4^4} - \frac{a^3}{4^3} + \frac{a^2b}{4^2} - \frac{ac}{4}.$$

O segundo passo consiste em observar que, somando $py^2 + p^2$ a ambos os membros de (3.17) e efetuando algum algebrismo, obtemos

$$y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 - qy - r + p^2,$$

ou seja,

$$(y^2 + p)^2 = py^2 - qy - r + p^2. \quad (3.18)$$

Mais ainda, a partir de (3.18) segue que

$$(y^2 + p + z)^2 = (p + 2z)y^2 - qy + (p^2 - r + 2pz + z^2). \quad (3.19)$$

O terceiro passo consiste em notar que se o polinômio à direita na equação acima fosse igual a um quadrado perfeito, então estaríamos feitos, pois, nesse caso, obteríamos uma equação polinomial do 2º grau em y , cujas raízes sabemos facilmente como calcular. Portanto, encontraríamos os valores de $x = y - \frac{a}{4}$. Ora, isso ocorre caso exatamente quando o discriminante desse polinômio for igual a zero. Ou seja,

$$q^2 - 4(p + 2z)(p^2 - r + 2pz + z^2) = 0.$$

Mas essa é uma equação polinomial do 3º grau em z , que podemos resolver pela fórmula de Cardano. Em posse do valor da raiz z , digamos $z = z_0$, voltamos a equação (3.19) para determinar o valor de y . Mais precisamente, neste caso, a equação (3.19) se reescreve como

$$(y^2 + p + z_0)^2 = (y - y_0)^2, \quad (3.20)$$

onde

$$y_0 = \frac{q}{2(p + 2z_0)}.$$

Observe que a fórmula acima depende apenas das quatro operações aritméticas fundamentais mais extração de raízes quadradas e cúbicas. Assim, o mesmo é válido para as soluções y da equação (3.20).

Vejamos um exemplo, com o intuito de clarificar a exposição acima.

Exemplo 3 Resolver a equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$.

Resolução:

Podemos observar que a equação dada já não possui o termo de grau 3, não sendo necessário portanto efetuar o primeiro passo descrito acima. Para o segundo passo, somamos $-15x^2 + 225$ a ambos os membros da equação dada, donde obtemos

$$(x^2 - 15)^2 = -15x^2 + 10x + 201.$$

Ou ainda,

$$(x^2 - 15 + z)^2 = (-15 + 2z)x^2 + 10x + (201 - 30z + z^2). \quad (3.21)$$

No terceiro passo, devemos resolver

$$100 - 4(-15 + 2z)(201 - 30z + z^2) = 0,$$

ou seja,

$$z^3 - \frac{75}{2}z^2 + 426z - 1520 = 0. \quad (3.22)$$

Para resolver (3.22) utilizaremos a fórmula de Cardano. Tomemos

$$z = w + \frac{75}{6}.$$

Isso reduz (3.22) a

$$w^3 - \frac{171}{4}w - \frac{405}{4} = 0$$

Pela fórmula de Cardano, segue que

$$w = \sqrt[3]{\frac{405}{8} + \sqrt{\left(\frac{405}{8}\right)^2 - \left(\frac{171}{12}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{405}{8} - \sqrt{\left(\frac{405}{8}\right)^2 - \left(\frac{171}{12}\right)^3}}.$$

Logo,

$$w = -\frac{9}{2}$$

e, portanto,

$$z = w + \frac{75}{6} = 8.$$

Substituindo este valor de z em (3.21), obtemos

$$(x^2 - 7)^2 = (x + 5)^2.$$

Assim,

$$x^2 - 7 = x + 5 \quad \text{ou} \quad x^2 - 7 = -x - 5,$$

donde segue que as raízes procuradas são

$$x = -3, -2, 1 \text{ e } 4.$$

Capítulo 4

Como solucionar equações polinomiais de grau superior a 4

Diversos problemas em Ciências e Engenharias necessitam da determinação das raízes de uma equação polinomial. Diferentemente dos casos de grau pequeno, no caso em que o grau da equação é superior a 4, geralmente é impossível obter as soluções exatamente, por meio de uma fórmula algébrica envolvendo os coeficientes da equação submetidos às quatro operações aritméticas usuais mais extração de raízes, conforme vimos no segundo capítulo. Além disso, mesmo a aplicação das fórmulas conhecidas para resolução das equações polinomiais de grau 3 e 4, como vimos, é muito trabalhosa e complexa. O ponto central é que o contexto adequado para resolver equações polinomiais não é o algébrico, e sim o analítico. Mais precisamente, devemos adentrar o ambiente dos métodos numéricos. Neste caso, perde valor a noção de *solução exata* ou de *se resolver exatamente uma equação*. O que realmente importa é que possamos *resolver uma equação tão próximo do exato quanto quisermos*.

Neste capítulo faremos uso do software Excel para realizar os cálculos relativos a cada um dos métodos numéricos apresentados. O Geogebra para plotar gráfico de funções quando necessário. Esperamos com isso, poder investigar questões que abordem problemas interessantes do cotidiano dos alunos.

O referencial teórico desse capítulo está fundamentado nas referências [2], [3], [5], [12], [15] e [17].

4.1 Métodos Numéricos

Ao nos depararmos com um problema envolvendo uma equação em que não haja métodos aritméticos, algébricos ou analíticos para nos levar a uma *solução exata*, ou, em que a aplicação de tais métodos seja impraticável, uma alternativa é utilizar os denominados *métodos numéricos*. Os métodos numéricos são métodos analíticos capazes de nos auxiliar na obtenção de uma *solução aproximada* por meio de uma sequência de operações elementares.

Os métodos numéricos possuem essencialmente duas etapas:

- (E1) A localização e isolamento das soluções, isto é, procurar “pequenos” intervalos que contenham apenas uma (se possível) solução exata da equação;
- (E2) O refinamento das soluções aproximadas, ou seja, após o intervalo inicial, “melhorá-los” paulatinamente até um “grau de aproximação” $\varepsilon > 0$ prescrito.

Alguns teoremas e seus corolários são necessários para o embasamento teórico no que tange às equações polinomiais, garantindo a existência de raiz, que um polinômio de grau n possui n raízes complexas (contando multiplicidades), que um polinômio de grau ímpar tem uma raiz real e a existência e multiplicidade de soluções. São eles:

Teorema 4.1 (Teorema Fundamental da Álgebra - T.F.A.) *Todo polinômio complexo*

$$p(z) = a_n + a_{n-1}z + a_{n-2}z^2 + \cdots + a_0z^n,$$

com $n \geq 1$ e $a_0 \neq 0$, possui uma raiz no corpo \mathbb{C} dos números complexos.

Corolário 4.2 *Todo polinômio real*

$$p(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_0x^n,$$

com $n \geq 1$ e $a_0 \neq 0$, possui uma raiz no corpo \mathbb{C} dos números complexos.

Corolário 4.3 *Todo polinômio real*

$$p(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_0x^n,$$

com $n \geq 1$ e $a_0 \neq 0$, pode ser fatorado como produto de exatamente n fatores, a saber,

$$p(x) = a_0(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n),$$

onde $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ são as raízes de p .

Teorema 4.4 (Teorema do Valor Intermediário - T.V.I) *Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < f(b)$ (ou vice-versa) e $d \in (f(a), f(b))$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Corolário 4.5 *Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem uma raiz real.*

Teorema 4.6 (Bolzano) *Seja $P(x) = 0, x \in [a, b]$, uma equação polinomial com coeficientes reais. Tem-se:*

(i) *Se $P(a)P(b) < 0$, então existe um número ímpar de raízes reais (contando suas multiplicidades) no intervalo (a, b) .*

(ii) *Se $P(a)P(b) > 0$, então existe um número par de raízes reais (contando suas multiplicidades) ou não existem raízes reais no intervalo (a, b) .*¹

Nas próximas subseções, os dois métodos numéricos a serem utilizados neste trabalho serão abordados.

¹vide [2]

4.1.1 Método da Bisseccção

Esse método baseia-se no Teorema 4.4, citado anteriormente. Trata-se de um método iterativo objetivando reduzir a amplitude de um intervalo inicial $[a, b]$ que contém uma raiz da equação, até atingir o grau de aproximação solicitado. Para isso construíremos uma sucessão de valores $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$, através de uma relação de recorrência do 1º grau, isto é, para determinar um de seus termos necessitamos do anterior imediato. Inicialmente, tomamos o ponto médio do intervalo $[a, b]$ para determinar uma melhor aproximação da raiz, uma vez que o erro a ser cometido na aproximação é reduzido pela metade, isto é, tomamos

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Se $P(x_0) = 0$, encontramos uma raiz da equação. Caso contrário, há uma raiz em um dos dois subintervalos $[a, x_0]$, $[x_0, b]$. Se $P(a)P(x_0) < 0$, pelo Teorema 4.4, existe uma raiz $x^* \in (a, x_0)$. Dessa forma, faz-se a iteração seguinte tomando x_1 como o ponto médio do novo intervalo $[a, x_0]$, isto é,

$$x_1 = \frac{a+x_0}{2}.$$

Por outro lado, se $P(x_0)P(b) < 0$, então tomamos

$$x_1 = \frac{x_0+b}{2}.$$

Após sucessivas iterações, teremos um intervalo $[\alpha, \beta]$ que contém raízes aproximadas tão próximas quanto se queira para a raiz exata e terminamos o processo por comparação do resultado x_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), com um *erro* $\varepsilon > 0$ previamente definido. Mais precisamente, supondo que

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2},$$

verificamos se $P(x_n) = 0$, ou,

$$\frac{|b_n - a_n|}{2} \leq \varepsilon.$$

Em alguns casos, podemos ainda observar se está satisfeita a condição seguinte envolvendo o erro relativo, qual seja,

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} \leq \varepsilon.$$

O processo é finalizado ao atingirmos uma raiz aproximada de acordo com o erro pré-definido e conforme o critério de parada escolhido.

No que tange ao número mínimo $n + 1$ de iterações, observa-se que ao escolher como aproximação x_0 , o erro máximo que pode ocorrer tem valor igual ao comprimento da metade do intervalo inicial, isto é,

$$\varepsilon_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Mas ao escolher como aproximação x_1 , o erro máximo é a metade do erro anterior,

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Analogamente, ao escolher como aproximação x_n , o erro máximo é

$$\varepsilon_n = \frac{b-a}{2^{n+1}}. \quad (4.1)$$

Isso permite-nos saber o número mínimo de iterações para obter uma aproximação com um erro tão pequeno quanto se deseje, digamos,

$$\varepsilon_n < \varepsilon.$$

Substituindo o valor de ε_n , conforme (4.1), obtemos

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon,$$

ou,

$$\frac{b-a}{\varepsilon} < 2^{n+1},$$

de onde,

$$n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} - 1. \quad (4.2)$$

O método da bissecção possui a propriedade muito importante de sempre convergir para uma solução, porém é geralmente utilizado apenas como método inicial, com o intuito de diminuir o comprimento do intervalo que contém a raiz, assim reduzindo o esforço computacional na aplicação de outros métodos. Vejamos abaixo a aplicação desse método com o uso dos softwares Excel e Geogebra.

Exemplo 4 Determinar uma raiz aproximada de $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x - 8$, com erro $\varepsilon \leq 0,00001$

Utilizamos o software Excel e fizemos uma tabela na qual a linha 1 refere-se aos valores analisados de x e linha 2 aos valores correspondentes de $P(x)$.

Para o Excel calcular os valores de $P(x)$, basta clicar na célula B2, inserir a fórmula

$$"=(B1)^3+5*(B1)^2+6*(B1)-8"$$

e apertar a tecla Enter (ver figura 4.1).

Figura 4.1: Tabela de $P(x)$

	A	B	C	D
1	x	0	1	2
2	P(x)	-8		

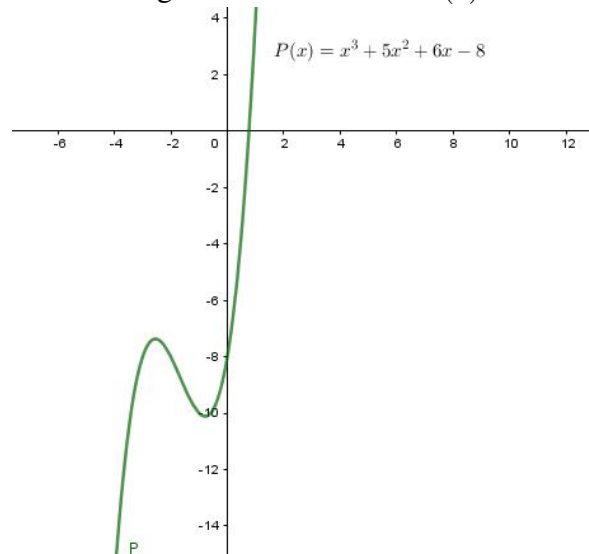
Em seguida, com a célula B2 selecionada, posicione o mouse no seu vértice inferior direito, surge o figura de uma cruz, devemos clicá-la e arrastá-la até a ultima célula correspondente ao valor de x , no nosso caso foi D2 (ver figura 4.2).

Figura 4.2: Tabela de $P(x)$

	A	B	C	D
1	x	0	1	2
2	$P(x)$	-8	4	32

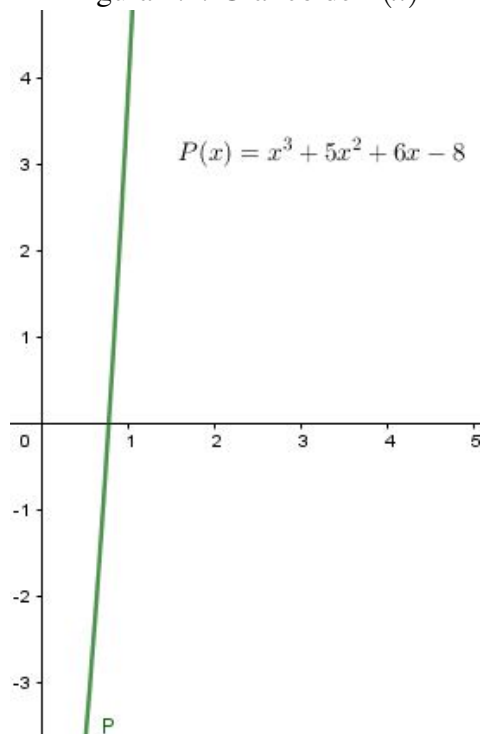
Podemos observar a mudança do sinal de $P(x)$ no intervalo $[0, 1]$, donde, conforme o Teorema 4.4, há pelo menos uma raiz real no mesmo. Esse será nosso intervalo inicial para aplicar o método da bissecção. Para uma melhor visualização gráfica, plotamos a função no software Geogebra para “comprovar” o intervalo inicial acima mencionado, conforme figura 4.3.

Figura 4.3: Gráfico de $P(x)$



Aumentando o zoom na figura 4.3, podemos verificar que há uma raiz real no intervalo $[0, 1]$, conforme a figura 4.4.

Figura 4.4: Gráfico de $P(x)$



Começamos determinando o número mínimo de iterações necessárias ao método, aplicando o resultado (4.2). Na célula D7 inserimos a fórmula

$$"=(LN((C1-B1)/0,00001))/LN(2) -1",$$

sendo então necessárias no mínimo 17 iterações (ver figura 4.5).

Figura 4.5: Quantidade mínima de iterações

	A	B	C	D
7	Número mínimo de iterações:			15,60964047

Construímos uma tabela (ver figura 4.6) para executar o método, a linha 19 corresponde a todas as variáveis envolvidas, sendo:

- n é o número da iteração;
- a_n e b_n são os valores correspondentes aos extremos do $(n + 1)$ -ésimo intervalo;
- $x_n = (a_n + b_n)/2$ é o ponto médio do intervalo acima, isto é, a $(n + 1)$ -ésima iterada;
- $P(a_n), P(b_n), P(x_n)$ são os valores correspondente de P nos pontos a_n, b_n e x_n respectivamente;
- $\epsilon_n = (b_n - a_n)/2$ é o erro máximo cometido ao tomar x_n como aproximação da raiz exata. É o nosso critério de parada;

- *Observação* é um código fazendo referência se devemos continuar com a próxima iteração.

Na linha 20, inserimos todas as fórmulas necessárias para a aplicação do método, conforme vimos anteriormente, observando que o valor de uma variável sempre dependerá de sua localização na tabela. Por exemplo, para a fórmula do ponto médio na célula D20, necessitamos utilizar os valores de “ a_n ” e “ b_n ” correspondentes, respectivamente, às células “B20” e “C20”. Portanto, teremos na célula “D20” a seguinte fórmula: “ $= (B20+C20) / 2$ ”, e assim por diante. Já, na célula I20, criamos um recurso visual de modo que o aluno verifique se há necessidade em continuar com o processo iterativo, comparando a tolerância máxima de erro (pré-definida no início da questão) com o valor dado na célula H20. Para tal feito, utilizamos a função “SE” do Excel, verificando se uma dada condição foi satisfeita. No exemplo em questão, essa função foi utilizada para verificar se o critério de parada foi alcançado, conforme a tolerância máxima de erro fixada. Assim, o referido comando ficou da seguinte maneira:

$$=SE (H20<=0,00001; ``FIM`` ; ``CONTINUE``),$$

ou seja, se o critério de parada (H20) for menor ou igual a tolerância máxima de erro fixada ($\epsilon = 0,00001$), então a palavra “FIM” será exibida informando o término do processo, caso contrário a palavra “CONTINUE” será exibida.

Figura 4.6: Método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19	n	a _n	b _n	x _n = (a+b)/2	P(a _n)	P(b _n)	P(x _n)	E = (b _n - a _n)/2	Observação
20	0	0,00000	1,00000	0,50000	-8,00000	4,00000	-3,62500	0,50000	CONTINUE

Na linha 21, fizemos uso novamente da função SE para determinarmos um novo subintervalo que contenha a raiz. Assim, procedemos da seguinte maneira: Na célula B21 e C21, inserimos, respectivamente,

$$=SE (E20 * G20 < 0 ; B20 ; D20)$$

e

$$=SE (E20 * G20 < 0 ; D20 ; C20),$$

determinando o subintervalo [0.5,1] (ver figura 4.7).

Figura 4.7: Método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19	n	a _n	b _n	x _n = (a+b)/2	P(a _n)	P(b _n)	P(x _n)	E = (b _n - a _n)/2	Observação
20	0	0,00000	1,00000	0,50000	-8,00000	4,00000	-3,62500	0,50000	CONTINUE
21	1	0,50000	1,00000						

As demais variáveis da linha 21 são determinadas automaticamente, basta selecionarmos as células de D20 até I20 e, novamente no vértice inferior direito da célula I20, na cruz, clicarmos e arrastarmos até a célula I21 (ver figura 4.8).

Figura 4.8: Método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19	n	a_n	b_n	x_n = (a+b)/2	P(a_n)	P(b_n)	P(x_n)	E = (b_n - a_n)/2	Observação
20	0	0,00000	1,00000	0,50000	-8,00000	4,00000	-3,62500	0,50000	CONTINUE
21	1	0,50000	1,00000	0,75000	-3,62500	4,00000	-0,26563	0,25000	CONTINUE

Para obtermos as próximas iterações, basta selecionarmos toda a linha 21 e, mais uma vez, no vértice inferior da I21, na cruz, clicarmos e arrastarmos até a célula I36 para obtermos 17 iterações (ver figura 4.9).

Figura 4.9: Método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19	n	a_n	b_n	x_n = (a+b)/2	P(a_n)	P(b_n)	P(x_n)	E = (b_n - a_n)/2	Observação
20	0	0,00000	1,00000	0,50000	-8,00000	4,00000	-3,62500	0,50000	CONTINUE
21	1	0,50000	1,00000	0,75000	-3,62500	4,00000	-0,26563	0,25000	CONTINUE
22	2	0,75000	1,00000	0,87500	-0,26563	4,00000	1,74805	0,12500	CONTINUE
23	3	0,75000	0,87500	0,81250	-0,26563	1,74805	0,71216	0,06250	CONTINUE
24	4	0,75000	0,81250	0,78125	-0,26563	0,71216	0,21609	0,03125	CONTINUE
25	5	0,75000	0,78125	0,76563	-0,26563	0,21609	-0,02655	0,01563	CONTINUE
26	6	0,76563	0,78125	0,77344	-0,02655	0,21609	0,09433	0,00781	CONTINUE
27	7	0,76563	0,77344	0,76953	-0,02655	0,09433	0,03378	0,00391	CONTINUE
28	8	0,76563	0,76953	0,76758	-0,02655	0,03378	0,00359	0,00195	CONTINUE
29	9	0,76563	0,76758	0,76660	-0,02655	0,00359	-0,01149	0,00098	CONTINUE
30	10	0,76660	0,76758	0,76709	-0,01149	0,00359	-0,00395	0,00049	CONTINUE
31	11	0,76709	0,76758	0,76733	-0,00395	0,00359	-0,00018	0,00024	CONTINUE
32	12	0,76733	0,76758	0,76746	-0,00018	0,00359	0,00170	0,00012	CONTINUE
33	13	0,76733	0,76746	0,76740	-0,00018	0,00170	0,00076	0,00006	CONTINUE
34	14	0,76733	0,76740	0,76736	-0,00018	0,00076	0,00029	0,00003	CONTINUE
35	15	0,76733	0,76736	0,76735	-0,00018	0,00029	0,00005	0,00002	CONTINUE
36	16	0,76733	0,76735	0,76734	-0,00018	0,00005	-0,00006	0,00001	FIM

Determinamos então a raiz aproximada, conforme a figura 4.9, qual seja, **0,76734**, com erro $\epsilon \leq 0,00001$, pelo método da bissecção.

4.1.2 Método da Secante

Este método baseia-se em uma técnica que utiliza a reta secante à curva gráfico de uma função, com a finalidade de obter aproximações dos zeros dessa função. Ele nem sempre converge, por isso apresentamos no apêndice uma condição suficiente para que o mesmo convirja. Aqui, a fórmula básica é

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \forall n \geq 1 \quad (4.3)$$

Inicialmente, observamos que se trata de uma relação de recorrência do 2º grau, isto é, necessita-se do valor de duas aproximações para obter, conforme a equação (4.3), a aproximação seguinte. Passemos a uma justificativa para fórmula: Escolhemos arbitrariamente dois pontos da curva $y = f(x)$, digamos, $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, onde $x_0 > x_1$ e $f(x_0) \neq f(x_1)$ (vide figura 4.10). Traçamos a reta secante à curva passando pelos pontos acima mencionados, a qual intersectará o eixo x em um ponto denominado x_2 . Caso ocorra convergência, esse ponto representará uma aproximação da raiz r da equação $y = f(x)$ melhor do que x_0 e x_1 . Além disso, conseguiremos aproximações de r tão boa quanto quisermos, após realizar esse procedimento um número suficiente n vezes, Podemos ainda observar que para determinar o valor de x_2 em termos de x_0 e x_1 , basta utilizarmos um pouco de trigonometria. Conforme a figura 4.10, obtemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (4.4)$$

e

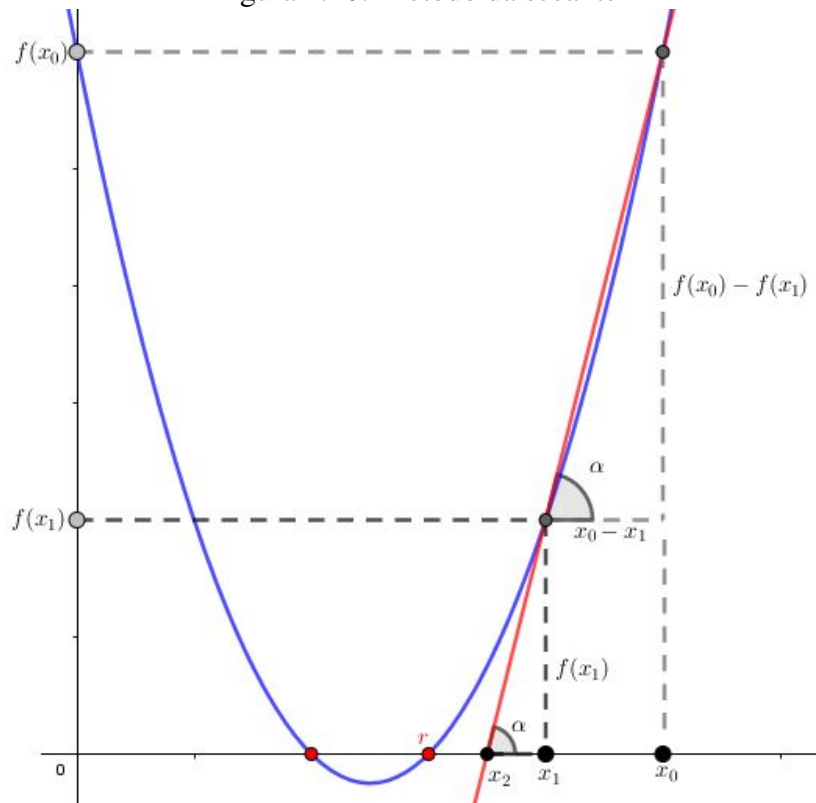
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}. \quad (4.5)$$

Igualando as equações (4.4) e (4.5), após desenvolvermos algebricamente, segue que

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}. \quad (4.6)$$

Generalizando a equação (4.6), deduzimos igualmente a equação (4.3).

Figura 4.10: Método da secante



Conforme [17], a “rapidez” de convergência do método da secante é superior àquela dada pelo método da bissecção. Logo, na maioria dos exemplos aqui propostos, iniciamos a partir de um intervalo obtido pelo método da bissecção e, então, aplicamos o método da secante. No exemplo que se segue utilizaremos o software Excel.

Exemplo 5 Determinar uma raiz aproximada de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$, com erro $\varepsilon \leq 0,01$.

Igualmente à seção anterior, obtivemos a tabela 4.11 fazendo uso do método da bissecção.

Figura 4.11: Método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
10	n	a _n	b _n	$x_n = (a+b)/2$	f(a _n)	f(b _n)	f(x _n)	$E = (b_n - a_n)/2$	Observação
11	0	-2,00000	-1,00000	-1,50000	12,00000	-1,00000	0,81250	0,50000	CONTINUE
12	1	-1,50000	-1,00000	-1,25000	0,81250	-1,00000	-0,90234	0,25000	CONTINUE
13	2	-1,50000	-1,25000	-1,37500	0,81250	-0,90234	-0,28882	0,12500	CONTINUE

Para refinarmos a aproximação da raiz, utilizamos os valores das células B13 e D13 destacadas na figura 4.11 como sendo as duas aproximações iniciais para a aplicação do método da secante. Executamos o método da secante em uma outra planilha, onde construímos uma tabela (ver figura 4.12) na qual a linha 11 corresponde a todas as variáveis envolvidas, sendo

Figura 4.12: Método da secante

	A	B	C	D	E	F	G
11	n	x _n	(x _n - x _{n-1})	f(x _n)	f(x _{n-1})	$E = \text{ABS}(x_n - x_{\{n-1\}})$	Observação
12	0	-1,50000					
13	1	-1,37500					

- n é o número de iteração;
- x_n é valor da $(n + 1)$ -ésima iterada;
- $f(x_n), f(x_{n-1})$ são os valores correspondentes pela função f a x_n e x_{n-1} ;
- $\varepsilon_n = |x_n - x_{n-1}|$ é o critério de parada escolhido;²
- *Observação* é um código fazendo referência se devemos continuar com a próxima iteração.

²Nem sempre o critério de parada escolhido, qual seja, $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, garante que $|x_n - x^*| < \varepsilon$, onde x^* é a solução exata. Diante desse fato, podemos combiná-lo com outro critério de parada, digamos, $|f(x_n)| < \varepsilon$, para auxiliar na obtenção da solução aproximada.

Inserimos na linha 13 todas as fórmulas mencionadas na linha 11, e da mesma forma como procedemos no método da bissecção, obtemos

Figura 4.13: Método da secante

	A	B	C	D	E	F	G
11	n	x_n	(x_n - x_{n-1})	f(x_n)	f(x_{n-1})	E = ABS(x_n - x_{n-1})	Observação
12	0	-1,50000					
13	1	-1,37500	0,12500	-0,28882	0,81250	0,12500	CONTINUE
14							
15							

Para determinarmos o valor numérico da próxima iteração na linha 14, utilizaremos a fórmula (4.3), inserindo na célula B14

$$"=B13-(C13*D13)/(D13-E13)"/>$$

Dáí (ver figura 4.14),

Figura 4.14: Método da secante

	A	B	C	D	E	F	G
11	n	x_n	(x_n - x_{n-1})	f(x_n)	f(x_{n-1})	E = ABS(x_n - x_{n-1})	Observação
12	0	-1,50000					
13	1	-1,37500	0,12500	-0,28882	0,81250	0,12500	CONTINUE
14	2	-1,40778					

As demais variáveis da linha 14 são determinadas automaticamente, basta selecionarmos as células de C13 até G13 e, novamente no vértice inferior da G13, na cruz, clicarmos e arrastarmos até a célula G14 para obter

Figura 4.15: Método da secante

	A	B	C	D	E	F	G
11	n	x_n	(x_n - x_{n-1})	f(x_n)	f(x_{n-1})	E = ABS(x_n - x_{n-1})	Observação
12	0	-1,50000					
13	1	-1,37500	0,12500	-0,28882	0,81250	0,12500	CONTINUE
14	2	-1,40778	-0,03278	-0,05078	-0,28882	0,03278	CONTINUE

Em seguida, para obtermos as próximas iterações, basta selecionarmos toda a linha 14 e, mais uma vez no vértice inferior da G14, na cruz, clicamos e arrastamos até a célula G16, conforme a figura abaixo.

Figura 4.16: Método da secante

	A	B	C	D	E	F	G
11	n	x_n	(x_n - x_{n-1})	f(x_n)	f(x_{n-1})	E = ABS(x_n - x_{n-1})	Observação
12	0	-1,50000					
13	1	-1,37500	0,12500	-0,28882	0,81250	0,12500	CONTINUE
14	2	-1,40778	-0,03278	-0,05078	-0,28882	0,03278	CONTINUE
15	3	-1,41477	-0,00699	0,00449	-0,05078	0,00699	FIM
16	4	-1,41421	0,00057	-0,00006	0,00449	0,00057	FIM

De acordo com a figura 4.16, observamos que a raiz aproximada (em destaque) com o erro ε pré-definido é **-1,41477**.

Capítulo 5

Atividades de sistematização de conteúdo

Diante da gama de informações que a tecnologia nos traz diariamente, podemos discutir temas importantes do nosso convívio e identificar a Matemática inserida naquele contexto, permitindo-nos a tentar fazer futuras previsões. Dito isso, podemos classificar as atividades propostas da seguinte maneira:

- As duas primeiras atividades apresentam situações mais próximas da imaginação do aluno, proporcionando descobertas com um nível menor de abstração, isto é, trazendo determinada relevância real;
- Para demonstrar um exemplo vivenciado no cotidiano da maioria dos brasileiros, trouxemos a terceira atividade, que determina a taxa de juros aplicada na compra de algum produto;
- Abordamos também a Matemática Clássica, ou seja, tratamos o conhecimento teórico, que pode ser definido pelos alunos como uma atividade sem aplicação prática, no entanto são conceitos de suma importância para desenvolver o conhecimento abstrato. Nesse capítulo, as atividades 4 e 8 demonstram tais questões;
- Nas atividades 5, 6 e 7 instigamos a busca da Matemática por meio da análise de dados em observações reais, fomentando um tímido conhecimento científico, se assim podemos afirmar, que o leva a um embasamento teórico para inferir futuras previsões.

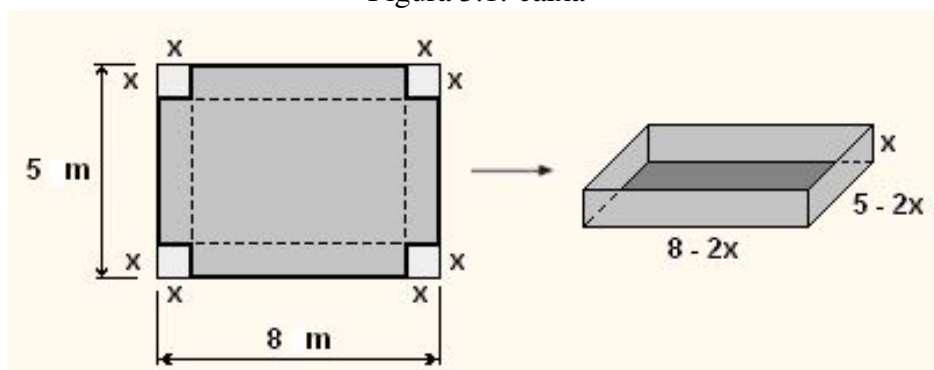
Todas as atividades mencionadas foram extraídas dos referenciais teóricos [1],[4], [18], [8], [9], [14], [16], sendo solucionadas através de uma equação polinomial de grau superior a dois, conforme veremos a seguir.

5.1 Atividade 1: Construção de um caixa com volume dado

Utilizando uma folha de papelão retangular, pretendemos construir uma caixa sem tampa. Para isso, cortaremos 4 quadrados de lado x de cada vértice da folha, conforme a

figura 5.1. Determine o valor de x (em metros) para que o volume da caixa seja de $20m^3$?

Figura 5.1: caixa



Observando a figura 5.1, verificamos que a caixa tem o formato de um paralelepípedo, com as seguintes dimensões: $8 - 2x$, $5 - 2x$ e x . Dessa forma, seu volume pode ser obtido através da seguinte equação:

$$V = (8 - 2x)(5 - 2x)x,$$

ou, equivalentemente,

$$V = 4x^3 - 26x^2 + 40x. \quad (5.1)$$

Para que o volume da caixa seja de $20m^3$, por (5.1) devemos ter

$$4x^3 - 26x^2 + 40x = 20,$$

ou seja, x deve ser raiz de

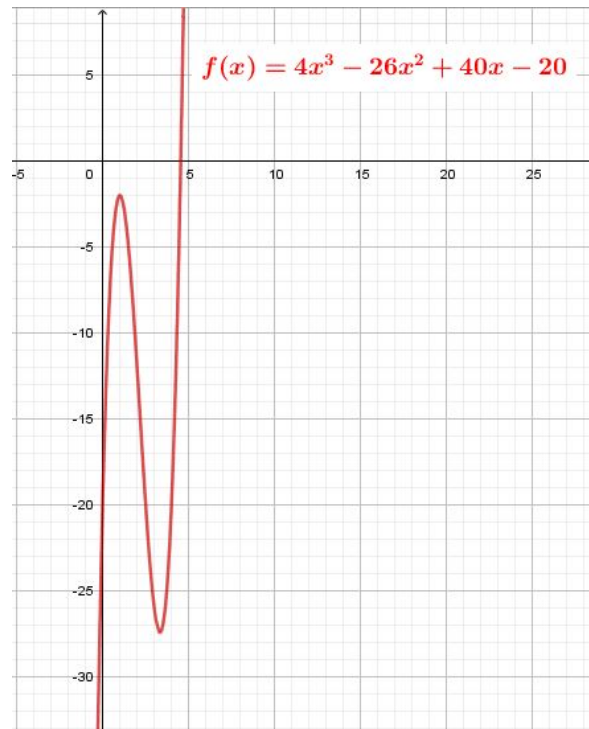
$$4x^3 - 26x^2 + 40x - 20 = 0.$$

Note que trata-se de uma equação polinomial de 3º grau, cuja resolução será abordada por meio do método da bissecção que foi apresentado no capítulo anterior.

Para iniciar a investigação, plotamos a função

$$f(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x - 20,$$

no software Geogebra (vide figura abaixo), identificando o intervalo inicial que contém a raiz procurada, a saber, o intervalo $[4, 5]$.



A partir desse intervalo inicial, começamos a execução do método da bissecção utilizando o software Excel. Fixando um erro $0 < \epsilon$ inferior a 0,0001, obtemos a figura seguinte:

Figura 5.2: Aplicação do método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	a _n	b _n	x _n =(a+b)/2	f(a _n)	f(b _n)	f(x _n)	E = (b _n - a _n)/2	Observação
2	0	4,00000	5,00000	4,50000	-20,00000	30,00000	-2,00000	0,50000	CONTINUE
3	1	4,50000	5,00000	4,75000	-2,00000	30,00000	12,06250	0,25000	CONTINUE
4	2	4,50000	4,75000	4,62500	-2,00000	12,06250	4,57031	0,12500	CONTINUE
5	3	4,50000	4,62500	4,56250	-2,00000	4,57031	1,17285	0,06250	CONTINUE
6	4	4,50000	4,56250	4,53125	-2,00000	1,17285	-0,44128	0,03125	CONTINUE
7	5	4,53125	4,56250	4,54688	-0,44128	1,17285	0,35881	0,01563	CONTINUE
8	6	4,53125	4,54688	4,53906	-0,44128	0,35881	-0,04297	0,00781	CONTINUE
9	7	4,53906	4,54688	4,54297	-0,04297	0,35881	0,15748	0,00391	CONTINUE
10	8	4,53906	4,54297	4,54102	-0,04297	0,15748	0,05715	0,00195	CONTINUE
11	9	4,53906	4,54102	4,54004	-0,04297	0,05715	0,00706	0,00098	CONTINUE
12	10	4,53906	4,54004	4,53955	-0,04297	0,00706	-0,01796	0,00049	CONTINUE
13	11	4,53955	4,54004	4,53979	-0,01796	0,00706	-0,00545	0,00024	CONTINUE
14	12	4,53979	4,54004	4,53992	-0,00545	0,00706	0,00080	0,00012	CONTINUE
15	13	4,53979	4,53992	4,53986	-0,00545	0,00080	-0,00233	0,00006	FIM

Portanto, de acordo com a figura 5.2, observamos que o valor de x procurado é de aproximadamente $4,53986m$ com erro inferior a 0,0001.

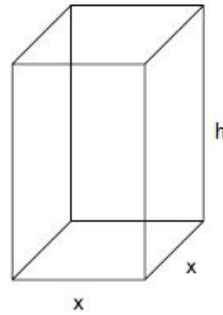
5.2 Atividade 2: Dimensionamento de um reservatório

Deseja-se construir um reservatório em forma de um prisma reto de base quadrada, com capacidade de 2000 litros, usando para paredes, fundo e tampa, $20 m^2$ de um certo

material. Quais devem ser as dimensões do reservatório?

O reservatório mencionado no problema possui um formato semelhante ao da figura abaixo:

Figura 5.3: Prisma reto de base quadrada



Como trata-se de uma base quadrada, representaremos o lado comum da base por x (em metros) e a altura do sólido por h (em metros). De acordo com as dimensões adotadas, as áreas da tampa e do fundo do reservatório são iguais a $x^2 \text{ m}^2$, portanto, as duas valem $2x^2 \text{ m}^2$. Já a área lateral é constituída por quatro retângulos iguais com área de $xh \text{ m}^2$ cada um, totalizando uma área lateral de $4xh \text{ m}^2$. O enunciado nos informa que serão utilizados 20 m^2 de um certo material para a fabricação das paredes, fundo e tampa do reservatório. Assim,

$$2x^2 + 4xh = 20. \quad (5.2)$$

O enunciado também nos informa que o volume do sólido será de 2000 l , ou seja, 2 m^3 . O volume pode ser obtido através da seguinte fórmula:

$$V = x^2h$$

Daí,

$$x^2h = 2,$$

e, por conseguinte,

$$h = \frac{2}{x^2}. \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) na fórmula (5.2), obtemos

$$2x^2 + 4x \left(\frac{2}{x^2} \right) = 20. \quad (5.4)$$

Após algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte equação equivalente a (5.4):

$$x^3 - 10x + 4 = 0. \quad (5.5)$$

Desse modo, para solucionar esse problema de dimensionamento do reservatório, necessitamos determinar a raiz da equação (5.5) para o comprimento do lado da base, a qual será

realizada através do método da bissecção e, na sequência, obter o valor correspondente da altura h .

Para iniciarmos a investigação, adotamos uma tabela no software Excel para avaliar o comportamento da função $f(x) = x^3 - 10x + 4$. Temos

Figura 5.4: Valores de $f(x)$

	G	H	I	J	K
10	x	0	1	2	3
11	f(x)	4	-5	-8	1

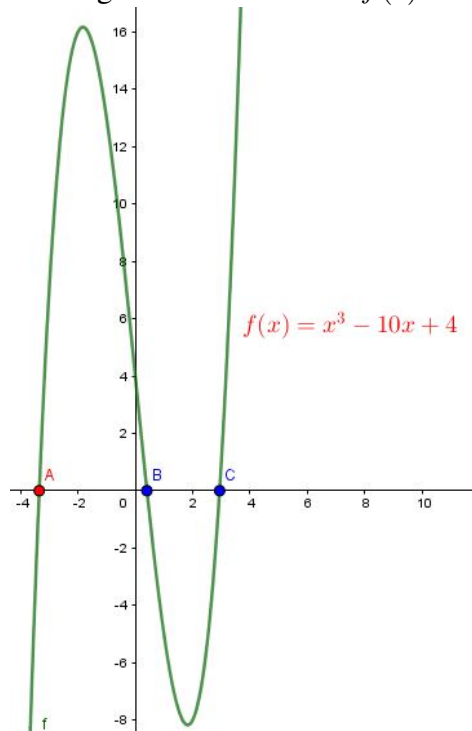
Pelo Corolário 4.5, há pelo menos uma raiz real, mas ao observarmos a figura 5.4 constatamos que há duas mudanças no sinal de $f(x)$, sendo uma no intervalo $[0, 1]$ e a outra no intervalo de $[2, 3]$. Portanto, pelo Teorema 4.4, concluímos que há uma raiz real em cada intervalo.

Para uma melhor visualização gráfica, plotamos a função

$$f(x) = x^3 - 10x + 4,$$

no software Geogebra, conforme a figura 5.5 abaixo.

Figura 5.5: Gráfico de $f(x)$



Aplicando o método da bissecção nos intervalos anteriormente mencionados e fixando uma tolerância máxima do erro $0 < \varepsilon$ inferior a 0,01, obtivemos as seguintes tabelas:

- No intervalo de $[0, 1]$

Figura 5.6: Aplicação do método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	a _n	b _n	$x_n = (a_n + b_n)/2$	f(a _n)	f(b _n)	f(x _n)	$E = (b_n - a_n)/2$	Observação
2	0	0,00000	1,00000	0,50000	4,00000	-5,00000	-0,87500	0,50000	CONTINUE
3	1	0,00000	0,50000	0,25000	4,00000	-0,87500	1,51563	0,25000	CONTINUE
4	2	0,25000	0,50000	0,37500	1,51563	-0,87500	0,30273	0,12500	CONTINUE
5	3	0,37500	0,50000	0,43750	0,30273	-0,87500	-0,29126	0,06250	CONTINUE
6	4	0,37500	0,43750	0,40625	0,30273	-0,29126	0,00455	0,03125	CONTINUE
7	5	0,40625	0,43750	0,42188	0,00455	-0,29126	-0,14367	0,01563	CONTINUE
8	6	0,40625	0,42188	0,41406	0,00455	-0,14367	-0,06963	0,00781	FIM

Podemos observar na célula D8 da figura 5.6 uma raiz aproximada com um erro inferior a 0,01. Portanto, a base quadrada do reservatório será de aproximadamente 0,41406m. Além disso, substituindo o valor encontrado de $x = 0,41406$ na equação (5.3), concluímos que a altura h será de aproximadamente 11,6655 m.

- No intervalo de $[2, 3]$

Figura 5.7: Aplicação do método da bissecção

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	n	a _n	b _n	$x_n = (a+b)/2$	f(a _n)	f(b _n)	f(x _n)	$E = (b_n - a_n)/2$	Observação
2	0	2,00000	3,00000	2,50000	-8,00000	1,00000	-5,37500	0,50000	CONTINUE
3	1	2,50000	3,00000	2,75000	-5,37500	1,00000	-2,70313	0,25000	CONTINUE
4	2	2,75000	3,00000	2,87500	-2,70313	1,00000	-0,98633	0,12500	CONTINUE
5	3	2,87500	3,00000	2,93750	-0,98633	1,00000	-0,02759	0,06250	CONTINUE
6	4	2,93750	3,00000	2,96875	-0,02759	1,00000	0,47751	0,03125	CONTINUE
7	5	2,93750	2,96875	2,95313	-0,02759	0,47751	0,22280	0,01563	CONTINUE
8	6	2,93750	2,95313	2,94531	-0,02759	0,22280	0,09707	0,00781	FIM

Podemos observar na célula N8 da figura 5.7 uma raiz procurada com um erro inferior a 0,01. Portanto, a base quadrada do reservatório também poderá ser de aproximadamente 2,94531 m. Substituindo o valor encontrado de $x = 2,94531$ na equação (5.3), concluímos que a altura h será de aproximadamente 0,23055 m.

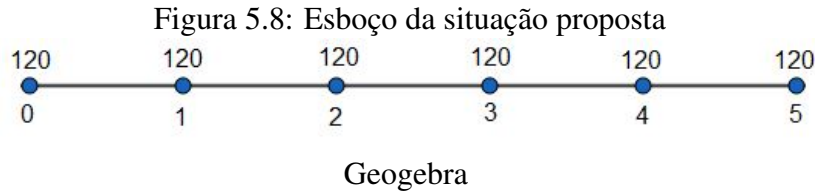
Logo, de acordo com a resolução acima, constatamos que há dois dimensionamentos distintos para o reservatório conforme as solicitações expostas pelo problema.

5.3 Atividade 3: Cálculo da taxa mensal de juros em uma compra em prestações

Uma televisão, cujo preço à vista é de R\$500,00, é vendida em 6 prestações iguais de R\$120,00. Qual é a taxa mensal de juros que está sendo cobrada, sabendo que o regime é de

juros compostos?

Elaboramos um desenho esquemático, conforme a figura 5.8, para melhor entendimento da situação, na qual estamos supondo que a primeira prestação é a entrada.



Pelo fato de que trata-se do regime de juros compostos, o seguinte teorema é válido.

Teorema 5.1 : *No regime de juros compostos de taxa i , um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo em um montante $C_n = C_0(1+i)^n$.*

Ou seja, uma quantia cujo valor atual é A , equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F = A(1+i)^n$. Todavia, “trouxemos” todas as parcelas futuras para o tempo atual, isto é, para o dia em que foi paga a primeira parcela. Para isso, dividimos as parcelas futuras por $(1+i)^k$, no qual k é o número da prestação. Assim,

$$A = \sum_{k=0}^N \frac{F}{(1+i)^k}, \quad (5.6)$$

e utilizando os dados do nosso problema na equação (5.6), obtemos

$$500 = \sum_{k=0}^5 \frac{120}{(1+i)^k},$$

isto é,

$$500 = 120 + \frac{120}{(1+i)^1} + \frac{120}{(1+i)^2} + \frac{120}{(1+i)^3} + \frac{120}{(1+i)^4} + \frac{120}{(1+i)^5},$$

equação equivalente a

$$500 = 120 \left(1 + \frac{1}{1+i} + \left(\frac{1}{1+i} \right)^2 + \left(\frac{1}{1+i} \right)^3 + \left(\frac{1}{1+i} \right)^4 + \left(\frac{1}{1+i} \right)^5 \right).$$

Realizamos uma mudança da variável para proporcionar um melhor entendimento didático, na qual $\frac{1}{1+i} = q$. Daí, segue que

$$500 = 120(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5). \quad (5.7)$$

Observamos na equação (5.7) que $(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5)$ refere-se à soma finita de uma progressão geométrica de razão q . Então

$$500 = 120 \left(\frac{q^6 - 1}{q - 1} \right), \quad (5.8)$$

e após algumas manipulações algébricas na equação (5.8), concluímos que

$$q^6 - \frac{25}{6}q + \frac{19}{6} = 0. \quad (5.9)$$

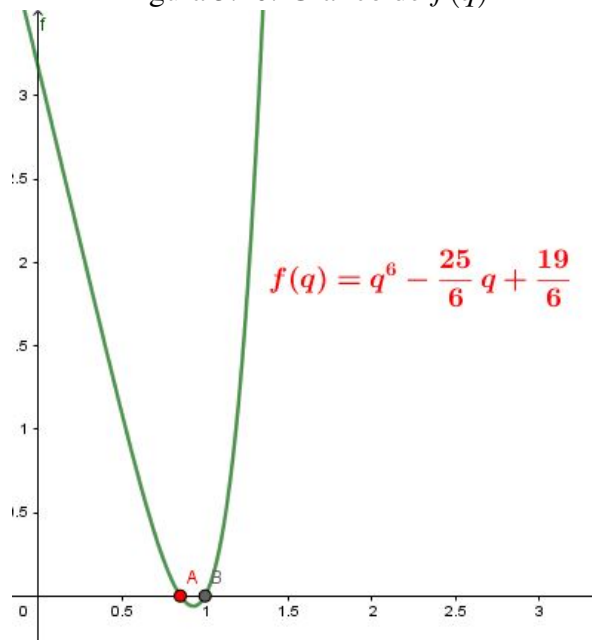
Necessitamos então solucionar uma equação polinomial de grau 6, para assim determinar o valor da taxa i , com uma tolerância máxima de erro, digamos, de $\varepsilon = 0,0001$. Resolveremos inicialmente pelo método da bissecção e, na sequência, aplicaremos o método da secante para obtermos um melhor refinamento da raiz com um menor esforço computacional. Elaboramos uma tabela no Excel, conforme a figura 5.9, para investigar o comportamento da função $f(q) = q^6 - \frac{25}{6}q + \frac{19}{6}$.

Figura 5.9: Valores de $f(q)$

	A	B	C	D	E
10	q	0	1	2	3
11	f(q)	3,17	0,00	58,83	719,67

Evidentemente 1 é raiz, porém não é satisfatória, pois se $q = 1$, então $i = 0$, o que não procede. Contudo, pelo Teorema 4.6, inferimos que no intervalo $[0, 2]$, há um número par de raízes reais, ou seja, há uma outra raiz. Para uma melhor visualização gráfica da situação e para corroborar a existência das raízes reais no intervalo mencionado anteriormente, plotamos a equação (5.9) no software Geogebra.

Figura 5.10: Gráfico de $f(q)$



Aplicamos o método da bissecção no intervalo $[0, 1]$, através de uma tabela produzida no software Excel.

Figura 5.11: Aplicação do método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	a_n	b_n	$x_n = (a_n + b_n)/2$	f(a_n)	f(b_n)	f(x_n)	$E = (b_n - a_n)/2$	Observação
2	0	0,00000	1,00000	0,50000	3,16667	0,00000	1,09896	0,50000	CONTINUE
3	1	0,50000	1,00000	0,75000	1,09896	0,00000	0,21965	0,25000	CONTINUE
4	2	0,75000	1,00000	0,87500	0,21965	0,00000	-0,03037	0,12500	CONTINUE
5	3	0,75000	0,87500	0,81250	0,21965	-0,03037	0,06895	0,06250	CONTINUE
6	4	0,81250	0,87500	0,84375	0,06895	-0,03037	0,01186	0,03125	CONTINUE
7	5	0,84375	0,87500	0,85938	0,01186	-0,03037	-0,01126	0,01563	CONTINUE

Para evitar um esforço computacional excessivo, optamos continuar o processo de refinamento da raiz utilizando o método da secante. Esse método foi iniciado com os valores correspondentes das células destacadas da figura 5.11, B7 e D7, como podemos visualizar na figura 5.12.

Figura 5.12: Aplicação do método da secante

	A	B	C	D	E	F	G
18	n	x_n	$(x_n - x_{n-1})$	f(x_n)	f(x_{n-1})	$E = ABS(x_n - x_{n-1})$	Observação
19	0	0,84375					
20	1	0,85938	0,01563	-0,01126	0,01186	0,01563	CONTINUE
21	2	0,85176	-0,00761	-0,00048	-0,01126	0,00761	CONTINUE
22	3	0,85143	-0,00034	0,00002	-0,00048	0,00034	CONTINUE
23	4	0,85144	0,00001	0,00000	0,00002	0,00001	FIM

Com o auxílio do método da secante refinamos a raiz, com uma tolerância máxima de erro $\varepsilon = 0,0001$, obtendo $q = 0,85144$.

Para finalizarmos o problema, substituímos o valor de q , pois $q = \frac{1}{1+i}$, ou seja, $0,85144 = \frac{1}{1+i}$. Após algumas manipulações algébricas, determinamos o valor da taxa aplicada i como sendo aproximadamente **0,17448** ou **17,448%**.

5.4 Atividade 4: Cálculo do ponto de encontro de duas curvas

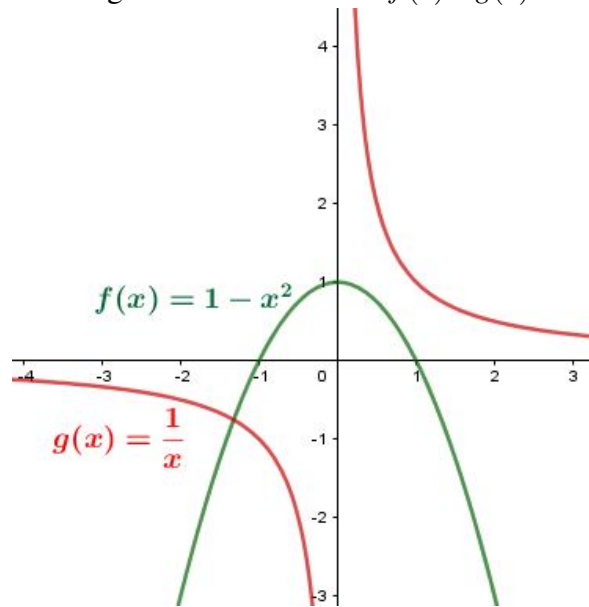
Calculemos as coordenadas dos pontos de intersecção da parábola de equação $y = 1 - x^2$ e da hipérbole de equação $y = \frac{1}{x}$.

Para isso, devemos igualar as duas equações:

$$1 - x^2 = \frac{1}{x}. \quad (5.10)$$

Para uma melhor visualização gráfica, plotamos as duas curvas no software Geogebra.

Figura 5.13: Gráfico de $f(x)$ e $g(x)$



Após manipulações algébricas na equação (5.10), chegamos a uma equação equivalente, a saber,

$$x^3 - x + 1 = 0. \tag{5.11}$$

Pelo Corolário 4.5 podemos concluir que há pelo menos uma raiz real. Para iniciarmos o método da bissecção, construímos uma planilha no software Excel para averiguar o comportamento da equação (5.11).

Figura 5.14: Valores de $h(x) = x^3 - x + 1$

	A	B	C	D	E	F
10	x	-2	-1	0	1	2
11	h(x)	-5	1	1	1	7

Observamos uma mudança no sinal de $h(x)$, no intervalo $[-1, -2]$ e, conforme o Teorema 4.6, há pelo menos uma raiz real no referido intervalo. Determinaremos a raiz da equação (5.11), utilizando o método da bissecção, com uma tolerância máxima de erro $\varepsilon = 0,01$. Para tal feito, construímos uma tabela no software Excel, conforme a figura 5.15.

Figura 5.15: Aplicação do método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	a_n	b_n	$x_n = (a_n + b_n)/2$	h(a_n)	h(b_n)	h(x_n)	$E = (b_n - a_n)/2$	Observação
2	0	-2,00000	-1,00000	-1,50000	-5,00000	1,00000	-0,87500	0,50000	CONTINUE
3	1	-1,50000	-1,00000	-1,25000	-0,87500	1,00000	0,29688	0,25000	CONTINUE
4	2	-1,50000	-1,25000	-1,37500	-0,87500	0,29688	-0,22461	0,12500	CONTINUE
5	3	-1,37500	-1,25000	-1,31250	-0,22461	0,29688	0,05151	0,06250	CONTINUE
6	4	-1,37500	-1,31250	-1,34375	-0,22461	0,05151	-0,08261	0,03125	CONTINUE
7	5	-1,34375	-1,31250	-1,32813	-0,08261	0,05151	-0,01458	0,01563	CONTINUE
8	6	-1,32813	-1,31250	-1,32031	-0,01458	0,05151	0,01871	0,00781	FIM

Conforme a figura 5.15, determinamos uma raiz aproximada da equação (5.11) na célula D8 em destaque. Para obter o valor correspondente de y , basta substituir o valor de x em qualquer uma das equações. Escolhemos a equação $g(x) = y = \frac{1}{x}$ e obtemos $y = -0,75740$. Portanto, a intersecção das curvas mencionadas na questão, ocorre aproximadamente no ponto **(-1,32031 , -0,75740)**.

5.5 Atividade 5: Percalços da produção de tilápia

A tilápia é um dos peixes de grande cultivo no Brasil, seja em reservatórios/tanques-rede, como também nos viveiros escavados, graças a sua notória aceitação no mercado interno, na qual sua presença é concebida desde a merenda escolar até menu de restaurantes renomados, e também pela sua vasta comercialização mundial.

De acordo com o IBGE, no período de 2005 a 2015, o Brasil aumentou significativamente a sua produção em 223%. Essa propulsão foi gerada por diversos fatores, tais como:

- Clima favorável;
- Cultivo com aceitação de diferentes sistemas de produção;
- Alta demanda;
- Bom resultado em cultivos intensivos;
- Uniformização do tamanho;
- Continuidade do peixe fresco o ano inteiro.

Esse crescimento significativo também está atrelado a um aumento das tecnologias na produção, por exemplo, pelo emprego de aeradores e ventiladores para aumentar a quantidade de oxigênio na água, possibilitando assim um maior número de cultivo da espécie, alimentadores automáticos, classificadores, contadores, entre outros; igualmente o profissionalismo dos produtores.

O grande percalço dessa produção é a proliferação de uma bactéria patógena, da família do *Streptococcus*. Esse patógeno está presente na água e contamina os peixes quando eles estão estressados pela superlotação dos tanques ou com a variação brusca de temperatura, ocasionando uma mortalidade significativa do cultivo.

Diante do exposto acima, analisamos os dados de um lote do cultivo de tilápia em reservatórios de tanques-rede localizados na cidade de Glória-BA. Essa propriedade está atravessando um momento de surto do patógeno mencionado anteriormente e, por meio de um modelo matemático polinomial, será possível estimar em quanto tempo esse produtor de tilápia perderá todo seu lote, caso não seja tomada uma providência efetiva. Observamos os dados da tabela abaixo:

Tabela 5.1: População de tilápia

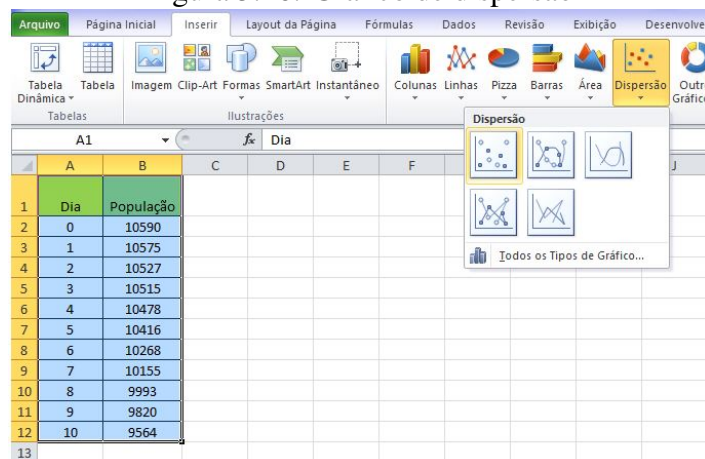
Dia	População de Tilápia
0	10590
1	10575
2	10527
3	10515
4	10478
5	10416
6	10268
7	10155
8	9993
9	9820
10	9564

Baseado nesses dados, utilizamos o software Excel para plotá-los e com isso determinar o modelo matemático polinomial da situação exposta acima.

No que se segue, serão demonstrados por meio de um breve tutorial todas as etapas de como foi obtido a curva, bem como a equação polinomial que modela o comportamento da população de tilápia. Os passos adotados para essa atividade serão os mesmos para os exercícios subsequentes.

Primeiramente, selecionamos a tabela dos dados e clicamos em *Inserir Gráficos de Dispersão*, conforme a figura 5.16.

Figura 5.16: Gráfico de dispersão

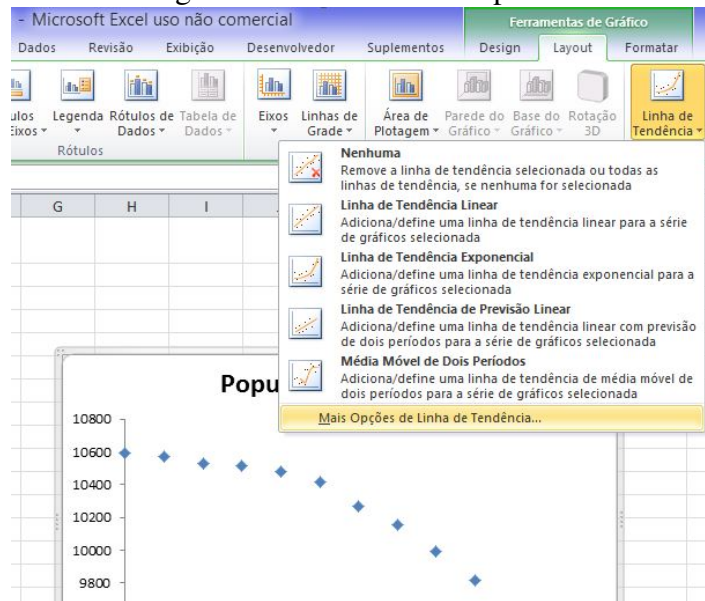


Dessa forma, o gráfico demonstrado na figura 5.17 é gerado e o próximo passo é adicionar a linha de tendência que mais se aproxima da curva.

Na barra *Ferramentas de Gráfico* clicamos na aba *Layout* e, em seguida, selecionamos a *Linha de Tendência*. Para finalizar marcamos o item *Mais Opções de Linha de Tendência*,

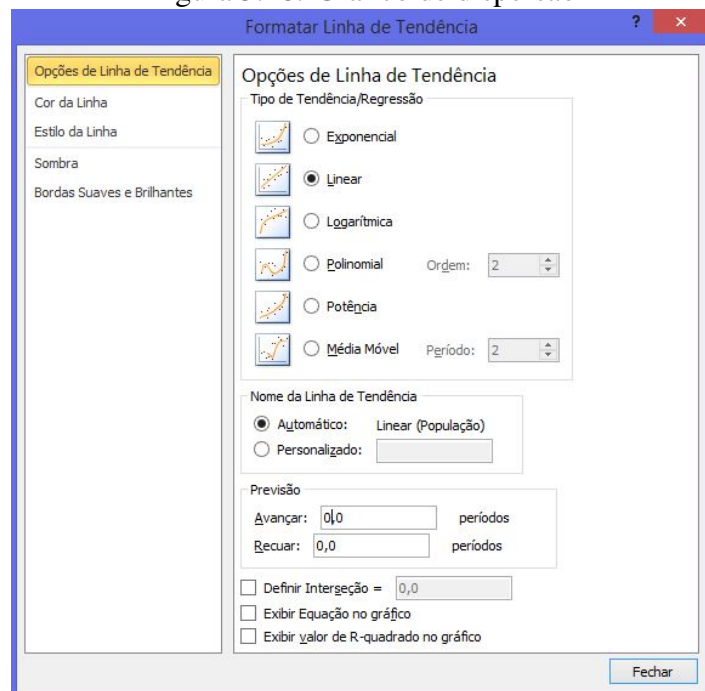
de acordo com a figura 5.17.

Figura 5.17: Gráfico de dispersão



Feito isso, uma nova janela aparece para selecionarmos o tipo da linha de tendência que melhor evidencie a curva em questão, conforme a figura 5.18.

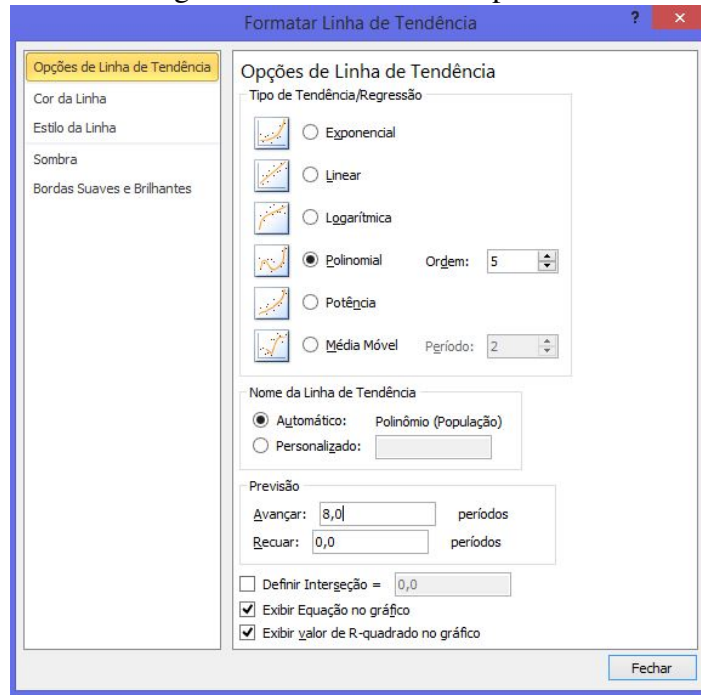
Figura 5.18: Gráfico de dispersão



Como o propósito dessa atividade é de investigar curvas que se comportam de forma polinomial, logo a selecionamos e verificamos empiricamente que o 5º grau melhor representa a curva. Ainda nesta janela, no item *Previsão*, configuramos para avançar 8 períodos

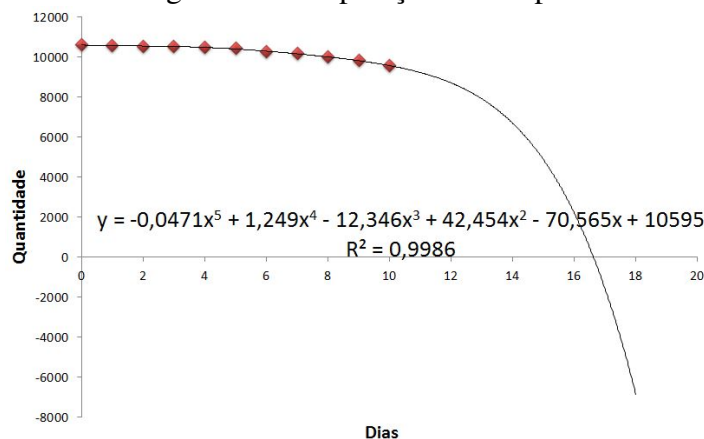
com o intuito de verificar se há a presença de uma raiz nesta curva. Por fim marcamos as caixas de seleção para *Exibir Equação e valor de R-quadrado no gráfico*, conforme a figura 5.19.

Figura 5.19: Gráfico de dispersão



Após todos esses procedimentos, realizamos ajustes nas configurações e obtemos o gráfico mostrado na figura 5.20 com a sua respectiva linha de tendência mais adequada gerada pelo software.

Figura 5.20: População de Tilápia



Podemos observar, conforme a figura 5.20, que existe uma raiz real entre os valores 16 e 18. Com base nessa informação construímos a tabela ilustrada na figura 5.21, ainda por

meio do software Excel, para verificar o comportamento dessa curva no referido intervalo. Essa tabela apresenta na coluna D os valores de x e na coluna E os valores de y .

Figura 5.21: Comportamento da curva

D	E
x	y
16	2231,502
17	-1548,83
18	-6805,57

De acordo com o Teorema de Bolzano, constatamos na figura 5.21, que há uma raiz entre os valores 16 e 17. Como o modelo obtido é de uma função polinomial do 5º grau, não se dispõe geralmente de uma fórmula para a sua resolução, todavia, com o auxílio dos métodos propostos neste trabalho, podemos solucionar o problema apresentado nesta atividade. Para isso, utilizamos inicialmente o método da bissecção e, em seguida, para melhor refinamento da raiz, empregamos o método da secante, com um erro máximo $\varepsilon = 0,001$. Tendo em vista o esforço computacional requerido pelo método da bissecção, são necessárias várias iterações até obtermos um intervalo adequado, dentro de um erro pré-definido. Assim, com esse método, paramos na 5ª iteração que, segundo a figura 5.22, fornece os valores 16,625 (coluna B) e 16,65625 (coluna D), definindo um intervalo razoável, porém fora da tolerância estabelecida.

Figura 5.22: Aplicação do método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	n	a _n	b _n	$x_n = (a_n + b_n)/2$	f(a _n)	f(b _n)	f(x _n)	$E = (b_n - a_n)/2$	Observação
14	0	16,00000	17,00000	16,50000	2231,5024	-1548,8327	502,5552406	0,50000	CONTINUE
16	1	16,50000	17,00000	16,75000	502,5552406	-1548,8327	-480,0766481	0,25000	CONTINUE
17	2	16,50000	16,75000	16,62500	502,5552406	-480,0766481	21,65047289	0,12500	CONTINUE
18	3	16,62500	16,75000	16,68750	21,65047289	-480,0766481	-226,5666155	0,06250	CONTINUE
19	4	16,62500	16,68750	16,65625	21,65047289	-226,5666155	-101,8019512	0,03125	CONTINUE

Considerando esse intervalo, aplicamos o método da secante. Agora, o objetivo é de refinamento da raiz que visa obter um valor igual ou inferior ao erro ε máximo pré-definido. Podemos observar que com esse método, após poucas iterações, alcançamos o critério de parada. De acordo com a figura 5.23, encontramos o valor de 16,63050, obtido na 4ª iteração.

Figura 5.23: Aplicação do método da secante

	A	B	C	D	E	F	G
	n	x _n	$(x_n - x_{n-1})$	f(x _n)	f(x _{n-1})	$E = \text{ABS}(x_n - x_{n-1})$	Observação
22	0	16,62500					
23	1	16,65625	0,03125	-101,8019512	21,65047289	0,03125	CONTINUE
25	2	16,63048	-0,02577	0,094406174	-101,8019512	0,02577	CONTINUE
26	3	16,63050	0,00002	0,000411094	0,094406174	0,00002	FIM

Concluimos que o produtor desse lote de tilápia, alvo do patógeno exposto, perderá

toda produção em aproximadamente 16,6305 dias, caso não estabeleça um plano de ações que efetivamente contorne essa situação.

5.6 Atividade 6: Controle de populações

Nessa atividade iremos simular uma situação real através de um modelo matemático, faremos um ajuste de curvas referente ao acompanhamento de uma população de macacos ameaçados de extinção. Observe a seguinte situação:

Em uma ilha com condições ideais para sobrevivência, foram colocados 144 macacos de uma determinada espécie que sofrem ameaça de extinção. Anualmente, os cientistas voltaram à ilha para acompanhar e contar a população, conforme os dados da tabela abaixo:

Tabela 5.2: População de macacos

Ano	População de macacos
0	144
1	180
2	250
3	350
4	400

Com a desaceleração do crescimento populacional observado no 4º ano, os cientistas ficaram preocupados e começaram a investigar o comportamento da variação dessa população. Essa investigação se concretizou por meio de um ajuste de curva, isto é, buscou-se um modelo matemático na forma de uma função que mais se aproxime dos pontos da tabela 5.2. Com isso, foi possível avaliar o quantitativo da população dos macacos nos anos subsequentes de modo a planejar as devidas ações necessárias visando a preservação da espécie. Reproduziremos aqui essa investigação.

Para isso, inserimos os dados da tabela 5.2 no software Excel e, em seguida, plotamos um gráfico de dispersão com linhas de tendência polinomiais de grau 2, 3 e 4, respectivamente. Vejamos as figuras:

Figura 5.24: Gráfico de dispersão com linha de tendência polinomial de grau 2

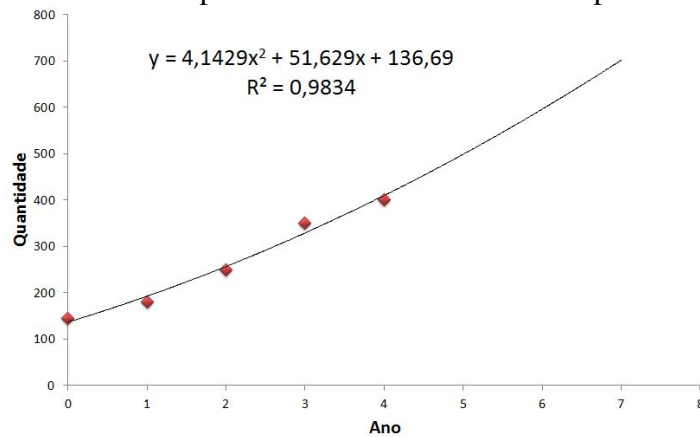


Figura 5.25: Gráfico de dispersão com linha de tendência polinomial de grau 3

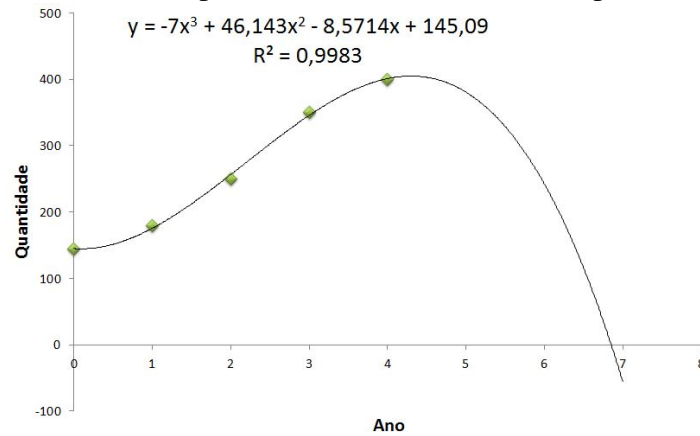
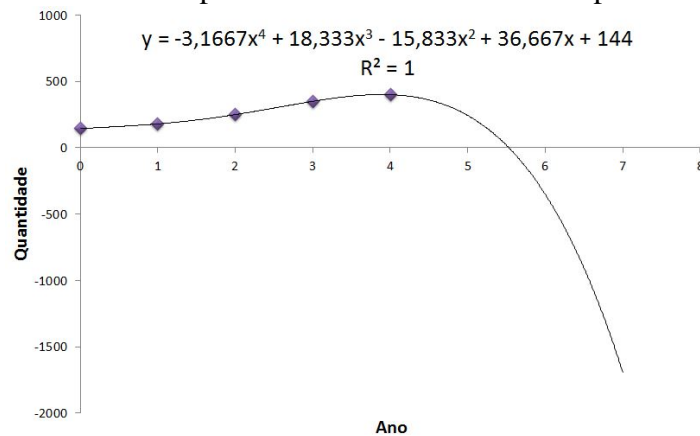


Figura 5.26: Gráfico de dispersão com linha de tendência polinomial de grau 4



Diante dessas 3 possibilidades, apenas a primeira não traria preocupações para o grupo de cientistas, uma vez que a espécie continuaria crescendo. Mas as demais trouxeram uma mensagem de alerta, configurando que a espécie monitorada sofre grave risco de extinção, se nenhuma ação for tomada objetivando a preservação da espécie.

Focaremos na situação mais alarmante que se encontra na figura 5.26, no qual determinaremos o exato momento dessa extinção, caso não ocorra nenhuma medida preservativa. Note que essa situação nos remete a uma equação polinomial de grau 4,

$$-3,1667x^4 + 18,333x^3 - 15,833x^2 + 36,667x + 144 = 0, \quad (5.12)$$

a qual solucionaremos aplicando o método da bissecção com o auxílio do software Excel, fixando uma tolerância máxima do erro em $\varepsilon = 0,0001$.

Ao observar a figura 5.26, vemos que a solução da equação (5.12) está compreendida entre os valores 5 e 6. Portanto, iniciaremos o método de resolução a partir do intervalo [5,6]. Vejamos a figura a seguir:

Figura 5.27: Aplicação do método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	a _n	b _n	$x_n = (a_n + b_n)/2$	y(a _n)	y(b _n)	y(x _n)	$E = (b_n - a_n)/2$	Observação
2	0	5,00000	6,00000	5,50000	243,94750	-350,10120	19,14471	0,50000	CONTINUE
3	1	5,50000	6,00000	5,75000	19,14471	-350,10120	-144,97945	0,25000	CONTINUE
4	2	5,50000	5,75000	5,62500	19,14471	-144,97945	-58,10969	0,12500	CONTINUE
5	3	5,50000	5,62500	5,56250	19,14471	-58,10969	-18,31919	0,06250	CONTINUE
6	4	5,50000	5,56250	5,53125	19,14471	-18,31919	0,69882	0,03125	CONTINUE
7	5	5,53125	5,56250	5,54688	0,69882	-18,31919	-8,73807	0,01563	CONTINUE
8	6	5,53125	5,54688	5,53906	0,69882	-8,73807	-4,00167	0,00781	CONTINUE
9	7	5,53125	5,53906	5,53516	0,69882	-4,00167	-1,64695	0,00391	CONTINUE
10	8	5,53125	5,53516	5,53320	0,69882	-1,64695	-0,47294	0,00195	CONTINUE
11	9	5,53125	5,53320	5,53223	0,69882	-0,47294	0,11322	0,00098	CONTINUE
12	10	5,53223	5,53320	5,53271	0,11322	-0,47294	-0,17979	0,00049	CONTINUE
13	11	5,53223	5,53271	5,53247	0,11322	-0,17979	-0,03327	0,00024	CONTINUE
14	12	5,53223	5,53247	5,53235	0,11322	-0,03327	0,03998	0,00012	CONTINUE
15	13	5,53235	5,53247	5,53241	0,03998	-0,03327	0,00336	0,00006	FIM

Embasados no resultado apresentado pela figura 5.27, concluímos que a extinção da espécie de macacos dar-se-á aproximadamente no ano 5,53541, caso não se tome medidas protetivas urgentes.

5.7 Atividade 7: Desmatamento da Amazônia Legal

Esta atividade inicia-se com um texto baseado em matéria do site G1, intitulada "Porque a Amazônia é vital para o mundo?", publicada em 31 de agosto de 2017.

A Amazônia detém um papel de extrema importância, pois influencia vários aspectos do planeta, tais como:

- Regime de chuvas - Os “rios voadores” formados por massas de ar carregados de água advindas da evapotranspiração levam umidade para o Centro-Oeste, Sudeste e Sul do Brasil, como também para a Bolívia, Paraguai, Argentina, Uruguai e até no extremo sul do Chile. Essa umidade contribui também para a manutenção do agronegócio, produção de alimentos e geração de energia;

- Mudanças climáticas - Retém e armazena uma grande quantidade de carbono ajudando assim a estabilizar o clima mundial;
- Equilíbrio ambiental - Com a preservação da biodiversidade contribui-se na estabilização de outros ecossistemas;
- Produtos da floresta - esses produtos são utilizados na produção de medicamentos, alimentos, cosméticos, controle biológico de pragas, entre outros.

Analizamos os dados referente a Amazônia Legal, constituída por 5,217,423 km^2 , e queremos estimar por quantos anos teremos essa riqueza imensurável em nosso território. Para tal, observamos os dados fornecidos pelo Projeto de Estimativa do Desflorestamento da Amazônia (PRODES) com referência a sua grande devastação conforme a Tabela 5.3:

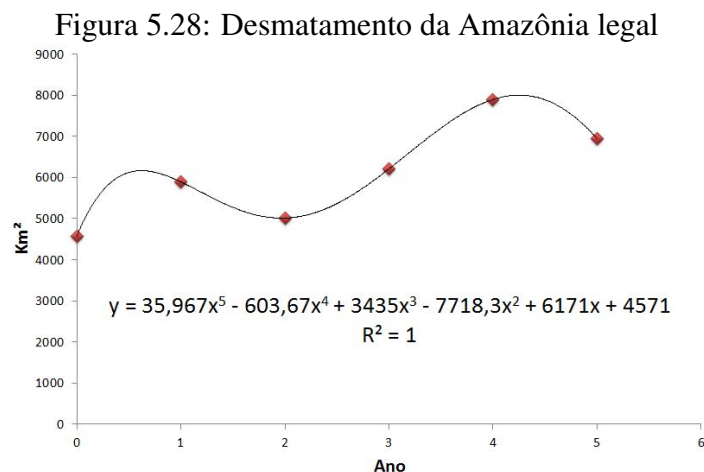
Tabela 5.3: Desmatamento da Amazônia Legal

Ano	Área desmatada (km^2)
2012	4571
2013	5891
2014	5012
2015	6207
2016	7893
2017	6947

A partir dos dados da Tabela 5.3, no qual $x = 0$ refere-se ao ano 2012, $x = 1$ ao ano 2013 e assim por diante, plotamos esses pontos através da utilização do software Excel e, em seguida, verificamos uma curva que melhor satisfizesse esses pontos. A curva encontrada foi do tipo

$$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f,$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, isto é, uma função polinomial do 5º grau.



A partir da figura 5.28, conseguimos determinar o modelo matemático para essa situação:

$$y = 35,967x^5 - 603,67x^4 + 3435x^3 - 7718,3x^2 + 6171x + 4571. \quad (5.13)$$

Dessa forma, realizamos uma comparação entre os dados fornecido pelo PRODES e os dados sugeridos pelo modelo para a verificação da sua compatibilidade, de acordo com a Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Comparação da área modelada

x	Ano	Área desmatada (km^2)	Área modelada (km^2)
0	2012	4571	4571,00
1	2013	5891	5891,00
2	2014	5012	5012,02
3	2015	6207	6207,01
4	2016	7893	7892,89
5	2017	6947	6946,63

Supondo que o desmatamento da Amazônia Legal continue conforme a equação (5.13), determinaremos em qual ano o desmatamento atingirá aproximadamente $4,158,000 km^2$. Diante dessa problemática, utilizaremos essa suposição na equação (5.13), obtemos

$$35,967x^5 - 603,67x^4 + 3,435x^3 - 7,718,3x^2 + 6,171x + 4,571 = 4,158,000,$$

ou seja,

$$35,967x^5 - 603,67x^4 + 3,435x^3 - 7,718,3x^2 + 6,171x - 4,153,429 = 0. \quad (5.14)$$

Para solucionarmos o questionamento acima, necessitamos determinar a raiz da equação (5.14). Empregamos primeiramente o método da bissecção e finalizamos com o método da secante para uma melhor aproximação da raiz. Para identificarmos entre quais valores inteiros localiza-se uma possível raiz, fizemos uma tabela substituindo o valor de x na equação (5.14) para obtermos o valor de y correspondente, conforme a figura abaixo:

Figura 5.29: Identificação do intervalo inicial

	F	G
1	x	y
2	0	-4153429
3	1	-4152109,003
4	10	-3868549
5	13	-1718027,239
6	14	-852,712
7	15	2547290,375

Segundo o Teorema do Valor Intermediário podemos inferir que há uma raiz no intervalo $[14, 15]$. Diante dessa afirmação, começamos a empregar o método da bissecção com um erro $\varepsilon = 0,001$, conforme a figura abaixo:

Figura 5.30: Aplicação do método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
10	n	a _n	b _n	$x_n = (a_n + b_n)/2$	A(a _n)	A(b _n)	A(x _n)	$E = (b_n - a_n)/2$	Observação
11	0	14,00000	15,00000	14,50000	-852,712	2547290,375	1153925,223	0,50000	CONTINUE
12	1	14,00000	14,50000	14,25000	-852,712	1153925,223	548754,401	0,25000	CONTINUE
13	2	14,00000	14,25000	14,12500	-852,712	548754,401	267250,4155	0,12500	CONTINUE
14	3	14,00000	14,12500	14,06250	-852,712	267250,4155	131553,7497	0,06250	CONTINUE

Em posse dos resultados obtidos pelo método da bissecção, conforme a figura 5.30, e devido ao erro $\varepsilon = 0,001$, a partir dos intervalos destacados anteriormente, aplicamos o método da secante com a intenção de uma melhor aproximação da raiz. Vejamos:

Figura 5.31: Aplicação do método da secante

	A	B	C	D	E	F	G
17	n	x _n	$(x_n - x_{n-1})$	A(x _n)	A(x _{n-1})	$E = \text{ABS}(x_n - x_{n-1})$	Observação
18	0	14,00000					
19	1	14,06250	0,06250	131553,7497	-852,712	0,06250	CONTINUE
20	2	14,00040	-0,06210	-10,40032276	131553,7497	0,06210	CONTINUE
21	3	14,00041	0,00000	-0,126835177	-10,40032276	0,00000	FIM

Assim, após aplicação do método da secante, supondo que o desmatamento da Amazônia legal siga o modelo matemático encontrado, conforme a equação (5.14), inferimos que no ano de 2026 teremos um desmatamento de $4.158.000 \text{ km}^2$, caso não se adote medidas urgentes e eficazes.

5.8 Atividade 8: Aplicação de equação polinomial na trigonometria

As teclas de sua calculadora referentes às funções trigonométricas estão defeituosas. Mesmo assim, pede-se que você calcule com quatro decimais exatas o valor do cosseno de 20° .

Partimos do fato de sabermos o valor de

$$\cos(60^\circ) = \cos(3 \cdot 20^\circ) = \frac{1}{2}. \quad (5.15)$$

Utilizando as fórmulas da adição das funções trigonométricas [12], encontraremos a seguinte identidade trigonométrica:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta. \quad (5.16)$$

Igualando as equações (5.15) e (5.16) (em $\theta = 20^\circ$), obtemos

$$4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ = \frac{1}{2}.$$

Seja $\cos 20^\circ = x$. Então,

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}.$$

Ou, equivalentemente,

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \quad (5.17)$$

Para solucionar a questão é necessário determinar as raízes da equação (5.17), com um erro máximo de $\varepsilon = 0,00001$, uma vez que o enunciado solicita quatro decimais exatos.

Primeiramente, faremos uma tabela para a visualização do comportamento da função. De pronto já sabemos, pelo corolário 4.5, que possui pelo menos uma raiz real. Vejamos a figura:

Figura 5.32: Aplicação do método da bissecção

	A	B	C	D	E	F
10	x	-1	0	1	2	3
11	f(x)	-3	-1	1	51	197

A mudança do sinal de $f(x)$ no intervalo $[0, 1]$ implica a existência de pelo menos uma raiz real, conforme o Teorema 4.6. Inicialmente, aplicamos o método da bissecção para obter um intervalo de menor amplitude. Conforme a figura 5.33, temos

Figura 5.33: Aplicação do método da bissecção

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	a _n	b _n	$x_n = (a_n + b_n)/2$	h(a _n)	h(b _n)	h(x _n)	$E = (b_n - a_n)/2$	Observação
2	0	0,00000	1,00000	0,50000	-1,00000	1,00000	-3,00000	0,50000	CONTINUE
3	1	0,50000	1,00000	0,75000	-3,00000	1,00000	-2,12500	0,25000	CONTINUE
4	2	0,75000	1,00000	0,87500	-2,12500	1,00000	-0,89063	0,12500	CONTINUE
5	3	0,87500	1,00000	0,93750	-0,89063	1,00000	-0,03320	0,06250	CONTINUE
6	4	0,93750	1,00000	0,96875	-0,03320	1,00000	0,46069	0,03125	CONTINUE
7	5	0,93750	0,96875	0,95313	-0,03320	0,46069	0,20816	0,01563	CONTINUE
8	6	0,93750	0,95313	0,94531	-0,03320	0,20816	0,08609	0,00781	CONTINUE

A partir do intervalo de menor amplitude que contém a raiz, conforme os valores das células B8 e D8 destacadas na figura 5.33, implementamos o método da secante com o intuito de obter um melhor refinamento da raiz com erro máximo $\varepsilon = 0,00001$, garantindo, assim, os quatro decimais exatos solicitados no enunciado. Dessa forma:

Figura 5.34: Aplicação do método da secante

	A	B	C	D	E	F	G
18	n	x _n	$(x_n - x_{n-1})$	f(x _n)	f(x _{n-1})	$E = \text{ABS}(x_n - x_{n-1})$	Observação
19	0	0,93750					
20	1	0,94531	0,00781	0,08609	-0,03320	0,00781	CONTINUE
21	2	0,93967	-0,00564	-0,00028	0,08609	0,00564	CONTINUE
22	3	0,93969	0,00002	0,00000	-0,00028	0,00002	CONTINUE
23	4	0,93969	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	FIM

De acordo com a figura 5.34, determinamos que $x = 0,93969$. Portanto,

$$\cos 20^\circ = 0,93969.$$

Capítulo 6

Conclusões

Diante dos exemplos realísticos que foram abordadas neste trabalho, pudemos observar o quão é importante sabermos lidar com as equações polinomiais. De fato, em nosso dia-a-dia, existe uma série de situações que podem ser modeladas utilizando polinômios e o que procuramos é uma raiz do mesmo. Essa deveria ser uma das razões para a introdução desse conteúdo no ensino básico. Todavia, tal conteúdo não é contemplado em sua totalidade no ensino básico das escolas públicas do Estado de Pernambuco, muito possivelmente em vista das dificuldades encontradas na resolução das equações polinomiais de grau superior a dois.

Ora, se o entendimento de um conteúdo se deve, principalmente, a dois fatores: Um conhecimento prévio do aluno e a uma abordagem metodológica adotada pelo professor, no intuito de conduzir da melhor forma o que já é da experiência do aluno, para que este desenvolva um novo conhecimento, nada melhor do que analisar a real taxa de juros aplicada na compra de uma mercadoria ou a extinção de espécies da nossa fauna e flora, como fizemos anteriormente.

Vimos que a resolução desses problemas pode e deve ser realizada por meio de métodos numéricos, implementados através de softwares conhecidos, tais como: Excel e Geogebra. Embora, sabendo que o Geogebra forneça imediatamente a solução do tema proposto, esse não foi o nosso objetivo, pois o aluno necessita compreender o método adotado pelo software, avaliando a coerência dos resultados obtidos por esse recurso computacional. Contudo, utilizamos o Geogebra para auxiliar a visualização gráfica de um dado polinômio, facilitando a determinação de um intervalo que contenha uma raiz real. A partir de então, aplicamos métodos numéricos simples, intuitivos e de fácil compreensão, utilizando o Excel.

Apesar de não termos aplicado essas ideias em sala de aula antes do término desse trabalho, e diante das dificuldades apresentadas em abordar a forma analítica devido ao conhecimento e prática dos alunos, cremos que esta pode ser uma forma prática e dinâmica de abordar o conteúdo em questão, pois memorizar as fórmulas (quando elas existem) não traz sentido algum para a quase totalidade dos alunos, desmotivando-os na sua trajetória ao conhecimento. Além do que, não devemos fomentar a ideia de que tudo pode ser resolvido por meio de fórmulas “prontas” no intuito de se obter soluções exatamente, excluindo assim

o geral, que são as soluções aproximadas, consideradas de maior relevância nas aplicações da Matemática.

Apresentamos propostas simples para atualizar o ensino das equações polinomiais na educação básica, por meio de recursos computacionais. Como visto, essas equações englobam assuntos multidisciplinares, logo a continuidade desse trabalho, poderá incluir o desenvolvimento de algoritmos em outras plataformas de softwares e aplicativos. Dessa forma, proporcionando ao aluno práticas exitosas e contemporâneas, sendo mais atrativas que os métodos tradicionais, ainda adotados na sala de aula das escolas brasileiras. Outra forma de aprofundar esse tema, seria compreender os métodos adotados nas escolas de outras nações. Por fim, esperamos que professores do Ensino Médio das escolas públicas, não somente de Pernambuco, mas de todo o Brasil, que compactuem com nossa ideia, possam desfrutar desse trabalho da melhor forma possível, engrandecendo o conhecimento e a criticidade do nosso alunado no seu cotidiano.

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, C. **Produção de tilápia no Brasil cresce 223% em dez anos.** Disponível em: < [https : //www.embrapa.br/busca – de – noticias/ – /noticia/21621836/producao – de – tilapia – no – brasil – cresce – 223 – em – dez – anos](https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/21621836/producao-de-tilapia-no-brasil-cresce-223-em-dez-anos) >. Acesso em: 20/02/2018.
- [2] BARROSO, L.C. *et al.* **Cálculo Numérico (com aplicações)**, 2^a ed. São Paulo: Editora HARBRA, (1987), 365p.
- [3] BURDEN, R.L.; BURDEN, A.M., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**, 10^a ed. São Paulo, Editora Cengage Learning, (2015), 721p.
- [4] CARNEIRO, J.P.Q. **Equações algébricas de grau maior do que dois: assunto para o ensino médio?**, Revista do Professor de Matemática, N^o 40. Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/40/7.htm>>. Acesso em: 26/08/2018.
- [5] FERNANDEZ, C.S.; SANTOS, R.A. **O Teorema Fundamental da Álgebra**, V Bienal da SBM/UFPB. Disponível em: < [http : //www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/MiniCursos completos/MC5Completo.pdf](http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Minicursos completos/MC5Completo.pdf) >. Acesso em: 26/08/2018.
- [6] GARBI, G.G. **O Romance das Equações Algébricas: A história da Álgebra**, São Paulo, Editora Makron Books, (1997), 255p.
- [7] HEFEZ, A.; VILLELA, M.L.T. **Polinômios e Equações Algébricas**, 1^a ed., Rio de Janeiro, Editora SBM, (2012), 269p.
- [8] INPE. **Taxas anuais de desmatamento na Amazônia Legal Brasileira (AMZ)**. Disponível em: < [http : //www.obt.inpe.br/prodes/dashboard/prodes – rates.html](http://www.obt.inpe.br/prodes/dashboard/prodes-rates.html) >. Acesso em: 26/02/2018.
- [9] JORDÃO, P.; WELLE, D. **Por que a Amazônia é vital para o mundo?**. Disponível em: < [https : //g1.globo.com/natureza/noticia/por – que – a – amazonia – e – vital – para – o – mundo.ghtml](https://g1.globo.com/natureza/noticia/por-que-a-amazonia-e-vital-para-o-mundo.ghtml) >. Acesso em: 26/02/2018.

- [10] KNUDSEN, C.A. **A teoria das equações algébricas**, Revista do Professor de Matemática, N^o 7, (1985), pp. 26–31.
- [11] LIMA, E.L. **A Equação do terceiro grau**, Revista de Matemática Universitária, N^o 5, (1987), pp. 09–23.
- [12] LIMA, E.L. **Números e Funções Reais**, 1^a ed., Rio de Janeiro, Editora SBM, (2013), 297p.
- [13] MILIES, C.P. **A Solução de Tartaglia para a Equação do Terceiro Grau**, Revista do Professor de Matemática, N^o 25. Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/25/4.htm>>. Acesso em: 12/01/2018.
- [14] MORGADO, A.C.; CARVALHO, P.C.P. **Matemática Discreta**, 1^a ed., Rio de Janeiro, Editora SBM, (2013), 204p.
- [15] NETO, A.C.M. **Fundamentos de Cálculo**, 1^a ed., Rio de Janeiro, Editora SBM, (2015), 577p.
- [16] OLIVEIRA, M. **A vez da tilápia**, Revista FAPESP, Edição 249. Disponível em: <<http://revistapesquisa.fapesp.br/2016/11/18/a-vez-da-tilapia/>>. Acesso em: 20/02/2018.
- [17] RUGGIERO, M.G.; LOPES, V.R. **Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais**, 2^a ed., São Paulo, Editora Makron Books, (1988), 424p.
- [18] SMOLE, K. S.; DINIZ, M.I. **MATEMÁTICA para compreender o mundo**, Volume 3, 1^a ed., São Paulo, Editora Saraiva, (2016).
- [19] TRAJANO, A. **Aritmética Progressiva**, 75^a ed., Rio de Janeiro, Editora Francisco Alves, (1944).
- [20] VICENTE, W.M.; **Segredos, intrigas e equações cúbicas**, Guia do Professor, Série Mátema. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1278>>. Acesso em: 07/04/2018.

Apêndice A

Análise de convergência do método da secante

Neste Apêndice demonstraremos o seguinte Teorema, o qual está relacionado à convergência das iteradas dadas pelo método da secante.

Teorema A.1 *Sejam $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ e $x^* \in (a, b)$ tal que*

$$f(x^*) = 0.$$

Suponha que

$$m = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)| > 0 \text{ e } M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| < \infty,$$

e seja $\rho > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$q = \frac{M}{2m}\rho < 1.$$

Defina

$$K_\rho(x^*) = \{x \in [a, b]; |x - x^*| \leq \rho\}.$$

Então, se (x_n) é definida pela fórmula (4.3) e $x_1, x_2 \in K_\rho(x^)$, com $x_1 \neq x_2$, então*

$$x_n \in K_\rho(x^*), \forall n \geq 1.$$

Além disso, vale a seguinte estimativa:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{2m}{M} q^{\gamma_{n-1}}, \forall n \geq 1,$$

onde (γ_n) é a sequência de Fibonacci. Portanto,

$$x_n \longrightarrow x^*, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Demonstração.

Parte 1: Demonstração de que $x_n \in K_\rho(x^*)$, $\forall n \geq 1$, se $x_1, x_2 \in K_\rho(x^*)$.

De fato, suponha que $x_n, x_{n-1} \in K_\rho(x^*)$, para algum $n \geq 2$. Mostraremos que

$$x_{n+1} \in K_\rho(x^*).$$

Para isso, conforme vimos no capítulo 4 (fórmula (4.3)), temos que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Daí,

$$x_{n+1} - x^* = (x_n - x^*) - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Multiplicando a primeira parcela do lado direito da igualdade acima por

$$\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right) \left(\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \right),$$

obtemos

$$x_{n+1} - x^* = (x_n - x^*) \cdot \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right) \left(\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \right) - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

Ou ainda,

$$x_{n+1} - x^* = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right) \left((x_n - x^*) \left(\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \right) - f(x_n) + f(x^*) \right),$$

uma vez que $f(x^*) = 0$. Por fim, se multiplicamos as duas últimas parcelas do lado direito da igualdade acima por $\frac{x_n - x^*}{x_n - x^*}$, chegamos a

$$x_{n+1} - x^* = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right) \left((x_n - x^*) \left(\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \right) - \frac{x_n - x^*}{x_n - x^*} (f(x_n) - f(x^*)) \right).$$

Após algumas manipulações algébricas da igualdade acima, deduzimos que

$$|x_{n+1} - x^*| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|f(x_n) - f(x_{n-1})|} |x_n - x^*| \left| \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} - \frac{f(x_n) - f(x^*)}{x_n - x^*} \right|. \quad (\text{A.1})$$

No que segue, denotamos

$$\varphi(x_n, x_{n-1}) = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|f(x_n) - f(x_{n-1})|}$$

e

$$\psi(x_n, x_{n-1}) = \left| \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} - \frac{f(x_n) - f(x^*)}{x_n - x^*} \right|$$

e faremos algumas estimativas relativas a essas quantidades.

- Estimativa para $\varphi(x_n, x_{n-1})$:

Sendo $m = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, então

$$|f'(x)| \geq m, \forall x \in [a, b].$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio aplicado a f , sabemos que

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(c)(x_n - x_{n-1}),$$

para algum $c \in (a, b)$. Logo,

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(c)|(x_n - x_{n-1}),$$

donde podemos afirmar que

$$\frac{|(x_n - x_{n-1})|}{|f(x_n) - f(x_{n-1})|} = \frac{1}{|f'(c)|} \leq \frac{1}{m},$$

ou seja,

$$|\varphi(x_n, x_{n-1})| \leq \frac{1}{m}. \quad (\text{A.2})$$

- Estimativa para $\psi(x_n, x_{n-1})$:

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos afirmar que

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = - \int_0^1 \frac{d}{dr} [f(x_n + r(x_{n-1} - x_n))] dr.$$

Portanto,

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \int_0^1 f'(x_n + r(x_{n-1} - x_n)) dr. \quad (\text{A.3})$$

Analogamente, temos

$$\frac{f(x_n) - f(x^*)}{x_n - x^*} = \int_0^1 f'(x_n + r(x^* - x_n)) dr. \quad (\text{A.4})$$

Das equações (A.3) e (A.4), obtemos

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} - \frac{f(x_n) - f(x^*)}{x_n - x^*} = \int_0^1 [f'(x_n + r(x_{n-1} - x_n)) - f'(x_n + r(x^* - x_n))] dr \quad (\text{A.5})$$

Ora, o integrando na equação (A.5) pode ser reescrito como

$$- \int_0^r \frac{d}{ds} [f'(x_n + r(x_{n-1} - x_n) + s(x^* - x_{n-1}))] ds.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} & f'(x_n + r(x_{n-1} - x_n)) - f'(x_n + r(x^* - x_n)) \\ &= \int_0^r f''(x_n + r(x_{n-1} - x_n) + s(x_{n-1} - x^*)) (x_{n-1} - x^*) ds. \end{aligned}$$

Mas então

$$\begin{aligned} & |f'(x_n + r(x_{n-1} - x_n)) - f'(x_n + r(x^* - x_n))| \\ & \leq \int_0^r |f''(x_n + r(x_{n-1} - x_n) + s(x_{n-1} - x^*))| |x_{n-1} - x^*| ds \leq M |x_{n-1} - x^*| r, \end{aligned}$$

haja vista que $|f''(x_n + r(x_{n-1} - x_n) + s(x^* - x_{n-1}))| \leq M, \forall s \in [0, r]$. Assim, segue que

$$\psi(x_n, x_{n-1}) = \left| \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} - \frac{f(x_n) - f(x^*)}{x_n - x^*} \right| \leq \frac{M}{2} |x_{n-1} - x^*|. \quad (\text{A.6})$$

Logo, de (A.6), (A.2) e (A.1), obtemos

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x^*| |x_{n-1} - x^*|. \quad (\text{A.7})$$

Como

$$|x_n - x^*|, |x_{n-1} - x^*| \leq \rho$$

e

$$\frac{M}{2m} \rho < 1,$$

pela equação (A.7),

$$|x_{n+1} - x^*| < \rho. \quad (\text{A.8})$$

Portanto, pela equação (A.8) concluímos que $x_{n+1} \in K_\rho(x^*)$, se $x_n, x_{n-1} \in K_\rho(x^*)$. O resultado segue então por indução.

Parte 2: Demonstração da convergência de x_n para a raiz x^* .

Defina

$$\rho_n = \frac{M}{2m} |x_n - x^*|.$$

Ao multiplicarmos ambos os membros da desigualdade (A.7) por $\frac{M}{2m}$, obtemos

$$\frac{M}{2m} |x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x^*| \frac{M}{2m} |x_{n-1} - x^*|,$$

isto é,

$$\rho_{n+1} \leq \rho_n \rho_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Observe que

$$\rho_1 = \frac{M}{2m} |x_1 - x^*| < \frac{M}{2m} \rho = q \quad \text{e} \quad \rho_2 = \frac{M}{2m} |x_2 - x^*| < \frac{M}{2m} \rho = q.$$

Além disso, por indução podemos mostrar que

$$\rho_n \leq q^{\gamma_n-1},$$

onde (γ_n) é a sequência de Fibonacci. Como $q < 1$ e

$$\gamma_n \longrightarrow \infty, \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

deduzimos que as iteradas x_n do método das secantes satisfazem

$$x_n \longrightarrow x^*, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

□

Corolário A.2 *Sejam p um polinômio de grau $n \geq 1$ e $x^* \in \mathbb{R}$ um raiz simples de p , ou seja, $p(x^*) = 0$ e $p'(x^*) \neq 0$, onde p' denota o polinômio derivada do polinômio p . Então, a sequência das iteradas (x_n) dadas pelo método da secante convergem para x^* .*

Demonstração. Basta notar que ou $p'(x^*) > 0$ ou $p'(x^*) < 0$. No primeiro caso, existe um intervalo $I = [a, b]$ com $x^* \in (a, b)$ tal que $p'(x) > 0, \forall x \in I$. Portanto,

$$m = \min_{x \in I} |p'(x)| > 0.$$

O resultado segue então do Teorema anterior. Além disso, o caso restante é demonstrado analogamente. □