UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT

GIBRAN MEDEIROS DE SOUZA

Dissertação de mestrado profissional

Orientador: Dr. Jaques Silveira Lopes

Geometria e Números Construtíveis: História e Prática

Natal — RN
2018

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

Geometria e números construtíveis: História e Prática

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Jaques Silveira Lopes

NATAL 2018

Dissertação de Mestrado sob o título **Geometria e Números Construtíveis: História e Prática** apresentado por **Gibran Medeiros de Souza** e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Aprovado em 23/10/2018

Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes
Orientador
UFRN

Prof. Dr. Francisco Batista de Medeiros
Membro Externo
IFRN

Profª. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes
Membro Interno
UFRN

Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira
Membro Interno
UFRN

Natal-RN, 23 de outubro de dois mil e dezoito.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Souza, Gibran Medeiros de.
Geometria e números construtíveis: história e prática / Gibran Medeiros de Souza. - 2018.
83f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional - PROFMAT. Natal, 2018.
Orientador: Jaques Silveira Lopes.

1. Geometria - Dissertação. 2. Geometria construtiva - Dissertação. 3. Números construtíveis - Dissertação. 4. Régua e compasso - Dissertação. I. Lopes, Jaques Silveira. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 514

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

“Prefiro pouca ou má companhia; mas é necessário que ela venha e se vá embora no momento certo. ”

Friedrich Nietzsche

Dedico este trabalho ao meu primo Daniel Medeiros que infelizmente deixou a família Medeiros de maneira inesperada e prematura.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Rochele pelas nossas conquistas.

À minha mãe Gilda Medeiros por sempre acreditar em mim.

Aos amigos matemáticos Marcus Paulo, Paulo de Sousa Sobrinho (Paulinho), Rauryson Alves e Osley Leandro.

Aos meus professores do mestrado Débora Borges Ferreira, Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes, Marcelo Gomes Pereira, e meu orientador Jaques Silveira Lopes pela paciência.

Ao meu Tio Manuel Candido Medeiros de Filho que de certa forma me ensinou bastante Matemática durante minha adolescência.

Ao professor Antônio Roberto da Silva que foi meu professor no IFRN, na UFRN e logo em seguida trabalhamos juntos no IFRN.

Ao professor Antônio Carlos Brilhante por ter me indicado ao meu primeiro emprego em uma escola particular.

RESUMO

Este trabalho tem como maior objetivo a busca pela valorização de práticas básicas e fundamentais como o uso de régua e compasso em sala de aula. Algo tão negligenciado em várias de nossas escolas quase sendo abolido de vários currículos escolares. O uso da régua e compasso em sala de aula nada mais é que a forma mais concreta e visual do aluno ver como pode-se construir formas complexas geométricas e construir segmentos de retas com devidas medidas a partir de um segmento pré-fixado anteriormente como unidade. As demonstrações das construções também é de extrema relevância para o aprofundamento do conteúdo. Então é bem-vindo que o aluno saiba alguma fundamentação da geometria plana como semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras, potência de ponto, teorema de Tales, etc. O trabalho em si também não exclui o uso do programa poderosíssimo do GeoGebra. Na verdade, a junção da régua e compasso com o GeoGebra seria o ideal em sala de aula. O trabalho é dividido em três partes: A primeira parte são construções básicas como realizar transferência de ângulos, soma a subtração de ângulos, traçar a bissetriz de um ângulo dado e construir a mediatriz de um segmento dado entre outras. A segunda parte é a inscrição de polígonos regulares dado uma circunferência dada com as devidas justificativas. A terceira parte é a construção dos números racionais.

Palavras-chaves: Geometria construtiva. Números construtíveis. Régua e compasso.

RESUMEN

Este trabajo tiene como mayor objetivo la búsqueda por la valorización de prácticas básicas y fundamentales como el uso de regla y compás en el aula. Algo tan descuidado en varias de nuestras escuelas casi siendo abolido de varios currículos escolares. El uso de la regla y compás en el aula no es más que la forma más concreta y visual del alumno ver cómo se pueden construir formas complejas geométricas y construir segmentos de rectas con debidas medidas a partir de un segmento pre-fijado anteriormente como unidad. Las demostraciones de las construcciones también son de extrema relevancia para la profundización del contenido. Entonces es bienvenido que el alumno sepa alguna fundamentación de la geometría plana como semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, potencia de punto, teorema de Tales, etc. El trabajo en sí tampoco excluye el uso del programa poderosísimo de GeoGebra. En realidad, la unión de la regla y el compás con GeoGebra sería ideal en el aula. El trabajo se divide en tres partes: La primera parte son construcciones básicas como realizar transferencia de ángulos, suma la sustracción de ángulos, trazar la bisectriz de un ángulo dado y construir la mediatriz de un segmento dado entre otras. La segunda parte es la inscripción de polígonos regulares dada una circunferencia dada con las debidas justificaciones. La tercera parte es la construcción de los números racionales.

Palabras claves: Geometría constructiva. Números constructivos. Regla y compás.

ABSTRACT

This work has as main objective the search for the valuation of basic and fundamental practices such as the use of ruler and compass in the classroom. Something so neglected in several of our schools almost being abolished from various school curricula. The use of the ruler and compass in the classroom is nothing more than the most concrete and visual form of the student to see how one can construct complex geometric shapes and construct segments of lines with due measures from a previously fixed segment as unit . The demonstrations of the constructions is also of extreme relevance for the deepening of the content. Then it is welcome that the student knows some ground plane geometry as similarity of triangles, Pythagorean theorem, point power, Tales theorem, etc. The work itself does not exclude the use of GeoGebra's powerful software. In fact, the joining of the ruler and compass with GeoGebra would be ideal in the classroom. The work is divided into three parts: The first part are basic constructions such as performing angular transfer, summing the subtraction of angles, tracing the bisector of a given angle and constructing the perpendicular bisector of a given segment among others. The second part is the inscription of regular polygons given a circumference given with due justifications. The third part is the construction of rational numbers.

Keywords: Constructive geometry. Constructible numbers. Ruler and compass.

LISTA DE FIGURAS

Todas as figuras elaboradas pelo autor foram feitas nos programas Power Point ou Geogebra.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO: CONTEXTUALIZAÇÃO E AS MOTIVAÇÕES

O ensino como um todo sofre modificações constantemente. No ensino da Matemática isto não seria diferente. O que era visto na década de 80, na sua boa parte não será visto na próxima década de 20. E se for visto terá provavelmente uma nova roupagem. A linguagem vai mudar talvez drasticamente em decorrência de vários fatores sociais e vigentes de modo que o aluno de hoje desconheça muito do passado de forma vertiginosa.

Hoje temos muitos recursos computacionais como o programa GeoGebra para realizar construções que antes utilizávamos com régua e compasso. As construções geométricas com régua e compasso tinham uma importância crucial e era chamada de “Geometria construtiva”. Na década de 80 era disciplina obrigatória nos cursos técnicos da antiga ETFRN (Escola Técnica Federal do Rio grande do Norte. Hoje IFRN). Lembro-me perfeitamente da aula de desenho técnico que eu cursei na década de 80. O professor se chamava Aldan (infelizmente não sei o nome dele completo). Era um professor rígido e bastante formal. Porém percebia-se que tinha um enorme domínio do conteúdo. Levava para sala de aula a régua e o compasso de madeira para fazer as devidas construções na lousa. Vale salientar que na década de 80 se usava o velho e poeirento giz. Ao final do semestre o Professor Aldan pedia que fizéssemos um sólido, definido por ele, esculpido em um sabão. Os melhores trabalhos ele tomava para si (Claro! Com o consentimento dos alunos). Quero crer que esta fase da minha vida, e por ter pago esta cadeira na época do meu ensino médio em uma escola técnica que me faz despertar para a realização deste trabalho e a vontade de retomar este assunto do ensino técnico.

A volta da utilização da régua e compasso nos cursos médios atrelada aos recursos que hoje temos disponíveis, como o GeoGebra, seria uma retomada a uma época que o professor poderia justificar as construções dando uma visão mais abrangente e estimulando o aluno a adentrar neste ramo tão vasto da geometria construtiva como algo palpável para o aluno vislumbrar à formação e construção das figuras e não ficar apenas mostrando fórmulas e teorias e de certa forma caindo na mesmice das aulas repetitivas e sem contexto algo que no fim das contas desestimula os discentes.

As aulas hoje ministradas são recheadas de fórmulas, muitas vezes não demonstradas, e intermináveis listas de exercícios que são resumidas em: “Resolva as 50 equações do segundo grau". Mas infelizmente o aluno desconhece de onde vem a própria fórmula resolutiva das equações do segundo grau (aqui no Brasil conhecida como fórmula de Bháskara). Em sua dissertação do mestrado, o professor Antônio Roberto da Silva deixa bem claro esta falta de estímulo:

> "Por outro lado, o excesso de formalismo nos conceitos e definições na Geometria Plana Euclidiana, bem como na Geometria Espacial Euclidiana e na Geometria Analítica Plana, contribui, de forma significativa, para um baixo nível de aprendizagem por torná-las enfadonhas. Assim sendo, esses entraves afastam os alunos das recomendações encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, PCNEM (BRASIL, 2000). O ensino deve favorecer ao aluno a possibilidade de analisar dados e tomar decisões corretas, a fim de prepará-lo para o pleno exercício da cidadania. " (Silva, 2017), Pág. 100.

A contextualização dentro da geometria construtiva se torna mais fácil e quase que natural em uma aula usando as ferramentas necessárias de régua e compasso. Nada mais apropriado e plausível que introduzir geometria a alunos do ensino fundamental, básico e no técnico pedindo que eles utilizem régua e compasso. Nada melhor para despertar a curiosidade dos mesmos e esperando o melhor interesse deles e deixando de lado a velha lousa abarrotada de fórmulas misteriosas e decorativas. Como disse Susana da Silva Fernandes em seu trabalho de conclusão de curso em 2006 pela Universidade Católica de Brasília, cujo o título é A Contextualização no Ensino de Matemática – Um estudo Com Alunos e Professores do Ensino Fundamental da rede Particular de Ensino do Distrito Federal.

> "Contextualizar é situar um fato dentro de uma teia de relações possíveis em que se encontram os elementos constituintes da própria relação considerada" (DA SILVA, 2006). Pág. 8

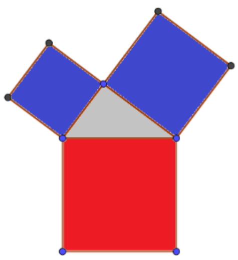
Obviamente, esta contextualização deve ser feita em acordo com Parâmetros Curriculares Nacionais PCN do ensino médio (BRASIL, 2000). Dentro das pretensões do professor da escola referida e dos livros didáticos adotados e indicados. Muito se debateu para a introdução da contextualização em nosso ensino. Porém independente da aceitação da contextualização, ela nada mais é que a junção do nosso cotidiano e dos conhecimentos teóricos e prévios do discente. No caso da geometria construtiva a experiência de conseguir construir um segmento de reta com determinado comprimento tendo como referência outro segmento de reta sendo considerado a unidade ou construir usando apenas régua e compasso um triângulo equilátero de lado medindo 10 centímetros de comprimento.

Outro bom recurso que se pode introduzir e atrelar na aula de geometria construtiva é a história da Matemática. A história da Matemática pode confidenciar a Matemática como uma descoberta humana e mostrar as necessidades e utilidades ao longo do tempo introduzindo o pensamento filosófico da época em questão. No caso da geometria construtiva, podemos fazer uma ponte desde Euclides, com o seu livro fundamental *Os elementos* (sendo traduzido aqui no Brasil pelo Irineu Bicudo), até Gauss com a descoberta de como se construir um heptadecágono regular inscrito numa circunferência usando apenas régua e compasso. Fazendo que o aluno possa perceber que sem o conhecimento da época talvez não tivéssemos os recursos tecnológicos de hoje. Fazendo que o aluno entenda o passado clássico das ciências e especificamente a Matemática.

Por isto a necessidade de um recurso já esquecido como régua e compasso e recursos tão em alta como o programa GeoGebra. E como juntar a calculadora e o ábaco. O que seria um sem o outro? O novo (a tecnologia) não pode romper com o clássico. Logo a preocupação nesta dissertação desta retomada a algo clássico para dar sustentação as novas tecnologias.

Tanto no ensino médio quanto no fundamental, entendemos, que o contexto deve vir primeiro que a parte teórica. A prática deve ser o grande suporte para depois vir as fórmulas e suas deduções. Nada melhor que o professor mostre que a soma das duas áreas destacadas de azul na figura 1 é igual a área da figura vermelha. Depois disto, bem claro, ele pode começar a mencionar o nome do grandioso matemático Pitágoras de Samos. E através das várias e várias maneiras que existem, demostrar o fabuloso teorema que leva o seu nome de maneira algébrica. O triângulo cinza é um triângulo retângulo e os quadriláteros azuis e vermelho são quadrados.

Figura 1 – Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Existe uma necessidade básica para uma metodologia mais eficaz e inovadora com pretensões de despertar o gosto, a curiosidade e a necessidade do aluno perceber a importância da geometria no seu cotidiano. O estudo e aprofundamento da geometria se faz necessário para melhoria da visão espacial, do raciocínio objetivado pela visualização, muitas vezes pela intuição Matemática e do mundo que os cerca para que nossos alunos tenham uma visão robusta e não distorcida da geometria que tanto aí está no dia a dia dentro do mundo que nos cerca e que podemos facilmente visualizá-la.

Eis uma parte dos parâmetros curriculares nacionais voltado para a Matemática — PCNEM (BRASIL, 2000).

> "Os estudos nessa área devem levar em conta que a Matemática é uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências. É importante considerar que as ciências, assim como as tecnologias, são construções humanas situadas historicamente e que os objetos de estudo por elas construídos e os discursos por elas elaborados não se confundem com o mundo físico e natural, embora este seja referido nesses discursos. Importa ainda compreender que, apesar de o mundo ser o mesmo, os objetos de estudo são diferentes, enquanto constructos do conhecimento gerado pelas ciências através de leis próprias, as quais devem ser apropriadas e situadas em uma gramática interna a cada ciência. E, ainda, cabe compreender os princípios científicos presentes nas tecnologias, associá-las aos problemas que se propõe solucionar e resolver os problemas de forma contextualizada, aplicando aqueles princípios científicos a situações reais ou simuladas. " (Brasil, PCN, 2000). Pág. 20.

Outra parte interessante do PCN sobre a Matemática é:

> "Todas as linguagens trabalhadas pela escola, portanto, são por natureza "interdisciplinares" com as demais áreas do currículo: é pela linguagem – verbal, visual, sonora, matemática, corporal ou outra – que os conteúdos curriculares se constituem em conhecimentos, isto é, significados que, ao serem formalizados por alguma linguagem, tornam-se conscientes de si mesmos e deliberados. " (Brasil, PCN, 2000). Pág. 77.

Existe uma clara ideia que os desenhos e a visualização são entes de extrema importância para um melhor senso crítico e uma melhora de raciocínio quando o estudo da Matemática é bem estruturado e estimulado na educação básica com uma boa contextualização.

2. DOS OBJETIVOS E UM POUCO DE HISTÓRIA

Seguiremos agora, mostrando os rumos de nosso trabalho e entrando no contexto histórico para nos situarmos onde estamos pisando e o motivo de nossa retomada nos dias de hoje a chamada geometria construtiva e a importância dos números construtíveis. Nada mais justo que em uma aula de Matemática exista as demonstrações de maneira rigorosas dentro das limitações dos alunos. E sejamos sinceros, nada melhor que demonstrações em geometria com régua e compasso em mãos para o aluno ter o estímulo para construir mentalmente e literalmente o passo a passo das instruções do professor e formar de maneira concreta a sua visão bidimensional e os por quês a serem fixados entre eles.

2.1. Estrutura, instrumentos e metodologia

Nossos objetivos ficarão divididos em três partes neste trabalho, a saber:

Na primeira parte vamos dar ênfase à geometria plana em si e como fazer transferência de ângulos que é algo básico e de extrema necessidade para o desenvolvimento do tema.

Sabendo fazer a transferência de ângulos, vamos mostrar como somar e subtrair ângulos.

Posteriormente mostraremos como traçar a bissetriz de um ângulo dado.

Traçarmos uma perpendicular a uma reta dada e por consequência traçar a mediatriz a um segmento de reta dado.

Traçaremos uma reta paralela a uma reta dada, por um ponto fora da reta.

Conseguiremos traçar os ângulos notáveis de $30°$, $45°$, $60°$. De modo que estes ângulos em mãos podemos chegar em outros como o de $15°$ ou o de $270°$. Inclusive podemos fazer o link destes ângulos com o ciclo trigonométrico.

A segunda parte está relacionada em conseguir traçar polígonos regulares inscritos em uma circunferência dada. Nosso trabalho vai se conter em inscrever do triângulo equilátero até o decágono regular.

Podemos concluir de imediato que se vamos conseguir construir um quadrado (por exemplo) podemos chegar facilmente em um octógono onde na hora certa será mostrado como fazer.

A terceira parte é mais robusta pelo fato de estar bastante voltada para conseguir traçar segmentos de reta com medidas baseadas em um segmento pré-estabelecido e considerado como unidade.

Os instrumentos utilizados serão uma régua e um compasso. Segue a definição do compasso e um pouco de história a respeito:

> O compasso é um instrumento de desenho que faz arcos de circunferência. Também serve para marcar um segmento numa reta com comprimento igual a outro segmento dado, e resolver alguns tipos de problemas geométricos, como por exemplo construir um hexágono, ou achar o centro de uma circunferência. O compasso parabólico que conhecemos hoje foi inventado por Leonardo da Vinci. Os compassos comuns possuem uma ponta seca, em forma de agulha, que determina um ponto fixo no papel, e outra ponta dotada de um estilete de grafite para traçar a circunferência, tendo como centro a ponta seca. Nos compassos usados em Desenho Técnico, a ponta de grafite pode ser substituída por um adaptador, que permite acoplar uma lapiseira ou caneta. Outro acessório destes compassos é o tira-linhas, um instrumento que funciona como uma espécie de bico de pena. É semelhante a uma fina pinça, com um parafuso que permite regular a distância entre as pontas. Deposita-se uma gota de tinta nanquim entre as pontas da pinça, e em seguida se traça a circunferência. O chamado *compasso balaústre*, possui um parafuso transversal às duas hastes, que permite ajustar a abertura e mantê-la fixa, impedindo alterar a abertura acidentalmente. Para permitir o traçado de circunferências de grandes raios, alguns compassos possuem uma ou ambas as hastes telescópicas, que podem ser estendidas até atingir o comprimento necessário. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Compasso_(geometria). Acesso: 31/10/2018.

Mostraremos nesta parte do trabalho que, todos os números racionais são demonstravelmente construtíveis.

O que seriam números construtíveis? Tomaremos a definição dada por Júnior (2013):

> "Um número real positivo a é chamado de construtível se conseguirmos usando apenas um compasso e uma régua não graduada construir com um número finito de passos um segmento de reta cujo comprimento seja a, a partir de um segmento cujo comprimento tomamos como a unidade. Números construtíveis utilizando régua não graduada e compasso nada mais são do que números que podem ser obtidos apenas com as quatro operações fundamentais e a extração da raiz quadrada. " (JUNIOR, 2013). Pág. 14.

Começaremos mostrando que os números naturais são construtíveis. Logo por sua vez os inteiros também serão. Veremos que se um número x positivo é construtível o número $-x$ também o será.

Logo após mostramos que se pode somar, subtrair, multiplicar e dividir segmentos dados, tudo isto poderá ser encontrado diluído no capitulo 6.

Dado um número n real diferente de zero, encontrar n^{-1}. Vai ser explicado na seção 5.4.

E finalmente construir o número da forma $\frac{a}{b}$, mostrado na seção 5.5. Logo poderemos concluir que os racionais são todos construtíveis.

E como complemento mostraremos que se pode construir os números da forma $\sqrt{x}$ sendo x real positivo.

2.2. Contando um pouco de história

O livro que pode ser considerado a base primordial de toda geometria que é do conhecimento da maioria dos matemáticos chama-se *"Os elementos"* de Euclides. Euclides de Alexandria, viveu de 300 a 200 antes de Cristo, como era conhecido foi um professor de Matemática da linha platônica e escritor. Euclides escreveu sobre o rigor matemático, perspectivas, teoria dos números, seções cônicas e geometria esférica.

A famosa obra de Euclides abrange treze volumes, caracterizados por um desenvolvimento dedutivo e coerente, dos quais seis se dedicam basicamente à Geometria. Os livros originais foram destruídos e apenas em 1482, a partir de reconstituições acumuladas através dos séculos, foi impressa sua primeira edição. A partir daí, aproximadamente 1000 edições já foram lançadas.

O principal interesse em Os elementos é o desenvolvimento lógico dedutivo de teoremas da geometria plana e dos sólidos. São deduzidos 465 teoremas a partir de um conjunto de apenas 10 axiomas.

A geometria euclidiana é a primeira e, serve de base sólida para todas as outras geometrias. Se manteve intransponível no pensamento matemático clássico medieval e renascentista pois somente em termos modernos que surgiram outros tipos de geometrias.

A possibilidade da construção geométrica (com régua e compasso) de polígonos e números não é suficiente para alguns casos bastantes conhecidos no meio matemático. Existem três exemplos bem evidenciado de problemas que infelizmente não se pode resolver com tais instrumentos. Segue:

1. Duplicação do cubo (ou Problema de Delos): construir a aresta de um cubo cujo volume é igual ao dobro de um cubo dado. Que pode ser resumido em construir $\sqrt[3]{2}$.

Podemos encontrar as seguintes referências históricas:

> A duplicação do cubo ou o problema de Delos é o problema de geometria que consiste em obter um método para, dada a aresta de um cubo, construir, com régua e compasso, a aresta do cubo cujo volume é o dobro do cubo inicial. Com relação as origens desse famoso problema existe uma lenda que conta que em 427 a.C. Péricles morrera de peste juntamente com um quarto da população de Atenas. Consternados por essa enorme perda, os habitantes consultaram o oráculo de Apolo em Delos sobre como combater a doença. A resposta foi que o altar de Apolo, que possuía o formato de um cubo, deveria ser duplicado. Prontamente os atenienses dobraram as dimensões do altar mas isso não afastou a peste. O volume fora multiplicado por oito e não por dois. Com essa estória, dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro, ficou conhecido como problema deliano. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Duplicação_do_cubo. Acesso: 05/11/2018.

O problema da duplicação do cubo não é possível dentro da geometria construtível. A demonstração formal de como a duplicação de um cubo não pode ser realizada com régua e compasso não é o objetivo desta dissertação. Mas deixaremos registrado que a $\sqrt[3]{2}$ não é um número construtível.

2. Quadratura do círculo: construir um quadrado com área igual à de um círculo dado. Que ficaria resumido em construir $\sqrt{\pi}$.

Sobre a quadratura de um círculo podemos destacar que:

> A quadratura do círculo é um problema proposto pelos antigos geômetras gregos consistindo em construir um quadrado com a mesma área de um dado círculo servindo-se somente de uma régua e um compasso em um número finito de etapas. Em 1882, Ferdinand Lindemann provou que π é um número transcendente, isto é, não existe um polinômio com coeficientes inteiros ou racionais não todos nulos dos quais π seja uma raiz. Como resultado disso, é impossível exprimir π com um número finito de números inteiros, de frações racionais ou suas raízes. A transcendência de π estabelece a impossibilidade de se resolver o problema da quadratura do círculo: é impossível construir, somente com uma régua e um compasso, um quadrado cuja área seja rigorosamente igual à área de um determinado círculo. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadratura_do_círculo. Acesso: 05/11/2018.

3. Trissecção do ângulo: dividir um ângulo qualquer em três partes iguais. Que em resumo se é $cos3a$ é construtível, então $cosa$ é construtível?

Historicamente dois matemáticos tiveram um papel central neste problema: Gauss e Wentzel. Segue o texto sobre o ocorrido:

> Trissecção do ângulo é um dos problemas clássicos da geometria sobre construções com régua e compasso e consiste em, dado um ângulo qualquer, construir um outro com um terço de sua amplitude. O problema era conhecido dos antigos gregos e a resposta — negativa — só foi obtida em 1837 pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel que mudou o foco da questão, passando a buscar uma prova de que o problema não teria solução. Wentzel apoiou-se sobretudo nos resultados de Gauss o qual afirmara no seu livro Disquisitiones Arithmeticae(publicado em 1801) que não era possível construir com régua e compasso um polígono regular com nove lados. Como é possível construir um triângulo regular com régua e compasso e como, para um tal triângulo, o ângulo formado pelos segmentos que unem o centro a dois dos seus vértices é de 120º, resulta daqui que o ângulo de 120º não pode ser trissectado somente com régua e compasso. No entanto Gauss nunca publicou uma demonstração do seu enunciado. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Trisseção_do_ângulo. Acesso: 05/11/2018.

Em sua dissertação de mestrado o professor Valderi Candido da Costa

> Pelo fato da bissecção ser uma construção simples e possível, o problema da trissecção do ângulo também é visto (pelo menos por alguns matemáticos iniciantes), da mesma forma. É tanto que a maioria deles tenta resolvê-los, mesmo sabendo que sua solução, com os instrumentos euclidianos, é impossível. Talvez isso ocorra porque, dos três problemas clássicos, esse é o de mais fácil compreensão. O problema, no entanto, surgiu provavelmente de esforços dos gregos para multisseccionar ângulos ou na tentativa de construir um polígono regular de nove lados, onde era necessário trisseccionar um ângulo de $60°$. (Costa, 2013). Pág. 21.

Como vimos, o problema surgiu da necessidade da construção do eneágono regular. Se um certo ângulo $\propto$ é construtível, logo seu seno e cosseno também é. Então por sua vez se constrói-se um ângulo $\propto$, trissectar tal ângulo é o mesmo que construir $sen\left(\frac{\propto}{3}\right)$ e $cos\left(\frac{\propto}{3}\right)$.

Como sabemos, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$. Se $\alpha=\beta$, tem-se $\cos(\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$. Pode-se escrever esta última relação apenas em função do $\cos\alpha$. Teríamos $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Onde por mais algumas operações algébricas chegaremos a $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Se consideramos que $3\alpha = \theta$ vamos chegar a relação $\cos\theta = 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$. Se considerarmos que $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = p$ e $\cos\theta = q$. Donde chegaremos a $q = 4p^3 - 3p$. Onde tem-se que encontrar as raízes desta equação.

Necessariamente para se realizar e trissecção de um ângulo, tem-se que ter simultaneamente que o $\cos\theta$ e o $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ devem ser construtíveis. Algo que nem sempre irar ocorrer.

Existe casos particulares onde a trissecção do ângulo é possível de ser feita. No caso do ângulo de $90°$. Se $\theta = 90°$, tem-se que $\cos 90° = 4\cos^3 30° - 3\cos 30°$, onde o $\cos 90°$ e o $\cos 30°$ são números construtíveis. Veremos que todos os números racionais são construtíveis mais a fundo no capitulo 5.

Entre a idade de ouro da Geometria no período grego (séc. VI a.C. ao séc. III a.C.) e o Renascimento (XIV d.C. ao XVI d.C.), pouca coisa se acrescentou ao trabalho de Euclides.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) publicou na Itália, em 1635, sua obra *Geometria indivisibilibus*; onde desenvolveu e enumerou diversos princípios e teoremas de Geometria, Trigonometria, Astronomia e Óptica. Entre eles destacam-se conceitos acerca das equivalências de volumes que, posteriormente, constituíram o princípio geométrico que leva seu nome.

Girolamos Saccheri (1667-1733), também italiano, publicou os primeiros estudos que se baseavam em análises críticas da estrutura da Geometria de Euclides.

Mais adiante, Karl Fridrich Gauss (1777-1855) também questionaria as bases dedutivas da Geometria Euclidiana. Seus trabalhos, associados aos do russo Nicholas Lobachevsky (1793-1856) e aos do húngaro Janos Boliay (1802-1860), publicados sob o título Novos fundamentos da Geometria e Investigações Geométricas sobre a teoria das Paralelas, vieram a constituir na primeira Geometria não-Euclidiana de que se tem notícia.

Ainda no século XIX, o alemão George Riemann (1826-1866) aprofundou os estudos de uma outra Geometria, também não-euclidiana, que difere da Geometria de

Gauss, Lobachevsky e Boliay. Configurava-se assim a ideia de que aquela Geometria fundamentada por Euclides há 2000 anos podia não ser a única possível.

Mas voltando ao cerne da questão, o livro “Os elementos” é um livro que começa gradativamente com os postulados e axiomas para depois se aprofundar no estudo da mais refinada geometria de fundamental importância. Ele é a base solida para todas as outras geometrias.

Vamos citar passagens do primeiro livro que hoje em dia podem parecer óbvias demais, mas para época foram de enorme utilidade organizacional para vários conceitos que usamos hoje. Todos estes axiomas e postulados foram tiradas do livro I.

Livro I, definição 2.

E linha é comprimento sem largura.

Livro I, definição 3.

E extremidades de uma linha são pontos.

Livro I, definição 5.

E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.

Livro I, definição 6.

E extremidades de uma superfície são retas.

Livro I, postulado 4.

E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

Livro 1, noções comuns 6

E as metades da mesma coisa são iguais entre sim.

Livro 1, noções comuns 8

E o todo [é] maior que a parte.

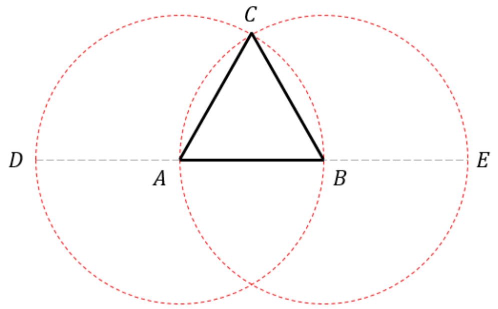
Logo em seguida, no mesmo livro (livro I), ele mostra como construir um triângulo equilátero a partir de um segmento dado usando régua e compasso.

Segue a tradução do livro *“Os elementos”* feita por *Irineu Bicudo* do livro I, capitulo I. Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.

Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero. Fique descrito, por um lado, com centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito por um lado, com centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fique ligadas as retas CA, CB.

E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, as três CA, AB e BC são iguais entre si.

Figura 2 – Construção do triângulo equilátero.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, o triangulo ABC da figura 2, é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB. [portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero]; o que era preciso fazer. (Bicudo. 2009). Pág. 99.

O grande matemático chamado Johann Carl Friedrich Gauss (1.777-1.855. Figura 3) que conseguiu a façanha de construir apenas com régua e compasso um polígono regular de 17 lados (heptadecágono) inscrito em um círculo (Figura 4).

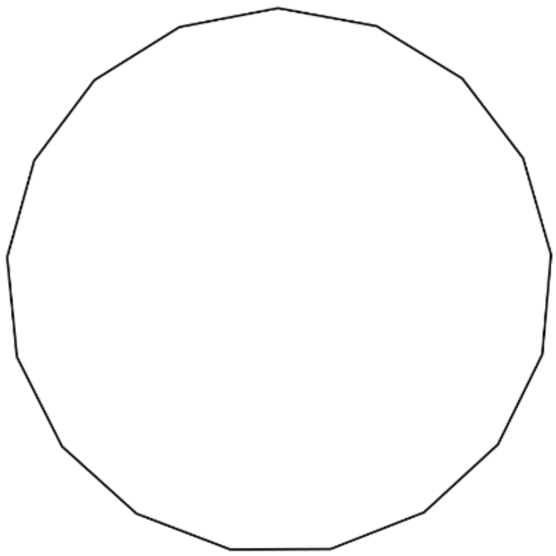
Figura 3 – Johann Carl Friedrich Gauss.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss. Acesso 08/10/2018

Aos 62 anos começou a estudar Russo sem orientação alguma e mantendo correspondência com cientistas russos até o final da vida.

Nos últimos anos da sua vida ele publicou vários artigos de extrema importância para a Matemática inclusive a prova do teorema fundamental de álgebra. Os trabalhos de Gauss serviram de ponto de partida para muitas áreas da Matemática moderna.

Figura 4 – Heptágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.3. Instrumentos, advertências e algumas instruções

Se os alunos já dominam temas como semelhança de triângulos, congruência de triângulos, ângulo central, teorema de Pitágoras, relações métricas em um triângulo retângulo, teorema de Tales, o docente pode fazer as devidas demonstrações e mostrar com mais profundidade. Caso a especifica sala não domine tais assuntos na geometria plana já é de bom tamanho mostrar apenas a parte construtiva sem dar (infelizmente) maiores explicações.

A parte da agulha do compasso será chamada de ponta seca ou eixo do compasso.

Vamos antes de mais nada deixar bem claro a definição da palavra círculo neste trabalho. No livro “*Números e funções reais”* de Elon Lages Lima tem-se:

> “A palavra círculo é ambígua. Às vezes significa a circunferência, às vezes quer dizer disco que tem essa circunferência como fronteira. Não é errado usá-la com qualquer desses dois significados (Euclides já o fazia). Além disto, os termos polígonos, elipse, triângulo, quadrado, etc. também têm duplo sentido.) Mas é necessário explicar o que está querendo dizer, para evitar mal-entendidos. ” (LIMA, 2014). Pág. 78.

Em nosso trabalho vamos considerar a palavra círculo sendo a curva mais a parte interna. Assim como isto vai valer para todos os outros polígonos. Qualquer polígono citado neste trabalho será considerado a linha poligonal mais a área interna.

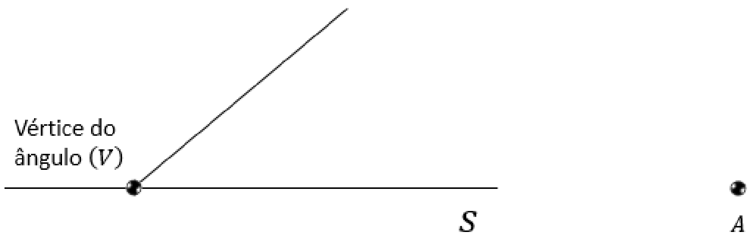
3. NOÇÕES BÁSICAS

Este capítulo é fundamental para os capítulos seguintes pelo fato da fundamentação que existe nele. Nos capítulos 5 e 6 usaremos muito como determinar uma mediatriz dado um segmento.

3.1. Transferências de ângulos

Dado o ângulo com vértice em V da figura 5 que segue, vamos transferir este ângulo de modo que ele tenha vértice no ponto A vértice no ponto A

Figura 5 – Trasferência de ângulos.

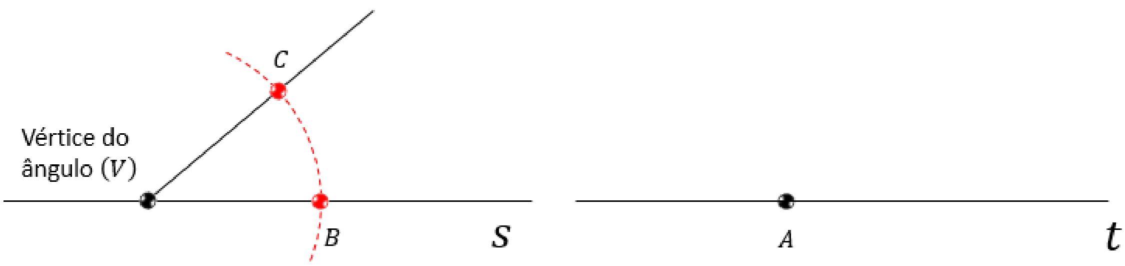


Fonte: Elaborada pelo autor.

Instruções:

Primeiro passo: Trace uma reta t pelo ponto A. Coloque a ponta seca do compasso no vértice do ângulo da figura 5 (como mostra a figura 6) e com uma abertura qualquer, intersecte com o grafite as retas que forma o ângulo de modo que forme o menor ou o maior arco (no exemplo o menor arco). Estes ponto de interseção serão chamados de B e C como na figura 6.

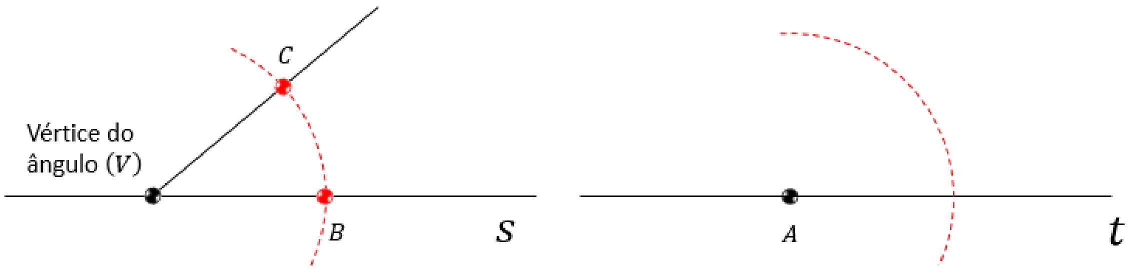
Figura 6 – Transferência de ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo passo: Com a mesma abertura do primeiro passo, coloque a ponta seca no ponto A e trace um arco que intersecte a reta s como na figura 7, destacando o ponto D.

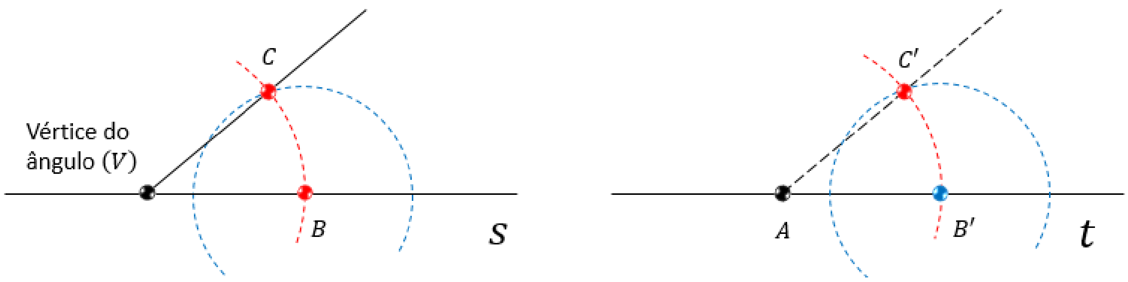
Figura 7 – Transferência de ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Terceiro passo: Coloque a ponta seca do compasso no ponto B e trace um arco interceptando o ponto C como mostra a figura 8. Com esta mesma abertura vá no ponto D e trace um arco que intersecte o primeiro arco já construído no segundo passo. O ponto será chamado de ponto E. E finalize a construção traçando uma semirreta com origem em A e passando por E.

Figura 8 – Transferência de ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O ângulo $C'\hat{A}B'$ é congruente ao ângulo $E\hat{A}D$.

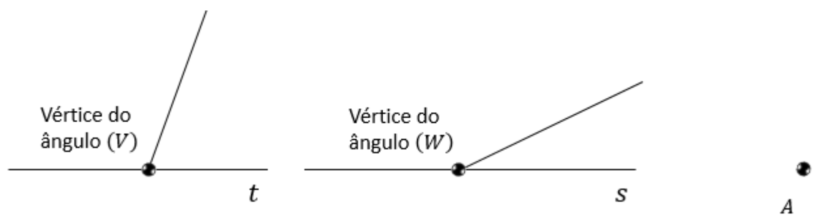
Justificativa: Perceba que os dois ângulos têm a mesma abertura pelo fato dos círculos com centros em V e A terem o mesmo raio. E as cordas determinadas nestas circunferências ($\overline{BC}$ e $\overline{DE}$) têm a mesma medida.

3.2. Soma e subtração de ângulos

Primeiramente, trabalharemos com a soma.

Na figura 9 com as retas t e s e dois ângulos agudos determinados com vértices em V e W. O ponto A será o vértice da soma dos dois referidos ângulos

Figura 9 – Soma e subtração de ângulos.

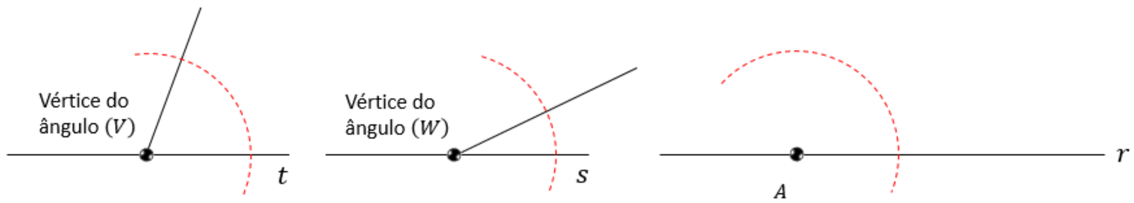


Fonte: Elaborada pelo autor.

Instruções:

Primeiro passo: Trace a reta r passando pelo ponto A. Com uma abertura qualquer no compasso trace um arco com centro em V. Com esta mesma abertura trace um arco com centro em W e em A como mostra a figura 10.

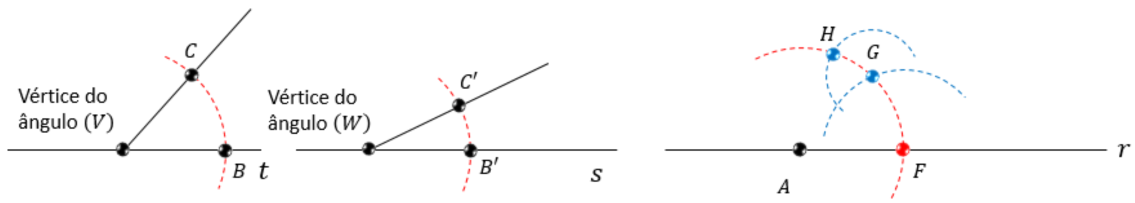
Figura 10 – Soma e subtração de ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo passo: Trace um arco com a ponta seca no ponto B passando por C. Com a mesma abertura coloque a ponta seca no ponto F e intersecte o primeiro arco traçado com centro no ponto A pelo ponto G como mostra a figura 11. Trace um arco com a ponta seca no ponto D passando por E. Com a mesma abertura coloque a ponta seca no ponto G e intersecte o primeiro arco traçado com centro em A passando pelo ponto H.

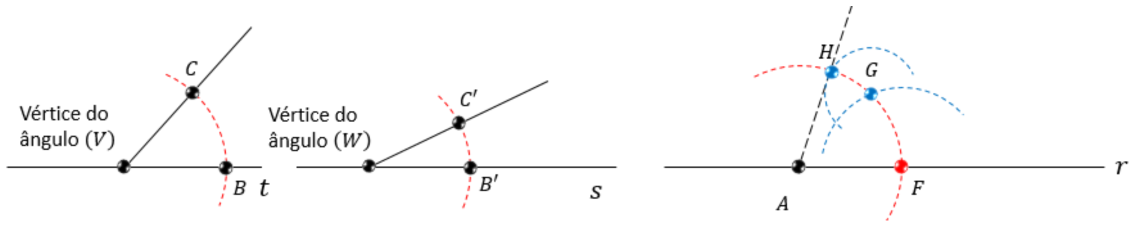
Figura 11 – Soma e subtração de ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Terceiro passo: Traçar uma semirreta com origem no ponto A e passando pelo ponto H como mostra a figura 12.

Figura 12 – Soma e subtração de ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

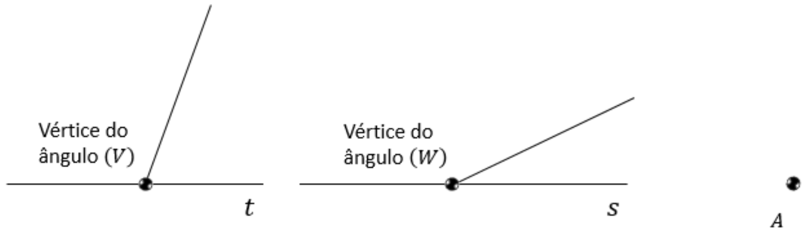
Logo o ângulo $F\hat{A}H$ é a soma dos ângulos $B\hat{V}C$ e $D\widehat{W}E$.

Justificativa: O procedimento feito foi a transferência consecutiva de dois ângulos.

Agora, trabalharemos com a diferença.

Tomando a figura 13, vamos subtrair o ângulo menor do maior e colocar o ângulo resultante com vértice em A.

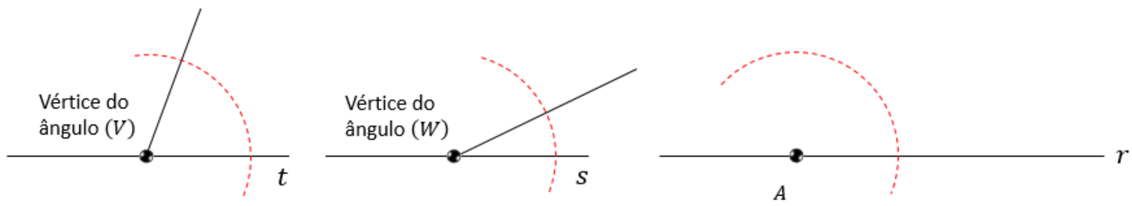
Figura 13 – Soma e subtração de ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiro passo: Trace uma reta r que passe pelo ponto A. Com uma abertura qualquer no compasso trace um arco com centro em V. Com esta mesma abertura trace um arco com centro em W e em A como mostra a figura 14.

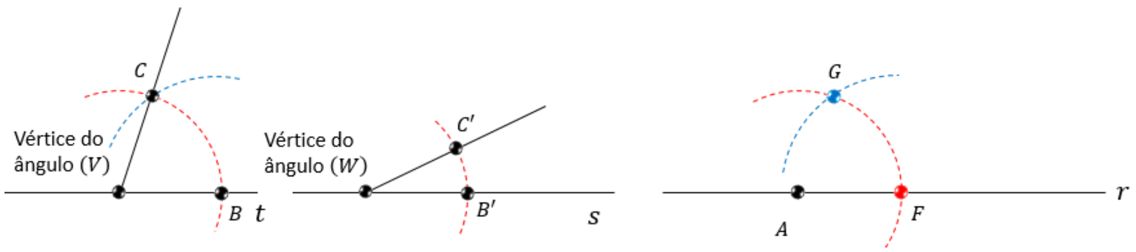
Figura 14 – Soma e subtração de ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo passo: Trace um arco com a ponta seca no ponto B passando por C. Com a mesma abertura coloque a ponta seca no ponto F e intersecte o primeiro arco traçado com centro no ponto A pelo ponto G como mostra a figura 15.

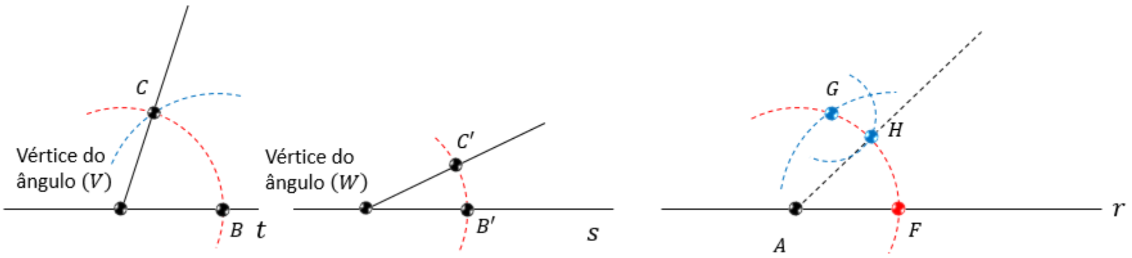
Figura 15 – Soma e subtração de ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Terceiro passo: Como o compasso tira a medida do ponto D ao ponto E e com esta abertura centralize o compasso no ponto G e intersecte a primeira circunferência de centro em A como mostra a figura 16 no ponto H.

Figura 16 – Soma e subtração de ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: A ângulo maior foi construído e logo após foi construído o menor ângulo em sentido contrário. $B\hat{A}C - C\hat{A}D = B\hat{A}D$.

3.3. Traçar a bissetriz de um ângulo dado

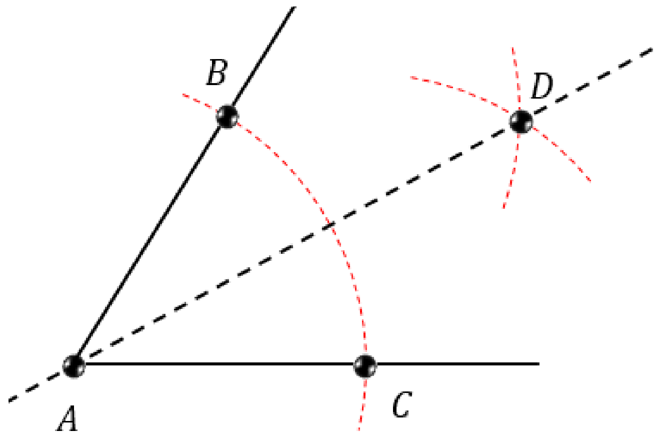
Traçar pelo ponto A a bissetriz do ângulo com vértice em A como mostra a figura 17.

Primeiro passo: Fazendo centro no ponto A, traça um arco de duas circunferências que intersecte as duas semirretas, definindo o ponto B e C.

Segundo passo : Fazendo centro em B e C, traça dois arcos em raio maior que $\overline{AB}$, de forma a que se intersectem no ponto D.

Terceiro passo: A partir do ponto A, traça uma semirreta que passe pelo ponto D como mostra a figura 17.

Figura 17 – Bissetriz de um ângulo.



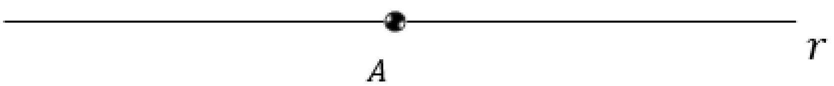
Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: Veja que $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{BD} = \overline{CD}$, logo pode-se afirmar que os triângulos ABD e ACD são congruentes. Se os referidos triângulos são congruentes pode-se afirmar que $B\hat{A}D = C\hat{A}D$.

3.4. Traçar uma perpendicular e uma mediatriz

Traçar uma perpendicular a uma reta dada r por um determinado ponto A da reta como mostra a figura 18.

Figura 18 – Construção de uma perpendicular.



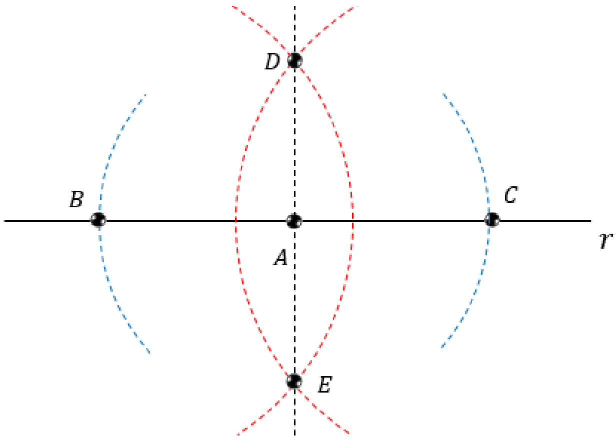
Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiro passo: Traçar um arco de abertura qualquer com centro em A, onde o arco intersecta a reta r nos pontos B e C.

Segundo passo: Traçar uma circunferência com raio maior que a distância $\overline{AB}$ e com centro em B. Faça uma circunferência de mesmo raio que a anterior com centro em C de modo que as duas circunferências se intersectem nos pontos D e E como mostra a figura 19.

Terceiro passo: Traçar uma reta que passe por A e D ou A e E como mostra a figura 19. A reta que passa por A, D e E é perpendicular a reta r.

Figura 19 – Construção de uma perpendicular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{DC} = \overline{DB}$, logo os triângulos ABD e ACD são congruentes. Como o ângulo $B\hat{A}C$ é um ângulo raso e os ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$ são congruentes. Então eles são ângulos retos. Então por analogia os ângulos $B\hat{A}E$ e $C\hat{A}E$. Logo os pontos A, D e E são colineares. Por sua vez a reta que passar pelos pontos D e E é perpendicular a reta r.

Dado um segmento de reta com extremidades em A e B como na figura 20, traçar a sua mediatriz.

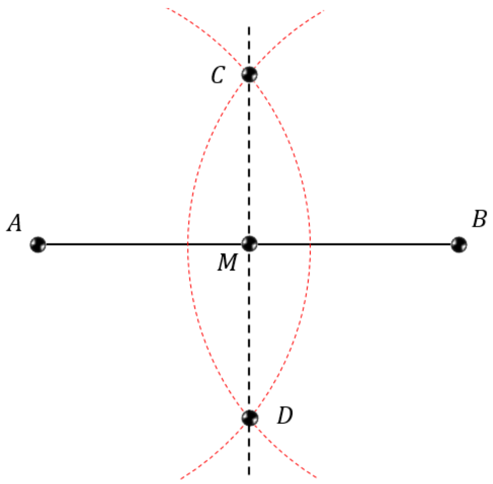
Figura 20 – Construção de uma mediatriz.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiro passo: Trace uma circunferência com centro em A e com raio maior que a metade da distância do segmento $\overline{AB}$. Trace uma outra circunferência com mesmo raio da primeira e com centro em B e chame os pontos de interseção das circunferências de C e D, como mostra a figura 21.

Segundo passo: trace uma reta pelos pontos C e D. A reta determinada por C e D é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Vale salientar que o ponto de interseção do segmento $\overline{AB}$ com a reta determinada pelos pontos C e D (ponto M) é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Figura 21 – Construção de uma mediatriz.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: Os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ são todos congruentes. Os triângulos ACM e BDM são congruentes pelo caso lado, lado, lado. O Ângulo C$\widehat{M}D$ é raso e como os ângulos $A\widehat{M}C$ e $A\widehat{M}D$ são congruentes eles são retos. Logo a reta determinada pelos pontos C e D é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. Os triângulos ACM e BCM são congruentes. Logo $\overline{AM}$ é congruente $\overline{BM}$. Logo a reta determinada por C e D é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

3.5. Traçar uma reta paralela

Traçar pelo ponto A uma reta paralela a reta r como mostra a figura 22.

Figura 22 – Construção da paralela.

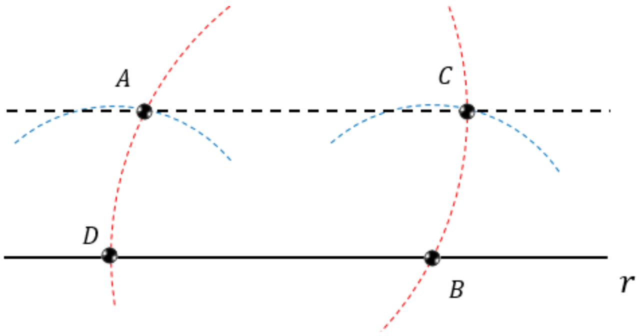
Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiro passo: Escolher um ponto B qualquer sobre a reta r que não seja a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta r.

Segundo passo: Com o compasso centrado no ponto A traçar um arco passando por B. Em seguida, centrar o compasso no ponto B e com a mesma abertura traçar um arco pelo ponto A de modo que o arco intersecte a reta r um ponto D conforme a figura 23.

Terceiro passo: Com o compasso centrado em A ou D (centraremos em A) fazemos uma abertura até D. Com esta mesma abertura centraremos o compasso em B e traçaremos um arco a ponto de intercepta o primeiro arco no ponto C, que passou por B como mostra a figura 23.

Figura 23 – Construção da paralela.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes. Os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{A}B$ são congruentes. Logo a reta r é paralela a reta determinada pelos pontos A e C.

3.6. Traçar os ângulos notáveis de 45° e 60°

Ângulo de 45°

Do capítulo 5 podemos facilmente construir um ângulo de reto. E logo após traçar a bissetriz do mesmo que por sua vez teremos o ângulo de 45°.

Ângulo de 60°

Tome a reta r e o ponto A, onde o mesmo vai ser o vértice do ângulo de 60° como mostra a figura 24.

Figura 24 – Construção dos ângulos notáveis.

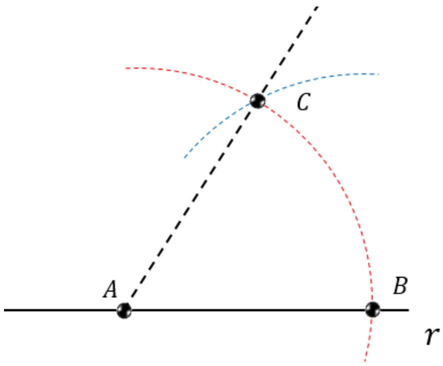
Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiro passo: Coloque a ponta seca do compasso no ponto A com uma abertura qualquer e trace um arco que intercepte a reta r num ponto B.

Segundo passo: Com a mesma abertura coloque a ponta seca no ponto B e trace um arco até interceptar o arco anteriormente traçado. O ponto de encontro chame de C.

Terceiro passo: Trace uma semirreta começando em A e passando por C como mostra a figura 25.

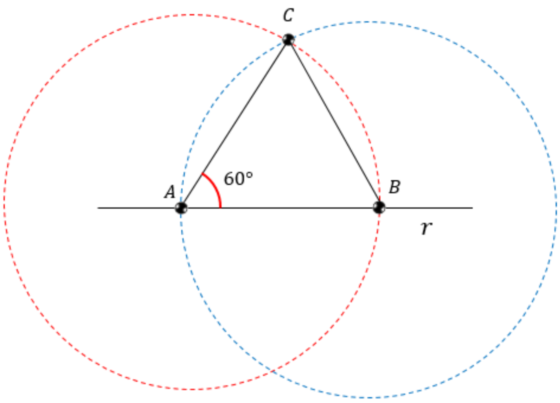
Figura 25 – Construção dos ângulos notáveis.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ possuem a mesma medida. Como foi feito um arco com centro em B com a mesma medida do arco que foi feito com centro em A pode-se afirmar que o segmento $\overline{BC}$ tem a mesma medida dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Então tem-se um triangulo equilátero como mostra a figura 26.

Figura 26 – Construção dos ângulos notáveis.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pode-se observar que este procedimento é o mesmo feito para construir a figura 2.

4. ACERCA DOS 8 PRIMEIROS POLÍGONOS REGULARES

Nem todos os polígonos regulares são construtíveis. Para um polígono regular ser construtível ele deve obedecer ao teorema de Gauss-Wantzel que afirmar que um polígono de n lados é construtível com régua e compasso, se e somente se, n pode ser escrito como uma potência de base 2 ou como um produto entre uma potência de base 2 por primos de Fermat distintos, onde um número primo de Fermat tem a seguinte forma $F_N = 2^{2^N+1}$ com $N \in \mathbb{N}$.

Em resumo, tem-se que n é da forma $n = 2^k$ com $k \in \mathbb{N}$ ou n é da forma $n = 2^k \cdot \prod_q F_N$ onde $k \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}$ e $q$representa a quantidade de fatores que são primos distintos de Fermat.

Esta dissertação não tem o intuito de aprofundamento em relação a demonstração deste teorema. Apenas da utilização dele para constatar quais dos 7 primeiros polígonos regulares são construtíveis.

O triângulo equilátero é construtível pois se $k = 0$ e $N = 0$ com $q = 1$ (apenas um fator primo de Fermat), tem-se que $n = 2^k \cdot \prod_q F_N = 2^0 \cdot F_0 = 1 \cdot (2^{2^0} + 1) = 3$.

O quadrado é construtível pois se $k = 2$, tem-se que $n = 2^k = 2^2 = 4$.

O pentágono regular é construtível pois se $k = 0$ e $N = 1$ com $q = 1$, tem-se que $n = 2^k \cdot \prod_q F_N = 2^0 \cdot F_1 = 1 \cdot (2^{2^1} + 1) = 5$.

O hexágono regular é construtível pois se $k = 1$ e $N = 0$ com $q = 1$, tem-se que $n = 2^k \cdot \prod_q F_N = 2^1 \cdot F_0 = 2 \cdot (2^{2^0} + 1) = 6$.

O heptágono regular é o primeiro polígono não construtível. O 7 não pode ser escrito como uma potência de base 2. E a formula F_N não gera o 7.

O octógono regular é construtível pois se $k = 3$, tem-se que $n = 2^k = 2^3 = 8$.

O eneágono regular é o segundo polígono não construtível. O 9 não pode ser escrito como uma potência de base 2. E a formula F_N não gera o 9.

O decágono regular é construtível pois se $k = 1$ e $N = 1$ com $q = 1$, tem-se $n = 2^k \cdot \prod_q F_N = 2^1 \cdot F_1 = 2 \cdot (2^{2^1} + 1) = 10$

4.1. Inscrição do triângulo equilátero

Começaremos a construção do triângulo equilátero inscrito em um círculo. O triângulo equilátero é o primeiro polígono e também o mais simples, porém de extrema importância na geometria plana. Através do triângulo equilátero chegamos nos valores numéricos do seno e cosseno de $30°$ e $60°$. No referido triângulo o baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro se confundem em um único ponto. As suas três alturas são eixos de simetria. Os triângulos equiláteros são também triângulos equiângulos onde os ângulos internos medem $60°$ e os ângulos externos medem $120°$. Logo são regulares.

Primeiro passo: Traçar uma circunferência de raio R.

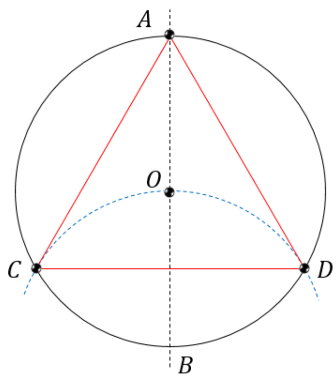
Segundo passo: Traçar o diâmetro do círculo onde os pontos de interseção do diâmetro com o círculo são os pontos A e B e o centro do círculo é o ponto O, como na figura 27.

Terceiro passo: Tome uma abertura no compasso medindo o raio do círculo.

Quarto passo: Coloque a ponta seca do compasso com a abertura medindo o raio do círculo do terceiro passo no ponto B e trace um arco que intersecte o círculo em dois pontos (C e D) como mostra a figura 27.

Quinto passo: Trace um segmento de reta com extremidades em C e D, outro segmento de extremidades de A a D e finalizando trace o segmento com extremidades de A a C. O triângulo com vértices nos pontos A, C e D é equilátero.

Figura 27 – Construção do triângulo equilátero.

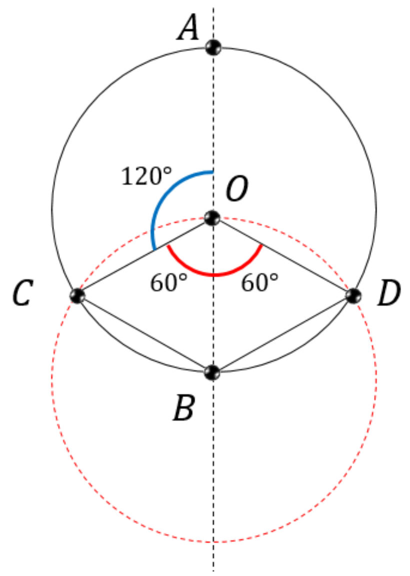


Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: Veja que se continuarmos a traçar o arco construído com centro em B e intersectando o círculo inicial tem-se dois círculos de mesmo raio e centros em O e B como pode-se ver na figura 28. As distâncias de O até C, C até B, B até D, D até O e O

até B são todas de mesma medida. São os raios dos dois círculos. Pode-se afirmar então que os triângulos BCO e BDO são equiláteros. Então tem-se que os ângulos $C\hat{O}B$ e $D\hat{O}B$ são ângulos internos de triângulos equiláteros. Daí eles tem 60°. Por sua vez o ângulo central $C\hat{O}D$ mede 120° e o arco $\widehat{CBD}$ também possui 120°. O ângulo $A\hat{O}C$ é um ângulo externo do triângulo equilátero BCO. Logo ele mede 120°, sendo que o ângulo $A\hat{O}C$ é ângulo central. Então o menor arco determinado pelos pontos A e C tem 120°. De maneira análoga, tem-se que o menor arco determinado pelos pontos A e D tem 120° também. Pode-se afirmar que se os menores arcos determinados pelos pontos A e C, A e D e C e D tem todos 120° o triângulo ACD é equilátero. Vale salientar que o lado de um triângulo equilátero em função do raio R da circunferência circunscrita é $R\sqrt{3}$.

Figura 28 – Construção do triângulo equilátero.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2. Inscrição do quadrado

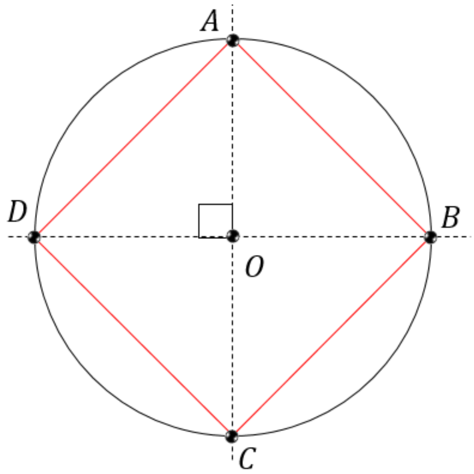
O segundo polígono são os quadriláteros. Um quadrilátero regular é chamado de quadrado. O quadrado é um polígono fácil de fazer a sua construção pelo fato dos ângulos internos medirem 90°.

Primeiro passo: Traçar uma circunferência de raio não nulo.

Segundo passo: Pelo centro O do círculo trace duas retas perpendiculares como mostra a figura 29 e coloque os pontos A, B, C e D (vide a figura).

Terceiro passo: Una consecutivamente os pontos de interseção do círculo com as retas e está formado o quadrado com vértices em $ABCD$.

Figura 29 – Construção do quadrado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: Como as duas retas traçadas são perpendiculares e os pontos de encontro delas é o centro do círculo os arcos menores arco formados pelos pontos consecutivos são arco de 90°, logo o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado.

Se tomarmos o triângulo ABD, onde $\overline{BD} = 2R$, $\overline{AD} = \overline{AB} = l_4$ e aplicando o teorema de Pitágoras tem-se $(l_4)^2 + (l_4)^2 = (2R)^2$, temos que lado de um quadrado em função da circunferência circunscrita de raio R mede $R\sqrt{2}$.

4.3. Inscrição do pentágono regular

O pentágono é o terceiro polígono. O pentágono regular tem o ângulo interno medindo 108°. No pentágono regular o número de ouro está bastante presente e será comentado no apêndice deste trabalho.

Primeiro passo: Traçar uma circunferência de raio não nulo.

Segundo passo: Traçar duas retas passando pelo centro O dá circunferência de modo que elas sejam perpendiculares. Os pontos de interseção das retas com a circunferência são A, B, C e D como mostra a figura 30.

Terceiro passo: Traçar a mediatriz do segmento $\overline{BO}$ gerando o ponto M.

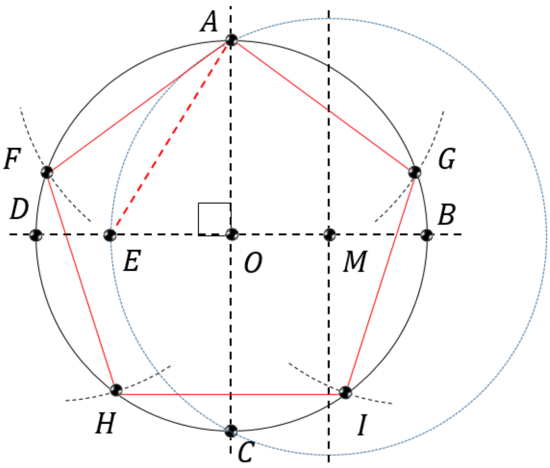
Quarto passo: Coloque a ponta seca no ponto M e a outra ponto no ponto A. Com esta abertura trace um arco que intersecte o segmento $\overline{DO}$. O ponto de interseção é o ponto E.

O comprimento do segmento $\overline{AE}$ é o lado do pentágono regular inscrito no citado círculo.

Quinto passo: Com a abertura no compasso do segmento $\overline{AE}$, coloque a ponta seca do compasso no ponto A e trace um arco que intersecte a circunferência nos pontos F e G como mostra a figura 30. Com a mesma abertura coloque a ponta seca no ponto F e trace um arco que intercepte a circunferência no ponto e de maneira análoga faça o mesmo no ponto G para gerar o ponto I. Trace os segmentos $\overline{AG}$, $\overline{GI}$, $\overline{IH}$, $\overline{HF}$ e $\overline{FA}$.

Logo tem-se o pentágono regular $AGIHF$.

Figura 30 – Construção do pentágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

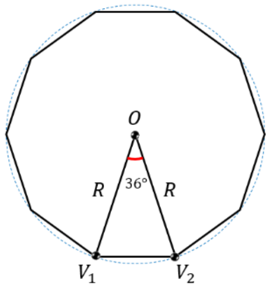
Justificativa:

Primeira parte: Demostrar que o lado de um decágono regular (l_{10}) mede $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao decágono.

Detalhe para o número que aparece no l_{10} que é o número de ouro $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ onde no apêndice trará melhores explicações.

Em um decágono regular, se tomarmos dois vértices consecutivos, o V_1 e V_2 por exemplo e construirmos o triângulo V_1V_2O, onde O é o centro da circunferência circunscrita ao decágono, o ângulo $V_1\hat{O}V_2$ mede 36°. Os segmentos V_1O e V_2O terão a mesma medira que será R (o raio da circunferência circunscrita ao decágono (vide a figura 31).

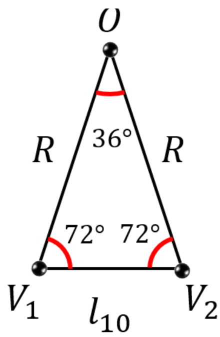
Figura 31 – Construção do pentágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O triângulo V_1V_2O é isósceles, os ângulos $O\widehat{V_1}V_2$ e $O\widehat{V_2}V_1$ medem 72° e o segmento $\overline{V_1V_2}$ é o l_{10} como segue na figura 32.

Figura 32 – Construção do pentágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conduzindo a bissetriz $\overline{V_2A}$, bissetriz de V_2, tem-se:

O triangulo AV_1V_2 é isósceles.

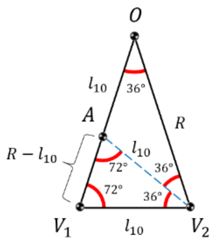
O triângulo AOV_2 é isósceles.

Os triângulos AV_1V_2 e OV_1V_2 são semelhantes.

Os segmentos $\overline{AV_2}$ e $\overline{AO}$ tem a mesma medida do segmento $\overline{V_1V_2}$, logo $\overline{AV_1} = \overline{AO} = l_{10}$.

O segmento $\overline{AV_1} = R - l_{10}$. Vide a figura 33.

Figura 33 – Construção do pentágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como os triângulos AV_1V_2 e OV_1V_2 são semelhantes tem-se que $\frac{\overline{AV_1}}{\overline{V_1V_2}} = \frac{\overline{AV_2}}{\overline{OV_1}}$.

Fazendo as devidas substituições tem-se $\frac{R - l_{10}}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{R}$. Que por sua vez chega-se na equação do segundo grau $l_{10}^2 + Rl_{10} - R^2 = 0$ com l_{10} como incógnita.

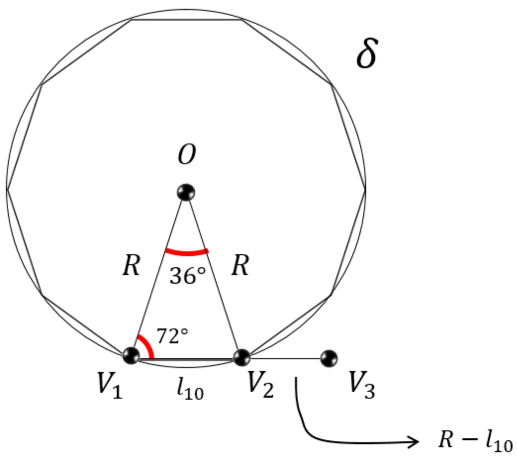
Desprezando a solução negativa chegamos ao resultado $l_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R$.

Pode-se dizer que o l_{10} é o segmento áureo do raio da circunferência que o circunscreve. A demonstração desta afirmação está no apêndice onde se encontra o contexto histórico.

Segunda parte: Demostrar que o lado de um pentágono regular (l_5) mede $\frac{R}{2} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ onde R é o raio da circunferência circunscrita ao decágono.

Vamos tomar como base a figura 31, porém faremos algumas construções na mesma como ficará registrado na figura 34. O círculo será chamado de δ. Vamos prolongar o segmento $\overline{V_1V_2}$ até o ponto V_3 de modo que $\overline{V_1V_3} = R$ como segue.

Figura 34 – Construção do pentágono regular.

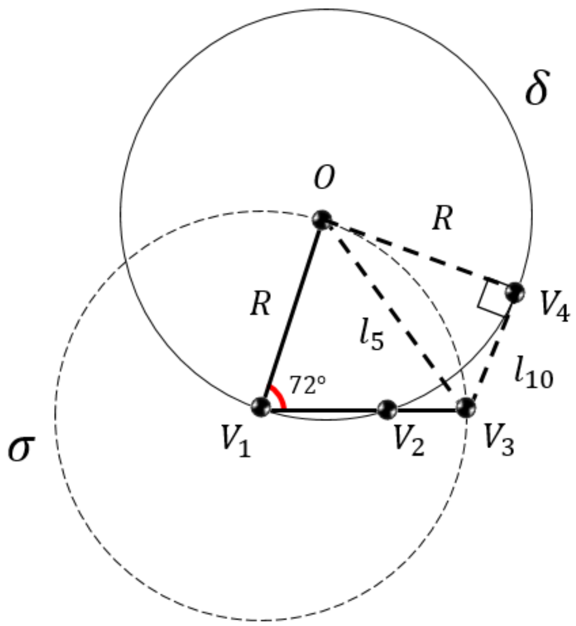


Fonte: Elaborada pelo autor.

Tracemos uma circunferência com centro em V_1 e que intercepte o ponto O como na figura 35. Tal circunferência chamemos de σ (circunferência tracejada). Tem-se que $\overline{OV_1} = \overline{OV_4} = \overline{V_1V_3} = R$. Conduzir um segmento $\overline{V_3V_4}$ tangente a circunferência δ. Então o ângulo $O\widehat{V_4}V_3$ é reto. O ângulo $O\widehat{V_1}V_3$ mede 72°. Pode-se então afirmar que o ângulo $O\widehat{V_1}V_3$ é central pelo fato que $\overline{OV_1} = \overline{V_1V_3} = R$. Então o segmento $\overline{OV_3} = l_5$.

Considerando a potência do ponto V_3 em relação a circunferência δ, tem-se que $(\overline{V_3V_4})^2 = (R - l_{10}) \cdot R$. Na figura 33 concluímos que $l_{10}^2 + Rl_{10} - R^2 = 0$ onde podemos reescrever da seguinte forma $l_{10}^2 = R^2 - Rl_{10}$ e finalizando tem-se $l_{10}^2 = R \cdot (R - l_{10})$, Concluímos que $\overline{V_3V_4} = l_{10}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OV_3V_4, tem-se: $l_5^2 = R^2 + l_{10}^2$. Como $l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$ pode-se escrever: $l_5^2 = R^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\right)^2$ que com operações básicas chaga-se a $l_5^2 = R^2\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4}\right)$ e concluímos que $l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, onde l_5 é o lado do pentágono regular em função do raio do círculo circunscrita ao pentágono regular.

Figura35 – Construção do pentágono regular.

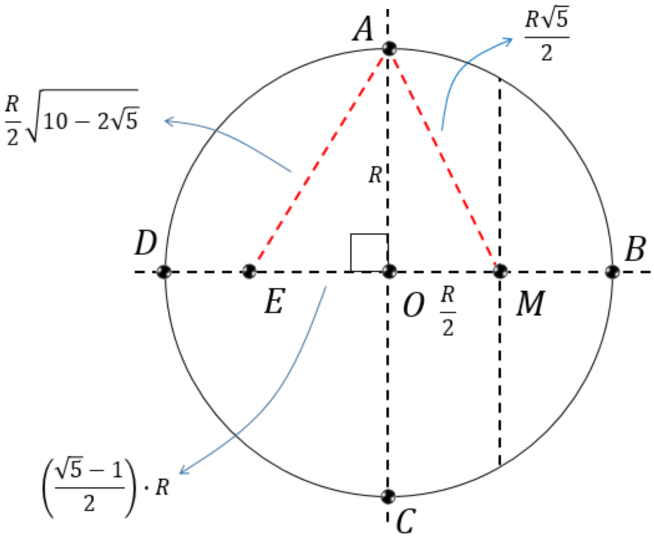


Fonte: Elaborada pelo autor.

Terceira parte: Retomando a figura 30 pelo ponto M a mediatriz do segmento $\overline{BO}$ já que M é ponto médio do tal segmento. Logo $\overline{OM} = \frac{R}{2}$. No triângulo retângulo AMO (retângulo em O), aplicando o teorema de Pitágoras chegaremos a $\left(\overline{AM}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$ que concluímos que $\overline{AM} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$. Colocando a ponta seca do compasso no ponto M e traçando um arco que intersecte o eixo vertical no ponto E. Pode-se concluir que o segmento $\overline{EM} = \overline{AM}$. Por sua vez para sabermos o comprimento $\overline{EO}$ basta realizar a diferença $\overline{EM}-\overline{OM}$, que $\overline{EO}=\overline{EM}-\overline{AM}=\dfrac{R\sqrt{5}}{2}-\dfrac{R}{2}$, onde se chega $\overline{EO}=R\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AEO tem-se $\left(\overline{AE}\right)^2=R^2+\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R\right)^2$. Com operações triviais chega-se a $\left(\overline{AE}\right)^2=\dfrac{10-2\sqrt{5}}{4}R^2$.

Onde se conclui que $\overline{AE}=\dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Confrontando com a segunda parte deste capítulo pode-se dizer que $\overline{AE}=l_5$. A figura 36 deixa o que foi exposto bem claro.

Figura 36 – Construção do pentágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4. Inscrição do hexágono regular

O hexágono é o quarto polígono. O hexágono regular tem 120° de ângulo. O hexágono regular tem a peculiaridade de ter o comprimento do seu lado o mesmo comprimento da circunferência que o circunscreve.

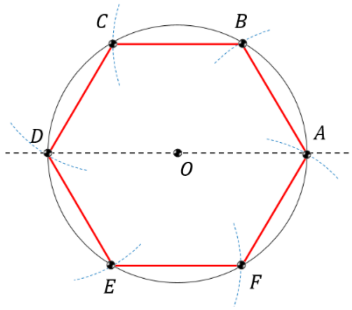
Primeiro passo: Traçar uma circunferência de raio não nulo.

Segundo passo: Traçar uma reta que intercepte o centro O da circunferência destacando os ponto A e D.

Terceiro passo: Com a mesma abertura que se traçou a circunferência coloca-se a ponta seca no ponto A e intersecta a circunferência no ponto B.

O segmento $\overline{AB}$ é o lado do hexágono. Eis o hexágono construído como mostra figura 37.

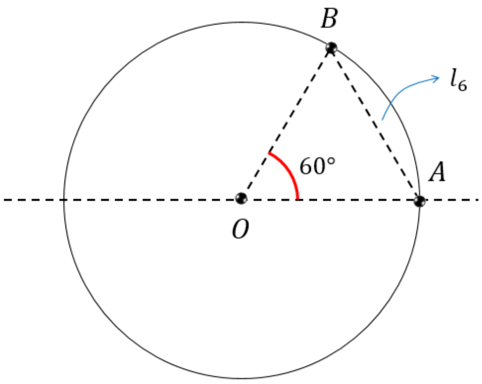
Figura 37 – Construção do hexágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é igual a do segmento $\overline{OA}$. Por sua vez o segmento $\overline{OB}$ tem o mesmo comprimento de $\overline{OA}$. Ambos são raios do círculo. Logo o triângulo OAB é equilátero. Logo o ângulo central $A\hat{O}B$ mede 60° e o segmento $\overline{AB}$ é o lado de um hexágono regular que podemos indicar $\overline{AB} = l_6$, vide a figura 38.

Figura 38 – Construção do hexágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5. A aproximação do heptágono regular

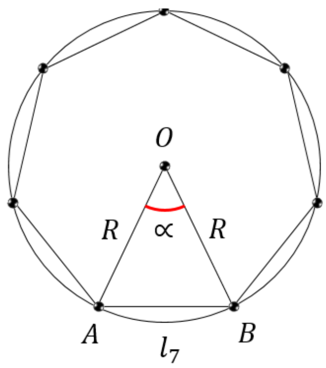
O heptágono regular é o primeiro polígono com a impossibilidade de ser construído com régua e compasso. Pelo teorema de Gauss-Wantzel citado no começo deste capítulo concluímos a impossibilidade da construção do heptágono regular. Procurando algo sobre inscrição e circunscrição de polígonos no livro Os elementos de Euclides de Alexandria traduzido por Irineu Bicudo encontram-se apenas no capitulo IV instruções de como se inscrever e circunscrever alguns polígonos regulares em circunferências onde tais polígonos não é referido o heptágono regular.

A impossibilidade de não poder inscrever o heptágono regular não nos impede de fazermos uma bela aproximação para eventuais aplicação práticas que possa servir de instrumentação para ser elaborada em sala de aula.

Mostraremos a aproximação usada utilizando a lei dos cossenos para chegar no comprimento do lado do heptágono regular em função do raio da circunferência circunscrita. Observe a figura 39. Inscrito no círculo tem-se o heptágono regular e em destaque aparece o triângulo OAB onde o ângulo $A\hat{O}B$ é a sétima parte de uma rotação completa do círculo, onde pode-se escrever $\alpha = \dfrac{360°}{7}$ ou de modo mais elegante, tem-se $\alpha = \left(51\dfrac{3}{7}\right)^{\circ}$. Os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ tem mesma medida e medem o raio do círculo. O segmento $\overline{AB}$ é o lado do heptágono regular onde vamos indicar por $\overline{AB} = l_7$.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OAB tem-se $l_7^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\left(51\dfrac{3}{7}\right)^{\circ}$. Isolando o l_7 e ajustando a equação chegamos ao resultado $l_7 = R\sqrt{2 - 2\cos\left(51\dfrac{3}{7}\right)^{\circ}}$. Com ajuda de uma calculadora concluímos que o $l_7 = 0{,}8677 \cdot R$ (tomamos a liberdade de usar 4 casas decimais).

Figura 39 – Construção do heptágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

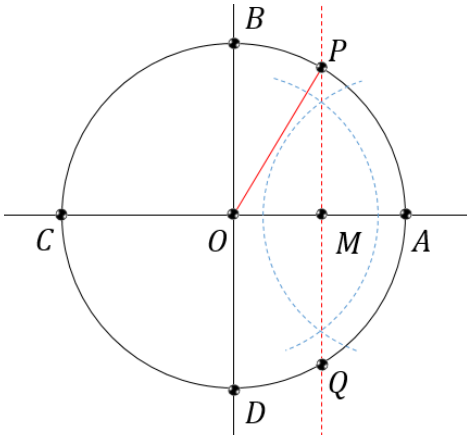
Na circunferência da figura 40 vamos seguir alguns passos passa achar o comprimento de um segmento e logo em seguida fazermos um confronto com o resultado encontrado da figura 39.

Primeiro passo: Traçar uma reta que passe pelo centro O e determinando os pontos A e C como na figura 40. Logo em seguida trace uma perpendicular passando pelo ponto O.

Segundo passo: Trace uma mediatriz pelo segmento $\overline{OA}$ determinando o ponto M. E na circunferência determinando os pontos P e Q.

Terceiro passo: Vamos medir o segmento $\overline{MP}$ em função do raio da circunferência. Observasse que o segmento $\overline{OP}$ mede o raio da circunferência ($\overline{OP} = R$). O segmento $\overline{OM}$ mede a metade do raio ($\overline{OM} = \frac{R}{2}$). Aplicando o teorema de Pitágoras no triangulo MOP tem-se $\left(\overline{MP}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2$. Que facilmente chegamos à conclusão que $\overline{MP} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. Com a ajuda de uma calculadora e usando apenas 4 casas decimais concluímos que $\overline{MP} = 0,8660 \cdot R$.

Figura 40 – Construção do heptágono regular.



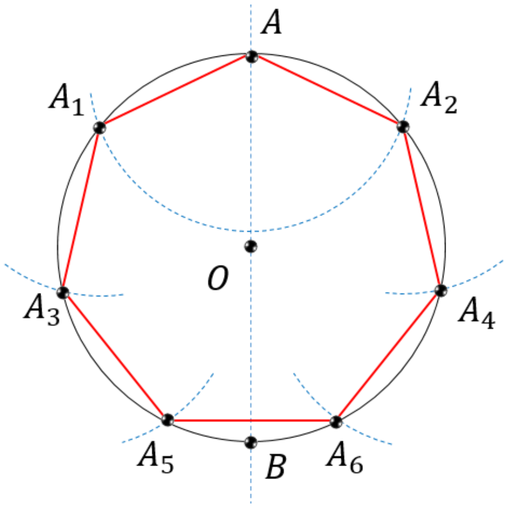
Fonte: Elaborada pelo autor.

Fazendo um confronto entre o resultado que acabamos de encontrar e o lado do heptágono regular, tem-se $l_7 = 0,8677 \cdot R$ e $\overline{MP} = 0,8660 \cdot R$. A diferença é mínima. De maneira rigorosa não poderíamos dizer que $\overline{MP} = l_7$. Porém em termos práticos considerar que $0,8677 \cong 0,8660$ $\left(\overline{MP} = l_7\right)$ não causaria danos profundos na construção do heptágono regular.

Aconselha-se que esta construção, se aplicada em sala, deve ser deixando bem claro que isto é apenas uma mera aproximação (até bem interessante e fácil de realizar) que não segue o rigor matemático.

Após as referidas advertências, tomemos a figura 41 com o círculo dado e uma reta passando pelo centro O e interceptando o círculo nos pontos A e B . Sendo $\overline{MP} = l_7$, o erro vai ser imperceptível. Logo, coloque a ponta seca no ponto A e trace um arco que encontre o círculo nos pontos A_1 e A_2. Faça o mesmo com os pontos A_1 e A_2 para encontrar os pontos A_3 e A_4 respectivamente. Repita o procedimento com os pontos A_3 e A_4 para determinar os pontos A_5 e A_6 respectivamente. Uma os pontos A, A_2, A_4 A_6, A_5, A_3 e A_1. Eis o heptágono regular (não perfeito por que foi construído por aproximação).

Figura 41 – Construção do octógono regular.



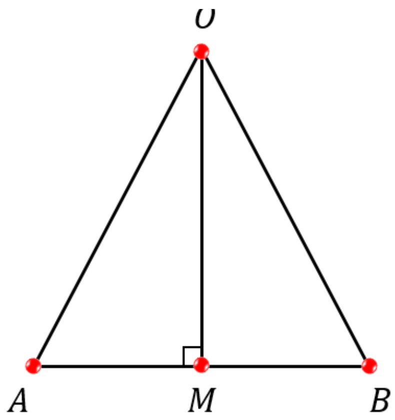
Fonte: Elaborada pelo autor.

Outra boa maneira de comprovar que a aproximação aqui mostrada é muito boa em termos práticos é usar o programa Geogebra. O Geogebra é um aplicativo que envolve Matemática, fazendo um misto de álgebra e geometria. O aplicativo é de livre acesso na internet, podendo ser facilmente feito o seu download. O aplicativo criado por Markus Hohenwarter. É de fácil manuseio e realiza facilmente construções geométricas utilizando os entes geométricos primitivos como retas, pontos, segmentos de retas, polígonos etc. Segue o link para baixar o aplicativo gratuitamente: https://www.geogebra.org/download?lang=pt.

Vamos usar o programa Geogebra para construir um heptágono regular inscrito em um círculo de raio unitário. Vimos que se o círculo tem raio unitário ($R = 1$) o lado do heptágono construído com régua e compasso mede 0,8660.

Primeiro passo: Pela figura 41.1, derivada da figura 40, calcularemos o comprimento do segmento $\overline{OM}$ utilizando o teorema de Pitágoras. Vale salientar que nesta figura os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ medem 1 (o raio do círculo). O segmento $\overline{AB}$ mede 0,8660 (o lado do heptágono regular). E M é ponto médio de $\overline{AB}$. O segmento $\overline{AM}$ mede $\frac{0,8660}{2} = 0,4330$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAM temos que o segmento $\overline{OM}$ mede $0{,}9013$. Vale salientar que o segmento $\overline{OM}$ é o apótema do heptágono regular.

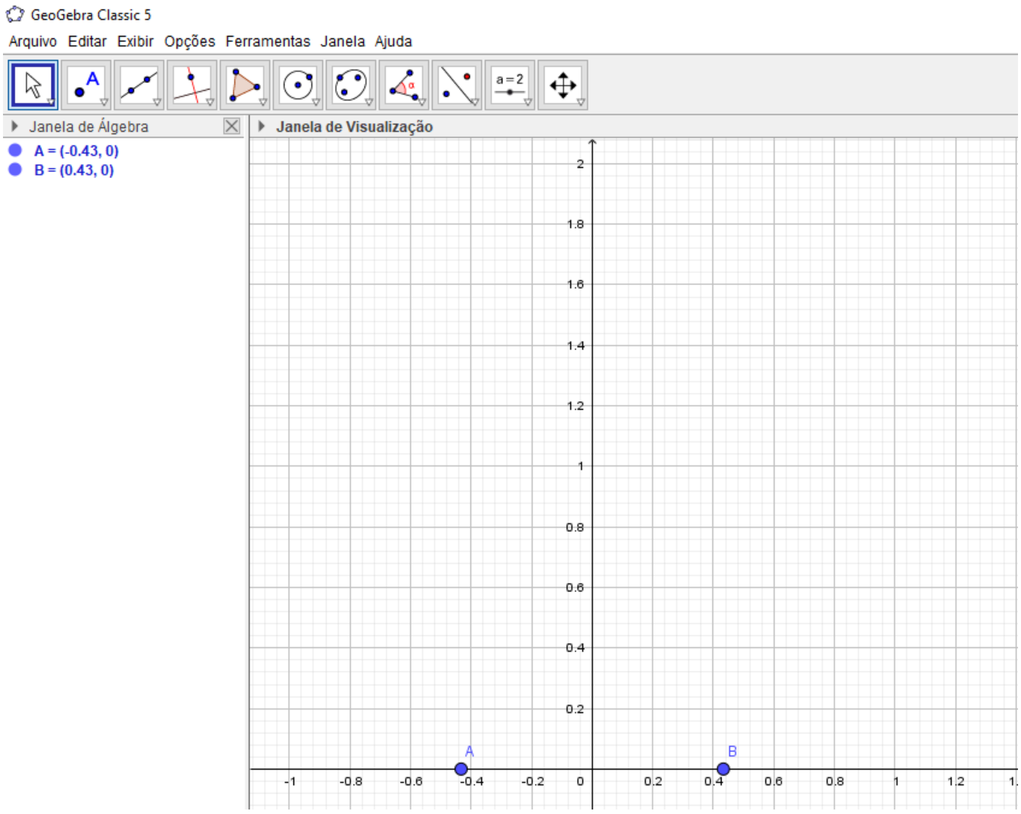
Figura 41.1 – Construção do heptágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

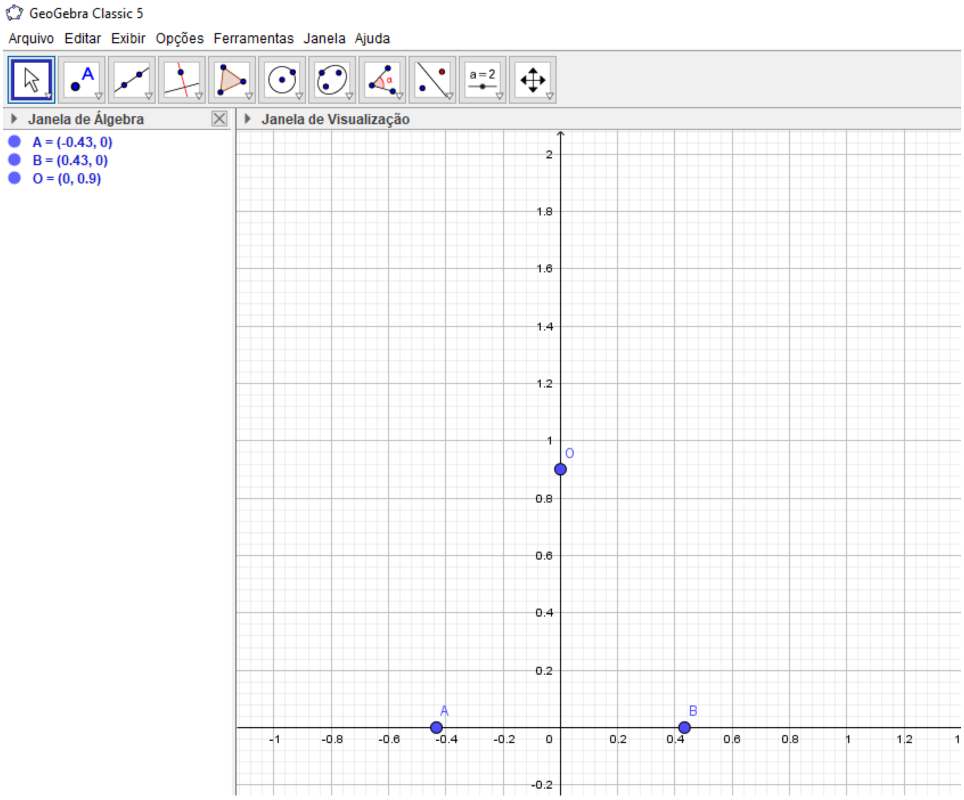
Segundo passo: No plano cartesiano, marque os pontos $A(-0.4330, 0)$ e $B(0.4330, 0)$ e observa-se que a distância entre estes ponto é $0{,}8660$ (a medida do lado do heptágono regular) como mostra a figura 41.2.

Figura 41.2 – Construção do heptágono regular no Geogebra.



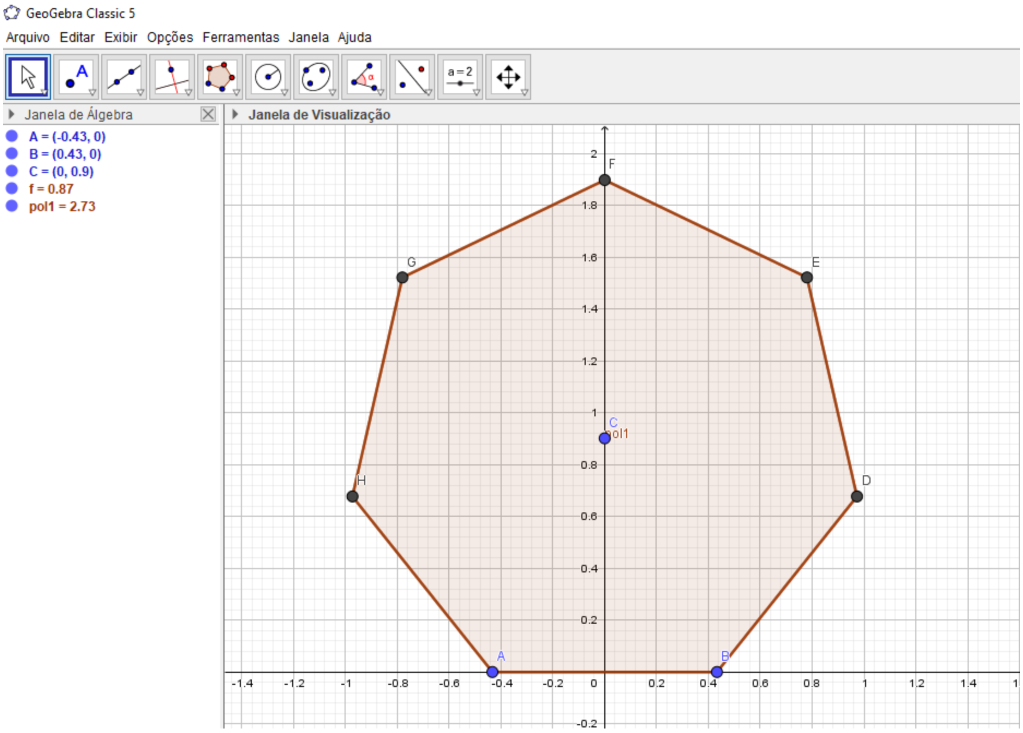
Terceiro passo: Em seguida marca-se o ponto O de coordenadas $(0, 0.9013)$. A distância do ponto O ao eixo x mede $0{,}9013$ (o apótema do heptágono regular) e o ponto O é o centro do círculo circunscrito ao polígono como mostra a figura 41.3.

Figura 41.3 – Construção do heptágono regular no Geogebra.



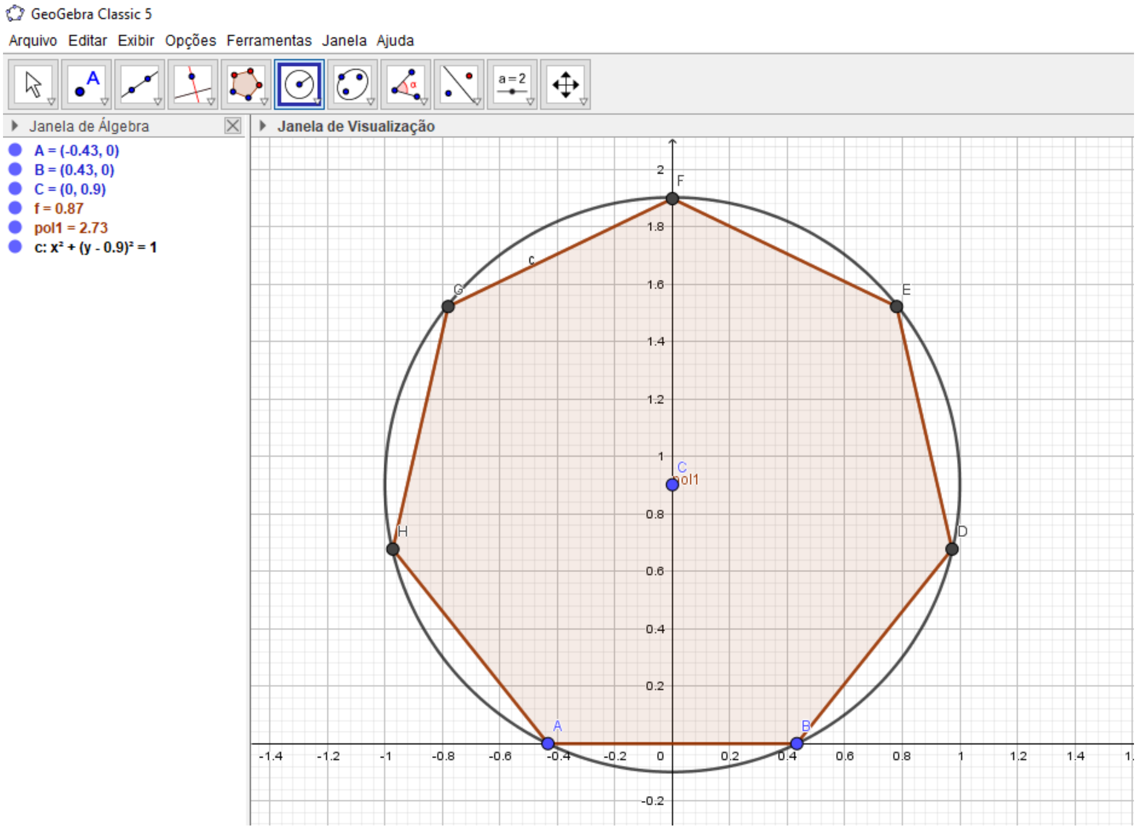
Quarto passo: O programa tem uma funcionalidade que constrói em polígono regular dado um lado. Como o segmento formado pelos pontos A e B é o lado do heptágono regular, segue a figura abaixo o polígono já formado como mostra a figura 41.4.

Figura 41.4 – Construção do heptágono regular no Geogebra.



Quinto passo: O programa possui uma funcionalidade que constrói um círculo com centro em um ponto determinado e com o raio de medida também determinada. Na figura 41.5. o círculo tem centro O e raio unitário.

Figura 41.5 – Construção do heptágono regular no Geogebra.



Pela figura gerada pelo programa percebe-se que o erro é mínimo. Em resumo, a construção com régua e compasso, se feita com relativa exatidão, fica praticamente perfeita a olho nu.

4.6. Inscrição do octógono regular

O octógono é o sexto polígono. O octógono regular tem medindo $135°$ os seus ângulos internos. A construção de tal polígono regular pode ser facilmente construída com a duplicação dos lados do quadrado.

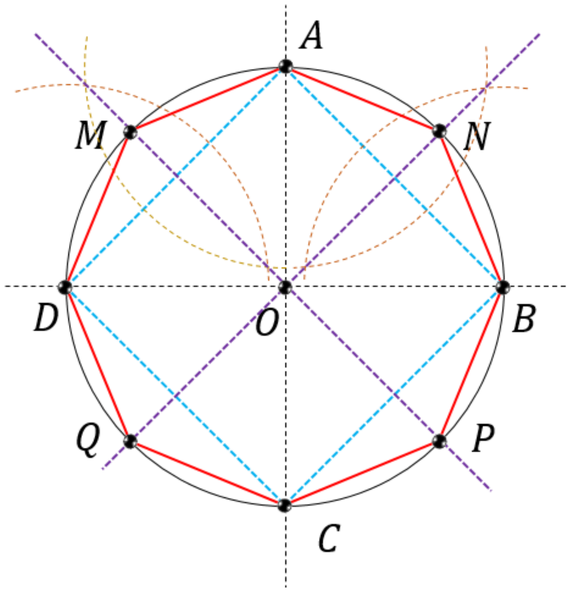
Primeiro passo: Traçar uma circunferência de raio não nulo.

Segundo passo: Traças duas retas pelo centro O do círculo que sejam perpendiculares entre sim determinando os pontos A, B, C e D.

Terceiro passo: Trace a mediatriz dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ determinando os pontos M, N, P e Q como mostra na figura 42.

Quarto passo: Una os pontos A, N, B, P, C, Q, D e M. Vide a figura 42.

Figura 42 – Construção do octógono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: O polígono $ABCD$ é um quadrado (vide subcapítulo 5.2). Como a reta determinada pelos pontos M e O é a mediatriz do segmento $\overline{AD}$. Por sua vez pode-se afirmar que M é equidistante dos pontos A e D, logo $\overline{DM}$ e $\overline{AM}$ tem mesma medida. De maneira análoga vai acontecer com os segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{BN}$. Como o polígono $ABCD$ é um quadrado todos os ângulos consecutivos (exemplo: $A\hat{O}N$, $N\hat{O}B$,..., $M\hat{O}A$) conclui-se que estes ângulos tem 45°. Logo o polígono A, N, B, P, C, Q, D e M é um octógono regular.

4.7. A aproximação eneágono regular

O eneágono regular é o segundo polígono regular não construtível. Pelo teorema de Gauss-Wantzel citado no começo deste capítulo concluímos a impossibilidade da construção do eneágono regular O que vamos mostrar nesta seção uma boa aproximação e bem interessante de uma construção de um eneágono regular. Mas alertamos que é uma mera aproximação. Na verdade, não iremos e nem podemos com régua e compasso construir um eneágono regular perfeito. O que vamos fazer é o que já foi feito com o heptágono regular. Vamos a construção.

Primeiro passo: Traçar uma circunferência de raio não nulo.

Segundo passo: Traças duas retas pelo centro O do círculo que sejam perpendiculares entre sim, determinando os pontos A, B, C e D como mostra a figura 43.

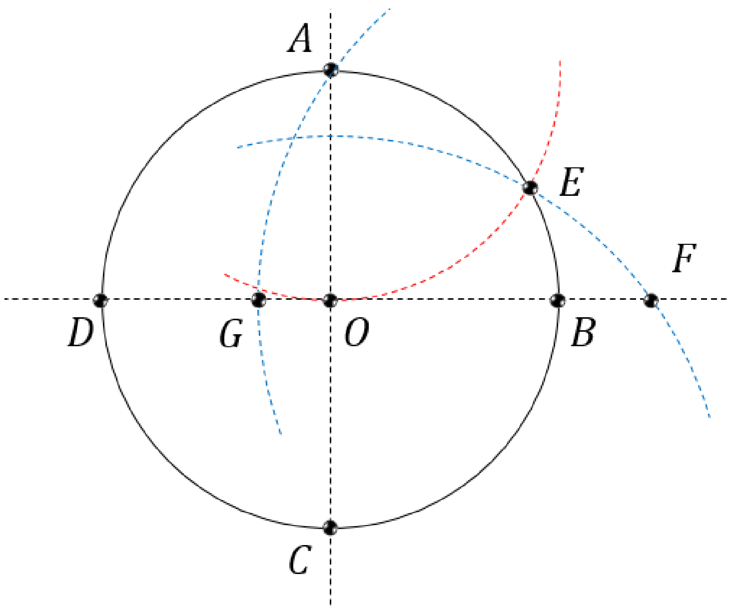
Terceiro passo: Colocar a ponta seca do compasso no ponto A e a outra ponta no ponto O e traçar o arco a determinar o ponto E sobre a circunferência.

Quarto passo: Colocar a ponta seca do compasso no ponto C e a outra no ponto E e traçar um arco que intercepte a reta determinada pelos pontos B e D determinando o ponto F como mostra a figura 43.

Quinto passo: Colocar a ponta seca no ponto F e a outra ponta no ponto A. Trace um arco de circunferência interceptando a reta determinada pelos pontos B e D no ponto G como mostra a figura 43.

O comprimento do segmento $\overline{DG}$ é aproximadamente o lado do eneágono regular.

Figura 43 – Construção do eneágono regular.

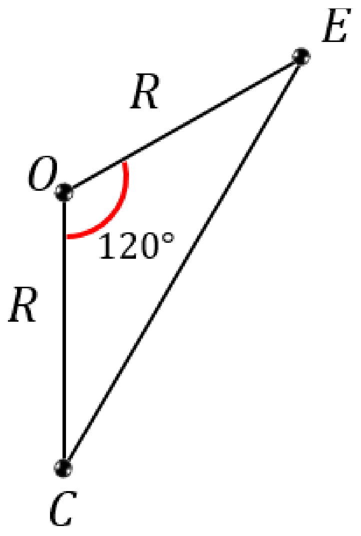


Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos calcular o comprimento do segmento $\overline{DG}$ em função do raio da circunferência e logo em seguida vamos calcular o lado do eneágono através da lei dos cossenos (os dois resultados com 4 casas decimais) e confrontar os mesmos.

Baseando-se na figura 43 tem-se o triângulo CEO onde $\overline{OE} = \overline{OC} = R$. O ângulo $A\hat{O}E$ tem 60° (vide seção 4.6), logo o ângulo $B\hat{O}E$ mede 30°. O ângulo $B\hat{O}C$ mede 90°. Vide a figura 44.

Figura 44 – Construção do eneágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo CEO para determinar o segmento $\overline{CE}$ tem-se $\left(\overline{CE}\right)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 120°$, onde pode-se concluir que $\overline{CE} = R\sqrt{3}$. Vemos também pela construção da figura 43, que os segmentos $\overline{CF}$ e $\overline{FG}$ medem também $R\sqrt{3}$.

No triângulo COF da figura 43 pode-se aplicar o teorema de Pitágoras já que tem-se $\overline{CO} = R$ e $\overline{CF} = R\sqrt{3}$. Teremos $\left(\overline{OF}\right)^2 + R^2 = R\sqrt{3}$. Onde chegaríamos que $\overline{OF} = R\sqrt{2}$.

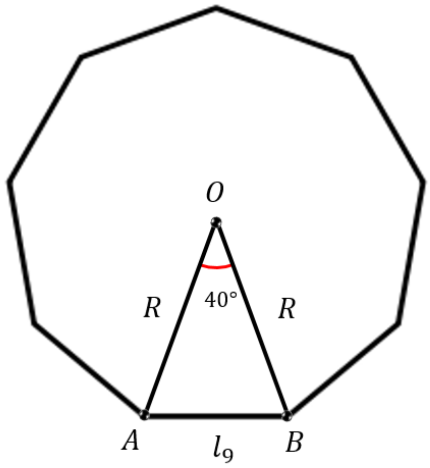
Como $\overline{FG} = R\sqrt{3}$ e $\overline{FO} = R\sqrt{2}$, tem-se que$\overline{GO} = R\sqrt{3} - R\sqrt{2}$. Onde concluísse $\overline{GO} = R\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ Como $\overline{DO} = R$, tem-se que $\overline{DG} = \overline{DO} - \overline{GO} = R - \left(R\sqrt{3} - R\sqrt{2}\right)$. Que finalmente chegamos a $\overline{DG} = R + R\sqrt{2} - R\sqrt{3}$.

Com ajuda de uma calculadora e usando 4 casas decimais vamos determinar que $\overline{DG} = R\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$ vale $\overline{DG} = 0{,}6821R$.

Tomando agora um eneágono regular como na figura 44.1. Os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$ medem R. O segmento $\overline{AB}$ é o lado do eneágono regular (l_9). O ângulo central mede

$\frac{1}{9} \cdot 360° = 40°$. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABO, tem-se $l_9^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cos 40°$. Que após alguns ajustes ficaremos com $l_9 = R\sqrt{2 - 2\cos 40°}$. Com ajuda de uma calculadora temos, com 4 casa decimais, que $l_9 = 0,6840 \cdot R$.

Figura 44.1 – Construção do eneágono regular.

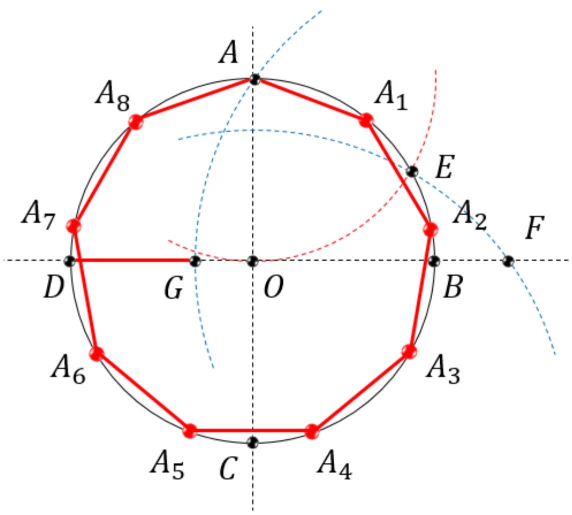


Fonte: Elaborada pelo autor.

Por sua vez podemos comparar os resultados. Tem-se $l_9 = 0,6840 \cdot R$ e $\overline{DG} = 0,6821 \cdot R$, que por sua vez com uma dose de boa vontade podemos afirmar que $l_9 \cong \overline{DG}$ (sendo igual até a segunda casa decimal).

Tomando como referência a figura 43. Nela podemos construir o nosso eneágono regular $AA_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ como é mostrado na figura 45.

Figura 45 – Construção do eneágono regular.



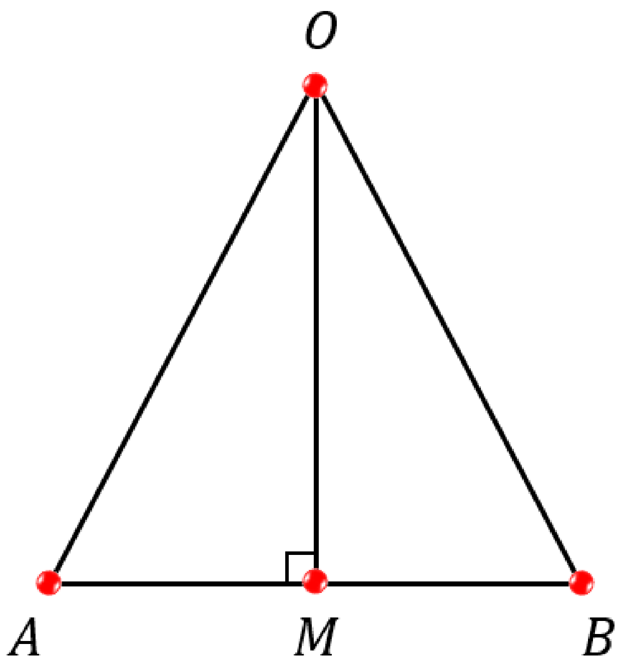
Fonte: Elaborada pelo autor.

Como foi feito na seção 4.5 vamos usar o programa Geogebra para construir um eneágono regular inscrito em um círculo de raio unitário e comprovar que apesar da impossibilidade da construção do eneágono regular a construção por aproximação é muito bem-vinda.

Vimos que se o círculo tem raio unitário ($R = 1$) o lado do eneágono construído com régua e compasso mede $0{,}6840$.

Primeiro passo: Pela figura 45.1, derivada da figura 44.1, calcularemos o comprimento do segmento $\overline{OM}$ utilizando o teorema de Pitágoras. Vale salientar que nesta figura os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ medem 1 (o raio do círculo). O segmento $\overline{AB}$ mede 0,6840 (O lado do eneágono regular). E M é ponto médio de $\overline{AB}$. O segmento $\overline{AM}$ mede $\frac{0,6840}{2} = 0,3420$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAM temos que o segmento $\overline{OM}$ mede $0,9396$. Vale salientar que o segmento $\overline{OM}$ é o apótema do eneágono regular.

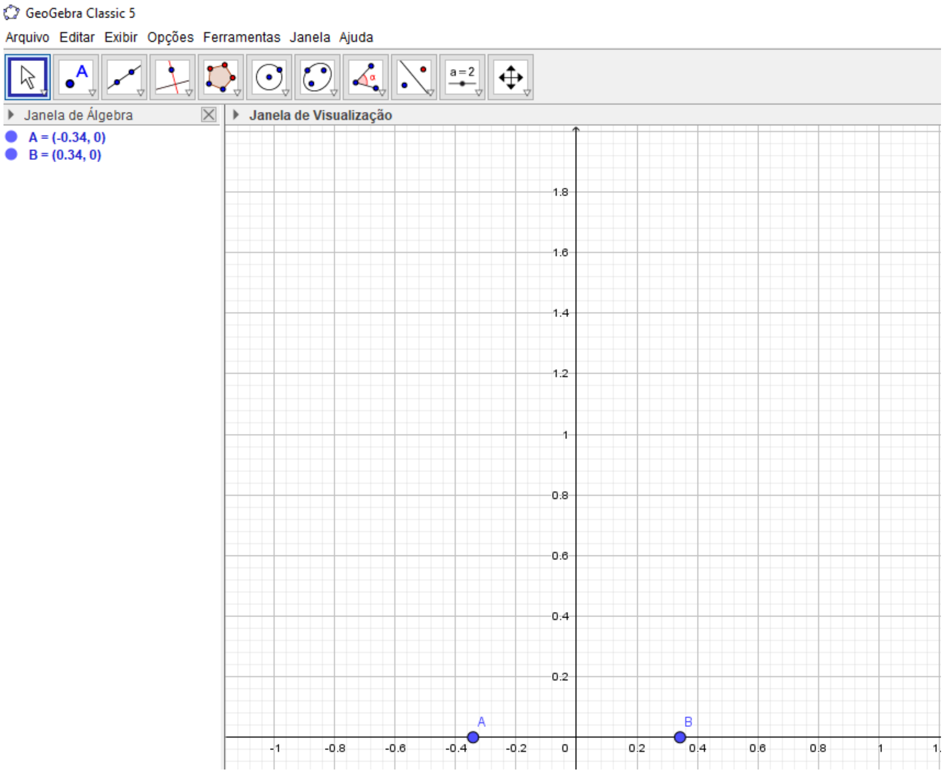
Figura 45.1 – Construção do eneágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

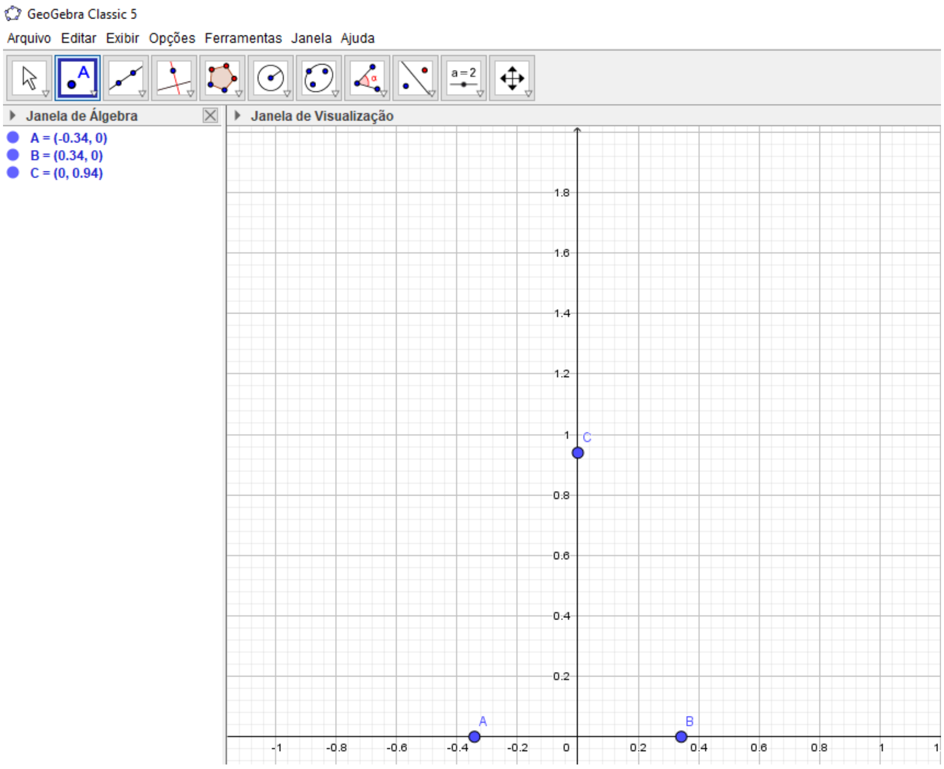
Segundo passo: No plano cartesiano, marque os pontos $A(-0.3420, 0)$ e $B(0.3420, 0)$ e observa-se que a distância entre estes ponto é 0,6840 (a medida do lado do eneágono regular) como mostra a figura 45.2.

Figura 45.2 – Construção do eneágono regular no Geogebra.



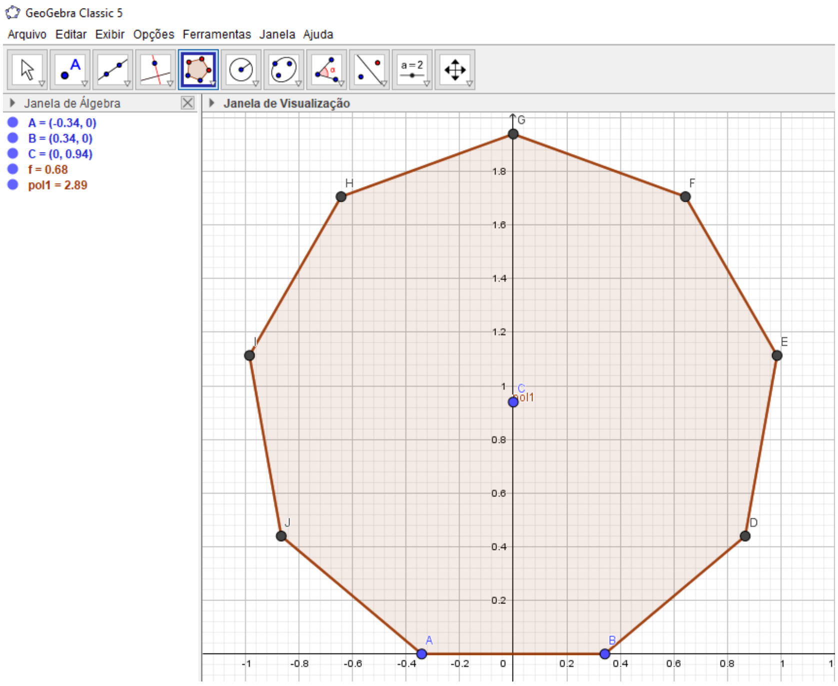
Terceiro passo: Em seguida marca-se o ponto O de coordenadas $(0, 0.9396)$. A distância do ponto O ao eixo x mede 0,9396 (o apótema do eneágono regular) e o ponto O é o centro do círculo circunscrito ao polígono como mostra a figura 45.3.

Figura 45.3 – Construção do eneágono regular no Geogebra.



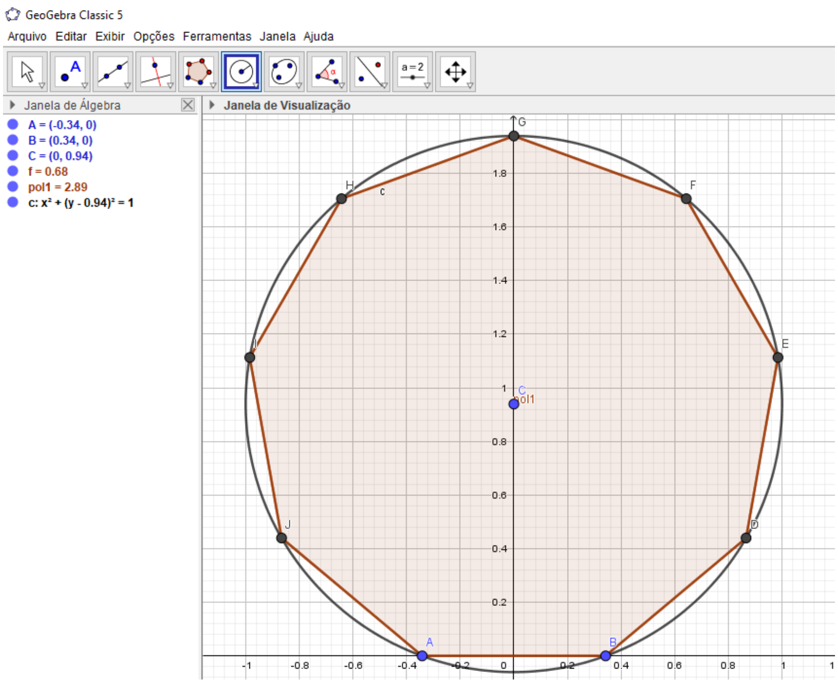
Quarto passo: O programa tem uma funcionalidade que constrói em polígono regular dado um lado. Como o segmento formado pelos pontos A e B é o lado do eneágono regular, segue a figura abaixo o polígono já formado como mostra a figura 45.4.

Figura 45.4 – Construção do eneágono regular no Geogebra.



Quinto passo: O programa possui uma funcionalidade que constrói um círculo com centro em um ponto determinado e com o raio de medida também determinada. Na figura 45.5. o círculo tem centro O e raio unitário.

Figura 45.5 – Construção do eneágono regular no Geogebra.



Pela figura gerada pelo programa percebe-se que o erro é mínimo. Em resumo, a construção com régua e compasso, se feita com relativa exatidão, fica praticamente perfeita a olho nu assim como fizemos com o heptágono regular.

4.8. Inscrever um decágono regular em um círculo dado

Nos remetendo a seção 5.3, temos que $l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. Em suma, o lado de um decágono regular em função do raio da circunferência circunscrita ao decágono é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

Tomemos a figura 30, a qual vamos reconstruí-la (figura 46) que chegaremos a uma bela conclusão. Vamos a construção passo a passo.

Primeiro passo: Traçar uma circunferência de raio não nulo.

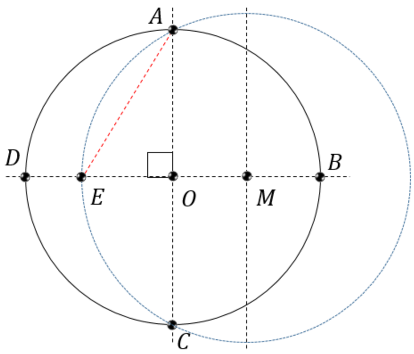
Segundo passo: Traçar duas retas passando pelo centro O dá circunferência de modo que elas sejam perpendiculares. Os pontos de interseção das retas com a circunferência são A, B, C e D como mostra a figura 46.

Terceiro passo: Traçar a mediatriz do segmento $\overline{BO}$ gerando o ponto M.

Quarto passo: Coloque a ponta seca no ponto M e a outra ponto no ponto A. Com esta abertura trace um arco que intersecte o segmento $\overline{DO}$. O ponto de interseção é o ponto E.

O comprimento do segmento $\overline{AE}$ é o lado do pentágono regular inscrito na circunferência em questão, já demostrado na seção 5.3.

Figura 46 – Construção do decágono regular.

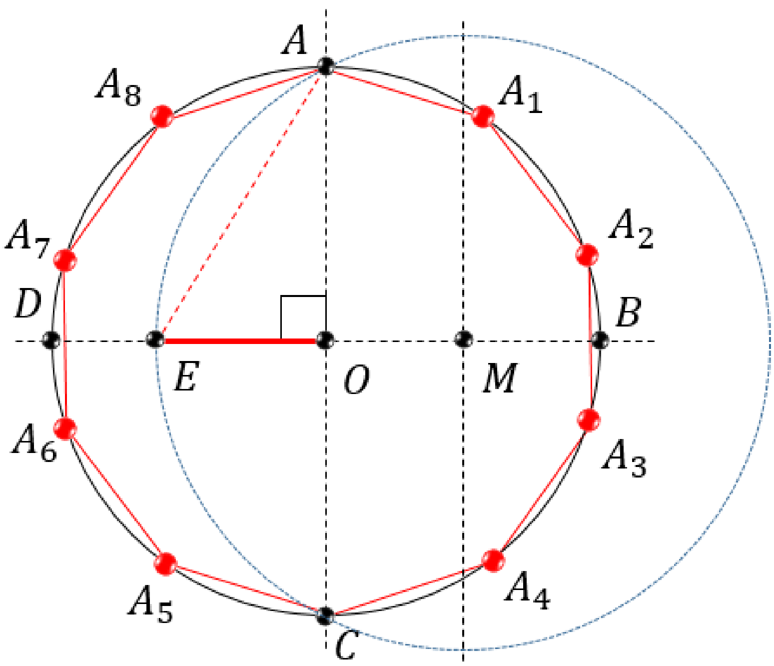


Fonte: Elaborada pelo autor.

Lembrando também que o lado do pentágono regular em função do raio da circunferência circunscrita a ele é $l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Observe o triângulo retângulo de vértices AEO. O segmento $\overline{AO} = R$ e $\overline{AE} = l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se $\left(\overline{EO}\right)^2 + R^2 = \left(\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2$. Que por sua vez chegasse à conclusão que $\overline{EO} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$ que coincide com o lado do decágono regular inscrita em tal circunferência. Logo o caminho para se encontrar a medida do lado de um decágono regular inscrito em uma circunferência está mostrado passo a passo na figura 30.

Com a medida do lado do decágono regular em mão podemos construir tal polígono. Tomemos a figura 46 e baseado nela constrói-se o decágono regular $AA_1A_2A_3A_4CA_6A_7A_8A_9$ como segue na figura 46.1.

Figura 46.1 – Construção do decágono regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

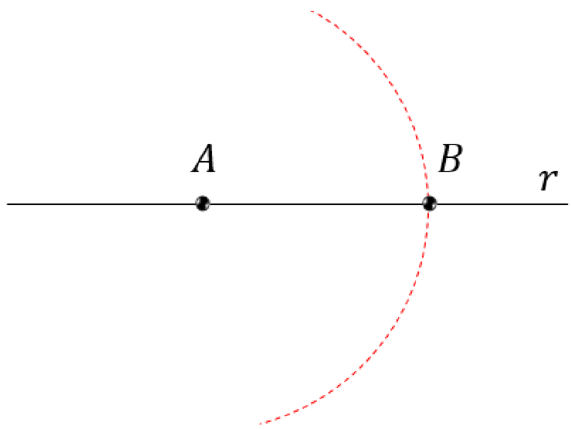
5. CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo, iremos mostrar passo a passo e de maneira muitas vezes intuitiva como pode-se construir com régua e compasso todos os números racionais.

Um número real positivo a é chamado de construtível se conseguirmos usando apenas um compasso e uma régua não graduada construir com um número finito de passos um segmento de reta cujo comprimento seja a, a partir de um segmento cujo comprimento tomamos como a unidade. Números construtíveis utilizando régua não graduada e compasso nada mais são do que números que podem ser obtidos apenas com as quatro operações fundamentais e a extração da raiz quadrada como já foi definido no começo deste trabalho.

Com uma régua pode-se considerar qualquer segmento de reta não nulo como sendo a unidade como mostra a figura 47.

Figura 47 – Construção da unidade.



Fonte: Elaborada pelo autor.

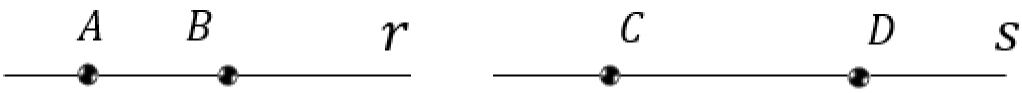
O segmento $\overline{AB}$ pode ser tomando com a unidade pré fixada. A partir daí vamos apenas com régua e compasso construir os números os racionais. Obviamente começaremos na seção que segue com os naturais.

5.1. Construção dos números naturais

Iremos iniciar esta seção mostrando que dado dois segmentos de reta quaisquer pode-se obter a sua soma como a diferença entre eles.

Tome os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ na reta r e t respectivamente que seguem na figura 48. Vamos construir o segmento que representa a soma dos comprimentos destes segmentos e também a diferença.

Figura 48 – Soma e diferença.



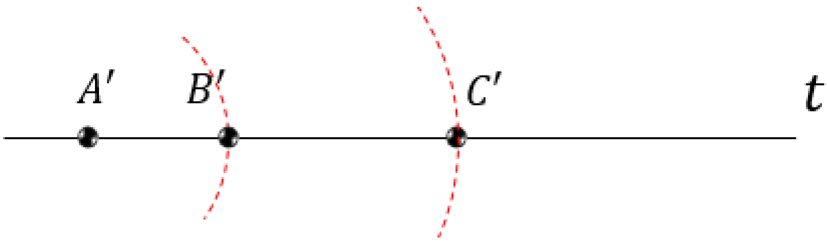
Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiro passo: Tome uma outra reta qualquer s. Coloque a ponta seca do compasso no ponto A e com a outra ponta coloque no ponto B da figura 48. Com esta mesma abertura vai-se na reta s e marca-se com a ponta seca o ponto A' e com a outra ponta marca-se a ponto B' como mostra a figura 49.

Segundo passo: Coloque a ponta seca do compasso no ponto C da figura 48 e a outra ponta do compasso no ponto D. Com esta mesma abertura coloque a ponta seca no ponto B' da figura 49 e com a outra ponta marque o ponto C' na reta t.

O segmento $\overline{A'C'}$ é a soma dos comprimentos dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Figura 49 – Soma e diferença.



Fonte: Elaborada pelo autor.

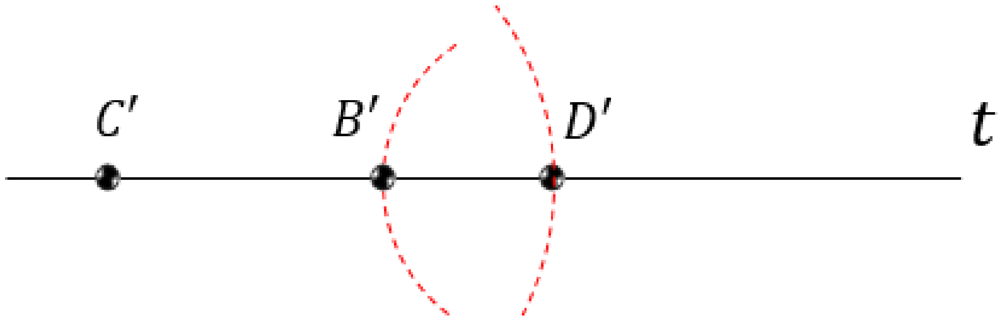
Usando os segmentos da figura 48 vamos construir a diferença do segmento $\overline{AB}$ menos $\overline{CD}$.

Primeiro passo: Tome uma outra reta qualquer u. Coloque a ponta seca do compasso no ponto C e com a outra ponta coloque no ponto D da figura 48. Com esta mesma abertura vai-se na reta u da figura 50 e marca-se com a ponta seca o ponto C' e com a outra ponta marca-se a ponto D' como mostra a figura 50.

Segundo passo: Coloque a ponta seca do compasso no ponto A da figura 48 e a outra ponta do compasso no ponto B. Com esta mesma abertura coloque a ponta seca no ponto D' da figura 50 e com a outra ponta marque o ponto B' na reta t (o ponto B' esta entre os pontos C' e D'.

O segmento $\overline{C'B'}$ é a diferença dos comprimentos dos segmentos $\overline{AB}$ menos $\overline{CD}$.

Figura 50 – Soma e diferença.

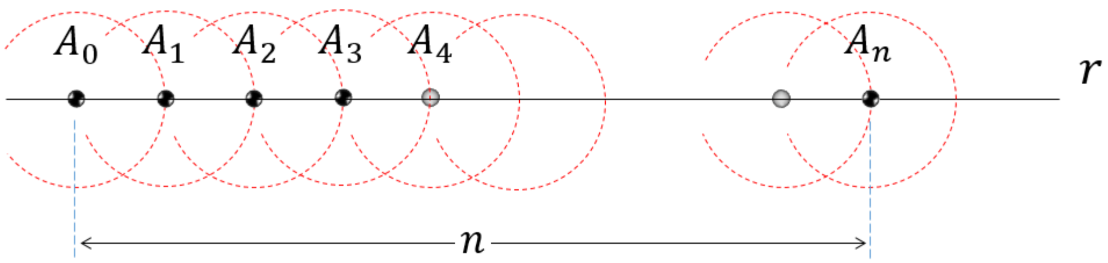


Fonte: Elaborada pelo autor.

Algo obvio, porém, que não pode deixar de ser citado é que um ponto sobre uma reta é considerado o número zero já que o ponto é um (axioma) ente geométrico adimensional.

Ora, se podemos tomar um segmento de reta qualquer não nulo, pode-se construir qualquer número natural. Tomando como unidade o segmento $\overline{A_0A_1}$ na reta r como na figura 51 para obtermos facilmente pode-se obter o segmento $\overline{A_1A_2}$ de mesmo comprimento do segmento $\overline{A_0A_1}$. O segmento $\overline{A_0A_2}$ terá duas unidades de medida. Com a mesma medida de $\overline{A_0A_1}$ pode-se construir o segmento $\overline{A_2A_3}$ como mostra na figura 51 chegando a ter o segmento $\overline{A_0A_3}$ com três unidades de comprimento. Continuando assim, tal procedimento por n vezes chegaríamos ao segmento $\overline{A_0A_n}$ onde tal segmento teria n unidades de comprimento. Sendo assim, n é um número natural já que os números naturais são fechados em relação à adição, isto quer dizer que, sempre que somarmos números 2 ou mais números naturais entre si, o resultado irá gerar apenas números naturais.

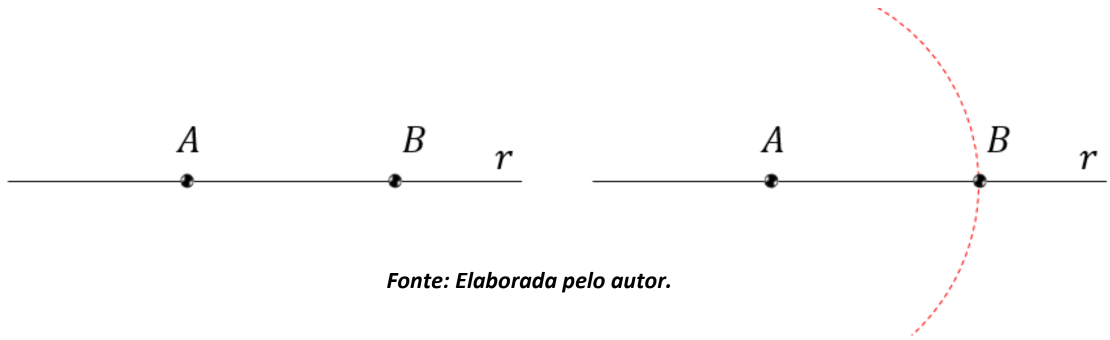
Figura 51 – Construção dos números naturais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos construir o número 4 tomando o segmento $\overline{AB}$ como unidade na figura 51.1. Coloca-se a ponta seca do compasso no ponto A e a outra ponto no ponto B.

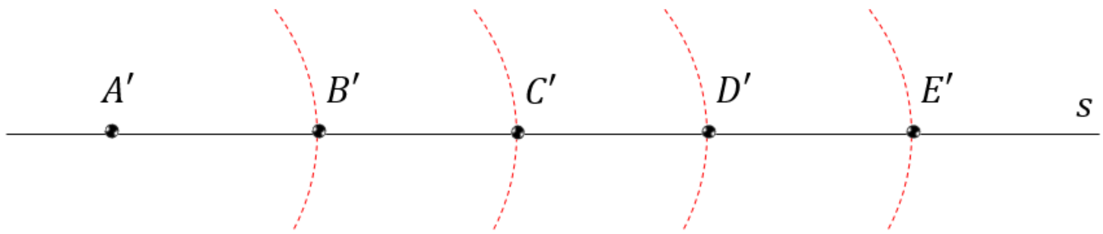
Figura 51.1 – Construção dos números naturais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com esta mesma abertura no compasso coloque a ponta seca em um ponto qualquer da reta s definindo um ponto A' e com a outra ponta determine o ponto B'. Com a mesma abertura coloque a ponta seca no ponto B' e determine o ponto C'. Com a mesma abertura coloque a ponta seca no ponto C' e determine o ponto D'. Com a mesma abertura coloque a ponta seca no ponto D' e determine o ponto E' como descrito na figura 51.2.

Figura 51.2 – Construção dos números naturais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O segmento $\overline{A'E'}$ representa o número 4.

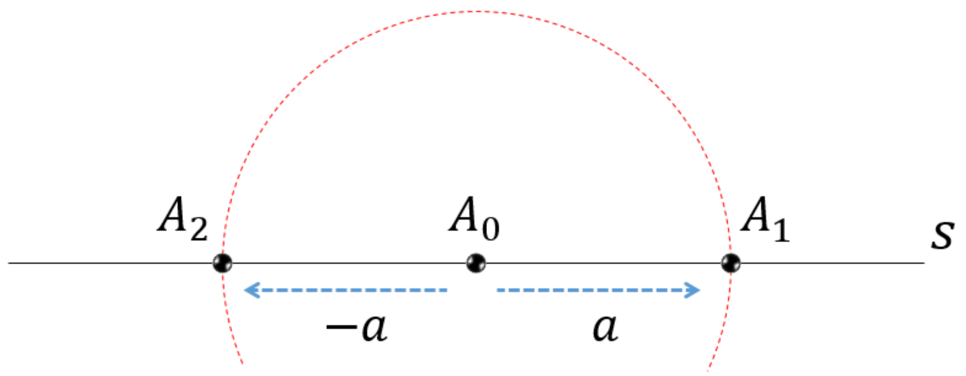
A partir desta seção, tomaremos que todos os números naturais são construtíveis.

5.2. Construção dos números inteiros

Quanto a construção dos números inteiros, ela chega e ser apenas uma questão de orientação. Pode-se construir os números naturais (vamos orientar os números naturais em uma reta s horizontal para direita, como de costume). Para um segmento $\overline{A_0A_1}$ como a unidade para a direita como explicitado na figura 52. Se construímos um segmento $\overline{A_0A_2}$ orientado para a esquerda, pode-se considerar que é a unidade orientada negativamente. Em resumo: Se $\overline{A_0A_1} = 1$, então $\overline{A_0A_2} = |-1|$. Para qualquer número natural ou segmento que represente um número natural (para a direita) construído existe um número inteiro escrito para esquerda de mesmo comprimento. Onde estes segmentos construídos para a esquerda chamaremos de segmentos de orientação negativa e algebricamente serão os números inteiros negativos. Matematicamente temos que se existe um número natural construtível $\overline{A_0A_1} = a$ então existirá um número inteiro negativo $\overline{A_0A_2} = |-a|$, onde tem-se a relação $|a| = |-a|$.

Podemos estender tal raciocínio para qualquer número que possamos vir a construir. Se existe um número qualquer construtivo positivo o seu similar negativo pode ser construído. Logo, se existe um número construtível qualquer $\overline{A_0A_1} = a$, pode-se construir $\overline{A_0A_2} = |-a|$. Em suma $|a| = |-a|$.

Figura 52 – Construção dos números inteiros.

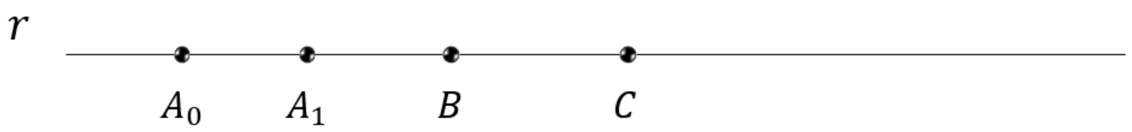


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3. Construção do produto de dois segmentos dados

Tomemos a reta r e o segmento pré fixado $\overline{A_0A_1}$ como a unidade. A partir do segmento $\overline{A_0A_1}$ construiremos os segmentos $\overline{A_0B}$ e $\overline{A_0C}$ não nulos (com $A_0B < A_0C$) como mostra a figura 53.

Figura 53 – Produto de segmentos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiro passo: Trace um segmento de comprimento qualquer partindo de A_0 a um ponto qualquer P não pertencente a reta r como mostra na figura 54. Trace um segmento com extremidades nos pontos A_1 e P.

Segundo passo: Pelo ponto B trace uma reta paralela ao segmento $\overline{A_1P}$ (traçado de retas paralelas foi visto na seção 4.5) e prolongue o segmento $\overline{A_0P}$ a ponto de intersectar a reta que passa por B no ponto D.

Observação(1): Perceba que os triângulos A_0BD e A_0A_1P são semelhantes. Logo tem-se que $\frac{\overline{A_0P}}{\overline{A_0D}} = \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0B}}$.

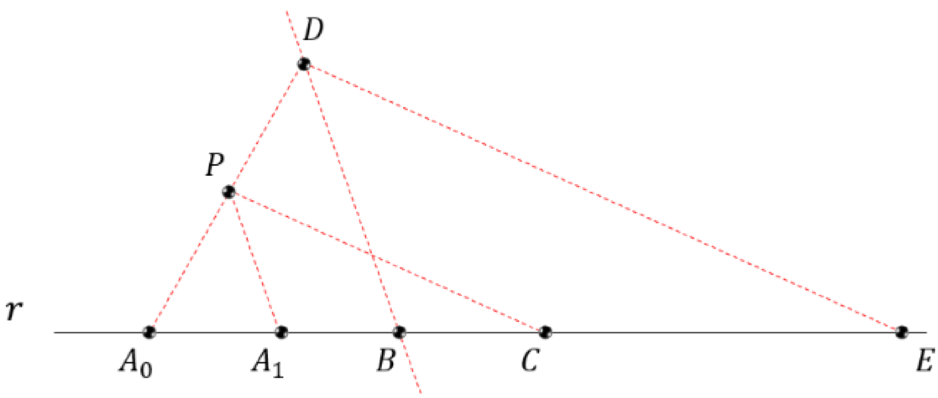
Terceiro passo: Trace um segmento com extremidades nos pontos C e P. Pelo ponto D trace um segmento de reta paralelo ao segmento $\overline{CP}$ até intersecta a reta r no ponto E.

Observação(2): Perceba que os triângulos A_0CP e A_0DE são semelhantes. Logo tem-se que $\frac{\overline{A_0P}}{\overline{A_0D}} = \frac{\overline{A_0C}}{\overline{A_0E}}$.

Veja que o segmento $\overline{A_0A_1}$ é a unidade. Logo podemos escrever que $\frac{\overline{A_0P}}{\overline{A_0D}} = \frac{1}{\overline{A_0B}}$.

Das relações nas observações (1) e (2) podemos concluir que $\frac{\overline{A_0C}}{\overline{A_0E}} = \frac{1}{\overline{A_0B}}$ que por sua vez tem-se que $\overline{A_0B} \cdot \overline{A_0C} = \overline{A_0E}$. Logo conseguimos através de construções apenas com régua e compasso determinar o produto do comprimento entre dois segmentos.

Figura 54 – Produto de segmentos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4 Construção do inverso multiplicativo $\frac{1}{a} = a^{-1}$

Nesta seção vamos construir o segmento a^{-1} tendo o segmento a natural maior que 1 construído a partir da unidade.

Primeiro passo: Trace uma reta r como mostra a figura 55. Sobre esta mesma reta determine o segmento $\overline{A_0A_1}$ como parâmetro para a unidade.

Segundo passo: Construa um segmento que represente um número natural maior que 1 como mostrado na seção 6.1 e trace-o na reta r com extremidades em $\overline{A_0A_2}$.

Terceiro passo: Marque o ponto médio do segmento $\overline{A_0A_2}$. Como na figura 55, tem-se que $\overline{A_0O} = \frac{a}{2}$.

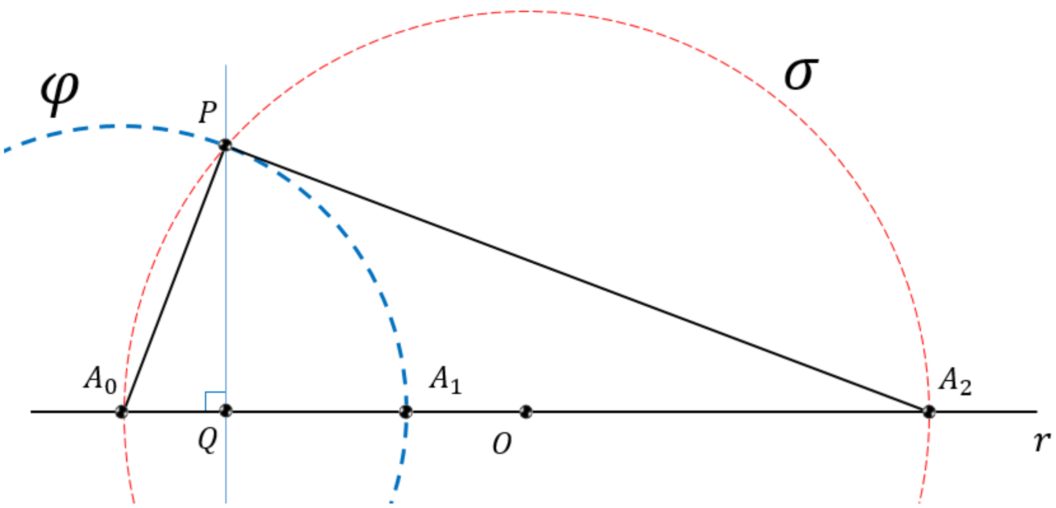
Quarto passo: Coloque a ponta seca do compasso sobre o ponto O e a outra ponta sobre o ponto A_0 ou A_2 e trace um arco σ como mostra a figura 55.

Quinto passo: Coloque a ponta seco do compasso no ponto A_0 e a outra ponta do ponto A_1 e trace o arco φ como mostra a figura 55.

Sexto passo: Na intersecção nos arcos σ e φ, chame este ponto de P ($\overline{A_0A_1}$ têm a mesma medida de $\overline{A_0P}$). Trace os segmentos $\overline{A_0P}$ e $\overline{A_2P}$. Observe que o triângulo formado A_0A_2P está inscrito em um semicírculo, logo ele é retângulo.

Sétimo passo: Pelo ponto P trace uma perpendicular a reta r determinando o ponto Q como mostra a figura 55.

Figura 55 – Construção do inverso multiplicativo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Das relações métricas de um triangulo retângulo, uma bastante conhecia é que a medida de um cateto qualquer ao quadrado é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida de sua respectiva projeção. Logo tem-se que $\left(\overline{A_0P}\right)^2 = \overline{A_0Q} \cdot \overline{A_0A_2}$. Por sua vez $\overline{A_0P} = 1$ e $\overline{A_0A_2} = a$. Fazendo as devidas substituições tem-se $1 = \overline{A_0Q} \cdot a$, onde conclui-se que $\overline{A_0Q} = a^{-1} = \frac{1}{a}$. Logo pode-se afirmar que a medida do segmento $\overline{A_0Q}$ é o inverso multiplicativo de $\overline{A_0A_2}$.

Com as fermentas que já temos em mãos poderíamos construir números da forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b números naturais. De fato se temos o número b poderíamos facilmente agora construir b^{-1}. Logo também poderíamos construir o segmento $a \cdot b^{-1}$ (sendo a e b^{-1} dois segmentos já determinados), onde teríamos $\frac{a}{b}$. Se podemos construir números da forma $\frac{a}{b}$ com a e b naturais (sendo b não nulo) já pode-se afirmar que os números racionais positivos também são construtíveis. Mas vamos na próxima seção mostrar como chegar no segmento que representa $\frac{a}{b}$ de onde maneira.

5.5. A construção dos números da forma a/b sendo a e b números inteiros

É bastante importante sabermos fazer a construção de dois tipos de números. Os números da forma $\frac{a}{b}$ com a e b sendo inteiros (com b sendo diferente de zero). São dois casos a considerar. Quando $a < b$ e $a > b$. Vamos a eles.

5.5.1. Construção dos números da forma $\frac{a}{b}$ $(a < b)$

Considerações preliminares

Tanto o a e o b são números naturais construídos a partir de um segmento pré estabelecido como unidade. O b tem medida não nula e o a é menor que o b. Estas razões da forma $\frac{a}{b}$ com $a < b$ são chamadas de frações próprias.

Tomemos como exemplo, construir o número $\frac{3}{4}$. Vamos para as etapas:

Primeiro passo: Trace uma reta r e determine o segmento $\overline{A_0E}$ sobre a reta r para ser a unidade pré fixada.

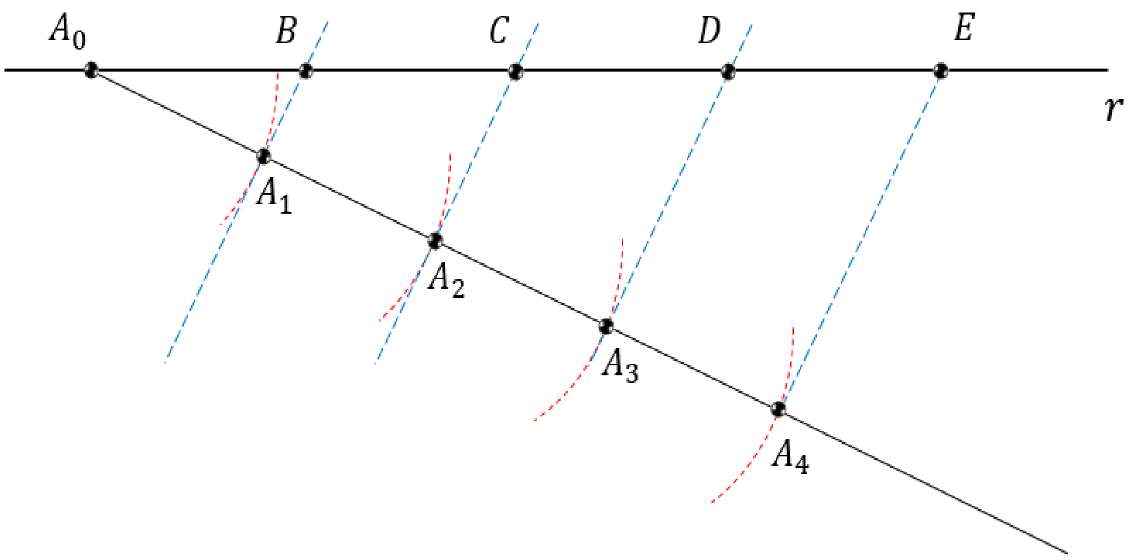
Segundo passo: Pelo ponto A_0 trace uma semirreta com começo em A_0 que não coincida com a reta r, como na figura 56.

Terceiro passo: Com uma abertura qualquer no compasso, determine 4 segmentos consecutivos de mesma medida na semirreta com origem em A_0. Os segmentos serão determinados por $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ e $\overline{A_3A_4}$.

Quarto passo: Trace o segmento $\overline{A_4B}$. Pelos pontos A_1, A_2 e A_3 trace retas paralelas ao segmento $\overline{A_4B}$ e nomeie as interseções destas retas com a reta r como mostra na figura 56.

Como os triângulos A_0A_1B, A_0A_2C, A_0A_3D e A_0A_4E, da forma que foram construídos, são semelhantes e usando o teorema de Tales como suporte para justificar que os segmentos $\overline{A_0B}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ são proporcionais aos segmentos $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ e $\overline{A_3A_4}$ respectivamente e como os segmentos $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ e $\overline{A_3A_4}$ têm os mesmo comprimentos podemos afirmar que os segmentos $\overline{A_0B}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ tem os mesmo comprimentos. Logo conseguimos dividir o segmento $\overline{A_0E}$ (unidade pré fixada) em 4 partes iguais. Como queríamos construir um segmento de medida $\frac{3}{4}$, basta tomarmos o segmento de extremidades em A_0 e D, ou seja, 3 partes de 4.

Figura 56 – Construção de a/b com a menor que b.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5.2. Construção dos números da forma $\frac{a}{b}$ $(a > b)$

O método para se construir os números da forma $\frac{a}{b}$ $(a > b)$ é praticamente o mesmo da seção anterior, porém o a é maior que o b. Onde estes números desta forma são chamados também de frações improprias.

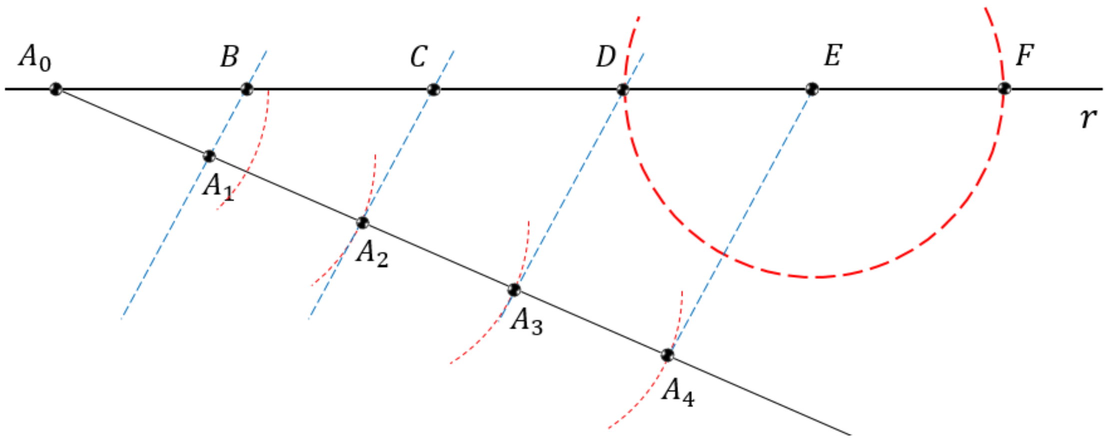
Vamos construir como exemplo o número $\frac{5}{4}$.

Tome todos os 4 passos da seção anterior e tomemos a figura 56.

Coloque a ponta seca no ponto E e a outra ponta no ponto D e trace um arco como mostra a figura 57 e sobre a reta r vai ser determinado o ponto F.

O segmento $\overline{A_0E}$ são 4 partes (de A_0 até o ponto E). O segmento $\overline{EF}$ e uma parte a mais. Logo o segmento $\overline{A_0F}$ são 5 partes de 4.

Figura 57 – Construção de a/b com a maior que b.

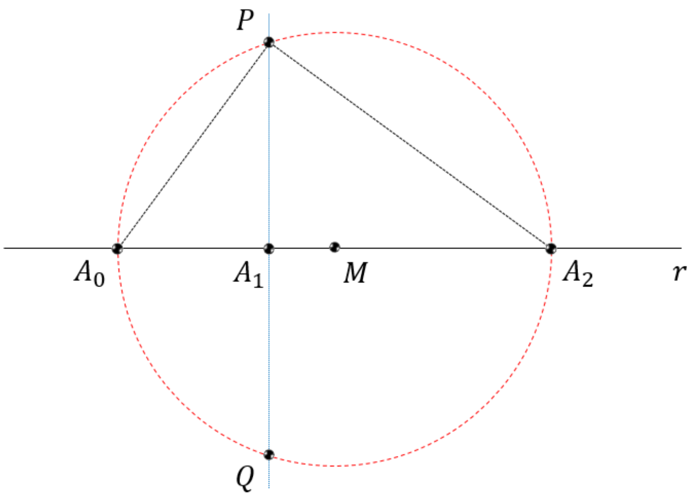


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.6. Números da forma $\sqrt{a}$

Vamos mostrar um método para construir os números $\sqrt{a}$ sendo a um número construído a partir de um segmento $\overline{A_0A_1}$ considerado como unidade. Em uma reta r trace o segmento $\overline{A_0A_1}$ como na figura 58 e o segmento $\overline{A_1A_2}$ para representar o comprimento de a. Determine o ponto médio M do segmento $\overline{A_0A_2}$. Coloque a ponta seca do compasso no ponto M e trace uma circunferência que intersecte os pontos A_0 e A_2. Pelo ponto A_1 trace uma reta perpendicular à reta r de modo que tal reta intersecte a circunferência em dois pontos(P e Q). O comprimento $\overline{A_1P}$ é a altura relativa ao lado $\overline{A_0A_2}$ e mede $\sqrt{a}$.

Figura 58 – Construção dos números da forma $\sqrt{a}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: O triângulo A_0A_2P é retângulo em P. Sabe-se que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo. $\overline{A_0P}$ e $\overline{A_2P}$ são os catetos e $\overline{A_0A_2}$ é a hipotenusa. Os segmentos $\overline{A_0A_1}$ e $\overline{A_1A_2}$ são as projeções dos catetos $\overline{A_0P}$ e $\overline{A_2P}$ respectivamente. Segundo as relações métricas em um triângulo retângulo sabe-se que a altura relativa a hipotenusa ao quadrado é igual ao produto das projeções. Logo na figura 58 tem-se que $(\overline{A_1P})^2 = \overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_1A_2}$. Como $\overline{A_0A_1}$ é a unidade, então tem-se a seguinte relação $(\overline{A_1P})^2 = 1 \cdot \overline{A_1A_2}$. Então $\overline{A_1P} = \sqrt{a}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho mostramos e discutimos uma boa parte do que pode ser mostrado e demonstrado em sala de aula com toda compreensão possível. Esperasse a consolidação e volta do uso da régua e compasso definitivamente ou parcialmente ao longo do ano letivo. A relevância do assunto, está na história da geometria e o poder da construção e visualização que ela proporciona.

Na maioria dos casos, os professores têm o conhecimento das fórmulas e demonstrações da geometria, porém a parte construtiva talvez deixe a desejar. Sendo que esta dissertação entra como ajuda preliminar para se ter os primeiros passo e despertar a curiosidade em nossos alunos.

Compreende-se que a necessidade da geometria e dos números construtíveis é uma poderosa ferramenta para a visualização e justificação de vários teoremas da geometria plana. A construção de formas geométricas sai muito da rotina de apenas mostrar teoremas no quadro lançando o desafio do aluno usar ferramentas milenares como a régua e compasso. Material este que muitas escolas exigem a compra do mesmo, mas geralmente nunca é usado. O novo não pode romper com o clássico. É neste momento que podemos fazer a ponte entre ter que ensinar o uso de régua e compasso para logo em seguida introduzir o uso de bons programas de construção geométricas como, o conhecidíssimo GeoGebra. Muitas vezes a escola pede para o aluno comprar a régua e compasso no começo do ano, porém tal material é negligenciado ao longo do ano. Tem-se um objetivo de que o aluno use realmente a régua e compasso na sala de aula sem deixar de usar outros recursos da informática por exemplo. O clássico não excluir a tecnologia e vise versa. Não é por que existe carro que deixaremos de andar. Não é por que existe computadores para digitar que não vamos mais escrever com lápis. Não é por que existe o Geogebra que não usaremos mais a régua e compasso.

As nossas escolas de ensino médio e fundamental têm que rever sua grade curricular e introduzir no ensino da Matemática usando régua e compasso. Na Base Nacional Comum Curricular homologado pela portaria 1.570, publicada no D.O.U. de 21/12/2017, em momento algum cita o uso da régua e compasso. A cognição do aluno quando lhe é mostrado de onde vem e a forma como se constrói a fundamentação da geometria o aluno firma o conhecimento e ainda ousa-se dizer que de forma mais concreta e robusta a ponto de o conhecimento pendurar por toda vida.

Esperasse que ao final da aplicação e a instrumentação (régua e compasso) deste trabalho, o aluno tenha realmente a capacidade cognitiva do passo a passo das construções geométricas básicas e algumas mais complexas e o principal, a justificativa de cada umas delas. A cada construção a justificativa deve ser mostrada para o embasamento e a fixação de cada passo.

APÊNDICE I

Na seção 4.3 tem-se que $\frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}}$, logo pode-se afirmar que o lado do decágono é o segmento áureo do raio da circunferência circunscrita ao mesmo. Mas o que seria o segmento áureo.

Antes de mais nada definamos o que é segmento áureo.

Se x é a medida do segmento áureo de um segmento a se, e somente se, $\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$ com $x > a$.

Da própria definição $\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$ tem-se $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Resolvendo a equação em x tem-se como raiz positiva $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a$.

O número de ouro é um número irracional que geral uma mística que envolve interesse pela sua história tão enigmática e tão cheiro de propriedades.

Existe também a construção do retângulo de ouro. Vamos a ela.

Primeiro passo: Sobre uma reta r construa um quadrado de vértices A, B, C e D de lado de 2 unidade de comprimento onde um dos lados do quadrado esteja contido na reta r como mostra a figura 59.

Segundo passo: Trace a mediatriz do segmento $\overline{AD}$, definindo os pontos M e N como mostra a figura 59.

O segmento $\overline{MC}$ mede $\sqrt{5}$. Basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo MCD.

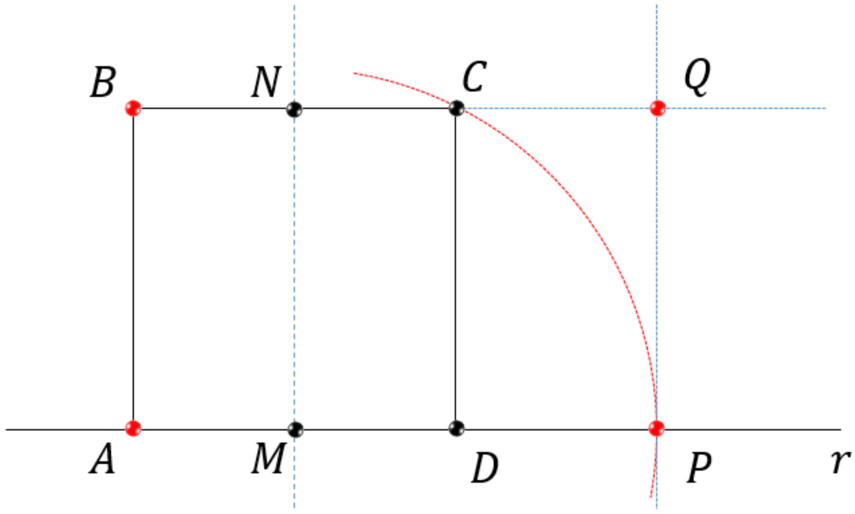
Terceiro passo: Coloque a ponta seca do compasso no ponto M e a outra ponta no ponto C e trace um arco que defina o ponto P como mostra a figura 59.

O segmento $\overline{MP}$ mede $\sqrt{5}$ e o segmento $\overline{AM}$ mede 1. Então o segmento $\overline{AP}$ mede $\sqrt{5} + 1$.

Quarto passo: Pelo ponto P trace uma perpendicular à reta r. E prolongue o lado $\overline{BC}$ do quadrado. A intercessão da perpendicular com o prolongamento define o ponto Q.

O retângulo de vértices A, B, P e Q tem lados medindo $\sqrt{5} + 1$ e 2. Caso se faça a razão entre os lado tem-se $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Que nada mais é que o número de ouro.

Figura 59 – Parthenon.



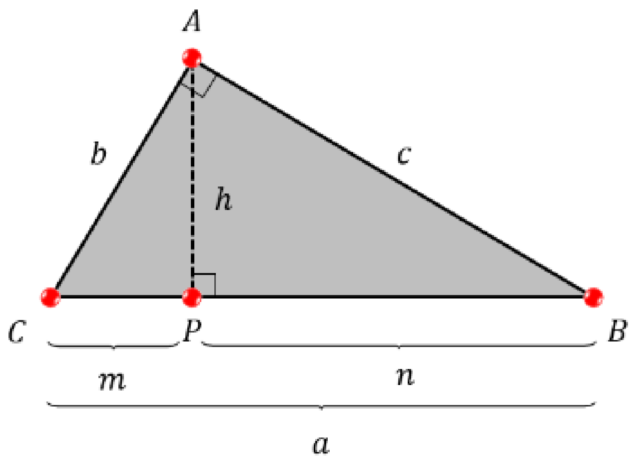
Fonte: Elaborada pelo autor.

APÊNDICE II

Considere um triângulo retângulo (ABC) como na figura que segue com os seguintes elementos:

- Os lados: $\overline{BC} = a$ (hipotenusa), $\overline{AC} = b$ (cateto) e $\overline{AB} = c$ (cateto).
- Altura relativa a hipotenusa: $\overline{AP} = h$
- Projeções dos catetos: $\overline{BP} = n$ (projeção do cateto c) e $\overline{CP} = m$ (projeção do cateto b).
- $m + n = a$

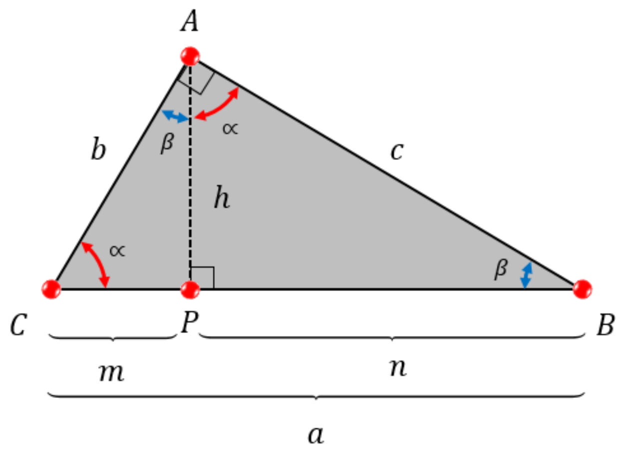
Figura 60 – Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora veja os ângulos $\propto$ e β incrementados na figura ($\propto + \beta = 90°$).

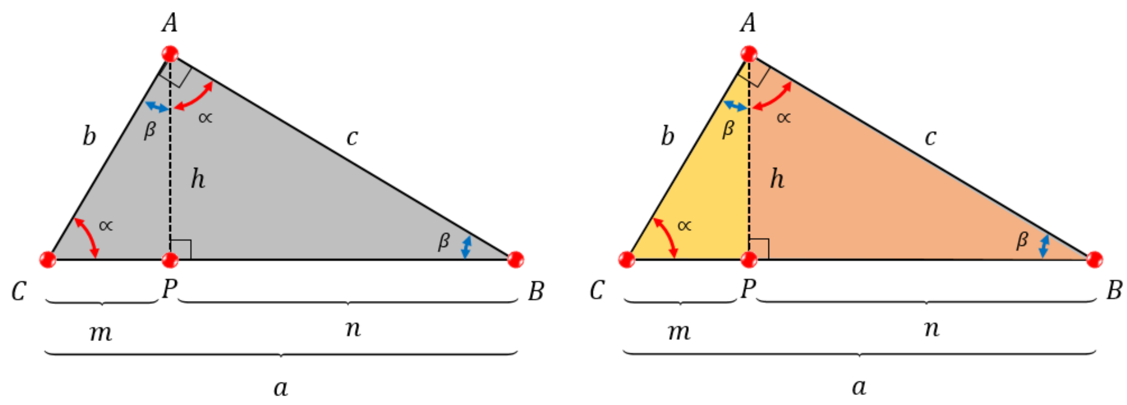
Figura 61 – Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dividindo o triângulo maior (ABC) em dois menores (ACP e ABP), tem-se:

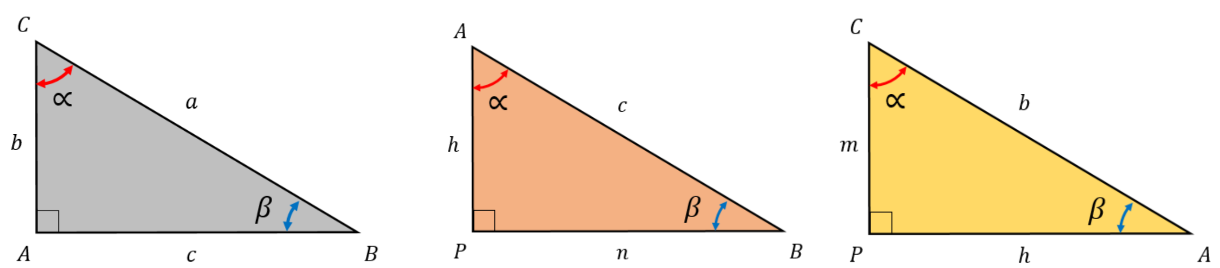
Figura 62 – Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Colocando os três triângulos em uma mesma posição para uma melhor visualização, tem-se:

Figura 63 – Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os três triângulos em questão são semelhantes entre sim. $\Delta(ABC) \sim \Delta(ABP) \sim \Delta(ACP)$.

① Dos triângulos (ABC) e (ABP) tem-se: $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$

O produto da hipotenusa pela altura relativa é igual ao produto entre os catetos.

② Dos triângulos (ABP) e (ACP) tem-se: $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$

A altura relativa a hipotenusa ao quadrado é igual ao produto das projeções.

③ Dos triângulos (ABC) e (ACP) tem-se: $\frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot m$

O cateto b ao quadrado é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção.

④ Dos triângulos (ABC) e (ABP) tem-se: $\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot n$

O cateto c ao quadrado é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção.

Veja que podemos juntar as duas últimas em um só enunciado.

Um cateto qualquer ao quadrado é o produto da hipotenusa pela sua respectiva projeção.

Tomemos as relações ③ e ④: some-as as duas como é mostrado abaixo.

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{cases}$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n) \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = a \cdot a$$

$b^2 + c^2 = a^2$ (Teorema de Pitágoras)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTUNES, F.C. Matemática por assunto 3: Trigonometria. São Paulo. Editora Scipione, 1988.

BICUDO, I. Os elementos Euclides. São Paulo, Editora Unesp, 2009.

BRASIL, Parâmetros Curriculares nacionais para o ensino médio (PCNEM): <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf.>. Acesso: 13/11/2018.

COSTA, V. C. Números construtíveis. <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=35961>. Acesso: 13/11/2018.

SILVA, A. R. Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica. <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160240446>. Acesso: 13/11/2018.

DOLCE, O. Fundamento de Matemática elementar 9: Geometria plana. São Paulo, Editora Atual, 1998.

GELSON, I. Fundamentos de Matemática elementar 3. Trigonometria. São Paulo, Editora Atual, 1998.

JÚNIOR, L. P.S. Construções Geométricas Por Régua e Compasso e Números Construtíveis. <http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Luis.pdf>. Acesso: 13/11/2018.

JÚNIOR, O. G. Matemática por assunto 6: Geometria plana e espacial. São Paulo, Editora Scipione, 1988.

LIMA, E. L. Exame de textos: Análise de livros de Matemática para o ensino médio. São Paulo, Editora SBM. 2001.

__________, Números e Funções Reais. São Paulo, Editora SMB, 2014.

__________, Meu professor de Matemática e outras histórias. São Paulo, Editora SBM, 1991.

NETO, A. C. M. São Paulo, Geometria. Editora DRQ, 2014.

REZENDA, E. Q. F. Geometria Euclidiana plana e construções geométricas. São Paulo, Editora da UNICAMP, 2008.

FERNANDES, S.S. <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22006/SusanadaSilvaFernandes.pdf>. Acesso: 13/11/2018.

WIKIPEDIA, Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Compasso_(geometria)>. Acesso: 31/10/2018.

___________, Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Duplicação_do_cubo>. Acesso: 05/11/2018.

___________, Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadratura_do_círculo>. Acesso: 05/11/2018.

___________, Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Trisseção_do_ângulo>. Acesso: 05/11/2018.