

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

LUCAS DA SILVA FRANÇA

OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL
**TEORIA DOS JOGOS E A BATALHA DOS
TREZENTOS**

Ilhéus-Bahia

2018

LUCAS DA SILVA FRANÇA

OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL
TEORIA DOS JOGOS E A BATALHA DOS TREZENTOS

*Dissertação submetida ao Colegiado do PROFMAT da
Universidade Estadual de Santa Cruz.*

*Orientador: Prof. Dr. Nestor Castañeda Centurión
Co-Orientador: Prof. Dr. Germán Gómero Ferrer*

*Ilhéus-Bahia
2018*

F814 França, Lucas da Silva.
Oficinas de matemática experimental: teoria dos jogos e a batalha dos trezentos / Lucas da Silva França. – Ilhéus, BA: UESC, 2018.
64 f. : il.

Orientador: Nestor Castañeda Centurión.
Co-orientador: Germán Gomero Ferrer.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências bibliográficas e apêndices.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Teoria dos jogos. 3. Atividades criativas na sala de aula. 4. Jogos no ensino de matemática. 5. Raciocínio. I. Título.

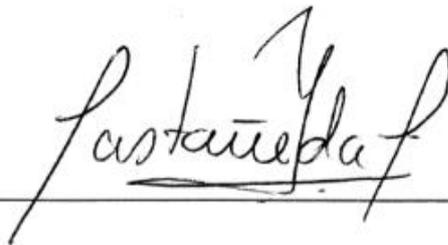
CDD 510.7

LUCAS DA SILVA FRANÇA

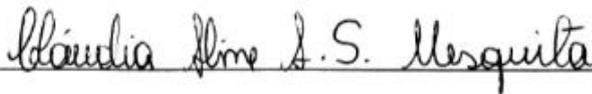
OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL
TEORIA DOS JOGOS E A BATALHA DOS TREZENTOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

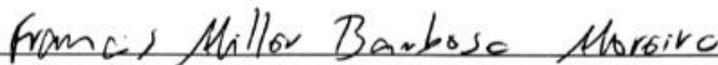
Trabalho aprovado. Ilhéus, 28 de setembro de 2018



Prof. Dr. Nestor Castañeda Centurión
Orientador



Profa. Dra. Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita
Membro Externo - UNIFESP Campus de São José dos Campos



Prof. Me. Francis Miller Barbosa Moreira
Membro Externo - UNEB Campus X de Teixeira de Freitas

*Quando a caminhada
começa a ficar dura só
os duros continuam cami-
nhando.*

Agradecimentos

À minha avó, que me deu forças e me fez sempre acreditar em dias melhores.

À minha família que, por mais que não entendesse e não concordasse com algumas de minhas decisões, esteve sempre ao meu lado.

Aos meus professores que vão desde o fundamental I até o período final dessa minha pós-graduação em Matemática pelo PROFMAT.

Aos meus amigos, que sempre acreditaram em mim e sempre estiveram ao meu lado nos bons e maus momentos.

Ao corpo docente e técnico do Colégio Anísio Teixeira, em nome do diretor Tenente Coronel Magalhães, diretor militar, juntamente com a diretora Pedagógica Mônica.

Aos professores Nestor Castañeda Centurión e Germán Gomero Ferrer, que me propiciaram dar os primeiros passos na escrita deste trabalho e também pelo empenho em me ajudar.

À CAPES, pelo apoio financeiro que me possibilitou abrir mão de algumas coisas para que eu pudesse realizar mais esse sonho. Por último, e mais importante, a Deus que sempre atende os meus pedidos e sempre caminha comigo.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo evidenciar novas possibilidades no que tange ao processo de ensino/aprendizagem de matemática, tendo em vista o mau desempenho que os alunos frequentemente têm nessa disciplina. Desse modo, desenvolvemos uma atividade com um grupo de alunos, fazendo uso das Oficinas de Matemática Experimental (OMEs) como ferramenta metodológica nesse processo. Além de buscarmos mostrar a importância e utilidade dessas oficinas, criamos a possibilidade de que os alunos envolvidos pudessem interagir com a Teoria dos Jogos, uma área da matemática que não pertence ao currículo da educação básica, mas que se mostrou rica em conceitos a serem explorados. Assim, neste trabalho, apresentamos a OME intitulada “A Batalha dos Trezentos” que expõe os alunos a um processo de tomada de decisões, no sentido da Teoria dos Jogos, usando a famosa batalha das Termópilas, na qual um pequeno exército espartano conseguiu segurar por longo tempo um imenso contingente persa. A oficina foi aplicada em turmas do 1º ano do ensino médio do Colégio da Polícia Militar Anísio Teixeira da cidade de Teixeira de Freitas-BA, contando com total apoio da direção escolar. Neste trabalho, notamos envolvimento substancial dos alunos nas atividades, com destaque para o estímulo de habilidades de raciocínio evidenciadas pela produção de argumentações consistentes quando expostos ao processo de tomada de decisões. Dessa forma, podemos destacar, nesta pesquisa, que o uso de experimentação, ludicidade e contextualização na formulação da situação-problema apresentada tornou a matemática mais atraente para nossos alunos.

Palavras-chave: Oficinas pedagógicas, Oficinas de Matemática Experimental, Teoria dos Jogos, experimentação, raciocínio.

Abstract

The present work aims to show new possibilities regarding the teaching/learning process of mathematics, considering the poor performance that students often have in this discipline. In this way, we developed a work with a group of students, making use of the Workshops of Experimental Mathematics (OMEs) as a methodological tool in this process. In addition to trying to show the importance and usefulness of these workshops, we created the possibility that the students involved could interact with the Game Theory, an area of mathematics that does not belong to the basic education curriculum, but which has been rich in concepts to be explored. Thus, in this work we present the OME entitled “The Battle of the Three Hundred” which exposes the students to a decision-making process in the sense of Game Theory, using the famous battle of Thermopylae in which a small Spartan army managed to hold for a long time an immense Persian contingent. The workshop was applied in classes of the 1st year of high school of the Anísio Teixeira Military Police College in the city of Teixeira de Freitas-BA, counting with the full support of the school management. In this work we note substantial involvement of the students in the activities, especially the stimulation of reasoning skills evidenced by the production of consistent arguments when exposed to the decision making process. Thus, we can highlight in this research that the use of experimentation, playfulness and contextualization in the formulation of the problem situation presented, made mathematics more attractive for our students.

Keywords: Pedagogical workshops, Workshops of Experimental Mathematics, Theory of Games, experimentation, reasoning.

Sumário

Introdução	11
1 Teoria dos jogos	13
1.1 O que é a Teoria dos Jogos	13
1.2 Aspectos históricos da Teoria dos Jogos	14
1.3 Principais fundamentos da Teoria dos Jogos	16
1.3.1 Racionalidade, estratégia e a tomada de decisão	16
1.3.2 Análise de informação, formalização do jogo e criação do modelo	17
1.3.3 Algumas classificações de jogos	18
1.3.4 Matriz de ganhos, forma estratégica e forma estendida de um jogo	19
1.3.5 A solução de um jogo e o Equilíbrio de Nash	23
2 Oficinas de Matemática Experimental	25
2.1 Aspectos metodológicos das oficinas	26
2.1.1 O que são oficinas pedagógicas	26
2.1.2 Exploração e experimentação em Matemática	27
2.1.3 O que é uma Oficina de Matemática Experimental (OME)	28
3 Oficina: Teoria dos Jogos e a batalha dos trezentos	31
3.1 A inserção de ideias imprescindíveis sobre Teoria dos Jogos	31
3.2 A batalha dos trezentos: descrição da oficina	34
4 Relato de experiência	38
4.1 Motivação e construção da oficina	39
4.1.1 Primeiro encontro	39
4.1.2 Segundo encontro	40
4.1.3 Terceiro encontro	40
4.1.4 Quarto e último encontro	42
4.2 Observações sobre as atividades desenvolvidas	42
4.2.1 Importância da criação de cenários na análise estratégica	43
4.2.2 Colocações a respeito da construção e importância da matriz de ganhos	44
4.2.3 Soluções encontradas pelos alunos e observações	45
5 Discussão e considerações finais	50
5.1 Considerações gerais sobre o trabalho	50
5.2 Discussão dos resultados	51

5.3	Considerações finais	52
A	Roteiro das oficinas: batalha dos trezentos	54
A.1	Objetivos	54
A.2	Lista de equipamentos e materiais	55
A.3	Atividades	56
A.4	Recomendações	58
B	Fotos	60
C	Atividade extra: sugestão de um jogo	62

Introdução

Ao longo dos anos de estudo, desde educação básica, passando pelo ensino superior e até os dias de hoje, meu entendimento sobre Matemática e sua importância para o desenvolvimento humano passou e continua passando por diversas mudanças. Mas, ainda assim, percebo a existência de um ponto intrínseco à Matemática ao longo desses muitos anos de estudo, que é a sua importância para o desenvolvimento humano.

Perseguindo a diminuição da rejeição da matemática na escola, não podemos permitir que seu estudo seja feito de forma engessada, sem que os indivíduos submetidos a esse processo possam ver contextualizada a utilidade do conhecimento matemático.

Desse modo, a presente proposta pedagógica aqui abordada visa fazer com que os alunos lidem com os conhecimentos matemáticos de forma contextualizada, tornando o processo de aprendizagem mais significativo. Buscamos, aqui, evidenciar como a quebra da dicotomia entre teoria e prática pode melhorar o processo de aprendizagem, permitindo que os alunos percebam, de modo geral, como a Matemática está presente em situações da vida real.

Nesse intento, usamos a proposta metodológica de ensino de Matemática denominada Oficina de Matemática Experimental (OME), proposta que traz elementos com forte potencial educacional: ludicidade; atividades individuais e em equipe; experimentação; trocas de experiência; maior interação entre professor e aluno; entre outras.

Além disso, as OMEs possibilitam aos alunos o entendimento do que vem a ser resolver um problema com Matemática e não resolver um problema de Matemática. Estamos constantemente em nossas salas de aula, algumas vezes como alunos e outras como professores, resolvendo apanhados de questões de diversos tipos e níveis sem nos dar conta de que é preciso mais do que saber resolver questões de Matemática, é necessário saber fazer uso dos conhecimentos matemáticos nas mais diversas situações, sejam em problemas de natureza científica, sejam nos de natureza empírica. Assim, essas características apresentadas, em concordância com o caráter experimental das OMEs, permitem-nos adentrar verdadeiramente nesse importante universo de “matematização” dos problemas.

Outro ponto importante a ser destacado neste trabalho é o desenvolvimento de atividades em Teoria dos Jogos, conteúdo não pertencente à grade curricular do ensino básico. O processo de tomada de decisões, inerente à Teoria dos Jogos, tem grande potencial a ser explorado no estímulo do desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

A OME desenvolvida na presente dissertação consiste na realização de uma análise sobre a “A Batalha dos Trezentos”, um confronto épico entre persas e espartanos, em que os persas almejavam expandir ainda mais os seus domínios. Tendo essa história como objeto de análise, a OME desenvolvida permitiu fazer uso de conhecimentos e ferramentas pertencentes à Teoria dos Jogos, possibilitando aos participantes obterem por meio da Matemática um maior entendimento do fato histórico ocorrido.

Estrutura organizacional do trabalho

No primeiro capítulo, começamos abordando conceitos básicos da Teoria dos Jogos, bem como as características que um determinado problema deve ter para poder ser analisado e resolvido por meio dessa teoria matemática. Na sequência, apresentamos um breve histórico do desenvolvimento dessa área, fazendo menção dos nomes mais importantes e suas contribuições para a teoria. Buscando dar o suporte necessário a quem almeje realizar atividades educacionais em Teoria dos Jogos, concluímos o capítulo, abordando os fundamentos da teoria, dentre os quais destaca-se uma breve análise sobre racionalidade e estratégia, apontando como esses elementos influenciam na tomada de decisão.

No segundo capítulo, atemo-nos a caracterizar as Oficinas de Matemática Experimental (OMEs). Para isso, realizamos uma pequena análise do que vem a ser oficinas pedagógicas e sua importância nos processos de ensino e aprendizagem. Em seguida, levantamos elementos que revelam a importância existente no processo exploratório e experimental, discutindo as potencialidades existentes em metodologias que os comportem. Por último, expomos as características que possui uma OME, evidenciando o porquê de ela ser uma alternativa potencializadora da aprendizagem em matemática.

No terceiro capítulo, começamos mostrando uma atividade prévia utilizada para a introdução dos conhecimentos básicos da Teoria dos Jogos. Posteriormente, apresentamos a OME “A Batalha dos trezentos”, apontando como proceder na sua aplicação para a análise da batalha das Termópilas.

No quarto capítulo, relatamos todos os acontecimentos referentes à aplicação da OME e analisamos o seu andamento. Destacamos aqui as quatro partes em que a OME foi dividida, explicitando o que foi tratado em cada uma delas. Na sequência, fizemos a análise do material coletado dos alunos, mostrando evidências do sucesso das atividades realizadas.

No quinto e último capítulo, realizamos as considerações finais sobre o trabalho produzido, levantando os elementos tomados como mais importantes para o desenvolvimento das atividades, observando quais foram os fatores que mais influenciaram a aprendizagem dos alunos envolvidos. Finalizamos ressaltando a importância de trabalhos nessa linha com o objetivo de alavancar o rendimento dos estudantes e como as OMEs podem se tornar um instrumento relevante na busca pela melhoria do ensino de matemática.

Capítulo 1

Teoria dos jogos

Nesse capítulo, visamos realizar a inserção de conceitos básicos e mais relevantes para o entendimento do que vem a ser a Teoria dos Jogos. Além disso, um problema pode ser analisado dentro dessa teoria e quais as características que um determinado “jogo” pode apresentar. Também serão mostrados, por meio de exemplos, como esses elementos, indispensáveis para o estudo da Teoria dos Jogos, influenciam na análise e na resolução dos problemas, bem como um breve histórico da evolução dessa área da Matemática.

1.1 O que é a Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos é uma área da Matemática que possui um viés aplicado, sendo que suas ferramentas têm utilidade em diversas situações práticas em que existam conflitos de interesses entre agentes. Desse modo, qualquer situação em que dois ou mais agentes se relacionem, objetivando ganhos próprios ou para um determinado grupo, constitui um problema que pode ser analisado por meio da Teoria dos Jogos.

De acordo com Marinho (2011), a teoria dos jogos não é apenas uma relação entre agentes na busca de um bem ou um ganho, ela traz a importância de os agentes se relacionarem de modo que cada um deles possa tomar sua decisão com base na decisão do outro. De certo modo, podemos perceber que as decisões devem ser pautadas na racionalidade, e não na mera posição de preferências. Assim, define que

A Teoria dos Jogos é um método matemático para abordar formalmente os processos de tomadas de decisão por agentes que reconhecem sua interação mútua do tipo: ‘penso o que você pensa que eu penso sobre você mesmo’. Ou seja: sempre que minha decisão é baseada no que eu acho que você vai fazer, em função do que você entende que eu mesmo vou decidir, a Teoria dos Jogos entra em ação (MARINHO, 2011, p.41).

Dessa forma, a Teoria dos Jogos deve ser entendida não só como uma disputa entre agentes que buscam melhores ou maiores ganhos, mas também como uma interação entre agentes que se reconhecem em um processo de tomada de decisões em que cada decisão tomada afeta diretamente a outra parte envolvida.

Segundo Fiane (2009), é importante salientar que são concebidas e analisadas formalmente como um jogo as interações entre agentes que agem de forma racional e que se comportem de forma estratégica. Esse fator se torna relevante, pois não existiria como modelar matematicamente uma situação de interação em que os participantes agissem de forma aleatória na tomada de suas decisões. “Assim, um jogo nada mais é do que uma representação formal que permita a análise das situações em que agentes interagem entre si, agindo racionalmente” (FIANE, 2009, p.12).

Nessa perspectiva, a Teoria dos Jogos entra em cena sempre que objetivarmos tomar a melhor decisão frente a um conjunto de possibilidades existentes, permitindo que nossas decisões se baseiem não apenas em nossas preferências imediatas, mas que elas também levem em consideração decisões tomadas por outros indivíduos presentes naquela interação. Talvez por isso as interações sejam chamadas de jogo, pois os participantes são condicionados a se comportarem como jogadores, seja buscando o máximo de informações possíveis sobre a decisão a ser tomada, seja agindo estrategicamente levando em consideração as decisões que podem ser tomadas pelos outros jogadores.

1.2 Aspectos históricos da Teoria dos Jogos

Segundo Fiane (2009), entendendo a complexidade de realização de afirmações históricas precisas, temos que o primeiro a desenvolver um trabalho próximo das ideias que possuímos hoje a respeito da Teoria dos Jogos foi o matemático francês Antoine Augustin Cournot (1801-1877), que publicou, em seu livro *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses* (Pesquisa sobre os Princípios Matemáticos da Teoria das Riquezas) um modelo de duopólio em que duas empresas do mesmo ramo produtor decidiam o quanto produzir e a forma como os lucros eram afetados pelas suas respectivas produções. Esse trabalho é de grande relevância ao ponto de ser considerado por alguns teóricos como a base para o desenvolvimento do conceito de equilíbrio de Nash, conceito que será discutido na Seção 1.3.5.

Fiane (2009) também afirma que, além de Cournot, outros dois nomes aparecem nessa lista de precursores dessa área da Matemática, o matemático alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953) e o matemático francês Félix Edouard Justin Emile Borel (1871-1956). O primeiro deles realizou estudos em jogos de xadrez e desenvolveu um método de análise chamado *indução reversa*, provando que, independentemente da disposição das peças no tabuleiro de xadrez, sempre existirá uma estratégia vitoriosa por parte de um dos jogadores. Borel, por sua vez, desenvolveu pesquisas ligadas à análise de probabilidade em jogos, sendo sua maior contribuição o estudo de jogos que contavam com a habilidade dos jogadores e não com a mera sorte deles.

São também considerados como alguns dos maiores nomes da Teoria dos Jogos, segundo Fiane (2009), o húngaro-americano John Von Neumann (1903-1957) e o alemão Oskar Morgenstern (1902-1977), tendo o primeiro deles provado o importante *Teorema Minimax*, o qual fora deixado em aberto pelo matemático Emile Borel. O teorema minimax afirma que sempre há uma solução racional para um conflito de interesses entre dois indivíduos, mesmo sendo esses interesses totalmente opostos. A demonstração desse importante teorema foi publicada em um artigo intitulado *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (Sobre a Teoria dos

Jogos de Estratégia, 1928).

No mesmo período, o economista alemão Oskar Morgenstern publicou o livro intitulado *Implicações Quantitativas do Comportamento do Máximo*, em que expõe aspectos importantes da relatividade da racionalidade e as implicações que as interações entre os indivíduos têm nos processos de maximização econômica. Na obra, o autor mostra a interação entre os indivíduos como fator importante na tomada de decisões para o processo de maximização de ganhos.

Juntos, Von Neumann e Morgenstern, elaboraram um dos mais importantes trabalhos até hoje já desenvolvido em Teoria dos Jogos, intitulado *The Theory of Games and Economic Behavior* (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, 1944), expondo a importância da interação entre os agentes participantes e a tomada de decisões efetivadas por esses.

Por seus importantes trabalhos desenvolvidos em física nuclear, mecânica quântica e em Teoria dos Jogos, Von Neumann foi chamado pelo governo norte-americano para compor um grupo de 500 cientistas, tendo a encomenda de desenvolver aplicações de Teoria dos Jogos que pudessem ser usadas militarmente. Junto com esses cientistas, ele também fez parte do projeto Manhattan, criando alguns dispositivos que foram usados nas primeiras bombas atômicas, perto do fim da Segunda Guerra Mundial.

Segundo Pimentel (2007), a história aponta que Von Neumann chegou até a sugerir que os Estados Unidos atacassem a União Soviética, no início da Guerra Fria, justificando que isso faria com que a possível guerra entre EUA e URSS acabasse antes mesmo de começar. Felizmente, essa guerra nunca aconteceu, mas se houvesse acontecido, talvez os líderes militares norte-americanos estivessem se lamentando de não ter seguido a sugestão de realizar um ataque preventivo. Como Pimentel afirma,

A corrida armamentista entre duas potências atômicas criou, na década de 1950, a possibilidade de uma nação destruir a outra, e cada uma delas poderia ser vítima desse ataque de surpresa. A tentação de uma guerra de surpresa, justificava na política americana, a defesa de uma ‘agressão pela paz’, [...] (PIMENTEL, 2007, p.61)

Sem sombra de dúvidas, o nome mais importante na Teoria dos Jogos é o do matemático John Forbes Nash. Ele, juntamente com o economista John C. Harsanyi e o matemático e economista Reinhard Selten, desenvolveram importantes ferramentas de análise, permitindo uma maior abrangência de possibilidades de aplicações e interações dentro dessa área da matemática aplicada. Segundo Marinho,

Apesar de ter sido criada na década de 1940, a Teoria dos Jogos sofreu por muitos anos o estigma de representar o ‘obscurantismo’ na matemática, estigma que só caiu em 1994, quando Nash foi um dos ganhadores do prêmio Nobel de Economia pelo seu trabalho em Teoria dos Jogos (MARINHO, 2011, p.22).

Nash recebeu o prêmio Nobel de economia por desenvolver importante trabalho sobre jogos não-cooperativos. Além disso, foi responsável também pela importante formulação do conceito de equilíbrio em um jogo de tomada de decisões mútuas, conceito que mais tarde veio a ser denominado Equilíbrio de Nash.

De acordo com Fiane (2009), Harsanyi desenvolveu trabalhos relacionados a jogos de informação assimétrica, em que os participantes da interação não dispunham das mesmas

informações. Com isso, conseguiu ampliar o uso do conceito de equilíbrio de Nash, permitindo seu uso também em modelos de informação incompleta. Esse trabalho permitiu que os economistas pudessem tratar de uma gama maior de situações econômicas, pois poderiam agir estrategicamente, mesmo em condições de informações assimétricas.

Por último, segundo Fiane (2009), Selten e Harsanyi refinaram o conceito de equilíbrio deixado por Nash, desenvolvendo um trabalho que ficou conhecido como *Equilíbrio Perfeito em Subjogos*. Em sua produção, Selten coloca que, para ser um Equilíbrio Perfeito em Subjogos, é necessário que a decisão também seja a melhor possível, considerando todos os cenários analisados. Os subjogos são partes de um jogo que possuem a propriedade de conter todo o desenrolar do jogo a partir de um ponto qualquer em diante, sendo eles desenvolvidos na forma estendida.

Dentre todos os nomes que circundam a criação e o desenvolvimento da Teoria dos Jogos, nos parágrafos anteriores consideramos os mais importantes, visto que seus trabalhos e pesquisas desenvolvidos acrescentaram vasta gama de ferramentas à teoria. E como sugere a história, novos usos para a Teoria dos Jogos serão sempre descobertos à medida que essa área se desenvolve.

1.3 Principais fundamentos da Teoria dos Jogos

Nesta seção, veremos as principais ideias e fundamentos que permeiam o estudo de um jogo dentro da perspectiva de Teoria dos Jogos, buscando entender o que caracteriza um conflito entre agentes como um jogo e como podemos analisar uma situação com ferramentas dessa área. Definiremos o conceito de racionalidade e a sua importância no agir estrategicamente, bem como todos os elementos que norteiam a análise de um jogo, desde a interpretação correta de informações até a formalização dos problemas e criação de modelos.

1.3.1 Racionalidade, estratégia e a tomada de decisão

Temos como elementos básicos de caracterização de um jogo a racionalidade e a estratégia, sendo que a primeira delas é pressuposto base para relações de qualquer natureza. Sendo assim, agir de forma racional em um processo de tomada de decisão não é suficiente para caracterizá-lo como um jogo dentro da Teoria dos Jogos, para isso é preciso também que os agentes ajam estrategicamente. Podemos, dessa forma, afirmar que se os participantes da interação não agirem de forma racional, não há como algum deles agir estrategicamente; logo, não haverá jogo.

Os trabalhos realizados em Teoria dos Jogos trazem, como fator relevante para que exista um jogo, a interdependência entre os jogadores, com ênfase na importância de que cada interessado entenda que as decisões tomadas geram efeitos diretos sobre a outra parte envolvida. Nessa perspectiva, o fator mais relevante, que permeia o agir estrategicamente é o de pensar além da sua própria decisão, fazendo com que as ações também sejam pautadas no que se pensa sobre o que o outro pensa. Sobre essas ações, Fiane (2009) afirma que,

Um jogo envolve a interdependência mútua das ações entre os seus jogadores, e isso leva naturalmente os jogadores a considerarem, em suas decisões, os efeitos sobre os demais jogadores, assim como as reações destes. Desse modo, os jogadores tomam

decisões estratégicas, no sentido preciso de que suas decisões não contemplam apenas seus objetivos e suas possibilidades de escolha, mas também os objetivos e as possibilidades de escolha dos demais jogadores (FIANE, 2009, p.14).

Como ilustração, a seguir colocamos um exemplo de como o ato de agir estrategicamente altera de forma significativa a tomada de decisões. Suponhamos que cinco pessoas queiram comprar um pote de sorvete com a restrição de ele ter um único sabor. Das cinco pessoas, duas delas querem o sabor flocos, uma o sabor chocolate, uma o sabor morango e uma o sabor baunilha. Se cada uma dessas pessoas decidir racionalmente pelo seu gosto, teremos que o pote de sorvete a ser comprado terá sabor flocos.

Observamos no parágrafo anterior que houve racionalidade nas escolhas, mas não existiu, por parte de nenhum dos envolvidos, ação estratégica. Suponhamos que o indivíduo que quer o sabor baunilha prefira o sabor morango ao sabor flocos, e saiba que o indivíduo que quer o sabor chocolate prefere o sabor morango ao sabor flocos. Valendo-se dessa informação, o indivíduo que quer o sabor baunilha pode empatar o jogo de preferências ao escolher o sabor morango que não era sua escolha primária, deixando de escolher o sabor baunilha.

Com a mudança da escolha de uma das cinco pessoas, entramos em um novo quadro, em que não é mais o sabor flocos o escolhido, pois ao desistir de sua preferência sobre o sabor baunilha, um dos integrantes fez com que dois sabores ficassem empatados como o sabor de sorvete a ser comprado. Percebemos, agora, que o mais coerente é uma nova votação apenas entre estes dois sabores, o sabor flocos e o sabor morango. Mas, nesse novo cenário, sabemos que quem quer o sabor chocolate prefere o sabor morango ao sabor flocos. Assim, ele desempatará a nova votação e, portanto, o sabor de sorvete a ser comprado deve ser morango.

Dessa análise, percebemos como o agir estrategicamente mudou o rumo da decisão que foi tomada pelo grupo. Um dos participantes na compra do sorvete usou a racionalidade dos outros ao apontarem suas preferências, para assim, mudar o rumo da decisão, fazendo com que o resultado fosse mais agradável para ele.

Esse exemplo serve para evidenciar a importância que a racionalidade possui no agir estrategicamente, sendo que, sem ela, seria impossível que existisse a análise estratégica de eventos dessa natureza. Outra fator que se deve relevar é que apenas um dos jogadores agiu de forma a melhorar para si o resultado, sendo que os outros participantes da interação também poderiam ter agido estrategicamente de forma a alterar significativamente o resultado. Assim, temos a caracterização dos alicerces que nos permitem construir todo o universo da Teoria dos Jogos, a racionalidade e a estratégia.

1.3.2 Análise de informação, formalização do jogo e criação do modelo

A partir dos tópicos anteriores, temos os elementos básicos para que um determinado problema possa ser analisado por meio das ferramentas oferecidas pela Teoria dos Jogos, mas a percepção e o entendimento empírico do problema não são suficientes para que se encontre o desfecho do jogo, ou a melhor solução possível. Para tal, se faz necessária a **formalização do problema**, a qual exige a busca de informações e o entendimento claro dos objetivos de cada um dos participantes do jogo.

O processo de formalização e criação de um **modelo** que represente uma situação real perpassa por algumas fases bem definidas, requerendo do modelador do problema aptidão no que diz respeito à coleta de dados. É importante que se conheça o máximo de informações possíveis no que se refere ao jogo em si, mas também que busquemos informações sobre cada um dos agentes envolvidos na interação. Temos que um modelo predefinido pode ser usado como base na resolução de um problema, mas é crucial que o modelo se adapte à situação na qual queremos empregá-lo, tornando o ato de ajustar e reajustar uma praxe no processo.

No que diz respeito à formalização dos problemas, podemos caracterizá-los em jogos de **informação completa** ou jogos de **informação incompleta**: nos jogos de informação completa os jogadores estão a par de todas as informações disponíveis sobre o jogo e sobre os demais jogadores, sendo que, não deve existir decisão ou decisões que levem a resultados que não poderiam ter sido antecipados; nos jogos de informação incompleta, nem todos os participantes têm as mesmas informações sobre o jogo e os jogadores.

A completude ou não das informações em uma interação estratégica pode fazer com que a tomada de decisão se torne algo mais simples ou mais complexo, mas independentemente do fato de possuímos todas as informações ou não, ainda assim, a Teoria dos Jogos nos permite a análise de uma melhor decisão. Também se torna interessante perceber que em um jogo de informação completa a competitividade cresce, exigindo mais da capacidade intrínseca dos competidores e menos do fato de eles possuírem informações privilegiadas.

Na análise de um jogo, a coleta de informações é substancialmente importante, pois é nessa etapa que se atribui valor a cada combinação de decisões que nos permitirá mais adiante concluir qual será a melhor decisão a ser tomada. É válido ressaltar que não existem restrições quanto aos objetivos de cada jogador e, independentemente de suas preferências no jogo, sempre será possível estabelecer uma ordem qualitativa ou quantitativa entre as escolhas tomadas.

1.3.3 Algumas classificações de jogos

Em Teoria dos Jogos, classificar um jogo em **cooperativo** e **não-cooperativo** pode ser de suma importância para a análise de um problema a ser resolvido. Podemos encontrar diferentes definições do que vem a ser um jogo cooperativo e não-cooperativo a depender do autor e do enfoque dado à situação analisada.

Alguns autores retratam a diferença entre esses dois tipos de jogos de modo técnico. Eles afirmam que só existe cooperação se os agentes envolvidos no jogo puderem se comunicar diretamente, de modo a firmarem algum tipo de compromisso que posteriormente será cumprido. Destarte, o jogo não-cooperativo seria aquele em que não houver nenhum tipo de troca de informação que venha a alterar o resultado do jogo e a influenciar as decisões de modo a ocorrer um benefício mútuo. De acordo com Pereira (2014),

Se um jogo é cooperativo, ou não, é uma questão técnica. Essencialmente um jogo é cooperativo se os jogadores estão autorizados a se comunicar e quaisquer acordos que eles façam, sobre como jogar o jogo, são executados tal como definidos por suas escolhas estratégicas. A maioria dos jogos são não-cooperativos, mesmo que, em alguns deles, os jogadores escolham entre cooperar uns com os outros ou não [...] (PEREIRA, 2014, pg.20).

Pereira (2014) traz como fator base para a cooperação a comunicação entre os jogadores e o fato de eles estarem autorizados a firmarem acordos no decorrer do jogo. Diferente da definição dada por Pereira (2014), Kasper (2017, pg.58) não evidencia a necessidade da comunicação ou de firmar acordos para que o jogo possa ser cooperativo, bastando para isso que “os jogadores desejem maximizar o resultado da coalizão e para isso colaborem uns com os outros”, afirmando também que, “nos jogos não cooperativos cada jogador se preocupa em maximizar seus próprios resultados independentemente do resultado coletivo”. Podemos, assim, considerar como jogo cooperativo aquele em que as decisões são tomadas de modo que o benefício seja coletivo, não apenas aqueles em que haja cooperação explícita dos agentes.

Um jogo também pode ser classificado como **sequencial** ou **simultâneo**. Nos jogos simultâneos, as decisões devem ser tomadas em um mesmo período temporal e sem que se conheçam as escolhas dos outros jogadores. Já nos jogos sequenciais, os jogadores decidem um após o outro, ou seja, o jogador toma a sua decisão sabendo exatamente qual foi a decisão tomada pelo(s) outro(s) jogador(es).

É importante ressaltar que jogos que se caracterizam como simultâneos, quando são jogados em diversas ocasiões pelos mesmos agentes, tomam a característica de jogos sequenciais. Esse fenômeno se dá pelo fato de que os jogadores, mesmo decidindo de forma simultânea, se conhecem de outras interações, podendo assim, tomarem decisões com base nos resultados passados.

Por último, com relação às informações disponíveis aos jogadores, um jogo pode ser classificado como sendo de **informação perfeita** ou de **informação imperfeita**. Quando os participantes possuem todas as informações disponíveis antes de tomarem a sua decisão, temos um jogo de informação perfeita. É importante notar que apenas jogos sequenciais podem ter essa característica, já que o jogador tem posse, de fato, de todas as informações possíveis, inclusive, da decisão do(s) outro(s) jogador(es). Nos jogos de informação imperfeita, onde se enquadram a maior parte dos jogos, os agentes tomam suas decisões sem possuírem todas as informações disponíveis acerca da interação que ocorre. Fiane (2009, pg.61) é taxativo ao colocar que

Um jogo é dito de informação perfeita quando todos os jogadores conhecem toda a história do jogo antes de fazerem suas escolhas. Se algum jogador, em algum momento do jogo, tem de fazer suas escolhas sem conhecer exatamente a história do jogo até ali, o jogo é dito de informação imperfeita.

As três formas de classificar jogos são importantes no processo de formalização e, posteriormente, de análise e resolução de um problema. Além disso, nos permitem diferenciar a natureza de uma situação analisada, fazendo com que possamos escolher o modelo que mais se adapte a uma determinada interação entre agentes.

1.3.4 Matriz de ganhos, forma estratégica e forma estendida de um jogo

A etapa de formalização e criação do modelo matemático para um problema analisado exige que sejam feitas observações e comparações sobre as combinações de possibilidades de cada agente. Dentro dessa ideia, um jogo pode ter duas características: possuir as decisões apresentadas de forma quantitativa, permitindo que se saiba exatamente o quanto

se ganha ou se perde em uma determinada iteração; ou, podemos possuir um jogo em que as informações não se apresentam de forma quantitativa, sendo que nesse caso temos a importante tarefa de atribuir valores a cada combinação de decisões de modo a permitir a análise matemática da situação.

De qualquer forma, sendo levantadas as informações, sempre será possível quantificar ou qualificar uma determinada decisão. Quando lidamos com valores numéricos como dinheiro, número de dias, tempo e outros, a montagem de um modelo matemático pode se tornar mais simples. Mas, se estivermos lidando com decisões não expressas em valores numéricos, ainda assim, poderemos quantificá-las, atribuindo valores às preferências de acordo com a força de cada uma delas.

O modo mais comum de representação de um jogo é na forma estratégica. Nessa forma, a interação entre dois agentes é representada por meio de uma matriz, em que as decisões tomadas pelo primeiro jogador ficam representadas nas linhas e as do segundo jogador ficam representadas nas colunas, cada célula abriga os ganhos respectivos de cada combinação de decisões.

Para analisarmos o que vem a ser a forma estratégica de um jogo, tomaremos como exemplo dois grupos de alunos de uma escola que decidiram vender alguns lanches para que pudessem angariar fundos para uma viagem de fim de ano. Temos o seguinte cenário: um dos grupos, que chamaremos de grupo 1, decidiu vender apenas salgados; e, o segundo grupo, que chamaremos de grupo 2, decidiu vender apenas doces. Tendo o grupo 1 sucesso na venda de salgados e o grupo 2 fracasso na venda de doces, elencamos duas opções de posicionamento para cada grupo:

1. O grupo 1 mantém-se vendendo apenas salgados; o grupo 1 amplia e passa também a vender doces.
2. O grupo 2 desiste de vender doces ou qualquer outra coisa; o grupo 2 desiste da venda de doces e passa a vender salgados.

Dadas as opções do grupo 1 de ampliar ou não as vendas e do grupo 2 de abrir mão ou mudar de produto a ser vendido, precisamos de mais informações para que possamos analisar de forma coerente essa situação. Assim, suponhamos que, antes de tomarem essas decisões, os alunos realizaram um levantamento a respeito do público consumidor e obtiveram as seguintes informações:

1. Do total de alunos que estudam na escola, 500 sempre levam algum dinheiro para a unidade escolar, dinheiro esse que quase sempre era revertido na compra de salgados ou doces, ou seja, os dois grupos competiam por todos os 500 consumidores possíveis;
2. Desses 500 alunos, 400 tinham a preferência de comerem salgados, 50 tinham a preferência de comerem doces e 50 oscilavam na compra de salgados ou doces;

Esses dados mostram o cenário das vendas realizadas por esses dois grupos, em que, o grupo 1 possui cerca de 400 clientes mais uma parcela dos que oscilavam na compra de doces e salgados, e o grupo 2 possui cerca de 50 clientes mais uma parcela dos que oscilavam na compra de doces e salgados. Para efeitos desta análise, podemos supor a seguinte distribuição nas vendas realizadas: 425 clientes para o grupo 1 e 75 clientes para o grupo 2.

Em seguida, depois do levantamento dos dados a respeito do público consumidor, verificaremos cada cenário possível dentro das escolhas que podem ser tomadas por cada um dos dois grupos.

- O grupo 1 vende apenas seus salgados e o grupo 2 desiste da venda de quaisquer lanches: temos que o grupo 1 domina o mercado, vendendo para quase todo o grupo consumidor, não atingindo apenas o grupo de alunos que só consomem doces e nunca salgados.
- O grupo 1 vende apenas seus salgados e o grupo 2 desiste da venda de doces e passa a vender salgados: temos que o grupo 2 divide o mercado com o grupo 1 e ambos os grupos vendem para a metade dos consumidores.
- O grupo 1 amplia passando também a vender doces e o grupo 2 desiste da venda de quaisquer lanches: nessa situação, o grupo 1 domina todo o mercado, vendendo para todos os alunos que consomem algum tipo de lanche.
- O grupo 1 amplia passando também a vender doces e o grupo 2 desiste da venda de doces e passa a vender salgados: nessa situação, ambos dividem por igual os consumidores de salgados e todos os consumidores de doces são fidelizados pelo grupo 1.

Dadas todas as informações sobre os cenários possíveis no jogo das vendas de lanches, podemos representar as informações de forma mais simplificada, no que se denomina forma estratégica ou normal de um jogo. Nessa forma, constrói-se uma tabela denominada **matriz de ganhos**, explicitando apenas as informações mais relevantes para análise do problema proposto. Podemos ver na Figura 1.1 a matriz de ganhos referente ao jogo das vendas.

	G2 Desiste da venda de quaisquer lanches	G2 Desiste dos doces e passa a vender salgados
G1 Mantém-se vendendo apenas salgados	(450 , 0)	(225 , 225)
G1 Amplia e passa a vender doces	(500 , 0)	(275 , 225)

Figura 1.1: Jogo das vendas em forma estratégica

Observemos que de forma simplificada a matriz de ganhos nos permite verificar qual é a melhor decisão a ser tomada pelo grupo 1, a saber, ampliar e passar a vender doces, pois nessa situação ou domina todo o mercado de lanches na escola ou divide o mercado de salgados com o grupo 2 e domina o mercado de doces. De qualquer forma, é a melhor resposta a qualquer que seja a decisão tomada pelo grupo 2.

Dentre as decisões apontadas, percebemos que o melhor para o grupo 2 é desistir dos doces e passar a vender salgados, sendo que essa decisão gera ganhos sempre maiores do

que a decisão de desistir da venda de lanches na escola. Nessa decisão, o grupo 2 divide o mercado de salgados com o grupo 1, saltando de 75 para 225.

Por último, podemos supor que o cenário mais provável que aconteça nesse jogo de vendas é que o grupo 1 amplie e passe a vender doces e o grupo 2 desista dos doces e passe a vender salgados, pois a decisão do grupo 1 é a melhor resposta a qualquer decisão do grupo 2 e, por sua vez, a decisão do grupo 2 é melhor resposta a qualquer decisão tomada pelo grupo 1.

Outra forma de representação de um jogo é a estendida, usada principalmente em jogos sequenciais, em que as decisões são tomadas tendo posse das decisões tomadas pelos outros jogadores. Na Figura 1.2 representamos o **jogo das vendas** na forma estendida tratando-o como um jogo sequencial.

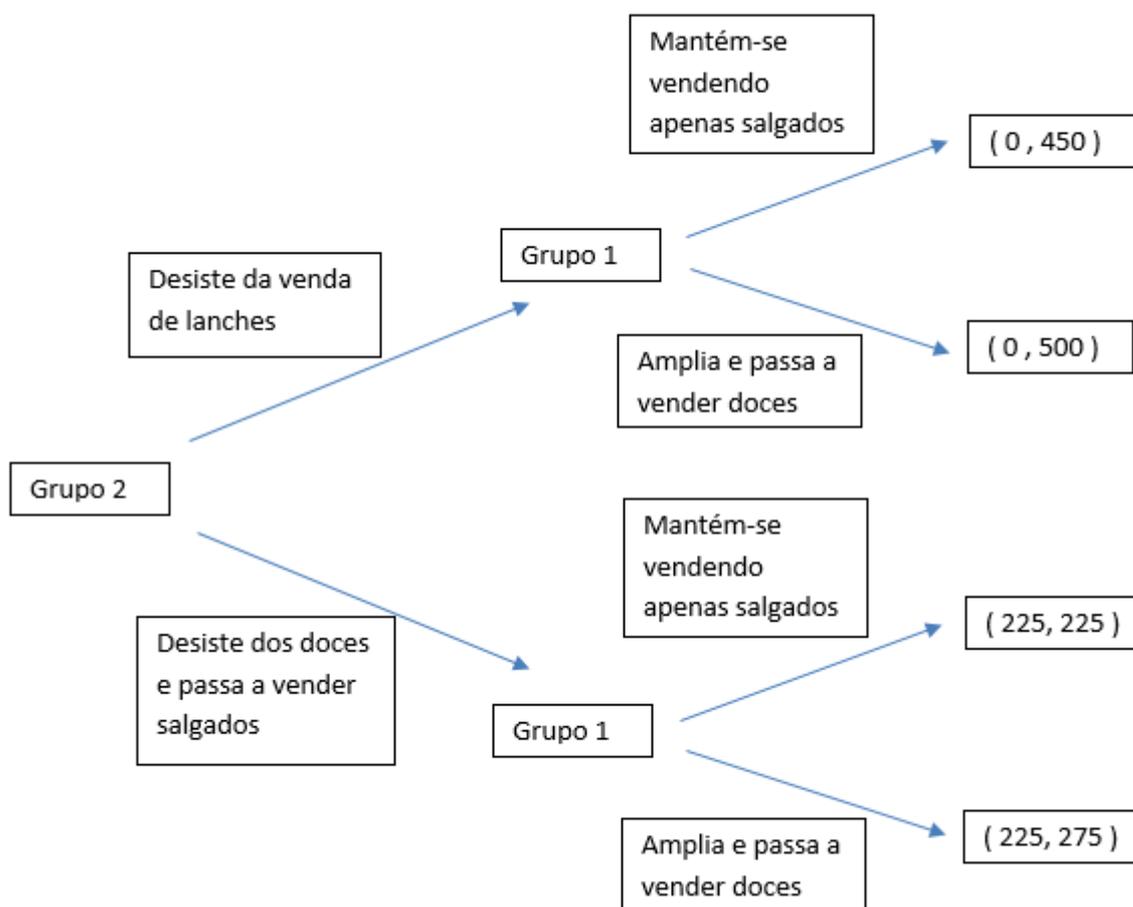


Figura 1.2: Jogo das vendas em forma estendida

Temos que as duas formas de representação de um jogo podem ser usadas em jogos sequenciais ou simultâneos, sendo a forma estratégica mais apropriada para jogos simultâneos e a forma estendida mais apropriada para jogos sequenciais. Podemos perceber que a representação do jogo das vendas em forma estendida sugere que o grupo 2 decide primeiro e em seguida o grupo 1 toma sua decisão. Já o jogo em forma estratégica, sugere que a cronologia das decisões é a mesma.

1.3.5 A solução de um jogo e o Equilíbrio de Nash

Como evidenciado nas subseções precedentes, a Teoria dos Jogos visa fornecer ferramentas e métodos para a análise e resolução de problemas estratégicos. Desse modo, a formalização de um problema fazendo uso das ferramentas e dos conceitos expostos, proporcionam uma visão geral do jogo, assim como permitem realizar observações minuciosas em cada um dos pequenos cenários que o compõem.

A solução de um jogo tem característica interativa, pois pode variar a depender da ação tomada por um jogador frente à ação tomada pelo outro. Essa interatividade, que permeia a análise de um jogo, faz com que não exista solução exata como em problemas matemáticos de aritmética ou álgebra, mas mesmo assim, seja possível perceber uma forte tendência do jogo a um resultado específico.

John Nash, na realização de seus estudos sobre solução de jogos simultâneos, desenvolveu um método de resolução de um jogo que objetiva encontrar uma solução que seja a mais equilibrada das ações a serem tomadas.

Diz-se que uma combinação de estratégias constituem um equilíbrio de Nash quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos demais jogadores, e isso é verdade para todos os jogadores. (FIANE, 2009, p.93)

O equilíbrio de Nash consiste no ato de cada jogador buscar a melhor resposta a cada uma das ações possíveis dos outros jogadores. Percebe-se, que solucionar um jogo por meio do Equilíbrio de Nash consiste na busca pela melhor resposta às ações possíveis dos outros jogadores e, não na busca pela decisão que gere os maiores ganhos.

Para ilustrar o que é o Equilíbrio de Nash, vejamos o exemplo a seguir: Em um certo país, duas empresas concorrem pelo mercado de um produto, sendo a empresa 1 mais antiga e já bem estabelecida no mercado e, a empresa 2 que é nova nesse país, mas que possui negócios bem estabelecidos em outros países.

A empresa 2 tem as seguintes possibilidades: não importar, criando uma linha de montagem própria; importar em pequena escala, almejando entrar aos poucos nesse novo mercado consumidor; e importar em larga escala, almejando tomar grande parte do mercado consumidor. Em resposta, a empresa 1, que já se encontra estabelecida no mercado possui duas possibilidades bem definidas: melhorar ou não melhorar seu produto. Tomemos o quadro a seguir como a matriz de ganhos referente ao jogo mencionada e encontremos o Equilíbrio de Nash.

Empresa 1	Empresa 2		
	Não importa	Importa em pequena escala	Importa em larga escala
Melhora o produto	3, 2	2, 1	1, 0
Não melhora o produto	2, 1	3, 2	0, 3

Figura 1.3: Entrada no mercado interno

O Equilíbrio de Nash é definido como sendo à melhor resposta a decisão do outro jogador, desse modo, analisemos quais ações devem ser tomadas pela empresa 1 caso a empresa 2

tome qualquer uma das decisões disponíveis a ela: caso a empresa 2 decida não importar, a melhor ação para a empresa 1 é melhorar o seu produto; caso a empresa 2 decida importar em pequena escala, a melhor decisão para a empresa 1 é não melhorar o seu produto; caso a empresa 2 decida importar em larga escala, a melhor decisão para a empresa 1 é melhorar o seu produto.

Dessa análise, obtemos o quadro abaixo, onde foi indicada com (L) a melhor resposta da empresa 1 a cada ação da empresa 2

Empresa 1	Empresa 2		
	Não importa	Importa em pequena escala	Importa em larga escala
Melhora o produto	(L) 3, 2	2, 1	(L) 1, 0
Não melhora o produto	2, 1	(L) 3, 2	0, 3

Figura 1.4: Entrada no mercado interno

Em seguida, analisamos quais as melhores ações a serem tomadas pela empresa 2 caso a empresa 1 escolha entre melhorar ou não o produto: caso a empresa 1 opte por melhorar o seu produto, a melhor resposta a ser dada pela empresa 2 é não importar; caso a empresa 1 opte por não melhorar seu produto, a melhor resposta a ser dada pela empresa 2 é importar em larga escala.

Dessa análise, obtemos o quadro abaixo, onde acrescentamos no quadro da Figura 1.4 a marcação (C) para indicar a melhor resposta da empresa 2 a cada ação da empresa 1.

Empresa 1	Empresa 2		
	Não importa	Importa em pequena escala	Importa em larga escala
Melhora o produto	(L) 3, 2 (C)	2, 1	(L) 1, 0
Não melhora o produto	2, 1	(L) 3, 2	0, 3 (C)

Figura 1.5: Entrada no mercado interno

Podemos notar, que em uma das células temos a melhor resposta da empresa 1 caso a empresa 2 decida não importar e, em contrapartida, não importar é a melhor resposta da empresa 2 caso a empresa 1 decida melhorar seu produto. Essa melhor resposta comum as ações adversárias é o que definimos como Equilíbrio de Nash.

Capítulo 2

Oficinas de Matemática Experimental

O trabalho desenvolvido com características de uma Oficina de Matemática Experimental, também chamada de OME, tem como elemento motivador o projeto já realizado por alunos e professores da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) em parceria com o Colégio da Polícia Militar Rômulo Galvão (CPMRG) localizado na cidade de Ilhéus-BA.

As oficinas realizadas desde 2015, no CPMRG, apresentaram resultados positivos, evidenciados nas dissertações de mestrado, no âmbito do Profmat, desenvolvidas por Pereira (2017) e Araújo (2017), professores dessa escola e participantes do projeto, sendo que tais resultados serviram de alicerces para que novas ideias fossem construídas. A boa aceitação por parte dos alunos fez com que o desenvolvimento dessas oficinas se tornasse uma prática abraçada pela escola e, de forma natural, se transformou em um projeto de pesquisa da UESC, sob a coordenação do professor Germán Gómero, tendo como membros da equipe executora professores da UESC e do CPMRG.

O caráter experimental de uma OME, que leva o aluno à construção do seu conhecimento, assim como o foco no desenvolvimento do raciocínio, possibilita o estudo de conteúdos para além da grade da educação básica. Foi essa possibilidade que se tornou elemento motivador para o desenvolvimento de uma OME ligada a conhecimentos pertinentes à Teoria de Jogos.

Outro elemento motivador foi termos na Teoria dos Jogos a possibilidade de apresentação de uma Matemática mais interativa do que a Matemática formalmente apresentada pela Aritmética, Álgebra e Geometria, levando os alunos a adentrarem em um universo de aprendizagem diferente, tanto metodologicamente quanto no que diz respeito aos conteúdos abordados. Dessa forma, constata-se o potencial tanto do componente metodológico (OME) quanto do componente dos conteúdos (Teoria dos Jogos) para o desenvolvimento do presente trabalho.

Munido dessa ideia de desenvolver uma oficina com as características apresentadas e com a temática de Teoria dos Jogos, restou escolher o local e o público alvo para o desenvolvimento das atividades. Tendo em vista a aceitação do projeto pelo CPMRG e o fato de que o estudo da Teoria dos Jogos requer uma certa maturidade, foi acertado que as atividades seriam desenvolvidas também em uma escola militar, no Colégio da Polícia Militar Anísio Teixeira (CPMAT), localizado em Teixeira de Freitas-BA, com as turmas de 1º ano. As oficinas foram realizadas concomitantemente com as aulas da disciplina de Matemática e receberam total apoio dos alunos e da escola.

2.1 Aspectos metodológicos das oficinas

Para entendermos o que vem a ser de fato uma Oficina de Matemática Experimental (OME) e como se deu o desenvolvimento desse conceito, exploraremos o que são oficinas pedagógicas e como elas se relacionam com o caráter experimental que se pode dar ao processo de ensino de Matemática, evidenciando como as OMEs trazem uma nova perspectiva à inserção de novos conhecimentos em sala de aula.

2.1.1 O que são oficinas pedagógicas

As oficinas pedagógicas ou oficinas de ensino são entendidas como instrumentos voltados à construção do conhecimento, influenciando positivamente no processo de apropriação de novos saberes. Desse modo, as oficinas pedagógicas são entendidas como sendo o lugar, o espaço, o ambiente em que acontecem os processos de interação, participação e comunicação entre os participantes das mesmas. Silva e Souza (2006) nos trazem que

Sendo as oficinas um espaço de interação e troca de saberes, esta ocorre através de dinâmicas, atividades coletivas e individuais que proporcionam ao educando expor seus conhecimentos sobre a temática em questão e assimilar novos conhecimentos acrescidos pelos educadores. Esse processo de conhecimento, dar-se a partir da marca da horizontalidade na construção do saber inacabado (SILVA E SOUZA, 2006, pg.3).

Silva e Souza definem oficinas pedagógicas como sendo um processo horizontal em que professores e alunos trabalhem de forma conjunta na construção do conhecimento, sendo o professor um guia na condução pela busca do conhecimento. Silva e Souza trazem também alguns elementos que caracterizam o trabalho com oficinas pedagógicas, como por exemplo, o dinamismo, o desenvolvimento de atividades coletivas e individuais e a oportunidade do aluno expor seus conhecimentos.

O dinamismo essencial ao desenvolvimento das oficinas juntamente com outra característica importante presente nesse processo, a ludicidade, tornam a realização de atividades no ambiente escolar uma prática mais prazerosa, possibilitando aos alunos maior aceitação frente ao que está sendo ensinado.

Possuindo também como característica a atividade em grupo, as oficinas propiciam a troca de experiências em um processo de aprendizagem que visa ao coletivo, permitindo que cada aluno construa seu conhecimento e ajude na construção do conhecimento alheio.

Essas características que possuem as oficinas pedagógicas promovem a criação de um ambiente de estudo que permite ao aluno despertar sua capacidade inventiva, exigindo o uso da criatividade no desenvolvimento de atividades propostas, permitindo a criação de seres autônomos produtores do próprio conhecimento. Paviane e Fontana (2010), sobre características das oficinas pedagógicas, acrescentam que

Uma oficina é, pois, uma oportunidade de vivenciar situações concretas e significativas, baseada no tripé: sentir-pensar-agir, com objetivos pedagógicos. Nesse sentido, a metodologia da oficina muda o foco tradicional da aprendizagem (cognição), passando a incorporar a ação e a reflexão. Em outras palavras, numa oficina ocorrem apropriação, construção e produção de conhecimentos teóricos e práticos, de forma ativa e reflexiva (PAVIANE e FONTANA, 2010, pg.78).

Percebemos que Paviane e Fontana evidenciam a finalidade das oficinas, que é a construção dos conhecimentos pedagógicos, mostrando que as oficinas pedagógicas devem ser tomadas como metodologia para que o estudante possa de maneira eficaz abarcar o conhecimento prático. Evidenciam também a importância da obtenção e apropriação dos novos saberes, somando ao conhecimento teórico, que normalmente aprendemos em sala, o conhecimento prático, que dá concretude ao que se está ensinando.

A proposta de ensino, por meio de oficinas, torna a sala de aula um verdadeiro ambiente de aprendizagem, desconstruindo a ideia mecanicista do processo educacional de formação dos nossos alunos. Também, viabiliza a troca de conhecimentos entre o professor e o aluno por permitirem a ligação direta entre o que se está ensinando e o que o aluno está aprendendo.

2.1.2 Exploração e experimentação em Matemática

O caráter exploratório e experimental das ciências permeou todo o processo de desenvolvimento da Matemática até os dias atuais. Mesmo hoje com o vasto desenvolvimento tecnológico que possuímos, ainda temos que analisar, revisar e refazer cálculos, contas e testes em busca de respostas a problemas que só podem ser resolvidos com conhecimentos matemáticos. Impulsionados por essas características que moveram as grandes descobertas matemáticas, é que podemos pensar na possibilidade de levar esse caráter exploratório e experimental para a sala de aula, permitindo que o estudante dessa Matemática se torne o sujeito ativo na criação do seu próprio conhecimento.

Nessa perspectiva, Polya (1995), em seu livro intitulado *A Arte de Resolver Problemas*, apresenta alguns passos importantes para ensinar Matemática de forma que o aluno aprenda de modo mais significativo, por meio de análises, explorações e experimentações diversas de problemas não triviais, desde que possam ser resolvidos com as ferramentas disponíveis. Ele destaca a importância de permitir a construção de saberes, não apenas se apropriando deles de maneira mecanicista. Polya coloca quatro etapas para se resolver problemas de Matemática: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução de um plano e o retrospecto. Aborda também como o professor deve agir com o aluno em diversas situações acerca da resolução de problemas, apontando aspectos importantes da postura do professor para com as dúvidas apresentadas pelos alunos.

O caráter experimental proposto por Polya no desenvolvimento de atividades na área de exatas pode ser visto na preocupação com o fato de que o aluno produza seu conhecimento, insistindo na tentativa de resolver os problemas propostos. Polya também enfatiza que o aluno deve ser amparado pelo professor sem que lhe sejam dadas informações em excesso, retirando dele a responsabilidade pela procura de uma resolução “correta” preestabelecida. Desse modo, Polya (1995) afirma que

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, não demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do problema (POLYA, 1995, pg.XVII).

Como colocado por Polya, o professor é responsável por guiar os estudantes por meio do universo de informações que eles podem ter sobre o processo de resolução de um problema,

permitindo e possibilitando que as ideias matemáticas emergjam do compilado de ideias que os alunos podem apresentar. O professor também deve se portar como incentivador da experiência, incitando para que os alunos invistam nas ideias que por eles forem levantadas, desde que elas gerem a aprendizagem que se espera.

Como dito anteriormente, para Polya o processo de experimentação passa por fases bem determinadas, sendo a primeira delas o entendimento acerca do que se quer responder, do que se quer resolver. Nessa fase, identificam-se no problema os aspectos matemáticos, as grandezas envolvidas, os objetivos que se deseja alcançar, entre outros.

Na segunda fase, se traça um plano de ação a respeito do problema proposto, realiza-se o planejamento definindo por onde começar, identificando quais conhecimentos serão necessários para agir, organizando as ideias que, no seu entendimento, terão mais influência no processo de busca por alguma solução. O professor deve se inteirar sobre o que os alunos planejam fazer, verificar a coerência do planejamento construído e, se necessário, reconduzir o aluno ao caminho apropriado, lembrando sempre que o ato orientação deve ser realizado sem tirar o aluno do papel de protagonista no desenvolvimento da sua atividade.

Na terceira fase, executa-se o planejamento realizado, desenvolvem-se os cálculos, aplicam-se os conhecimentos matemáticos com os que se espera resolver o problema. Nesse ponto da atividade, caso as ferramentas usadas não produzam os resultados esperados, o professor deve mediar para o aluno usar novas ferramentas. O professor pode agir de modo indagador, mediando a atividade de modo que o aluno resolva o problema proposto ou até mesmo desenvolva novas ideias a serem usadas na tentativa de resolvê-lo. No final dessa etapa, espera-se que o aluno tenha conseguido resolver o problema ou se aproximar da resolução do mesmo.

Na quarta e última fase, deve-se realizar um processo de análise dos resultados e de todas as etapas já realizadas, buscar realizar as últimas adequações a respeito da solução encontrada ou, se não encontrada, verificar possíveis erros e retomar o processo experimental. O professor deve avaliar as respostas obtidas pelos estudantes, ouvir as justificativas apresentadas e sugerir novas possibilidades de abordagem do problema para os que não concluíram sua resolução.

As fases descritas devem ser consideradas no desenvolvimento de uma atividade que busque o caráter experimental, e com sua implementação é esperado que o aluno saia da zona de conforto e, de mero espectador, se torne o maior responsável pela produção do seu conhecimento. Dessa forma, o processo experimental constitui uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática, que tira o aluno da monotonia do ensino tradicional, em que o professor é o detentor do saber e o aluno mero receptor, aproximando-o das raízes do conhecimento matemático.

2.1.3 O que é uma Oficina de Matemática Experimental (OME)

Munidos dos conceitos referentes ao desenvolvimento e caracterização de uma oficina pedagógica e da abordagem proposta pelo Polya (1995) que evidencia elementos importantes no desenvolvimento de um trabalho experimental, podemos propor a realização de Oficinas Pedagógicas no ensino de Matemática, colocando a experimentação como proposta central no desenvolvimento de atividades. De fato, a proposta metodológica de Gomeró e Silva (2017, p.2, apud Souza, 2017, p.15), chamada Oficina de Matemática Experimental (OME), está inspirada na ideia de que

Uma oficina de matemática experimental propicia um ambiente inovador de ensino e aprendizagem de matemática cujos mecanismos se sustentam em dois princípios fundamentais; o de que a maneira mais eficiente de aprender envolve a participação ativa do aluno (aprender fazendo), e o de que o papel do professor é o de orientar o aluno no processo de aprendizagem (professor mediador). Nestas oficinas os alunos são confrontados com situações ou problemas matemáticos fáceis de compreender e de interesse suficiente para capturar sua atenção, mas muitas vezes difíceis de resolver. O aluno, sem ser ciente desta dificuldade, se sente impelido a procurar por uma solução; e é nessa busca que acontecem os processos de aprendizagem e de desenvolvimento das habilidades cognitivas.

Assim, em uma OME os alunos trabalham com problemas que possuem uma natureza mais complexa, não triviais, problemas que exigem do aluno certa perspicácia e empenho no processo. Por mais que pareça estranho o ato de tentar potencializar o processo de aprendizagem com problemas mais difíceis, percebe-se no desenvolver das oficinas que de fato isso é possível, pois o caráter experimental unido à ludicidade fazem com que exista fertilidade para a promoção de novas ideias. Além disso, requer-se que o problema seja de certo modo cativante para o aluno, que seja capaz de prender a atenção e despertar a curiosidade, permitindo que a cada passo dado exista o aumento da motivação de chegar na almejada solução para a atividade proposta.

Em virtude da resolução de problemas não-triviais, muitos alunos se depararão com pequenos e grandes obstáculos a serem contornados na busca por alguma solução ao problema proposto, sendo recomendado que o professor evite dar explicações longas e que todas as dúvidas, objeções e perguntas sejam discutidas em grupo, de modo a permitir que os participantes analisem as soluções e verifiquem se o caminho percorrido é válido.

Caso algum aluno apresente dificuldades maiores do que o restante do grupo, será necessária a intervenção por parte do professor, recomendando-se aqui que o aluno seja orientado a rever os objetivos da atividade e os procedimentos por ele tomados. Desse modo, o professor auxilia o aluno na busca por possíveis erros, e, se necessário, fornecerá novo material para que a atividade seja iniciada novamente.

Outro ponto característico no desenvolvimento de uma OME é a intensidade com que os alunos interagem entre si no processo de resolução das atividades propostas, pois todos querem contribuir com suas opiniões e socializar seus resultados. Nessa perspectiva, é importante que o professor mantenha uma “bagunça produtiva”, tendo em vista que é inevitável acontecer os desdobramentos desse tipo de oficina sem essa grande interação entre os participantes. Recomenda-se, assim, que o professor mantenha a “bagunça” em níveis aceitáveis, de modo que ela seja de fato produtiva e não atrapalhe o andamento das atividades.

É importante que exista um ambiente físico propício para a realização das oficinas, um local que permita uma boa logística, bem como a interação do professor com toda a turma e também com os pequenos grupos individualmente. Recomenda-se que o grupo de alunos não seja muito grande e que a oficina tenha outras pessoas auxiliando o processo. Além disso, é importante que o professor desenvolva atividades auxiliares tanto de um nível mais alto, para os alunos que terminarem primeiro a atividade proposta, quanto atividades mais simples, visando atender os alunos que apresentarem maiores dificuldades.

Como último e não menos importante procedimento metodológico, o(s) aplicador(es) da OME deve(m) sempre respeitar(em) o tempo de cada grupo e aluno, auxiliando se necessário, mas nunca dando respostas. O professor nunca deve dizer como se faz e, principalmente,

evitar fazer a atividade por eles. Recomenda-se que os outros alunos do grupo que já tenham terminado possam auxiliar o(s) colega(s) que ainda apresentem dificuldades.

Dessa forma, as OMEs constituem uma proposta pedagógica para o ensino de matemática que aproxima o aluno da forma como é produzido o conhecimento matemático, por meio do processo exploratório e experimental, tornando o envolvido um ser ativo no processo de aprendizagem dessa área do conhecimento.

Capítulo 3

Oficina: Teoria dos Jogos e a batalha dos trezentos

A oficina “Teoria dos Jogos e a batalha dos trezentos” foi inspirada em um fato histórico ocorrido entre a segunda metade do século 6 a.C e o início do século 5 a.C, período em que os persas já haviam ampliado de forma considerável os seus domínios e buscavam continuar se expandindo. Ao tentar dominar a cidade de Atenas, o então rei da Pérsia, Dário I, sofreu a derrota e Atenas saiu vitoriosa da batalha de Maratona, que ficou conhecida como primeira Guerra Médica.

Anos depois, em uma segunda tentativa de ataque realizada agora pelo rei Xerxes, sucessor de Dário I, os persas saíram vitoriosos ao atacar uma pequena colônia espartana, fato que ficou conhecido como a batalha das Termópilas e que hoje chamamos de batalha dos Trezentos. O que mais chama a atenção é que mesmo tendo sido o pequeno exército espartano dizimado por completo, eles saíram como heróis, pois conseguiram enfrentar um exército centenas de vezes maior e permitiram que outras colônias gregas fugissem ou se preparassem para possíveis ataques.

Tendo em vista esse fato histórico e como ele chama a atenção de quem o escuta, foi decidido realizar um trabalho sobre a Teoria dos Jogos realizando uma análise da batalha dos trezentos. Foram inseridos alguns elementos na história da batalha para enriquecer a análise, mas isso ocorreu de forma a não fugir da história real, do acontecido com os “trezentos”.

3.1 A inserção de ideias imprescindíveis sobre Teoria dos Jogos

Antes de desenvolver a atividade de análise da batalha das Termópilas, se fez necessária a realização de um pequeno jogo para que elementos e conceitos importantes da Teoria dos Jogos fossem inseridos. Para tal, foram selecionadas três cenas de filmes da franquia Velozes e Furiosos em que ocorrem confrontos entre carros, cenas que envolviam o que chamamos dentro da Teoria dos Jogos de *chicken game* ou “jogo do galinha”.

Nessas três cenas, os personagens aceleram seus carros um contra o carro do outro, de modo que, se ninguém desviar, a possibilidade de um acidente trágico é evidente.



Figura 3.1: Velozes e Furiosos: Toretto vs Shaw



Figura 3.2: Velozes e Furiosos: Toretto vs Shaw



Figura 3.3: Velozes e Furiosos: Brian e Roman vs Roberto e Korpi

Após assistir às cenas e realizar uma breve discussão sobre o porquê de os personagens terem se colocado naquela situação, devemos proporcionar condições para que os alunos analisem todos os cenários possíveis, movidos pelo conjunto de decisões que podem ser tomadas por cada um dos personagens e como a decisão de um deles afeta a decisão do outro.

Na sequência, constrói-se, juntamente com a turma, uma matriz com as decisões apresentadas pelo primeiro jogador na linha e pelo segundo jogador na coluna. Em seguida, já tendo analisado os cenários possíveis, o professor, juntamente com os alunos, deve pedir para que eles indiquem a(s) combinação(ões) de decisões que geram os maiores ganhos para cada personagem por meio de pares ordenados, alocando números, de modo que, em uma célula, o maior número indique o ganhador, e que, na tabela, o maior número represente o maior ganho. Após a construção, a matriz de ganhos construída deve ser como na Figura 3.4, apresentada a seguir.

	Jogador 2 Desvia o carro	Jogador 2 Não desvia o carro
Jogador 1 Desvia o carro	(0 , 0)	(0 , 1)
Jogador 1 Não desvia o carro	(1 , 0)	(-1 , -1)

Figura 3.4: Chicken Game na forma estratégica

No exemplo acima, temos um jogo simétrico em relação às possíveis decisões a serem tomadas e devemos questionar os alunos sobre qual a melhor decisão a ser tomada por cada jogador caso o outro decida desviar ou não do carro.

O mediador da oficina deve explorar o fato de o jogo ser simultâneo (ver Seção 1.3.3), mostrando como a simultaneidade influencia na tomada de decisões, pois, dado que tudo acontece ao mesmo tempo, os jogadores não sabem o que o seu adversário decidirá fazer. Além dessa característica apresentada, deve-se também abordar o fato de que esse jogo apresentado é não-cooperativo (ver Seção 1.3.3), pois os jogadores buscam os melhores resultados sem que exista qualquer tipo de cooperação entre eles.

Por fim, depois de explorar o jogo proposto, o professor deve pedir para os alunos encontrarem a melhor decisão a ser tomada pelos personagens e definirem qual deve ser o desfecho de um problema dessa natureza. É importante lembrar que os fatores que levaram a tal disputa entre os jogadores podem influenciar no resultado apontado por cada um dos alunos, já que o jogo proposto aponta que o jogador pode prezar muito pela vitória ou muito pela sua vida.

Se, ao fim dessa atividade, o mediador julgar necessária a realização de mais uma análise, de outro jogo, em Teoria dos Jogos, encontra-se no apêndice um jogo que retrata a interação entre duas fabricantes de motos dentro do nosso país.

3.2 A batalha dos trezentos: descrição da oficina

A oficina começa assistindo com os alunos ao filme Trezentos, criado para retratar a batalha de Termópilas, pedindo para que eles observem atentamente as decisões tomadas por cada um dos envolvidos na batalha, de modo que tentem imaginar qual seria o desfecho caso outras decisões tivessem sido tomadas por ambos os lados.



Figura 3.5: Assistindo ao filme Trezentos

Depois de assistirem ao filme e terem uma ideia inicial do que foi a batalha de Termópilas, os alunos devem ser indagados sobre a possibilidade de um desfecho diferente, objetivando fazer com que eles imaginem outros cenários além do ocorrido. De certo, diversas situações vão ser colocadas e levantadas pelos participantes da oficina e, assim sendo, o mediador deverá restringir o problema ao roteiro destacado abaixo.

Aplicação de Teoria dos Jogos baseado na batalha dos Trezentos entre Pérsia e Esparta, Imperador Xerxes e Leônidas.

Na Grécia antiga, uma história chama muita a atenção até os dias de hoje, é a história dos trezentos. Na história, o imperador persa Xerxes ataca uma comunidade espartana situada nas proximidades do mar e de um vale rochoso que servia de proteção natural contra invasores. Só existiam duas possibilidades de chegar à comunidade espartana: uma delas era passar por um pequeno estreito entre as cadeias rochosas que cercavam a comunidade, fazendo com que a chegada à comunidade fosse rápida; a outra possibilidade era contornar a extensa cadeia rochosa, possibilidade que requereria alguns dias.

Em um certo dia, o imperador persa se vê diante de algumas possibilidades a respeito dessa comunidade espartana e decide tomar uma decisão, e o pequeno contingente militar espartano que ali estava decide qual a melhor decisão a tomar frente à possibilidade iminente de um ataque persa.

Os Persas têm 3 possibilidades: dar a volta na cadeia rochosa e atacar em campo aberto (caminho mais longo por fazerem uma viagem que leva dias); atacar os espartanos pelo estreito (caminho mais curto); ou simplesmente não atacar (Xerxes perde moral com o seu povo e mostra fraqueza frente a todos os outros impérios).

Os Espartanos têm 3 possibilidades: realizar um ataque preventivo contra os persas; não defender o estreito e ficar na comunidade esperando o ataque em campo aberto; defender o estreito com todo aquele pequeno contingente.

Dividem-se os alunos em grupos de 4 integrantes e, após realizar a leitura do roteiro com os participantes da oficina, o professor deverá discutir cada combinação de decisão com a turma, permitindo que discussões menores aconteçam em cada grupo, de modo que o entendimento possa ser o mais homogêneo a respeito dos cenários que serão destacados. A homogeneidade no entendimento objetiva que o aluno preencha a matriz de ganhos usando o princípio da racionalidade. Dessa forma, espera-se que as diversas matrizes de ganhos produzidas pelos grupos tenham traços similares.

É importante pedir que os alunos realizem anotações sobre as discussões realizadas para que possam lembrá-las na hora de realizar a quantificação de cada decisão tomada pelos agentes no jogo.

Como próximo passo, o professor deve entregar para cada um dos alunos a tabela da Figura 3.6 para o preenchimento da matriz de ganhos. É importante pedir aos alunos que discutam apenas as ideias sobre a formação e importância dos cenários, mas que eles não compartilhem o preenchimento de suas matrizes, de modo que a disposição dos pares ordenados seja responsabilidade individual de cada participante.

No modelo apresentado na Figura 3.6, podemos perceber que, na parte superior da tabela, estão dispostos números aleatórios que deverão ser usados para a criação dos pares ordenados em cada célula. É importante que todos os alunos façam uso do mesmo conjunto de números, sendo que o aplicador da oficina pode, se achar necessário, criar qualquer outro conjunto de valores.

Após a construção e alocação dos valores na matriz de ganhos, o mediador deverá pedir

Espartanos versus persas, repensando a batalha dos trezentos

Oficina de Matemática experimental

Nome: _____ Serie: _____

Data: __/__/__

Planilha de Recompensas Relativas

0,0,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,4,4,6

Batalha dos Trezentos	Espartanos Comandante Leônidas			
	Combinação de escolhas	Atacar diretamente	Não defender o estreito	Defender o estreito
Persas Imperador Xerxes	Dar a volta no estreito			
	Atacar no estreito			
	Não atacar esparta			

Figura 3.6: Martiz de ganhos/recompensas/Pay-offs

aos alunos que relatem os fatos, cenários, decisões da tabela que o aluno achou que seriam as melhores decisões a serem tomadas por cada um dos agentes, pedindo aos alunos que retratem de forma ordenada qual seria a melhor decisão tomada por um dos agentes frente às decisões possíveis do outro agente e vice-versa.

Tendo os alunos construído suas matrizes, cabe ao mediador levantar uma pequena discussão sobre a formalização do jogo, a importância da criação do modelo matemático para que o problema possa ser analisado mais coerentemente. Colocar em pauta a existência ou não de racionalidade e estratégia por parte dos envolvidos na batalha (ver Seção 1.3.1), fazendo com que os alunos se questionem e reflitam sobre a distinção entre ações racionais e ações estratégicas, e como o agir estrategicamente influencia no desfecho do jogo.

O mediador da oficina deve orientar os alunos a realizarem observações de como as informações sobre a batalha se apresentam para cada um dos dois líderes, caracterizando a interação analisada em jogo de informação completa ou incompleta (ver Seção 1.3.2), buscando dos alunos como a disposição das informações interferem no desfecho final do jogo.

Outros elementos devem ser discutidos com os alunos, como: há cooperatividade, ou não (ver Seção 1.3.3), entre os agentes; esse jogo é sequencial ou simultâneo (ver Seção 1.3.3) e como essa característica influencia na interação entre os agentes; existe a possibilidade de analisar esse jogo de forma estendida ou é melhor analisá-lo de forma estratégica (ver Seção

1.3.4).

Por fim, o aluno deve responder, dentro do que ele observou e tendo em mente todos esses fatores que caracterizam esse jogo, se o que aconteceu na batalha dos trezentos é o que deveria de fato ter acontecido.

Capítulo 4

Relato de experiência

A oficina foi realizada no CPMAT, Colégio da Polícia Militar Anísio Teixeira em Teixeira de Freitas - Bahia, entre agosto e novembro de 2017. As oficinas tiveram como público alvo alunos do 1º ano do ensino médio, escolha feita levando em consideração conhecimentos básicos e maturidade necessários para a efetiva participação e assimilação de conceitos a serem abordados na OME proposta.



Figura 4.1: Aplicação da oficina no Colégio da Polícia Militar Anísio Teixeira - CPMAT

As atividades foram desenvolvidas com três turmas do 1º ano do CPMAT. Foram realizados quatro encontros de duas aulas cada durante os meses de agosto e novembro de 2017, concomitantemente com o desenvolvimento de outras atividades escolares na disciplina de matemática. Cada turma tinha 25 alunos em média, os quais foram divididos em grupos de, no mínimo, quatro e, no máximo, 5 alunos.

4.1 Motivação e construção da oficina

A oficina fora planejada de modo a abordar os conceitos mais relevantes da Teoria dos Jogos. No decorrer da aplicação da oficina, houve necessidade de pequenos ajustes que tiveram boa acolhida entre os alunos. Tal experiência me fez pensar em oficinas mais aprofundadas a serem desenvolvidas com foco tanto em anos superiores do ensino médio, quanto do ensino fundamental.

O trabalho com Teoria dos Jogos no ensino básico foi motivado por leituras e um determinado conhecimento prévio de textos e noções básicas sobre o tema. Além disso, o famoso filme “Uma mente brilhante”, que conta a história de John Nash e evidencia seu reconhecimento com o Nobel de Economia por seus importantes aportes da Teoria de Jogos nessa área, fez com que surgisse o desejo de me aprofundar no tema. Além disso, busquei criar uma oficina, de modo que pudéssemos aplicar os conceitos básicos da teoria na análise de tomada de decisões em situações fáceis de entender por alunos do primeiro ano do ensino médio, objetivando com isso que eles percebam a importância da Teoria dos Jogos e, portanto, da Matemática em nossas vidas.

4.1.1 Primeiro encontro

O primeiro encontro foi desenvolvido com o objetivo de inserir algumas ideias que seriam importantes para a atividade principal e introduzir o aluno ao pensamento estratégico. Foram projetadas aos alunos três cenas referentes a filmes da franquia Velozes e Furiosos em que aconteciam disputas entre carros, com os personagens colocando os carros um contra o outro, frente a frente. O desfecho das disputas nos levaram a discussões a respeito de qual seria a melhor decisão a ser tomada por cada jogador frente aos diversos cenários possíveis.

Quando levantada a pergunta: qual a melhor decisão a ser tomada por cada um dos personagens frente à disputa mostrada? A resposta, no início, foi quase unânime: tudo poderia ser evitado se os envolvidos em tal disputa abdicassem de participar, pois o desfecho daquele jogo era previsível e ao mesmo tempo trágico.

Sendo assim, foi discutido com os alunos as melhores decisões a serem tomadas frente a um conflito apresentado, evidenciando a importância que os personagens davam à vitória em cada cena do filme, e os motivos pelos quais arriscavam suas vidas. Toda a sala, em conjunto, participou da criação dos cenários possíveis, em que eles discutiram todas as situações prováveis para o acontecimento. Os alunos conseguiram perceber que a matriz de ganhos (ver Figura 3.4) era simétrica em relação aos jogadores. Então, destaquei que aquele era um jogo de recompensas simétricas e acrescentei quais eram as características fundamentais desse tipo de jogo. Também perceberam que o ganho de um era equivalente à perda do outro. Sendo assim, foi colocado a eles que esse jogo se caracterizava como um jogo de soma zero por possuir essas características específicas. Por fim, também foi contada a eles a história por trás desse jogo, e revelado o nome que o jogo toma dentro da teoria dos jogos, conhecido como “jogo do galinha” ou *chicken game*.

Ao discutirmos como poderíamos alocar os valores na matriz de recompensas, os alunos imediatamente perceberam que o valor atribuído ao vencedor teria que ser maior do que o valor atribuído ao perdedor, tanto em caso de vitória do 1º jogador como do 2º jogador. Perceberam que, caso desistissem do jogo, os dois jogadores teriam ganhos menores do que

se algum deles tivesse vencido o jogo. Nada mais óbvio, pois vencer é melhor do que perder. Por fim, eles perceberam que, caso os dois fossem até as últimas consequências para tentarem ganhar, esse se tornaria o pior cenário para ambos, pois o desfecho era um trágico acidente de carro, correspondendo aos piores ganhos de toda a matriz de recompensas montada.

No fechamento desse primeiro encontro, alguns alunos indagaram sobre o uso desse conhecimento em outras situações, o que foi discutido em grupo. Inquiri ao aluno se era possível um conflito de interesse entre dois agentes sobre um determinado bem, produto, pessoa, etc. Os mesmos responderam que sim. Na sequência perguntei se poderia haver uma situação em que a decisão do 1º agente interferisse nos ganhos do 2º, e eles novamente responderam que sim. Por fim, perguntei se era possível em uma disputa por um bem, produto, pessoa, etc. que ambos perdessem ou ambos ganhassem, e mais uma vez eles responderam que sim. Tendo os alunos se apropriado das ideias e tendo sanado as suas dúvidas, começaram a colocar situações em que aquele tipo de análise era possível. Assim, fechamos o primeiro encontro da oficina, tendo eu colhido, mais do que o esperado.

4.1.2 Segundo encontro

O segundo encontro foi destinado a assistir ao filme “Trezentos”, usado como elemento motivador para a segunda parte do trabalho a ser realizado. Antes de o filme começar, pedi que eles observassem bem o cenário, a disposição dos exércitos e todos os outros fatores relevantes à análise futura que eles viriam a realizar em decorrência da atividade a ser feita.

4.1.3 Terceiro encontro

No terceiro encontro, baseando-nos no filme assistido, analisamos os possíveis desfechos para o embate entre persas e espartanos se outras decisões houvessem sido tomadas por ambos os exércitos. Em conjunto com os alunos criamos três possíveis decisões a serem tomadas pelos persas que eram: a de não atacar os espartanos; a de atacar pelo caminho mais curto passando por um estreito de cadeias rochosas; ou, dar a volta na cadeia de montanhas e atacar os persas em campo aberto. Para os espartanos, chegamos às seguintes possibilidades, tendo em vista que já haviam sido avisados previamente do possível ataque persa: defender suas casas sem sair da vila; realizar um ataque preventivo ao império persa enquanto eles não esperavam; ou, defender o estreito que era o caminho mais curto entre os persas e a vila espartana.

Todos os possíveis cenários acima discutidos com os alunos encontravam-se no roteiro destacado na seção 3.2, o qual trazia um pequeno texto motivador que lhes foi entregue previamente para que lessem e retomassem as ideias vistas no filme, dando ênfase aos acontecimentos que seriam mais pertinentes às discussões a serem feitas adiante nesse encontro. Como o texto entregue foi produzido com base em análise do filme, os alunos rapidamente se inteiraram dos fatos que seriam analisados e puderam perceber como a história analisada tinha seu desfecho baseado na decisão tomada naquela etapa específica do filme. Nas colocações dos alunos, pôde ser percebido como o filme teve grande relevância, despertando o aluno a pensar e a se ver naquele cenário, dando um caráter real à atividade que estava sendo desenvolvida.

De posse das possibilidades trazidas pelo filme e evidenciadas no texto motivador, os alunos começaram a realizar as combinações entre elas, discutindo qual ou quais das combinações eram mais interessantes para cada lado. Essa discussão, iniciada com toda a sala, foi pormenorizada no seio de cada um dos grupos, em que pedi para que eles fizessem as devidas anotações sobre o que pensavam acerca de cada um dos possíveis cenários que foram discutidos anteriormente.

Passei por todos os grupos e ouvi algumas colocações feitas sobre os cenários, fiz algumas ponderações a respeito, moderei algumas discussões. Nesse encontro, nos atemos a avaliar os cenários e a discuti-los procurando identificar as melhores decisões a serem tomadas por cada império na batalha.

Após cada grupo concluir suas discussões acerca de quais cenários eram mais interessantes para cada um dos impérios, realizamos uma discussão com toda a sala, em que os grupos colocavam suas opiniões sobre cada um dos cenários construídos em comparação com os demais. Existiam algumas divergências entre as melhores decisões a serem tomadas, mas, com base em todas as análises feitas sobre o material, as decisões foram quase que unânimes.

Das discussões acerca de cada um dos cenários, chegamos ao relatório abaixo, que mostra de forma simplificada o que foi gerado em cada discussão realizada sobre os cenários avaliados.

Se os persas decidirem dar a volta no estreito enquanto os espartanos decidirem realizar um ataque preventivo, Leônidas causará perdas significativas nas tropas inimigas por pegá-las de surpresa, já o Imperador Xerxes alocará recursos grandiosos com a sua grande tropa para realizar essa volta pela cadeia de montanhas que envolve a vila espartana.

Se os persas decidirem dar a volta no estreito enquanto os espartanos decidirem não defender o estreito, Leônidas terá que enfrentar o grande exército de Xerxes em campo aberto, o que lhe trará desvantagem, pois o exército persa possui um grande número de arqueiros; já o exército persa terá alta vantagem, compensando muito os gastos alocados com toda a viagem feita para contornar a cadeia de montanhas em torno da vila espartana. Se os persas decidirem dar a volta no estreito enquanto os espartanos decidirem defender o estreito, após algum tempo de espera sem nenhuma reação persa, Leônidas, como grande chefe militar que é, saberá que os persas optaram por contornar a cadeia de montanha. Assim, Leônidas poderá pedir reforços de outras vilas espartanas próximas, podendo fortalecer seu exército e entrar em embate com os persas em campo aberto, causando maiores danos ao exército do Imperador Xerxes.

Se os persas decidirem atacar pelo estreito enquanto os espartanos decidirem realizar um ataque preventivo, Leônidas usará ao seu favor o ataque surpresa, já que os persas jamais esperariam que aquele pequeno contingente de soldados espartanos sairia para um ataque direto. Em contrapartida, o imperador Xerxes tem grande vantagem por estar dentro de seu território e estar em número centenas de vezes maior.

Se os persas decidirem atacar pelo estreito enquanto os espartanos decidirem não defender o estreito, Xerxes pega caminho livre e mais fácil para efetuar o ataque na vila espartana. No entanto, Leônidas pode, mesmo não defendendo o estreito, armar uma estratégia para atacar pequenas porções do exército persa ao saírem do estreito. Ainda assim, o Imperador Xerxes terá grande vantagem dado pela vasta tropa persa.

Se os persas decidirem atacar pelo estreito enquanto os espartanos decidirem defender pelo estreito, o pequeno exército espartano ganha uma grande vantagem fazendo uso da defesa natural fornecida pela cadeia rochosa e impedindo que sofram ataque de arqueiro, sendo que o imperador Xerxes aumentará suas perdas, pois só poderá atacar com pequenas porções do seu vasto exército, mas de qualquer forma, a reposição dos soldados persas é menos custosa do que alocar recurso para dar a volta na cadeia de montanhas.

Se os persas decidirem não atacar Esparta enquanto os espartanos decidirem atacar diretamente, Leônidas usará ao seu favor o ataque surpresa, já que os persas jamais esperariam que aquele pequeno contingente de soldados sairia para um ataque direto. Em contrapartida, o imperador Xerxes fica gravemente enfurecido e dizima o pequeno exército espartano e em seguida ataca e dizima a vila espartana que se encontrará desprotegida.

Se os persas decidirem não atacar Esparta enquanto os espartanos decidirem não defender de um possível ataque persa, Leônidas e os espartanos sairiam bem-sucedidos por não perderem nenhum de seus homens, além de não terem despendido nenhum recurso para batalha. Em contrapartida, o imperador Xerxes deixa de expandir mais seu império e perde moral frente ao seu povo e a outros inimigos.

Se os persas decidirem não atacar Esparta enquanto os espartanos decidirem defender o estreito de um possível ataque persa, Leônidas despenderia recursos de forma desnecessária para defender seu povo de um ataque que não acontecerá. Em contrapartida, Xerxes perde moral com o seu povo e frente a outros inimigos.

4.1.4 Quarto e último encontro

Nesse último encontro, munido das anotações realizadas do encontro anterior, distribuí para eles as matrizes de ganhos que seriam preenchidas em cada um dos cenários (veja Figura 3.6), bem como valores aleatórios a serem utilizados para o preenchimento das matrizes, fazendo com que todos os alunos preenchessem as matrizes com os mesmos valores, de modo que, no fim do preenchimento, eles pudessem realizar comparações entre si.

Expliquei aos alunos que deveriam dispor os valores apresentados nas células da tabela em forma de pares ordenados, em que o valor que viesse primeiro indicasse a escolha observada na linha e o valor que viesse depois indicasse a escolha observada na coluna. Acrescentei que os valores aleatórios eram relevantes para que eles conseguissem representar, por meio dos números, o que haviam discutido, e quais decisões lhes pareciam mais importantes frente a cada um dos cenários construídos.

Sendo assim, preencheram as tabelas, distribuindo os valores, e as entregaram. No ato da entrega, realizei algumas indagações sobre informações presentes na tabela, objetivando entender alguns pontos ali apresentados. Depois de recolher todas as tabelas, realizar anotações e fazer os devidos questionamentos, encerramos a nossa oficina.

4.2 Observações sobre as atividades desenvolvidas

Nesta seção, serão feitas observações sobre o desenvolvimento das atividades, destacando os pontos que os alunos e o mediador acharam mais importantes. Além disso, são colocadas algumas falas feitas pelos alunos no decorrer da oficina.

4.2.1 Importância da criação de cenários na análise estratégica

No desenvolvimento das atividades, todas as etapas são importantes, sendo que cada uma delas fornece informações complementares sobre o problema que se busca analisar e resolver. Um dos pontos cruciais para o desenvolvimento do processo é o de criação dos cenários, pois nele, a partir das informações dadas, se busca encontrar todas as possíveis decisões a serem tomadas, para que se possa posteriormente decidir de forma coerente qual é a melhor das alternativas.

Por ser uma etapa de discussão em grupo, os alunos participaram intensamente da criação dos cenários e, quando indagados sobre como aquele processo poderia ser importante para eles, uma aluna colocou que:

- “Podemos trazer esse jogo para decisões na vida real [...], e a criação de cenários em cima das situações podem ajudar a tomar um bom rumo. Pois podemos adequar o que está sendo ‘examinado’ a uma ação que pode acontecer no futuro”. (Luísa)

No desenvolvimento dessa etapa, foi possível perceber o quanto os alunos ficaram intrigados ao pensar nas possibilidades de criação de cenários fora do problema proposto na oficina, trazendo para a discussão em sala outros conflitos que poderiam ser resolvidos e pensados por meio da Teoria dos Jogos. Alguns participantes da atividade colocaram que o processo de análise de cada cenário era longo e requeria uma grande atenção, mas concordavam com o fato de que o processo permitia uma maior coerência na solução de um eventual problema prático. Nessa perspectiva, um dos alunos colocou que:

- “... em alguns casos ter este conceito de observar e analisar cenários antes de tomar alguma decisão, acaba sendo essencial para a tua escolha embora gaste um pouco de tempo e cobre paciência de você, o resultado final será melhor e será também mais inteligente”. (Lucas Oliveira)

Como colocado, a maior parte dos alunos se apropriaram da ideia de que esse era um importante passo na tomada de decisões, percebendo que o fato de analisar todas as possibilidades por meio de um registro mais detalhado poderia de fato levá-los a decisões mais coerentes, e, por sua vez, mais inteligentes.

Ainda nessa etapa, ao pedir que uma aluna trouxesse uma situação prática, em que se aplicam esses conhecimentos, ela deu um exemplo a respeito da compra de um carro, inspirado nas cenas motivadoras vistas no primeiro encontro da oficina. Posteriormente, questionei que elementos ela analisaria para a criação dos cenários. A resposta dela foi

- “Usando o mesmo exemplo do carro, poderíamos criar um cenário em que a pessoa precisa fazer um reparo com urgência em seu carro, mas não pode gastar muito, então ganha um ponto positivo podemos assim dizer, aquele que for mais econômico nessa categoria. Podemos criar um cenário também ainda sobre o carro, em que a pessoa tem uma família grande, então o carro mais espaçoso por assim dizer ganharia um ponto sobre a análise”. (Karoline)

Desse modo, percebe-se que o desenvolvimento da atividade levou os alunos a questionamentos importantes sobre a análise de cenários e qual o melhor modo de agir frente às possibilidades. Além disso, mostrou aos alunos que a organização das ideias é um fator crucial no agir estrategicamente, possibilitando o uso de tal conhecimento em diversas outras situações.

4.2.2 Colocações a respeito da construção e importância da matriz de ganhos

A construção da matriz de ganhos é uma etapa fundamental no processo de análise dentro da Teoria dos Jogos, pois nesse momento se procura registrar uma ideia, um cenário, numericamente. Quantificar, realizar o registro de que uma ideia merece um ganho maior do que outra requer bastante atenção, além de que é necessário um conhecimento de todas as outras possibilidades, pois um valor de ganho deve estar em concordância com todos os outros da matriz produzida.

- *“Para poder criar a tabela de valores alguns fatores devem ser examinados com maior relevância, mas devemos analisar todos os pontos para poder atribuir os valores com coesão. Após serem analisadas todas as situações, definimos a melhor e a pior hipótese atribuindo o maior e o menor valor respectivamente. Definir a melhor e a pior situação (para ambos os lados analisados) pode ajudar na construção da tabela para a distribuição de valores, pois temos elementos que podemos comparar com as situações negativas e positivas”. (Luísa)*

- *“Podemos traçar uma relação entre a história real e a atribuição de valores feita. É importante, atribuir valores que não fujam da realidade, podemos citar como exemplo, a atividade da análise do filme 300, se os valores não tivessem sido dados, deveríamos estar nos preocupando também com isso, pois não faria sentido atribuir um valor alto (6, como exemplo da atividade) para uma situação boa; e um valor próximo a ele para uma situação ruim (5 por exemplo). Esses elementos também contam para a tabela ter um sentido, um significado”. (Rodrigo)*

No desenvolvimento das atividades, em particular dessa etapa, os alunos tendem a buscar as melhores formas de dispor os valores na matriz de ganhos, usam estratégias distintas e criativas. Alguns alunos começam analisando os cenários que se encontram em pontos extremos do que eles tomaram como melhor e pior decisões a serem tomadas; outros buscam analisar cada caso relacionando-os com os casos inferiores ao analisado, dispondo os valores de forma sequencial dos menores para os maiores; outros, por serem mais cautelosos, dispõem um valor de cada vez, analisando a consonância com os valores já alocados e os ainda não alocados.

Pode-se perceber que os alunos verificam a importância das etapas, da análise e interpretação do problema, da construção dos cenários, da construção da matriz de ganhos e, por sua vez, da solução do problema.

- *“A Criação e a elaboração destes cenários pode nos ajudar bastante ao realizar essa tabela pois assim nós podemos medir os resultados e criarmos uma espécie de balança onde*

assim possamos ver quais são as opções favoráveis”. (Lucas Oliveira)

- *“... para atribuir os valores foi necessário avaliar qual seria a escolha no contexto de cada situação, imaginando os resultados finais”. (Guilherme)*

Desse modo, percebe-se que nessa etapa os alunos requereram um maior tempo e perspicácia no ato de transformar informações em valores numéricos. Usaram diferentes estratégias para disporem os valores de forma coerente, para que posteriormente eles pudessem recorrer apenas à matriz de ganhos na busca da melhor solução possível, não necessitando mais reler e relembrar todas as ideias acerca dos cenários construídos.

4.2.3 Soluções encontradas pelos alunos e observações

A terceira etapa dentro de cada atividade desenvolvida era analisar tudo que fora construído e encontrar a solução apropriada para o jogo proposto, distribuindo valores numéricos em pares ordenados para representar cada situação possível.

No primeiro jogo proposto, essa etapa foi realizada em grupo, e, nela, a sala decidiu em conjunto o melhor resultado, ou seja, a melhor decisão que deveria ser tomada por cada um dos agentes envolvidos. No segundo jogo, na batalha dos trezentos, a distribuição foi feita de forma individual, isto é, cada aluno deu um peso para cada cenário nas disputas levantadas, assim como atribuiu os valores que achava mais apropriados para cada cenário na matriz de ganhos. Ao entregarem suas matrizes já preenchidas, foram inqueridos sobre a distribuição de valores que haviam realizado. A seguir, analisamos algumas matrizes produzidas e as justificativas para tal distribuição de ganhos.

Ao analisarmos a matriz de ganhos do aluno Enzo (veja a Figura 4.2), identificamos qual seria, na sua opinião, o melhor cenário possível para os persas e também qual seria o melhor para os espartanos. A partir de sua matriz, percebemos que atacar pelo estreito, enquanto os espartanos decidem não defendê-lo, é a combinação de escolhas que gera o maior retorno possível para o imperador Xerxes, enquanto o ato de não atacar os espartanos, sendo que estes optem por não defender o estreito, gera o maior ganho possível para o comandante Leônidas. Além dessas duas informações, podemos perceber que, segundo o aluno, como evidenciado na terceira linha de sua matriz, o ato de não atacar gera os piores retornos possíveis para os persas, seja qual for a decisão do comandante Leônidas.

Assim como na análise anterior, feita a partir da matriz do aluno Enzo, percebemos que o melhor cenário para os persas, na concepção da aluna Giovana (ver Figura 4.3), é o de atacar pelo estreito enquanto os espartanos não o defendessem, gerando para o imperador Xerxes o melhor resultado possível. Podemos perceber que, em um único caso, os ganhos do imperador Xerxes são menores do que os do comandante Leônidas, o que acontece no cenário em que os persas decidem não atacar e os espartanos decidem não defender. Nesse caso, o comandante Leônidas tem o seu melhor cenário possível. Percebemos, também, através da matriz, que a aluna dispôs os valores de modo que a decisão dos persas de atacarem pelo estreito sempre geraria para eles o maior ganho frente às outras duas decisões que eles poderiam tomar, de modo que, qualquer que fosse a decisão espartana, a decisão persa deveria ser essa, pois a

Espartanos versus persas, repensando a batalha dos trezentos
 Oficina de Matemática experimental
 Nome: Enzo Ztalo dos Santos Araujo Serie: 1º ano C
 Data: 21/11/18

Planilha de Recompensas Relativas

Batalha dos Trezentos	Espartanos Comandante Leônidas			
	Combinação de escolhas	Atacar diretamente	Não defender o estreito	Defender o estreito
Persas Imperador Xerxes	Dar a volta no estreito	(2, 3)	(2, 0)	(2, 1)
	Atacar no estreito	(4, 1)	(6, 0)	(3, 1)
	Não atacar esparta	(2, 1)	(1, 4)	(1, 3)

Figura 4.2: Distribuição de ganhos do aluno Enzo

Espartanos versus persas, repensando a batalha dos trezentos
 Oficina de Matemática experimental
 Nome: Giovanna da S. Louro Serie: 3º ano
 Data: 23/05/17

Planilha de Recompensas Relativas

Batalha dos Trezentos	Espartanos Comandante Leônidas			
	Combinação de escolhas	Atacar diretamente	Não defender o estreito	Defender o estreito
Persas Imperador Xerxes	Dar a volta no estreito	(2, 3)	(4, 3)	(3, 0)
	Atacar no estreito	(2, 3)	(6, 0)	(4, 3)
	Não atacar esparta	(2, 1)	(3, 2)	(1, 1)

Figura 4.3: Distribuição de ganhos da aluna Giovana

decisão de atacar pelo estreito domina as outras duas.

A disposição dos dados na matriz de ganhos da aluna Heloiza (ver Figura 4.4) evidencia

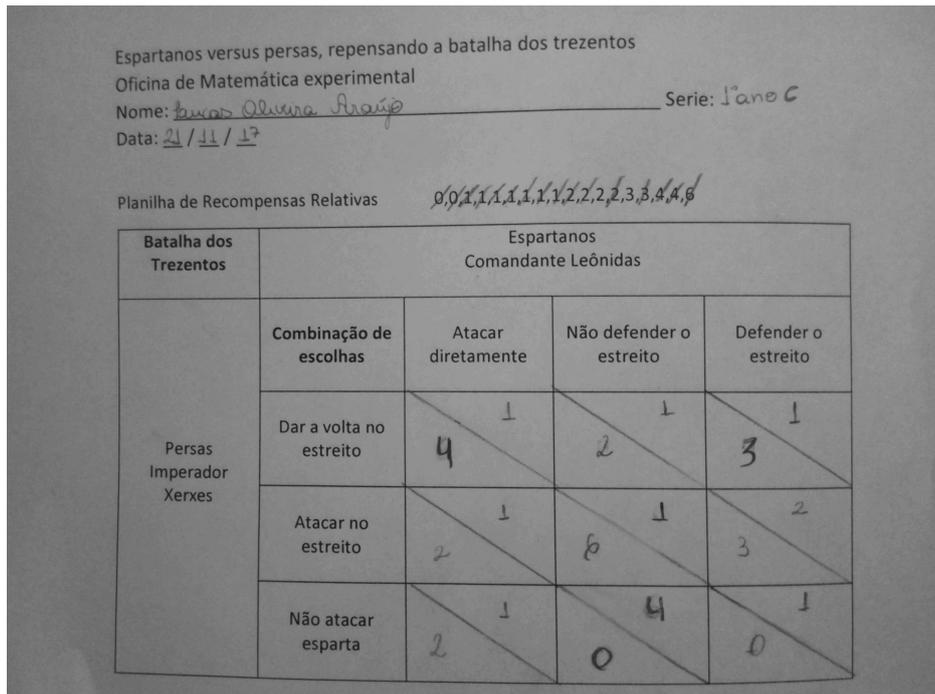


Figura 4.5: Distribuição de ganhos do aluno Lucas

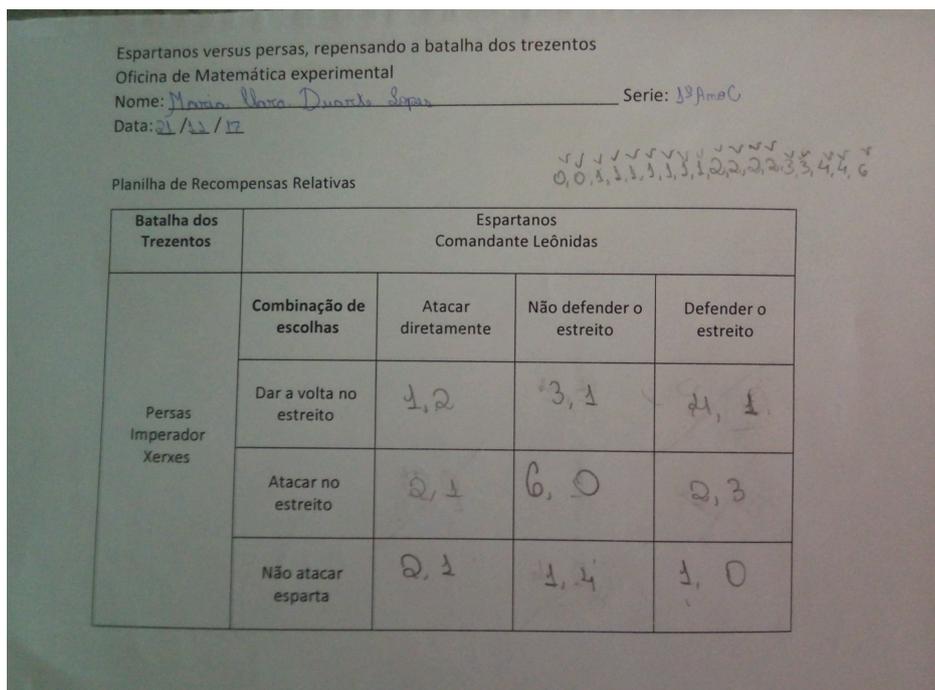


Figura 4.6: Distribuição de ganhos da aluna Maria Clara

enquanto os espartanos não o defendiam” como o melhor possível para o imperador Xerxes, e “não atacar os espartanos enquanto os espartanos não se defendem do ataque” como o melhor cenário para o comandante Leônidas. Uma particularidade dessa matriz é que a

Capítulo 5

Discussão e considerações finais

O desenvolvimento desse trabalho permitiu a união de saberes já adquiridos devido a estudos anteriores advindos dos anos de graduação, com práticas pedagógicas não antes utilizadas no meu exercício docente. Sendo que o uso das Oficinas de Matemática Experimental abriu uma outra gama de possibilidades no que diz respeito à inserção de novos conteúdos em sala de aula, dado que esse tipo de oficina faz com que tenhamos respostas inovadoras para a velha pergunta que sempre é feita quando se ensina Matemática: Quando se deve ensinar tal conteúdo?

Além do incremento de novas possibilidades no que se refere à inserção de conteúdos matemáticos, podemos ressaltar também a mudança na postura do alunado e maior receptividade percebida no decorrer das oficinas desenvolvidas, fazendo com que até os alunos notadamente menos participativos nas aulas convencionais despertassem grande interesse pelas atividades propostas.

Neste capítulo, também são mencionados alguns acontecimentos e observações que despertaram um especial interesse, pontos que mais chamaram a atenção e pontos que nos fazem perceber que o caminho seguido foi aquele que trouxe os melhores frutos.

5.1 Considerações gerais sobre o trabalho

Em princípio, a Teoria dos Jogos, como ramo da Matemática, já era responsável pelo despertar de um desejo cada vez maior em desenvolver trabalhos e atividades que viessem a elucidar a importância de um estudo menos estático e mais aplicado, até por se tratar de uma área que ao menos na sua esfera mais básica não exigisse conhecimentos matemáticos tão rebuscados, tornando como única exigência para a realização do seu estudo o empenho e maturidade na hora de lidar com os problemas propostos.

Outro fator motivador para o desenvolvimento de atividades em Teoria dos Jogos foi a possibilidade de mostrar para os envolvidos a importância da Matemática em problemas reais, não apenas em situações criadas no interior de uma sala de aula, com viés aplicado, como muitas vezes ocorre. Para tanto, foi proposto a análise de um acontecimento histórico, para que os participantes em tal análise pudessem, ao final da resolução do problema sugerido, comparar os resultados obtidos com o desfecho histórico ocorrido.

Movido pelo desejo de desenvolver uma atividade com as características apresentadas, surge a possibilidade de se trabalhar com oficinas pedagógicas, visto que essa metodologia de

abordagem dos conteúdos possibilita a maior participação e maior aproximação entre aluno e professor, permitindo que o professor possa perceber, de fato, se o que se está ensinando está realmente sendo internalizado pelo aluno.

Além do rompimento dessa barreira existente entre professor e aluno, no que diz respeito ao ensino de Matemática, as OMEs propiciam o desenvolvimento da prática pedagógica do aplicador da oficina, pois faz com que o mesmo saia da zona de conforto, exigindo em diversas situações acontecidas o aperfeiçoamento do material utilizado, das explicações e da oficina em si. Também é importante ressaltar a exigência da criatividade: dos alunos, no que diz respeito à análise e busca da(s) solução(ões) para o problema proposto; do professor, para que o mesmo consiga mediar de forma adequada quanto às dúvidas apresentadas pelos alunos sem que dê informações em excesso, tornando o aluno sujeito ativo na resolução do problema proposto e, portanto, na produção do seu conhecimento.

A priori, existia o receio de quem seria o público alvo dessa oficina, visto que, em algumas turmas, a receptividade para com a Matemática era menor do que em outras, mas ficou decidido que não se faria distinção de turmas, e o trabalho foi desenvolvido em todo o segmento, ou seja, nos primeiros anos do ensino médio, visando mostrar que de fato as OMEs são instrumento potencializadores do desenvolvimento matemático dos alunos. Desse modo, pôde ser percebido o interesse apresentado por muitos alunos que, corriqueiramente, não dão a devida atenção aos conteúdos diariamente apresentados nas aulas. Esse mesmo interesse rapidamente contagiou outros participantes, fazendo com que os objetivos fossem alcançados da forma mais tranquila possível.

5.2 Discussão dos resultados

A fragmentação da oficina em partes teve um viés muito positivo, pois permitiu que os alunos pudessem ter tempo para se apropriar da melhor forma possível de alguns conceitos que foram discutidos em cada etapa. Alguns alunos, entusiasmados com os novos conceitos vistos, davam exemplos, opiniões e faziam perguntas, mesmo fora do ambiente de sala de aula, pois queriam, de fato, entender o conteúdo exposto e evidenciar que tinham aprendido tudo o que foi mostrado.

Desse modo, ao aplicar a primeira das 4 partes em que foi dividida a oficina e começar a explicar aos alunos os conceitos iniciais sobre o que é um jogo em Teoria dos Jogos, foi-se criando um enorme apanhado de possibilidades em que se podiam analisar como se fosse um jogo. Quando iniciamos a discussão sobre agir de forma racional e de forma estratégica, deu-se origem a outra enxurrada de opiniões das mais diversas possíveis, sendo que as colocações realizadas sobre o que é agir de forma racional e estratégica eram de uma profundidade lógica que fez com que surgisse a crença de que o restante das oficinas seriam muito positivas.

Outros conceitos como soma-zero, simetria em jogos, jogos cooperativos e não-cooperativos, informação perfeita foram sendo discutidos naturalmente a cada situação de jogo que era lançada por eles mesmos. De forma interessante, pôde-se perceber o aperfeiçoamento do conceito de disputa, de jogo, de interação e de conflito, pois a existência do pensar que, em uma disputa, só pode ter um vencedor era quase que unânime antes das oficinas e, depois, os alunos já aceitavam a existência de soluções, em que todos se beneficiam e podem ter suas perdas minimizadas ou seus ganhos maximizados.

Além do ensino de um novo conhecimento, foi observado e registrado, de forma positiva, para que em outros trabalhos se possa dar uma especial atenção ao fato de que a Matemática também possui aspectos humanizadores, que puderam ser notados ao discutir com os alunos os jogos cooperativos e não-cooperativos, em que eles perceberam que muitas vezes a busca pelo aumento dos ganhos e pela vitória pode gerar aumento nas perdas, e que a ação estratégica é extremamente necessária para que o jogador possa ponderar os riscos e tomar a melhor decisão.

Ainda explicitando os aspectos positivos observados no uso da Teoria dos Jogos em turmas da educação básica, também é importante ressaltar as potencialidades que as OMEs possuem como metodologia para a abordagem de conteúdos matemáticos. Essa proposta permite tirar o ensino dessa área importante do conhecimento do estado estático em que muitas vezes ela se encontra, da monotonia que permeia o ensino tradicional, do ambiente escolar repleto de misticismo em torno das aulas de Matemática.

Desse modo, as OMEs nos tiram de um universo que se encontra carregado de “desespero” por parte dos alunos que não conseguem se entusiasmar em aprender e nos leva a um ambiente completamente diferente, um espaço em que a experimentação é a palavra de ordem, pois nessa realidade experimental o aluno abre mão do medo de errar, entendendo que errar é algo normal quando se busca aprender um novo conhecimento.

Outro importante e positivo ponto das oficinas é a ludicidade, fator motivador no processo de ensino e aprendizagem, tanto para os alunos quanto para o professor. Pois, perceber o colega participando e interagindo na busca pela resolução de um problema matemático contagia até o mais desmotivado dos alunos, fazendo com que as turmas em peso participem. Os alunos passam a acreditar que também são capazes de encontrar as soluções, mesmo aqueles que acreditam não ter habilidade suficiente na área.

Desse apanhado de ideias que surgiram na construção da oficina, que vão desde o estudo conceitual da Teoria dos Jogos e a busca pelo aporte teórico necessário ao desenvolvimento da pesquisa, até a aplicação das oficinas pedagógicas, evidenciamos aspectos educacionais importantes para o processo de ensino e aprendizagem, criando nos alunos o interesse pelo estudo de Matemática ao levá-los a um ambiente de pesquisa e experimentação que lhes permitiu, de forma lúdica, construírem os próprios saberes.

Movido por essa necessidade existente de tornar o conhecimento palpável para o aluno, levando-o a um ambiente que possibilite gostar do que lhe está sendo ensinado, e levando em consideração o universo de possibilidades que rodeia o alunado na atualidade, surge também a necessidade de se trabalhar problemas de cunho real, que levem o aluno a pensar no meio em que ele vive, em situações que podem acontecer ou que já aconteceram. Esse processo, chamado de contextualização, possui um forte poder de entusiasmar e dar significado aos conteúdos estudados, mostrando a utilidade e a importância do conhecimento para a vida e para o trabalho, não apenas para adquirir notas escolares satisfatórias e ser aprovado no final do ano.

5.3 Considerações finais

A partir do conjunto de atividades realizadas ao longo do desenvolvimento desse trabalho, foi possível adquirir novos e bons hábitos de trabalho, que vão desde o ato de preparo do

aporte teórico necessário para a realização da oficina até a busca por disseminar nos alunos a curiosidade sobre o que se está tentando ensinar. Também, deve-se destacar a importância que tem o desenvolvimento de atividades por meio das OMEs, sendo que o uso de oficinas de matemática experimental potencializam os efeitos esperados sobre o processo educacional, pois, em essência, essas oficinas já carregam elementos importantes e necessários à fuga do ensino de Matemática engessado que vem se perpetuando ao longo do tempo.

Além do mais, as OMEs permitem que os alunos vislumbrem a beleza que a Matemática possui, que sintam o prazer de realizar uma descoberta, que sintam o prazer de chegar nos resultados esperados pegando caminhos novos e diferentes, que possam realizar suas verificações de modo que eles mesmos consigam afirmar a veracidade de tudo o que fizeram, sem que necessitem olhar no fim de um livro ou pedir para que o professor apresente o resultado. Também, dentro das características de aplicação das OMEs, destaca-se o espaço que deve ser destinado para a avaliação e discussão dos resultados obtidos, sendo esse momento de socialização, crucial para que o professor possa avaliar se os objetivos foram realmente alcançados e para que os alunos entendam que todos podem contribuir nesse processo de construção dos saberes matemáticos.

Por fim, deve-se registrar que trabalhos como esse levam os participantes a fugirem do universo de preconceito que vivemos ao ensinar essa disciplina, esse universo que insiste na crença de que a Matemática não é para todos. Atividades como essas permitem que mesmo os alunos menos habilidosos consigam ter um bom desempenho, pois entendemos que a aprendizagem não reside no ato de encontrar a solução, mas sim em todo o conjunto de conhecimentos anteriores movidos na busca das respostas para os problemas propostos.

Apêndice A

Roteiro das oficinas: batalha dos trezentos

A.1 Objetivos

1. Objetivos Matemáticos

- (a) Introduzir algumas noções elementares associadas ao conceito de jogo em Teoria dos Jogos.
- (b) Analisar e construir matriz de ganhos de um determinado jogo em Teoria dos Jogos.
- (c) Entender como se dá a aplicação de Teoria dos Jogos em situações práticas.

2. Objetivos Heurísticos

- (a) Colocar o aluno frente a problemas de matemática que exijam observação, análise e perspicácia na resolução.
- (b) Apresentar o aluno ao processo de experimentação na resolução de problemas matemáticos.
- (c) Incentivar o aluno a verificar, por meio de indagações, resultados encontrados no processo de resolução de problemas.
- (d) Estimular o aluno a analisar situações práticas por meio de processos e ferramentas matemáticas.
- (e) Encorajar o aluno a resolver problemas de natureza matemática que exijam o uso do método experimental.

3. Objetivos não-matemáticos

- (a) Incentivar o aluno a realizar trabalho em equipe.
- (b) Incentivar o aluno à participação voluntária de atividades extracurriculares.

Aplicação de Teoria dos Jogos baseado na batalha dos Trezentos entre Persa e Esparta, Imperador Xerxes e Leonidas.

Na Grécia antiga uma história chama muita a atenção até os dias de hoje, é a história dos trezentos. Na história o imperador persa Xerxes ataca uma comunidade espartana situada nas proximidades do mar e de um vale rochoso que servia de proteção natural contra invasores. Só existiam duas possibilidades de chegar a comunidade espartana: uma delas era passar por um pequeno estreito entre as cadeias rochosas que cercavam a comunidade, fazendo com que a chegada a comunidade fosse rápida; a outra possibilidade era contornar a extensa cadeia rochosa, possibilidade que requereriam alguns dias.

Em um certo dia o imperador persa se vê diante de algumas possibilidades a respeito dessa comunidade Espartana e decide tomar uma decisão, e o pequeno contingente militar Espartano que ali estava decide qual a melhor decisão a tomar frente a possibilidade eminente de um ataque Persa.

Os Persas têm de princípio 3 possibilidades: **Dar a volta** na cadeia rochosa e atacar em campo aberto (caminho mais longo por fazerem uma viagem que leva dias); **atacar os espartanos pelo estreito** (caminho mais curto); ou simplesmente **não atacar** (Xerxes perde moral com o seu povo e mostra fraqueza frente a todos os outros impérios).

Os Espartanos têm de princípio 3 possibilidades: realizar um **ataque preventivo** contra os Persas; **não defender o estreito** e ficar na comunidade esperando o ataque em campo aberto; **defender o estreito** com todo aquele pequeno contingente;

Figura A.1: Relato histórico sobre a batalha dos trezentos, evidenciando os mais importantes detalhes para que seja possível a construção da matriz de ganhos do jogo em teoria dos jogos entre persas e espartanos. Essa folha apresenta duas cópias do resumo da história que foi vista no filme, sendo que alguns fatos foram acrescentados para que se tornassem um problema mais atrativo, sem perdas para a história original

Espartanos versus persas, repensando a batalha dos trezentos
 Oficina de Matemática experimental
 Nome: _____ Serie: _____
 Data: __/__/__

Planilha de Recompensas Relativas 0,0,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,4,4,6

Batalha dos Trezentos	Espartanos Comandante Leonidas			
	Combinação de escolhas	Atacar diretamente	Não defender o estreito	Defender o estreito
Persas Imperador Xerxes	Dar a volta no estreito			
	Atacar no estreito			
	Não atacar esperta			

Figura A.2: Matriz de ganhos já disposta em forma estratégica para que os alunos preencham com os devidos valores. Os valores estão colocados no topo da matriz de ganhos para que sejam alocados nas células do modo como o aluno achar mais conveniente. Como na história, essa folha tem duas matrizes de ganhos que devem ser distribuídas para dois alunos.

A.2 Lista de equipamentos e materiais

1. Uma folha com a história contada sobre a batalha entre persas e espartanos (veja a figura 1 (a)).
2. Uma folha com a tabela, por aluno, para serem alocados os ganhos relativos (veja a

figura 2 (a)).

3. Lápis e borracha para que os alunos preencham a tabela com os ganhos relativos referentes a cada combinação na matriz.

Aplicação de Teoria dos Jogos baseado na batalha dos Trezentos entre Persa e Esparta, Imperador Xerxes e Leonidas.

Na Grécia antiga uma história chama muita a atenção até os dias de hoje, é a história dos trezentos. Na história o imperador persa Xerxes ataca uma comunidade espartana situada nas proximidades do mar e de um vale rochoso que servia de proteção natural contra invasores. Só existiam duas possibilidades de chegar a comunidade espartana: uma delas era passar por um pequeno estreito entre as cadeias rochosas que cercavam a comunidade, fazendo com que a chegada a comunidade fosse rápida; a outra possibilidade era contornar a extensa cadeia rochosa, possibilidade que requereriam alguns dias.

Em um certo dia o imperador persa se vê diante de algumas possibilidades a respeito dessa comunidade Espartana e decide tomar uma decisão, e o pequeno contingente militar Espartano que ali estava decide qual a melhor decisão a tomar frente a possibilidade eminente de um ataque Persa.

Os Persas têm de princípio 3 possibilidades: Dar a volta na cadeia rochosa e atacar em campo aberto (caminho mais longo por fazerem uma viagem que leva dias); atacar os espartanos pelo estreito (caminho mais curto); ou simplesmente não atacar (Xerxes perde moral com o seu povo e mostra fraqueza frente a todos os outros impérios).

Os Espartanos têm de princípio 3 possibilidades: realizar um ataque preventivo contra os Persas; não defender o estreito e ficar na comunidade esperando o ataque em campo aberto; defender o estreito com todo aquele pequeno contingente.

A.3 Atividades

1. Introdução a Teoria dos Jogos (primeiro encontro)
 - (a) Assistir com os alunos a quatro cenas de filmes da franquia Velozes e Furiosos em que acontecem embates entre carros.
 - (b) Pedir para que os alunos analisem as cenas do filme e ajudem a construir todos os cenários possíveis para aquela situação.
 - (c) Mostrar para o aluno o que é uma matriz de ganhos e como informações podem ser dispostas na matriz.
 - (d) Pedir para que os alunos atribuam valores na forma de pares ordenados, ressaltando a necessidade de que eles relacionem o valores escolhidos as decisões tomadas em cada cenário.
 - (e) Discutir a coerência entre as informações analisadas e a disposição dos dados na forma de uma matriz de ganhos.
 - (f) Classificar o jogo analisado dentro da Teoria dos Jogos.

2. Análise do filme “Trezentos” (segundo encontro)
 - (a) Assistir com os alunos ao filme ”Trezentos”, pedindo que observem com mais cuidado os elementos que mais influenciaram no desfecho da batalha.
 - (b) Registrar os elementos observados no filme.
3. Debate de ideias sobre outros possíveis desfechos para a batalha (terceiro encontro)
 - (a) Discutir com os alunos a possibilidade de diferentes ataques por parte dos persas.
 - (b) Discutir com os alunos a possibilidade de outras atitudes por parte dos espartanos frente ao iminente ataque persa.
 - (c) Dar aos alunos três posições que poderiam ser tomadas pelos persas e três pelos espartanos.
 - (d) Construir com os alunos todos os cenários possíveis caso as posições levantadas no subitem (c) fossem tomadas.
 - (e) Discutir em grupos de 4 sobre cada cenário construído e os possíveis acontecimentos em cada cenário.
 - (f) Construir um relatório com todos os alunos sobre os possíveis acontecimentos em cada cenário construído.
4. Construção da matriz de ganhos e resolução do problema (quarto encontro)
 - (a) Entregar a cada aluno participante da oficina a folha de ofício com a matriz a ser preenchida e as fichas para o preenchimento da matriz.
 - (b) Narrar a história sobre a batalha dos trezentos (resumo).
 - (c) Entregar para cada aluno um relatório sobre a análise de cada cenário construído no terceiro encontro.
 - (d) Pedir para atribuir valores presentes nas fichas para cada combinação de estratégias apresentadas na matriz a ser preenchida.
 - (e) Verificar se todos os alunos entenderam as relações entre os valores numéricos a serem alocados e as combinações presentes na matriz de ganhos.
 - (f) Incentivar os alunos que preencherem mais rapidamente a matriz de ganhos a preparem justificativas lógicas dentro da história para a construção que por ele está sendo proposta.
 - (g) Pedir que tentem montar a mesma matriz em grupo de quatro pessoas de modo que todas elas possam opinar na construção da matriz de ganhos.
 - (h) Mostrar a eles uma possível solução (figura 1 (a)) e discutir as proximidades com as soluções por eles propostas.
 - (i) Propor que todos eles encontrem a melhor combinação possível, a que maximize os ganhos tanto dos persas quanto dos espartanos.

5. Discussão. Comparar as propostas para a construção da matriz ganho.
 - (a) Verificar quais informações os alunos mais levaram em consideração para a construção da matriz ganho.
 - (b) Ouvir e discutir todas as justificativas apresentadas pelos alunos (realizar um debate)
 - (c) Verificar se a construção da matriz de forma individual ficou diferente da construção de forma grupal (discutir os porquês desse acontecimento).
 - (d) Verificar todas as opiniões sobre a melhor combinação de resultados possíveis entre a batalha dos persas e espartanos.
6. Discussão das relações matemáticas na resolução do problema.
 - (a) Discutir com os alunos as possibilidades da aplicação dos elementos por eles analisados na resolução de outros problemas da vida cotidiana.
 - (b) Registrar todas as situações citadas pelos alunos, sempre incitando a construção de novas ideias.
7. Criando problemas
 - (a) Pedir para que cada aluno crie, com base em uma situação prática, um jogo em que se possa aplicar a Teoria dos Jogos na possível solução.
 - (b) Aferir se os alunos de fato entenderam os elementos básicos sobre Teoria dos Jogos e sua importância na tomada de decisões.

A.4 Recomendações

1. Ao perceber que algum aluno apresenta dificuldades para entender a atividade ou resolver o problema proposto, não explique.
 - (a) Se a dificuldade for apresentada por muitos alunos, socialize com a turma o problema enfrentado.
 - (b) Se o problema for apresentado com um aluno, peça que o mesmo socialize sua dificuldade com outros colegas próximos.
 - (c) Recomendar e incentivar que o aluno seja autônomo na sua resolução da atividade proposta.
2. Respeite o tempo de cada aluno
 - (a) Propor outra atividade sempre que um determinado grupo de alunos já tiverem desenvolvido a atividade anteriormente proposta.
 - (b) Incentivar os alunos que já desenvolveram todas as suas atividades a ajudarem os colegas que ainda não terminaram, recomendando que deem as respostas a esses alunos.

3. Cartas na manga

(a) Tenha sempre problemas a mais do que aqueles que foram propostos para a oficina, objetivando não permitir que o aluno fique ocioso e atrapalhe os demais colegas e até mesmo para que ele se envolva em mais atividades.

Apêndice B

Fotos



Figura B.1:



Figura B.2:



Figura B.3:



Figura B.4:

Apêndice C

Atividade extra: sugestão de um jogo

Jogo da disputa pelo mercado interno de motos de baixas cilindradas

Segundo dados, a Honda é a maior vendedora de motos aqui no Brasil e mais recentemente a empresa Dafra passou a produzir motos em território nacional e disputar mercado com as empresas já instaladas há mais tempo. À par de alguns conhecimentos básicos sobre os produtos oferecidos por essas duas empresas, suponhamos a seguinte situação hipotética de interação de mercado gerado pela produção ou não de um novo produto.

A empresa Dafra possui as seguintes opções: lançar modelo próprio disputando mercado com a empresa dominante, Honda; importar da matriz, trazendo um produto já conhecido para o mercado interno; não competir, atuando no Brasil apenas no mercado de produção de peças para motocicletas.

A Honda, por sua vez, tem as seguintes opções em resposta à possível entrada da empresa no mercado: lançar uma nova versão da moto que concorrerá com o modelo lançado pela Dafra; manter o preço do modelo que disputará mercado com o lançamento da Dafra; reduzir o preço do modelo que disputará mercado com o modelo lançado pela Dafra.

Dafra / Honda	Lança nova versão	Mantém o preço	Reduz o preço
Lança modelo próprio	1, 4	4, 1	1, 3
Importa da matriz estrangeira	2, 2	2, 1	2, 3
Não compete com a empresa y	1, 1	0, 6	1, 0

Figura C.1: Matriz de ganhos já preenchida com possíveis valores representativos. Para elevar o grau de dificuldade, pode-se entregar as matrizes não preenchidas, para que os alunos internalizem o problema proposto e depois respondam às perguntas solicitadas

1. Dentre todas as combinações possíveis entre as decisões que podem ser tomadas pelas empresas Dafra e Honda, encontre a situação que produziria o maior ganho esperado para cada uma das duas empresas, sem levar em consideração a decisão da concorrente.

2. Munido da escolha feita na questão anterior, o que aconteceria se a empresa, na qual você escolheu a situação que gerava maior ganho esperado, tivesse tomado qualquer uma das duas outras opções?
3. Encontre a melhor solução possível para as duas empresas, levando em consideração que a decisão de uma delas afeta diretamente a outra, ou seja, encontre a solução que resolve o problema para as duas empresas simultaneamente.

Referências Bibliográficas

- ARAÚJO, Luciene Liger do Nascimento. **Oficinas de Matemática Experimental: Uma História de TV, Minimizando Custos.** Dissertação de mestrado do PROFMAT, UESC, 2017. 52 p.
- PEREIRA, Katiane. **Oficinas de Matemática Experimental: Entrando Numa Fria.** Dissertação de mestrado do PROFMAT, UESC, 2017. 61 p.
- MARINHO, Raul. **Prática na teoria: aplicação da teoria dos jogos e da evolução aos negócios.** - 2.ed. - São Paulo - SP: Saraiva, 2011.
- FIANE, Ronaldo. **Teoria dos Jogos: com aplicações em economia, administração e ciências sociais.** - 3.ed. - Rio de Janeiro - RJ: Elsevier, 2009.
- PEREIRA, Silvio Barros. **Introdução a teoria dos jogos e matemática no Ensino Médio.** Dissertação de mestrado profissional do programa de pós-graduação em Matemática, PUC-Rio, 2014. 68 p.
- KASPER, Frederico Augusto de Almeida. **Teoria dos Jogos: Uma Proposta Para o Ensino Médio.** Ensino da Matemática em Debate (ISSN 2358-4122), 2016. Disponível em: < <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/31640> >.
- PIMENTEL, Elson L. A. **Dilema do prisioneiro: da teoria dos jogos à ética.** Belo Horizonte - MG: Argvmentvm, 2007.
- PAVIANE, Neires M. S. Fontana, Niura M. **Oficinas pedagógicas: relato de experiência.** Caxias do Sul - RG: Conjectura, v. 14, n. 2, p. 77-88, maio/ago. 2009
- POLYA, G. 1887. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Rio de Janeiro - RJ: Interciência, 1995.
- FIGUEIRÊDO, Maria do Amparo Caetano de. *et al.* **Metodologia de Oficina Pedagógica: Uma Experiência de Extensão Com Crianças e Adolescentes.** João Pessoa - PB: UFPB, 2006. 12 p.