UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

WATILA PORTO SILVA

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÃO DO 3º GRAU COM UTILIZAÇÃO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ilhéus-Bahia
2018

WATILA PORTO SILVA

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÃO DO 3º GRAU COM UTILIZAÇÃO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação submetida ao Colegiado do PROFMAT da Universidade Estadual de Santa Cruz.

Orientador: Prof. Dr. Vinicius A.T. Arakawa

Ilhéus-Bahia
2018

S586 Silva, Watila Porto.
Proposta de seqûencia didática para o ensino de educação do 3º grau com utilização da resolução de problemas / Watila Porto Silva. – Ilhéus : UESC, 2018.
55f.
Orientadora : Vinícius A. T. Arakawa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática.

Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Álgebra – Estudo e emsino. 3. Sequências (matemática). 4. Resolução de problemas (matemática). I. Arakawa, Vinicius A. T.. II. Título.

CDD – 510.7

WATILA PORTO SILVA

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÃO DO 3º GRAU COM UTILIZAÇÃO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 4 de outubro de 2018

Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa

Orientador – UESC

Profª. Ma. Natália Rocha Pinheiro

UESC

Prof. Me. José Alves de Oliveira Neto

IFBA - Campus Eunápolis

Ilhéus, 2018.

Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar
François Viète

Agradecimentos

À minha esposa Cléssia Carvalho Santana, por ser tão importante na minha vida. Sempre ao meu lado, me pondo para cima e me fazendo acreditar que posso mais do que imagino. Devido a seu companheirismo, amizade, cumplicidade, paciência, compreensão, apoio, alegria e amor, este trabalho pôde ser concretizado. Obrigada por ter feito do meu sonho o nosso sonho!

Ao meu filho Tales Santana Porto, minha inspiração para nunca desistir.

Aos meus colegas de trabalho da Escola Municipal Anésia Guimarães, em Eunápolis, especialmente aos meus colegas da EJA e a minha diretora Edna Limbarino pela compreensão e apoio irrestrito a este meu momento acadêmico.

Aos meus Professores pelo simples fato de estarem dispostos a me ensinar.

Ao meu professor José Alves de Oliveira Neto pelos quase 20 anos de dedicação ao meu crescimento profissional e humano. Obrigado pelo estímulo na continuação de meus estudos, pelo tempo dispensado a me ajudar e pelo apoio na elaboração desse trabalho.

Ao meu orientador por acreditar no meu potencial e abraçar a ideia desenvolvida nessa dissertação. Pela paciência demonstrada no decorrer do trabalho. O senhor certamente passou a ser para mim uma referência profissional e pessoal pela pela lisura, responsabilidade e boa vontade para com o outro.

Ao meu Amigo Bruno Calazans com quem tive a satisfação de dividir moradia durante o mestrado e com quem pude contar em vários momentos de dúvidas. Obrigado

Finalmente aos meus colegas de sala, grandes companheiros dessa árdua jornada, Especialmente a Adenilson, Marivaldo e Robson pelos momentos de trocas de conhecimento que tanto me ajudaram na caminhada e Edmilson, Lucas e Tamiri pela companhia em nossas longas viagens que a tornaram muito mais agradáveis. Agradeço por todas as discussões, os encontros, os papos por aplicativos de mensagens, os almoços, as momentos de descontração, os puxões de orelha, as conquistas alcançadas juntos... a cada um de vocês, um grande obrigado! Vocês tornaram o meu caminho mais fácil de ser percorrido e suas conquistas passaram a ser minhas conquistas também.

Por fim, agradeço a UESC, ao PROFMAT e especialmente a CAPES por proporcionar os recursos financeiros tão necessários.

Resumo

No dia-a-dia do professor de Matemática do ensino Fundamental e do Médio, é comum o docente encontrar alunos que chegam ao final do 9º ano, último ano do ensino fundamental, com varias dúvidas sobre a resolução de equações de grau maior que dois. Dúvidas que não são sanadas com a conclusão do ensino médio e a consequente abordagem de equações polinomiais. Os cursos de matemática de nível superior, normalmente, não englobam em suas estruturas curriculares, disciplinas que abordem fórmulas resolventes de equações de grau superior a dois. Também, não é comum encontrar fontes acadêmicas que tratem exclusivamente tais questões.
Atento a este panorama este estudo surgiu da inquietação perante a curiosidade sobre as fórmulas resolutivas de 3º grau com o intuito de estender seu entendimento além da resolução dessas equações cúbicas pela fórmula resolvente de Cardano-Tartáglia. Para tanto, esse estudo apresenta uma proposta de ensino de equações algébricas do 3º grau, através de uma Sequência Didática, utilizando também a metodologia Resolução de Problemas

Palavras-chave: Equação polinomial, Equação de 3 grau, cúbica, radicais, Resolução de problemas e Sequência Didática.

Abstract

In the daily life of the Mathematics teacher of Elementary and Middle School, it is common to find children who reach the end of the 9th year, the last year of elementary school, with several times on a resolution of equations of degree greater than two. Doubts that are not healed with a high school conclusion and a consequent approach to polynomial equations. Higher level mathematics programs usually do not include in their curricular structures disciplines that address formulas for solving equations of a higher level than two. It is also not possible to find academic sources dealing with such issues.

This is a panorama that has had a growing interest in the 3rd degree resolution formulas in order to extend the process of solving the rules of equations for the resolution of Cardano-Tartáglia. Therefore, this study has a proposal of teaching algebraic equations of the third grade, through a Didactic Sequence, also using a methodology of Problem Solving.

Keywords: Polynomial Equation, 3º Degree Equation, Cubic, radicals, Problem Solving and Didactic Sequence.

Sumário

Introdução

No dia-a-dia do professor de Matemática do ensino Fundamental e do Médio, é comum o docente encontrar alunos que chegam ao final do 9º ano, último ano do ensino fundamental, com várias dúvidas sobre a resolução de equações de grau maior que dois, que muitas vezes permanecem nos estudantes concluintes do ensino médio, como é recorrente constatado por professores do ensino superior que recebem discentes na área de exatas com problemas nas disciplinas de Cálculo Diferencial, por exemplo.

É possível que, em particular, as equações do terceiro grau, sejam umas das que mais despertam interesse nos alunos, pois durante o nono ano do ensino fundamental, os alunos aprendem a resolver as equações do 2º grau através da famosa fórmula resolvente, conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara, além das equações biquadradas, um caso particular das equações do 4º grau, ficando assim uma lacuna sobre a resolução das equações de grau 3.

Além disso, a maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática não engloba em suas estruturas curriculares, disciplinas obrigatórias que abordem fórmulas resolventes de equações de grau superior a dois. Talvez isso também ocorra pela existência de diversos softwares capazes de solucionar equações, de altas complexidades, de diferentes graus e a dificuldade de se obter, manualmente as mesmas raízes, através de fórmulas resolventes.

Considerando então o exposto, nesse trabalho apresentamos o método de resolução de equações algébricas polinomiais de 3º grau por radicais, abordado a partir do seu desenvolvimento histórico. Além disso, apresentaremos uma proposta de ensino de equações algébricas do 3º grau, a luz dos pressupostos teóricos da Educação Matemática, mais especificamente das correntes teóricas Resolução de Problemas e Sequência Didáticas (SD), para equações de grau três cujas raízes possam ser determinadas sem o uso de calculadoras ou softwares e somente através de conhecimentos algébricos da Educação Básica.

Segundo Garbi (2007,p. 9), "os primeiros conhecimentos matemáticos foram sendo acumulados de forma indutiva (ou empírica)". Por concordarmos com isso é que no primeiro capítulo apresentamos os desenrolares históricos considerados relevantes para o desenvolvimento algébrico de resolução das primeiras equações até a empolgante história que envolve os protagonistas da fórmula resolvente da equação cúbica, baseados principalmente no autor anteriormente citado.

No capítulo seguinte mostramos com o necessário rigor matemático a álgebra que nos leva a fórmula resolutiva da equação de grau 3 e discutimos sobre as peculiaridades relacionadas a aplicação de tal fórmula e possíveis particularidades que dela decorrem.

No capítulo 3 trazemos pequenas considerações, haja visto a magnitude de trabalhos científicos já existentes, sobre o campo de pesquisa da Educação Matemática que de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006) tem como objeto de estudo as múltiplas relações e determinações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático. Dentro deste campo do conhecimento, existem várias linhas de pesquisa e optamos por destacar a Resolução de Problemas e a Sequência Didática como meio para o trabalho a ser desenvolvido.

Assim no quarto capítulo trazemos uma proposta de sequência didática, também a luz da resolução de problemas como meio de proporcionar a alunos da educação básica a oportunidade de aprenderem a resolver equações de grau 3. Desta forma, este trabalho busca servir como fonte de pesquisas iniciais para aqueles que se interessarem por este tema e também apontar um ponto de partida para introduzir este tópico no ensino da educação básica, condizente com as novas demandas educacionais vigentes na sociedade atual.

Capítulo 1

PRELIMINARES

A Cronologia (o estudo do tempo) é uma das invenções fundamentais da espécie humana! É claro que a história e o tempo são emendas criadas pelo homem, mas a subdivisão dos acontecimentos em períodos, com base num conjunto de conhecimentos que a civilização conseguiu registrar, é que permite ao homem controlar e organizar sua vida e suas atividades.

Tal estudo do tempo é feito em qualquer área do conhecimento humano e na matemática, não é diferente. Porém, antes de entrarmos nos desenvolvimentos históricos que sucederam o tema de estudo desse trabalho, acreditamos ser necessário uma breve contextualização histórica, política e matemática dos períodos que sucederam os fatos que serão relatados aqui.

A História da civilização é dividida em cinco períodos: a Pré-História, Idade Antiga, Idade Média, Idade Moderna e Idade Contemporânea. A Pré-História é o período que o homem aprendeu a utilizar todos os benefícios da natureza, a viver em comunidade, domesticar animais, cultivar as plantas, inventou ferramentas, descobriu o fogo. Portanto, apesar de sua importância ao desenvolvimento humano, não nos ateremos a este período.

1.1 O início da álgebra

A Idade Antiga, período da história que se desdobrou desde a invenção da escrita (4000 a.C. a 3500 a.C.) até a queda do Império Romano do Ocidente (476 d.C.) e houve o surgimento de várias civilizações como: os sumérios, egípcios, gregos, romanos, mesopotâmicos, entre muitos outros. Não a toa, esse foi um período muito importante da história, pois nessa época teve início a formação de Estados constituídos com certo grau de nacionalidade, territórios e organização mais complexas que outras.

Foi esse período que proveu, "dentre todos os antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, talvez os mais famosos, os chamados Papiro de Ahmes (ou Rhind)"(GARBI, 2007,p. 11), papiro informativo que apresenta dados sobre trigonometria, aritmética, equações, área e volume, e o Papiro de Moscou.

O de Ahmes é um longo papiro egípcio, datado por volta de 1700 a.C., onde um escriba de nome Ahmes, ensina as soluções de 85 problemas de aritmética e geometria. Este papiro foi encontrado pelo egiptólogo inglês Rhind no final do século 19 e hoje está exposto no Museu Britânico, em Londres.

O papiro de Ahmes notabilizou-se por ter sido seu autor o mais antigo matemático cujo nome a história registrou. Em ambos os papiros aparecem problemas que contêm tímida e disfarçadamente, equações de 1º grau Abaixo segue imagem do papiro de Ahmes na Figura 1.1.

Figura 1.1: Trecho do papiro de Ahmes.

Evidentemente, os egípcios não adotavam a simbologia algébrica moderna e nem sabiam resolver equações, mesmo as de 1º grau, pelos nossos métodos. Já os babilônios, na mesma época, já conseguiam trabalhar com equações do 2º grau e resolviam-nas pelo "completamento do quadrado". Ambas civilizações, egípcia e babilônica, encontraram resultados corretos, mas com soluções que apenas apresentavam sequência do tipo "faça isto", "faça aquilo", "este é o resultado", sem qualquer justificativa lógica sobre o caminho seguido (Garbi 2007, p. 12-13).

Os gregos, contemporâneos dos babilônicos, aperfeiçoaram esse conhecimento, resolução de equações do 2º grau por "completamento do quadrado", demonstrando tais regras e conseguindo, pela utilização de processos geométricos, obter raízes irracionais (representadas por certos segmentos de retas).

Mais tarde, novamente no Egito, por volta de 300 a.C. surgiu na chamada Universidade de Alexandria um gênio que atribuiu a si mesmo a tarefa de reunir e organizar todo conhecimento matemático que conhecera e teve acesso até então. "Este homem foi Euclides, autor dos Elementos, considerados por muitos o mais influente livro texto de matemática de todos os tempos"(GARBI, 2007, p. 18).

Euclides demonstrou alguns teoremas muito importantes sobre a Teoria dos Números e introduziu conceitos que se tornaram fundamentais na solução de equações, demonstrando então um método geral de resoluções das equações do 1º grau, com base em verdades evidentes por si mesmas, válidas tanto para a Geometria como para a Aritmética.

Foi ele também o primeiro a abordar sistematicamente as equações do 2º grau e suas soluções. Em "Os Elementos", Euclides nos dá soluções geométricas da equação do segundo grau, mas os métodos geométricos ali encontrados, embora interessantes, não são práticos.

1.2 Desvendando a equação do 2º grau

Nos séculos IV a.C. a II a.C., o centro da atividade matemática permaneceu em Alexandria, mas o maior matemático desse tempo não nasceu lá. Natural da cidade de Siracusa, localizada na ilha da Sicília, "Arquimedes nasceu aproximadamente no ano 287 a.C. e poderia ter estudado por algum tempo em Alexandria com os alunos de Euclides e manteve comunicação com os matemáticos de lá"(BOYER, 1996, p. 83), mas morreu durante a Segunda Guerra Púnica em Siracusa em 212 a.C.

Os trabalhos de Arquimedes são dotados de exímio talento, originalidade e relevância em quantidade e qualidade para o desenvolvimento da matemática a época. Dentre suas produções destacamos os tratado sobre sobre geometria espacial que tratam sobre a Esfera e o Cilindro, trabalho do qual ele mais se orgulhava. Neles, um dos problemas tratava de seccionar uma esfera com um plano de maneira a obter dois segmentos esféricos cujos volumes estejam numa razão dada. Tal problema resulta em uma equação cúbica, que foi analisada profundamente por Arquimedes.

A cúbica estudada por Arquimedes tem grande relevância para o nosso trabalho por esta ser uma das primeiras equações cúbicas registradas na história da matemática. Após esta equação do 3º grau ter capitado a atenção de Arquimedes, logo depois as equações cúbicas não despertaram o interesse dos matemáticos que o sucederam. As mesmas então foram esquecidas até que os árabes se interessassem por sua resolução.

Nos séculos seguintes a vida de Arquimedes, o poderoso império Romano foi assolado por uma série de problemas internos e externos que acabaram trazendo como resultado a divisão do mesmo no ano 395, marcando assim o início da Europa na chamada Idade Média.

A Idade Média, período que teve início em 476 e foi até 1453, quando Constantinopla é tomada pelos turcos otomanos, geralmente se refere a História da Europa, em particular à parte Ocidental. Nela o foco foi a religião, pois o cristianismo tomou conta do mundo com suas crenças. Os europeus viveram em sua maioria no campo, restritos a propriedades que buscavam sua autossuficiência. A sociedade era rigidamente hierarquizada e marcada pela fé em Deus e pelo controle da Igreja católica. O poder político era descentralizado, isto é, estava nas mãos de inúmeros senhores da terra. Por esses motivos é que esse período é conhecido como Idade das Trevas.

Mas não se pode generalizar os aspectos históricos de uma região para o restante do planeta, pois cada lugar tem suas especificidades, sua história. Essa foi de fato a "Idade das trevas" da ciência, mas não devemos cometer o erro de supor que isso fosse verdade para a Idade Média como um todo, pois "cinco grandes civilizações, escrevendo em cinco línguas diferentes, fornecem a maior parte da ciência e da matemática medieval"(BOYER, 1996, p. 168).

Além disso, nessa época o mundo não estava interligado como hoje, os contatos entre os povos e as regiões eram muito precários e, em alguns casos, inexistentes. Paralelo a todos os acontecimentos do mundo ocidental, o Império Romano do oriente resistiu por séculos dando aí início a uma nova página na história das Ciências, especialmente sua "Rainha", a matemática, guiada pelo mundo muçulmano.

Foi nessa época que em Bagdad, hoje capital do Iraque, às margens do rio Tigre, os califas[1] tentaram fazer dela uma nova Alexandria. Assim Os Elementos foram traduzidos para o árabe, fato que permitiu que a Europa mais tarde pudesse reencontrar os ensinamentos perdidos de Euclides, permitindo também que tais ensinamentos fossem ensinados numa escola científica, criada ali, "cuja biblioteca foi a melhor do mundo desde que a que existira em Alexandria"(GARBI, 2007, p. 23) e assim foram salvas importantes obras de gênios da Antiguidade Clássica.

Tal instituição conhecida como a Casa da Sabedoria, recebeu muitos dos melhores cientistas do mundo e entre eles o famoso astrônomo e matemático Abu-Abdullah Muhamed ibn-Musa Al-Khwarizmi. Al-Khwarizmi escreveu uma obra popular sobre a ciência das equações, chamada **Al-Kitab Al-jabr wa'l Muqabalah**, que pode ser traduzida como ***"O Livro da Restauração e Balanceamento"***.

A escrita Al-Khwarizmi era didática, permitindo aos seus leitores fácil compreensão, provável motivo que levou as escolas da época a instruir seus alunos a partir de seus ensinamentos,

[1]Califa era o título que se atribuía ao chefe supremo do islamismo, durante o período de expansão do Império Árabe. O califa era considerado o sucessor de Maomé e possuía vários poderes relacionados à justiça, economia, ações militares e ações religiosas.

de forma que em algumas décadas suas ideias já eram usadas pelo povo, especialmente os comerciantes. Como os comerciantes muçulmanos e cristãos realizavam intenso comércio numa grande fronteira entre esses mundos, os europeus acabaram tendo acesso aos ensinamentos de Al-Khwarizmi.

Concomitantemente, por volta de 450 d.C. até perto do fim do século XV a Índia outra vez se viu às voltas com numerosas invasões estrangeiras. O grau de influência da matemática grega, da babilônica e da chinesa sobre a matemática hindu e vice-versa ainda é uma questão não esclarecida, mas há evidências de que em ambos os sentidos ela foi apreciável (EVES, 2004, p. 249, 250). O que a história nos permite afirmar, entretanto, é que durante esse período a Índia foi o lugar onde viveram célebres matemáticos e astrônomos, mas nenhum teve tanta notoriedade quanto Bhaskara, que foi um dos mais importantes matemáticos do século XII, graças aos seus avanços em álgebra, no estudo de equações.

Foi ele quem difundiu a fórmula geral da solução das equações do segundo grau. Essa fórmula é extremamente popular necessita de alguns comentários: *o seu encontro fundamentou-se na ideia de buscar uma forma de reduzir o grau da equação do 2º para o 1º, através da extração de raízes quadradas"* (GARBI, 2007, p. 25), mesma ideia que seria usada séculos depois para a resolução da equação do 3º grau.

Além disso, decorrem dela duas constatações muito importantes:

- equações polinomiais de grau acima de 1 poderiam ter mais do que uma solução;
- em alguns casos a aplicação da fórmula conduzia a uma coisa misteriosa: a raiz quadrada de um número negativo;

(Garbi 2007, p. 27)

Solucionadas as equações do 2º grau, estava aberto o caminho para que os matemáticos pudessem focar sua curiosidade e esforço em formas para resolver a equação do 3º grau. Após essa vitória para a "rainha das ciências", os árabes foram os primeiros a se debruçarem sobre este novo problema, com destaque para Omar Khayyam (1044 - 1123) e embora este não tenha encontrado a solução, em alguns casos obteve certo êxito, tendo inclusive encontrado formas geométricas aproximadas de encontrá-las.

Apesar das tentativas, nenhuma forma algébrica geral foi encontrada e as equações do terceiro grau permaneceram desafiando os matemáticos por mais alguns séculos até que a luz do renascimento começasse a iluminar o horizonte da Europa emendando um novo período da história humana, a Idade Moderna.

No final do primeiro milênio, 0 francês Gerbert D'Aurillac (950 - 1003), teve a oportunidade de estudar na Espanha Muçulmana, passando a conhecer a Astronomia e a Matemática dos Árabes. Retornando a Europa, ocupou uma série de cargos da Igreja Católica até chegar ao cargo de Papa. Através de sua posição, tentou substituir os algarismos romanos pelos indo-arábicos, porém sem êxito. Entretanto sua iniciativa despertou a atenção dos demais matemáticos para a matemática praticada pelos muçulmanos.

Durante a Idade Média, segundo Boyer (1996, p. 168), "os que se destacavam em matemática escreviam em árabe e viviam na Ásia Islâmica, ao passo que durante a nova era que surgia os principais matemáticos escreviam em latim e viviam na Europa Cristã". Logo se faz necessário entender como a Europa teve contato com o que se sabia de matemática, uma vez que a mesma não estava preparada para o desenvolvimento da matemática antes do século XII.

Pelo começo do século XII, a situação começou a mudar ao passo que os europeus latinos começaram a superar a barreira que existia, muito por conta da língua, com a cultura árabe. O ressurgimento europeu começou inevitavelmente com uma série de traduções. Foi neste século que um notável erudito inglês conhecido por Adelard de Bath (1075 - 1160), após viagem por vários países islâmicos, levou para a Inglaterra uma cópia dos Elementos de Euclides em Árabe, o qual traduziu para o Latim, colocando assim a Inglaterra em contato com a matemática grega.

Na Espanha, especialmente na cidade de Toledo, surgiu uma verdadeira escola de tradução, encorajada pelo arcebispo. Lá as bibliotecas possuíam uma grande quantidade de manuscritos mulçumanos e como grande parte da população falava o árabe, por conta do intenso comércio ali realizado, o fluxo da informação interlíngua foi facilitado. Não à toa o século XII tornou-se na história da matemática um século de tradução.

Daí os séculos seguintes, 12 e 13, se tornaram um período de marcantes acontecimentos na Europa. As cruzadas haviam mobilizado milhões de pessoas em praticamente todos os países, os conquistadores bárbaros foram finalmente absorvidos pelo que restou da cultura greco-romana, o comércio liderado por Veneza e outras cidades italianas floresceu. Nesse período, marcado pela construção das grandes catedrais, Marco Polo chegou ao Extremo Oriente e surgiam as primeiras universidades: a de Bolonha em 1088, a de Paris em 1200, a de Oxford em 1214, a de Pádua em 1222, a de Nápoles em 1224, a de Cambridge em 1231.

Foi neste período de efervescência cultural que viveu o matemático Leonardo de Pisa (1175-1250), maior matemático europeu da idade média, mais conhecido como Fibonacci, responsável pela introdução vitoriosa dos algarismos hindu-arábicos na Europa. Mas a contribuição de Leonardo de Pisa para a álgebra vai além da substituição dos inconvenientes algarismos romanos pelo novo sistema.

Continuando a obra de Diofanto de Alexandria e gozando de grande reputação, Leonardo trouxe grandes avanços ao simbolismo do desenvolvimento algébrico. Os talentos de Fibonacci chamaram a atenção do imperador Frederico II, de quem recebeu um convite para participar de um torneio matemático. Nesta competição o conselheiro do imperador, João de Palermo, propôs encontrar pelos métodos euclidianos uma solução da equação cúbica

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0. \tag{1.1}$$

Fibonacci tentou provar que a equação não poderia ser resolvida com régua e compasso, mas obteve uma resposta aproximada que, expressa em notação decimal, é 1,3688081075 e que é correta até a nona casa decimal, o que causa alguma perplexidade.

Mais uma vez, as equações do terceiro grau, que desde o período áureo da Grécia antiga já desafiava matemáticos que tentaram, em vão, deduzir um método geral de solução da equação cúbica e que Arquimedes, ao produzir uma das primeiras equações do 3º grau da história já havia tentado solucionar, passava a provocar novamente os matemáticos.

A obra de Leonardo foi muito importante ao inspirar inúmeros seguidores, principalmente na Itália. Lá inclusive, foi onde nasceu e viveu o próximo matemático a obter grande destaque, Luca Paciolo (1445 - 1514), considerado o pai da contabilidade moderna e também conhecido como Paccioli. Seguindo o caminho de Fibonacci, Pacioli trouxe mais avanços ao simbolismo do desenvolvimento algébrico. Porém cometeu um grave erro, Pacioli afirmava que não podia haver regra geral para a solução de problemas do tipo "cubo e coisas igual a número", ou seja, para equações do tipo:

$$x^3 + px = q. \tag{1.2}$$

Afirmação que foi comprovada falsa pouco tempo depois, na própria Itália, por dois grandes matemáticos que marcaram seus nomes na história pela enorme rivalidade em torno das equações cúbicas, sendo eles: Tartaglia e Cardano.

Chegando a Idade Moderna, período compreendido entre os séculos XV e XVIII, no qual os europeus desse tempo se autodenominaram modernos. Nesse período, ser moderno, segundo os intelectuais dos séculos XV e XVI, era estar em sintonia com os avanços das ciências e das novas mentalidades. Essa época foi marcada pelo renascimento e expansões marítimas. Com os estudos dessa época foi possível um avanço tecnológico que ocasionou várias descobertas que culminaram ao final desse período com a Revolução Francesa.

É nesse contexto que os protagonistas da história na qual se baseia esse trabalho viveram e trouxeram luz às equações cúbicas que desafiaram os matemáticos por milhares de anos. Julgamos ser importante informar que foi no início da idade moderna, que foi inventada na Alemanha a imprensa, técnica que tornou possível a rápida multiplicação e divulgação de livros, o que certamente contribuiu para o grande avanço das ciências, especialmente da álgebra.

1.3 Desenrolares sobre a solução algébrica da equação cúbica

Os parágrafos anteriores já indicaram como a Europa se encontrava no século XV, pois por volta da metade desse século é que se teve início o fenômeno sócio-cultural conhecido como Renascença. Caracterizado por uma renovação do interesse pelas coisas do espírito em seus mais altos níveis, por uma efervescência criativa, uma "explosão" cultural e nas ciências.

O epicentro dessa "erupção" intelectual foi na Itália onde surgiram gênios de grade porte, alguns dos quais falaremos mais adiante. Nesse período havia uma visão artística a respeito da álgebra, tanto que a mesma era chamada como **"a arte da coisa"** ou **"arte maior"**. O próprio Paccioli ensinou em seus trabalhos a regra para resolver a equação quadrática sob a forma de versos.

Quisera o destino que tal espírito de criatividade viesse combinar com a pitoresca história da resolução da equação de terceiro grau, plena de lances dramáticos, paixões e disputas pela fama e a fortuna que seu achado poderia trazer a seus autores, algo digno de uma novela. Resumidamente, seguem os fatos, como parecem ter acontecido.

Coube a alguém cujo nome mal é lembrado hoje - Scipione Del Ferro (1465-1526), professor de matemática em Bolonha, uma das mais antigas universidades medievais e uma escola com forte tradição matemática, a glória de resolver esse problema de mais de mil anos.

Por volta de 1515, Del Ferro resolveu algebricamente a equação cúbica do tipo da Equação (1.2), baseando seu trabalho provavelmente em fontes árabes. Ferro nunca publicou sua descoberta, na realidade, jamais publicou nenhuma obra, mas revelou o segredo a dois discípulos: Annibale Dela Nave, que mais tarde veio a se tornar seu genro e sucessor na cadeira de Bolonha, e Antônio Maria Fiore, um medíocre matemático de acordo com Boyer (1996, p. 194), a quem Ferro deu a regra, mas não a prova.

Mais tarde Antônio Maria Fiore, também chamado de Fior, tentou ganhar notoriedade valendo-se da descoberta do mestre. Para isso, desafiou Nicolo Fontana (1499-1557), mais conhecido como Tartaglia (o gago) para uma disputa pública. Nesta época, estes duelos intelectuais eram frequentes, cercados de rituais, presididos por alguma autoridade e muitas vezes assistido por numerosa audiência (Garbi, 1997). O desempenho dos duelantes, chegavam a determinar o destino de professores universitários na cátreda[2].

Nicoló Tartaglia nasceu em Brescia, Itália. Era muito pobre quando criança. Aos onze anos viu sua cidade ser invadida por tropas francesas, nessa oportunidade sofreu graves ferimentos

[2]Cátedra é hoje principalmente vista como uma posição contratual, de natureza permanente, destinada ao ensino e investigação numa determinada disciplina científica numa universidade e à coordenação desse ensino e investigação. Mas a origem do conceito está na cátedra enquanto peça de mobiliário. Esta é uma cadeira colocada num plano elevado, na qual o professor universitário medieval lecionava ou outra pessoa de alto cargo, nomeadamente um bispo, que tem a autoridade plena em determinado local fixo (catedral) para expor uma questão determinante de qual temos como máximo exemplo o papa católico ao exercer a sua ex cathedra.

na face. Deste incidente Tartaglia levou para o resto da vida uma profunda cicatriz na boca, o que lhe trouxe permanente defeito na fala.

Tartaglia desde cedo demonstrou grande interesse pelos estudos, porém sua mãe o retirou da escola por impossibilidade de pagá-la. Assim passou a estudar sozinho nos raros livros que encontrara e sem dinheiro para comprar papel, pena e tinta, escrevia nas lápides dos túmulos de um cemitério com carvão. Mesmo diante de tais dificuldades, conseguiu construir sua cultura, passando a se sustentar dela como professor de ciência em Veneza.

A infeliz ideia de Fior em eleger Tartaglia como seu oponente se deu por este já ter derrotado outros desafiantes, o que o tornou bastante conhecido por seu talento. O desafio consistia na solução de diversos problemas que um deveria propor ao outro e faltando poucos dias para a disputa, Tartaglia descobriu que Fior estava armado por um método descoberto por seu falecido mestre que lhe permitia resolver equações do 3º grau.

Sentindo-se ameaçado, conforme mais tarde relatou o próprio Tartaglia, ***"mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535"***, (Garbi, 1997, p.37). O mesmo dedicou todo o seu empenho e obteve grande êxito, pois além de resolver as equações do tipo da Equação (1.2), resolveu também a equação cúbica do tipo

$$x^3 + px^2 = q. \tag{1.3}$$

que Fior desconhecia.

Assim no dia do duelo, Tartaglia sabia resolver dois tipos de cúbicas, enquanto Fior somente uma, Tartaglia então triunfou plenamente resolvendo os 30 problemas propostos por Fior, todos envolvendo, de um modo ou de outro, questões que dependessem daquele tipo de equação de 3º grau a qual Scipione Del Ferro lhe ensinara. Fior, ao contrário, não conseguiu resolver nenhum dos problemas que lhe foram propostos, pois os mesmos dependiam da resolução da equação cúbica, que somente Tartaglia conhecia. Desta forma, além da humilhação que passara, Fior tinha a obrigação de pagar o prêmio estipulado ao vencedor, que era 30 banquetes, prêmio este que Tartaglia recusou magnanimamente.

Com os conhecimentos algébricos que possuímos hoje talvez não entendamos a priori fracasso de Fior, entretanto tal explicação se dá pois hoje é possível pensar em equações quadráticas e cúbicas sendo todas essencialmente do mesmo tipo e podendo todas serem resolvidas por um mesmo método (que veremos mais adiante). "Na época, porém coeficientes negativos praticamente não eram utilizados, assim havia tantos tipos de equações cúbicas quantas são as de possibilidades de coeficientes positivos e negativos"(BOYER, 1996, p. 194).

A notícia do triunfo de Tartaglia chegou ao conhecimento de Girolano Cardano, um gênio que ensinava matemática e praticava medicina, residindo em Milão. Cardano teve notícias sobre a natureza dos problemas resolvidos por Tartaglia, o que logo lhe despertou interesse, uma vez que o mesmo ainda acreditava no que Paccioli havia afirmado.

Girolano Cardano (1501-1576) nasceu em Pávia na Itália, filho ilegítimo de um jurista, era um "personagem rico em facetas contraditórias e talentos vários" (LIMA). Era médico, mas paralelamente dedicava-se a astrologia, filosofia e matemática. Ocupou cadeiras importantes nas universidades de Pávia e Bolonha e escreveu muitos livros, sobre vários assuntos, sempre guiado por uma curiosidade ilimitada. Através de suas obras, Cardano conseguiu melhorar vários assuntos tratados por Pacioli e no momento que recebeu as notícias sobre o desafio, pretendia publicar um livro de álgebra, ajudado por seu brilhante e fiel discípulo Ludovico Ferrari.

Cardano ficou muito curioso para saber se e como fora conseguido por Tartalgia aquilo que Pacioli julgara impossível e logo convidou o vencedor a vir a sua casa insinuando que trataria de arranjar um encontro entre ele e um possível patrono. Lá em 1539, Cardano persuadiu

Tartaglia a contar-lhe seu método secreto de solução das cúbicas, sob o juramento solene de segredo. A regra da resolução da cúbica então lhe foi ensinada sob a forma de versos, embora Tartaglia tenha guardado para si a demonstração da mesma.

Conhecendo um método de resolução, Cardano procurou e achou uma demonstração que o justificasse. De posse da solução, Cardano deve ter se sentido fortemente tentado a publicá-la. Em 1544 durante uma viagem teve acesso a um manuscrito de Del Ferro que continha a famosa regra de Tartaglia, manuscrito este que ainda se conserva. Aparentemente, ao saber que a fórmula de Tartaglia existia já desde trinta anos antes, Cardano se sentiu desobrigado de cumprir seu juramento e publicou, em 1545, em Nuremberg o livro Ars Magna, um grande tratado em latim sobre álgebra, e lá estava a solução de Tartaglia sobre a cúbica.

A reação de Tartaglia foi imediata, "publicou sua versão dos fatos e denunciou Cardano por haver traído um sagrado juramento"(GARBI,1997, p. 38). Os protestos veementes de Tartaglia foram rebatidos por Ludovico Ferrari, o mais brilhante dos discípulos de Cardano. Em defesa de seu mestre, Ferrari acusou Tartaglia de ter plagiado Scipione Del Ferro, iniciando assim uma polêmica que durou mais de um ano e produziu os 12 panfletos (seis de cada lado) conhecidos como "Cartelli di Sfida Mathematica"(sfida significa disputa).

Esses panfletos criaram um círculo de ódio, rivalidade e intriga, que culminaram com um desafio para um debate matemático em Milão em 1548. Tartaglia desafiou Cardano, mas este não compareceu, tendo enviado Ferrari para representá-lo. Após "longas trocas de insulto, cada parte retirou-se cantando vitória"(GARBI, 2007, p. 34). O resultado, porém, não ficou muito claro, mas parece que Ferrari saiu com certa vantagem na disputa, pois as autoridades em Brescia, para onde Tartaglia acabara de transferir-se, cortaram seu contrato. Tartaglia então desempregado regressou a Veneza, onde viveu humildemente e morreu nove anos mais tarde.

Como os protagonistas dessa novela, *"nem sempre colocaram a verdade em primeiro plano, encontra-se muitas variações quanto aos detalhes da trama"* (EVES, 2004, p.303). Mas quem se beneficiou com todo esse desenrolar foi a matemática, pois a resolução não só da cúbica, como também da quártica, tornaram-se de conhecimento comum pela publicação de *Ars Magna* de Cardano.

Tal publicação de Cardano, o qual vale salientar que também obteve grandes avanços a respeito dos temas ali tratados, trouxe "tão notável e imprevisto impacto sobre os algebristas que o ano de 1545 frequentemente é tomado como marco do início do período moderno da matemática"(BOYER, 1996, p. 193).

Segundo Garbi (2007, p. 33), vale salientar que como "as luzes do intelecto não brilham somente em homens de bom caráter", qualquer que seja a verdade nessa controversa, complicada e sórdida trama entre defensores de Cardano e Tartaglia, há a certeza de que nenhum dos dois foi o primeiro a fazer a descoberta, embora tenham contribuído enormemente para ela. Foi Scipione Del Ferro, o qual merece grande admiração, por ter sido o herói que fez maravilhosa descoberta na qual outros se apoiaram.

Antes de tratarmos as soluções das equações do 3º grau, chamamos a atenção para o fato que Tartaglia solucionara tipos especiais de equações, (1.1) e (1.2) e não a equação geral (1.4).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{1.4}$$

Se faz necessário, portanto, esclarecer que qualquer equação geral pode ser transformada, através de mudança de variáveis e álgebra noutra conveniente ao que se deseja, por exemplo a equação (1.4) em uma do tipo (1.2). Para tanto é necessário determinar valor de m apropriado fazendo $x = y + m$. Essa manipulação algébrica será detalhada no próximo capítulo.

Para ajudar a entender melhor as idas e vindas dessa controversa descoberta, segue abaixo um quadro resumo até a publicação de Ars Magna.

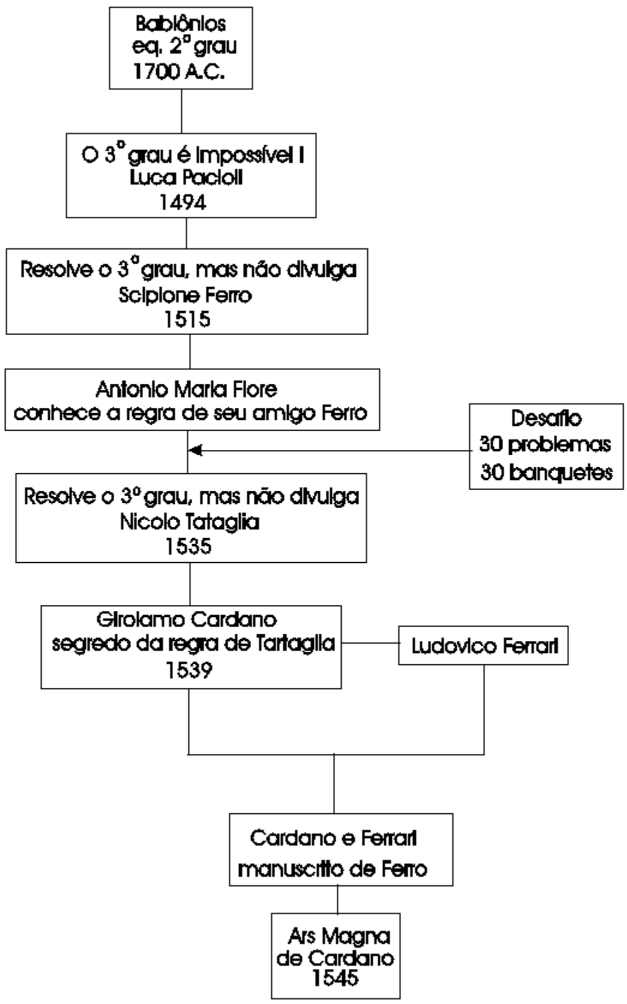

Figura 1.2: Quadro resumo.

Capítulo 2

DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO DA EQUAÇÃO DO 3º GRAU

Para entender o método de resolução da equação do terceiro grau exposto em Ars Magna, é necessário esclarecer primeiro que qualquer equação geral de terceiro grau pode ser reduzida facilmente em um daqueles casos especiais, sem perda de generalidade. A saber, a equação

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0, \tag{2.1}$$

pode ser simplificada, multiplicando-se ambos os membros por $\frac{1}{\alpha_1}$, pois $\alpha_1 \neq 0$, resultando a equação equivalente

$$x^3 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}x + \frac{\alpha_4}{\alpha_1} = 0.$$

Logo, basta considerarmos equações em que o coeficiente de x^3 seja 1, isto é,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{2.2}$$

Agora, sempre que fizermos a substituição $x = y - \frac{a}{3}$ temos,

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0,$$

que após os cálculos algébricos pode ser escrita da seguinte forma:

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0.$$

que é uma equação sem o termo quadrado em y. Portanto a equação do 3º grau em y poderá ser escrito da forma:

$$y^3 + py + q = 0. \tag{2.3}$$

Portanto, para achar a solução da Equação (2.1) podermos determinar primeiramente como resolver equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0. \tag{2.4}$$

Ou seja, quando Tartaglia encontrou a solução das equações do tipo (2.4) ele determinou a solução geral da equação cúbica.

Para resolver esta equação, a ideia de Tartaglia foi supor que a solução procurada era composta de duas parcelas. Assim escrevendo $x = u + v$ e substituindo na equação 2.3, obtemos

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0,$$

que implica em

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0. \tag{2.5}$$

Portanto, se conseguirmos determinar números u, v tais que:

$$u^3 + v^3 = -q \qquad e \qquad uv = -\frac{p}{3} \Rightarrow u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}, \tag{2.6}$$

tais números irão satisfazer a igualdade, sendo as raízes da Equação (2.5) e consequentemente raízes da Equação (2.4).

Contudo, por (2.6), u^3 e v^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto, isto é, são as raízes da seguinte equação

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{2.7}$$

De acordo com as Equações de (2.6), utilizando então, a fórmula de Bháskara para a Equação (2.7) temos:

$$\Delta = q^2 - 4.1.\left(\frac{p^3}{27}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

donde segue que

$$w = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$w = \frac{-q}{2} \pm \frac{1}{2}.\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

$$w = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}.\left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)}$$

$$w = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$w_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad e \qquad w_2 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

como da Equação (2.6), temos u^3 e v^3 como raízes da Equação (2.7), então sem perda de generalidade podemos escrever:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad e \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

obtendo a famosa “fórmula de Cardano”, que não foi descoberta por ele mas sim por Tartaglia:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{2.8}$$

Assim $x = u + v$, dada pela Equação (2.8) é uma raiz da Equação (2.4).

Abaixo, segue um exemplo retirado do livro de álgebra de Leonard Euler, escrito em 1770. Seja a equação:

$$x^3 - 6x - 9 = 0. \tag{2.9}$$

.

Observamos que aqui, $p = -6$ e $q = -9$, logo

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$$

isto é, $x = 3$ é raiz da equação.

Com o tempo se encontraram outras soluções da equação cúbica. Mas o método de Cardano-Tartaglia, acabou ganhando notoriedade pelo seu valor histórico.

Aparentemente, as equações cúbicas que trouxeram fracasso a tantos outros matemáticos que tentaram resolvê-las, estavam vencidas. Mas logo começaram a surgir dúvidas e questionamentos em torno das mesmas. Entre elas, uma surgiu naturalmente: se a fórmula de Bhaskara exibe claramente as duas raízes, por que o mesmo não acontece com as equações de 3º grau, mesmo quando as três soluções de dada equação cúbica são conhecidas? Onde estariam as outras? Obviamente, de posse de uma das raízes, podemos definir as outras duas raízes reescrevendo a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ como produto de duas outras e usando a fórmula de Bhaskara, mas a efeito de contextualização narraremos os fatos como acreditamos ter ocorrido.

Os matemáticos também se viram desafiados por problemas na aplicação do método de Tartaglia. Desafios que demandaram mais de 200 anos e esforço dos melhores cérebros desse período até que fossem definitivamente esclarecidas.

Para facilitar as explicações que seguirão daqui em diante, indicaremos a expressão que se encontra no radical quadrático da Equação (2.8) e que chamaremos a partir de agora de Δ (discriminante), dado por

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{2.10}$$

2.1 Desvendando os mistérios da fórmula resolutiva da cúbica

Quase trinta anos depois da publicação de *Ars Magna*, por Cardano, Bombelli notou que a Equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0, \tag{2.11}$$

tem uma solução real positiva, a saber $x = 4$. Notou também que as demais soluções dessa equação,$-2 \pm \sqrt{3}$, são também reais, sendo elas as raízes do polinômio do 2º grau

$$x^2 + 4x + 1$$

obtido como quociente da divisão do polinômio $x^3 - 15x - 4$ por $(x - 4)$.

No entanto, notou Bombelli, que a fórmula de Cardano não se aplica à cúbica em questão, pois nesse caso

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -121 < 0.$$

Um notável paradoxo surgiu então: a cúbica (2.11) tem suas três raízes reais e, no entanto, a fórmula de Cardano quando aplicada, produzia uma expressão numérica que carecia de sentido, a saber a raiz quadrada de um número negativo.

Por conta disso, os fatos indicavam que os números com que a matemática vinha trabalhando, havia séculos, não eram mais suficientes para o estudo da álgebra. Assim, Bombelli pôs-se a estudar essa nova espécie de números, mais tarde denominados números complexos, tornando-se o primeiro algebrista a formular regras elementares das operações dos números complexos em seu tratado *L'Algebra parte Magiore dell Arithmetica* (1572), ou seja, Bombelli "lançou as bases para o desenvolvimento de um gigantesco ramo da matemática, com infindáveis aplicações práticas, principalmente na Eletrônica: **A Teoria dos Números Complexos**" (GARBI, 1997, p. 52).

Paralela a era de Bombelli, nascia, na França, François Viète (1540-1603), matemático que viria a ajudar na evolução da simbologia algébrica e dos números complexos. Viète foi um advogado francês, membro do parlamento, com grande vocação matemática. Destacando-se como grande algebrista, obteve importantes resultados no campo das equações algébricas.

Através de um engenhoso artifício, Viète conseguiu encontrar outro caminho algébrico para a solução das equações do 3º grau, diferente daquele descoberto por Tartaglia. Entretanto tal solução de nada ajudou nas dúvidas que rodeavam as equações cúbicas e assim permaneciam sem respostas algumas questões sobre a quantidade de raízes e operações com números complexos.

Então, como profundo conhecedor que era de trigonometria, área da matemática elementar, e usando-a, encontrou uma solução trigonométrica para o problema levantado por Bombelli a respeito das raízes da Equação (2.11). Porém, por fugir do escopo deste trabalho, a mesma não será demonstrada aqui. Tal solução foi chamada, na época, de *"Casus irreducibilis"* e consiste em aplicar a fórmula de Cardano e extrair a raiz cúbica de um número complexo através da fórmula de Euler. Além disso, é importante salientar que a belíssima solução, além de não ser algébrica, não se aplicava a todas as equações.

A resolução total das equações de 3º grau ainda aguardou mais de um século, para ser desvendada. Somente no século XVIII é que as equações algébricas tiveram consolidada sua simbologia moderna através de Leonhard Euler (1707-1783).

Foi Euler que consagrou o que de melhor existira à época, mas, também, inventou muito do que hoje se utiliza. Depois que Bombelli, audaciosamente iniciou sua caminhada com raízes quadradas de números negativos, introduzindo as primeiras regras elementares das operações dos números complexos.

Segundo Garbi (1997, p. 104), *"muitos pesquisadores já haviam trabalhado na matéria quando Euler fez-lhe um ataque final, deixando pouca coisa a ser descoberta no futuro"*, e é exatamente por isso que Euler é visto como o matemático que dominou os números complexos.

Coube a Euler a façanha de determinar como extrair a raiz enésima de um número complexo e como consequência desta descoberta descobriu que ***"qualquer número complexo não nulo (os reais inclusive) tem exatamente n raízes enésimas (n inteiros)"***, (GARBI, 1997, p. 106). Ou seja, sabe-se que o número 9, por exemplo, tem duas raízes quadradas, mas, também possui três raízes cúbicas, quatro raízes quartas e assim sucessivamente.

Assim, além da consequência destacada anteriormente, Euler conseguiu, ao determinar as raízes enésimas de um número complexo, após 200 anos acabar com o enigma que encheu de curiosidades aqueles que tentaram aplicar a fórmula de Cardano-Tartaglia nos casos em que $\Delta < 0$. Tal resultado revolucionou a Teoria das equações algébricas.

Euler precedeu um período em que viveu aquele que, no campo da matemática, é considerado por muitos como o maior matemático de todos os tempos: Carl Friedrich Gauss (1777-1855), rivalizando com o notório Newton, no campo matemático.

Carl Friedrich Gauss, nasceu em Brunswick na Alemanha, era filho de um jardineiro muito simples que não via utilidade nos estudos. Apesar disso, sua genialidade foi logo percebida por sua mãe e seu tio e ambos não pouparam esforços para que o menino tivesse acesso aos estudos. Assim aos 21 anos, apresentou sua tese de doutorado em matemática, apresentando o alicerce mais importante da teoria das equações algébricas, o ***Teorema Fundamental da Álgebra***.

Este teorema afirma que toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz. Portanto, ao demonstrar que as equações têm pelo menos uma raiz no campo complexo, Gauss demonstrou também a suspeita de matemáticos anteriores de que ***uma equação polinomial de grau n possui exatamente n raízes, sendo n o grau do respectivo polinômio***.

De acordo com Garbi (1997, p. 114), "quando se estuda a obra matemática de Gaus tem-se a sensação de que em todos os campos onde atuou ele não apenas fez o melhor possível, mas, também, nada deixou para que outros no futuro viessem a superá-lo". Assim foi sua contribuição no campo da teoria das equações algébricas com resultados importantíssimos, alguns listados a seguir por serem objeto de estudo desse trabalho.

- *Toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz.*

- *Nas equações polinomiais de coeficientes reais as raízes complexas, quando existem, aparecem sempre aos pares.*

- *Toda equação polinomial de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.*

Todos esses resultados são fundamentais para o resultado que será apresentado aqui, mas não são as únicas contribuições importantes de Gaus a este campo da matemática obviamente.

2.2 Considerações importantes a respeitos das equações do 3º grau

2.2.1 Raízes estranhas

A fórmula de Tartaglia, no caso em que $\Delta < 0$, não nos oferece resultados práticos, pois os números nascidos a partir de problemas ligados as equações do 3º grau, números complexos, embora tenham esclarecido a questão das 3 raízes não trouxeram para elas benefícios maiores em relação aos demais métodos como o de Newton e o de Viète.

Como este trabalho trata da resolução de equações cúbicas por métodos algébricos, que possam por ventura, serem ensinados no ensino básico, entende-se ser importante trazer considerações a respeito das equações algébricas. Comecemos falando sobre o que é conhecido como raízes estranhas.

Euler já desconfiava disso. Antes porém de relatar suas conclusões, é necessário chamar atenção para um fato a respeito das raízes estranhas de uma equação. Para entender do que se trata considere a equação

$$x = 2. \tag{2.12}$$

É evidente que a elevação dos dois lados da igualdade ao quadrado continua mantendo a igualdade,

$$x^2 = 4 \tag{2.13}$$

.

Porém as equações (2.12) e (2.13) não são equivalentes, pois embora a passagem da equação (2.12) para (2.13) seja válida, a equação (2.12) tem apenas a raiz $x = 2$, enquanto a equação (2.13) tem por raízes $x = 2$ e $x = -2$, é esta última que chamamos de uma raiz estranha a original.

Euler descobriu que enquanto a potenciação é unívoca (cada número tem somente uma potência enésima), a radiciação não é (um número tem n raízes enésimas), ou seja, sempre que os membros de uma equação são elevados a uma potência inteira, corremos o risco de estar introduzindo raízes estranhas e, neste caso, ***cada resposta deve ser testada na equação pela qual começou***.

Com isso Euler chama a atenção que se deve ter para com as equações cúbicas, tendo em vista que a fórmula $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. é composta pela soma de duas parcelas, cada qual correspondendo a extração de uma raiz cúbica. Como uma raiz cubica possui três raízes e a fórmula é composta de uma soma de duas parcelas, 9 são os valores possíveis para a soma que compõem x, sendo 3 deles raízes legítimas e 6 raízes estranhas.

2.2.2 Sobre o discriminante

A equação (2.11) que intrigou Bombelli e foi o ponto de partida para a descoberta dos números complexos também trouxe mais contribuições ao desenvolvimento das equações cúbicas. Bombelli já sabia que as raízes dessa equação eram números reais conhecidos, hipoteticamente, ***a, b*** e ***c***, distintas. Temos então:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0. \tag{2.14}$$

mas

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc.$$

Portanto para que o coeficiente do termo quadrático seja nulo devemos ter

$$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -(a + b).$$

Portanto podemos reescrever a Equação (2.14) assim

$$(x - a)(x - b)(x - c) = (x - a)(x - b)(x + (a + b)) = 0.$$

O que equivale a

$$x^3 + [ab - (a + b)^2]x - ab(a + b) = 0. \tag{2.15}$$

Aplicando a ela a fórmula de Tartaglia em (2.15), temos

$$x = \sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2} + \sqrt{\frac{[ab(a+b)]^2}{4} + \frac{[ab-(a+b)^2]^3}{27}}} +$$

$$\sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2} - \sqrt{\frac{[ab(a+b)]^2}{4} + \frac{[ab-(a+b)^2]^3}{27}}}. \tag{2.16}$$

Cujas raízes já sabemos: ***a, b*** e ***-(a+b)***.
Estudando o discriminante, Δ, temos então que

$$\Delta = \frac{-4a^6 - 12a^5b + 3a^4b^2 + 26a^3b^3 + 3a^2b^4 - 12ab^5 - 4b^6}{108}. \tag{2.17}$$

Através de artifícios algébrico podemos demonstrar que o numerador acima é resultado do produto

$$-(a - b)^2(2a + b)^2(a + 2b)^2 \tag{2.18}$$

.

que é negativo. Portanto $\Delta < 0$.

Assim Bombelli demonstrou que se uma equação do 3º grau tem três raízes reais e distintas, então $\Delta < 0$. O que nos leva a operações com números complexos. Mas ainda do que foi exposto no tópico anterior, sabemos que nas equações polinomiais de coeficientes reais as raízes complexas, quando existem, aparecem sempre aos pares e toda equação polinomial de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real. Logo se supormos que uma equação cúbica, de coeficientes reais, tenha uma raiz complexa do tipo ***a+bi***, seu conjugado ***a-bi*** também será raiz, com a terceira raiz sendo ***c***.

De $a + b + c = 0$, temos que a soma das raízes é zero, ou seja, desconsiderando aqui o caso trivial em que as raízes são nulas

$$(a + bi) + (a - bi) + c = 0 \Rightarrow c = -2a.$$

Portanto toda equação do terceiro grau do tipo da equação (2.4) que tenham raízes complexas pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{gathered} x^3 + px + q = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x - (a + bi))(x - (a - bi))(x + 2a) = 0 \\ \Rightarrow ((x - a)^2 + b^2)(x + 2a) = 0 \\ \Rightarrow x^3 + x(b^2 - 3a^2) + 2a(a^2 + b^2) = 0. \end{gathered}$$

Assim,

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{(2a(a^2+b^2))^2}{4} + \frac{(b^2-3a^2)^3}{27}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6}{27}.$$

E isto é sempre positivo, a menos que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, o que faria com que $\boldsymbol{c}$ também fosse igual a zero.

Do exposto temos que:

a) Se as raízes são reais e distintas, $\Delta < 0$.

b) Se uma raiz é real e duas são complexas, então $\Delta > 0$.

Donde consequentemente por exclusão e por valer o inverso do que foi dito anteriormente podemos finalmente afirmar a respeito de (2.4) que:

- $\Delta < 0$*, as 3 raízes são reais e distintas,*
- $\Delta > 0$*, uma raiz é real e duas são complexas,*
- $\Delta = 0$*, as 3 raízes são reais, mas pelo menos duas delas são coincidentes.*

2.2.3 Tentativa de resolução algébrica da equação cúbica

Tendo pleno conhecimento das raízes estranhas e de como funciona o comportamento das raízes da cúbica, mediante o valor do discriminante, vamos aplicar tais conhecimento a resolução de uma equação cúbica. Considere a equação

$$x^3 - 6x - 4 = 0. \tag{2.19}$$

Observe que a mesma é uma equação do tipo (2.4). Pode-se então aplicar a equação cúbica em questão, a fórmula de Cardano-Tartaglia.

Portanto na equação (2.19), temos $p = -6$ e $q = -4$, assim:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}$$

É sabido que a Equação (2.19) tem três raízes reais e distintas, pois o $\Delta = -4 < 0$. Entretanto, como já era esperado, nos deparamos com um desafio, extrair raízes cúbicas de números complexos. Assim, não há outro caminho, menos tortuoso, do que utilizar-se o conhecimento sobre números complexos para determinar tais raízes.

Adentrando o universo dos números complexos, que as raízes de um número complexo $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ podem ser calculadas pela fórmula abaixo,

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]. \tag{2.20}$$

onde $\boldsymbol{w}$ é raiz do número complexo $\boldsymbol{z = a + bi}$. Para tanto, precisamos antes de usa-lá,

- identificar qual a parte real e imaginária. Para $\boldsymbol{z = 2 + 2i}$, $\boldsymbol{a = 2}$ e $\boldsymbol{b = 2}$.
- em seguida, calcula-se o módulo do número complexo,

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \tag{2.21}$$

.

- A partir do valor do módulo, determina-se o seno e o cosseno, e a partir deles, inferir o argumento utilizando o círculo trigonométrico, logo para z_1, têm-se

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.22}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{2.23}$$

Das equações (2.22) e (2.23) podemos inferir que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ em $[0, 2\pi]$. Agora, de posse desses dados se utiliza a fórmula (2.20), assim

$$w_0 = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2.0.\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2.0.\pi}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_0 = \frac{\sqrt{12} + 2}{4} + i\frac{\sqrt{12} - 2}{4}$$

Como os argumentos das raízes cúbicas formam uma P.A. de razão $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, as raízes seguintes são:

$$w_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right]$$

$$\Rightarrow w_1 = \sqrt{2}\left[\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\Rightarrow w_1 = -1 + i$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$$

$$\Rightarrow w_2 = \sqrt{2}\left[\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right]$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{-\sqrt{12}+2}{4} + i\frac{-\sqrt{12}-2}{4}$$

Agora é necessário determinar as raízes cúbicas de $z_2 = 2 - 2i$, mas como o processo para a obtenção dessas raízes é análogo, não se faz necessário repetir o processo, então têm-se:

$$t_0 = \frac{2-\sqrt{12}}{4} + i\frac{2+\sqrt{12}}{4}$$

$$\Rightarrow t_1 = -1 - i$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{2+\sqrt{12}}{4} + i\frac{2-\sqrt{12}}{4}$$

Diante das respectivas raízes cúbicas, determina-se os nove valores possíveis para a soma que compõem x:

$$x_1 = w_0 + t_0 = \left(\frac{\sqrt{12}+2}{4} + i\frac{\sqrt{12}-2}{4}\right) + \left(\frac{2-\sqrt{12}}{4} + i\frac{2+\sqrt{12}}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{12}}{4}i$$

$$x_2 = w_0 + t_1 = \left(\frac{\sqrt{12}+2}{4} + i\frac{\sqrt{12}-2}{4}\right) + (-1-i) = \frac{\sqrt{12}-2}{4} + \frac{\sqrt{12}-6}{4}i$$

$$x_3 = w_0 + t_2 = \left(\frac{\sqrt{12}+2}{4} + i\frac{\sqrt{12}-2}{4}\right) + \left(\frac{2+\sqrt{12}}{4} + i\frac{2-\sqrt{12}}{4}\right) = 1 + \sqrt{3}$$

$$x_4 = w_1 + t_0 = (-1+i) + \left(\frac{2-\sqrt{12}}{4} + i\frac{2+\sqrt{12}}{4}\right) = \frac{-2-\sqrt{12}}{4} + \frac{\sqrt{12}+6}{4}i$$

$$x_5 = w_1 + t_1 = (-1+i) + (-1-i) = -2$$

$$x_6 = w_1 + t_1 = (-1+i) + \left(\frac{2+\sqrt{12}}{4} + i\frac{2-\sqrt{12}}{4}\right) = \frac{-2+\sqrt{12}}{4} + \frac{6-\sqrt{12}}{4}i$$

$$x_7 = w_2 + t_0 = \left(\frac{-\sqrt{12}+2}{4} + i\frac{-\sqrt{12}-2}{4}\right) + \left(\frac{2-\sqrt{12}}{4} + i\frac{2+\sqrt{12}}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{12}}{2}i$$

$$x_8 = w_2 + t_1 = \left(\frac{-\sqrt{12}+2}{4} + i\frac{-\sqrt{12}-2}{4}\right) + (-1-i) = \frac{-2-\sqrt{12}}{4} + \frac{-6-\sqrt{12}}{4}i$$

$$x_9 = w_2 + t_2 = \left(\frac{-\sqrt{12}+2}{4} + i\frac{-\sqrt{12}-2}{4}\right) + \left(\frac{2+\sqrt{12}}{4} + i\frac{2-\sqrt{12}}{4}\right) = 1 - \sqrt{3}$$

É importante ressaltar que, dos nove valores possíveis para a soma que compõem x, três deles são raízes legítimas e seis são raízes estranhas, portanto é necessário testar cada um deles para eliminar as raízes estranhas. Porém, utilizando-se das informações a respeito do descriminante, nota-se que $\Delta < 0$, o que implica que as raízes são todas reais, e por sua vez, dos nove valores possíveis para a soma, apenas três resulta em números reais, donde pode-se concluir que estes valores são $-2, 1+\sqrt{3}$ e $1-\sqrt{3}$ respectivas raízes da equação (2.19).

Tal resultado traz consigo um certo desapontamento do ponto de vista algébrico, pois pode haver grande complexidade na resolução de equações do 3º grau, como exposto no exemplo anterior, por conta da extração de raízes cúbicas de números complexos.

Assim chegamos a um ponto crucial desse trabalho que é determinar meios algébricos para obtenção das raízes de alguns tipos de equações cúbicas, o que será feito nos próximos capítulos.

2.2.4 Dificuldades a respeito da utilização da fórmula resolutiva da equação cúbica

Um fato que é muitas vezes negligenciado ao se mencionar que as equações até o quarto grau são solúveis por radicais é que algumas equações do terceiro grau não são solúveis por radicais em R, em outras palavras, uma calculadora que tenha as operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e raiz n-ésima não consegue resolver todas as equações do terceiro grau.

Mesmo quando $\Delta < 0$ a fórmula de Tartaglia-Cardano pode mostrar-se pouco prática, pois pode ocultar soluções racionais de uma cúbica sob a aparência de expressões que parecem irracionais, quando na verdade não o são. O exemplo a seguir mostra isso.

A cúbica

$$x^3 + 3x - 4 = 0. \tag{2.24}$$

apresenta como raízes os números $\frac{-1+\sqrt{15}i}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{15}i}{2}$ e 1, ou seja, seu discriminante $\Delta < 0$, que a principio pode aparentar que a aplicação da fórmula resolutiva não apresente obstáculos, porém sua aplicação a Equação (2.24) nos fornece a seguinte solução real

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

que na verdade é $x = 1$.

Em resumo, na resolução da equação algébrica de 3º grau, a fórmula resolutiva apresenta-se como trabalhosa e árdua, não trazendo consigo grandes benefícios em relação a outros métodos, como o de Newton, que pode nos fornecer as mesmas raízes de forma mais simples, mas não algébrica.

Mas como esse trabalho visa apresentar meios algébricos para a resolução das raízes de uma cúbica a nível básico (Ensino médio) e matemáticos descobriram que é possível transformar uma equação em outra de modo que as raízes da transformada tenha uma relação desejada qualquer com as raízes da original, o esforço para a resolução de equações cúbicas será focado em casos que chamaremos de especiais.

Vale salientar que nem todo número racional N/D, *com N e D primos entre si, com* α_0 *sendo divisível por D e* α_n *sendo divisível por N, é raiz da equação* $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0$.

Definição 1: Entende-se por polinômio no conjunto dos complexos toda expressão do tipo $P(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$, onde os números complexos $a_0, a_1, \ldots, a_n$, são os coeficientes, n é um número natural denominado grau do polinômio e x é a variável do polinômio.

Definição 2: Sendo m um número complexo, denominamos valor numérico de um polinômio $P(x)$ para $x = m$, ao valor $P(m)$ ou seja o valor que obtemos substituindo x por m.

Definição 3: O número complexo m é raiz ou zero do polinômio $P(x)$ quando $P(m) = 0$.

Teorema 1: *Se um número racional N/D, com N e D primos entre si, é raiz da equação polinomial de coeficientes inteiros $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n = 0$, então α_0 é divisível por D e α_n é divisível por N.* Esse teorema traz algumas consequências imediatas:

- *toda equação polinomial de coeficientes inteiros cujo o coeficiente do termo de maior grau é 1, se possuir raízes racionais, elas serão todas inteiras;*

- *toda equação polinomial de coeficientes inteiros cujo o coeficiente do termo de maior grau for diferente de 1 depois de estarem todos os coeficientes divididos por seu máximo divisor comum, não pode ter somente raízes inteiras.*

- *toda raiz inteira de uma equação polinomial de coeficientes inteiros é divisor do termo independente.*

Por último, do ***Teorema Fundamental da Álgebra diz que: Todo polinômio não constante com coeficientes complexos tem uma raiz complexa.*** (PROFMAT, MA38 – Polinômios e Equações Algébricas, p. 104) temos uma consequência extremamente conveniente a resolução de equações, que é o fato de podermos reescrever qualquer equação polinomial algébrica, com grau $n > 1$, como produto de polinômios de grau inferior ao da equação original.

Agora, munido de uma série de Teoremas e Definições matemáticas, é possível resolver uma grande quantidade de equações cúbicas ou espera-se, pelo menos resolver, aquelas que possuírem coeficientes inteiros e cujas raízes possam ser representadas, mesmo na forma de decimais, em uma notação mais apropriada, tipo $1,41421356237309....$, que é uma aproximação da $\sqrt{2}$.

2.3 Resoluções simplificadas da equação do 3º grau

Exemplo 1:

$$x^3 - 6x - 9 = 0. \tag{2.25}$$

Ao utilizarmos a fórmula resolutiva temos: $p = -6$ e $q = -9$. Assim

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = \frac{49}{4}. \tag{2.26}$$

Nos casos em que $\Delta \geq 0$, a equação de Tartaglia sempre nos fornecerá uma soma de raízes cúbicas cujo resultado pode nos mostrar uma das três raízes da equação. Neste caso como o discriminante é um quadrado perfeito, continuemos com a aplicação da fórmula resolutiva

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$$

Neste caso para encontrarmos as outras duas raízes, o polinômio $x^3 - 6x - 9$ é dividido por $(x - 3)$ o que resulta em $x^2 + 3x + 3$, isto é

$$x^3 - 6x - 9 = (x-3)(x^2+3x+3) = 0$$

donde pela lei do anulamento do produto calculamos as raízes da equação

$$x^2 + 3x + 3 = 0$$

que pela fórmula resolutiva de Bhaskara são $x = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$.

Assim concluímos que as raízes da Equação (2.25) são $x = 3$, $x = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$.

Exemplo 2:

$$x^3 - 6x - 40 = 0. \tag{2.27}$$

Ao utilizarmos a fórmula resolutiva temos: $p = -6$ e $q = -40$. Assim

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-40}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = 392$$

Nesta situação o $\Delta \geq 0$, entretanto por não se tratar de um quadrado perfeito, a utilização da fórmula nos remete a uma expressão que algebricamente não é conveniente para determinarmos a raiz da equação, pois

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{40}{2} + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{\frac{40}{2} - \sqrt{392}}$$

$$= \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Observamos que mesmo utilizando uma calculadora, teríamos uma aproximação para a raiz, o que nos impossibilitaria de determinarmos as outras raízes possíveis. Neste caso então é mais conveniente testarmos os divisores do termo independente, 40, e verificarmos se algum deles é raiz da referida equação conforme o ***Teorema 1***.

Divisores de 40: ± 1, ± 2, ± 4, ± 5, ± 8, ± 10, ± 20 e ± 40.

Testando, temos:

$1^3 - 6.1 - 40 = 0 \Rightarrow -45 = 0$, 1 não é raiz.

$2^3 - 6.2 - 40 = 0 \Rightarrow -44 = 0$, 2 não é raiz.

$4^3 - 6.4 - 40 = 0 \Rightarrow 0 = 0$, 4 é raiz.

Neste caso para encontrarmos as outras duas raízes, o polinômio $x^3 - 6x - 40$ é dividido por $(x-4)$ o que resulta em $x^2 + 4x + 10$, isto é

$$x^3 - 6x - 40 = (x-4)(x^2+4x+10) = 0$$

donde pela lei do anulamento do produto calculamos as raízes da equação

$$x^2 + 4x + 10 = 0$$

que pela fórmula resolutiva de Bhaskara são $x = 2 - i\sqrt{6}$ e $x = 2 + i\sqrt{6}$.

Assim concluímos que as raízes da Equação (2.27) são 4, $x = 2 - i\sqrt{6}$ e $2 + i\sqrt{6}$.

Observe que a aplicação da formula resolutiva da cúbica nos dá a solução real $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ que na verdade é $x = 4$. Por isso a mesma não é conveniente nesta situação.

Exemplo 3:

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \tag{2.28}$$

.

Ao utilizarmos a fórmula resolutiva temos: $p = -3$ e $q = -2$. Assim

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 = 0$$

Nesta situação o $\Delta = 0$, cuja resolução pela utilização da fórmula nos remete

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{0}}$$

$$= \sqrt[3]{1+0} + \sqrt[3]{1-0} = 2$$

Analogamente ao Exemplo 1, temos que o polinômio $x^3 - 3x - 2$ é dividido por $(x - 2)$ o que resulta em $x^2 + 2x + 1$, isto é

$$x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = (x - 2)(x + 1)^2 = 0$$

donde pela lei do anulamento do produto calculamos as raízes da equação

$$(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Assim, como esperado por ter $\Delta = 0$ as raízes da Equação as (2.28) são $x = 2$ e $x = -1$ com multiplicidade 2.

Exemplo 4:

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \tag{2.29}$$

A mesma equação que intrigou Bombelli, ao utilizarmos a fórmula resolutiva temos: $p = -15$ e $q = -4$. Assim

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3 = -121$$

Como já sabíamos, $\Delta < 0$, por isso para não nos depararmos com algo extremamente laborioso, vamos testar os divisores do termo independente, -4, e verificarmos se algum deles é raiz da referida equação conforme as consequências do ***Teorema 1***.

Divisores de -4: ± 1, ± 2 e ± 4.

Deveríamos testar os divisores até encontrá-lo, porém a história já registrou que 4 é raiz dessa famosa equação, assim para encontrarmos as outras duas raízes, o polinômio $x^3 - 15x - 4$ é dividido por $(x - 4)$ o que resulta em $x^2 + 4x + 1$. Nesta situação o $\Delta = 0$, cuja resolução pela utilização da fórmula nos remete

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1) = 0$$

donde pela lei do anulamento do produto calculamos as raízes da equação

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

que pela fórmula resolutiva de Bhaskara são $x = -2 - \sqrt{3}$ e $x = -2 + \sqrt{3}$.

Assim concluímos que as raízes da Equação (2.29) são 4, $-2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$.

Os exemplos vistos aqui já nos permitem propor um roteiro a ser seguido na resolução de equações algébricas polinomiais cúbicas, quando os seus coeficientes forem números inteiros.

1º) Sempre que os coeficientes numéricos forem números inteiros podemos determinar uma das raízes substituindo na equação um divisor do termo independente e verificando qual sentença é verdadeira. Especialmente em casos que $\Delta < 0$ ou Δ não pode ser escrito em forma de número racional.

2º) Se Δ pode ser escrito em forma de número racional, especialmente se ele for nulo, a Fórmula de Tartaglia-Cardano provavelmente nos fornecerá uma raiz que não precisa ser apresentada em forma de uma aproximação.

Em ambos os casos, após se determinar uma raiz α, fatora-se o polinômio que expressa a equação por $x - \alpha$ o que resulta em um polinômio do 2º grau e nos permite escrever a equação em forma de um produto de um polinômio de grau 1 por outro do grau 2. Donde pela lei do anulamento podemos determinar as outras duas raízes da equação original resolvendo a quadrática pela fórmula resolutiva de Bhaskara no conjunto dos números complexos.

Capítulo 3

FUNDAMENTAÇÕES TEÓRICAS SOBRE PROPOSTAS METODOLÓGICAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A menos de 150 anos atrás a humanidade não conhecia sequer coisas simples que fazem parte do cotidiano do homem nos dias de hoje, a lâmpada é um bom exemplo. Atualmente se estuda até a possibilidade de se enviar o homem a Marte, algo que não parece tão distante de ser possível realizar. A enorme distância tecnológica entre dois fatos, como os apresentados, num intervalo de tempo tão pequeno, comparado a história humana, demonstra claramente o quanto as sociedades presenciaram mudanças radicais sociais, tecnológicas e econômicas sem precedentes nos dois últimos séculos.

Tais mudanças geram sobre o homem novas demandas e necessidades que decorrem da sociedade atual. Sendo a educação realizada por estes mesmos homens que precisam atender as novas demandas, a múltiplos desafios, se tornar essencial o enriquecimento contínuo dos saberes de acordo com esses novos tempos. Enfim, tudo está em constante transformação.

Obviamente também o contexto educacional está mudando e exigindo dos educadores um contínuo movimento de busca por reconstrução de seu conhecimento e recriação de suas práticas. Ou seja, trabalhar com Educação tornou-se um desafio e um convite à constante reorientação e renovação das práticas pedagógicas.

Logo a matemática, que até o século passado, sempre fora ensinada de forma estruturada em bases lógicas bem definidas como um fim em si mesma (Fiorentini e Lorenzato, 2006), em certo momento da recente história humana passou a ser questionada por produzir apenas alunos que eram tratados como meros depósitos das informações que lhe eram transmitidas. Percebeu-se que era necessário inserir um novo modelo de se ensinar matemática em que os alunos fossem incentivados a pensar, a serem sujeitos ativos no processo de sua aprendizagem, respaldado na necessidade humana de compreender e interferir nos fenômenos que o cercam.

Santos apud Toledo (1997) reafirma esta necessidade ao enfatizar que "com os modernos mecanismos computacionais e de memória é primordial se repensar qual o objetivo da matemática, pois esta não mais deve ser estudada de maneira mecânica", já que:

> Se antes era necessário fazer contas rápidas e corretamente, hoje é importante saber por que os algoritmos funcionam, quais são as ideias e os conceitos neles envolvidos, qual a ordem de grandeza de resultados que se pode esperar de determinados cálculos e quais as estratégias mais eficientes para enfrentar uma situação-problema,

> deixando para as máquinas as atividades repetitivas, a aplicação de procedimentos padrões e as operações de rotina (TOLEDO, 1997, p 37, apud SANTOS).

Diante dessas novas necessidades os professores em cursos de formação inicial ou continuada têm sido incentivados a refletir sobre o exercício da profissão, de desenvolver uma postura crítica e fazer uma compreensão mais profunda sobre a profissão professor. Em relação aos professores de matemática, surgiu então o termo educador matemático.

O educador matemático é aquele que concebe a Matemática como um meio: ele educa através da Matemática. Tem por objetivo a formação do cidadão e, devido a isso, questiona qual a Matemática e qual o ensino são adequados e relevantes para essa formação. Ao entender sua profissão como teórica e prática, o mesmo comunga para pesquisa, produção e concepção teórica alicerçada nas tendências da Educação Matemática.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), a Educação Matemática defende uma distinção entre o matemático, que concebe a matemática como um fim a si mesmo, uma acumulação de fatos, regras, procedimentos e teoremas; e o educador matemático, que concebe a matemática como um instrumento a serviço da educação, visando desenvolver conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação integral do cidadão. Essa distinção polarizada entre ambos, pode até nos remeter a visualizar o matemático e o educador matemático, como dois extremos.

Talvez seja possível pensar no matemático como alguém que vê a matemática pela matemática, entretanto se faz necessário destacar que o educador matemático, além do que já foi citado anteriormente, precisa também se valer do conhecimento técnico matemático, ou seja, precisa ter uma profundidade técnica nos aspectos inerentes ao seu exercício docente na educação Básica.

Essas diferenças defendidas por Fiorentini e Lorenzato (2006), entre matemático e o educador matemático, decorrem, provavelmente da forma como a matemática foi estruturada, ao longo de milênios, em bases lógicas bem definidas, enquanto a educação matemática, nascida a pouco mais de 40 anos, não possui uma metodologia única definida, pelo contrário, ela se debruça em objetos distintos de estudo, cada qual com suas especificidades.

Assim podemos conceber a Educação Matemática, embora esta ainda esteja em construção, como uma resultante das múltiplas relações que se estabelecem entre o específico e o pedagógico num contexto constituído de dimensões histórico-epistemológicas, psicocognitivas, histórico-culturais e sociopolíticas (Fiorentini e Lorenzato, p.5, appud Fiorentini, 1989, p.1). O que mostra que a Educação Matemática é uma área das ciências sociais ou humanas, relacionada com a psicologia, com a sociologia e que tem como objeto de estudo o ensino e a aprendizagem da matemática.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), a Educação Matemática tem suas origens decorrentes de fatos que vêm desde o século XIX. Mas foi por volta dos anos 50 e 60 que ela ganhou notória visibilidade com o Movimento da Matemática Moderna (MMM), cujo surgimento foi motivado pela 2º Guerra Mundial e Guerra Fria, com começo, nos Estados Unidos, dos primeiros programas de mestrados/doutorado em Educação Matemática. Foi a partir do MMM que surgiu no Brasil o movimento da Educação Matemática, com a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) que já no início do século XXI contava com mais de duas dezenas de programas stricto sensu de pós-graduação em Educação Matemática.

O objeto de estudo da Educação Matemática, são múltiplos e difíceis de serem categorizados, pois variam de acordo com cada problema ou questão de pesquisa, porém pode-se afirmar que de forma mais geral ela possui dois objetivos básicos:

- *um, de natureza pragmática, que visa a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática;*

- *outro, de natureza científica, que visa desenvolver a Educação Matemática enquanto campo de investigação e produção de conhecimentos.*

Nota-se, portanto que ambos objetivos concordam com o foco deste trabalho que é a proposição de uma Sequência Didática que possibilite a alunos no final da educação básica aprenderem a resolver equações algébricas do 3º grau via a Resolução de problemas, sendo esta uma estratégia metodológica de ensino muito pesquisada em programas de Mestrado e Doutorado em Educação Matemática. Portanto a próxima seção volta-se a discutir este braço da Educação Matemática, a Resolução de problemas.

3.1 Resolução de problemas

Não é mera especulação afirmar que os professores, na grande maioria dos cursos que fazem na área de educação nos dias de hoje são sempre orientados a direcionar suas ações, adotando práticas reflexivas, para que estimulem o trabalho em equipe e implementem a construção e desenvolvimento do ensino pela resolução de problemas. Porém não há, pelo menos na educação matemática, nenhum método ou proposta educacional que possua total certeza sobre a aprendizagem que pode propiciar ao aluno tal utilização. O que se pode afirmar é que todas as alternativas de práticas pedagógicas implementadas e as novas abordagens que se têm experimentado representam mais tentativas de acompanhar o dinamismo da sociedade atual, do que soluções ou encaminhamentos duradouros e definitivos.

Contudo, algumas alternativas têm se mostrados como caminho adequado para a educação que se almeja alcançar. Allevato apud Pozo (1998) destaca que, entre as muitas indicações para realizar as mudanças educacionais que estão sendo recomendadas uma das mais incisivas é a resolução de problemas.

O termo "problema"é bastante presente no dia a dia de pessoas que trabalham com Matemática, ou com seu ensino e aprendizagem. Portanto o reconhecimento de que a resolução de problemas ocupa um lugar central no desenvolvimento da matemática não é ideia nova.

Para Allevato (2014) um problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver"e como na época em que George Polya[1] viveu ele não concordava com o ensino da matemática como um conjunto de regras, memorização e repetição de exercícios, de tal forma que o aluno basicamente recebia o conteúdo que o professor lhe apresentava e precisava então reescrever a técnica ou o processo apresentado, e entender que a prática de resolver problemas é inerente à natureza de qualquer atividade humana, além de considerá-la fundamental para o desenvolvimento da inteligência, que é um dos objetivos da Educação que George Polya buscou desenvolver nos alunos a capacidade de aprender a aprender, ao caracterizar o modo de como resolver problemas.

Atualmente a resolução de problemas é encarada como uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problemas caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos (Mendes, 2009). Essa proposta almeja que o aluno possa aprender conceitos matemáticos por meio de situações que instiguem sua curiosidade.

Mendes (2009) entende que para a utilização dessa metodologia é necessário que o professor invista no destaque investigativo no processo de resolução de problemas favorecendo o exercício de levantamento e teste de hipóteses, bem como na elaboração de todos os algoritmos possíveis ao buscar a solução de um problema.

[1]George Pólya, foi um matemático que nasceu em Budapeste, Hungria, no dia 13 de Dezembro de 1887. Ele fez contribuições fundamentais para a análise combinatória, teoria dos números, análise numérica e teoria da probabilidade, mas sua fama se de em seu trabalho em heurística e educação matemática.

Allevato apud Contreras e Carrillo (1998), caracterizam quatro tendências didáticas em resolução de problemas, que podem conversar entre si, cada uma possuindo um objetivo a saber:

- *tradicional: assimilar e afiançar a teoria aplicando-a;*
- *tecnológica: principalmente dotar a teoria de um significado pragmático; introduzir um tema, sondar conhecimentos prévios e, algumas vezes, levar ao entendimento da teoria;*
- *espontaneísta: adquirir conhecimentos e incitar atitudes positivas, para comprometer os alunos com seu processo de aprendizagem;*
- *investigativa: aprender heurísticas e analisar processos para a construção e formalização de conceitos.*

Outro autor, Allevato apud Shimada (1997), relaciona os tipos de problemas a abordagem de ensino que se deseja alcançar. Problemas tradicionalmente utilizados, ou seja, àqueles que têm somente uma resposta correta e predeterminada, ele denomina problemas fechados. Já aqueles que têm várias respostas corretas ou vários métodos para obter a resposta ele propõe chamar de problemas abertos. No caso da proposta do trabalho que será apresentado posteriormente o problema aberto pode levar os alunos a resoluções diferentes que não são objetivo do mesmo, portanto será priorizado os problemas fechados por estes apresentarem uma resposta específica que poderá guiar o aluno para construção e formalização de conceitos. Esta ideia que será aplicada está em consonância com o que Allevato apud Van de Walle (2009), defende: a resolução de problemas como estratégia de ensino, pois ele afirma que tarefas ou problemas podem ser propostos para envolver os estudantes em atividades para pensar sobre e para desenvolver a Matemática importante que eles precisam aprender.

O pouco que já foi teorizado até aqui já demonstra o porquê de a resolução de problemas ser o alicerce da produção que será proposta nesse trabalho.

A abordagem resolução de problemas como meio de se ensinar matemática ou mais recentemente chamado ensino para resolução de problemas, ganhou força principalmente a partir do ano 1990 e está associado às ideias do construtivismo, uma vez que o ensino através da resolução de problemas tem consonância com o exposto:

> *"...a aquisição de novos conhecimentos está estreitamente ligada ao processo de interação entre o sujeito e o objeto de estudo; em matemática costumamos dizer que o aluno aprende pela resolução de problemas, e não escutando o professor relatar esse objeto em sua aula (Allevato apud SANTOS, 2002 p. 14)."*

Ele nos apresenta o seguinte esquema:

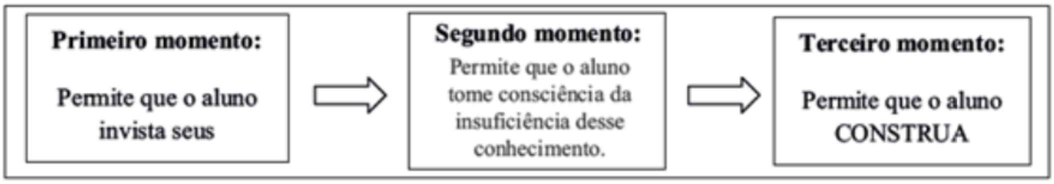

Figura 3.1: ALLEVATO apud SANTOS, 2002, p. 15

Esse esquema acaba pondo o aluno em uma situação de obstáculo, que gerará uma confusão, diante a verificação de insuficiência entre os prévios conhecimentos que ele possui e a situação que lhe é apresentada, o problema. Restando-lhe apenas uma solução, construir conhecimento para resolver a situação, de modo que a responsabilidade pela aprendizagem é colocada em suas mãos.

Ainda segundo Allevato e Onuchic (2009) a adoção da resolução de problemas como uma metodologia de ensino, no sentido de que os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário, faz com que o ponto de partida das atividades matemáticas deixe de ser a definição e passe a ser o problema, chamado "problema gerador".

Sobre a forma de aplicar essa metodologia, alguns autores têm feito algumas sugestões, dentre as quais Allevato e Onuchic (2009) foram os escolhidos para orientar a aplicação nesse trabalho. Estes sugerem um certo roteiro de atividades destinado à orientação de professores para a condução do trabalho em suas aulas, sendo elas:

1) Preparação do problema: Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento.

2) Leitura individual: Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto: Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

4) Resolução do problema: De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.

5) Observar e incentivar: Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo, com troca de informações entre os grupos.

6) Registro das resoluções na lousa: Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções.

7) Plenária: todos os alunos são convidados para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, defendendo suas ideias.

8) Busca do consenso: o professor incentiva toda a classe a chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo: Neste momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formalorganizada e estruturada em linguagem matemática"padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011, p. 83 - 85 apud ONUCHIC).

Do exposto, é possível perceber o desenvolvimento da metodologia segundo certa etapas no decorrer de uma aula. Assim, diante de todas as reflexões e ponderações a respeito da resolução de problemas, a escolha de tal metodologia de ensino como guia para o trabalho que será apresentado parece natural. Mas apesar da riqueza escondida por todo o trabalho com resolução de problemas, vale destacar que o objetivo do trabalho não é a explanação expositiva e dialogada de um conteúdo durante uma quantidade determinada de aulas e sim a produção de um material didático cuja aplicação em sala de aula possibilite ao aluno apossar-se do conhecimento relativo as resoluções de equações algébricas do 3º grau.

Finalmente a Teoria da Sequência Didática aparece nesse momento como alicerce para o que será proposto e passa a ser foco desse texto na próxima seção.

3.2 Sequência Didática

A procura por estratégias de ensino que possam operar como facilitadoras da prática do educador é uma constante no planejamento dos professores. A sequência didática é exemplo de estratégia que pode possibilitar que o aluno descubra o conhecimento através de uma sucessão de questionamentos, facilitando o fazer pedagógico.

Fassarella apud Zabala considera as sequências didáticas como uma "das diferentes variáveis que configuram as propostas metodológicas"e define essa variável como uma "série ordenada e articulada de atividades que formam as unidades didáticas", ou seja, é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos.

Os fundamentos teóricos deste estudo, nesta seção, destacam principalmente as contribuições de Fassarella com aspectos relacionados à abordagem dos conteúdos e da elaboração da sequência didática, porém há certo consenso entre os autores que estudam e pesquisam o tema de que a noção geral de sequência didática está bem definida e caracterizada na Didática por um conjunto de qualificantes que amparam sua utilização pelos professores. Contudo, Fassarella (2014) defende que o "conceito carece de qualificações específicas no âmbito da Educação Matemática", sendo assim para ela uma ***Sequência Didática Matemática*** é uma sequência didática caracterizada pelos seguintes elementos: Tema, Objetivos, Requisitos e Atividades didáticas.

Não é novidade que a aprendizagem se torna mais efetiva à medida que o conteúdo a ser construído seja do interesse do aluno, por isso, algumas vezes, professores organizam suas aulas tendo como centro o interesse dos alunos, na intuição de refletir sobre seu dia a dia. Nem sempre agindo assim poderá garantir bons resultados, pois ao valorizar apenas o conhecimento que os alunos trazem fica-se apenas na superficialidade. Já através de uma sequência didática **com foco também em atividades investigativas, a sequência didática, baseada nos elementos** citados por Fassarella (2014), permite também a interdisciplinaridade, ao tratar de um tema na disciplina elencada, que poderá recorrer a especificidades de outras.

Portanto, no intuito de guiar a proposta de trabalho que será aqui apresentada traz-se os elementos destacados por Fassarela detalhados a seguir:

Tema: tópico ou conjunto de tópicos que constituem a unidade didática;

Objetivos: devem focalizar o tema de ensino, considerando a abrangência e o nível de profundidade do aprendizado pretendido com a aplicação da sequência didática;

Requisitos: são os conhecimentos necessários para compreensão do tema ou que são pressupostos a serem conhecidos pelo estudante para que possam realizar proficuamente a sequência didática;

Atividades didáticas: constituem o cerne das sequências didáticas e devem ser concebidas como conjunto que cumpra as condições de relevância, prioridade e adequação. A relevância diz respeito à pertinência ou adequação de uma atividade para o ensino do tema na perspectiva do conjunto das atividades; a prioridade consiste da ordenação das atividades de modo que sejam precedentes aquelas que ensinam conhecimentos necessários para as outras; a adequação é definida pelo equilíbrio e abrangência do tratamento das dimensões conceitual, procedimental, contextual e atitudinal do ensino-aprendizagem da Matemática. Ainda segundo Fassarella (2014) as atividades didáticas são mais proveitosas quando concebidas com os seguintes componentes devidamente caracterizados:

- *Objetivo específico;*
- *Metodologia específica;*
- *Recursos didáticos;*

- *Descrição;*
- *Avaliação;*
- *Cronograma.*

A aplicação de tais componentes tendem a contribuir para a facilitação da prática pedagógica, o que vai permitir melhoria no processo de aprendizagem dos alunos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam a necessidade de se trabalhar com a metodologia de resolução de problemas no ensino da Matemática, assim como, pesquisadores e docentes da área de Matemática apontam essa metodologia como uma abordagem para a aprendizagem, desde que baseada em problemas verdadeiros e que tenham sentido para os alunos. Assim o uso da sequência didática para desenvolver a metodologia de resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem de conceitos de Matemática pretende ser uma maneira de facilitar o trabalho docente, de modo que ao contribuir para a facilitação da prática pedagógica, permite a melhoria no processo de aprendizagem dos alunos. A vista disso que o próximo capítulo traz uma proposta de Sequência didática para a resolução de equações do 3º grau a luz da metodologia de Resolução de problemas.

Capítulo 4

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS, COM UTILIZAÇÃO DA METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Passemos, neste capítulo, a propor uma sequência didática para ensinar como resolver equações do 3º grau. O foco principal desta sequência é mostrar em cinco etapas, o que é uma equação do terceiro grau, seu método resolutivo, as dificuldades que a utilização da fórmula resolutiva pode implicar, formas alternativas de se resolver tais equações, as relações entre as raízes e o descriminante e a proposição de um possível roteiro mais adequado para determina as raízes de uma equação cúbica.

A ideia central do trabalho será desenvolver o ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas por meio de um conjunto de problemas geradores, buscando assim mostrar que o conhecimento matemático pode ser vinculado com situações problema, ou seja, as fórmulas e expressões têm aplicações. Nessa perspectiva, eis a nossa proposta de sequência didática.

Proposta de Sequência Didática para o ensino e resolução de equações do terceiro grau

ÁREA: Matemática e suas aplicações

DISCIPLINA: Matemática

SÉRIE: 3º ano do Ensino Médio

CONTEÚDOS: Polinômios e equações polinomiais, mais especificamente a resolução da equação geral de grau 3 com uma incógnita.

OBJETIVO: Desenvolver habilidade para resolução de equação de grau três.

TEMPO ESTIMADO: 11 aulas de 50 minutos cada.

MATERIAL NECESSÁRIO: Lousa, marcador para quadro e lista de exercícios previamente formulada com as atividades que apresentaremos nas etapas a seguir.

DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DE AULAS

1ª Etapa: 2 aulas

Objetivo específico: Apresentar e definir a Equação Polinomial de grau 3.

A turma será desafiada a resolver quatro problemas matemáticos. Para tanto o professor deverá propor a formação de grupos de 3 ou 4 pessoas. Em seguida entregar a estes a lista de exercícios com as atividades referente a sequência didática, dividida em etapas, e solicitar a resolução dos 4 problemas referente a 1º etapa, em conjunto, de forma que eles apresentem uma resposta a cada problema, de acordo com as deliberações feitas no grupo.

Optou-se pela aplicação de problemas de contextualização mais simples e próxima do dia-a-dia da sala de aula no intuito dos alunos proporem resoluções algébricas o que facilita o objetivo final deste momento que é a proposta de apresentar uma equação do terceiro grau.

Além disso, para resolver um problema é importante que se entenda o problema e para isso, várias leituras se fazem necessárias. Assim questionamentos por parte do professor também poderão ajudar na interpretação, ou seja, questionar os alunos sobre os tópicos importantes que aparecem no problema faz com que eles "enxerguem"melhor esses tópicos. Por exemplo:

a) Vocês já resolveram algum problema como este antes?

b) É possível fazer um desenho para ilustrar geometricamente o problema?

c) É possível representar algebricamente o problema?

Dessa maneira, durante a atividade o professor deverá caminhar por entre os grupos atento a possíveis questionamentos que possam surgir e intervir, se julgar conveniente ou necessário, fazendo questionamentos, respeitando a independência do aluno.

Atividade 1.1: Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam 510,00 reais e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais 7,00 reais.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

Proposta de Resolução algébrica:

Da interpretação do enunciado da questão podemos inferir a seguinte equação do 1º grau onde x representa o valor pago por cada pessoas em reais.

$$50.7 + 5.x = 510$$

$$\Rightarrow 350 + 5x = 510$$

$$\Rightarrow 5x = 510 - 350$$

$$\Rightarrow 5x = 160$$

$$\Rightarrow x = \frac{160}{5}$$

$$\Rightarrow x = 32$$

Portanto, cada um pagou o valor total de 32,00 reais.

Atividade 1.2: Para divulgar uma peça de teatro que seria apresentada na escola, Leandro e alguns amigos ficaram responsáveis pela distribuição de 84 cartazes. No dia da distribuição, três pessoas não puderam participar. Com isso, cada pessoa entregou 9 cartazes a mais. Quantas pessoas entregaram os cartazes?

Proposta de Resolução algébrica:

Da interpretação do enunciado da questão podemos inferir a seguinte equação do 2º grau onde x representa o número de pessoas que entregaram os cartazes.

$$\frac{84}{x-3} = \frac{84}{x} + 9$$

$$\Rightarrow \frac{84x}{(x-3)x} = \frac{84.(x-3) + 9.x.(x-3)}{x(x-3)}$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 84x - 84x + 27x - 252 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 27x - 252 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 28 = 0$$

De onde temos: $x = 4$ e $x = -7$.

Neste problema encontramos as soluções 4 e -7. Como a pergunta do problema é: "Quantas pessoas entregaram os cartazes?", não convém como resposta -7 pessoas. Então, a resposta correta é 4 pessoas.

Atividade 1.3: (ENEM - 2010 - Adaptada): Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, qual é a medida das arestas dos chocolates que tem o formato de cubo?

Proposta de Resolução algébrica:

Da interpretação do enunciado da questão segue que:

Sendo V_P e V_C os volumes das barras de chocolate de formato "paralelepípedo"e "cubo", respectivamente, e sendo a a medida da aresta do cubo, temos:

$$V_P = 3cm.18cm.4cm = 216cm^3$$

e

$$V_C = a^3$$

Como o Volume de ambos são iguais, temos que:

$$V_P = V_C$$

$$a^3 = 216cm^3$$

$$\Rightarrow a = 6cm$$

A aresta do cubo, é igual a 6cm.

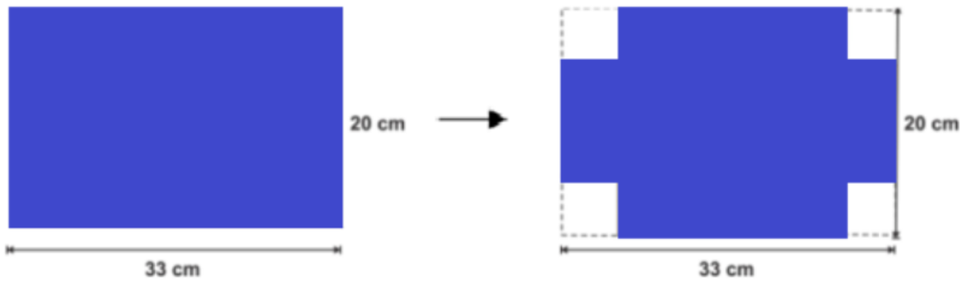

Figura 4.1: Figura ilustrativa

Atividade 1.4: Eduardo construiu uma caixa em forma de bloco retangular, sem tampa, a partir de uma folha retangular de cartolina que media 33 cm por 20 cm, recortando um quadrado em cada vértice da folha conforme figura a seguir

Sua montagem foi feita por meio de fita adesiva, não havendo a necessidade de abas. Depois de pronta, Eduardo verificou que a caixa fica completamente cheia após despejar um saco de 1,2 litro de areia. Como Eduardo deverá proceder para descobrir a medida do lado do quadrado e qual é o valor dessa medida?

Proposta de Resolução algébrica:

Inicialmente, ele deverá identificar as dimensões da caixa, em função da medida x do lado do quadrado

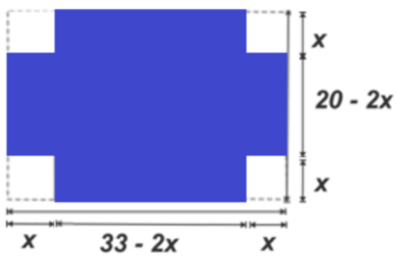

Figura 4.2: Figura ilustrativa

O volume de um bloco retangular (paralelepípedo) é dado por

$$V = (comprimento).(largura).(altura),$$

isto é:

$$V = (33 - 2x).(20 - 2x).x$$

$$\Rightarrow V = 4x^3 - 106x^2 + 660x$$

A condição do problema é $V = 1,2$ litro $= 1200cm^3$, assim

$$V = 4x^3 - 106x^2 + 660x = 1200$$

O valor de x procurado é uma solução da equação simplificada

$$2x^3 - 53x^2 + 330x = 600$$

Note que a solução do problema é determinada através da resolução da equação algébrica, por isso se faz necessário o estudo sobre as resoluções dessas equações.

Assim, conforme já foi relatado aqui nesse trabalho e embasado por vários autores o problema referente a Atividade 1.4 pode ser classificado como espontaneísta e gerador, pois incita os alunos a se comprometer com seu processo de aprendizagem ao envolver os estudantes em atividades para pensar sobre e para desenvolver a Matemática importante que eles terão a oportunidade de aprender: equação do 3º grau.

Portanto ao final desta primeira etapa espera-se que o aluno perceba a necessidade de ampliar seus conhecimentos matemáticos tendo em vista que o mesmo se deparou com um novo tipo de equação polinomial, cujos os seus conhecimentos, muito provavelmente, não lhe darão suporte para resolução da mesma. Essa é a deixa para que o professor apresente esta nova equação cúbica e defina a mesma.

2ª Etapa: 3 aulas

Objetivos específicos: Desenvolver habilidade para transformar qualquer equação completa do 3ºgrau, numa equivalente sem termo quadrático e apresentar fórmula resolutiva da equação de grau 3.

Realização de aula expositiva e dialogada sobre a definição de uma equação do terceiro grau a partir dos desdobramentos históricos que envolveram Scipione del Ferro, Antônio Maria Fiore, Niccoló Tartaglia, Girolano Cardano e Ludovico Ferrari, com demonstração matemática da fórmula resolutiva. Por a mesma já ter sido realizada neste, trabalho, não se faz necessário a repetição aqui. Em seguida propor a resolução da atividade didática a seguir:

Atividade 2.1: Agora que você já conhece a fórmula resolutiva para determinar as raízes de cada equação, faça o que se pede, considerando a equação $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$.

a) Escreva a incógnita dessa equação:

b) Verifique se a equação está escrita na forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, caso não esteja simplifique até que a mesma possa ser escrita dessa forma e então escreva o valor do coeficiente a.

c) Faça uma mudança de variável tomando $x = y - \frac{a}{3}$, e escreva a equação resultante.

d) Em relação a equação inicial na incógnita x, o que ocorreu com o coeficiente do **termo quadrático** na nova equação na incógnita y?

e) A esta nova equação é possível aplicar a fórmula resolutiva das equações cúbicas?

f) Escreva os valores dos coeficientes: p e q.

g) Determine o valor do discriminante *Delta* substituindo os valores dos coeficientes em $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

h) Calcule a raiz substituindo em $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, os valores dos coeficientes e de Δ.

i) Determine a raiz da equação inicial na incógnita x, a partir da substituição realizada no item "c".

Atividade 2.2: Faz parte do processo de aprendizagem matemática a repetição da aplicação de conceitos matemático em determinada situação, por isso após esse momento de resolução algébrica de uma equação do terceiro grau é conveniente trabalhar com os alunos a resolução de algumas cúbicas para aprimoramento do processo algébrico da fórmula resolutiva, tendo-se o cuidado de propor a resolução de equações que tenham discriminante Δ como um quadrado perfeito, seguindo-se os mesmo passos da atividade inicial desta etapa. Sugerimos a resolução das Equações (2.25) e (2.28)

Após a realização da segunda etapa, o aluno terá tido a oportunidade de aprender a escrever qualquer cúbica sem o termo desprovido do termo quadrático e a usar a fórmula resolutiva de Cardano|-Tartáglia.

3ª Etapa: 3 aulas

Objetivo específico: Obtenção das raízes racionais de uma equação cúbica pelo teorema das raízes e Teorema Fundamental da Álgebra

No Capítulo 2 deste trabalho já foi relatado sobre a dificuldade de se trabalhar com a fórmula resolutiva por esta muitas vezes se apresentar trabalhosa e árdua. Por isso nesta etapa apresentam-se problemas cuja resolução recaem em equações cúbicas, mas cuja a fórmula quando aplicada recaem em problemas conflitantes para um aluno do ensino básico, tais como:

a) soma de raízes cúbicas cujo o radicando possui uma operação com raiz quadrada de um número irracional e a raiz é inteira. Situação semelhante a apresentada no **exemplo 2** na Equação (2.27)

b) extração de raízes de números complexos. Mesma circunstância apresentada na Equação (2.19)

Tais situações serão colocadas a turma intencionalmente com o intuito de se mostrar a dificuldade na utilização da fórmula resolutiva das cúbicas. **Nesse momento a sala pode ser dividida em pequenos grupos de 3 ou 4 alunos que receberão do professor uma dos problemas a seguir para serem realizados**. Vejamos as atividades:

Atividade 3.1: Durante quatro horas consecutivas, os técnicos do DETRAN monitoraram três pontos, A,B e C, com a finalidade de avaliar o fluxo de veículos em cada ponto em função do horário. Indicando por 0 (zero) o instante em que os técnicos iniciaram simultaneamente a contagem nos três pontos, constatou - se que no ponto A passaram 300 veículos por hora, no ponto B passaram $300t^2$ veículos em t horas, e no ponto C passaram $50t^3$ veículos em t horas. Se após t horas o total de carros que passaram pelo estacionamento foi 2200, quantas foram as horas?

Proposta de Resolução algébrica:

Durante a resolução desta atividade, espera-se que os alunos cheguem a um resultado através da resolução da equação $50t^3 + 300t^2 + 300t = 2200$, que após algumas simplificações pode ser reescrita como $t^3+6t^2+6t-44 = 0$, cuja resolução pela fórmula requer reescreve - lá sem o termo quadrático chegando assim a equação $y^3 - 6y - 40 = 0$, que apresenta 4 como raiz mas a aplicação da fórmula de Cardano-Tartaglia nos dá a solução real $y = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$ que apresenta grande dificuldade aos alunos para chegarem a esta ultima igualdade.

Atividade 3.2: (UERJ-RJ - Adaptada) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes do polinômio $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$. Em relação a este paralelepípedo, quais são as suas dimensões?

Proposta de Resolução algébrica:

Em relação a Atividade 3.2, a mesma é um problema tradicional, utilizado para assimilar a teoria aplicando-a. Assim sua resolução se dará através da resolução da equação $x^3-10x^2+31x-30 = 0$, cuja resolução pela fórmula requer reescreve - la sem o termo quadrático chegando assim a equação $y^3-7/3y-20/27 = 0$, na qual a aplicação da fórmula de Cardano-Tartaglia resultará num discriminante $-1/3$ e a consequente extração de raízes cúbicas de números complexos.

Assim os alunos então iram se deparar, em cada uma das atividades, com as situações listadas nos itens **a** e **b** desta Etapa. Diante disso, cabe ao professor possibilitar uma situação que os alunos percebam que as cúbicas nas quais foram aplicadas a fórmula resolutiva possuem sim raízes racionais, o que pode ser verificado com o cálculo do valor numérico do polinômio algébrico que compõem o membro esquerdo da equação. Na equação $y^3 - 6y - 40 = 0$ isso pode ser feito trocando-se y por 4 e na outra $y^3 - 7/3y - 20/27 = 0$, substituindo y por $-4/3$; $-1/3$ ou $5/3$.

O professor deverá solicitar aos alunos o calculo de verificação de alguns números para cada equação a fim de determinarmos em cada situação a raiz racional. A partir daí, o professor deverá questionar os alunos *"se cada uma das equações possui uma raiz racional, então porque a fórmula resolutiva não permitiu encontra-las?"*.

Após as discussões o professor deverá explicar a turma que a fórmula resolutiva de Cardano-Tartaglia nem sempre é prática e que é comum se deparar com situações como as encontradas por eles ao se aplicar a mesma. Porém que é possível determinar a resolução destas mesmas equações através de outros artifícios, abrindo assim a oportunidade para apresentar a turmar o **Teorema 1**, suas consequências e finalmente o **Teorema Fundamental da Álgebra**. Ao final, ele deverá se utilizar destes conhecimentos para resolver as cúbicas referente a cada Atividade. Segue sugestão:

Nova Resolução algébrica:

Atividade 3.1: vamos testar os divisores do termo independente, -40, e verificarmos se algum deles é raiz da referida equação conforme as consequências do ***Teorema 1***.

Divisores de -40: ±1, ±2, ±4, ±5, ±8, ±10, ±20 e ±40.

Testando os divisores temos:

Para $y = 1$ temos $(1)^3 - 6(1) - 40 = 0 \Rightarrow -45 = 0$. Logo 1 não é raiz.

$y = 2$ temos $(2)^3 - 6(2) - 40 = 0 \Rightarrow -44 = 0$. Logo 2 não é raiz.

$y = 4$ temos $(4)^3 - 6(4) - 40 = 0 \Rightarrow -0 = 0$. Logo 4 é raiz.

Assim para encontrarmos as outras duas raízes, o polinômio $y^3 - 6y - 40$ é dividido por $(y - 4)$ o que resulta em $y^2 + 4y + 10$. Pelo ***Teorema Fundamental da Álgebra***, temos:

$$y^3 - 6y - 40 = (y - 4)(y^2 + 4y + 10) = 0$$

donde pela lei do anulamento do produto calculamos as raízes da equação

$$y^2 + 4y + 10 = 0$$

que pela fórmula resolutiva de Bhaskara são $y = -2 - i\sqrt{6}$ e $y = -2 + i\sqrt{6}$.

Assim concluímos que as raízes da Equação $y^3 - 6y - 40 = 0$ são $y = 4$, $y = -2 - i\sqrt{6}$ e $y = -2 + i\sqrt{6}$.

Atividade 3.2: afim de aplicar o ***Teorema 1*** a equação $y^3 - 7/3y - 20/27 = 0$, vamos reescreve-la como segue, $27y^3 - 63y - 20 = 0$. Portanto se um número racional N/D, com N e D primos entre si, é raiz da equação polinomial de coeficientes inteiros então 27 é divisível por D e 20 é divisível por N. Portanto $N \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20\}$, enquanto $D \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27\}$.

Dentre as combinações possíveis para o racional N/D, umas delas é ; $-1/3$ que anteriormente já foi revelado ser raiz da equação $y^3 - 7/3y - 20/27 = 0$. Portanto para encontrarmos as outras duas raízes, o polinômio $27y^3 - 63y - 20 = 0$ é dividido por $(y + 1/3) = (3y + 1)$ o que resulta em $9y^2 - 3y - 20$. De acordo com o ***Teorema Fundamental da Álgebra***:

$$27y^3 - 63y - 20 = (3y + 1)(9y^2 - 3y - 20) = 0$$

donde pela lei do anulamento do produto calculamos as raízes da equação

$$9y^2 - 3y - 20 = 0$$

que pela fórmula resolutiva de Bhaskara são $y = -4/3$ e $y = 5/3$.

Assim concluímos que as raízes da Equação $y^3 - 7/3y - 20/27 = 0$ são $y = -1/3$, $y = -4/3$ e $y = 5/3$.

Essa etapa portanto visa oferecer aos alunos meios de se chegar a resolução de uma cúbica sem as armadilhas da fórmula resolutiva ou dos laboriosos cálculos decorrentes de sua aplicação. Além disso, ela ensina como determinar as três raízes possíveis de uma equação de grau 3, o que não se consegue através da fórmula resolutiva.

4ª Etapa: 1 aula

Objetivo específico: Relação entre o discriminante e as raízes de uma equação do terceiro grau,

Nesse momento espera-se que já haja uma certa confiança por parte dos alunos ao resolverem equações cúbicas. Sendo assim é conveniente agora se debruçar sobre o comportamento das raízes da Equação (2.4), a partir do cálculo do discriminante (Δ). Para tanto, propõe-se a seguir uma atividade para exploração desses conceitos.

Atividade 4.1:Calcule o valor do Δ e determine as raízes das seguintes equações:

a) $x^3 - 6x - 4 = 0$

b) $x^3 - 6x - 9 = 0$

c) $x^3 - 3x - 2 = 0$

d) Agora responda:

- *Na equação em que o Δ foi menor que zero, qual a relação entre as raízes e o conjunto dos números reais?*
- *Na equação em que o Δ foi igual a zero, qual a relação entre as próprias raízes e o conjunto dos números reais?*

- *Na equação em que o Δ foi maior que zero, qual a relação entre as próprias raízes e o conjunto dos números reais?*

Proposta de Resolução algébrica:

A equação $x^3 - 6x - 4 = 0$ Equação (2.19) tem $\Delta = -4$ e apresenta as raízes -2, $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$. A equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ Equação (2.25) tem $\Delta = 49/4$ e apresenta as raízes 3, $x = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$. Equação $x^3 - 3x - 2 = 0$ Equação (2.28) tem $\Delta = 0$ e apresenta as raízes 2 e -1 com multiplicidade 2. A expectativa é que eles consigam inferir conclusões próximas das seguintes:

$\Delta < 0$, as 3 raízes são reais e distintas,

$\Delta > 0$, uma raiz é real e duas são complexas,

$\Delta = 0$, as 3 raízes são reais, mas pelo menos duas delas são coincidentes.

Obviamente o professor não deve aguardar conclusões com tal rigor por parte do aluno, mas aproveitar as mesmas para formalizar tais conceitos. Vale salientar que esta etapa visa informar, ao final de sua realização, a relação entre o discriminante e as raízes de uma equação cúbica, ficando ao julgamento do professor a necessidade de se provar ou não tais afirmações. Qualquer que seja a opção, tais resultados podem ser encontrados no *Capítulo 2*, no sub item *2.2.2*.

5ª Etapa: 2 aulas

Objetivo específico: Proposição de métodos mais adequados a resolução de determinadas equações cúbicas

No intuito de finalizar essa sequência didática, é conveniente propor a turma a resolução individual de uma série de equações, escolhidas sob certos critérios, a serem resolvidas pela forma algébrica mais conveniente a cada aluno a fim de possibilitar uma discussão a partir dos resultados e das diferentes maneiras de se chegar a solução por parte dos alunos no intuito de propor um roteiro para resolução de diferentes equações cúbicas.

Segue aqui uma possível série de equações que podem ser resolvidas por eles:

a) $y^3 - 25/3y - 250/27 = 0$ em que $\Delta = 0$,

b) $y^3 - 9y - 10 = 0$ com $\Delta < 0$,

c) $y^3 - 2y - 14 = 0$ cujo $\Delta > 0$,

d) $y^3 - 5y^2 + 6y = 0$

e) $3y^3 + 192 = 0$

Os itens "a", "b"e "c"foram escolhidos aqui pois os mesmos necessitam dos conhecimentos explorados nessa sequência didática para serem resolvidos, enquanto os dois últimos podem ser resolvidos com conhecimentos básicos de algébra, sendo possíveis de serem resolvidos por um aluno que ainda se encontre no ensino fundamental.

- *Em situações em quê a equação esteja escrita na forma $x^3 + px + q = 0$, com p e q racionais não inteiros, a utilização da fórmula de Cardano Tartaglia é mais conveniente para a obtenção de uma raiz. Claro, se na cúbica o $\Delta \geq 0$.*

- *Nos casos em que a equação $x^3 + px + q = 0$ possui os coeficiente numéricos inteiros podemos determinar uma das raízes substituindo na equação um divisor do termo independente e verificando qual sentença é verdadeira. Especialmente em casos que os $\Delta < 0$ ou Δ não pode ser escrito em forma de número racional.*

Nas duas situações, de posse dessa raiz, pode-se usar a divisão de polinômios para escrever $x^3 + px + q$ como produto de um polinômio de grau 1 por outro de grau 2 para se obter as outras duas raízes pela resolução de uma equação de 2º grau. Destaca-se ainda os casos em que a equação de grau 3 tenha termo independente nulo, o que possibilita a resolução por meio de simples fatoração algébrica e também as equações cujo a variável só apareça elevada ao cubo, possibilitando sua resolução pelo isolamento da variável e posterior extração de raiz cúbica.

Assim ao final desta etapa o aluno terá adquirido ferramentas suficientes para resolução de grande número de equações cúbicas, sendo possível também que o mesmo possa escolher o caminho mais adequado para a resolução de cada tipo de equação do 3º grau.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

Com este estudo buscamos contribuir, através de uma sequência didática para a aprendizagem e aprimoramento do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos através do aprofundamento na resolução de equações algébricas de grau três com a contribuição da Resolução de Problemas como metodologia de ensino aprendizagem.

Também com a história da matemática, tem-se a possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a matemática, tornando-a mais contextualizada, mais agradável. Nesse sentido a história da equação de terceiro grau destaca-se por ser muito rica e atraente devido aos desenrolares que envolveram seus principais protagonistas.

O trabalho foi desenvolvido com à apresentação de exemplos e o Método de Cardano – Tartaglia para a resolução da equação de terceiro grau, resolvidos com bastante detalhe, buscando a motivação para o estudo desta equação, o esclarecimento das ideias discutidas e explorando o entendimento de conhecimentos algébricos relacionados a Polinômios.

Entendemos assim, que estudar a história da equação de terceiro grau e a busca por um método geral de resolução oferece a oportunidade de desenvolver um trabalho algébrico rico, bem como de resolver problemas interessantes. Diante do exposto, da curiosidade e dúvidas que sempre rodearam as equações cúbicas e do desejo de produzir um trabalho voltado ao ensino dessas equações aos alunos da educação básica que optamos por este tema.

Projetamos aplicar a sequência aqui desenvolvida no formato de oficina a alunos do terceiro ano do Ensino Médio, paralelo ou posteriormente ao ensino de Polinômios nas turmas regulares de ensino dos futuros participantes. Cremos que tal aplicação possa servir como uma alternativa a maneira tradicional do ensino de matemática e que a depender dos resultados alcançados, a sequência possa ser até incorporada ao plano de aula referente ao estudo de equações polinomiais.

Esperamos também que o contato com a história destas equações cúbicas possa despertar nos alunos o desejo em continuar os estudos com a resolução de equações quárticas, principalmente se os mesmo forem instigados com o fato de que o método geral para a solução das equações do 4º grau foi descoberto por Ludovico Ferrari, o mais famoso discípulo de Cardano.

Segundo Garbi (pág. 42), Cardano foi desafiado a resolver equação quática $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$. Após inúmeras tentativas sem êxito, Cardano passou essa questão ao seu jovem discípulo Ferrari, que teve êxito nessa tarefa e Cardano teve o prazer de publicar também essa solução em Ars Magna, em continuação à solução dada por Tartaglia. Desta forma além de futuros estudos poderem tratar dos resultados alcançados pela aplicação desta Sequência Didática, fica também aberta a possibilidade da expansão deste trabalho com o desenvolvimento de uma Sequência Didática para aprendizagem das equações quárticas.

Finalmente acreditamos que às contribuições que esse trabalho possa vir a trazer para a comunidade científica da Educação Matemática, se desenvolvidas em sala de aula e acompanhadas passo a passo pelo professor da turma, como um mediador atento aos obstáculos que podem surgir da aplicação de uma nova forma de se ensinar, haverá facilitação do fazer docente e transformação da prática e que os alunos construíram conhecimentos quantitativa e qualitativamente bastante relevantes e significativos.

Referências Bibliográficas

[1] ALLEVATO, Norma Suely Gomes. *Trabalhar através da resolução de problemas: possibilidades em dois diferentes contextos.*, Disponível em: https://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/26 Consultado em: 27/04/2018

[2] ALLEVATO, Norma Suely Gomes, ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. *in Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perpectivas.*, Disponível em: http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf Consultado em: 27/04/2018

[3] BOYER, Carl B. *Historia da matemática*, tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 2 edição 1996.

[4] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*, Volume 2. São Paulo, SP: Editora Ática, 2004.

[5] EVES, Howard. *Introdução a história da matemática*, tradução Hygino H. Domingues – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

[6] FASSARELLA, Lúcio. *in Sequência Didática Matemática*, 2014. Disponível em: http://www.luciofassarella.net/ensino/math/files/Fas2014.pdf Consultado em: 30/04/2018.

[7] FIORENTINI, Dario, LORENZATO, Sérgio. *A Educação Matemática enquanto Campo Profissional e Científico. In: Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*, Campinas: São Paulo, 2006.

[8] GARBI, Gilberto G. *O romance das equações algébricas,* Campinas: 2º Edição revi. e ampl. – São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2007.

[9] LIMA, Elon Lages. *Artigo científico: Matemática Universitária nº 5: A equação do terceiro grau,* Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 1987.

[10] MACLYNE, Diógenes, SANTOS, Cícero. *in Modelagem Matemática como estratégia no ensino-aprendizagem* Disponível em: www.sbembrasil.org.br Consultado em: 20/04/2018.

[11] MENDES, Iran Abreu. *Matemática e Investigação em Sala de Aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem,* Ed. rev. e amp. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[12] PROFMAT, MA38 – Polinômios e Equações Algébricas.

[13] SAMPAIO, João C.V. *O ensino da álgebra elementar através de sua história,* São Carlos, SP: DM-UFSCar.

[14] https://www.estudokids.com.br/divisao-da-historia/ Consultado em: 22/01/18

[15] http://www.sohistoria.com.br/ef2/idadeantiga/ Consultado em: 22/01/18

[16] http://www.matematica.br/historia/arquimedes.html Consultado em: 22/01/18

[17] http://vestibular.mundoeducacao.bol.uol.com.br/enem/equacao-1-grau-no-enem.htm Consultado em: 08/05/18