UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL - PROFMAT

(Mestrado)

CRISTINA KOZAN DE BRITO

FUNÇÕES CONTÍNUAS E NÃO DERIVÁVEIS EM PONTO ALGUM

Maringá-PR

2018

CRISTINA KOZAN DE BRITO

FUNÇÕES CONTÍNUAS E NÃO DERIVÁVEIS EM PONTO ALGUM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin

Maringá

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Brito, Cristina Kozan de
B862f Funções contínuas e não deriváveis em ponto algum / Cristina Kozan de Brito. -- Maringá, 2018.
47 f. : il., color.

Orientador: Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2018.

1. Sequências numéricas. 2. Continuidade. 3. Funções. 4. Derivabilidade. 5. van der Waerden. I. Doronin, Gleb Germanovitch, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 515.5

Edilson Damasio CRB9-1.123

CRISTINA KOZAN DE BRITO

FUNÇÕES CONTÍNUAS E NÃO DERIVÁVEIS EM PONTO ALGUM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Valter Soares de Camargo
Universidade Estadual do Paraná - Paranavaí

Josiane Faria

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 17 de outubro de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que, de alguma forma, contribuíram para que este pudesse ser realizado.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

À Deus pelo dom da vida e pelas oportunidades de ser uma pessoa melhor a cada dia.

Aos meus pais que sempre incentivaram meus estudos, desde a infância, ensinando-me a enfrentar obstáculos de cabeça erguida.

Ao meu companheiro Samuel que me apoiou neste trabalho, aguentou meus momentos de angústia e nervosismo e cuidou de meu filho enquanto eu trabalhava.

Ao meu filho Wesley que, mesmo na insistência de atenção, soube compreender a importância de minhas ausências.

À minha cunhada Salete que ajudou-me com o "abstract".

À minha coordenadora Andréia Angélica por todas as vezes que trocou minhas aulas para que eu pudesse estudar para as provas do mestrado.

Aos meus amigos da turma do PROFMAT 2016 (inesquecível turma) que lembrarei para sempre com muito carinho.

Aos amigos Fernanda e Ângelo pela força não só nos estudos, mas por compartilhar momentos pessoais.

Aos amigos Wagner, Denir e Wanderlei pelas discussões de exercícios entre almoços e sorvetes no shopping.

Aos amigos Luana e Rogério, sempre tão prestativos com a turma, pelos vários exercícios discutidos.

Aos professores do PROFMAT, pela dedicação em preparar e ministrar suas aulas, em especial ao professor Wesley pela grande força.

Ao Prof. Dr. Cícero Lopes Frota pela leitura do trabalho, análise e sugestões pertinentes.

À Lucia, sempre tão atenta e prestativa às nossas solicitações acadêmicas.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gleb, pela paciência e compreensão com minhas ausências e pela dedicação para com o presente trabalho.

“A verdadeira viagem de descobrimento não consiste em procurar novas paisagens,

mas em ter novos olhos.”

Marcel Proust.

Resumo

Neste trabalho foi investigado como as sequências e séries numéricas estão presentes no ensino básico e apresentadas definições, exemplos e teoremas. Também houve um estudo da convergência e divergência de algumas séries numéricas. Foram analisadas a continuidade de funções e estudadas sequências e séries de funções. A derivada e a integral de uma função se fizeram necessárias para uma aplicação: calcular o comprimento do um arco de uma curva. Foram apresentados uma uma nota histórica sobre o algebrista que deu origem à função objetivo deste trabalho e algumas considerações iniciais que auxiliam o leitor na compreensão da função de van der Waerden. O trabalho é encerrado com a demonstração da continuidade e a não derivabilidade em ponto algum de tal função.

Palavras chave: Sequências, séries, continuidade, funções, derivabilidade, van der Waerden.

Abstract

In this work was investigated how numerical sequences are present in elementary education and presented definitions, examples as theorems. There was also a study of the convergence and divergence of some numerical series. Were analyzed the continuity of functions and studied sequence and series of functions. The derivative and integral of a function became necessary for an application: to calculate the length of an arc of a curve. Were presented a historical note about the algebraist that gave rise to the objective function of this work, and some initial considerations that help the reader to understand van der Warden's function. The work is ended with the demonstration of continuity and the non-derivability at any point of such function.

key words: sequences, series, continuity, functions, derivability, van der Waerden.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O tema da presente dissertação surgiu da curiosidade sobre se existe funções contínuas e não deriváveis em ponto algum.

O objetivo desse trabalho é demonstrar a continuidade e a não derivabilidade em ponto algum da função de van der Waerden e, durante toda a construção teórica para tal fim, mostrar algumas aplicações da análise real no ensino básico, bem como despertar e responder às curiosidades de um determinado grupo de alunos. Isso mesmo! Muito se houve falar em inclusão escolar e há uma parcela de discentes para os quais a escola ainda encontra dificuldades para trabalhar. São alunos com altas habilidades ou "Q.I" acima da média para sua idade. Foram deles que partiram curiosidades e questionamentos acerca de demonstrações sobre fórmulas que utilizavam e, a partir destes questionamentos, a pretensão é incentivá-los e levá-los à busca de respostas.

Pareceu, num primeiro instante, ser um assunto com poucas referências, devido à dificuldade em imaginar o gráfico de tais funções e também com pouca aplicabilidade no ensino básico. Mas o conjunto das funções contínuas e não deriváveis em ponto algum é muito maior do que imagina-se.

O trabalho foi dividido em quatro capítulos, iniciando por "Sequências e séries numéricas". Em seguida, foram abordados "Funções contínuas" e "Derivada e integral". A finalização vem com "Funções contínuas e não deriváveis em ponto algum". Esses capítulos ainda possuem algumas subdivisões, as quais foram importantes para melhor estruturar a presente dissertação.

O primeiro capítulo é subdividido em "Sequências numéricas" e "Séries numéricas". A primeira parte traz definições de sequências numéricas e de seu limite, bem como teoremas para o estudo de convergências e exemplos. Já a segunda parte deste capítulo trata as definições, teoremas e exemplos de séries numéricas, um dos quais é bastante utilizado no ensino médio. É nesta parte que também é inserido alguns testes para a verificação de convergência ou divergência de séries numéricas.

O capítulo de "Funções Contínuas"apresentou a definição de continuidade, bem como exemplos muito importantes para este trabalho. Foi subdividido em duas partes: "Sequência de funções"e "Série de funções". A primeira parte contém definições, exemplos e teoremas para mostrar a continuidade e a convergência de sequências de funções, enquanto a segunda parte traz também definições, teoremas e exemplos para a convergência de séries de funções. Esta parte contém o "Teste M de Weierstrass", teorema de suma importância para um dos objetivos do trabalho.

Em seguida, vem o capítulo que subdivide-se em "Derivada de uma função" e "Integral de uma função". Aqui apenas é dada a definição de derivada, exemplos e o Teorema do Valor Médio, em que a ideia da demonstração é apresentada geometricamente. A integral de uma função é definida apenas para inserir uma aplicação: o cálculo do comprimento de um arco de curva.

O capítulo final desta dissertação é dividido em três partes. Primeiramente há uma nota histórica sobre o matemático responsável pela função que é estudada nesta dissertação. Em seguida, são abordadas algumas considerações iniciais e gráficos para um melhor entendimento sobre tal função. A finalização do trabalho vem com a demonstração da continuidade e não derivabilidade em ponto algum da função de van der Waerden.

A realização desse trabalho deu-se primeiramente por pesquisas na internet sobre funções contínuas e não deriváveis em ponto algum, nas quais foram encontrados nomes importantes relacionados, tais como Bernhard Bolzano, Karl Wilhelm Theodor Weierstrass e Bartel Leendert van der Waerden. Após a opção por demonstrar a continuidade e não derivabilidade em ponto algum da função de van der Waerden, houve a necessidade de iniciar o trabalho com conceitos simples, os quais mostram-se aplicáveis ao ensino básico. Alguns desses conceitos foi possível fazer aplicação durante a elaboração da presente dissertação. A opção em constatar poucas referências deu-se pelo fato de evitar linguagens demasiadamente diferentes no decorrer do trabalho.

Capítulo 1

SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

No ensino básico é apresentado para o aluno apenas uma forma de grafar números. Mais precisamente no oitavo ano do ensino fundamental II, quando é inserido o conceito de números irracionais, fala-se em dízimas periódicas e aprende-se como descobrir a sua fração geratriz por meio de mecanismos que facilitam essa descoberta. Então, depois de alguns exercícios, o aluno descobre facilmente que a fração geratriz da dízima periódica $0,24\overline{9}$ ou $0,2499999...$ é $\frac{225}{900}$. Com a intervenção do professor, o aluno é levado à simplificar essa fração, chegando ao número racional $\frac{1}{4}$ que é exatamente $0,25$. Conclui-se então que $0,24\overline{9} = 0,25$. Assim, os alunos passam a conhecer um novo modo de escrever números decimais, com "infinitos noves".

Esse conceito foi aprofundado em sala de aula, mais precisamente em duas turmas de oitavos anos, mostrando aos alunos que, na verdade, essa forma de escrever os números é uma "soma infinita" de decimais. Por exemplo,

$$\frac{1}{3} = 0,333\cdots = 0,\overline{3} = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \cdots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$$

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i} = 0,\overline{3}.$$

Os números $0,3,\ 0,03,\ 0,003,\ \cdots$, formam uma sequência numérica. A soma de seus infinitos termos dão origem a uma série numérica.

Neste capítulo serão abordadas definições, teoremas e exemplos de sequências e séries numéricas, as quais estão presentes nas referências tomadas e que são ideias iniciais para alcançar o objetivo deste trabalho.

1.1 Sequências Numéricas

Definição 1.1. *Uma sequência numérica (de números reais) é uma função* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *definida no conjunto dos números inteiros positivos tomando valores reais. Assim, a cada* $n \in \mathbb{N}$ *corresponde um* $a_n \in \mathbb{R}$*, chamado n-ésimo termo da sequência.*

Definição 1.2. *Um número real a é limite da sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *quando, para todo número real* $\epsilon > 0$ *dado arbitrariamente, existir* $n_\epsilon > 0$ *tal que todos os termos* a_n *com índice* $n > n_\epsilon$ *cumprem a condição* $|a_n - a| < \epsilon$.

Notação: $\lim a_n = a$ (A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $a \in \mathbb{R}$).

Exemplo 1.3. *Considere a sequência* $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. *Prove que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prova: De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $n_\epsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. Então $\forall\ n > n_\epsilon$ temos

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n_\epsilon^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)^2} = \epsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 1.4. *(Teorema do Sanduíche) Sejam as sequências a_n, b_n e c_n, com $a_n \leq b_n \leq c_n$. Se $\lim a_n = \lim c_n = a$, então $\lim b_n = a$.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, $\exists\ n_{\epsilon_1}$ tal que $n > n_{\epsilon_1} \Longrightarrow |a_n - a| < \epsilon$. Também $\exists\ n_{\epsilon_2}$ tal que $n > n_{\epsilon_2} \Longrightarrow |c_n - a| < \epsilon$. Tome $n_\epsilon = \max\{n_{\epsilon_1}; n_{\epsilon_2}\}$. Então,

$$n > n_\epsilon \Longrightarrow a - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \epsilon + a,$$

isto é, $a - \epsilon < b_n < a + \epsilon \Longrightarrow |b_n - a| < \epsilon$, donde conclui-se que $\lim b_n = a$. $\square$

Exemplo 1.5. *Seja a sequência $b_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.*

Prova: Observe que a sequência b_n é formada por termos positivos e, portanto, b_n será maior que a sequência de termos nulos $a_n = 0$. Além disso,

$$b_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n}.$$

Considere então a sequência $c_n = \dfrac{1}{n}$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Como $a_n \leq b_n \leq c_n$, pelo Teorema 1.4, concluí-se que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

O Teorema que será enunciado a seguir caracteriza a convergência de uma sequência numérica sem o conhecimento prévio do seu limite.

Teorema 1.6. *(Critério de Cauchy para sequências numéricas) Uma sequência a_n é convergente se, e somente se, $\forall\ \epsilon > 0$, existir $n_\epsilon > 0$ tal que*

$$n, m > n_\epsilon \Longrightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Exemplo 1.7. *Use o Critério de Cauchy para sequências e estude a convergência de $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.*

Dado $\epsilon > 0$, $\exists\ n_\epsilon > 0$ tal que $\forall\ m, n > n_\epsilon$ e, sem perda de generalidade, tomando $n > m$, tem-se

$$\left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| = \left|\frac{n-m}{(n+1)(m+1)}\right| = \left|\frac{n-m}{nm+n+m+1}\right| < \left|\frac{n-m}{nm}\right|$$

$$= \frac{n}{nm} - \frac{m}{nm} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \frac{1}{n_\epsilon}.$$

Tomando $n_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon}$, obtém-se $|a_n - a_m| < \epsilon$ e, pelo Teorema 1.6, a sequência a_n é convergente.

1.2 Séries Numéricas

Ao tentar somar todos os termos de uma sequência de números reais a_n obtém-se uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Com abuso de linguagem, chama-se essa "soma infinita" de série.

Definição 1.8. *Dada uma sequência a_n, pode-se a partir dela definir uma nova sequência S_n, onde $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Define-se $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ como a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge para sua soma $S \in \mathbb{R}$ se $\lim S_n = S$.*

A abordagem do assunto "soma de uma progressão geométrica" no ensino médio, na realidade refere-se à **série geométrica** $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 r^n$.

A fórmula utilizada no ensino médio para a soma de uma progressão geométrica de finitos termos foi demonstrada em sala de aula da seguinte maneira:

$$S_n = a_1 \cdot r^0 + a_1 \cdot r^1 + a_1 \cdot r^2 + \cdots + a_1 \cdot r^{n-1}. \tag{1.1}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (1.1) por r, obtém-se:

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r^1 + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \cdots + a_1 \cdot r^n. \tag{1.2}$$

Subtraindo (1.2) de (1.1), vem:

$$S_n - r \cdot S_n = a_1 \cdot r^0 - a_1 \cdot r^n$$

$$\Leftrightarrow S_n \cdot (1 - r) = a_1 \cdot (1 - r^n)$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - r^n)}{1 - r}.$$

Após esta demonstração, foi possível deduzir a fórmula para a soma dos "infinitos termos" de uma progressão geométrica. Para isso, foi mostrado que quando $0 < r < 1$ (caso particular tratado no ensino médio) pode-se tomar o limite de S_n quando $n \to \infty$. Neste momento, os alunos tiveram contato com noções de limite e convergência de série numérica.

Exemplo 1.9. *A série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$*, onde* $|r| < 1$ *converge para* $(1-r)^{-1}$.

Prova: Seja $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$. Então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r}$. Mas, como $|r| < 1$, então r^n tende para zero quando n tende para o infinito.

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} = (1-r)^{-1}.$$

Teorema 1.10. *(Critério de Cauchy para séries) Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se, e somente se,* $\forall\ \epsilon > 0$ *existir* $n_\epsilon > 0$ *tal que*

$$m \geq l \geq n_\epsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=l}^{m} a_k \right| < \epsilon.$$

Demonstração: Considere a sequência $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. De acordo com o Teorema 1.6, S_n é convergente se, e somente se, $\forall\ \epsilon > 0$ existir $n_\epsilon > 0$ tal que $n, m > n_\epsilon \Rightarrow |S_m - S_n| < \epsilon$. Observe que:

$$S_m - S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m - a_1 - a_2 - \cdots - a_n$$
$$\Leftrightarrow S_m - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_m = \sum_{k=n+1}^{m} a_k.$$

Tomando $l = n+1$, obtém-se $\displaystyle\left| \sum_{k=l}^{m} a_k \right| < \epsilon.$ □

Exemplo 1.11. *Mostre que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ *é convergente.*

Prova: De fato, $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ n_\epsilon = \dfrac{1+\epsilon}{\epsilon}$ tal que

$$m \geq l \geq n_\epsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=l}^{m} \frac{1}{k^2} \right| < \sum_{k=l}^{m} \frac{1}{k^2 - k} = \sum_{k=l}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$
$$= \left(\frac{1}{l-1} - \frac{1}{l} \right) + \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \right) \cdots \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{l-1} - \frac{1}{m} < \frac{1}{l-1} \leq \frac{1}{n_\epsilon - 1} = \epsilon.$$

A convergência ou a divergência de séries pode ser mais facilmente comprovada com o auxílio de alguns testes que serão abordados a seguir.

Teorema 1.12. *(Teste da divergência) Se* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *não existe ou se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demonstração: Seja $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Suponha, por absurdo, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, isto é, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Sem perda de generalidade pode-se afirmar também que $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = S$. Logo, $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, o que é um absurdo. Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. $\square$

Exemplo 1.13. *Mostre que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{5n-2}$ *diverge.*

Prova: Note que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{5n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n}{n}}{\frac{5n}{n} - \frac{2}{n}} = \frac{4}{5} \neq 0$. Pelo Teorema 1.12, a série dada diverge.

Teorema 1.14. *(Teste da Comparação) Considere as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de termos quaisquer e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *de termos não negativos. Se existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq b_n,$$

então a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *implica na convergência de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Demonstração: Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, pelo Teorema 1.10, $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \ n_\epsilon > 0$ tal que

$$m \geq l \geq n_\epsilon \Rightarrow \left|\sum_{n=l}^{m} b_n\right| < \epsilon.$$

Tome $\delta = \max\{n_0, n_\epsilon\}$. Então

$$m \geq l \geq \delta \Rightarrow \left|\sum_{n=l}^{m} a_n\right| \leq \sum_{n=l}^{m} |a_n| \leq \sum_{n=l}^{m} b_n < \epsilon.$$

$\square$

Observação: No teste da comparação, a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica na divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Exemplo 1.15. *Mostre que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$*, denominada série harmônica, é divergente.*

Prova: Sejam as sequências

$$b_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$$

e

$$a_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{n}\right).$$

Observe que a sequência b_n majora a sequência a_n termo a termo, isto é, $|a_n| \leq b_n$.
Mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$ claramente diverge. Portanto, pelo Teorema 1.14, a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Definição 1.16. *Uma série* $\sum a_n$ *é chamada absolutamente convergente se a série de valores absolutos* $\sum |a_n|$ *for convergente.*

Teorema 1.17. *(Teste da Razão) Considere uma série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e suponha que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$*. Então:*

1. *se* $r < 1$ *a série converge absolutamente;*

2. *se* $r > 1$ *a série diverge;*

3. *se* $r = 1$ *o teste é inconclusivo.*

Demonstração:

1. Sendo $r < 1$, tome $c \in \mathbb{R}$ tal que $r < c < 1$. Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$, pela Definição 1.2, $\forall\ \ \epsilon > 0, \exists\ \ n_\epsilon > 0$ tal que $n > n_\epsilon \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \epsilon$. Tomando $\epsilon = c - r$, temos $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < c - r$. Da desigualdade triangular, segue que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| + r < c - r + r = c.$$

Note que

$$|a_n| = |a_{n_\epsilon}| \cdot \frac{|a_{n_\epsilon+1}|}{|a_{n_\epsilon}|} \cdot \frac{|a_{n_\epsilon+2}|}{|a_{n_\epsilon+1}|} \cdot ... \cdot \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = |a_{n_\epsilon}| \cdot \prod_{k=n_\epsilon}^{n-1} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < |a_{n_\epsilon}| \cdot c^{n-n_\epsilon}.$$

Como $|a_n| < |a_{n_\epsilon}| < |a_{n_\epsilon}| \cdot c^{n-n_\epsilon}$ e a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n_\epsilon}| \cdot c^{n-n_\epsilon}$ converge (Exemplo 1.9). Pelo Teorema 1.14, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

2. Sendo $r > 1$, tome $c \in \mathbb{R}$ tal que $1 < c < r$ e, como no item (1), $\exists\ n_\epsilon > 0$ tal que

$$n > n_\epsilon \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c.$$

Neste caso, tem-se $|a_n| > |a_{n_\epsilon}| \cdot c^{n-n_\epsilon}$ e, como a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n_\epsilon}| \cdot c^{n-n_\epsilon}$ diverge para $c > 1$, pelo Teorema 1.14, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3. Agora, sejam as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Note que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = 1.$$

Porém, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge (exemplo 1.11) enquanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge (Exemplo 1.15). Assim, quando $r = 1$, o teste é inconclusivo.

□

Exemplo 1.18. *Estude a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

Seja $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Então

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge absolutamente.

Teorema 1.19. *(Teste da raiz) Considere a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e seja* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$. *Então:*

1. se $r < 1$ a série converge absolutamente;

2. se $r > 1$ a série diverge;

3. se $r = 1$ o teste é inconclusivo.

Demonstração: Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, então $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ n_\epsilon > 0$ tal que $n > n_\epsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{|a_n|} - r| < \epsilon$.

1. Tome $r < c < 1$, com $c = \epsilon + r$. Assim, $\sqrt[n]{|a_n|} < \epsilon + r \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < c \Rightarrow |a_n| < c^n$, para $n > n_\epsilon$. Pelo Teorema 1.14, como $|a_n| < c^n$, a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (pois $c < 1$), então $\sum_{n+1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

2. Agora, tome $1 < c < r$. Então $\sqrt[n]{|a_n|} > c \Rightarrow |a_n| > c^n$, para $n > n_\epsilon$. Como a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge quando $c > 1$, pelo Teorema 1.14, $\sum_{n+1}^{\infty} a_n$ também diverge.

3. Agora, sejam as sequências $a_n = \dfrac{1}{n}$ e $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Note que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = 1$, porém a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge enquanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge. Portanto, quando $r = 1$, o teste é inconclusivo.

$\square$

Exemplo 1.20. *Mostre que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ *é divergente.*

Prova: Com efeito, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = e > 1$. Pelo Teorema 1.19, a série dada diverge.

Capítulo 2

FUNÇÕES CONTÍNUAS

Neste capítulo serão abordadas definições, exemplos e teoremas sobre a continuidade de funções e também serão apresentadas sequências e séries de funções de acordo com as referências utilizadas.

Definição 2.1. *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, é contínua em um ponto $c \in I$ se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0; |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$. Se f for contínua em todos os pontos do intervalo I, diz-se, então, que f é contínua em I.*

Exemplo 2.2. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, chamada de "função módulo", é contínua.*

Prova: De fato, dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ e $c \in \mathbb{R}$, se $|x - c| < \delta$, com $\delta > 0$, pela desigualdade triangular, $|f(x) - f(c)| = ||x| - |c|| \leq |x - c| < \delta$. Tomando $\delta \leq \epsilon$, tem-se $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$. Portanto, $f(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.3. *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $\forall\ c \in I$ e para toda sequência $a_n \in I$ tem-se $\lim_{n\to\infty} a_n = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Sendo f contínua, dados $c \in I$ e $\epsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $c \in I$,

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

Agora, seja $a_n \in I$ com $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Então $\exists\ n_\epsilon > 0$ tal que $n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - c| < \delta$. Logo, $n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - c| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - f(c)| < \epsilon$, isto é, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$.

($\Leftarrow$) Supõe-se agora que f não é contínua em $c \in I$. Então, $\forall\ \delta > 0, \exists\ \epsilon > 0$ tal que $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| \geq \epsilon$. Em particular, tome $\delta = \dfrac{1}{n}$. Então $\exists\ a_n$ tal que $|a_n - c| < \dfrac{1}{n} \Rightarrow |f(a_n) - f(c)| \geq \epsilon$, isto é, tem-se uma sequência a_n convergindo para $c \in I$ ao passo que a sequência $f(a_n)$ não converge para $f(a)$. □

Exemplo 2.4. *A função afim $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é contínua.*

Prova: De fato, tem-se

$$|f(x) - f(c)| = |ax + b - ac - b| = |ax - ac| = |a||x - c|.$$

Assim, $\forall\ \epsilon > 0$ dado $|f(x) - f(c)| < \epsilon \Leftrightarrow |x - c| < \frac{\epsilon}{|a|}$. Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$, tem-se

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon,$$

isto é, f é contínua em c. Como c foi tomado arbitrariamente, então f é contínua.

2.1 Sequência de Funções

Definição 2.5. *Uma sequência (f_n) de funções, $f_n : I \to \mathbb{R}$, converge pontualmente para uma função $f : I \to \mathbb{R}$ se, $\forall\ x \in I, f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, isto é, dados $\epsilon > 0$ e $x \in I$, $\exists\ n_\epsilon > 0$ tal que*

$$n > n_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Exemplo 2.6. *A sequência de funções $f_n(x) = sen(\frac{x}{n})$ com $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ converge pontualmente para $f(x) = 0$.*

Prova: De fato, fixando x, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} sen(\frac{x}{n}) = sen\ 0 = 0$.

Definição 2.7. *Uma sequência (f_n) de funções $f_n : I \to \mathbb{R}$, com $I \subset \mathbb{R}$, converge uniformemente para uma função $f : I \to \mathbb{R}$ se, dado $\epsilon > 0$, existir n_ϵ (dependendo apenas de ϵ e não de x) tal que*

$$x \in I \text{ e } n > n_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Exemplo 2.8. *A sequência de funções* $f_n(x) = \frac{x}{n}$ *com* $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *converge uniformemente para* $f(x) = 0$.

Prova: De fato, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ n_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$ tal que

$$x \in I \ e \ n > n_\epsilon \Rightarrow \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\epsilon} = \epsilon.$$

Teorema 2.9. *Se uma sequência de funções contínuas* $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *converge uniformemente para uma função* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, então* f *é contínua.*

Demonstração: Da convergência uniforme de $f_n(x)$ segue que, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ n_\epsilon > 0$ tal que $x \in I,\ n > n_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Tem-se por hipótese que f_n é contínua em $x_0 \in I$. Fixado $n > n_\epsilon$, pela definição 2.1 segue que, $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$. Para $n > n_\epsilon$ e $|x - x_0| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\epsilon$.

Pela arbitrariedade de ϵ, concluí-se que $f(x)$ é contínua em $x_0 \in I$. $\square$

Exemplo 2.10. *Seja* $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma sequência de funções tais que* $f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$. *Observe que:*

- $f_n(x)$ *são contínuas em* $[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ *(Figura 2.1);*
- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in [0,1), \\ 1, & se\ x = 1. \end{cases}$

Então a convergência anterior não é uniforme, já que $f(x)$ não é contínua em $[0,1]$ (Figura 2.2).

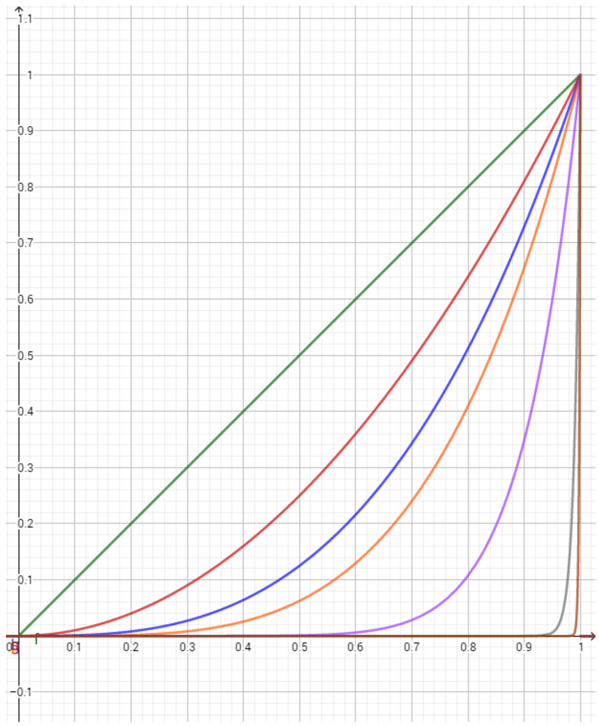

Figura 2.1: Gráfico de $f_n(x)$

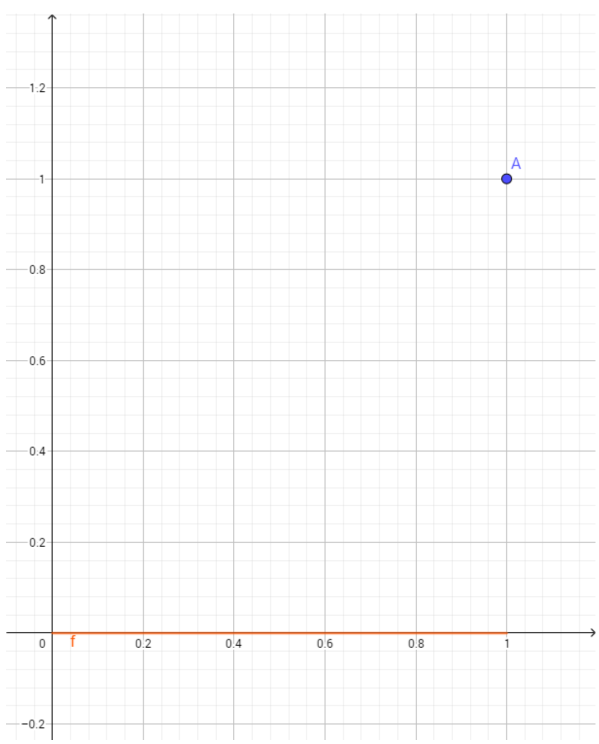

Figura 2.2: Gráfico de $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Exemplo 2.11. *Considere a sequência* $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f_n(x) = \frac{x}{n};\ n \in \mathbb{N}$.

- $f_n(x)$ *é contínua em* $\mathbb{R}$*;*
- $f_n(x)$ *converge uniformemente para* $f(x) = 0$ *(Exemplo 2.8).*

Logo $f(x) = 0$ *é contínua.*

2.2 Série de Funções

Definição 2.12. *Dada uma sequência de funções* $f_n : I \to \mathbb{R}$*, pode-se definir uma outra sequência* $S_n : I \to \mathbb{R}$*, tal que*

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),\ x \in I,\ n \in \mathbb{N}.$$

Se existir $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$*, então diz-se que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge. Caso contrário, a série diverge.*

Exemplo 2.13. *Sejam* $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ *uma sequência de funções* $f_n : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ *uma outra sequência de funções* $S_n : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$*. Como* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = e^x$*, então a série* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge para* e^x*.*

Definição 2.14. *Diz-se que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge:*

- *pontualmente, se a sequência* S_n *convergir pontualmente;*
- *uniformemente, se a sequência* S_n *convergir uniformemente;*
- *absolutamente, se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ *convergir pontualmente.*

Baseando-se nas Definições 2.5 e 2.7 e no estudo anterior de sequências numéricas e de funções pode-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.15. *Seja* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções tais que:*

- $|f_n(x)| \leq a_n$*;*
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Então, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *é convergente.*

Exemplo 2.16. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$ *converge, pois*

- $\left|\frac{sen(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$*;*
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge pelo Exemplo 1.11.*

Teorema 2.17. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente para uma função* $f : I \to \mathbb{R}$ *e* f_n *é uma sequência de funções contínuas em* I*, então* f *é contínua em* I*.*

Demonstração: Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para uma função $f : I \to \mathbb{R}$, então a sequência de funções $S_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$ converge uniformemente para $f : I \to \mathbb{R}$ e, pelo Teorema 2.9, f será contínua. □

Teorema 2.18. *(Teste M de Weierstrass) Seja* f_n *uma sequência de funções definidas em um conjunto* I *e suponha que* a_n *é uma sequência de números tais que* $|f_n(x)| \leq a_n$*,* $\forall\ x \in I$*. Suponha que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge. Então, para cada* $x \in I$*, a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge absolutamente e* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente em* I *para a função* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$*.*

Demonstração: Por hipótese, $|f_n(x)| \leq a_n$ para cada $x \in I$ e a_n converge, logo, pelo Teorema 1.14 (Teste da Comparação), a série $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge. Pela Definição 2.14, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente. Agora, para cada $x \in I$,

$$|f(x) - [f_1(x) + \cdots + f_n(x)]| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right|,$$

para $N \in \mathbb{N}$. Daí

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right| = \left|\lim_{r\to\infty} \sum_{n=N+1}^{r} f_n(x)\right|.$$

Como a função módulo é contínua, segue que

$$\left|\lim_{r\to\infty} \sum_{n=N+1}^{r} f_n(x)\right| = \lim_{r\to\infty} \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right|$$

$$\Leftrightarrow \lim_{r\to\infty} \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \lim_{r\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \lim_{r\to\infty} \sum_{n=N+1}^{r} a_n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

Como a_n converge, tomando N suficientemente grande, $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \to 0$ e então $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. $\square$

Capítulo 3

DERIVADA E INTEGRAL

Neste capítulo a derivada de uma função será abordada apenas considerando sua definição, com exemplos e teoremas que serão necessários para a o estudo da Função de van der Waerden. Também será definida a integral de uma função para que seja possível calcular o comprimento de um arco de uma curva, o qual será bastante importante na ideia intuitiva de funções contínuas e não deriváveis em nenhum ponto.

3.1 A Derivada de uma Função

Definição 3.1. *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $c \in I$. Considere a função $g : I - \{c\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Então:*

- *Se a função g tem limite à direita no ponto c, diz-se que a função f é derivável à direita em c e denota-se por*
$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c};$$
- *Se a função g tem limite à esquerda no ponto c, diz-se que a função f é derivável à esquerda em c e denota-se por*
$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c};$$
- *Se a função f é derivável à esquerda e à direita no ponto c, e as derivadas laterais forem iguais, diz-se que f é derivável em c.*

O valor comum das derivadas laterais em c é chamado de derivada de f em c e definido por

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Definição 3.2. *Dada $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, sendo (a, b) um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e dado $c \in (a, b)$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ do plano (se existir), tem por equação:*

$$y - f(c) = m(x - c),$$

onde

$$m = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

é o coeficiente angular de tal reta tangente e $y = f(x)$.

Exemplo 3.3. *Determine a derivada da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.*

Pela Definição 3.1, dado $c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(x + c) \cdot (x - c)}{(x - c)} = \lim_{x \to c} (x + c) = c + c = 2c.$$

Como c foi tomado arbitrário, concluímos que $f'(x) = 2x, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.4. *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $c \in I$. Se f é derivável à esquerda e à direita no ponto c, então f é contínua em c.*

Demonstração: Suponha por absurdo que f não é contínua em $c \in I$. Então, pela definição 2.1 de continuidade de funções segue que $\forall \ \delta > 0, \ \exists \ \epsilon > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| \geq \epsilon.$$

Mas

$$|g(x)| = \frac{|f(x) - f(c)|}{|x - c|} = \frac{1}{|x - c|} \cdot |f(x) - f(c)| \geq \delta \cdot \epsilon \geq \epsilon,$$

isto é, $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$. Em particular, $\lim_{x \to c^+} g(x) = \lim_{x \to c^-} g(x) = \infty$, o que contradiz a hipótese de que $\lim_{x \to c^+} g(x) = f'(c^+)$ e $\lim_{x \to c^-} g(x) = f'(c^-)$. Portanto, f é contínua em c. $\square$

Exemplo 3.5. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ não possui derivada em $x = 0$.*

De fato, pela Definição 3.1,

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}.$$

Mas, neste caso $x < 0$ e, assim, $|x| = -x$. Logo $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$. Ainda pela Definição 3.1,

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}.$$

Neste caso $x > 0 \Rightarrow |x| = x$. Logo $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$.

Como f é derivável à direita e à esquerda do ponto zero, pelo Teorema 3.4, a função é contínua neste ponto. Porém, $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, provando que $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$.

Agora será enunciado o Teorema do Valor Médio de Lagrange e, em seguida, será apresentada uma ideia geométrica do significado.

Teorema 3.6. *(Teorema do Valor Médio de Lagrange) Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então $\exists\, c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

A secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ tem coeficiente angular igual a $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

É possível transladar essa secante paralelamente a si mesma até que tangencie o gráfico de f em um ponto $(c, f(c))$ (Figura 3.1), cujo coeficiente angular é $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$, de acordo com as Definições 3.1 e 3.2.

Como as retas secante e tangente são paralelas, conclui-se geometricamente o Teorema do Valor Médio (TVM) de Lagrange:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

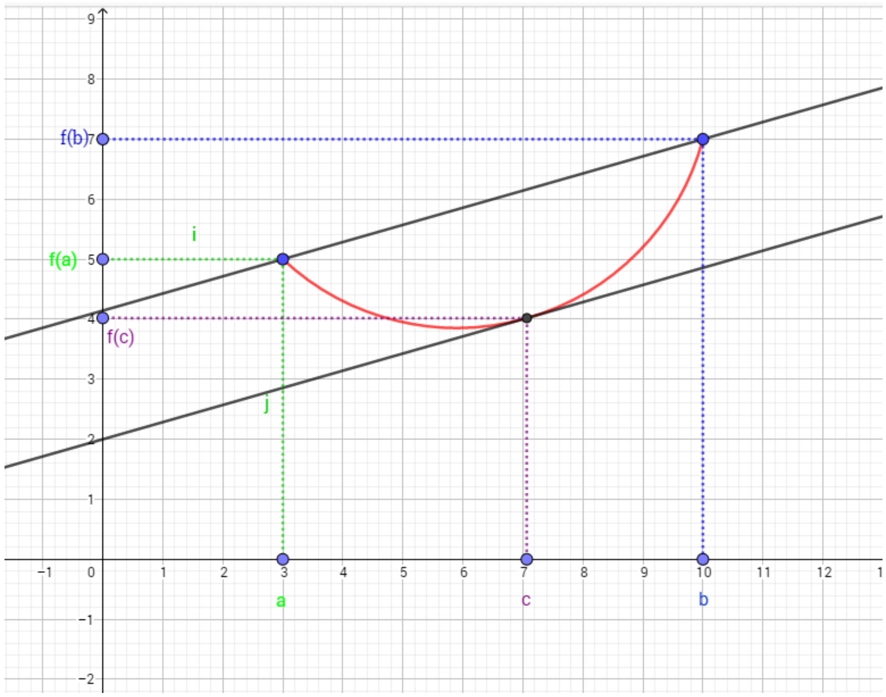

Figura 3.1: TVM De Lagrange

3.2 A Integral de uma Função

Definição 3.7. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções definidas em um intervalo $[a, b]$ e F a primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x), \forall\ x \in [a, b]$. A integral indefinida de f será chamada integral de f é o conjunto de todas as primitivas de f*

$$F(x) + C = \int^{x} f(x)dx,\ \forall\ x \in [a, b].$$

Definição 3.8. *(Cauchy) Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então*

$$\int_a^b f = \lim \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}),$$

onde $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ é uma partição de $[a, b]$ e o limite é tomado quando $\|\pi\| \to 0$, onde $\|\pi\|$ (norma de π) é o comprimento do mais longo subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para $0 \leq i \leq n - 1$.

3.2.1 Aplicação: Cálculo do Comprimento de um Arco de uma Curva

Para o cálculo do comprimento de arco de curvas geradas por funções afins, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no intervalo desejado.

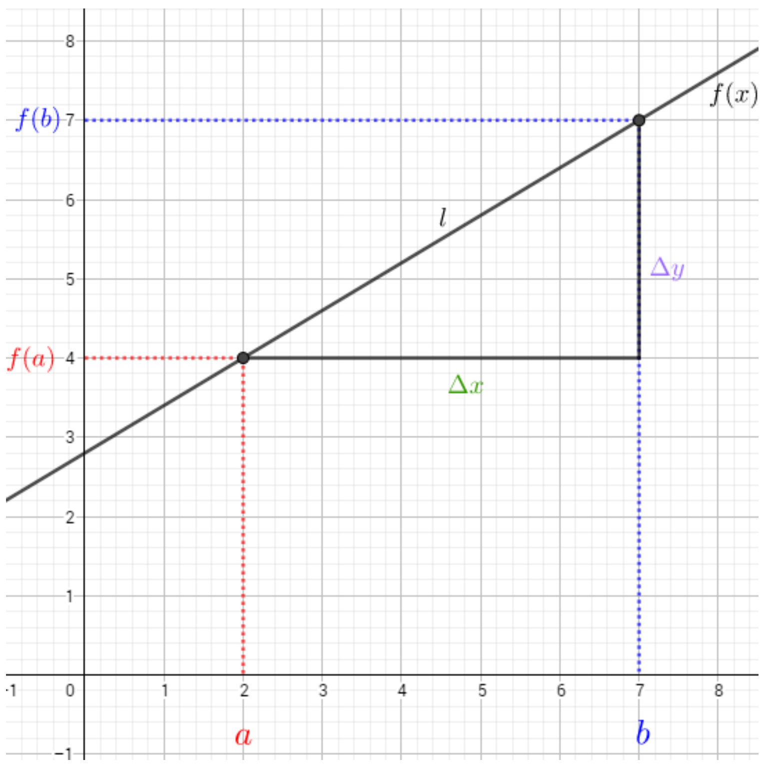

Figura 3.2: Gráfico de uma função afim

De acordo com a Figura 3.2,

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{3.1}$$

Agora, considere uma função f contínua no intervalo $[a, b]$ e continuamente derivável em (a, b), conforme a Figura 3.3.

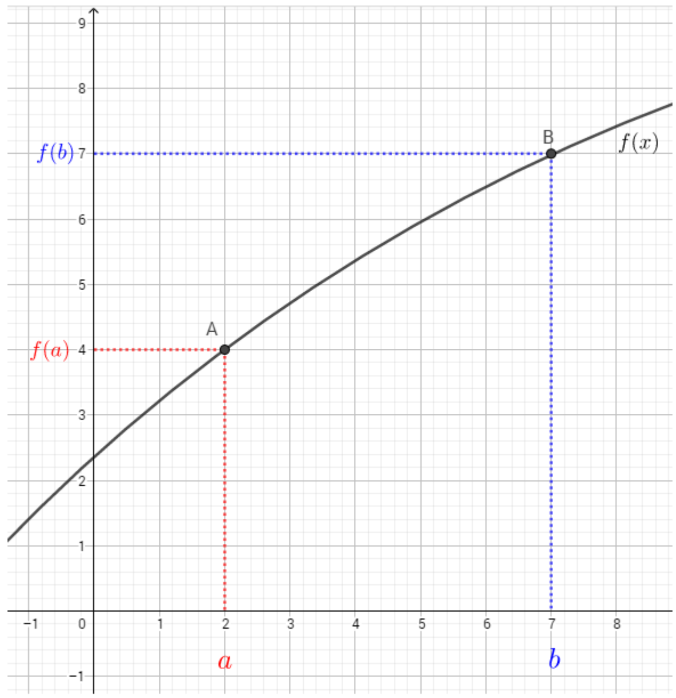

Figura 3.3: Gráfico de uma função $f(x)$

Para calcular o comprimento do arco da curva entre os pontos A e B, subdivide-se a curva em finitos segmentos de reta e efetua-se o cálculo de acordo com a Equação 3.1 (Figura 3.4).

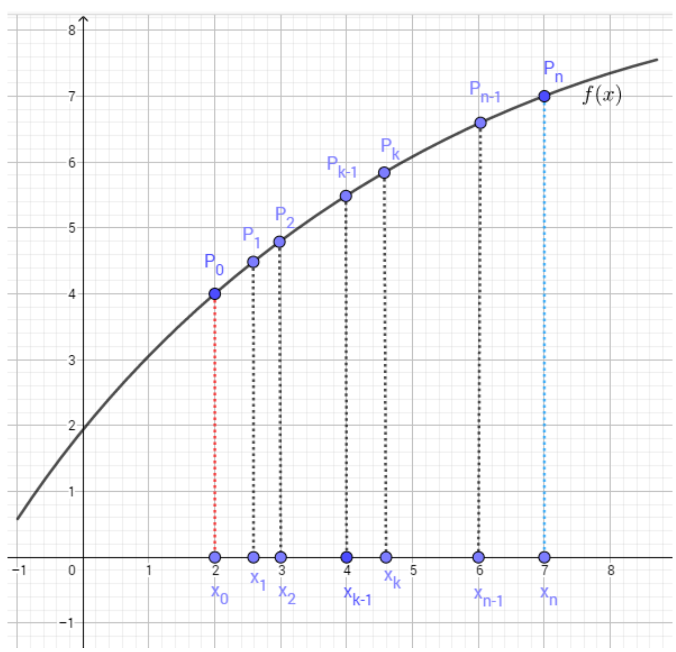

Figura 3.4: Curva subdividida

Considere $P_k = (x_k, f(x_k)), \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ e $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, onde $y_k = f(x_k)$, para $k = 1, 2, \cdots, n$.

Assim, $l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{\dfrac{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}{(\Delta x_k)^2} \cdot (\Delta x_k)^2}$, isto é,

$$l_k = \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_k)^2}{(\Delta x_k)^2}} \cdot \Delta x_k = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k.$$

Como $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e continuamente derivável em (a, b), então $f(x)$ é derivável em $[x_{k-1}, x_k]$ e, pelo Teorema do Valor Médio, $\exists\ c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = f'(c_k)$.

Assim, $l_k = \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} \cdot \Delta x_k$.

Somando os n comprimentos em que a curva foi dividida, tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} \cdot \Delta x_k.$$

O comprimento do arco da curva entre os pontos A e B é obtido fazendo Δx_k tender a zero, isto é,

$$L = \lim_{max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} \Delta x_k.$$

De acordo com a Definição 3.8,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Capítulo 4

FUNÇÕES CONTÍNUAS E NÃO DERIVÁVEIS EM PONTO ALGUM

Difícil acreditar que existem mais funções contínuas e não deriváveis em ponto algum do que deriváveis? Pois é, neste capítulo será apresentado um exemplo clássico, que é a função de van der Waerden.

4.1 A função de van der Waerden

Figura 4.1: Bartel Leendert van der Waerden

Em 2 de fevereiro de 1903 nasce em Amsterdã (capital da Holanda) Bartel Leendert van der Waerden, popularizador da Álgebra Moderna no século XX através da sua mais famosa obra intitulada "Modern Algebra". Nesta, van der Waerden propõe um estudo sobre álgebra abstrata e apresenta uma função contínua e que não possui derivada em ponto algum. Tal função recebe seu nome e será mostrada neste capítulo.

No final de sua carreira, van der Waerden dedicou-se principalmente à história da Matemática e da Ciência. Encerrou-a na Universidade de Zurique, cidade da Suíça onde morreu em 12 de janeiro de 1996, aos 92 anos de idade.

4.1.1 Considerações iniciais

Considere inicialmente a função $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_0(x) = \{x\}$, onde $\{x\}$ denota a distância de x ao inteiro mais próximo.

Exemplo 4.1.

$$f_0(8,3) = |8,3 - 8| = 0,3;$$

$$f_0(2,94) = |2,94 - 3| = 0,06.$$

Agora, seja $f_1(x) = f_0(10x) = f_0(10^1 x)$, com $x \in \mathbb{R}$. Então, $f_1(x)$ é a distância de $10x$ até o inteiro mais próximo.

Exemplo 4.2. *Cálculo de* $f_1(4,56)$*:*

Como $f_1(4,56) = f_0(10 \cdot 4,56) = f_0(45,6)$*, então* $f_1(4,56) = |45,6 - 46| = 0,4.$

Analogamente, define-se $f_2(x)$ como sendo a distância de $100x$ ao inteiro mais próximo, isto é, $f_2(x) = f_0(100x) = f_0(10^2 x)$.

Essas definições são generalizadas da seguinte forma:

$$f_k(x) = f_0(10^k x),\ \forall\ x \in \mathbb{R};\ k \in \mathbb{N}.$$

Observe os gráficos das funções f_0, f_1 e f_2 representados pelas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4, respectivamente.

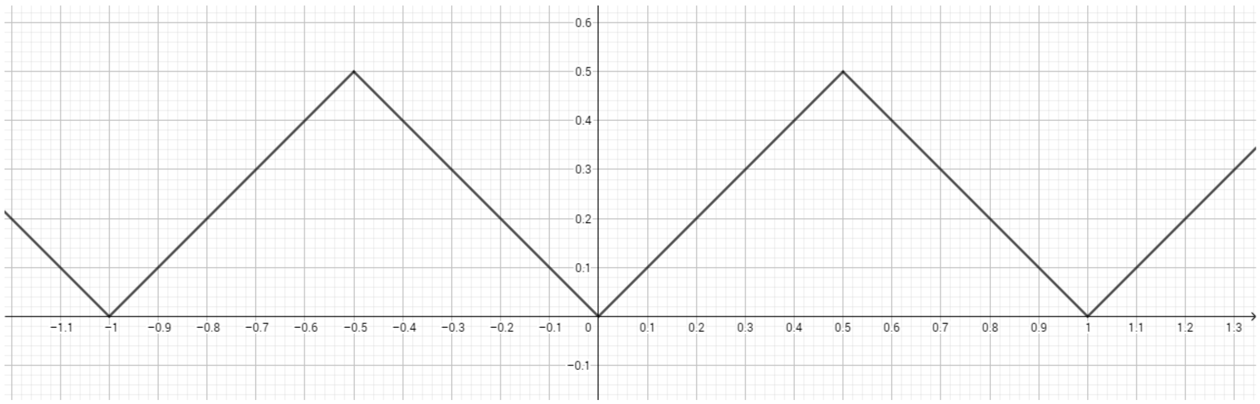

Figura 4.2: Gráfico da função f_0

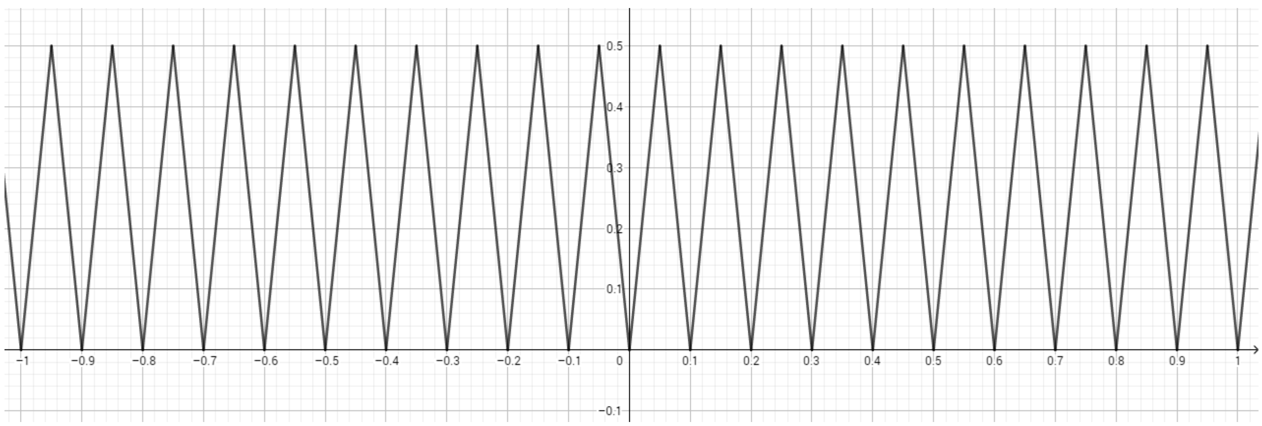

Figura 4.3: Gráfico da função f_1

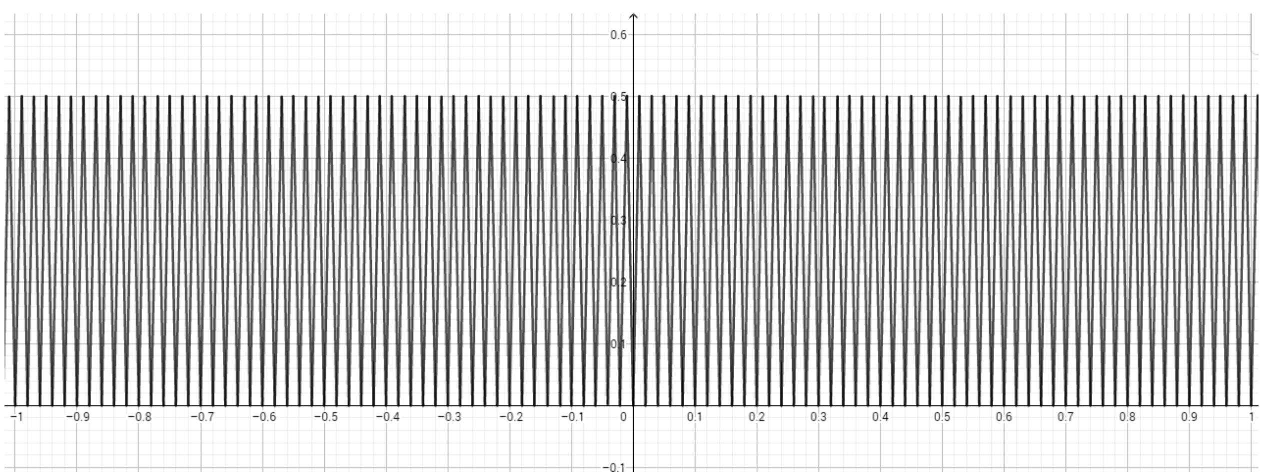

Figura 4.4: Gráfico da função f_2

Nota-se que já é uma tarefa bem difícil traçar retas tangentes ao gráfico de f_2. Considerando o intervalo $(0, 1)$, por exemplo, a cada iteração, o gráfico fica com 10^n "dentes", isto é, o gráfico de f_1 tem 10 "dentes", o de f_2, 100 "dentes" e assim sucessivamente.

Agora, para esclarecer melhor o que será feito na função de van der Waerden, observe o gráfico de $f_0 + f_1$ no intervalo [-1, 1]:

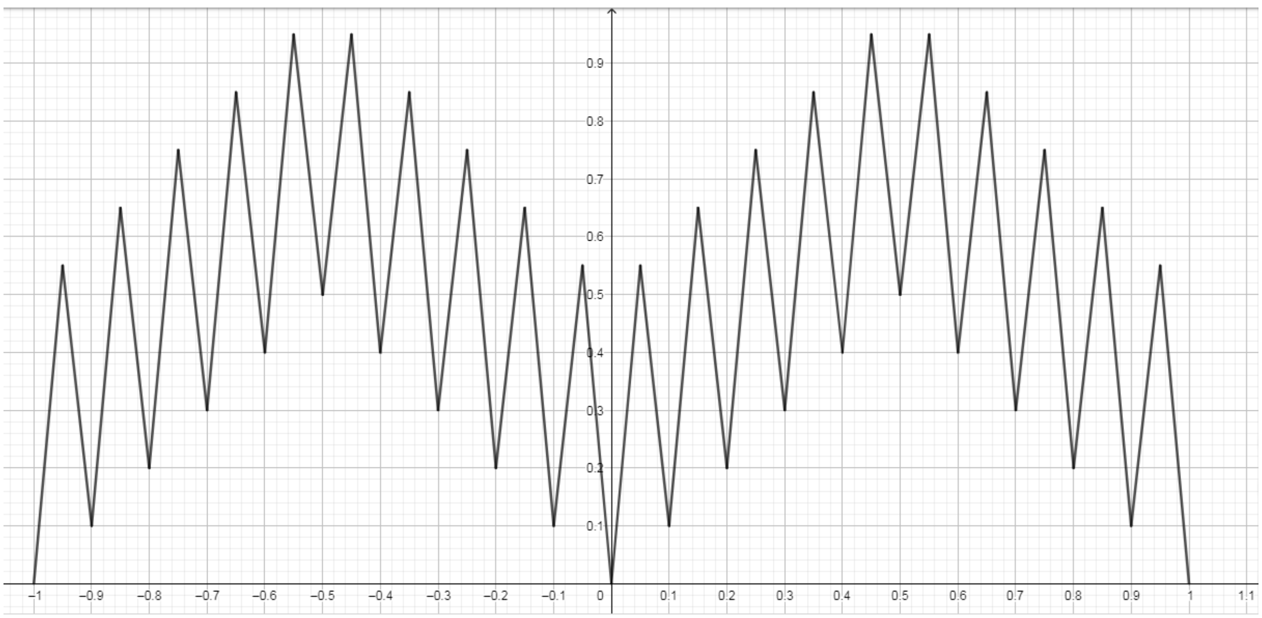

Figura 4.5: Gráfico da função $f_0 + f_1$

Os cálculos dos pontos da função $f_0 + f_1 + f_2$ já tornam-se bem complicados a essa altura, bem como traçar seu gráfico. Note que:

$$(f_0 + f_1 + f_2)(0,005) = 0,005 + 0,05 + 0,5 = 0,005 + 0,05 + 0,5 = 0,555$$

e

$$(f_0 + f_1 + f_2)(0,06) = 0,06 + 0,6 + 6 = 0,06 + 0,4 + 0 = 0,46$$

por exemplo.

Assim, segue o gráfico de $f_0 + f_1 + f_2$ em um intervalo menor, porém suficiente para compreender o que acontece com a soma das iterações das funções.

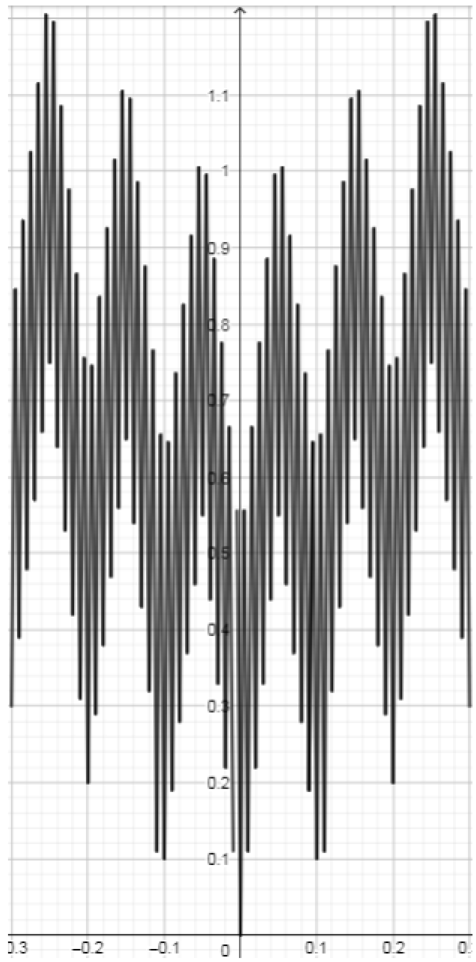

Figura 4.6: Gráfico da função $f_0 + f_1 + f_2$

4.1.2 O Teorema

Define-se, agora, a seguinte sequência de funções:

$$f_n(x) = \frac{1}{10^n}\{10^n x\}.$$

A função $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$ é a função de van der Waerden.

Teorema 4.3. *Seja $\{x\}$ a distância de x para o inteiro mais próximo. A função de van der Waerden é contínua em todo ponto, porém é derivável em nenhum.*

Demonstração:

Continuidade: Claramente tem-se para todo x:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{10^n}\{10^n x\} \right| \leq \frac{1}{10^n} \cdot 1.$$

Mas pelo Exemplo 1.9, é possível afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ converge, visto que é uma série geométrica de razão menor que 1.

Pelo Teorema 2.18 (Teste M de Weierstrass), $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para a função $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$. Logo, pelo Teorema 2.17, conclui-se que a função de van der Waerden é contínua.

Não derivabilidade: Sejam $x \in \mathbb{R}$ um ponto arbitrário e $m \in \mathbb{N}$ fixo. Então, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$k \leq 10^m x \leq k+1,$$

isto é,

$$10^{-m}k \leq x \leq 10^{-m}(k+1).$$

Assim, para mostrar que não existe derivada no ponto x, basta provar que

$$\lim_{m \to \infty} \frac{f(10^{-m}(k+1)) - f(10^{-m}k)}{10^{-m}(k+1) - 10^{-m}k} \tag{4.1}$$

não existe.

Observe que:

$$f(10^{-m}(k+1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot 10^{-m}(k+1)\}}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^{n-m}(k+1)\}}{10^n}$$

e

$$f(10^{-m}k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot 10^{-m}k\}}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^{n-m}k\}}{10^n}.$$

Assim,

$$f(10^{-m}(k+1)) - f(10^{-m}k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^{n-m}(k+1)\}}{10^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^{n-m}k\}}{10^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^{n-m}(k+1)\} - \{10^{n-m}k\}}{10^n} \tag{4.2}$$

Agora, observe a análise de $\{10^{n-m}(k+1)\} - \{10^{n-m}k\}$:

- Quando $n \geq m$, $10^{n-m}k$ e $10^{n-m}(k+1)$ são números inteiros e, portanto,

$$\{10^{n-m}(k+1)\} - \{10^{n-m}k\} = 0.$$

- Quando $n < m$, $10^{n-m}(k+1)$ e $10^{n-m}k$ são valores que estão entre 0 e 1. Portanto, $\{10^{n-m}(k+1)\} = 1 - 10^{n-m}(k+1)$ e $\{10^{n-m}k\} = 1 - 10^{n-m}k$. Assim,

$$\{10^{n-m}(k+1)\} - \{10^{n-m}k\} = 1 - 10^{n-m}(k+1) - (1 - 10^{n-m}k),$$

isto é,

$$\{10^{n-m}(k+1)\} - \{10^{n-m}k\} = 1 - 10^{n-m}k - 10^{n-m} - 1 + 10^{n-m}k = -10^{n-m}.$$

Então tem-se

$$\{10^{n-m}(k+1)\} - \{10^{n-m}k\} = \begin{cases} 0, & n \geq m \\ -10^{n-m}, & n < m \end{cases}.$$

Agora, de (4.2) vem que:

- Se $n \geq m$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{\{10^{n-m}(k+1)\} - \{10^{n-m}k\}}{10^n} = \frac{0}{10^n} = 0.$$

- Se $n < m$

$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\{10^{n-m}(k+1)\} - \{10^{n-m}k\}}{10^n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{-10^{n-m}}{10^n} = \sum_{n=0}^{m-1} -10^{-m} = -m \cdot 10^{-m}.$$

Portanto, de (4.1) obtém-se:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f[10^{-m}(k+1)] - f(10^{-m}k)}{10^{-m}(k+1) - 10^{-m}k} = \lim_{m\to\infty} \frac{-m \cdot 10^{-m}}{-10^{-m}} = \lim_{m\to\infty} m.$$

Observe que o limite (4.1) não existe e, como x foi tomado arbitrariamente, fica demonstrado que a função de van der Waerden não é derivável em ponto algum.

$\square$

Considerações Finais

Com o desenvolvimento da presente dissertação foi possível perceber que há como inserir conceitos de análise real no ensino básico, bem como aprofundar tais conceitos com alunos de Q.I. acima da média ou de altas habilidades na área das matérias exatas como a Matemática. Uma aplicação de todo o conteúdo apresentado foi vista na demonstração do Teorema 4.3, objetivo da presente dissertação.

No decorrer da construção deste trabalho foi possível realizar, em sala de aula, algumas aplicações aqui presentes, tais como a construção de frações geratrizes de dízimas periódicas com sequências e séries numéricas no oitavo ano do ensino fundamental. Outra aplicação foi feita com alunos da primeira série do ensino médio, onde deduziu-se a fórmula utilizada para somar os "infinitos termos" de uma Progressão Geométrica por meio da série geométrica. Infelizmente não houve tempo hábil para que fosse feito um minicurso com esse grupo de alunos e levar a eles mais conhecimento sobre análise real, porém a ideia não foi descartada e a intenção é de colocá-la em prática em breve.

Com esta dissertação foi possível verificar a importância de todo o conhecimento adquirido, bem como poder transmiti-lo. O crescimento pessoal e profissional ficou evidente ao longo da execução deste trabalho, de modo que a intenção é de usá-lo cada vez mais e melhor no decorrer das aulas.

Levando em consideração que as sequências e as séries numéricas são bastante estudadas no ensino básico e que a maioria das funções vistas nessa fase do ensino são contínuas, este trabalho abordou definições, teoremas e exemplos de tais assuntos. Derivada e integral foram importantes para uma aplicação: o estudo de comprimento do arco de uma curva de funções de classe C^1. A demonstração de que a função de van der Waerden é contínua e não derivável em ponto algum deu um fechamento ao trabalho e uma aplicação de todo o conteúdo abordado.

Referências

[1] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de, *Análise I*. Editora Universidade de Brasília - Livros técnicos e científicos editora S.A., Rio de Janeiro (1975).

[2] MUNIZ NETO, Antonio Caminha, *Fundamentos de Cálculo* - Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[3] SHILOV, G. E., and Gurevich, B. L., 1978. Integral, Measure, and Derivative: A Unified Approach, Richard A. Silverman, trans. Dover Publications. ISBN 0-486-63519-8.

[4] CÁLCULO, São Paulo: Segmento, ed. 6, ano 1, 2011.

[5] LEITHOLD L. *O Cálculo com Geometria Analítica*, volume I. Harbra, 1994.

[6] http://www.estruturas.ufpr.br/wp-content/uploads/2015/04/material05.pdf. Acesso em: 27 de abril de 2018.

[7] https://pt.wikipedia.org/wiki/Bartel_Leendert_van_der_Waerden. Acesso em: 08 de maio de 2018.