UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

LUÍS FERNANDO ALCÂNTARA DE FALQUI

Contando cartas, descobrindo possibilidades: uma abordagem prática sobre operações mentais, raciocínio lógico, análise combinatória e probabilidade

Três Lagoas

2018

LUÍS FERNANDO ALCÂNTARA DE FALQUI

Contando cartas, descobrindo possibilidades: uma abordagem prática sobre operações mentais, raciocínio lógico, análise combinatória e probabilidade

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

Três Lagoas

2018

FALQUI, Luís Fernando Alcântara de. **Contando cartas, descobrindo possibilidades:** uma abordagem prática sobre operações mentais, raciocínio lógico, análise combinatória e probabilidade. Dissertação (Mestrado) apresentada à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 19/11/2018

Banca Examinadora

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

UFMS/CPTL

Orientador

Julgamento Aprovado

Assinatura

Prof. Dr. Renato César da Silva

UFMS/CPTL

Julgamento Aprovado

Assinatura Renato Cesar da Silva

Prof. Dr. Jair da Silva

UFPR

Julgamento Aprovado

Assinatura Jair da Silva

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, todos anjos e santos que sempre me acompanharam, iluminaram e abençoaram em minha caminhada.

À minha família, em especial meus pais Elaine e João, os quais nem todos adjetivos de gratidão, elogio podem quantificar ou qualificar o amor e orgulho em ser seu filho. Minha esposa Fabyolla, meu amor, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos de dificuldade e ansiedade, a qual me deu a oportunidade de realizar o sonho de ser pai, do nosso Bernardo. Este ainda nem imagina o quão importante é para todos nós, o quanto transformou, para muito melhor, nossas vidas. Também, meus avós (Laura, Neli, José e Leandro) tão simples e sapientes em suas palavras e ações. Meus padrinhos, pais "por escolha" (Ângela e Gervásio) e seus filhos, meus irmãos (Angelinha, Dé e Neto) e meus compadres (Diego e Maria). A todos tios e tias, primos e primas, que sempre foram, e ainda são presentes a cada dificuldade, a cada conquista. Também cito a família Loli (Matheus, Téia, Dilaini, Mariane, Leonardo, Vítor, Vinicius, João Pedro) que me fez parte dos seus.

Aos parceiros da "terrinha querida" Turiúba (Kbça, Salame, Palito, Marcos, Hélio, Bocão, Tesouro, Sidney, Gerente, Birto, Salomé, Lima, Pastel, Vaga, Urias, Bugro, Nego, Buizin, Diegão e Gu), aos irmãos de "Rep. JAnelas"/ (Vinícius Biroska, Marquinhos, Danado, Tanabi, Farofa, Xiu, Madruga, Cabessa, Virso, Frota, Pinda, Sapo, Super, Mig, Brunão, Mané, Dan, Anderson, Cotô, Ghai, Giba, Larika, Porva, Renanzão, Tigrão, Will, Xupeta, Perdido, Bag e Xupim).

A todos alunos (as), professores (as), coordenadores (as), diretores (as) e demais funcionários (as) das escolas pelas quais pude trabalhar e aqueles que passaram por minha vida de estudante, singular e carinhosamente ao professor/amigo/mestre Anderson Dersão, que, além de ceder espaço em seu curso de exatas, o Simetria, para desenvolvimento do projeto, me ensinou muito mais do que matemática, me deu oportunidades profissionais e pessoais como alguém da família, e aos amigos (Hector, Nando, Paulo, Felps, Edu, Mineiro, Paulo Estevão e GG), com os quais muito aprendi sobre essa tão especial profissão.

Aos companheiros (as) e professores (as) do PROFMAT, da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul no Campus de Três Lagoas, particularmente aqueles que dividiram a estrada, as angustias e conquistas que tivemos (Zonta, Ângela, Cidinha e Giovana) e ao Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza, por aceitar me orientar e trabalhar em conjunto neste programa.

Por fim, agradeço ao professor George e aos alunos (Roger, João Lucas, Maria Eduarda, Matheus, Guilherme, Nicole, Natany, Leonardo, Ana Laura, Mateus) que participaram das atividades desenvolvidas a partir do projeto.

Erga essa cabeça, mete o pé e vai na fé
Manda essa tristeza embora
Basta acreditar que um novo dia vai raiar
Sua hora vai chegar.

(ASSIS, Alexandre, RODRIGUES, Carlos,
BERNINI, Gilson, 2009)

RESUMO

FALQUI, Luís Fernando Alcântara de. **Contando cartas, descobrindo possibilidades:** uma abordagem prática sobre operações mentais, raciocínio lógico, análise combinatória e probabilidade. 2018. 86 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, Três Lagoas, 2018.

Buscando quebrar inúmeros tabus e preconceitos que no caso, afetam o processo de ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos, entre eles: raciocínio lógico, contagem, análise combinatória e probabilidade, este trabalho traz uma abordagem simplória, porém atrativa e de fácil absorção, despertando curiosidades e construindo pensamentos estratégicos intuitivos, sejam eles individualmente ou coletivamente. A utilização dos jogos de cartas tradicionais, tais como: escopa e pôquer, como instrumentos de ensino se deu de forma muito favoráveis ao desenvolvimento cognitivo dos alunos. Além de chamar a atenção dos mesmos desde a primeira abordagem sobre o projeto, eles conseguiram desenvolver competências e habilidades de modo mais natural e concreto, observando todas as possibilidades que as cartas traziam a cada rodada. Este trabalho tem como objetivo mostrar uma "nova" tecnologia aos alunos do Ensino Médio e curso pré-vestibular, tirando-os dos livros didáticos e lousa, permitindo que sejam os próprios mediadores de sua aprendizagem.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Probabilidade. Operações Mentais. Pôquer. Escopa.

ABSTRACT

FALQUI, Luís Fernando Alcântara de. **Counting letters, discovering possibilities:** a practical approach to mental operations, logical reasoning, combinatorial analysis, and probability. 2018. 86 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, Três Lagoas, 2018.

Seeking to break down numerous taboos and prejudices that, in this case, affect the teaching-learning process of mathematical concepts, among them: logical reasoning, counting, combinatorial analysis and probability, this work brings a simple but attractive and easily absorbed approach, arousing curiosities and constructing intuitive strategic thoughts, be they individually or collectively. The use of traditional card games, such as: scopa and poker, as teaching instruments occurred in a very favorable way to the students' cognitive development. In addition to drawing their attention from the first approach on the project, they were able to develop skills and abilities in a more natural and concrete way, observing all the possibilities that the cards brought with each round. This work aims to show a "new" technology to high school students and pre-college courses, taking them from the textbooks and blackboard, allowing them to be the mediators of their learning.

Keywords: Combinatorial Analysis, Probability, Mental Operations, Poker, Scopa.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 09
2 BARALHO 12
2.1 Baralho Padrão 12
2.2.1 Francês 12
2.1.2 Espanhol 12
2.2 Baralho fantasia 12
3 ESCOPA 18
4 PÔQUER 23
4.1 Texas Hold'em 24
4.1.1 Jogadas 26
4.2 Omaha 31
4.3 Omaha 8/b (eight or better) 31
4.4 Stud 33
4.5 Razz 33
4.6 H.O.R.S.E. 34
5 ANÁLISE COMBINATÓRIA 35
5.1 Conjuntos 35
5.2 Contagem 40
5.3 Tipos de agrupamento 44
5.4 Número Fatorial 44
5.5 Classificação 45
6 PROBABILIDADE 56
7 PROBABILIDADE CONDICIONAL 64
8 EXECUÇÃO DO PROJETO 70
9 CONCLUSÃO 82
REFERÊNCIAS 84
APÊNDICE A – Comunicado 85
APÊNDICE B – Autorização 86

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Inspirados na enorme dificuldade e até certa aversão aos conceitos apresentados, os quais são constantemente exigidos em grandes vestibulares, este projeto tem como objetivo contribuir para a diminuição das dificuldades, buscando maior integração prática dos alunos, por meio de jogos de cartas. Possibilitar a compreensão de conteúdos matemáticos como contagem, análise combinatória, raciocínio lógico, operações mentais e probabilidade, para alunos dos segundos e terceiros anos do Ensino Médio e curso pré-vestibular é nossa motivação.

A utilização dos jogos no ensino da matemática traz vários termos que podem propiciar movimento, prazer e alegria em suas aplicações, por exemplo: a competição, que instiga e impulsiona os jogadores na busca pela vitória. As regras, aquelas que determinam os caminhos a se seguir. O desafio, que podemos definir como o “tempero” do jogo, aquele que traz a motivação e o interesse no jogo. A atividade lúdica, buscando o desejo em querer jogar cada vez mais e melhor (GRANDO, 1995).

Permitir a manifestação do imaginário dos alunos, utilizando jogos e objetos de modo proposital, subsidia o desenvolvimento dos mesmos em paralelo com a função pedagógica destas atividades. Assim, respeitando o ato lúdico, qualquer jogo apresenta caráter educativo, podendo ser definido como jogo educativo. Deixando a cargo dos professores dar significado e conhecimento para as ações a serem executadas, dando significado pedagógico, desencadeando um trabalho de aplicação e/ou exploração de conceitos matemáticos (CABRAL, 2006).

Os jogos nos ensinam que nem tudo ocorre como prevemos ou desejamos. É necessário saber perder, dar o “passo atrás”, se reerguer e recomeçar. Muitas vezes trapacear pode ser uma saída que, praticamente nunca, gera vitória, apenas uma vantagem momentânea. O samba “Clareou” de Xande de Pilares pode nos incutir sobre isso, no trecho, “ganhar e perder faz parte”.

No primeiro capítulo traremos informações sobre o baralho, que é um conjunto de cartas representadas por símbolos, números e gráficos, utilizados em jogos, truques de mágica, testes psicológicos, para fins educativos, que é a nossa tratativa, entre outros. Traz em suas histórias muitas incertezas sobre sua origem, além de inúmeros mitos, lendas e variações sobre sua utilização e significado de suas cartas (SOARES, 2016).

A escopa, assunto do segundo capítulo, é um jogo de origem italiana, cujo nome "scopa", significa vassoura, justificando a busca pela jogada mais desejada, já que, fazer uma escopa é recolher todas as cartas da mesa, ou seja, limpá-la. Equivalente à ação de uma vassoura. De fácil desenvolvimento e compreensão, pois basta que a soma das cartas seja igual a 15. Sempre que isso ocorrer, o jogador pega pra si tais cartas, as quais serão devidamente contadas, de acordo com seus valores individuais e conjuntos, ao final de cada rodada.

Poker, como é mundialmente conhecido ou pôquer, jeito "abrasileirado" de se escrever, é um jogo fácil de aprender e difícil de dominar. Exige estudo, disciplina e prática, como qualquer outro jogo ou esporte que é levado a prática profissional.

Encontraremos no terceiro capítulo as regras, jogadas, histórias, curiosidades e algumas das modalidades sobre este jogo, que se afamou devido às altíssimas premiações recebidas em seus torneios. Em 2006, o WSOP - World Series of Poker (campeonato mundial de pôquer), pagou mais de 12 milhões de dólares a seu vencedor, o produtor de TV e jogador amador, Jamie Gold (BELLO, 2007).

A todo momento, mesmo sem perceber, estamos contando algo: moedas para pagar o pão, meias limpas na gaveta, carros na estrada, quanto dinheiro investir, etc. Porém, algumas coisas que necessitamos contar não se dão de modo tão simples: número de senhas possíveis, de acordo com algumas restrições; organizar uma comissão para organizar a formatura, números de placas que terminam com um número par, etc. Isso tudo é englobado pela análise combinatória, ramo da matemática que conceitua e possibilita tais contagens, tendo como base o princípio fundamental da contagem. Conteúdos estes, os quais trabalharemos no quarto capítulo (FURUKAWA, 2017).

"Quem não sonhou em ser um jogador de futebol?" o grupo Skank nos indaga sobre talvez, o maior sonho de todo menino, e também algumas meninas, nascidos no "país do futebol" em sua música "É uma partida de futebol". Em um ano de Copa do Mundo, podemos nos perguntar qual a chance de ocorrer um novo 7 x 1 entre Brasil e Alemanha? Talento, dedicação, controle das emoções, enfim, existem muitas variáveis que permeiam o futebol e outras atividades desportivas, econômicas, médicas. Suposições aleatórias, sem uma análise mais aprofundada, podem camuflar as verdades que os cálculos de probabilidade nos indicam. Estudaremos este conceito matemático no capítulo 5.

Continuando com o futebol, pensemos em duas questões: qual a chance de um jovem, vindo do sertão nordestino se tornar jogador profissional de futebol? E se for oriundo do sudeste, mudam suas chances? Observamos em ambas, condições diferentes para a conquista do sonho, já que, as regiões do país, devido seu desenvolvimento, clima, infraestrutura, entre outros podem interferir, juntamente como as qualidades do postulante a jogador, numa melhor "sorte". No capítulo 6, trataremos da probabilidade condicional, um dos ramos da probabilidade que se aprofunda em questões similares às vistas anteriormente.

CAPÍTULO 2

BARALHO

Os jogos de cartas são realizados através da utilização de um baralho. Faremos um relato sobre sua história, significado e representação de seus símbolos, além de algumas variações destes e das quantidades de cartas utilizadas, de acordo com alguns países e jogos em especial.

Ludus Cartarum – nome genérico dado ao baralho, o qual vem do fato de que, antes de serem distribuídas, as cartas devem sem misturadas/embaralhadas. Pode ser classificado iconograficamente em duas categorias: (DA SERRA NEGRA, 1992)

2.1 Baralho Padrão: aquele que foi aceito por seus usuários, atendendo padrões específicos, produzido por diversos fabricantes. Os baralhos padrão que são utilizados mundialmente são:

2.1.1 Francês*: Composto por 52 cartas, estas dadas em quatro naipes, cada um deles com 13 cartas, que são: A (ás), DOIS, TRÊS, QUATRO, CINCO, SEIS, SETE, OITO, NOVE, DEZ, J (valete), Q (dama), K (rei). Os valores atribuídos as cartas A, J, Q, K são, 1, 11, 12 e 13, respectivamente. Utilizados para jogos como truco, escopa, bisca, dentre outros (PIRES, 2016).*

2.1.2 Espanhol: *semelhante ao francês, tendo variação apenas no número de cartas, que são 40, pois são retiradas as cartas, OITO, NOVE e DEZ. Com tal mudança, as cartas A, Q, J, K, têm valores 1, 8, 9 e 10, respectivamente. Utilizado em jogos como pôquer e Black Jack (também chamado 21) (PIRES, 2016).*

2.2 Baralho Fantasia: aquele que apresenta uma concepção particular, não se ajustando a um padrão definido. Citamos como exemplo, um baralho criado por Ziraldo, em 1964, que tinha como atribuição crítica a ditadura militar.

Assim como para muitos jogos os quais o utilizam, a origem das cartas não é precisa. Alguns indícios relatam sua aparição na China, juntamente com o papel, no século X. Outros trazem uma origem árabe, em países como Índia, Egito, os antigos países da península arábica (Mesopotâmia, Assíria e Suméria), chegando à Europa tanto pela Itália quanto pela Península Ibérica, por volta dos séculos XIV e XV (SOARES, 2016).

Uma das especulações traz como origem um jogo chamado “Chaturange” ou, “ jogo dos 4 reis”, que é antecessor ao xadrez, percursor do ludus cartarum. Este possuía um rei, um general, um cavalo e soldados, mostrando a analogia com as cartas. Outro baralho muito antigo, exposto no Museu Topikapi, em Istambul, Turquia, é atribuído aos mamelucos; povos escravizados pelos turcos na expansão do Império Otomano. A semelhança vem da também utilização de 4 naipes, todos formados por 13 cartas, com três figuras, o rei (malik), o governador (na’ib) e o vice-governador (na’ib thâni), precedidas pelo ás e seguidas por nove números. Além disso, a palavra na’ib, se assemelha gráfica e foneticamente com a palavra naipe.

Outros documentos também informam sobre o baralho. O mais velho deles, de 1377, encontrado no Museu Britânico, em Londres, atribuído a um monge alemão de nome Johannes, afirma a chegada do jogo neste mesmo ano, sem maiores informações sobre seu inventor ou época, apenas comparando-o ao xadrez. Um decreto promulgado em 1369, pelo rei francês Carlos VI, proibia a prática de alguns jogos, sem citar o baralho, o que acontece em 1397. Tal documento sugere a aparição do baralho neste período, mais precisamente em 1392, pintados por Jacquemin Gringonneur, encomendado pelo então rei Carlos V., ainda existem 17 destas cartas em Paris, na Bibliotheque Nationale (DA SERRA NEGRA, 1992).

O primeiro a realizar um estudo sobre o representação dos naipes foi o teólogo protestante Antoine Court de Gebelin (1725 – 1784). Segundo ele, os mesmos representavam, os 4 poderes sociais:

Copas: originalmente o cálice, que representa o poder religioso;

Ouros: em italiano dennari (dinheiro), representa o poder econômico;

Espadas: as armas medievais, representando o poder militar;

Paus: representa o poder político, encontrando alicerce no povo.

Gebelin ainda indica que as cores dão significados diferentes aos naipes, separando-os dois a dois:

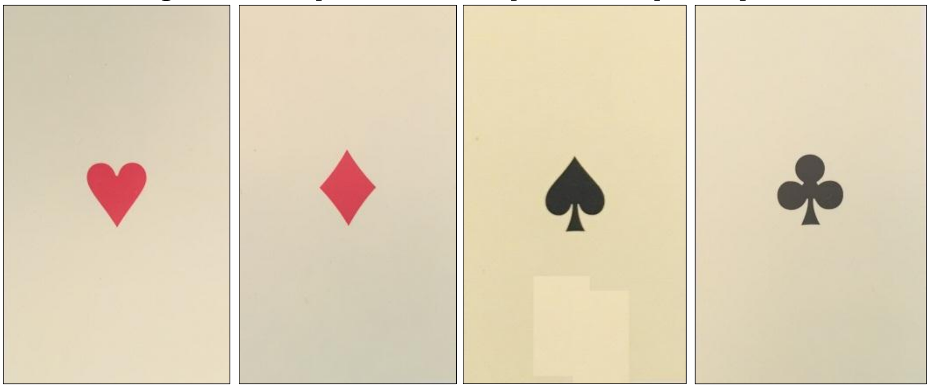
Vermelhos: representam os objetivos que levam um homem a lutar. Copas: o coração gótico, representando o amor. Ouros: o poder e a riqueza.

Pretos: Paus e espadas, que simbolizam as armas (do povo nobre) com que se faz a guerra.

Copas ainda é considerado o naipe humano, representando a felicidade, a alegria, a paixão. Ouros, o naipe dos negócios, representando o dinheiro, o lucro. Espadas, o naipe dos líderes guerreiros, representando força, audácia, vigor, ambição, para o bem e para o mal. Paus, o naipe do trabalhador, representa o progresso, o desenvolvimento, a energia, a humildade e a modéstia.

Muitos naipes são utilizados, sendo cinco reconhecidos como naipes padrão de origem europeia: francês, latino, suíço, alemão e italiano. Dentre estes, o francês é idealizado como logotipos de fácil impressão, possibilitando maior difusão.

Figura 1. Os naipes do baralho: copas, ouros, espadas e paus.



Fonte: arquivo pessoal

Ademais, acredita-se que estão representadas nas cartas figuradas, K (rei), Q (dama) e J (valete), a corte medieval, ou o Estado-Maior do exército. Seus índices são iniciais das palavras King, Queen e Jack, em inglês, rei, rainha e valete. Em específico, representavam personalidades históricas e/ou bíblicas, sem uma comprovação bem fundada, que são:

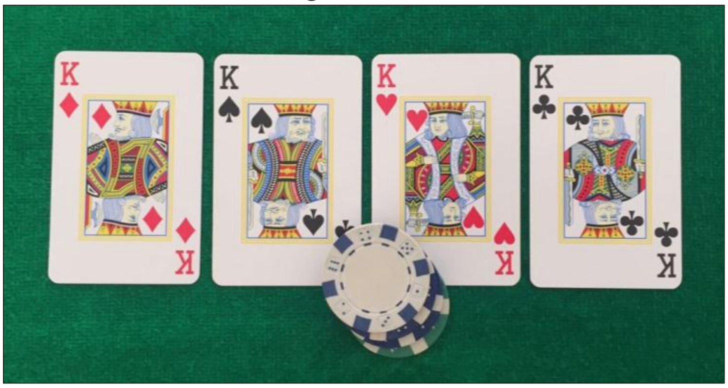
Rei de Ouros: Júlio César (líder militar e político romano);

Rei de Espadas: Davi (rei de Israel);

Rei de Copas: Carlos Magno (imperador de Roma);

Rei de Paus: Alexandre, o Grande (rei grego).

Figura 2. Reis.



Fonte: arquivo pessoal

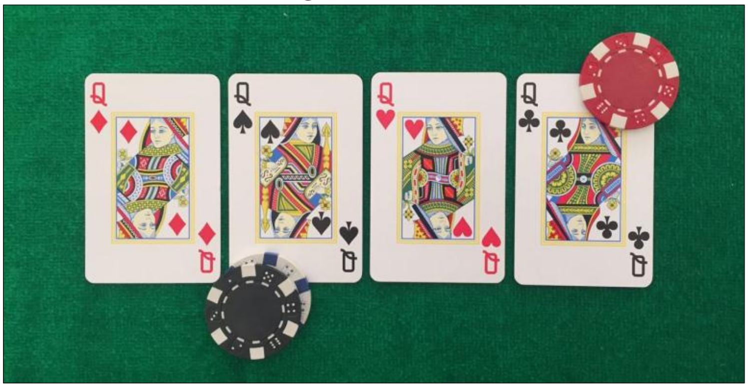
Dama de Ouros: Raquel (esposa de Jacó);

Dama de Espadas: Atena (deusa grega);

Dama de Copas: Judite (personagem bíblica);

Dama de Paus: Elizabeth I (rainha da Inglaterra).

Figura 3. Damas.



Fonte: arquivo pessoal

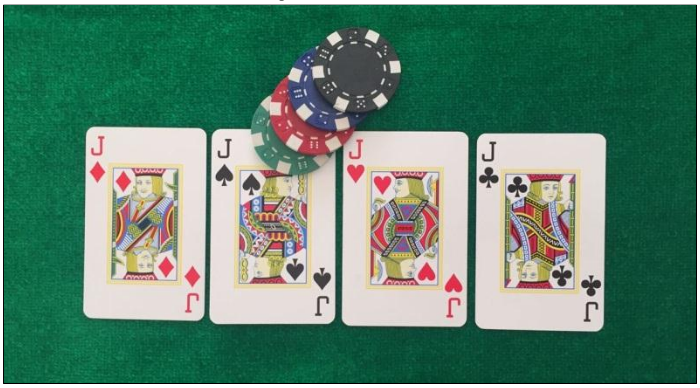
Valete de Ouros: Heitor (Príncipe de Troia);

Valete de Espadas: Napoleão Bonaparte (imperador francês) ou Holger Danske (rei Dinamarquês);

Valete de Copas: Dante Alighieri (escritor italiano) ou Étienne de Vignolles (líder militar francês);

Valete de Paus: Sir Lancelot (cavaleiro/escudeiro do rei Artur).

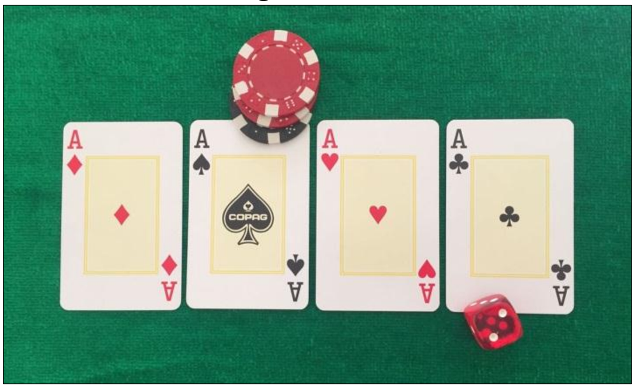
Figura 4. Valetes.



Fonte: arquivo pessoal

A outra carta figurada, o A (ás), é considerada talvez a carta mais importante do baralho, pois simboliza a virtude, expressa pela lealdade na guerra e pelo espírito esportivo no jogo. Em suas estampas traz cenas de Waterloo, onde Napoleão foi derrotado pelos ingleses, ou até o grito de independência de D. Pedro I, as margens do rio Ipiranga. O ás de espadas é também conhecido como “o ás da morte”, já que, em países como Inglaterra e Estados Unidos, trazia nele impresso o selo do imposto, devido as altas taxas sobre sua produção (DA SERRA NEGRA, 1992).

Figura 5. Ases.



Fonte: arquivo pessoal

Inicialmente o trabalho de pintura das cartas era manual, deixando-as mais resistentes, porém com um maior custo. Cartas com gravuras em cobre, incluindo ouro e prata, as quais eram utilizadas como presentes de casamento e/ou herança, devido seu alto valor, também aparecem em registros históricos.

Figura 6. Baralho em cobre.

Fonte: SOARES, Kamyla Lemes.

Com o surgimento da xilogravura, a partir do século XIV, as cartas passam a ser esculpidas em madeira, possibilitando a produção em série. Atualmente, os baralhos são produzidos em papel cartão e em plástico PVC (SOARES, 2016).

CAPÍTULO 3

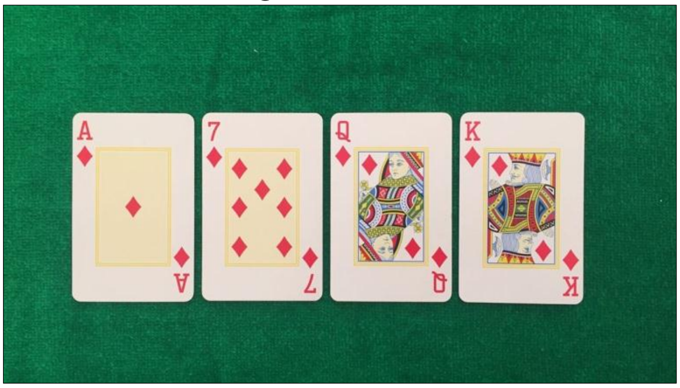
ESCOPA

Apresentaremos as cartas que compõem o jogo e suas valias no mesmo, as regras, pontuações totais, e até algumas facilidades para vencê-lo e para melhorar seu desenvolvimento, além dos ganhos em conteúdos matemáticos que pode promover.

Um jogo simples, que, se bem trabalhado, pode trazer diversos ganhos em conteúdos matemáticos como raciocínio lógico e associação de parcelas, trouxe inspiração para inseri-lo no projeto. Seu principal objetivo é combinar uma ou mais das cartas sobre a mesa com uma daquela que o jogador possui em suas mãos, obtendo soma igual a 15. Utiliza o baralho espanhol e pode ser jogado por duas, três ou até quatro pessoas sendo que, nas duas primeiras formações cada jogador joga individualmente e, na última, são formadas duas duplas.

Neste jogo, devido à utilização do baralho espanhol, o valete tem maior valor (9) que a dama (8), mas alguns jogadores, por estarem mais acostumados com a utilização do baralho francês, preferem trocar os valores destas cartas. Este fato deve ser previamente acordado, não afetando o discorrer da partida. Segue também que as cartas de ouro têm maior importância, especialmente, A, SETE, Q e K, chamados "belos". As cartas SETE dos demais naipes também têm sua importância. Tais valores serão apresentados a posteriori.

Figura 7. Os belos.

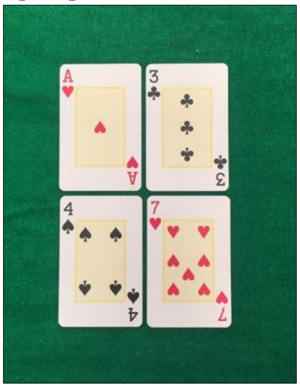


Fonte: arquivo pessoal

Inicia-se uma partida com um dos jogadores entregando três cartas para cada um dos demais e, abrindo outras quatro sobre a mesa. Este jogador, escolhido por sorteio ou acordo entre os participantes, é denominado "pé do baralho". Importante observar que, as cartas são distribuídas com uma condição: a primeira carta deve ser entregue, necessariamente, ao jogador à direita do "pé", este é chamado "mão do baralho". As demais cartas são entregues de acordo com o desejo do embaralhador, respeitando as quantidades anteriormente mencionadas (PIRES, 2016).

Eventualmente, ao virar as quatro cartas sobre a mesa, o "pé" pode obter soma 15 com estas. Por exemplo: ao virar um às, um três, um quatro e um sete, a soma destas é igual a 15. Isto posto, o mesmo recolhe as cartas para si e anota uma escopa, dando continuidade ao jogo com o próximo jogador, o "mão" descartando uma de suas carta, já que não poderá recolher nenhuma.

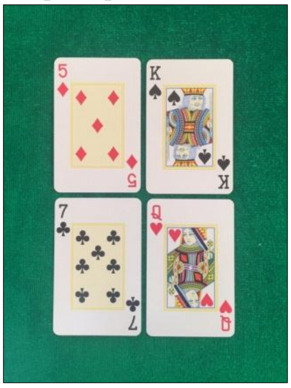
Figura 8. Escopa a partir da virada efetuada pelo "pé".



Fonte: arquivo pessoal

Se houver maior sorte ou competência, tais cartas podem somar 15, combinadas duas a duas. Ou seja, dois pares somando 15. Por exemplo: ao virar um cincos, um rei, um sete e uma dama, já que, CINCO mais K é igual a quinze, SETE mais Q, também. Daí, o "pé" começa seu monte com duas escopas. Caso isso ocorra, o "mão" segue o jogo, novamente apenas descartando.

Figura 9. Par de escopas a partir da virada efetuada pelo "pé".



Fonte: arquivo pessoal

Observemos também que, cada jogador utiliza apenas uma de suas cartas por vez. Com isso, em cada rodada os jogadores descartam três cartas, iniciando-a sempre pelo “mão” e terminando-a pelo “pé”. Após as primeiras três cartas de cada jogador serem jogadas, o “pé” volta a distribuir mais três cartas para cada jogador, até que as mesmas acabem.

Assim, a rodada tem início e, se o “mão” combinar uma de suas cartas com alguma(s) outra(s) da mesa, somando 15, recolhe-as e começa a formar seu monte de cartas para que, ao final das rodadas sejam contados e somados seus pontos, caso não consiga somar 15, ele deve descartar uma de suas cartas sobre a mesa para que o próximo jogador faça sua jogada. Analogamente, sempre em sentido anti-horário, cada jogador faz o mesmo. Caso o jogador não consiga obter soma 15 ao combinar as cartas, ele deve jogar uma das cartas que tem em mãos sobre a mesa, descartando-a dando continuidade à partida.

Notemos que a recolhida das cartas não exige uma quantidade específica das mesmas, ou seja, o jogador pode pegar quantas cartas quiser em sua jogada, desde que a soma total seja 15. Obviamente, recolher todas é a melhor jogada, independente de quantas são.

Frisando que, ao recolher ou descartar, caso não consiga fazer uma escopa, uma boa jogada é deixar 1, 2, 3 ou 4 pontos sobre a mesa. Com tais valores, é impossível que o próximo jogador marque uma escopa, uma vez que não se pode somar 15 tendo uma destas quantidades em jogo, nem com a carta mais alta do jogo (o rei), pois a mesma vale 10.

Marcando uma escopa, ou seja, recolhendo todas as cartas da mesa unidas com uma de suas mãos, ou ao virar as quatro iniciais, o jogador deve indicá-la(s) deixando uma das cartas recolhidas voltadas para cima para cada escopa marcada, facilitando a contagem final. Ademais, tal carta deve ser escolhida de modo que não seja uma das cartas úteis para a contagem final dos pontos. Por exemplo, não facilita a marcação de uma escopa com um dos “belos”, um SETE ou uma carta de ouro, pois estas são prioridades na contagem final dos pontos. Exemplificando: ao usar um ”belo” para marcar uma escopa, na contagem final esta carta vale dois pontos, um pela escopa, mais um por ser justamente um belo. Isto pode confundir a totalidade dos pontos.

Despercebido, um jogador descarta uma carta que, combinada com outra(s) somava 15. Percebendo o equívoco, o próximo pode recolher as cartas para si antes de realizar sua jogada. Além disso, ao final de cada rodada, o “pé” distribui mais três cartas para cada jogador, respeitando as condições ditas acima.

Terminada a última rodada, sempre remanescerão cartas sobre a mesa. A soma dos valores de tais cartas são, obrigatoriamente, 10, 25, 40 ou 55 pontos. Decorrendo a soma de tais cartas com valor diferente destes, algum jogador cometeu erro na sua recolhida. Encontrada a infração, uma penalidade, previamente discutida e aderida por todos, deve ser dada ao jogador ou dupla que a cometeu. Uma das penalidades mais frequentemente aplicada ao infrator é: o mesmo perde quatro pontos mais a soma dos pontos obtidos pelos demais jogadores. Logo, retira-se da soma de seus pontos a quantia obtida.

Em partidas amistosas, outras sansões podem ser tomadas, respeitando a decisão de todos os jogadores. Por exemplo: passar o baralho para o próximo “pé”; voltar a distribuição das cartas, mantendo o mesmo “pé”; contar apenas os pontos dos jogadores que não cometeram erro(s); dividir os pontos do jogador errôneo com os demais jogadores; sendo a partida formada por apenas dois jogadores ou duas duplas, contar os pontos possíveis para a dupla ilesa de erros, mais suas escopas; entre outras. Além disso, vale salientar que o jogador que tiver recolhido cartas pela última vez, fica com as cartas que sobraram ao final da partida.

O fim do jogo se dá quando um dos jogadores obtêm 15 pontos, independente da quantidade de rodadas. Como esta pontuação é variável, deve ser decidida de antemão. Alguns preferem que o jogo vá até 21, 25, 31 pontos. A única semelhança é que o final vem com uma quantidade ímpar de pontos.

Existem sete pontos fixos, além das escopas, visto que cada uma delas vale um ponto extra. Logo, temos os chamados “pontos do baralho”:

Cada belo vale um ponto. Daí, seguem 4 pontos no total;

O jogador ou dupla que tiver maior número de cartas SETE, ganha um ponto. Em caso de empate, ninguém pontua;

O jogador ou dupla que tiver maior número de cartas de ouro, ganha um ponto. Em caso de empate, ninguém pontua;

O jogador ou dupla que tiver maior número de cartas totais, ganha um ponto. Em caso de empate, ninguém pontua;

Observamos algumas variações das pontuações. Por exemplo, alguns jogadores trazem as seguintes alterações:

O jogador ou dupla que recolher as 10 cartas de ouro, ganha dois pontos (não apenas um pela maioria das cartas de ouro, como visto anteriormente);

O jogador ou dupla que recolher as quatro cartas SETE, ganha três pontos (não apenas dois: um pela maioria das cartas SETE, outro pelo SETE belo, como visto anteriormente);

O jogador ou dupla que recolher 31 cartas ou mais, ganha dois pontos, já que seu(s) oponente(s) não recolheram sequer 10 cartas (não apenas um pela maioria das cartas totais, como visto anteriormente);

Determinar antecipadamente a contagem dos pontos é sempre o modo mais adequado de se iniciar uma partida.

Pedagógica e matematicamente, relevando aos alunos a utilização do jogo para o aprendizado de conceitos e desenvolvimento de habilidades, e não para fins viciosos, a escopa pode trazer inúmeros benefícios, a título de exemplo:

Variar e ampliar a utilização do material didático, aula expositiva, resolução de exercícios, dando novos caminhos para a aprendizagem;

Desenvolvimento/aprimoramento do raciocínio lógico;

Evolução de estratégias de jogo, recolhendo cartas ou “provocando” o adversário;

Promoção da associação de parcelas, facilitando a resolução mental de operações básicas;

Induzir ao início do princípio da contagem;

Observar possibilidades e tomada de decisões;

Quando em duplas, promover a comunicação entre os alunos.

CAPÍTULO 4

PÔQUER

O esporte da mente. Além de ser altamente atrativo por todo glamour, possível rentabilidade monetária, e místicas que permeiam este jogo, nos aprofundaremos em fazer valer sua definição, apresentando dados matemáticos sobre suas jogadas.

Jogo de cartas considerado o mais popular em todo o mundo, com cerca de mais de 25 milhões de pessoas praticando-o, pessoalmente ou on-line. Tem como objetivo ganhar a soma das apostas feitas pelos outros jogadores da mesa. A vitória em uma rodada se dá pelo melhor jogo dentre aqueles apresentados, ou pela desistência de todos os demais jogadores. Ao obter o melhor jogo possível na mesa, diz-se que o jogador está com o nuts, na gíria brasileira é dito que o jogador está absoluto. Quando um dos jogadores conquistar todas as fichas as quais indicam valores em dinheiro, dos seus oponentes, é o fim do jogo.

Facilmente praticado, pois exige apenas um baralho francês e algumas fichas as quais são utilizadas como mecanismos nas apostas, trazendo adrenalina a cada rodada, tornando-o extremamente excitante. No Brasil, começou a ser difundido com a modalidade Five Card Draw, conhecido como pôquer fechado. Nele cada jogador recebe cinco cartas, podendo fazer uma ou duas trocas. Com isso, cada jogador se limita a apenas observar tais trocas, não tendo certeza se sua jogada é realmente boa. Em 2005, torneios de cunho desportivo começaram a ser realizados em nosso país (BELLO, 2007).

Muitas incertezas envolvem a origem do pôquer. A versão mais antiga se dá na Pérsia, no século XV, na qual o jogo se chamava as-nas. Seu nome vem do francês poque, derivando por sua vez do alemão pochen, que significa bater. Para os brasileiros, a origem vem da Europa e, apenas duas ou três modalidades são bem praticadas, dentre as mais de cem existentes, a priori nos Estados Unidos e nos demais países.

O BSOP – Brazilian Series of Poker, é uma série de torneios desportivos, com início no ano de 2006, realizados nas maiores capitais e nos considerados melhores destinos turísticos do país. Neste ano, os torneios tiveram uma média de 60 participantes sendo que, Leandro “Brasa” se consagrou o primeiro Campeão Brasileiro de pôquer. Em 2015, atingiu o status de maior evento de pôquer da América Latina e segundo maior torneio de pôquer do mundo, com 3866 participantes em sua etapa final (www.bsop.com.br).

Em 2 de agosto de 1876, James Butler Hickok, mais conhecido como Wild Bill Hickok, figura do velho oeste americano, foi morto pelo caçador de búfalos John "Jack" McCall, no bar do salão Nuttal & Mann, Deadwood, Dakota. Mas, qual a ligação do assassinato com o pôquer? Hickok além de homem da lei, tendo lutado na Guerra Civil Americana, era jogador profissional. Um dia antes de sua morte, vendo McCall quebrado após perder todo seu dinheiro em uma mesa de pôquer, ofereceu-lhe ajuda, em dinheiro e com conselhos para que não jogasse novamente. Este, por sua vez aceitou, mas sentiu-se insultado. Ao entrar no sallon, McCall encontra Hickok de costas para a porta, e não como costumeiramente sentava em um canto, justamente para proteger-se. Assim, com um revólver de calibre 45, surge a “Mão do Homem Morto” (Dead Man's Hand). Isto por que, quando morto, Hickok segurava em suas mãos um par de oitos, um par de ases e uma dama. Jogada que dá o nome à lenda.

No desenho “Pica pau”, um dos episódios traz uma personagem inspirada em Hickok. Traduzido como “Billy Soluço Selvagem”, o mesmo espirrava toda vez que seu nome era pronunciado, assombrando e afugentando as pessoas de um velho casarão onde se encontrava.

4.1 Texas hold’em

O Texas hold”em é o estilo de pôquer mais popular em todo o planeta. Não há relatos precisos sobre sua origem. Uma lenda relata que os primeiros jogos foram realizados no início do século XX em Robstown, Texas, Estados Unidos. Após sua aparição, o jogo foi introduzido em Las Vegas, por um grupo de apostadores e jogadores de cartas texanos. Modalidade disputada no estilo “no-limit”, o que indica uma inexistência de valor limite para as opostas de acordo com a quantidade de fichas do jogador (BELLO, 2007).

Para este jogo é utilizado o baralho francês, e seu desdobramento consiste em combinar duas cartas individuais, as quais todos os jogadores recebem ao início de cada rodada e que são denominadas the hole cards, com mais cinco cartas comunitárias que são abertas durante a rodada e as apostas, ficando sobre a mesa. Estas cinco cartas são abertas por partes. Primeiramente são abertas três cartas, o flop. Após o flop, mais uma carta é aberta, o turn ou fourth street, que é a quarta carta comunitária. Por fim, temos o river ou fifth street, quinta carta comunitária e a última possível da rodada.

Devemos observar que, previamente ao flop, ao turn e ao river, uma carta deve ser descartada/queimada. Isto é, ao final de cada jogada, veremos três cartas fechadas sobre a mesa, que são justamente os descartes.

A distribuição das cartas é feita por um carteador, chamado dealer ou croupier, responsável pela condução de cada rodada. Em um jogo caseiro, não há a necessidade desta pessoa. Sendo assim, os próprios jogadores fazem tal papel. São distribuídas, uma a uma, no sentido horário. Um botão, o dealer button, se move a cada jogada, também em sentido horário, de jogador em jogador. Tal movimento se dá para que a marcação do jogador que iniciará a jogada seja feita.

O primeiro jogador à esquerda do carteador inicia a rodada. Ele, obrigatoriamente, deve pagar a small blind: cerca de metade do valor mínimo das apostas, previamente acordado. Também obrigatoriamente, o segundo jogador paga a big blind: valor mínimo das apostas, em sua totalidade.

Em campeonatos oficiais, as blinds vão aumentando periodicamente no decorrer do torneio. Outro detalhe importante é que, caso a big blind tenha um valor ímpar, a small blind assume valor maior que a metade desta. Por exemplo: a big blind valendo 15 unidades monetárias, a small tem valor de 10 unidades monetárias, geralmente. Para valores pares, costumeiramente, a small equivalerá a 50% da big.

Após a small e a big blind pagas, os demais jogadores podem dar continuidade ao jogo, das seguintes formas:

Fold: não apostar nada e descartar a jogada, deixando o pote*;

Check: pagar a big blind, continuando na jogada com este mesmo valor na aposta;

Bet: fazer uma aposta, maior que a big blind;

Call: pagar uma aposta feita anteriormente, que já é superior à big blind;

Raise: aumentar a aposta feita, que já é superior à big blind.

*pote: acúmulo das apostas

Para se manter na jogada, o apostador que em princípio pagou apenas a small blind, deve pagar, no mínimo, a big blind ou, dependendo da condução da jogada, efetuar um call ou raise. Uma aposta feita pode não ser tão “verdadeira”. Com o intuito de enganar os demais, um jogador pode “blefar”, ou seja, fazer uma aposta sem possuir nenhuma boa jogada em mãos.

4.1.1 Jogadas: Estão apresentadas em ordem “decrescente”, ou seja, da mais valorosa a menos valorosa. Inclusive, apresentaremos o percentual aproximado de ocorrência de cada uma delas (MARTINEZ, 2014).

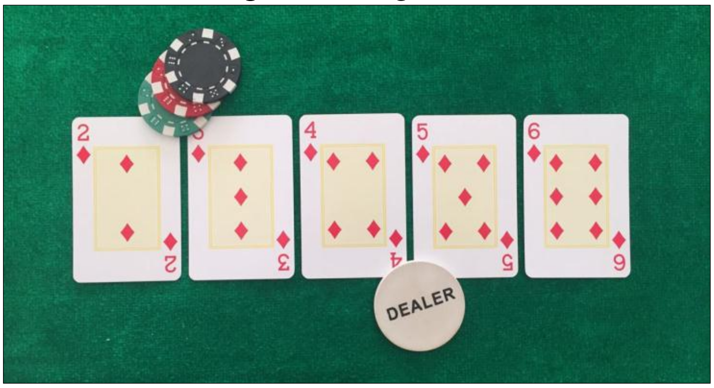
Royal flush: sequência de dez a ás, sendo as cartas de um mesmo naipe. Esta é a melhor entre todas as jogadas. A chance de esta jogada ocorrer é de $\frac{1}{31000}$. (Em calculadoras comuns tal valor gera um erro, por isso o indicamos por meio de uma fração).

Figura 10. Royal flush.

Fonte: arquivo pessoal

Straight flush: sequência de carta de um mesmo naipe, diferente do royal flush. Em caso de empate, a carta de maior valor será aquela que determina o vencedor. A chance de esta jogada ocorrer é de $\frac{1}{3216}$. (Em calculadoras comuns tal valor gera um erro, por isso o indicamos por meio de uma fração).

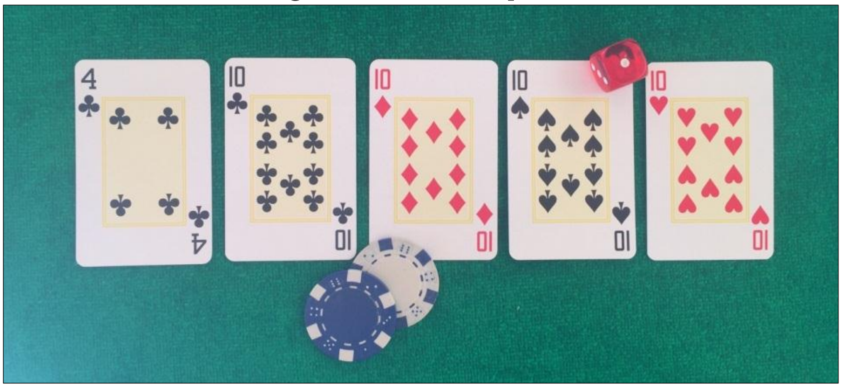
Figura 11. Straight flush.



Fonte: arquivo pessoal

Quadra ou poker: quatro cartas de mesmo valor e, outra carta de valor diferente. Em caso de empate, a maior quadra determina o vencedor. A chance de esta jogada ocorrer é de 0,17%.

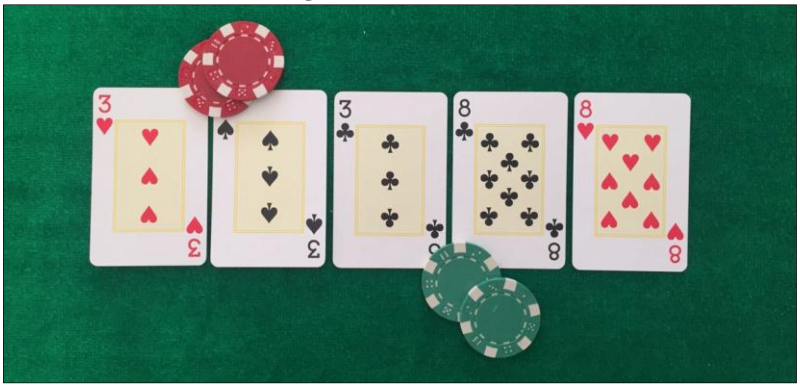
Figura 12. Quadra ou poker.



Fonte: arquivo pessoal

Full house: dentre as cinco cartas, três cartas de mesmo valor e as outras duas cartas também de mesmo valor, mas diferente em relação às anteriores. Em caso de empate, as três cartas de mesmo valor determinam o vencedor. A chance de esta jogada ocorrer é de 2,6%.

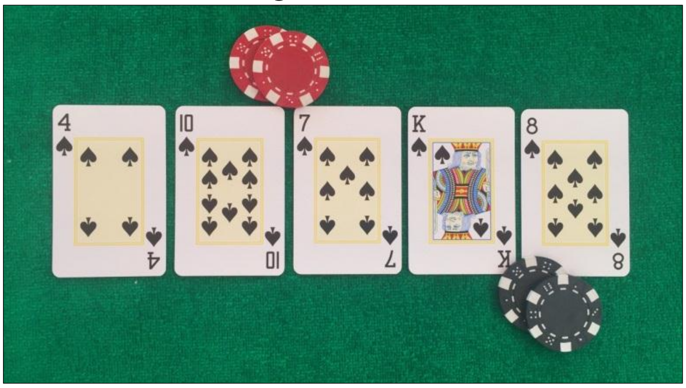
Figura 13. Full house.



Fonte: arquivo pessoal

Flush: cinco cartas de mesmo naipe. Em caso de empate, a maior carta determina o vencedor. Havendo um novo empate, a segunda carta maior desempata a jogada. O empate/desempate pode correr até a quinta carta. Persistindo o empate até a quinta carta, o pote é dividido entre os apostadores. Fato importante é que o naipe não vale como fator de desempate. A chance de esta jogada ocorrer é de 3,03%.

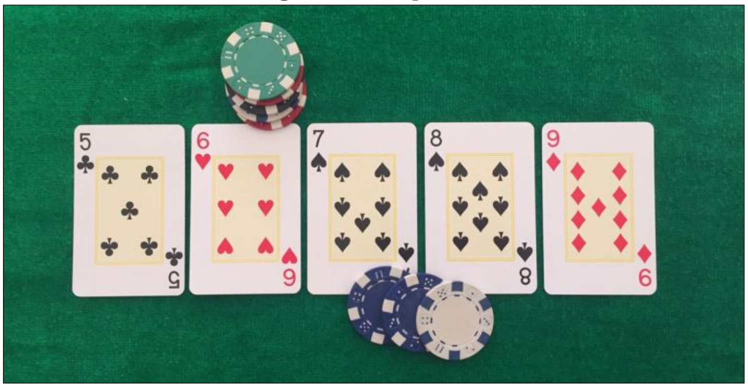
Figura 14. Flush.



Fonte: arquivo pessoal

Sequência: cinco cartas em sequência, com naipes diferentes. Em caso de empate, a maior carta determina o vencedor. Analogamente ao flush, o empate/desempate pode ocorrer até a quinta carta. Deste modo, o pote é dividido. Notamos que, o ás pode ser utilizado como carta mais alta ou mais baixa, em uma sequência. A chance de esta jogada ocorrer é de 4,62%.

Figura 15. Sequência.



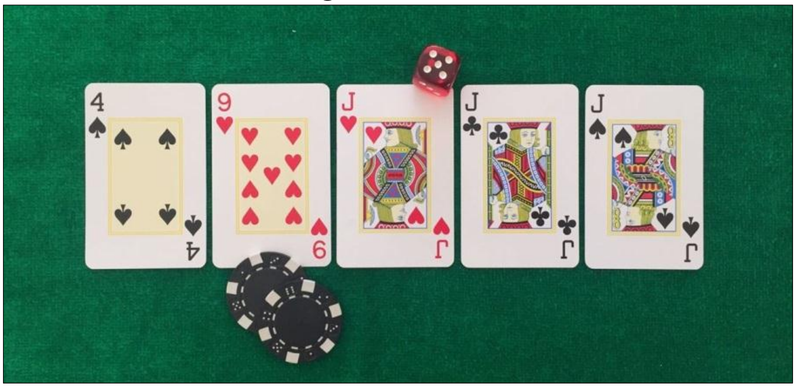
Fonte: arquivo pessoal

Maior sequência (ás alto): DEZ, J, Q, K, A.

Menor sequência (cinco alto): A, DOIS, TRÊS, QUATRO, CINCO.

Trinca: três cartas de mesmo valor e, as demais diferentes destas e também diferentes entre si. Em caso de empate, a maior trinca determina o vencedor. A chance de esta jogada ocorrer é de 4,83%.

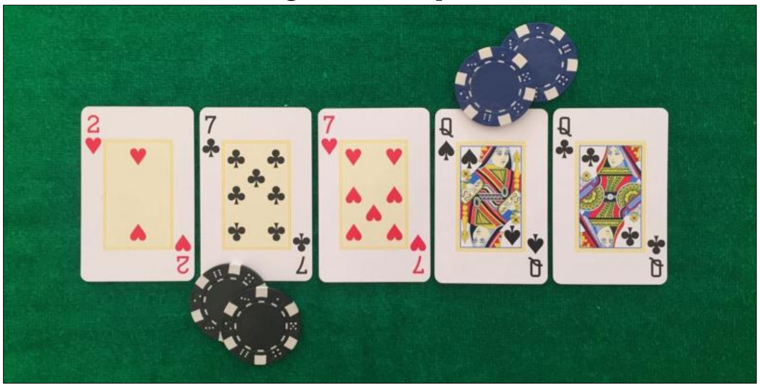
Figura 16. Trinca.



Fonte: arquivo pessoal

Dois pares: duas cartas de mesmo valor, outras duas cartas de mesmo valor, porém diferente das primeiras e, outra carta com valor diferente das anteriores. Em caso de empate, o maior par determina o vencedor. Ocorrendo novo empate, o outro par determina o desempate. Por último, a quinta carta efetua o desempate ou, o pote é dividido se isso não for dado. A chance de esta jogada ocorrer é de 23,5%.

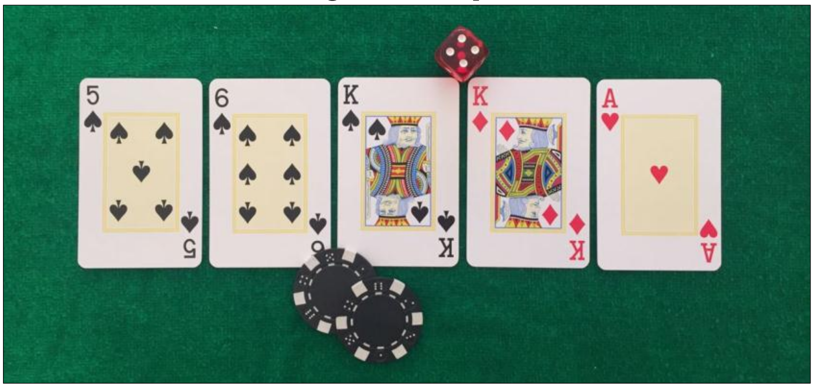
Figura16. Dois pares.



Fonte: arquivo pessoal

Um par: duas cartas de mesmo valor, outras três diferentes destas e também diferentes entre si. Em caso de empate, o maior par determina o vencedor. Se os apostadores possuírem pares de mesmo valor, são observadas as três demais cartas até haver desempate ou, em caso negativo, o pote é dividido. A chance de esta jogada ocorrer é de 43,8%.

Figura 17. Um par.



Fonte: arquivo pessoal

Carta alta: cinco cartas diferentes, não se associando a nenhuma das jogadas anteriores. Em caso de empate, observamos as demais cartas para um possível desempate. Senão, o pote é dividido. A chance de esta jogada ocorrer, ou seja, no mínimo nenhum par ser formado, é de 17, 4%.

Figura 18. Carta alta.

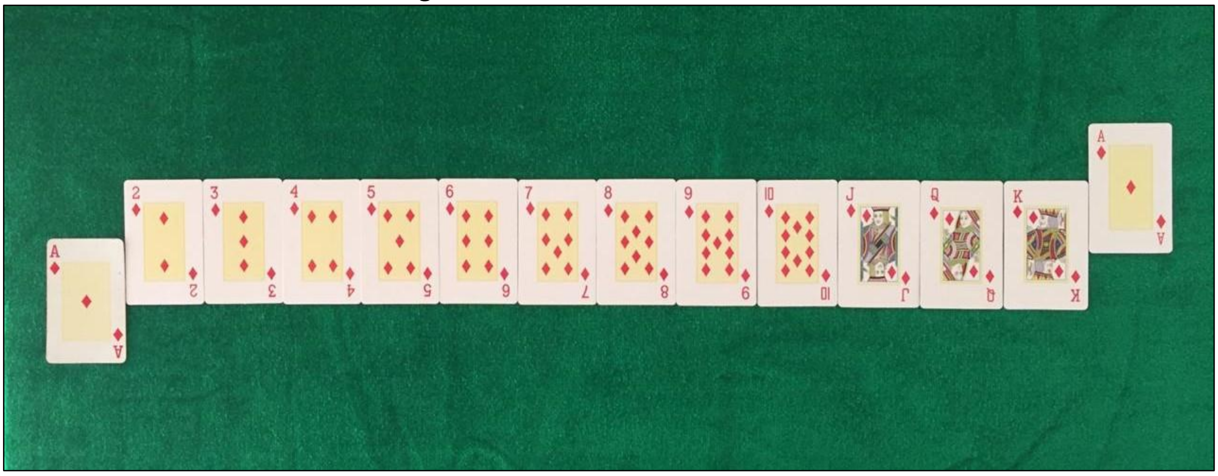
Fonte: arquivo pessoal

Observações:

A carta que não "forma" a jogada, mas é utilizada como desempate recebe a denominação kicker;

Em todas as jogadas o ás é considerado a carta "mais alta" e o DOIS a "mais baixa". Porém, o ás também pode ser considerado a carta mais baixa em uma sequência A, DOIS, TRÊS, QUATRO, CINCO, como visto anteriormente.

Figura 19. Ordem crescente das cartas.



Fonte: arquivo pessoal

4.2 Omaha

Derivando do Texas hold'em, outro estilo de pôquer bem difundido, talvez o segundo mais popular, é o Omaha poker. Tem como grande diferença do Texas, quatro cartas individuais para cada jogador, ao invés de duas. Cinco cartas comunitárias podem ser utilizadas durante cada rodada, equiparando-se ao Texas, neste caso. O decorrer do jogo se dá de forma análoga ao Hold'em, tanto nas apostas assim como nas jogadas, sendo que, a mão de um jogador é composta por duas de suas cartas individuais e mais três cartas comunitárias, obrigatoriamente.

A primeira mulher a conquistar o bracelete do WSOP, Annie Duke, escreveu o livro *Annie Duke: How I Raised, Folded, Bluffed, Flirted, Cursed, and Won Millions at the World Series of Poker* (em português, Annie Duke: como eu aumentei, dei fold, blefei, flertei, xinguei e ganhei milhões no World Series of Poker) exclusivamente sobre esta modalidade. Livro este que relata sobre tal conquista, a qual Annie faturou mais de 2 milhões de dólares, levando em conta um field (grupo de jogadores participantes do evento) de 99% masculino (BELLO, 2007).

4.3 Omaha 8/b (eight or better)

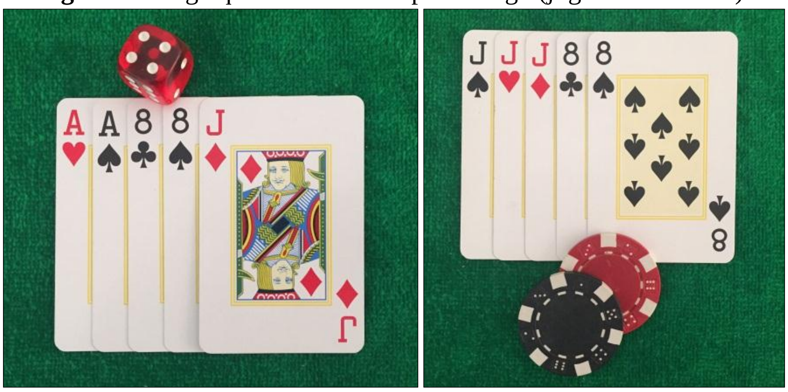
Também conhecido como Omaha Hi-low (alto e baixo) segue as regras do Omaha, com a diferença de que, cada mão pode ser ganha pelo maior e também pelo menor jogo. Ou seja, o pote pode ser ganho inteiro pela maior mão (high) quando não houver uma mão menor (low), ou dividido ao meio pelas duas mãos quando ocorrerem simultaneamente. Se um jogador fizer as duas mãos em uma mesma rodada, denomina-se scoop (por exemplo, utilizando duas cartas para a mão high, e outras duas para o jogo low).

O menor jogo existirá apenas se for composto por cinco cartas de naipes diferentes, com face menor ou igual a OITO. Assim, se o flop apresentar três cartas acima de OITO, não há chances para um jogo low ocorrer. Além disso, não são contadas as sequências e os flushes. A seguir, apresentaremos alguns exemplos de jogadas para coadjuvar a compreensão das possibilidades apresentadas (BELLO, 2007).

Figura 20. Exemplo de jogada Omaha.

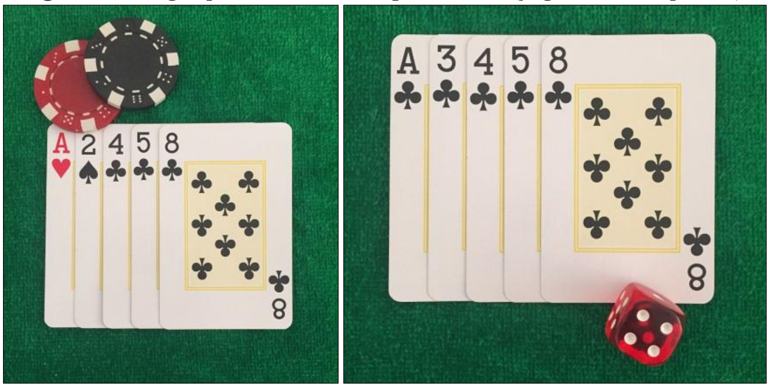
Fonte: arquivo pessoal

Figura 21. Jogo que conta metade para o high (jogador da direita).



Fonte: arquivo pessoal

Figura 22. Jogo que conta metade para o low (jogador da esquerda).



Fonte: arquivo pessoal

4.4 Stud

Jogo sem cartas comunitárias, utilizando raciocínio e habilidades distintas em relação aos jogos Hold'em, próximo ao pôquer jogado antigamente no Brasil, cujo cada jogador possuía seu próprio jogo, recebendo duas cartas fechadas e uma terceira aberta. A partir daí davam-se as apostas. Considerado jogo nobre do pôquer pelos profissionais americanos, por ser considerado o jogo que apresenta maior dificuldade e exige maiores habilidades. Raramente existem eventos com a modalidade.

O Stud se divide em duas opções: o Five Card Stud e o Seven Cards Stud, sendo o segundo modelo mais conhecido e praticado. A peculiaridade vem com cada jogador recebendo um total de sete cartas, tendo de escolher cinco destas para formar sua melhor jogada na mão em questão. Destas sete cartas, as duas primeiras vêm fechadas, a terceira, quarta, quinta e sexta, abertas, com apostas entre as distribuições, e a sétima também fechada, seguido às ultimas apostas. No Five Card Stud, cada jogador recebe cinco cartas, podendo também ser jogado com a variante high-low (BELLO, 2007).

4.5 Razz

Possui raciocínio completamente contrário às demais modalidades, propiciando confusão aos jogadores acostumados com o Hold'em, pois tem como objetivo formar o menor jogo possível. Como o Omaha 8/b, também não conta sequências e flushes, porém não há limitação até o OITO para formar o menor jogo. A melhor jogada seria A, DOIS, TRÊS, QUATRO, CINCO, com naipes distintos (BELLO, 2007).

4.6 H.O.R.S.E.

É como um pout-pouri do pôquer, misturando as cinco modalidades mais famosas (Hold'em, Omaha, Razz, Stud e Eight or Better Stud) jogadas em sequência, após um determinado número de rodadas ou tempo. Chip Reese, profissional renomado e um dos maiores ganhadores da história do pôquer, venceu, em 2006, o torneio H.O.R.S.E. do WSOP, com inscrições no valor de 50 mil dólares. Cerca de 100 jogadores se inscreveram, sendo 90% destes profissionais, premiando o vencedor com o título de melhor jogador all-around (em todas as modalidades), além de uma boa quantia em dinheiro (BELLO, 2007).

Existem outras variações do jogo, bem menos populares e, consequentemente, pouco jogadas. Alguns exemplos são: Pai Gow, Seven Card Stud 8 or Better, Crazy Pineapple, Crazy Pineapple 8 or Better, Double Flop Hold'em, Triple Draw, Ace to 5 Triple Draw, Kill Games, One-on-One Poker, Chinese Poker, Indian Poker, Pineapple Open-Face Chinese Poker.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trataremos de explorar e diferenciar os tipos de contagens, caracterizando-as e exemplificando-as, possibilitando a ideia intuitiva na resolução dos exercícios. Previamente, será feita uma breve retomada sobre conjuntos, algo relevante para a contagem.

No Brasil, as placas dos carros são formadas por três letras e quatro algarismos. Utilizando as vinte e seis letras do alfabeto e, os dez algarismos do nosso sistema decimal de numeração, qual o número de placas distintas existem? (SOUZA, 2013).

Imaginemos o quão trabalhoso seria listar e quantificar todas as possibilidades de placas, acordando com o número de letras e algarismos apresentados. Certamente o tempo gasto para isso seria um número de igual mensuração ou até maior que tal quantia. Para uma resolução mais apropriada de problemas como este, conhecemos a análise combinatória. Ramo da matemática que estuda o agrupamento e a contagem dos elementos distintos de um conjunto finito.

Façamos uma breve apresentação das propriedades e operações entre conjuntos para que, posteriormente, nos aprofundemos no estudo da contagem propriamente dita.

5.1 Conjuntos (FURUKAWA, 2017), (MARMO, 2008).

Definimos conjunto por uma coleção qualquer de objetos: números, pessoas, carros, roupas, etc. Tais objetos são denominados elementos do conjunto. Por exemplo, sendo P o conjunto dos números naturais pares: 0, 2, 4, 6, ...Sendo x um elemento do conjunto A, denotamos esta relação como $x \in A$ (lê-se x pertence a A). Agora, se um elemento y não pertence a A, denota-se $y \notin A$ (DE ALBUQUERQUE).

Denotaremos os conjuntos numéricos como: conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$), conjunto dos números irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou I), conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

A representação de um conjunto se dá por uma letra maiúscula e, colocando seus elementos entre chaves ou por meio de uma propriedade que satisfaça todos eles. Vejamos alguns exemplos:

A: naipes do baralho. A = {copas, ouros, espadas, paus}.

B: os “belos” da escopa. B = {sete de ouro, dama de ouro, valete de ouro, rei de ouro}

C: alunos de Araçatuba e Penápolis que ingressaram no PROFMAT em 2016. C = {Ângela, Giovana, Cidinha, Zonta, Panda}.

$\emptyset = \{\ \}$: conjunto vazio (não possui nenhum elemento). Erroneamente o conjunto vazio é representado $\{\emptyset\}$. Neste caso, $\emptyset$ é um elemento do conjunto, ou seja, $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

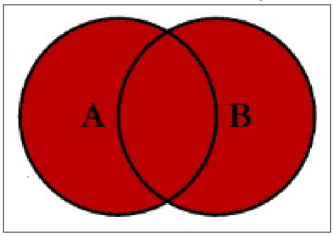
Outra notação importante é a que representa o número de elementos do conjunto. De acordo com os apresentados anteriormente, temos que: n(A) = 4, n(B) = 4, n(C) = 5, n($\emptyset$) = 0.

União

Sejam A e B dois conjuntos, dizemos que a união entre eles é o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B.

Notação: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Figura 23. União entre os conjuntos A e B.



Fonte: http://ivansterkel1246515.blogspot.com

Observação: O “*ou”* é denominado termo de disjunção. Ou seja, pertencer ao conjunto A *ou* ao conjunto B significa pertencer a, *pelo menos*, um deles.

Exemplo 5.1.1: *Sejam A e B dois jogadores de baralho, os quais possuem determinadas cartas, sendo estas sem relevância de seus naipes, representadas pelos conjuntos:*

A: cartas do jogador A; A = {DOIS, QUATRO, SEIS, J, K}.

B: cartas do jogador B; B ={CINCO, J, K}.

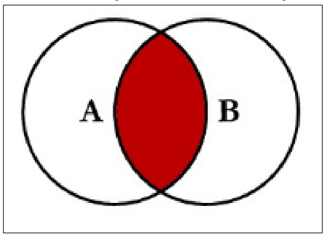
Segue que: A ∪ B = {DOIS, QUATRO, CINCO, SEIS, J, K}. Poderíamos escrever a união da forma A ∪ B = {DOIS, QUATRO, CINCO, SEIS, J, J, K, K} o que não é necessário, já que apresentando cada elemento uma única é válido que o mesmo pertence ao conjunto.

Intersecção

Sejam A e B dois conjuntos, dizemos que a intersecção entre eles é o conjunto dos elementos que pertencem a A e a B.

Notação: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Figura 24. Intersecção entre os conjuntos A e B.



Fonte: http://ivansterkel1246515.blogspot.com

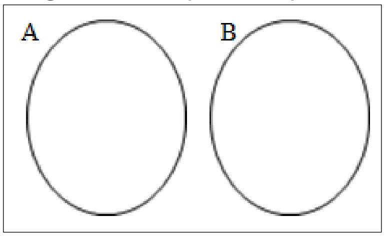
Observação: O "*e*" é denominado termo de conjunção. Ou seja, pertencer ao conjunto A *e* ao conjunto B significa pertencer *aos dois conjuntos*, obrigatoriamente.

Exemplo 5.1.2: *Sejam os conjuntos A formado pelas cartas da mesa e o conjunto B formado pelas cartas de um jogador. Desconsiderando os naipes das cartas, é possível formar quantos pares de cartas de mesmo valor?*

a) *Sendo A = {DOIS, QUATRO, SEIS, J, K} e B ={CINCO, J, K}, segue que: A ∩ B = {J, K}.*

b) *Sendo A = {DOIS, J, K} e B = {SETE, Q}, segue que: A ∩ B = ∅. Estes conjuntos não apresentam elementos em comum, por isso são denominados conjuntos disjuntos.*

Figura 25. Conjuntos disjuntos.



Fonte: plus.google.com

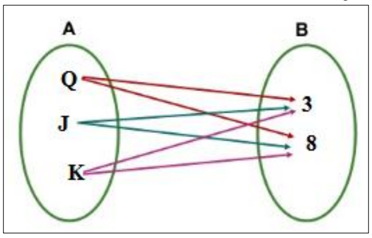
Produto cartesiano

O produto cartesiano de A por B é o conjunto dos pares ordenados cujo primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

Notação: A x B = {(x, y) / x ∈ A e y ∈ B}.

Exemplo 5.1.3: *Sejam os conjuntos A = {Q, J, K} e B = {TRÊS, OITO}, segue que: A x B = {(Q, TRÊS); (Q, OITO); (J,TRÊS); (J, OITO); (K, TRÊS); (K, OITO)}.*

Figura 26. Produto cartesiano entre os conjuntos A e B.



Fonte: arquivo pessoal

Observação: o número de elementos do produto cartesiano de A por B é dado pelo número de elementos de A, vezes o número de elementos de B.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Notemos que o número de elementos do produto cartesiano A x B é equivalente ao número de elementos do produto cartesiano B x A.

Igualdade

Sejam A e B dois conjuntos, dizemos que estes são iguais caso possuam os mesmos elementos.

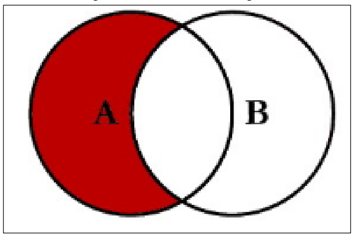
Exemplo 5.1.4: *Sejam os conjuntos A = {DOIS, NOVE, Q} e B = {Q, DOIS, NOVE}, segue que: A = B ou ainda B = A.*

Diferença

Sejam A e B dois conjuntos, dizemos que a diferença entre A e B, nessa ordem, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

Notação: A − B = {x / x ∈ A e x ∉ B}.

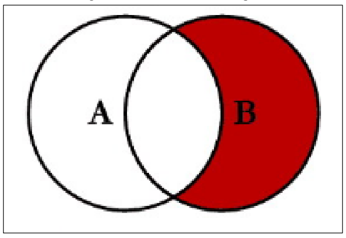
Figura 27. Diferença entre os conjuntos A e B (A – B)



Fonte: http://ivansterkel1246515.blogspot.com

Analogamente, temos: $B - A = \{x \,/\, x \in B \text{ e } x \notin A\}$.

Figura 28. Diferença entre os conjuntos B e A (B – A)



Fonte: http://ivansterkel1246515.blogspot.com

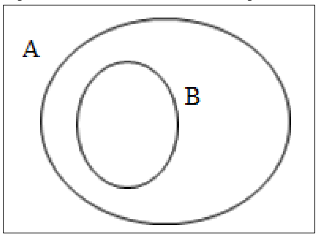
Exemplo 5.1.5: *Sejam os conjuntos A = {QUATRO, OITO, DEZ, J, A} e B = {OITO, J, Q}, segue que: A − B = {QUATRO, DEZ, A} e B − A = {Q}.*

Subconjunto

Dizemos que B é subconjunto de A se, todos os elementos de B também pertencem a A.

Notação: $B \subset A$ (lê-se B está contido em A) ou $A \supset B$ (lê-se A contém B).

Figura 29. Conjunto B sendo subconjunto do conjunto A.



Fonte: plus.google.com

Exemplo 5.1.6: *Sejam os conjuntos A = {DOIS, TRÊS, SETE, DEZ} e B = {SETE, DEZ}, segue que:* $B \subset A$ *ou* $A \supset B$.

Exemplo 5.1.7: *Qualquer que seja o conjunto A,* $\emptyset \subset A$ *e* $A \subset A$.

De fato, Supondo que $\emptyset \not\subset$ A, ou seja, o conjunto vazio não é subconjunto de A. Assim, podemos dizer que existe um elemento do conjunto vazio o qual não pertence ao conjunto A. Isto é um absurdo, pois o conjunto vazio não possui elementos. Então, a afirmação $\emptyset \not\subset$ A, é falsa. Portanto, $\emptyset \subset$ A é verdadeira.

Visto isto, observemos que o número de elementos da união entre os conjuntos A e B, possui algumas variações:

Sendo A ∪ B ≠ $\emptyset$: n(A ∪ B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B);

Sendo A ∪ B = $\emptyset$: n(A ∪ B) = n(A) + n(B);

Sendo A ⊃ B: n(A ∪ B) = n(A).

5.2 Contagem

Tendo conhecimento de algumas propriedades e operações entre conjuntos, analisemos um problema de contagem, o qual utilizaremos tais propriedades e operações para resolvê-lo.

Um menino ganha do pai duas meias e três chuteiras para poder jogar bola. De quantos modos distintos, o menino pode escolher uma meia e uma chuteira para ir jogar?

Utilizando as operações com conjuntos: Denominando M = $\{m_1, m_2\}$ o conjunto das meias e C = $\{c_1, c_2, c_3\}$ o conjunto das chuteiras. Logo, devemos escolher pares ordenados entres os conjuntos M e C, o que nada mais é do que o produto cartesiano de M por C:

$$\text{M x C} = \{(m_1, c_1); (m_1, c_2); (m_1, c_3); (m_2, c_1); (m_2, c_2); (m_3, c_3)\}.$$

Então, como o número de elementos do produto cartesiano é 2 · 3 = 6, concluímos que o menino pode escolher uma meia e uma chuteira de 6 modos distintos.

Princípios básicos da contagem (FURUKAWA, 2017), (MARMO, 2008)

Princípio da adição

Sejam A e B dois conjuntos finitos e não vazios. Se existem m possibilidades para a escolha dos elementos de A e n possibilidades para a escolha dos elementos de B, então, para a escolha de um elemento de A ou de B, existem $m + n$ possibilidades.

Exemplo 5.2.1: *Fernando possui 3 cartas vermelhas e 2 cartas pretas, todas elas diferentes entre si. De quantos modos distintos ele pode escolher uma destas para utilizar em uma jogada?*

Resolução: Fernando poderá escolher uma carta vermelha ou uma carta preta, já que todas são distintas. Assim, são 3 (vermelhas) + 2 (pretas) = 5 opções, no total.

Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem (PFC)

Sejam A e B dois conjuntos finitos e não vazios. Se existem m possibilidades para a escolha dos elementos de A e n possibilidades para a escolha dos elementos de B, então, para a escolha sucessiva de um elemento de A e um elemento de B, nesta ordem, existem $m \cdot n$ possibilidades.

Observações:

Para a escolha de dois elementos distintos do conjunto A teremos $m \cdot (m - 1)$ possibilidades. De modo análogo, para a escolha de dois elementos distintos do conjunto B teremos $n \cdot (n - 1)$ possibilidades;

O resultado n(A x B) = n(A) · n(B), pode ser estendido para mais de dois conjuntos: Sejam A_1, A_2, A_3, ..., A_k, conjuntos não vazios. O número possibilidades de escolhas dos elementos dos conjuntos, nesta ordem, é dado por: $n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot ... \cdot n(A_k)$.

Exemplo 5.2.2: *Utilizando um baralho de 52 cartas, de quantos modos distintos podemos escolher duas cartas com naipes diferentes?*

Resolução: Utilizando o PFC, há 4 possibilidades para a 1ª carta, podendo ser qualquer um dos existentes, e 3 possibilidades para a 2ª, já que o naipe não pode ser o mesmo.

1ª carta	2ª carta

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$4 \quad \cdot \quad 3 \quad = 12$$

Exemplo 5.2.3: *Quantos números naturais, de três algarismos, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?*

Resolução: Utilizando o PFC, há cinco possibilidades para cada casa.

centena	dezena	unidade

$$5 \quad \cdot \quad 5 \quad \cdot \quad 5 \quad = 125$$

Exemplo 5.2.4: *Quantos números naturais, de três algarismos distintos, podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?*

Resolução: Utilizando o PFC, há cinco possibilidades para a 1ª casa decimal, já que o número zero não pode ser utilizado, visto que, por exemplo, o número 012 não possui três algarismos, mas apenas dois: 012 = 12. Não podendo haver repetição, são cinco possibilidades para a 2ª casa decimal, pois o número zero pode ser utilizado e, de modo análogo, quatro opções para a 3ª casa:

centena	dezena	unidade

$$5 \quad \cdot \quad 5 \quad \cdot \quad 4 \quad = 120$$

Exemplo 5.2.5: *Quantos números naturais pares, de três algarismos distintos, podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?*

Resolução: Para que o número seja par, ele deve terminar em algarismo par. Como o número 0 não pode estar presente na 1ª casa, o que já foi analisado no exemplo anterior, e, sendo 0 um número par, o mesmo pode aparecer na 3ª casa. Por conseguinte, devemos analisar que, caso o zero seja utilizado 3ª casa, teremos 5 opções na 1ª. Agora, sendo utilizado 2 ou 4 (os demais números pares) os de possível utilização na 3ª casa, serão quatro as possibilidades para a 1ª casa. Além disso, observemos que para a 2ª casa teremos sempre quatro opções, as quais ainda não foram utilizadas na 1ª ou na 3ª casa. Portanto, devemos separar tal contagem em dois casos:

1° caso: utilizando o PFC e, o número zero na 3ª casa.

centena	dezena	unidade

$$5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$$

2° caso: utilizando o PFC e, os números dois ou quatro na 3ª casa.

centena	dezena	unidade

$$4 \cdot 4 \cdot 2 = 16$$

Logo, a junção dos casos apresentados se dá pelo princípio da adição, ou seja, teremos um total de 20 + 16 = 36 números.

Exemplo 5.2.6: *(ENEM – 2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existam 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez, um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada. O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta por- que há:*

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas;
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas;
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas;
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas;
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Resolução: Utilizando o PFC, há cinco possibilidades para os objetos, seis possibilidades para as personagens, e nove possibilidades para os cômodos..

objetos	personagens	cômodos

5 · 6 · 9 = 270

Assim, totaliza-se 270 possibilidades para a brincadeira, 10 a menos que a quantidade de alunos. Alternativa A.

5.3 Tipos de agrupamento

Sequências

Agrupamentos que se diferem por seus elementos componentes e também pela ordem dos mesmos.

Exemplo 5.3.1: *Utilizando as letras a, b e c temos que: (a, b) ≠ (a, c) considerando os elementos dos pares e (a, b) ≠ (b, a) considerando a importância da ordem dos elementos dos pares.*

Conjuntos

Agrupamentos que se diferem por seus elementos componentes, apenas.

Exemplo 5.3.2: *Utilizando as letras a, b e c temos que: (a, b) ≠ (a, c,) considerando os elementos dos pares e (a, b) = (b, a) já que, neste caso, não consideramos a importância da ordem dos elementos dos pares.*

5.4 Número fatorial

Definiremos número fatorial devido sua utilização nos assuntos subsequentes.

Denominamos n fatorial ou fatorial de n, o produto de todos os números naturais de 1 a n, dado $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Notação: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot ... \cdot 1$

Exemplo 5.4.1: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$; $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Observações:

Podemos escrever os fatoriais da seguinte forma:

$5! = 5 \cdot 4!$ ou $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3!$;

$4! = 4 \cdot 3!$.

Por definição, $2! = 2 \cdot 1$, consequentemente, definimos $1! = 1$;

Definido $1! = 1 = 1 \cdot 0!$, consequentemente, definimos $0! = 1$.

5.5 Classificação

Classificaremos os agrupamentos em arranjos, permutações ou combinações. Iremos diferenciá-los de acordo com o tipo de agrupamento que cada um deles é (sequência ou conjunto, ou seja, vendo se há ou não importância de ordem na contagem dos elementos) e também se, dado um grupo com certa quantia de elementos, todos eles serão utilizados na contagem, ou apenas parte do total (LIMA, 2016).

Arranjos simples

Sequências de p elementos distintos, tomados entre n elementos dados, visto que $p < n$. Logo, são agrupamentos que diferenciam-se pelos elementos e também por sua ordem, além de utilizar parte do todo.

Exemplo 5.5.1: *Quatro jogadores disputam a final de um torneiro de pôquer. De quantos modos distintos poderão ser apresentados o campeão e o vice-campeão?*

Resolução: Tomando por A, B, C e D, os jogadores que disputam o torneiro, teremos as seguintes possibilidades: (AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC,CB, BD, DB, CD, DC), sendo a primeira letra representando o campeão e a segunda o vice campeão. Ou seja, teremos doze possibilidades para tal situação.

A quantidade de elementos apresentada em um exercício pode ser bem maior que a anterior. Daí se faz válida a utilização de uma fórmula para calcular o número de arranjos:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemplo 5.5.2: *Dado o grupo I = {a, b, c} são seis as sequências de dois elementos distintos que podemos formar: (a, b); (b, a); (a, c); (c, a); (b, c); (c, b).*

Estes agrupamentos são arranjos simples, pois há a importância de ordem para diferenciar os pares e, utilizamos dois dos três elementos apresentados no grupo (parte do todo).

Com isso, teremos: $A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$.

Permutação simples

Sequências de *n* elementos distintos, tomados entre *n* elementos dados. Logo, são agrupamentos que diferenciam-se pelos elementos componentes e também por sua ordem e, utilizam todo o grupo apresentado.

Observação: Anagramas são transposições de letras de palavras ou frases para formar outra palavra ou frase. (por exemplo: amor, de Roma).

Exemplo 5.5.3: *Quantos são os anagramas que podem ser formados com a palavra PAI?*

Resolução: Os anagramas da palavra PAI, são: PAI, PIA, API, AIP, IAP, IPA. Ou seja, são seis os anagramas da palavra PAI.

A quantidade de elementos apresentada em um exercício pode ser bem maior que a anterior. Daí se faz válida a utilização de uma fórmula para calcular o número de permutações:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemplo 5.5.4: *Dado o grupo I = {a, b, c} são seis as sequências de três elementos distintos que podemos formar: (a, b, c); (a, c, b); (b, a, c); (b, c, a); (c, a, b); (c, b, a).*

Estes agrupamentos são permutações simples, pois há a importância de ordem para diferenciar os pares e, utilizamos três dos três elementos apresentados no grupo (todos os elementos).

Com isso, teremos: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Combinação simples

Conjuntos de *p* elementos distintos, tomados entre *n* elementos dados, visto que $p \leq n$. Logo, são agrupamentos que de diferenciam apenas pelos elementos componentes e, utilizam tudo* ou parte do todo.

Exemplo 5.5.5: *Num grupo de 3 cartas, devem ser escolhidas 2 destas para efetuar uma jogada, sendo estas descartadas simultaneamente. De quantos modos isto pode ser feito?*

Resolução: Tomemos as três cartas por A, B e C. Logo, as escolhas de duas destas podem ser das seguintes maneiras: (A, B); (A, C); (B, C). Então, são três os modos que conseguimos escolher as duas cartas.

Observação: as escolhas (A, B) e (B, A), por exemplo, são idênticas, já que, em ambos pares, as cartas escolhidas serão as mesmas, além de serem jogadas de modo simultâneo.

A quantidade de elementos apresentada em um exercício pode ser bem maior que a anterior. Daí se faz válida a utilização de uma fórmula para calcular o número de combinações:

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}}$$

Exemplo 5.5.6: *Dado o grupo I = {a, b, c} são três os conjuntos de dois elementos distintos que podemos formar: (a, b); (a, c);(b, c).*

Estes agrupamentos são combinações simples, pois não há a importância de ordem para diferenciar os pares e, utilizamos dois dos três elementos apresentados no grupo (parte do todo).

Com isso, teremos: $C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1} = 3$.

Observações:

Em uma combinação simples, ao utilizarmos todos os *n* elementos apresentados, teremos sempre uma única opção de contagem.

$$C_{n,n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

As combinações $C_{n,p}$ e $C_{n,k}$, são ditas complementares caso apresentem a propriedade $p + k = n$. Quando complementares, as combinações são equivalentes.

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8!}{6! \cdot (8-6)!} = C_{8,6}.$$

Note que: 2 + 6 = 8.

Arranjos com repetição

Arranjos em que cada elemento pode aparecer mais de uma vez nos agrupamentos.

Exemplo 5.5.7: *Duas passagens serão sorteadas para torneios distintos do WSOP. Três pessoas concorrem a estas, sendo que uma única pessoa pode receber ambas as passagens. De quantos modos isso pode ser feito?*

Resolução: Tomemos as três pessoas por A, B e C. Logo, as duas passagens podem ser dadas das seguintes maneiras: (A, A); (A, B); (A, C); (B, B); (B, A); (B, C); (C, C); (C, A); (C, B) sendo a primeira letra representando a pessoa que recebe a 1° passagem e a segunda a 2° passagem. Então, são nove os modos para distribuir tais passagens.

A quantidade de elementos apresentada em um exercício pode ser bem maior que a anterior. Daí se faz válida a utilização de uma fórmula para calcular o número de arranjos com repetições:

$$\boxed{\mathbf{Ar_{n,p} = n^p}}$$

Exemplo 5.5.8: *Dado o grupo I = {a, b} são quatro as sequências de dois elementos que podemos formar: (a, b); (b, a); (a, a); (b, b).*

Estes agrupamentos são arranjos com repetição, pois há a importância de ordem para diferenciar os pares e, utilizamos dois dos três elementos apresentados no grupo (parte do todo).

Com isso, teremos: $Ar_{3,2} = 2^2 = 4$.

Observação: neste caso, estão apresentados e calculados os arranjos "totais" (sem repetição e com repetição).

Permutações com repetição

Permutações em que cada elemento aparece mais de uma vez nos agrupamentos.

Exemplo 5.5.9: *Quantos são os anagramas que podem ser formados com a palavra ARARA?*

Resolução: Os anagramas da palavra ARARA, são: ARARA, AAARR, AARRA, AARAR, ARRAA, ARAAR, RRAAA, RAAAR, RARAA, RAARA. Logo, são dez os anagramas da palavra ARARA.

A quantidade de elementos apresentada em um exercício pode ser bem maior que a anterior. Daí se faz válida a utilização de uma fórmula para calcular o número de permutações com repetições:

$$\boxed{\mathbf{Pr_n^{k_1,k_2,\dots,k_j} = \frac{n!}{k_1!\,.\,k_2!\,.\,\dots\,k_j!}\ ;\ k_1, k_2,\dots,k_j\text{: repetições}}}$$

Exemplo 5.5.10: *Dado o grupo I = {a, a, b} são três as sequências de três elementos que podemos formar: (a, a, b); (a, b, a); (b, a, a).*

Estes agrupamentos são permutações com repetição, pois há a importância de ordem para diferenciar os pares e, utilizamos três dos três elementos apresentados no grupo (todos os elementos).

Com isso, teremos: $\mathrm{Pr}_2^3 = \frac{3!}{2!} = \frac{3\,.\,2!}{2!} = 3$.

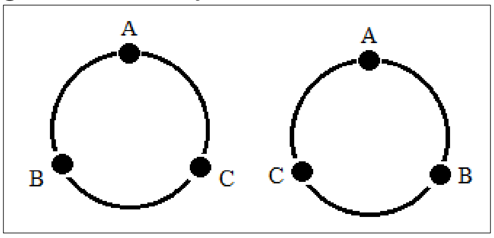
Permutação circular

Permutação em que os elementos estão dispostos em uma ordem cíclica (a disposição dos elementos forma uma circunferência ou um círculo).

Exemplo 5.5.11: *Três crianças brincam ao redor de uma mesa redonda, sentado em volta da mesma. De quantos modos distintos elas podem se acomodar?*

Resolução: Tomando por A, B, C as três crianças, e o sentido anti-horário a partir do ponto A, temos as seguintes acomodações das mesmas: (A, B, C); (A, C, B). Portanto, são duas as permutações circulares.

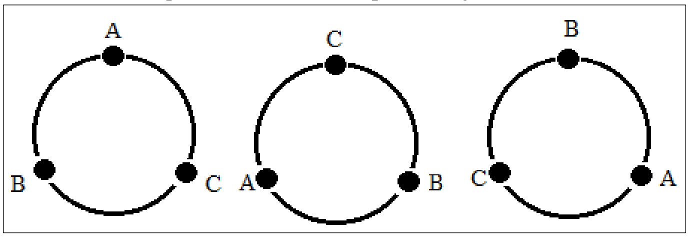
Figura 30. Permutação circular de três elementos.



Fonte: arquivo pessoal

Observação: a igualdade nas acomodações: (A, B, C); (C, A, B); (B, C, A). Nestas, tomando A como "ponto inicial" e o sentido anti-horário, será vista a sequência (A – B – C).

Figura 31. Elementos equivalentes de uma permutação circular de três elementos.



Fonte: arquivo pessoal

A quantidade de elementos apresentada em um exercício pode ser bem maior que a anterior. Daí se faz válida a utilização de uma fórmula para calcular o número de permutações circulares:

$$\boxed{\mathbf{Pc_n = (n - 1)!}}$$

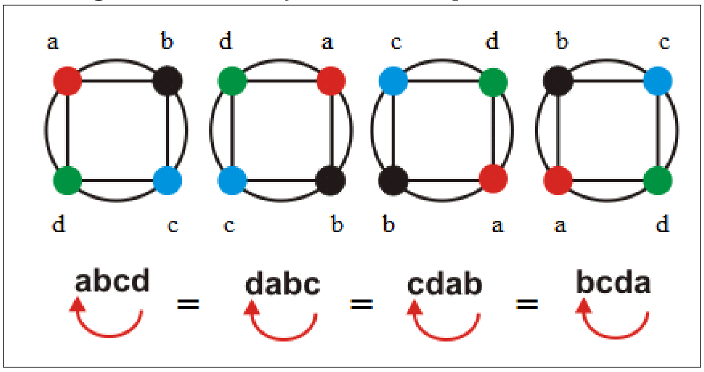
Exemplo 5.5.12: *Dado o grupo I = {a, b, c, d} são seis as sequências de três elementos distintos que podemos formar: (a, b, c, d); (a, b, d, c); (a, c, b, d); (a, c, d, b); (a, d, b, c); (a, d, c, b).*

Vejamos que, em uma permutação circular, temos, por exemplo, as igualdades:

(a, b, c, d) = (b, c, d, a) = (c, d, a, b) = (d, a, b, c).

Esboçando as sequências em uma circunferência, enxergamos, literalmente, a veracidade das igualdades:

Figura 32. Permutação circular de quatro elementos.



Fonte: alfaconnection.pro.br

Com isso, teremos: Pc_4 = (4 – 1)! = 3! = 6

Observação: as demais igualdades entre as sequências seguem o padrão apresentado anteriormente.

Permutação caótica

Permutação caótica, ou desarranjo, ocorre quando nenhum dos elementos ocupa sua posição original.

Exemplo 5.5.13: *Quantas são as permutações caóticas que podem ser formadas com os números 1, 2 e 3?*

Resolução: Tomando como ordem dos números a ordem crescente, temos que as permutações caóticas, as quais o número 1 não pode estar na 1° posição, o número 2 não pode estar na 2ª posição e o número 3 não pode estar na 3ª posição, são: (2, 3, 1); (3, 2, 1). Assim, são duas as permutações caóticas.

A quantidade de elementos apresentada em um exercício pode ser bem maior que a anterior. Daí se faz válida a utilização de uma fórmula para calcular o número de permutações caóticas:

$$\boxed{\mathbf{P_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right),\ \forall\, n \geq 1}}$$

Exemplo 5.5.14: *Dado o grupo I = {a, b, c, d} são nove as permutações caóticas que podemos formar: (b, a, d, c); (b, c, d, a); (b, d, a, c); (c, a, d, b); (c, d, a, b); (c, d, b, a); (d, a, b, c); (d, c, a, b); (d, c, b, a).*

Observação: nota-se que a utilização da fórmula para o cálculo do número de permutações caóticas dos elementos de um grupo nem sempre é a melhor alternativa para a resolução de um exercício.

Combinação com repetição

Combinações em que cada elemento pode aparecer mais de uma vez no agrupamento.

Exemplo 5.5.15: *João separa as damas e os valetes de um baralho, para fazer uma mágica. Para realizar tal mágica, ele utilizará apenas três destas cartas, e não dará importância aos naipes, ou seja, a escolha da dama de paus é equivalente à escolha da dama de ouros, por exemplo. De quantos modos distintos estas três cartas podem ser separadas?*

Resolução: Tendo dois diferentes "tipos" de carta, e três para utilizar, João necessariamente repetirá, no mínimo, um dos tipos. Logo, temos: (Q, Q, Q); (Q, Q, J); (Q, J, J); (J, J, J). De acordo com os dados, as escolhas das cartas podem ser três damas, duas damas e um valete, uma dama e dois valetes ou três valetes, ou seja, quatro possibilidades.

A quantidade de elementos apresentada em um exercício pode ser bem maior que a anterior. Daí se faz válida a utilização de uma fórmula para calcular o número de combinações com repetição:

$$\boxed{\mathbf{Cr_{n,p} = C_{n+p-1,\ p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\cdot(n-1)!}}}$$

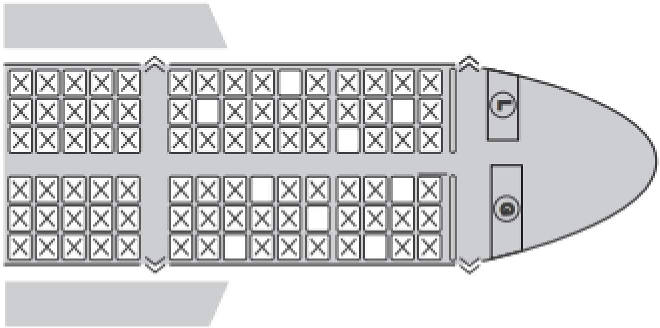
Exemplo 5.5.16: *Dado o grupo I = {a, b, c, d} são dez os conjuntos de dois elementos que podemos formar: (a, b); (a, c); (a, d); (b, c); (b, d); (c; d); (a, a); (b, b); (c, c); (d, d).*

Estes agrupamentos são combinações com repetição, pois não há a importância de ordem para diferenciar os pares e, utilizamos dois dos três elementos apresentados no grupo (parte do todo).

Com isso, teremos: $Cr_{4,2} = C_{4+2-1,2} = \frac{(4+2-1)!}{2!\cdot(4-1)!} = C_{5,2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 3!} = 10.$

Observação: neste caso, estão apresentadas e calculadas as combinações "totais" (sem repetição e com repetição).

Exemplo 5.5.17: (ENEM – 2015) *Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.*



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

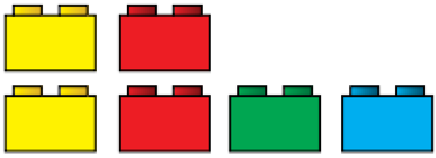
O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $\frac{9!}{2!}$ *b)* $\frac{9!}{7!\cdot 2!}$ *c) 7!* *d)* $\frac{5!}{2!}\cdot 4!$ *e)* $\frac{9!}{4!}\cdot\frac{4!}{3!}$

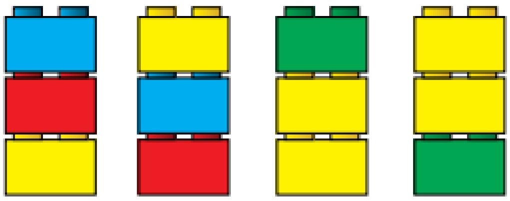
Resolução: Observando a figura, notamos nove poltronas vagas para que as sete pessoas da família as ocupem (parte do todo). Tal ocupação é ordenada, já que a disposição das pessoas da forma (a, b) é diferente da forma (b, a). Isto posto, tal contagem é dada por um arranjo simples:

$$A_{9,7} = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}.\text{ Alternativa A.}$$

Exemplo 5.5.18: (UNESP – 2017) *Uma criança possui 6 blocos de encaixe, sendo 2 amarelos, 2 vermelhos, 1 verde e 1 azul.*



Usando essas peças, é possível fazer diferentes pilhas de três blocos. A seguir, são exemplificadas quatro das pilhas possíveis.

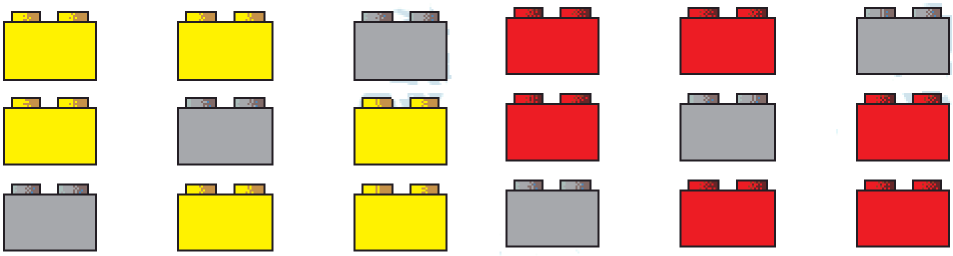


Utilizando os blocos que possui, o total de pilhas diferentes de três blocos, incluindo as exemplificadas, que a criança pode fazer é igual a:

a) 58 *b) 20* *c) 42* *d) 36* *e) 72*

Resolução: Primeiramente, podemos observar que, ao empilhar três blocos, existem duas possibilidades: repetir cor ou não repetir cor.

Repetindo cor: As cores que podem ser repetidas são amarela e vermelha. Cada uma destas possui três diferentes disposições de empilhamento pois, devemos considerar a importância de ordem em tal ação (observado nos exemplos apresentados pelo exercício). Logo, teremos 18 possibilidades, já que o bloco que "sobra" pode ser pintado com três cores distintas (aquelas que restaram).



Observação: a contagem de possibilidades é dada pelo PFC e também por duas permutações com repetição:

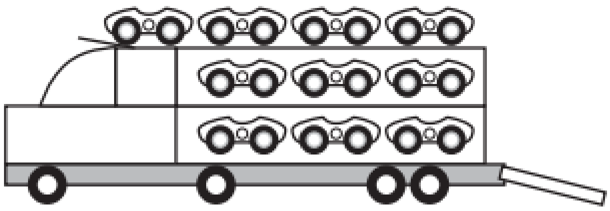
$$2 \cdot Pr_3^2 \cdot 3 = 2 \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 3 = 3! \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18.$$

Sem repetir cor: Sendo quatro cores distintas para pintar três blocos, teremos $C_{4,3}$ para tal escolha, visto que não há diferença em relação a ordenação da escolha das cores. Escolhidas as cores, é importante a disposição das mesmas para os três blocos, então teremos P_3. Dai, pelo PFC:

$$C_{4,3} \cdot P_3 = \frac{4!}{3!\,.\,1!} \cdot 3! = 4! = 24.$$

Pelo principio aditivo, serão 18 + 24 = 42 pilhas diferentes de blocos. Alternativa C.

Exemplo 5.5.19: (ENEM – 2017) *Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.*



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,4}$ *b)* $C_{9,3}$ *c)* $C_{10,4}$ *d)* 6^4 *e)* 4^6

Resolução: Para garantir que cada cor apareça em, pelo menos um carrinho, pintamos quatro deles, um com cada uma das cores apresentadas. Assim, nos restam quatro cores para pintar seis carrinhos. Ou seja, haverá a repetição de cores.

Analisando a frase “Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo”, concluímos que tal contagem é dada por uma combinação com repetição. Então: $Cr_{4,6} = C_{4+6-1,4} = C_{9,6} = C_{9,3}$. Alternativa B.

Observação: $C_{9,6} = C_{9,3}$, pois são combinações complementares.

CAPÍTULO 6

PROBABILIDADE

Quem nunca sonhou com alguns números e pensou em jogar na loteria, efetuando cálculos de acordo com sua intuição? Este capítulo trará uma ideia da real chance do sonho se tornar realidade. Alguns conceitos prévios a definição de probabilidade serão também apresentados e exemplificados.

Para auxiliar a compreensão do conceito probabilidade, definiremos e exemplificaremos, antecipadamente, alguns outros conceitos relevantes.

Experimento determinístico: repetido em determinadas condições, produz resultados iguais. Ou seja, são fenômenos os quais já prevemos seus resultados antes mesmo de sua ocorrência.

Exemplo 6.1: *a água quando resfriada a 0°C, sobre pressão normal, entra em solidificação.*

Experimento aleatório: repetido em determinadas condições, produz resultados geralmente diferentes. Ou seja, são fenômenos os quais não podemos prever seus resultados, pois existe um conjunto finito de possibilidades.

Exemplo 6.2: *ao lançar uma moeda, não podemos precisar qual das faces ficará voltada para cima. É sabido apenas que será cara, ou coroa.*

Os estudos matemáticos que envolvem a teoria das probabilidades buscam modelos que possuam dados suficientes para se tomar uma decisão mais precisa a respeito de um experimento aleatório. Diverso e variados campos são abrangidos por estes estudos: jogos de azar, a Física, a Biologia, a Meteorologia, o controle de qualidade, entre outros. Com base em tais fatos, definamos também:

Espaço amostral: conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, denominados frequentemente por amostras ou pontos amostrais do experimento.

Observação: buscando facilitar o desenvolvimento do texto, utilizaremos a letra “E” para denotar espaço amostral.

Exemplo 6.3: *No lançamento de uma moeda, temos: E = {cara, coroa}. No lançamento de duas moedas, temos: E = {(cara, cara); (cara, cora); (coroa, cara); (coroa, coroa)}. No lançamento de um dado, temos: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.*

Observação: é corriqueira a utilização das notações c: cara e k: coroa, as quais serão aplicadas daqui por diante.

Importante ressaltar que nos exemplos anteriores estão sendo analisados moedas e dado "honestos" ou "não viciados", isto é, aqueles cujas probabilidades de ocorrência de cada uma das faces são exatamente a mesma. Veremos em exemplos posteriores exercícios envolvendo experimentos com objetos "desonestos" ou "viciados".

Evento: todo e qualquer subconjunto de um espaço amostral.

Observação: buscando facilitar o desenvolvimento do texto, utilizaremos uma letra maiúscula qualquer, desde que não seja a letra "E" para denotar um evento.

Exemplo 6.4:

a) No lançamento de duas moedas, podemos observar os eventos:
A: obter faces iguais; A = {(c, c); (k, k)};
B: obter, pelo menos, uma face cara; B = {(c, c); (c, k); (k, c)}.

b) No lançamento de um dado, podemos observar os eventos:
C: obter face que seja um número par; C = {2, 4, 6};
D: obter face que seja um número menor que 7. D = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = E;
F: obter face que seja um número maior que 7. F = ∅.

Os eventos D e F recebem as denominações evento certo e evento impossível, respectivamente.

Eventos unitários são denominados eventos elementares. Por exemplo, obter face menor que dois em um dado: {1}.

Um espaço amostral que possui todos seus eventos elementares com uma mesma probabilidade de ocorrência ou que são igualmente prováveis, é denominado espaço amostral equiprovável. Em um dado honesto, cada face possui a mesma probabilidade de ocorrência, assim temos um espaço amostral equiprovável.

Acordando com a teoria dos conjuntos, um experimento aleatório com “n” elementos, terá 2^n eventos.

Evento complementar: seja A um evento de um experimento aleatório E. O conjunto dos elementos de E, que não pertencem a A, formam o evento complementar de A, denotado por $\overline{A}$.

Exemplo 6.5: *tomando por base o exemplo 5.4, temos:*

$\bar{A}$*: obter faces diferentes;* $\bar{A}$ *= {(c, k); (k, c)};*

$\bar{C}$*: obter face que seja um número ímpar;* $\bar{C}$ *= {1, 3, 5}.*

Outra notação importante, utilizada para experimentos aleatórios e eventos é a de número de elementos, dada por:

n(E): número de elementos do experimento aleatório E;

n(A): número de elementos do evento A.

Observação: novamente respeitando a teoria dos conjuntos, aplicando-a para dois eventos quaisquer A e B, são válidas as seguintes propriedades:

Intersecção: $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$;

União: $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$;

Sendo $A \cap B \neq \emptyset$: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;

Sendo $A \cap B = \emptyset$: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Daí, dizemos que A e B são eventos mutuamente exclusivos ou eventos mutuamente excludentes;

$n(A) + n(\overline{A}) = n(E)$. Observamos facilmente esta propriedade com os exemplos anteriores.

Por conseguinte a tais definições, dizemos que a probabilidade de um evento A ocorre, denotada por P(A), é dada pelo número real:

$$\boxed{\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{n(A)}}{\mathbf{n(E)}} = \frac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}}$$

Não é necessário um vasto conhecimento matemático para compreender que, ao lançar um dado, a “chance” de que a face voltada para cima ser par é de 50%, pois metade das faces são números pares. Todavia, neste evento temos 3 casos favoráveis, 3 “sonhos”, 3 faces que desejamos que saiam, dentre 6 casos possíveis, 6 “realidades”. Daí, nitidamente relacionamos o exemplo à aplicação de probabilidade, obtendo: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$.

A utilização da razão $"\frac{\text{SONHO}}{\text{REALIDADE}}"$ é um abuso de notação/linguagem viabilizando melhor entendimento e significado à definição. Vemos também que uma fração (costumeiramente irredutível), um número decimal ou um número percentual podem ser as representações quantitativas de uma probabilidade.

Consequências da definição:

I. $0 \leq P(A) \leq 1$;
II. $P(\emptyset) = 0$;
III. $P(E) = 1$;
IV. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ ou $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemplo 6.6: (*ENEM – 2015) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?*

a) $\frac{1}{100}$ *b)* $\frac{19}{100}$ *c)* $\frac{20}{100}$ *d)* $\frac{21}{100}$ *e)* $\frac{80}{100}$

Resolução: E = {1, 2, ..., 99, 100}; n(E) = 100.
A: senha sorteada ser um número de 1 a 20; A = {1, 2, ..., 20}; n(A) = 20.
Logo, $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{20}{100}$. Alternativa C.

Exemplo 6.7: *(FUVEST – 2017) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo-secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. A probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome é:*

a) $\frac{1}{4}$ *b)* $\frac{7}{24}$ *c)* $\frac{1}{3}$ *d)* $\frac{3}{8}$ *e)* $\frac{5}{12}$

Resolução: Tomando as letras iniciais de cada nome para representá-los, temos:

E = {(C, P, R, A); (C, P, A, R); (C, R, P, A); (C, R, A, P); (C, A, P, R); (C, A, R, P); (P, C, R, A); (P, C, A, R); (P, R, C, A); (P, R, A, C); (P, A, C, R); (P, A, R, C); (R, P, C, A); (R, P, A, C); (R, C, P, A); (R, C, A, P); (R, A, P, C); (R, A, C, P); (A, P, R, C); (A, P, C, R); (A, R, P, C); (A, R, C, P); (A, C, P, R); (A, C, R, P)}; n(E) = 24 = 4! = permutação simples de 4 elementos.

A: nenhum participante retire seu próprio nome (ou seja, seguindo a ordem dos nomes, a letra C não pode ocupar a primeira posição, a letra P não pode ocupar a segunda posição, a letra R não pode ocupar a terceira posição, a letra A não pode ocupar a quarta posição).

A = {(P, C, A, R); (P, R, A, C);(P, A, C, R); (R, C, A, P); (R, A, P, C); (R, A, C, P); (A, R, P, C); (A, R, C, P); (A, C, P, R)}; n(A) = 9 = permutação caótica de 4 elementos.

Então, P(A) = = $\frac{n(A)}{n(E)} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$. Alternativa D.

Exemplo 6.8: *(ITA – 2018) São dadas duas caixas, uma delas contém três bolas brancas e duas pretas e a outra contém duas bolas brancas e uma preta. Retira-se, ao acaso, uma bola de cada caixa. Se P1 é a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta e P2 a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor, então P1 + P2 vale:*

a) $\frac{8}{15}$ *b)* $\frac{7}{15}$ *c)* $\frac{6}{15}$ *d) 1* *e)* $\frac{17}{15}$

Resolução: Utilizaremos as notações B: bola branca e P: bola preta.

P1: para que, pelo menos uma bola seja preta, temos as seguintes situações: PB ou BP ou PP. Assim sendo, segue que:

P1 = P(P e B) ou P(B e P) ou P(P e P) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{15}$.

P2: para que, as duas bolas sejam da mesma cor, temos as seguintes situações: BB ou PP. Assim sendo, segue que:

P2 = P(B e B) ou P(P e P) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$.

Portanto, P1 + P2 = $\frac{9}{15} + \frac{8}{15} = \frac{17}{15}$. Alternativa E.

Observação: vimos há pouco que uma das consequências da definição de probabilidade é que $0 \leq P(A) \leq 1$, o que parece não ocorrer neste exercício. Porém, a resposta final é a adição de duas probabilidades, as quais acordam com tal consequência, confirmando a resolução deste.

Exemplo 6.9: *(UNESP – 2015) Um dado viciado, que será lançado uma única vez, possui seis faces, numeradas de 1 a 6. A tabela a seguir fornece a probabilidade de ocorrência de cada face.*

número na face	1	2	3	4	5	6
probabilidade de ocorrência da face	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Sendo X o evento "sair um número ímpar" e Y um evento cuja probabilidade de ocorrência seja 90%, calcule a probabilidade de ocorrência de X e escreva uma possível descrição do evento Y.

Resolução: X: sair um número ímpar, X = {1, 3, 5}. Logo, P(X) = P(1) ou P(3) ou P(5) = P(1) + P(3) + P(5) = $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}$ = 55%.

Y: evento tal que P(Y) = 90%.

Pensando em um evento complementar, de acordo com a informação anterior, concluímos que $P(\overline{Y})$ = 10%. Isto posto, podemos definir Y por:

Y: sair um número diferente de 4, pois P(4) = $\frac{1}{10}$ = 10%.

Y: sair um número menor que 5 (sair um número menor ou igual a 4, analogamente), pois P(5) + P(6) = $\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ = 10%.

Exemplo 6.10: *(UNIFESP – 2017) Sofia deveria ter estudado 10 temas de biologia para fazer uma avaliação, porém só estudou 2. Nessa avaliação, ela poderá ser reprovada (R), aprovada com ressalvas (AR) ou aprovada (A). Antes de iniciar a avaliação, a professora de Sofia dá a ela o direito de escolher uma das seguintes estruturas de avaliação:*

Avaliação 1 – composta por apenas 2 questões, cada uma tratando de um dos 10 temas (sem repetir os temas), sendo que errar duas implica R, acertar apenas uma implica AR, e acertar as duas implica A.

Avaliação 2 – composta por apenas 3 questões, cada uma tratando de um dos 10 temas (sem repetir os temas), sendo que errar duas ou mais questões implica R, acertar apenas duas implica AR, e acertar as três implica A.

Considere que Sofia sempre acerta questões dos temas que estudou, e que sempre erra questões dos temas que não estudou.

a) Calcule as probabilidades de R, AR e A para o caso de Sofia ter escolhido a avaliação 1.

b) Se Sofia pretende ser aprovada, independentemente de ser com ressalvas (AR) ou diretamente (A), em qual das avaliações ela terá maior chance? Justifique matematicamente sua conclusão por meio de cálculos de probabilidade.

Resolução:

a) Escolhendo a avaliação 1, as probabilidades de Sofia, são:

P1(R) = P(errar as duas) = $\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$.

P1(AR) = P(errar a 1ª e acertar a 2ª) ou P(acertar a 1ª e errar a 2ª) = $\frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{32}{90} = \frac{28}{45}$.

P1(A) = P(acertar as duas) = $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$.

b) Como já calculamos as probabilidades utilizando a avaliação 1, façamos agora os cálculos para a escolha da avaliação 2, apenas para os casos AR e A:

P2(AR) = P(errar a 1ª e acertar as demais) ou P(errar a 2ª e acertar as demais) ou P(errar a 3ª e acertar as demais) = $\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{16}{720} + \frac{16}{720} + \frac{16}{720} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$.

Observação: podemos calcular de modo mais simples, a probabilidade anterior efetuando: 3 x P(acertar duas e errar uma). Visto que, são efetuados produtos entre as probabilidades, não precisamos nos preocupar com a ordem dos mesmos, mas apenas com as quantidades de acertos e erros.

P2(AR) = 3 · P(acertar duas e errar uma) = 3· $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$.

P2(A) = P(acertar as três) = 0, pois Sofia acertará, no máximo, duas questões.

Com isso, Sofia terá maior chance escolhendo a avaliação 1, pois:

P1(AR) + P1(A) = $\frac{17}{45} > \frac{1}{15}$ = P2(AR) + P2(R).

CAPÍTULO 7

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Thomas Bayes, pastor e matemático, nascido em Londres no ano de 1701, responsável pela teoria que descreve como avaliar a probabilidade de ocorrência de um evento, se outro evento houvesse ocorrido. Assim se dá o inicio do estudo da probabilidade condicional e também dos eventos independentes (MLODINOW, 2011).

Eventos podem ter relação ou não, como visto anteriormente (exemplos). Em alguns casos, a ocorrência de um evento altera a probabilidade atribuída a outro. Vejamos dois exemplos para melhor compreensão:

Exemplo 7.1: *Um casal deseja ter dois filhos, sendo que um deles será menino. Qual a chance dos dois serem meninos?*

Intuitivamente, a maioria das resoluções traz como resposta 50%. Ora, se um dos filhos já é menino, para que o outro também seja a chance é de 50% (os outros 50% seriam a chance de ser menina). Analisando o exercício e, utilizando as notações M: menina (mulher) e H: menino (homem), temos o espaço amostral: E = {MM, MH, HM, HH}.

Agora, o exercício nos trás uma condição “inicial”, expondo que um dos filhos já é homem, ou seja, a possibilidade “MM” não ocorrerá de forma alguma. Com isso, o espaço amostral deve ser: E = {MH, HM, HH}. De modo consequente, a probabilidade de os dois filhos serem meninos, sendo que um deles é menino, corresponde a $\frac{1}{3} \cong 33\%$, e não 50%.

Exemplo 7.2: *Um casal deseja ter dois filhos, sendo que um deles será menino e de nome Bernardo. Qual a chance dos dois serem meninos?*

Como há a garantia de um dos filhos se chamar Bernardo e, utilizando as notações M: menina (mulher), H: menino (homem) e B: Bernardo, temos o espaço amostral: E = {MB, BM, HB, BH}. Assim, a probabilidade de os dois filhos serem meninos, dado que um deles se chama Bernardo, é igual a $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Em ambos os exemplos, a probabilidade de “serem dois meninos” é classificada como probabilidade condicional. Dá-se tal classificação, pois, previamente devemos considerar o evento "um deles é menino". Essa é a "característica" da probabilidade condicional. Para calcularmos a probabilidade de ocorrência de um evento, devemos analisar um evento já ocorrido, e estabelecer a relação entre eles.

Por isso, dado dois eventos A e B de um espaço amostral E, a probabilidade condicional de ocorrer o evento A, tendo ocorrido o evento B, notada por P(A / B), é dada por:

$$\boxed{\mathbf{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{INTERSECÇÃO}{CONDIÇÃO}}}$$

As expressões, "dado que", "sendo que", "sabendo que", "visto que", "uma vez que", entre outras similares, são muito usuais em exercícios que envolvem condição. Obviamente, dois eventos podem não possuir nenhum tipo de relação, ou seja, a ocorrência de um independe da ocorrência do outro. Neste caso, dizemos que estes são eventos independentes.

Sendo assim, como o evento A não é condicionado pela ocorrência do evento B, temos como resultado:

$$\boxed{\mathbf{P(A \mid B) = P(A)}}$$

A respeito de tal resultado, utilizando-o na expressão dada para o cálculo de probabilidade condicional, podemos afirmar que, se dois eventos são independentes, então:

$$\boxed{\mathbf{P(A \mid B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \longrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}}$$

Exemplo 7.3: *No lançamento de dois dados, o resultado obtido em um deles não influi no resultado obtido no outro. Retirando-se duas cartas de um baralho, com reposição, o resultado obtido na primeira não influi no resultado obtido na segunda.*

Exemplo 7.4: *De um baralho de cartas comum com 52 cartas, sorteia-se uma delas aleatoriamente. A probabilidade de se sortear um ás, sendo conhecido que a carta é vermelha, é:*

a) $\frac{1}{13}$ *b)* $\frac{2}{13}$ *c)* $\frac{1}{2}$ *d)* $\frac{1}{52}$ *e) 2%*

Resolução: Denominemos e demos o número de elementos dos eventos A e B, acordado com o enunciado:

A: ás; P(A) = $\frac{4}{52}$ = $\frac{1}{13}$. B: carta vermelha; P(B) = $\frac{1}{2}$. Com isso, temos P(A ∩ B) = $\frac{2}{52}$ = $\frac{1}{26}$. Daí, P(A | B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{26}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{26} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$. Alternativa A.

Exemplo 7.5: *(UFSCar – 1994) Dois dados usuais e não viciados são lançados. Sabe-se que os números observados são ímpares. Então, a probabilidade de que a soma deles seja 8 é:*

a) $\frac{2}{36}$ *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* $\frac{2}{9}$ *d)* $\frac{1}{4}$ *e)* $\frac{2}{18}$

Resolução: Utilizando o conceito de probabilidade condicional, vamos definir, inicialmente, os eventos A e B.

A: soma das faces obtidas no lançamento de dois dados ser igual a 8.

A = {(2, 6); (6, 2); (3, 5); (5, 3); (4, 4)}; n(A) = 5.

B: faces obtidas no lançamento de dois dados são números ímpares.

B = {(1, 1); (1, 3); (3, 1); (1, 5); (5, 1); (3, 3); (3, 5); (5, 3); (5, 5)}; n(B) = 9.

Assim, A ∩ B = {(3, 5); (5, 3)}; n(A ∩ B) = 2 Portanto, P(A | B) = $\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{9}$. Alternativa C.

Exemplo 7.6: *(UNICAMP – 2010) O sangue humano costuma ser classificado em diversos grupos, sendo os sistemas ABO e Rh os métodos mais comuns de classificação. A primeira tabela abaixo fornece o percentual da população brasileira com cada combinação de tipo sanguíneo e fator Rh. Já a segunda tabela indica o tipo de aglutinina e de aglutinogênio presentes em cada grupo sanguíneo.*

Tipo	Fator Rh	
	+	−
A	34%	8%
B	8%	2%
AB	2,5%	0,5%
O	36%	9%

Tipo	Aglutinogênios	Aglutininas
A	A	Anti-B
B	B	Anti-A
AB	A e B	Nenhuma
O	Nenhum	Anti-A e Anti-B

Em um teste sanguíneo realizado no Brasil, detectou-se, no sangue de um indivíduo, a presença de aglutinogênio A. Nesse caso, a probabilidade de que o indivíduo tenha sangue A+ é de cerca de:

a) 76% *b) 34%* *c) 81%* *d) 39%*

Resolução: Sejam A e B os eventos indicados abaixo, conforme as informações das tabelas:

A: sangue A+; n(A) = 34%.

B: presença de aglutinogênio A (sangues A e AB); n(B) = 34% + 8% + 2,5% + 0,5% = 45%.

Além disso, observamos que n(A ∩ B) = n(A) = 34%. Logo, P(A | B) = $\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{34\%}{45\%}$ $\cong$ 76%. Alternativa A.

Exemplo 7.7: *(FUVEST – 2007) Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Três bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente, sem reposição. Determine:*

a) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca.

b) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca, sabendo-se que as três bolas retiradas não são da mesma cor.

Resolução:

a) Tomemos as notações, P: bola preta e B: bola branca. Assim, segue:

P(duas bolas pretas e uma branca) = P(P) e P(P) e P(B) x $C_{3,2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{90}{336} = \frac{15}{56}$.

Observação: como não foi fixada a ordem de retirada em relação a cor das bolas, existem 3 possibilidades: PPB, PBP, BPP. Daí a necessidade da multiplicação pela combinação $C_{3,2}$ (das três bolas, duas são pretas), analogamente, poderíamos efetuar pela combinação complementar $C_{3,1}$ (das três bolas, uma é branca).

b) Sejam A e B os eventos:

A: retirar 2 bolas pretas e 1 bola branca; $P(A) = \frac{15}{56}$.

B: retirar três bolas de cores distintas.

P(B) = P(duas bolas pretas e uma branca ou duas bolas brancas e uma preta) = P(duas bolas pretas e uma branca) + P(duas bolas brancas e uma preta) = $\frac{15}{56} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot 3 = \frac{15}{56} + \frac{180}{336} = \frac{15}{56} + \frac{30}{56} = \frac{45}{56}$.

Logo, $P(A \cap B) = P(A) = \frac{15}{56}$. Portanto, $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{45}{56}} = \frac{15}{56} \cdot \frac{56}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Exemplo 7.8: *(ENEM – 2015) Um protocolo tem como objetivo formar acordos e discussões internacionais para conjuntamente estabelecer metas de redução de emissão de gases de efeito estufa na atmosfera. O quadro mostra alguns dos países que assinaram o protocolo, organizados de acordo com o continente ao qual pertencem.*

Países da América do Norte	Países da Ásia
Estados Unidos da América	China
Canadá	Índia
México	Japão

Em um dos acordos firmados ao final do ano, dois dos países relacionados serão escolhidos aleatoriamente, um após o outro, para verificar se as metas de redução do protocolo estão sendo praticadas. A probabilidade de que o primeiro país escolhido pertença à América do Norte e o segundo ao continente asiático é:

a) $\frac{1}{9}$ *b)* $\frac{1}{4}$ *c)* $\frac{3}{10}$ *d)* $\frac{2}{3}$ *e) 1*

Resolução: Neste exercício podemos observar que os eventos em questão são independentes, pois, o sortear um país da América do Norte primeiro não influi em sortear um país do continente asiático na sequencia. Posto isto, escrevamos tais eventos:

A: país da América do Norte; n(A) = 3.

B: país da Ásia; n(B) = 3.

Calculemos a probabilidade desejada, utilizando também o princípio multiplicativo:

P(primeiro país escolhido pertença à América do Norte e o segundo ao continente asiático) = P(país da América do Norte) e P(país asiático) = $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$. Alternativa C.

CAPÍTULO 8

EXECUÇÃO DO PROJETO

No início do ano letivo de 2018 apresentei o projeto às três escolas em que trabalho. De imediato uma destas vetou a utilização do mesmo, com certo receio na utilização das cartas do baralho. As outras duas gostaram da ideia e daí, começamos buscar autorizações dos pais/responsáveis e diretores gerais, já que são redes particulares de ensino. A primeira, em virtude de ser uma escola metodista, não permitiu a utilização do projeto de acordo com regras para o ensino dados pela pastoral geral que coordena as escolas. A segunda havia dado enorme abertura para o desenvolvimento do projeto, vendo com bons olhos o modo diferente de ministrar os conceitos apresentados, inclusive por falas da coordenadora e do diretor, sendo que este já havia utilizado diversos jogos em suas práticas de ensino. Porém, a partir do momento que iniciaríamos a conversa com os pais/responsáveis, nada mais foi levado a diante.

Sabendo das dificuldades em executar o projeto, o amigo Anderson Dersão, ofereceu seu curso de exatas, o Simetria, para que o projeto fosse aplicado. Por também trabalhar nesta instituição, começamos a divulgar para os alunos e ver qual seria a aceitação dos mesmos, já que, por pagarem aulas extracurriculares, poderiam não estar de acordo com tal execução. Contudo, o projeto foi aceito por estes e então, enviamos autorizações a seus pais/responsáveis para que pudéssemos utilizar os jogos de cartas em aulas previamente definidas.

O *Simetria – curso avançado de exatas,* situado na Rua Nilo Peçanha, 188, Birigui – SP, teve sua idealização em janeiro de 2017. Observando as frequentes dificuldades dos alunos em exatas, sejam aquelas mais específicas e rebuscadas ou as mais básicas, os professores Anderson Dersão e Ângelo, que ministram matemática e química, respectivamente, tiveram a ideia de abrir um curso específico para tal área. Então, em agosto deste mesmo ano, fundaram o Simetria, onde pude aplicar meu projeto.

O mesmo foi desenvolvido em duas noites com os alunos. Na primeira delas utilizamos a escopa, já na segunda o pôquer. Além de explicar as regras dos jogos, demonstrar algumas jogadas, sempre visava conectar os jogos com conceitos matemáticos, além demostrar exercícios que traziam tais conceitos, e que podiam ser resolvidos com ideias dos jogos.

Na noite de 09/07/2018, sete alunos (Roger, João Lucas, Maria Eduarda, Matheus, Guilherme, Nicole e Natany) receberam as instruções sobre regras e conceitos matemáticos a serem abordados pela escopa. Inicialmente, como era um jogo desconhecido, pedi o auxílio do professor George, sendo que este já tinha conhecimento da escopa. Jogamos uma partida apresentado, na prática, o transcorrer do jogo, já abordando o porquê das jogadas que fazíamos e as possibilidades futuras. Logo mais, um dos alunos jogou comigo e, a seguir, propus para que eles jogassem entre si e nós professores fossemos assistindo-os em suas dúvidas.

O receio em jogar "errado" foi a marca das primeiras rodadas. Com o passar do tempo, e tendo indicações/mediações dos professores, os alunos se sentiram bem à vontade e jogaram a vera, sempre visando algo matemático em suas decisões. Ao fim da aula, já tendo passado o horário tratados, foi pedido para que voltássemos em outra oportunidade para continuar com os jogos. Desse modo, julgo ter sido, além de gratificante, de suma valia para o conhecimento daqueles que estão em busca de aprendizado e aprovações.

Várias questões foram abordadas durante os jogos, a partir das quais abordamos concretamente os conceitos: raciocínio mental, contagem e probabilidade. Entre estas, alguns exemplos:

Exemplo 8.1: *Tendo em mãos um TRÊS e um CINCO, qual destas cartas devo jogar, havendo outro TRÊS na mesa?*

Como dito acima, a jogada consistia em um jogador ter em mão TRÊS e CINCO, haver um TRÊS na mesa, e o outro jogador possuir apenas uma carta. Ponderando as possibilidades, consideramos que jogar outro TRÊS é uma melhor escolha, já que deste modo, o outro jogador poderá apanhar as carta somente com um J. Com a carta CINCO, o oponente recolhe cartas com um SETE ou com K. Por este motivo, é de suma importância observar as cartas já utilizadas anteriormente para poder analisar qual jogada menos favorece o adversário.

Exemplo 8.2: *Na mesa há um K e uma Q, por que nem sempre é vantajoso pegar uma das cartas?*

Ao pegar uma destas cartas, seu adversário pode recolher a outra e fazer uma escopa, sem que você tenha ganhado algum ponto nesta jogada. Vale a pena observar que, sendo o K ou a Q de ouro, cada uma destas vale um ponto, pois são dois dos belos, assim é sempre importante recolher tais cartas.

Exemplo 8.3: *Caso eu não consiga pegar nenhuma das cartas que estão na mesa, o que devo jogar?*

Depende muito das cartas apresentadas na mesa e também daquelas que já foram utilizadas. Porém, apresentamos algumas dicas para esta situação:

Não jogar belos, pois cada um deste vale 1 ponto;

Deixar o valor total das cartas da mesa acima de 15 pontos, assim seu adversário não pode fazer uma escopa;

Não permitir que o oponente pegue um belo que tenha em mãos com as cartas da mesa. Por exemplo, evitar deixar uma carta CINCO, a qual possibilita utilizar o K de ouro;

Evitar jogar SETE, ou que seu opositor possa utilizar um SETE para obter cartas da mesa, pois quem tiver mais cartas SETE ao final do jogo, ganha 1 ponto;

Jogar cartas que já estão na mesa, propiciando menos combinações para as cartas do próximo jogador.

Posteriormente a algumas partidas de escopa, apresentamos um desafio para os alunos. Com este, potencializamos os conceitos: análise combinatória e probabilidade.

Exemplo 8.4: *Qual a chance do "pé" do baralho fazer uma escopa, logo na primeira rodada, ou seja, ao virar as 4 cartas iniciais da mesa?*

Resolução: para que o "pé" faça uma escopa ao distribuir as primeiras cartas, as 4 que irão compor a mesa devem somar 15. Assim, para calcular o número destas possibilidades, respeitando os valores das cartas, devemos resolver uma equação do tipo, $x + y + z + w = 15$, sendo $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ e $0 < x, y, z, w \leq 10$. Com tais restrições, damos uma unidade para cada uma das variáveis e, com isso, teremos a equação $x' + y' + z' + w' = 11$. Esta, com resolução mais simples, será análoga à anterior ao retirarmos as 4 possibilidades, que apresentam o número zero nas soluções: (11, 0, 0, 0), (0, 11, 0, 0), (0, 0, 11, 0), (0, 0, 0, 11). Devemos pensar que tal resolução significa partir 11 unidades em 4 partes. No curso de Matemática Discreta (MA 12) do PROFMAT, vimos um exercício muito similar, o qual será tomado como base para solucionar este. Daí, representaremos cada solução por uma fila de sinais + e |, sendo que as barras são utilizadas para separar as incógnitas e a quantidade de sinais + indica o valor de cada uma. Por exemplo, a solução (2, 5, 1, 3) é representada por: ++ | +++++ | + | +++. Logo, são 14 símbolos no total, com repetição de 3 | e 11 +. Calculamos as possibilidades por meio de uma combinação com repetição, ou uma permutação com repetição, que, neste caso, são equivalentes:

$$\mathrm{Cr}_{11,3} = \mathrm{C}_{14,3} = \mathrm{P}_{14}^{3,11} = \frac{14!}{3! \cdot 11!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 11!} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 364.$$

Calculemos agora, a probabilidade de esta jogada ocorrer:

A: quatro cartas inicias da mesa terem soma igual a 15.

n(A) = 364 – 4 = 360.

O número de elementos do espaço amostral será obtido com uma combinação $\mathrm{C}_{40,4}$, já que das 40 cartas do baralho, 4 serão viradas sobre a mesa, independentemente da ordem que isso for feito.

$$\mathrm{n(E)} = \mathrm{C}_{40,4} = \frac{40!}{4! \cdot 36!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 36!} = 5 \cdot 13 \cdot 38 \cdot 37 = 91390.$$

Portanto, $\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(E)}} = \frac{360}{91390} = \frac{180}{45695} \cong 0{,}004 = 0{,}4\ \%$.

Na noite de 01/08/2018, nove alunos (João Lucas, Maria Eduarda, Matheus, Guilherme, Nicole, Natany, Leonardo, Ana Laura e Mateus) compareceram e participaram do projeto através do pôquer. Assim como com a escopa, o começo foi receoso e sem muitas convicções a respeito das jogadas e apostas. Porém, após duas ou três rodadas, todos já estavam fazendo seus planos para poder recolher as fichas do pote, além de observar melhor as cartas do jogo e as possíveis jogadas a conseguir.

Após mostrar aos alunos as regras e jogadas, propus duas questões para que pudéssemos desenvolver o jogo com a matemática mais nítida e suma em sua importância nas jogadas (MARTINEZ, 2014).

Exemplo 8.5: *Qual a probabilidade de receber um par (duas cartas iguais) logo nas cartas iniciais?*

Resolução: Utilizando o PFC e a análise combinatória, calculamos as seguintes opções:

Receber as duas cartas inicias, iguais:

1ª carta	2ª carta

$$13 \cdot 1 = 13$$

Fora isto, devemos observar que cada carta possui 4 naipes distintos, podendo ser escolhidos por uma combinação $C_{4,2} = 6$. Daí, temos um total de 13 · 6 = 78 pares.

Receber as duas cartas inicias, quaisquer:

1ª carta	2ª carta

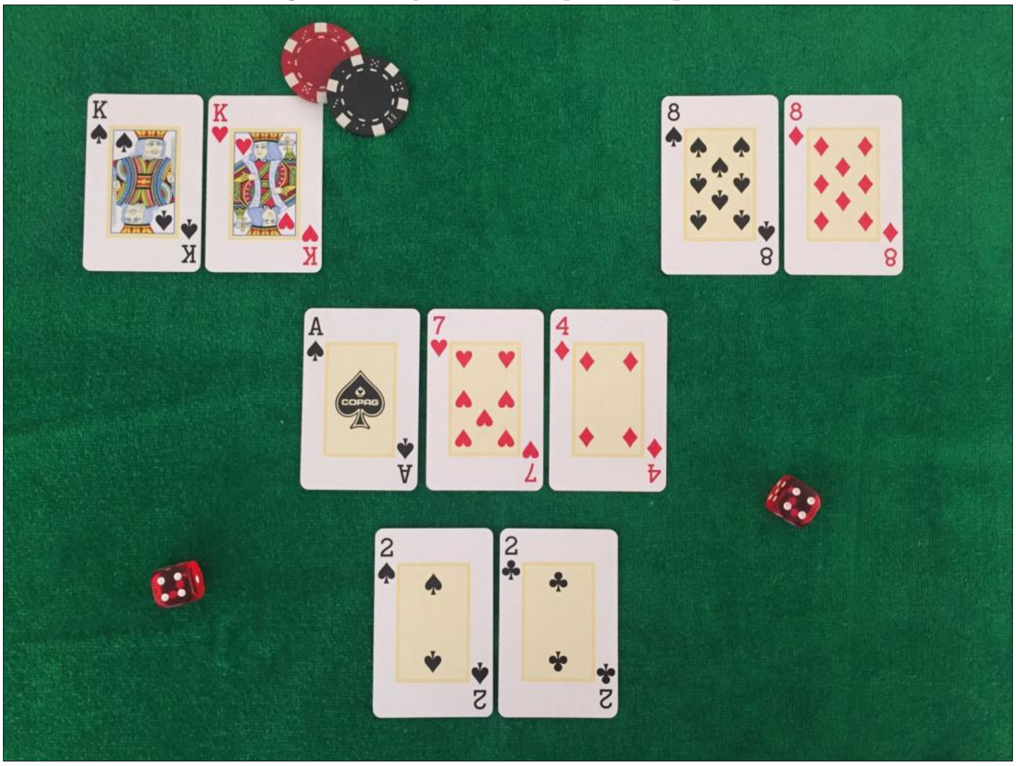
$$52 \cdot 51 = 2652$$

Neste caso, os “não pares” QJ e JQ, por exemplo, são equivalentes. Logo, temos um total de 2652 ÷ 2 (não pares equivalentes) = 1326 não pares.

Dessa maneira, a probabilidade de obter um par logo nas cartas iniciais é calculada pela razão: $\frac{78}{1326} = \frac{1}{17} \cong 5{,}88\%$.

Exemplo 8.6: *Leandro, José e Zonta jogam um torneiro de pôquer. Uma das rodadas apresenta o primeiro com par de reis (K, K), o segundo com par de oitos (8, 8) e o terceiro com par de dois (2, 2). Qual a chance de vitória de cada um dos jogadores, posto que no flop apareça A, SETE e QUATRO?*

Figura 33. Jogada indicada pelo exemplo 8.6.



Fonte: arquivo pessoal

Resolução: A primeira observação que deve ser feia é, como saíram três naipes diferentes (espadas, copas e ouro) logo no flop, fato designado arco-íris de A, SETE e QUATRO não é possível que nenhum dos jogadores consiga um flush.

Para que Zonta vença, é necessário que caia pelo menos outro DOIS, e não caia K ou OITO. Também vence caso consiga uma sequência de A a CINCO, aparecendo TRÊS e CINCO no turn e river. Calculemos tais possibilidades:

R: sair pelo menos uma carta DOIS ou sair as cartas TRÊS E CINCO.

$$P(R) = \frac{2}{43} \cdot \frac{38}{42} \cdot 2 + \frac{4}{43} \cdot \frac{4}{42} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 38 + 4 \cdot 4}{43 \cdot 21} = \frac{92}{903} \cong 10{,}19\%$$

Portanto, Zonta tem probabilidade de vitória igual a 10,19%.

A vitória de José se dará a contar de, pelo menos um OITO e não sair K, ou CINCO e SEIS formando uma sequencia de QUATRO a OITO, e não cair K. Tal probabilidade é de 10,63%.

J: sair pelo menos uma carta OITO ou sair as cartas CINCO E SEIS.

P(J) = $\frac{2}{43} \cdot \frac{40}{42} \cdot 2 + \frac{4}{43} \cdot \frac{4}{42} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 40 + 4 \cdot 4}{43 \cdot 21} = \frac{96}{903} \cong 10{,}63\%$

Portanto, José tem probabilidade de vitória igual a 10,63%.

Leandro vence caso não ocorra nenhuma das opções anteriores e/ou todas as demais possíveis. Com isso, sua probabilidade de vitória é de 79,18%, obtida pela probabilidade complementar dos dois jogadores anteriores: 100% − 10,19% − 10,63%.

Na hipótese de um CINCO for aberto no turn, as probabilidades de vitória para Zonta e José serão equivalentes, iguais a 14,29%, pois o primeiro necessita de uma carta DOIS ou TRÊS, já o segundo requer uma carta OITO ou SEIS. Como restam duas cartas DOIS, duas cartas OITO, quatro cartas TRÊS e quatro cartas SEIS, ambas as probabilidades são dadas por:

P(DOIS ou TRÊS) = P(OITO ou SEIS) = $\frac{2+4}{42} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$ = 14,29%.

Consequentemente, a vitória de Leandro tem probabilidade de 71,43%, dada novamente pela complementar dos jogadores anteriores: 100% − 14,29% − 14,29%.

Após a execução das aulas com os jogos, retomamos a teoria sobre os conteúdos explorados nos jogos e, uma lista com os exercícios apresentados nesta dissertação foi proposta aos alunos, sendo esta trabalhada pelo professor Anderson Dersão e por mim, concluindo a importância da escopa e do pôquer, em conceitos matemáticos sempre vistos em vestibulares.

Notamos também que os alunos pelejavam em fazer conexões com os exercícios dos vestibulares com as jogadas pelas quais passamos, buscando facilitar a compreensão e realização de tais, mesmo que não fossem trabalhados jogos de cartas em seus objetivos.

A seguir, apresentamos alguns momentos, em fotos, das noites em que foram externados os jogos, com participação dos alunos e do professor George:

Figura 34. Execução do projeto (09/07/2018).

Fonte: arquivo pessoal

Figura 35. Execução do projeto (09/07/2018).

Fonte: arquivo pessoal

Figura 36. Execução do projeto (09/07/2018).

Fonte: arquivo pessoal

Figura 37. Execução do projeto (09/07/2018).

Fonte: arquivo pessoal

Figura 38. Execução do projeto (09/07/2018).

Fonte: arquivo pessoal

Figura 39. Execução do projeto (01/08/2018).

Fonte: arquivo pessoal

Figura 40. Execução do projeto (01/08/2018).

Fonte: arquivo pessoal

Figura 41. Execução do projeto (01/08/2018).

Fonte: arquivo pessoal

Figura 42. Execução do projeto (01/08/2018).

Fonte: arquivo pessoal

Figura 43. Execução do projeto (01/08/2018).

Fonte: arquivo pessoal

CAPÍTULO 9

CONCLUSÃO

Pois bem, ensinar matemática por meio de jogos de cartas pode soar de maneira não muito agradável. Aí que intensificamos a tratativa e o desenvolvimento do projeto. Vemos, hoje em dia, uma sociedade muito preocupada em ser politicamente correta, preocupada apenas em apontar defeitos e maldades em quaisquer atitudes ou palavras, esquecendo até mesmo suas raízes e essências.

Desejamos transmitir, além da diversão e do aprendizado matemático, valores e regras que estes jogos podem nos trazer. Algo que julgamos extremamente em falta, inclusive nas escolas. Dando uma atenção especial aos vícios e malefício oriundos dos jogos de cartas e/ou jogos de azar, já que a estes jogos são associados bebidas, drogas, etc. Além disso, julgamos ser muito melhor se sentar em uma mesa com amigos, trocar experiências e até conversas sem sentido, do que se fissurar em uma tela de celular, computador ou afins. Não somos avessos à tecnologia e seus generosos avanços para a educação. Apenas desejamos dar o devido e esquecido valor a iteração entre as pessoas, no seu modo mais objetivo e afável de ser.

Desde muito jovem, acompanhava meu pai, tios, avós, compadres e amigos para jogar baralho, com um único objetivo: se divertir. Não existiam apostas, dinheiro, bebidas, ou qualquer outro tipo de ”sujeira” pressuposta aos jogos de cartas. Eram apenas pessoas que, levavam sim muito a sério cada ponto disputado, mas que, ao final de cada dia, tarde ou noite, riam de tudo o que acontecera, sem qualquer valor a mais ou a menos.

O cultivo das amizades, o respeito pelas diferenças, a felicidade em estar junto das pessoas queridas, isto nunca foi deixado em segundo plano, visando a vitória no jogo, mas sim, eram inseridos em cada ponto disputado. Por ser muito novo, dificilmente participava. Mesmo assim, estava “em cima” de cada jogada, observando as carteadas. Com o passar dos tempos, fui tendo mais oportunidades e pude aprimorar meu raciocínio no jogo e em sua matemática, o que desejamos transmitir com o projeto, juntamente com os valores citados há pouco.

Além disso, tal trabalho permite aos docentes um modo particularmente atrativo e descontraído, fato comprovado com a observação dos alunos que fizeram parte deste, para abordar temas que julgamos de suma importância para a aprendizagem da matemática.

Em 2011, participei de uma palestra com o educador Max Haetinger, e algo dito por ele jamais saiu da minha cabeça: “Não falta informações, não é este o problema da educação em nosso país. O que a sociedade, de um modo geral, necessita são valores e limites”. Que possamos transmitir muito mais que matemática aos nossos alunos, que eles se tornem Mulheres e Homens de bem, responsáveis, corajosos, honestos e crentes que podem se fazer melhor e consequentemente tornas os outros melhores.

REFERÊNCIAS

BELLO, Leonardo. Colaboração de Leandro "Brasa" Pimentel. **Aprendendo a jogar poker** – Princípios, técnicas e praticas. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2007.

CABRAL, Marcos Aurélio; **A utilização de jogos no ensino de matemática.** Universidade Federal de Santa Catarina – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Florianópolis, 2006.

DA SERRA NEGRA, Armando Conceição. **O que é baralho** – col. Primeiros passos. São Paulo: Brasiliense, 1992.

DE ALBUQUERQUE, Inaldo Barbosa; **Matemática Elementar** - UFPBVIRTUAL

FURUKAWA, Clayton; Petronilho, Jeferson; De Assis, Léo Paulo; **Pré-vestibular extensivo – coleção 1000 – Matemática,** vol. Professor, n° 1, 2, 6, 7, 8, 9. Ribeirão Preto: Pearson, 2017.

GRANDO, Regina Célia; **O Jogo suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática.** Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Educação. Campinas, 1995.

LIMA, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio,** volume 2, 7ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MARMO, Alexandre; van Amson, Gleen Albert Jacques; Teixeira, José Carlos; Aguiar Filho, Roberto Benedicto; El Jamal, Roberto Miguel. **Anglo: ensino médio: livro texto** – São Paulo: Anglo, 2008. Obra em 2 v. para alunos do 1° ao 3° ano.

MARTINEZ, Moacir. **Matemática Fácil do Poker, vol. 1.** Belo Horizonte: Raise, 2014.

MLODINOW, Leonard. **O Andar do Bêbado:** como o acaso determina nossas vidas. Tradução de Diego Alfaro. Consultoria de Samuel Jurkiewicz – Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

PIRES, Willians Freire. **O jogo de escopa adaptado para o uso em sala de aula.** Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Campus de Presidente Prudente, 2016

POKER STARS. **Glossário de Poker.** Disponível em: https://www.pokerstarsschool.online/article/Glossario-de-Poker

SOARES, Kamyla Lemes. **A iconografia das cartas de baralho.** Universidade Federal de Juiz de Fora, 2016.

SOUZA, Joamir Roberto. **Coleção Novo Olhar. Matemática: ensino médio** – manual do professor 2ª ed. São Paulo: FTD, 2013.

APÊNDICE A – Comunicado

Eu, Prof. Luís Fernando Alcântara de Falqui, RG nº 44.753.734-9, CPF nº 368.526.248-38, regularmente contratado pelo, **SIMETRIA – CURSO AVANÇADO DE EXATAS**, Birigui - SP, venho respeitosamente por meio deste, informar e pedir autorização aos pais/responsáveis, e para todos os fins em direito admitidos, a utilização de imagem e voz de vosso (a) filho (a) em caráter definitivo e gratuito, constante em fotos e filmagens decorrentes da minha participação no projeto **CONTANDO CARTAS, DESCOBRINDO POSSIBILIDADES: Uma abordagem prática sobre operações mentais, raciocínio lógico, análise combinatória e probabilidade,** o qual desenvolve conceitos e habilidades matemáticas e pedagógicas por meio dos jogos de cartas, tais como escopa e pôquer, elaborado no **PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, pela UFMS/CPTL – Três Lagoas/MS**, orientado pelo Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza, em consentimento com o coordenador pedagógico Prof. Anderson Leandro Marques.

______________________________ ______________________________

Prof. Anderson Leandro Marques Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

____

Prof. Luís Fernando A. de Falqui

APÊNDICE B – Autorização

Visando a evolução/otimização dos conceitos: matemática básica, raciocínio lógico, estratégia(s) na tomada de decisão, contagem, trabalho em conjunto e probabilidade, o projeto será desenvolvido em períodos extraclasse possibilitando, de modo diferenciado e atrativo, maior e melhor aprendizagem aos alunos.

As imagens e a voz poderão ser exibidas nos relatórios parcial e final do referido projeto, na apresentação audiovisual do mesmo, em publicações e divulgações acadêmicas, em festivais e premiações nacionais e internacionais, assim como disponibilizadas no banco de imagens resultante da pesquisa e na Internet, fazendo-se constar os devidos créditos.

O (a) aluno (a) fica autorizado (a) a executar a edição e montagem das fotos e filmagens, conduzindo as reproduções que entender necessárias, bem como a produzir os respectivos materiais de comunicação, respeitando sempre os fins aqui estipulados.

Por ser esta a expressão de minha vontade, nada terei a reclamar a título de direitos conexos a minha imagem e voz ou qualquer outro.

Eu, ____, RG n° __________________________, CPF n° __________________________, responsável legal na qualidade de ___________________ (pai, mãe ou tutor), do menor ____, RG n° __________________________, autorizo o (a) mesmo (a) a participar do projeto anteriormente citado.

____

Responsável legal

____

Aluno (a)