UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Jonathan de Aquino da Silva

TEOREMA DE TALES: UMA ABORDAGEM USANDO ANAMORFISMOS

Santa Maria, RS
2018

Jonathan de Aquino da Silva

TEOREMA DE TALES: UMA ABORDAGEM USANDO ANAMORFISMOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**.

ORIENTADOR: Prof. Carmen Vieira Mathias

Santa Maria, RS
2018

Silva, Jonathan de Aquino da
Teorema de Tales: uma abordagem usando anamorfismos / Jonathan de Aquino da Silva.- 2018.
64 f.; 30 cm

Orientadora: Carmen Vieira Mathias
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2018

1. Teorema de Tales 2. Anamorfismos 3. Livros Didáticos 4. Ensino Médio I. Vieira Mathias, Carmen II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Jonathan de Aquino da Silva

TEOREMA DE TALES: UMA ABORDAGEM USANDO ANAMORFISMOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**.

Defesa em 16 de agosto de 2018:

Carmen Vieira Mathias, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Daniela Tolfo, Dr. (UNIPAMPA)

Luciane Gobbi Tonet, Dr. (UFSM)

Karine F. Magnango, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2018

DEDICATÓRIA

Dedico esse estudo à minha família, meus amigos e minhas amigas em especial a minha mãe Rosa e meu pai Ricardo.

AGRADECIMENTOS

A presente dissertação de mestrado não poderia chegar a bom porto sem o precioso apoio de várias pessoas.

Gostaria de agradecer, inicialmente, aos meus pais, Rosa e Ricardo, pelo apoio, suporte, paciência e confiança.

A minha orientadora, Carmen Vieira Mathias, por orientar-me desde o TCC até o final desta dissertação, sempre com muita calma e paciência, entendendo e, principalmente, ajudando em todas as situações adversas através de bons conselhos.

Desejo igualmente agradecer a todos os meus colegas do mestrado, cujo apoio e amizade estiveram presentes em todos os momentos.

A todos os professores que, ao longo da minha trajetória universitária, compartilharam seus conhecimentos, vivências e experiências, em especial à professora Luciane Gobbi Tonet que sempre será lembrada por ter me dado a primeira chance.

Aos meus colegas professores e aos alunos da Escola Estadual de Ensino Médio João Isidoro Lorentz que apoiaram e fizeram este trabalho ser possível, e a professora Mariléa Reinstein Filipini pela ajuda com os livros.

Por fim, mas não menos importante, gostaria de agradecer aos meus amigos e colegas por todo o carinho, compreensão e suporte ao longo do mestrado, em especial ao pessoal do futebol que estava presente para esfriar a cabeça, equipe de matemática do Alternativa que fez muitas brincadeiras e festas durante estes dois anos e ao grupo "Bolachas e Cachaças" por aguentar qualquer tipo de problema sempre unido e com alegria.

Sem vocês, nada disso seria possível. Muito obrigado a todos!

A matemática nos ensina que o mundo é muito mais do que uma forma geométrica. Nos ensina que o mundo é um espelho onde o que você faz reflete em torno de si mesmo.

(Luciano Pontes)

RESUMO

TEOREMA DE TALES: UMA ABORDAGEM USANDO ANAMORFISMOS

AUTOR: Jonathan de Aquino da Silva
ORIENTADOR: Carmen Vieira Mathias

A Geometria Euclidiana Plana é um campo gigantesco e é possível ter um trabalho muito amplo com seus conceitos, desde o mais básico ao mais sofisticado. Entretanto, o estudo dos conceitos geométricos na educação básica pode deixar um pouco a desejar. A partir do momento em que se estuda geometria na escola e, estando ciente de que fórmulas e expressões matemáticas não possuem aplicabilidade sem uma compreensão do que se está estudando, esta dissertação visou analisar livros didáticos, no intuito de verificar como é realizado o estudo do Teorema de Tales, suas demonstrações e aplicações. Além disso, foi criada e implementada uma proposta alternativa baseada no estudo de anamorfismos e sua relação com o Teorema. A aplicação da proposta alternativa pode fazer com que o Teorema de Tales pudesse ser percebido em situações surpreendentes para os alunos e a construção dos anamorfismos fez com que o espírito criativo e o trabalho em equipe dos alunos viesse à tona, ao mesmo tempo que conseguiam dar significado ao Teorema estudado.

Palavras-chave: Anamorfismos. Teorema de Tales. Livros Didáticos.

ABSTRACT

ABOUT ANAMORPHYSMS

AUTHOR: Jonathan de Aquino da Silva
ADVISOR: Carmen Vieira Mathias

The Flat Euclidian Geometry is a gigantic field and it is possible to have a very wide work with its concepts, since the more basic until the more sophisticated, but, the study of Geometry on the basic education leave a little to be desired. From the moment that study Geometry on the school and, being aware that Maths' formulas doesn't matter without a understanding of what is studying, this dissertation aimed search on didatic books, how is done the study of Thales' Theorem, its demonstrations and applications, creating a alternative proposal based on anamorphisms study and its relation with the Theorem. The application of the alternative proposal may cause the Tales Theorem to be perceived in situations where the students did not expect and the creation of the anamorphisms caused the students' creative spirit and teamwork to come to the surface as they learned more about or Tales Theorem.

Keywords: Anamorphisms. Thales' Theorem. Didatic books.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$BNCC$	*Base Nacional Comum Curricular*
JIL	*João Isidoro Lorentz*
MCS	*Modelo dos Campos Semânticos*
PCN	*Parâmetros Curriculares Nacionais*
$PNLD$	*Plano Nacional do Livro Didático*
$PROFMAT$	*Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No intiíto de continuar o trabalho realizado no final do curso de Graduação em Matemática Licenciatura que versava sobre tópicos de Geometria Plana, foi pensado nas dificuldades que os alunos do ensino médio, em particular, da escola estadual em que o autor dessa dissertação atua, enfrentavam no estudo da geometria em geral. Uma das dificuldades ao trabalhar com tópicos de Geometria Espacial, foi o pouco (ou nenhum) conhecimento dos alunos de alguns resultados clássicos de Geometria Plana, entre eles, por exemplo o Teorema de Tales, que muitos relataram não ter estudado no ensino fundamental. Com isso, pensamos em trabalhar alguma situação que envolvesse o Teorema acima citado, que tivesse alguma aplicação em sala de aula e que pudesse ser vivenciada pelos alunos. A ideia inicial foi realizar um trabalho interdisciplinar, que envolvesse outras áreas do conhecimento, como por exemplo, artes. Nesse sentido a aplicação para o Teorema de Tales foi baseada no desenvolvimento de anamorfismos.

Desde a antiguidade gregos, e romanos já pintavam figuras anamórficas. A prática da pintura na rua iniciou no século XVI, na Itália, com os chamados *Madonnaris*, artistas que viajavam realizando pinturas da Madonna. Hoje em dia esse tipo de pintura é conhecida como pintura para enganar os olhos e fazer uma arte urbana surpreendente.

Segundo Saviani (2015) no Renascimento o empenho foi para se dar profundidade as imagens em paredes, igrejas, palácios. Alguns pintores adquiriram novas técnicas para criar um efeito de maior profundidade ao teto da igreja, por exemplo, fazendo com que as mesmas parecessem maiores, o que ocorre com o teto da igreja Santa Maria Presso di San Satiro, localizada em Milão, na Itália.

As artes e a matemática se entrelaçam, principalmente quando estamos tratando sobre Geometria. Artistas que trazem conceitos matemáticos em suas obras podem fazer trabalhos magníficos apenas com a aplicação certa das ferramentas matemáticas. E é por intermédio das artes que muitos dos conceitos matemáticos podem ter o entendimento facilitado ao serem passados aos alunos. Demonstrações de teoremas são importantes, mas a aplicabilidade e a magia de transformar um cálculo matemático em arte, pode ser de fundamental importância na formação do conhecimento do aluno.

O Teorema de Tales está inserido na ideia de construção dos anamorfismos oblíquos, a profundidade dada as figuras pode ser criada por meio de semelhanças. Desta forma, os conceitos matemáticos vão se moldando nas obras de arte, gerando um efeito de causa e consequência que entrelaça a interdisciplinariedade de matemática e arte.

Dentro desse contexto, o presente trabalho tem como objetivo geral, demonstrar e retomar o Teorema de Tales, além de instigar os alunos a fazerem construções que estejam aplicadas ao referido teorema. E tem como objetivos específicos, expor onde o Teorema de Tales pode ser encontrado em nosso dia a dia, explorar como o Teorema de

Tales é apresentado em livros didáticos, apresentar uma aplicação fazendo referência às placas de trânsito e desenvolver junto a alunos do Ensino Médio a noção de anamorfismos, utilizando lápis e papel.

No que segue, o segundo capítulo da dissertação apresenta a pesquisa do conhecimento onde além de conceituar anamorfismos, buscamos outros trabalhos (dissertações) em que o Teorema de Tales foi objeto de estudo. O terceiro capítulo descreve a metodologia utilizada para a construção do trabalho. O quarto capítulo contém a análise dos livros didáticos, seguindo o molde estudado na disciplina de Tópicos em Matemática, bem como a proposta alternativa a ser implementada. O quinto capítulo relata como foi realizada a aplicação da atividade proposta. E o último capítulo apresenta as considerações finais e encaminhamentos futuros.

2 PESQUISA DO CONHECIMENTO

2.1 SOBRE ANAMORFISMOS

O conceito de Anamorfismo, segundo o Dicionário Priberam da Língua Portuguesa, é “a representação ou imagem que parece deformada ou confusa e que se apresenta mais regular ou mais perceptível em determinado ângulo ou posição ou ainda por meio de lente ou espelho não plano” (PRIBERAM, 2010).

Segundo Coelho, Lima e Vieira (2018)

> O termo anamorfose (anamorfismo) (do grego *anamorfosis* - reformação, retorno à forma, reiteração da forma, reversão da forma [...], formar de novo, [...]), é utilizado em várias áreas do conhecimento - matemática, óptica (com aplicações nas artes visuais), biologia e geologia, com diferentes concepções. Assim sendo, o conceito de anamorfose difere de área para área. (COELHO; LIMA; VIEIRA, 2018, p.18)

Ou seja, a palavra também pode trazer um sentido de transformação e é utilizada em inúmeras áreas como matemática, artes, ótica, biologia, geologia e cartografia. Em particular, nas artes, os anamorfismos são utilizados para forçar o observador a se colocar sob um determinado ponto de vista. Na ótica, os anamorfismos são encontrados quando a ampliação no sentido horizontal das imagens é diferente da ampliação em sentido vertical. Na geologia, os anamorfismos são usados para indicar fenômenos de formação de rochas de composição complexa, por meio de mudanças na estrutura de outros minerais de composição mais simples, sejam elas pela ação de agentes físicos, como a pressão ou o calor, ou pela introdução de novas substâncias químicas (FLORES; ARAÚJO; FIGUEIREDO, 2017).

As figuras anamórficas podem ser encontradas em muitos lugares. Por exemplo, ao andar pela rua e, ao dobrar a esquina, podemos nos deparar com a vista que é ilustrada na Figura 2.1, que foi feita por Edgar Mueller, em 2009, na Alemanha que cobriu 25 metros quadrados com giz, utilizando a técnica da anamorfose, em cinco dias. Essa obra foi denominada “Lava Burst” e transformou uma rua num imenso buraco onde vertiam chamas como se houvesse um vulcão abaixo do solo (SEMMER, 2013).

Figura 2.1 – Lava Burst

Fonte: (SEMMER, 2013)

Conforme Santos (2018) as primeiras imagens onde o anamorfismo do tipo obliquo aparece, estão na obra “The Ambassadors” de Hans Holbein (1533) (Figura 2.2), em que um crânio aparece simbolizando a morte como forma de criticar os retratados sem que os mesmos notassem de imediato.

Figura 2.2 – Obra de Hans Holbein

Fonte: (National Gallery, 2018)

Observamos que além das imagens diretamente visíveis, o crânio está disfarçado no centro, como se fosse uma mancha na altura dos pés dos jovens retratados. O crânio foi deformado anamorficamente e só pode ser visualizado se o observador estiver numa posição específica. A Figura 2.3 ilustra uma vista oblíqua do crânio favorecendo a visão do anamorfismo.

Figura 2.3 – Vista oblíqua da obra de Hans Holbein

Fonte: (IAVORSKI, 2014)

Podemos encontrar em alguns lugares (mesmo que passem despercebidas) figuras anamórficas, isto acontece pois nosso ângulo de visão sob a figura não é adequado. Como exemplo, citamos algumas propagandas em campos de futebol (Figura 2.4). Nesse caso, quando vistas pelos torcedores na arquibancada, parecem placas apoiadas na grama.

Figura 2.4 – Propaganda em campo de futebol

Fonte: (Mota, Leticia, 2011)

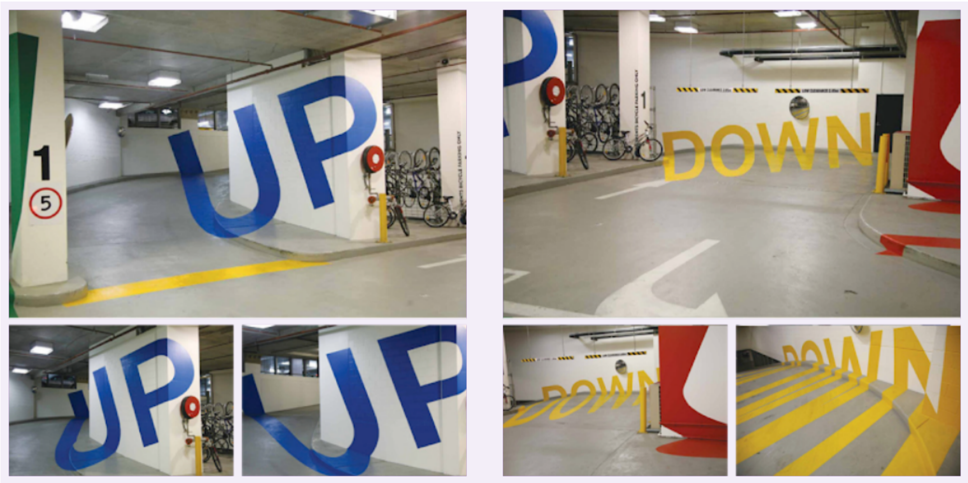
Esse tipo de ilusão pode ser percebida em experimentos com arquitetura e tipografia, como é o caso ilustrado na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Anamorfismo e Tipografia

Fonte: (Mota, Leticia, 2011)

Também são encontradas em sinalizações, como foi o realizado pelo design Axel Peemöller para a Eureka Tower Carpark (estacionamento vertical) em Melbourne, nos Estados Unidos, ilustrado na Figura 2.6. Igualmente ao exemplo anterior, a tipografia distorcida nas paredes é perfeitamente legíveis em posições estratégicas.

Figura 2.6 – Sinalização de Estacionamento



Fonte: (Mota, Leticia, 2011)

Acreditamos que uma das mais interessantes aplicações para os anamorfismos consiste das placas de sinalização de trânsito (Figura 2.7).

Figura 2.7 – Sinalização de trânsito

Fonte: (IAVORSKI, 2014)

Podemos, por exemplo, nos questionar por qual motivo as letras e símbolos da palavra PARE, na Figura 2.7, estão desproporcionais e alongados verticalmente? Algumas possíveis respostas a serem pensadas são:

- É que o solo está num plano oblíquo em relação a visão do motorista.
- A leitura só se daria com maior clareza quando já estivesse muito próximo da mensagem.
- Quanto mais alongada for a mensagem, o motorista poderá ter uma leitura satisfatória de uma distância maior.

Segundo o Manual Brasileiro de Sinalização de Trânsito (CONTRAN, 2007), existem algumas restrições de medidas para as alturas das sinalizações como podemos verificar no Quadro 2.1.

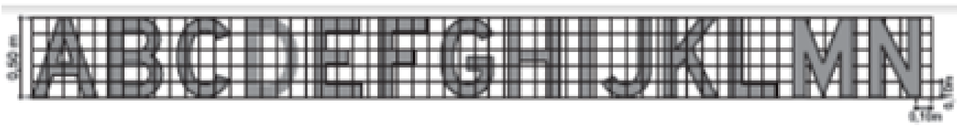
Quadro 2.1 – Restrições de medidas de sinalização

Velocidade	Área Urbana	Área Rural
Menor que 80 Km/h	1,6m	2,4m
Maior que 80 Km/h	2,4m	4m

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 2.8 ilustra um modelo com altura de 50cm, onde as letras não estão deformadas e cada quadrado mede 10cm x 10cm .

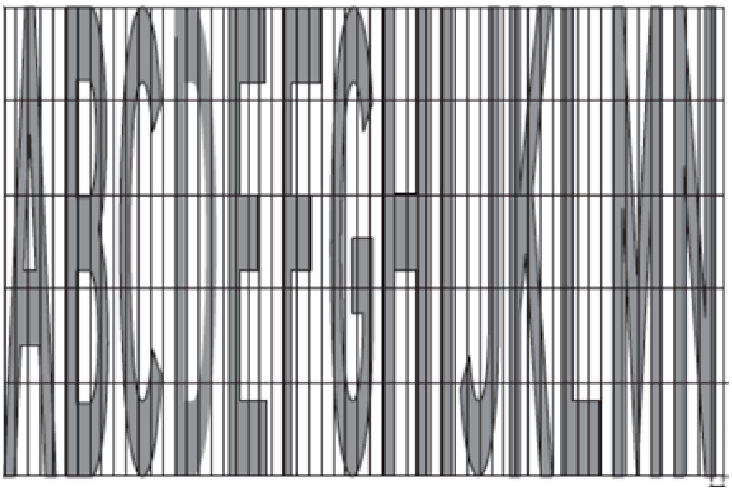
Figura 2.8 – Modelo original



Fonte: (IAVORSKI, 2014)

Já a figura 2.9 ilustra um modelo de letras para ser pintado em vias rurais com velocidade permitida acima de 80km/h. Nesse caso, cada retângulo mede 10cm x 80cm.

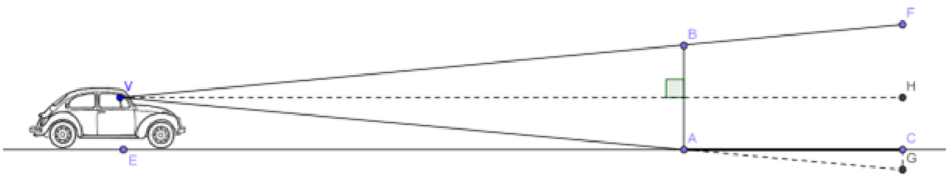
Figura 2.9 – Modelo para pintura nas vias



Fonte: (IAVORSKI, 2014)

Existe uma explicação do porquê da necessidade de utilizar figuras anamórficas na sinalização de trânsito. Conforme Iavorski (2014) ao considerar, por exemplo, um motorista dirigindo seu veículo em via rural, onde a velocidade permitida seja superior a 80km/h. Para esse caso, segundo a regulamentação de trânsito, as letras devem ter altura de 4m e supondo que nesse modelo de carro os olhos do motorista ficam a uma altura de $1,6$m em relação ao solo (Figura 2.10).

Figura 2.10 – Modelo visualização da situação

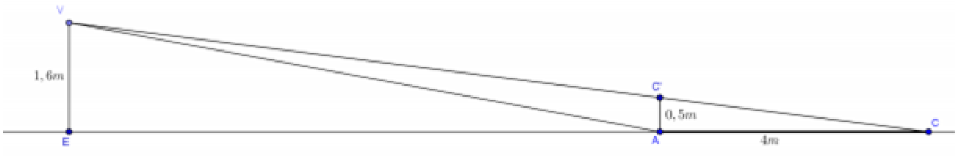


Fonte: (IAVORSKI, 2014)

Considerando também que o motorista está olhando para frente e que a superfície da estrada naquele trecho é plana e horizontal. O objetivo deste exemplo é descobrir a qual distância o motorista pode ler a mensagem da forma original.

A pintura no chão deve ter a sua projeção do segmento $\overline{AB}$, pois essa deve ser perpendicular ao eixo do cone visual. Assim os extremos serão os pontos A e C' (Figura 2.11), onde a mensagem terá sua leitura facilitada quando a projeção tiver as medidas originais (50cm de altura).

Figura 2.11 – Semelhança de triângulos e a projeção de C' em $\overline{AB}$



Fonte: (IAVORSKI, 2014)

Como os segmentos $\overline{C'A}$ e $\overline{VE}$ são paralelos e $\overline{CE}$ é uma transversal, o Teorema de Tales garante que:

$$\frac{\overline{CE}}{4} = \frac{1,6}{0,5}$$

$$\overline{CE} = \frac{4 * 1,6}{0,5}$$

$$\overline{CE} = \frac{6,4}{0,5}$$

$$\overline{CE} = 12,8$$

Logo o motorista enxerga a placa sem deformações a $12,8 - 4 = 8,8$m de distância.

A ideia utilizada na sinalização de trânsito, pode ser pensada no sentido de deformar mensagens. Iavorski (2014) propõe uma atividade, cujo objetivo é construir anamorfimos distorcendo duas palavras sobrepostas, uma no sentido vertical e outra no sentido horizontal, conforme ilustra a Figura 2.12

Figura 2.12 – Anamorfismo no computador

Fonte: (IAVORSKI, 2014)

A princípio, as palavras escritas parecem indecifráveis, mas basta inclinar a folha nos dois sentidos (horizontal e vertical) e as palavras (mensagens) são reveladas (Figura 2.13)

Figura 2.13 – Impressão no papel do anamorfismo anterior

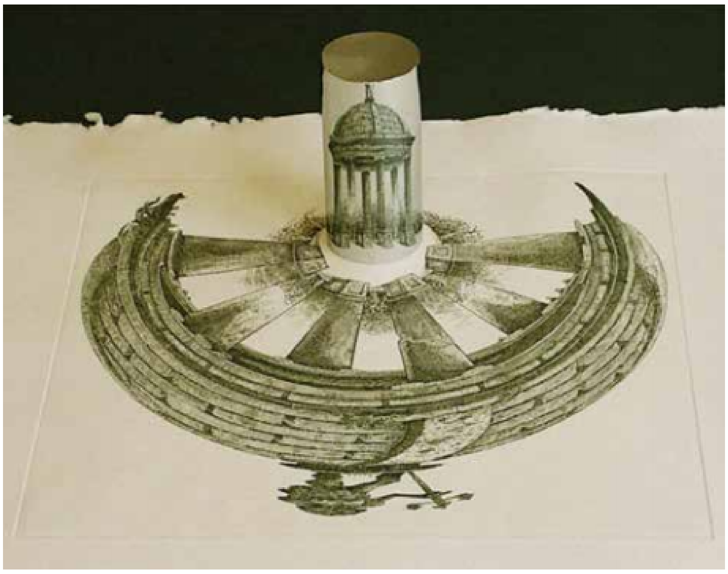
Fonte: (IAVORSKI, 2014)

Observamos que Iavorski (2014) propõe uma série de atividades utilizando anamorfismos, porém nenhuma delas é aplicada.

Além dos anamorfismos oblíquos, existem outros tipos de anamorfismos que podem ser visualizados de diferentes perspectivas, gerados por outras deformações. São eles:

- Anamorfismo Cilíndrico: existem técnicas de anamorfose em que pinturas e desenhos anamórficos são resgatados por espelhos cilíndricos (Figura 2.14).

Figura 2.14 – Cupola (1990) de István Orosz



Fonte: (SEMMER, 2013)

- Anamorfismo Cônico: a imagem é refletida em um cone. É importante observar que o ângulo (ponto de vista) é fundamental para que identifique o objeto a ser representado no cone, como ilustra a Figura 2.15.

Figura 2.15 – Anamorfose Cônica

Fonte: (IAVORSKI, 2014)

- Anamorfismo Piramidal: o processo se dá através da reflexão em um conjunto de espelhos planos dispostos em forma de pirâmide, conforme a Figura 2.16.

Figura 2.16 – Anamorfose Piramidal

Fonte: (IAVORSKI, 2014)

2.2 TRABALHOS RELACIONADOS

Com a finalidade de verificar a existência de trabalhos relacionados ao realizado, foi feita uma pesquisa na base de dados de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) utilizando a palavra “anamorfismo” em meados do segundo semestre de 2017. Utilizando esse parâmetro, não foi encontrado nenhum trabalho. Pesquisando a palavra anamorfose, encontramos o trabalho Iavorski (2014) que foi citado anteriormente. Ampliamos a busca com o intuito de saber o que foi trabalhado acerca do tema “Teorema de Tales” nas dissertações, já que os anamorfismos estudados se relacionam diretamente com o teorema, podendo ser uma aplicação do mesmo. Desta forma foram encontrados alguns trabalhos, porém seis tratam especificamente sobre aplicações desse teorema em contextos escolares. Os mesmos estão listados no Quadro 2.2 e serão descritos na sequência.

Quadro 2.2 – Restrições de medidas de sinalização

Referência	Universidade	Objetivo
Silva (2015)	UFRN	Demonstrar o Teorema
Reis (2014)	UENF	Apresentar uma sequência didática
Almeida (2013)	UFF	Analisar a apresentação do Teorema
Pereira (2014)	UTFPR	Identificar objetivos e orientações dos PCN
Ferreira (2017)	UESC	Analisar a apresentação do Teorema
Martins (2014)	UFFRJ	Verificar as dificuldades de aprendizagem

Fonte: Elaborado pelo autor.

Silva (2015) teve como objetivo demonstrar o Teorema de Tales no Ensino Médio, de tal forma, que um aluno do ensino médio conseguisse entender. Um modelo concreto foi proposto para ser utilizado pelo aluno em sala de aula, de maneira a compreender os conceitos e aplicações, no tocante, a cartografia, trigonometria e principalmente em triângulos semelhantes, onde demonstraram os principais casos de semelhança, pois essas são ferramentas eficazes na resolução de situações-problemas na área da geometria plana. Para um melhor entendimento o autor fez uso do software GeoGebra, de forma que o aluno pudesse relacionar teoria e prática em sala de aula, e ainda para que os conceitos de semelhança de triângulos fossem melhor apresentados e assimilados, assim como as respectivas propriedades de cada modelo.

O trabalho de Reis (2014) teve como objetivo apresentar uma sequência didática para o ensino do Teorema de Tales para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Além disso, foram propostas discussões, exemplos e atividades diversificadas que envolveram fatos cotidianos. Com foco a tornar a aprendizagem mais significativa, algumas das atividades foram desenvolvidas fora da sala de aula e no laboratório de informática da escola, de modo que o aluno compreendesse melhor a teoria proposta.

Almeida (2013) fez uma análise da apresentação do Teorema de Tales em alguns livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental comumente adotados no Brasil. Este estudo contemplou os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e considerou os seguintes aspectos: motivação, pré-requisitos, provas e exercícios. Também apresentou o resultado de uma pesquisa feita com professores e alunos sobre a importância de demonstrações de Geometria na Educação Básica.

Um trabalho de destaque foi Pereira (2014), que identificou os objetivos e as orientações nos PCN, do terceiro e quarto ciclos, sobre o estudo da Geometria. Também pesquisou sobre a Biografia de Tales de Mileto, onde realizou um relato da região e história da época em que ele viveu, descreveu alguns de seus feitos e enumerou os teoremas cujas demonstrações lhe são atribuídas. Analisou seis livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, que integram o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2014, observou a forma como a Geometria é trabalhada e quais as demonstrações e atividades sao apresentadas em relação ao Teorema de Tales. Propôs exercícios diversificados para serem utilizados em sala de aula quando o Teorema de Tales for trabalhado, sugerindo uma demonstração para o Teorema de Tales, onde usou a definição de área do triângulo e as propriedades do paralelogramo.

Ferreira (2017) apresentou uma análise de como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano, como são feitas as demonstrações, os exercícios, as figuras, etc.

Em Martins (2014), buscou-se verificar quais são as dificuldades de aprendizagem reveladas pelos alunos do 8º e do 9º ano do Ensino Fundamental, nas atividades que envolvem o teorema de Tales. Através de uma abordagem construtivista, pretendeu direcionar e orientar o aluno para uma análise gradativa e interpretativa das ações tomadas para o entendimento e a resolução de situações-problemas que envolvam o teorema de Tales. Para tanto, buscou olhar o teorema de Tales sob a perspectiva da teoria de Van Hiele, cuja aprendizagem, sobretudo em geometria, se dá em níveis de compreensão. A elaboração das atividades teve um enfoque na compreensão dos elementos formadores e que compõem o teorema de Tales, bem como as diversas formas que eles aparecem no cotidiano. Realizou uma análise interpretativa de situações-problemas em que se pode aplicar o teorema e avaliou se as habilidades e competências, necessárias ao processo de ensino-aprendizagem, foram adquiridas de maneira satisfatória.

Observamos que a presente dissertação se diferencia das demais, na medida em que será realizada uma análise de livros didáticos sobre o conteúdo a ser desenvolvido (Teorema de Tales). Além disso será proposta e implementada uma atividade na qual os alunos desenvolverão o conceito de anamorfismos oblíquos, em grupos. Acreditamos que esta abordagem pode facilitar o desenvolvimento de conteúdos relacionados à geometria plana, em particular ao referido Teorema.

3 METODOLOGIA

O presente trabalho quanto aos objetivos de pesquisa, pode ser classificado como exploratório. Gil (2008) considera que a pesquisa exploratória tem como objetivo principal desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores. Esse estudo retoma conceitos importantes no campo da Geometria Euclidiana Plana, com abordagem direta, trazendo aplicações à realidade do aluno.

Quanto a natureza, classifica-se a pesquisa como qualitativa. E quanto aos procedimentos técnicos, possui duas classificações, é de cunho bibliográfico, visto que foram realizadas pesquisas em relação ao conceito de anamorfismo e também quanto ao material (dissertações) já existente sobre o tema a ser abordado. Além disso, existe uma análise de livros didáticos que estará inserida no corpo do texto, com o intuito de saber o que os livros de 9° ano trabalham sobre este assunto, e principalmente, de que forma são trabalhados.

Podemos também classificar a pesquisa como um estudo de caso, visto que conforme Gil (2008), trata-se de uma modalidade de pesquisa muito específica, pois consiste no estudo profundo e exaustivo de um único objeto ou de poucos objetos (um caso particular). Depende fortemente do contexto do estudo e seus resultados não podem ser generalizados.

Desta forma, o trabalho realizado dividiu-se em quatro momentos distintos. Em um primeiro momento desenvolvemos a pesquisa do conhecimento, descrita no capítulo anterior.

O segundo momento da pesquisa constou na análise de livros didáticos, seguindo o modelo estudado na disciplina de Tópicos de Matemática trabalhado no PROFMAT - UFSM.

Nessa etapa, primeiramente, foram explanadas as expectativas sobre o conteúdo para o ano escolhido, juntamente com as expectativas de conhecimentos prévios e as expectativas de conteúdos para os livros didáticos, após isto, se deu a análise propriamente dita, dos materiais escolhidos.

Como professores é importante pensar na escolha do livro didático a ser adotado. Em particular, o curso de Mestrado PROFMAT proporcionou uma experiência interessante ao que se refere a esse tema. Isso ocorreu no segundo semestre do ano de 2017, onde foi ofertada a disciplina Tópicos de Matemática.

O objetivo das aulas foi desenvolver a habilidade de analisar criticamente livros escolares para o ensino básico, bem como criar atividades alternativas àquelas apresentadas nos materiais analisados. A disciplina seguiu os moldes da cadeira Análise e Desenvolvimento de Material Didático Escolar, ministrada no curso de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS, conforme consta UFRGS (2018).

Também nessa etapa, a qual está inserida no modelo de análise proposto, foi realizado o terceiro momento da pesquisa, que se refere a fundamentação matemática. Nesse caso, o tópico escolhido foi o Teorema de Tales cuja fundamentação teórica, foi baseada em Neto (2013). Nesse momento também foi planejada a proposta didática a ser implementada, tendo como base a pesquisa do conhecimento, a análise do material didático e a fundamentação teórica.

A quarta etapa da pesquisa foi a implementação da proposta didática. Esta foi aplicada à duas turmas (uma do turno da manhã e outra do turno da tarde) do terceiro ano do Ensino Médio (EM) da Escola Estadual de EM João Isidoro Lorentz (JIL). Observamos que essa é a única escola desse nível de escolaridade no município de Formigueiro. Foram realizados três encontros, todos no terceiro trimestre de 2017. As atividades foram realizadas no período entre as avaliações e os Planos pedagógicos de apoio didático (PPDA). Ao todo, participaram 36 alunos que foram separados em grupos de 3 a 5 estudantes. Identificamos os grupos com letras do alfabeto, ordenadas de A até H, para preservar a identidade dos participantes.

Observamos que para realizar a análise dos livros, foram buscados os materiais utilizados na Escola Estadual de Ensino Fundamental Oliva Lorentz Schumacher. A escolha por essa escola se deu, pois a maioria dos alunos que frequentam o EM na escola JIL, são egressos da escola Oliva. Justificamos a escolha pelas turmas do terceiro ano, pois eram as turmas que o autor desse trabalho ministrava aulas.

4 ANÁLISE MATERIAL DIDÁTICO

Conforme explicitado no capítulo anterior, a análise realizada seguiu o modelo trabalhado na disciplina Tópicos de Matemática no curso PROFMAT e baseado em UFRGS (2018)

4.1 EXPECTATIVAS SOBRE O CONTEÚDO PARA O ANO ESCOLHIDO

Nesse item, deve-se descrever o que dizem os documentos oficiais.

Sobre o Teorema de Tales, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2016), no 9° ano do ensino fundamental o aluno deverá conseguir entender o conceito de retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997) dizem que a Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.

4.2 EXPECTATIVAS DOS CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Nesse item, discorre-se sobre as ferramentas matemáticas que o aluno deveria possuir para compreender o Teorema de Tales e consequentemente sua demonstração, ou seja, quais são os pré-requisitos necessários para que o aluno compreenda o tópico a ser estudado.

Acreditamos que para trabalhar com o Teorema de Tales, os alunos que estão cursando a terceira série do Ensino Médio, deverão ter conhecimento dos seguintes tópicos: operações com frações, resolução de equações e semelhanças de figuras.

4.3 EXPECTATIVAS DE CONTEÚDOS PARA OS LIVROS DIDÁTICOS

Nesse item, deve-se expor quais são as expectativas referente ao tópico Teorema de Tales nos livros didáticos.

Assim, esperamos que o livro apresente uma boa motivação, ou seja, alguma situação do cotidiano do aluno em que o mesmo possa refletir sobre a importância do conteúdo a ser estudado. Acreditamos que explicações e demonstrações são necessárias, mas é de fundamental importância exercícios e atividades onde o aluno possa manipular tanto fisicamente quando com o apoio de recursos computacionais. O conteúdo deve vir de forma condensada, sem separação em tópicos que valem para um mesmo assunto, o que ocorre erroneamente (separação em casos).

Também acreditamos que os exercícios devem ser contextualizados, não apenas aplicações de fórmulas, mas desenvolvendo o Teorema com intuíto de mostrar seu significado e aplicabilidade. Nas resoluções de exemplos, deve-se explorar diferentes maneiras de desenvolver cada atividade e mostrar que um mesmo exercício possui mais de um caminho para ser solucionado. Se possível, o autor deveria relacionar com outros conteúdos, dentro da Matemática ou fora dela. Esperamos encontrar alguma aplicação do Teorema em outras áreas do conhecimento, como em Artes, por exemplo, trazendo obras de arte que tenham relação com o assunto.

4.4 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesse item, realizamos a análise dos livros didáticos, tendo um cuidado de fazê-a de maneira crítica, sendo minuciosa principalmente no que diz respeito as expressões utilizadas pelos autores e com o conteúdo matemático que está sendo desenvolvido, exatamente da forma como foi proposto na disciplina de Tópicos em Matemática.

Dois livros ((BIANCHINI, 2015) e (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)) foram analisados com o intuito de verificar os conhecimentos que os alunos deveriam trazer do ensino básico, como o conteúdo estava disposto, quais as motivações utilizadas, entre outros, conforme descrevemos nas subsecções a seguir.

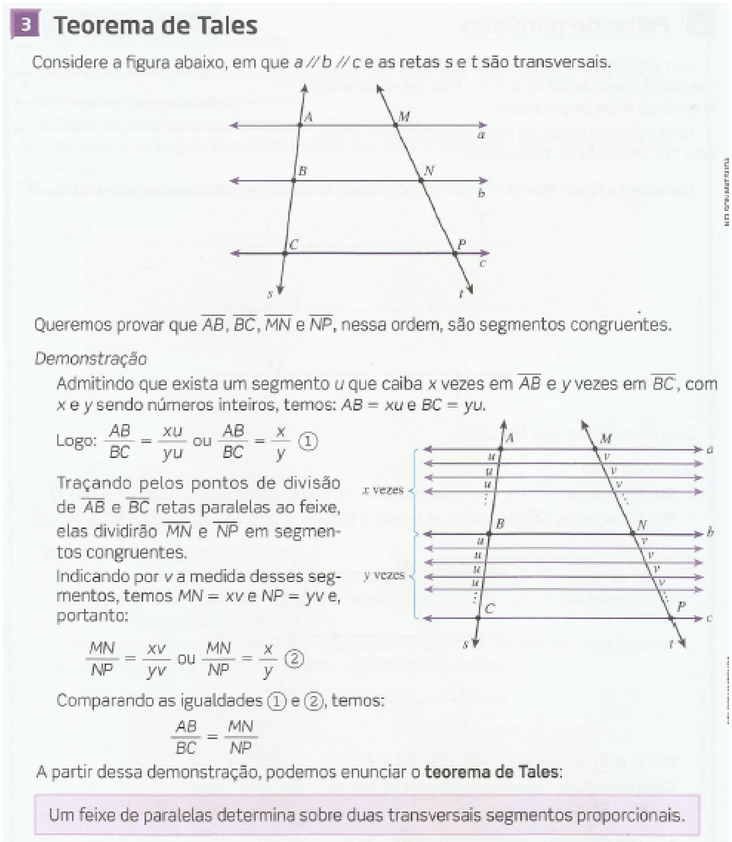
4.4.1 Livro A

O primeiro livro analisado foi Bianchini (2015), escrito por Edwaldo Bianchini licenciado em ciências pelas Universidade da Associação de Ensino de Ribeirão Preto com habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP). Bianchini também é professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo.

O capítulo sobre o assunto não possui motivação para começar o conteúdo, apenas inicia com a demonstração sem uma possível aplicação para se chegar ao enunciado do Teorema de Tales. Cita que os segmentos AB, BC, MN e NP são congruentes, mas a

Figura 4.1 ilustra, que isto não é verdade, apenas podemos perceber que o segmento AB é congruente à BC e o segmento MN é congruente à NP.

Figura 4.1 – Introdução e prova do Teorema de Tales



3 Teorema de Tales

Considere a figura abaixo, em que $a // b // c$ e as retas s e t são transversais.

Queremos provar que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$, nessa ordem, são segmentos congruentes.

Demonstração

Admitindo que exista um segmento u que caiba x vezes em $\overline{AB}$ e y vezes em $\overline{BC}$, com x e y sendo números inteiros, temos: $AB = xu$ e $BC = yu$.

Logo: $\frac{AB}{BC} = \frac{xu}{yu}$ ou $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y}$ ①

Traçando pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ retas paralelas ao feixe, elas dividirão $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ em segmentos congruentes.

Indicando por v a medida desses segmentos, temos $MN = xv$ e $NP = yv$ e, portanto:

$$\frac{MN}{NP} = \frac{xv}{yv} \text{ ou } \frac{MN}{NP} = \frac{x}{y} \quad ②$$

Comparando as igualdades ① e ②, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

A partir dessa demonstração, podemos enunciar o **teorema de Tales**:

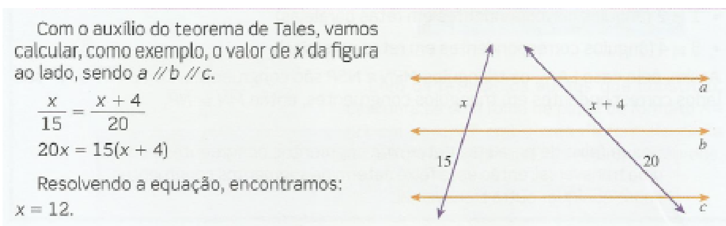
Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

A prova é realizada apenas para x e y inteiros (que o autor escolhe como a quantidade de divisões dos segmentos) e nem cita o caso de partições racionais e irracionais, ou seja, não prova para todos os casos possíveis.

A Figura 4.2 ilustra uma parte do livro que apresenta o único exemplo introdutório, que é somente uma aplicação da fórmula demonstrada anteriormente.

Figura 4.2 – Exemplo de aplicação



Com o auxílio do teorema de Tales, vamos calcular, como exemplo, o valor de x da figura ao lado, sendo $a // b // c$.

$$\frac{x}{15} = \frac{x+4}{20}$$

$$20x = 15(x + 4)$$

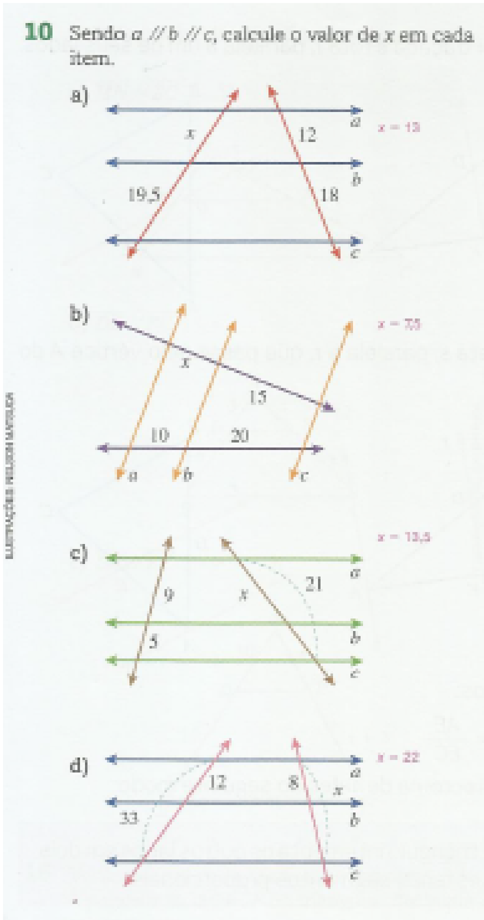
Resolvendo a equação, encontramos:

$x = 12$.

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

Na sequência, o autor apresenta uma lista de exercícios mecânicos (Figura 4.3) iguais ao exemplo, ou com resoluções que devem ser conjecturadas pelos alunos, já que não foram demonstradas. Apesar de serem exercícios mecânicos, eles podem ser explorados com novas definições (visto que cabem outras interpretações de resolução) e aplicações futuramente.

Figura 4.3 – Lista de exercícios mecânicos



Fonte: (BIANCHINI, 2015)

A Figura 4.4 ilustra um exercício onde o desenho não é apresentado, mas descreve como o aluno deverá montar as retas paralelas e transversais, o que é uma atividade interessante.

Figura 4.4 – Lista de exercícios aplicados - Atividade 13

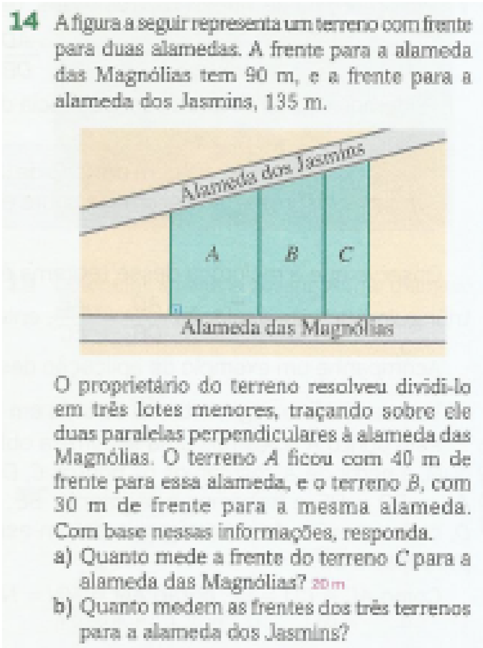
13 Três retas paralelas determinam sobre uma transversal segmentos de 4,2 cm e 5,4 cm. Calcule a medida do maior segmento que o feixe determina sobre outra transversal, sabendo que o segmento menor mede 6,3 cm. 13. 14,4 cm

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

Acreditamos que essa atividade tem o intuito de instigar o aluno a criar sua própria imagem mental ou da figura, seguindo os passos descritos.

O outro exercício (Figura 4.5) é uma aplicação do Teorema a um problema em um terreno, algo que talvez não seja tão presente no contexto do aluno, mas onde se percebe a utilização do teorema.

Figura 4.5 – Lista de exercícios aplicados - Atividade 14



14 A figura a seguir representa um terreno com frente para duas alamedas. A frente para a alameda das Magnólias tem 90 m, e a frente para a alameda dos Jasmins, 135 m.

O proprietário do terreno resolveu dividi-lo em três lotes menores, traçando sobre ele duas paralelas perpendiculares à alameda das Magnólias. O terreno *A* ficou com 40 m de frente para essa alameda, e o terreno *B*, com 30 m de frente para a mesma alameda. Com base nessas informações, responda.

a) Quanto mede a frente do terreno *C* para a alameda das Magnólias? 20 m

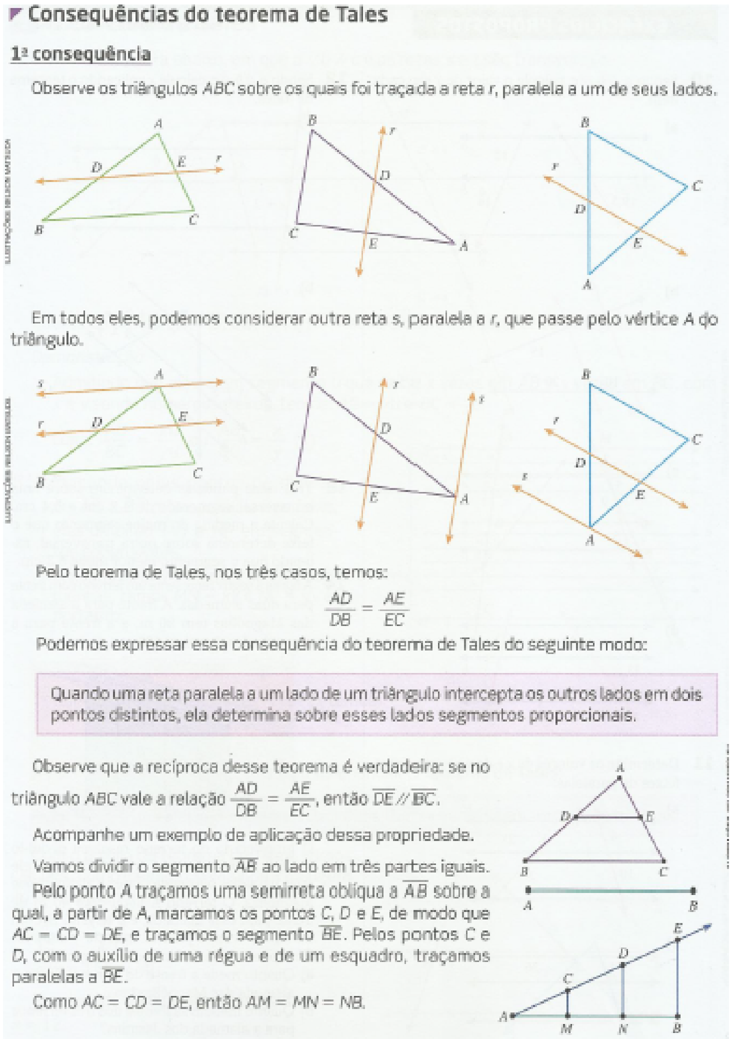
b) Quanto medem as frentes dos três terrenos para a alameda dos Jasmins?

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

Talvez o problema pudesse ser modificado para uma horta e os alunos fizessem os canteiros em paralelo, colocando mangueiras furadas para regarem e eles mesmos puderem fazer as medições, ou apenas sugerir a criação de uma maquete da rua com materiais recicláveis como plástico, papel, e até isopor, verificando a aplicabilidade do teorema.

Na sequência, o autor demonstra o que denomina de 1ª consequência. Observamos que é o mesmo teorema, para um caso de triângulo. O autor mostra como se pode fazer a construção com régua e compasso, (Figura 4.6) o que já torna válido para qualquer secção. Entretanto, observamos que não é necessário que os segmentos sejam congruentes para o teorema ser válido.

Figura 4.6 – Consequências do Teorema



Consequências do teorema de Tales

1ª consequência

Observe os triângulos *ABC* sobre os quais foi traçada a reta *r*, paralela a um de seus lados.

Em todos eles, podemos considerar outra reta *s*, paralela a *r*, que passe pelo vértice *A* do triângulo.

Pelo teorema de Tales, nos três casos, temos:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Podemos expressar essa consequência do teorema de Tales do seguinte modo:

Quando uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros lados em dois pontos distintos, ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

Observe que a recíproca desse teorema é verdadeira: se no triângulo *ABC* vale a relação $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, então $\overline{DE} \mathbin{/\mkern-6mu/} \overline{BC}$.

Acompanhe um exemplo de aplicação dessa propriedade.

Vamos dividir o segmento $\overline{AB}$ ao lado em três partes iguais.

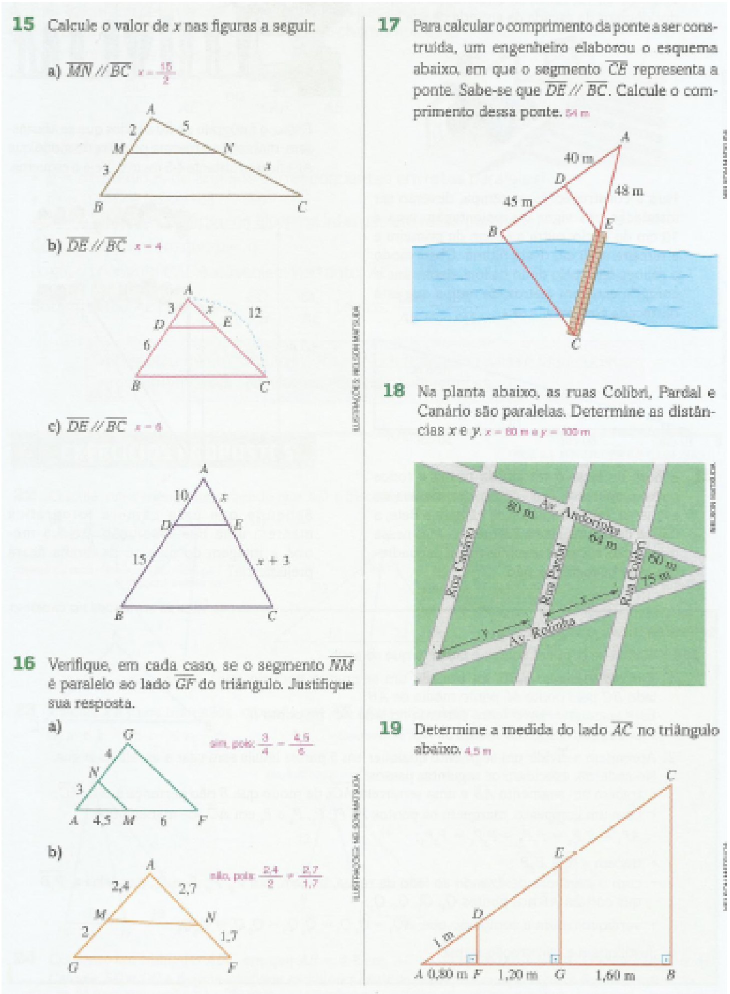
Pelo ponto *A* traçamos uma semirreta oblíqua a $\overline{AB}$ sobre a qual, a partir de *A*, marcamos os pontos *C*, *D* e *E*, de modo que $AC = CD = DE$, e traçamos o segmento $\overline{BE}$. Pelos pontos *C* e *D*, com o auxílio de uma régua e de um esquadro, traçamos paralelas a $\overline{BE}$.

Como $AC = CD = DE$, então $AM = MN = NB$.

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

Nos exercícios ilustrados na Figura 4.7 observamos que, como ocorreu anteriormente, a maioria são de natureza mecânica, sendo que alguns exigem conjecturas pelos alunos. O que pode ser retomado, novamente, com outra ideia de interpretação.

Figura 4.7 – Exercícios



15 Calcule o valor de x nas figuras a seguir.

a) $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$ $x = \frac{15}{2}$

b) $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$ $x = 4$

c) $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$ $x = 6$

16 Verifique, em cada caso, se o segmento $\overline{NM}$ é paralelo ao lado $\overline{GF}$ do triângulo. Justifique sua resposta.

a) sim, pois: $\frac{3}{4} = \frac{4,5}{6}$

b) não, pois: $\frac{2,4}{2} \neq \frac{2,7}{1,7}$

17 Para calcular o comprimento da ponte a ser construída, um engenheiro elaborou o esquema abaixo, em que o segmento $\overline{CE}$ representa a ponte. Sabe-se que $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$. Calcule o comprimento dessa ponte. 54 m

18 Na planta abaixo, as ruas Colibri, Pardal e Canário são paralelas. Determine as distâncias x e y. $x = 80$ m e $y = 100$ m

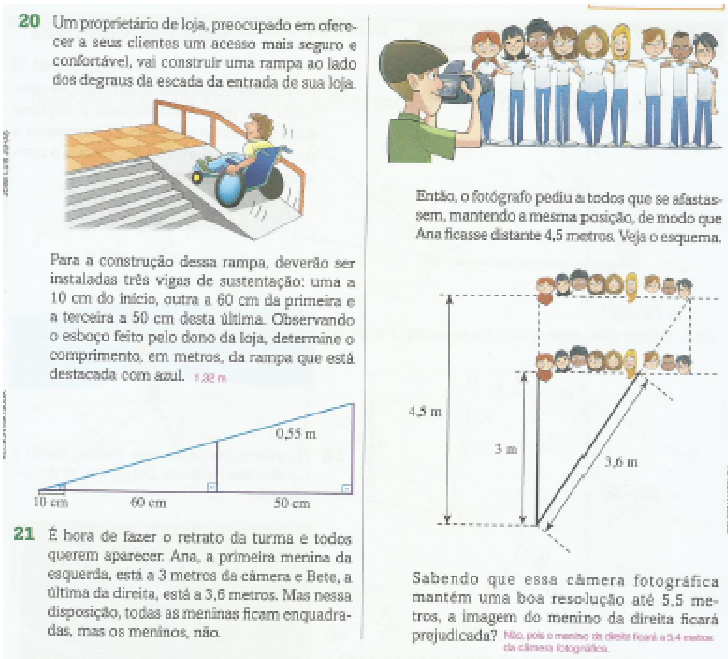
19 Determine a medida do lado $\overline{AC}$ no triângulo abaixo. 4,5 m

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

Os exercícios 20 e 21 (Figura 4.8) poderiam possuir a sugestão de serem reproduzidos em sala de aula.

Figura 4.8 – Atividades que podem ser reproduzidas em sala



20 Um proprietário de loja, preocupado em oferecer a seus clientes um acesso mais seguro e confortável, vai construir uma rampa ao lado dos degraus da escada da entrada de sua loja.

Para a construção dessa rampa, deverão ser instaladas três vigas de sustentação: uma a 10 cm do início, outra a 60 cm da primeira e a terceira a 50 cm desta última. Observando o esboço feito pelo dono da loja, determine o comprimento, em metros, da rampa que está destacada com azul. 1,32 m

21 É hora de fazer o retrato da turma e todos querem aparecer. Ana, a primeira menina da esquerda, está a 3 metros da câmera e Bete, a última da direita, está a 3,6 metros. Mas nessa disposição, todas as meninas ficam enquadradas, mas os meninos, não.

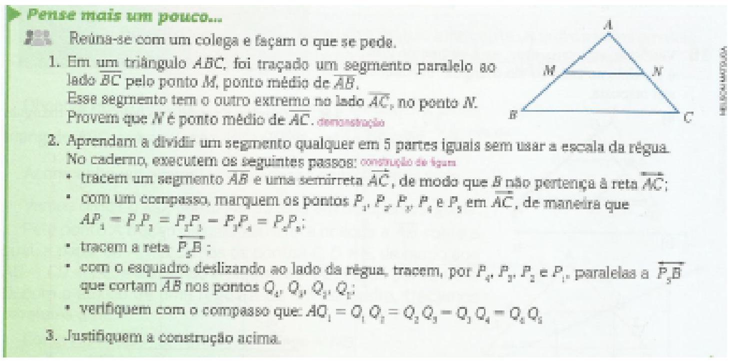
Então, o fotógrafo pediu a todos que se afastassem, mantendo a mesma posição, de modo que Ana ficasse distante 4,5 metros. Veja o esquema.

Sabendo que essa câmera fotográfica mantém uma boa resolução até 5,5 metros, a imagem do menino da direita ficará prejudicada? Não, pois o menino da direita ficará a 5,4 metros da câmera fotográfica.

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

No primeiro exercício do último quadro (Figura 4.9) podemos perceber que o autor sugere uma demonstração para o Teorema da Base Média apenas listando o passo a passo para os alunos, algo que realmente pode instigar o aluno ao aprendizado, visto que ele terá condições de desenvolver o Teorema sem o apoio do professor.

Figura 4.9 – Quadro de reflexão



Pense mais um pouco...

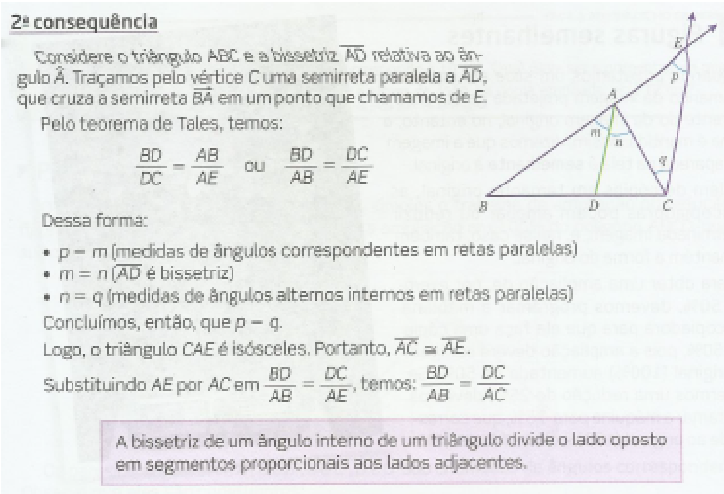
Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

1. Em um triângulo ABC, foi traçado um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$ pelo ponto M, ponto médio de $\overline{AB}$.
   Esse segmento tem o outro extremo no lado $\overline{AC}$, no ponto N.
   Provem que N é ponto médio de $\overline{AC}$. demonstração
2. Aprendam a dividir um segmento qualquer em 5 partes iguais sem usar a escala da régua.
   No caderno, executem os seguintes passos: construção de figura
   - tracem um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta $\overrightarrow{AC}$, de modo que B não pertença à reta $\overleftrightarrow{AC}$;
   - com um compasso, marquem os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 em $\overrightarrow{AC}$, de maneira que $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5$;
   - tracem a reta $\overleftrightarrow{P_5B}$;
   - com o esquadro deslizando ao lado da régua, tracem, por P_4, P_3, P_2 e P_1, paralelas a $\overleftrightarrow{P_5B}$ que cortam $\overline{AB}$ nos pontos Q_4, Q_3, Q_2, Q_1;
   - verifiquem com o compasso que: $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5$
3. Justifiquem a construção acima.

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

A segunda consequência (Figura 4.10) é mais um caso generalizado, sem necessidade de ser explorada em separado.

Figura 4.10 – Consequências do Teorema



2ª consequência

Considere o triângulo ABC e a bissetriz $\overline{AD}$ relativa ao ângulo $\hat{A}$. Traçamos pelo vértice C uma semirreta paralela a $\overline{AD}$, que cruza a semirreta $\overrightarrow{BA}$ em um ponto que chamamos de E.

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$$

Dessa forma:

- $p = m$ (medidas de ângulos correspondentes em retas paralelas)
- $m = n$ ($\overline{AD}$ é bissetriz)
- $n = q$ (medidas de ângulos alternos internos em retas paralelas)

Concluímos, então, que $p = q$.

Logo, o triângulo CAE é isósceles. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{AE}$.

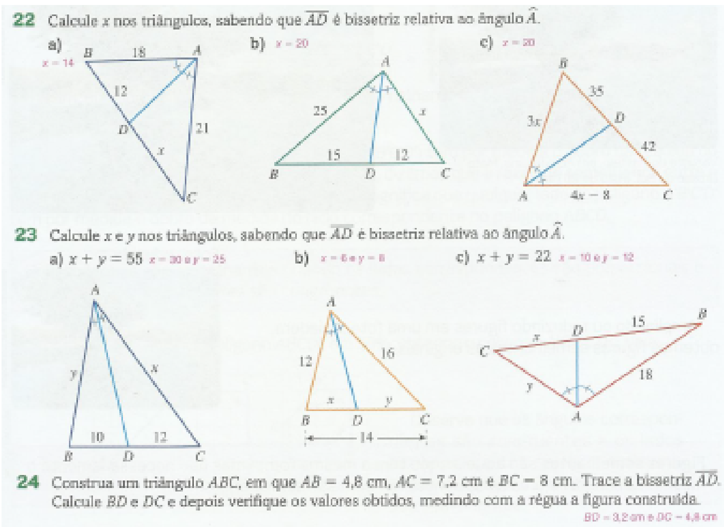
Substituindo AE por AC em $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$, temos: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

A Figura 4.11 ilustra uma lista que contém inúmeros exercícios repetitivos que visam a exploração das fórmulas e um exercício de construção do triângulo que explora bissetriz (conteúdo que está em capítulos anteriores). Observamos que a atividade solicita que o aluno faça medição com régua, o que, matematicamente, não é correto mas já é válido como um exercício de aproximação.

Figura 4.11 – Lista de exercícios



22 Calcule x nos triângulos, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.

a) $x = 14$ b) $x = 20$ c) $x = 20$

23 Calcule x e y nos triângulos, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.

a) $x + y = 55$ $x = 30$ e $y = 25$ b) $x = 6$ e $y = 8$ c) $x + y = 22$ $x = 10$ e $y = 12$

24 Construa um triângulo ABC, em que $AB = 4{,}8$ cm, $AC = 7{,}2$ cm e $BC = 8$ cm. Trace a bissetriz $\overline{AD}$. Calcule BD e DC e depois verifique os valores obtidos, medindo com a régua a figura construída.

$BD = 3{,}2$ cm e $DC = 4{,}8$ cm

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

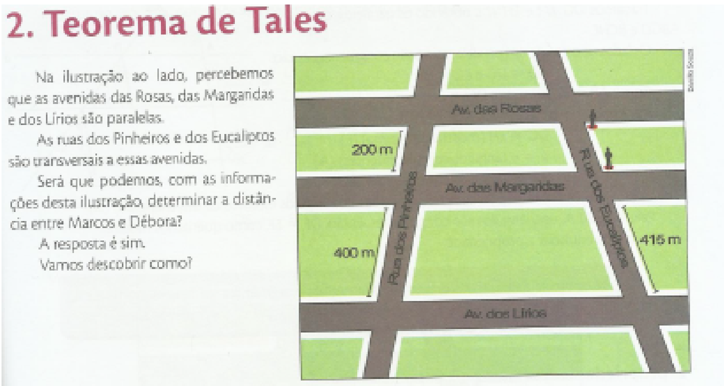
A seção finaliza sem deixar opções em aberto ou uma possível aplicação do que foi estudado em conteúdos futuros ou em outras áreas do conhecimento.

4.4.2 Livro B

O segundo livro analisado foi Andrini e Vasconcelos (2015), escrito por Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos. Álvaro Andrini é licenciado em Matemática, possui pós-graduação em Álgebra Linear e Equações Diferenciais. Foi professor efetivo de Matemática da rede estadual durante trinta anos. A autora Maria José Vasconcellos é licenciada em Matemática, coordenadora de Matemática em escola de rede particular, coautora de coleção de livros de Matemática para o Ensino Médio.

A motivação que os autores trazem para o Teorema de Tales é bem posta, entretanto, já responde a própria pergunta sobre o cálculo da distância entre os personagens Marcos e Débora, como ilustra a Figura 4.12. Observamos que a resposta pronta não permite a reflexão dos alunos.

Figura 4.12 – Motivação para o Teorema de Tales



2. Teorema de Tales

Na ilustração ao lado, percebemos que as avenidas das Rosas, das Margaridas e dos Lírios são paralelas.

As ruas dos Pinheiros e dos Eucaliptos são transversais a essas avenidas.

Será que podemos, com as informações desta ilustração, determinar a distância entre Marcos e Débora?

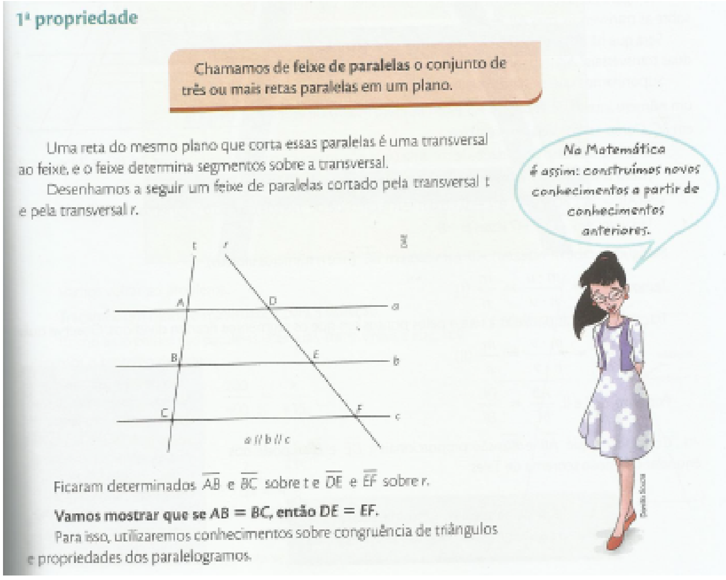
A resposta é sim.

Vamos descobrir como?

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

Na sequência (Figura 4.13), o autor enuncia o Teorema de Tales como propriedade e, logo após, faz a demonstração. Observamos que isso é feito erroneamente, pois é sabido que demonstrações devem ser realizadas para corolários, lemas e teoremas. Propriedades não possuem demonstrações. Notamos ainda que o autor coloca a figura de um personagem, com um balão, que acreditamos ser bem elaborado auxiliando o aluno na compreensão do conteúdo, pois apresenta uma ressalva sobre como se desenvolve a aprendizagem matemática

Figura 4.13 – Divisão em propriedades



1ª propriedade

Chamamos de **feixe de paralelas** o conjunto de três ou mais retas paralelas em um plano.

Uma reta do mesmo plano que corta essas paralelas é uma transversal ao feixe, e o feixe determina segmentos sobre a transversal.

Desenhamos a seguir um feixe de paralelas cortado pela transversal t e pela transversal r.

Ficaram determinados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sobre t e $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ sobre r.

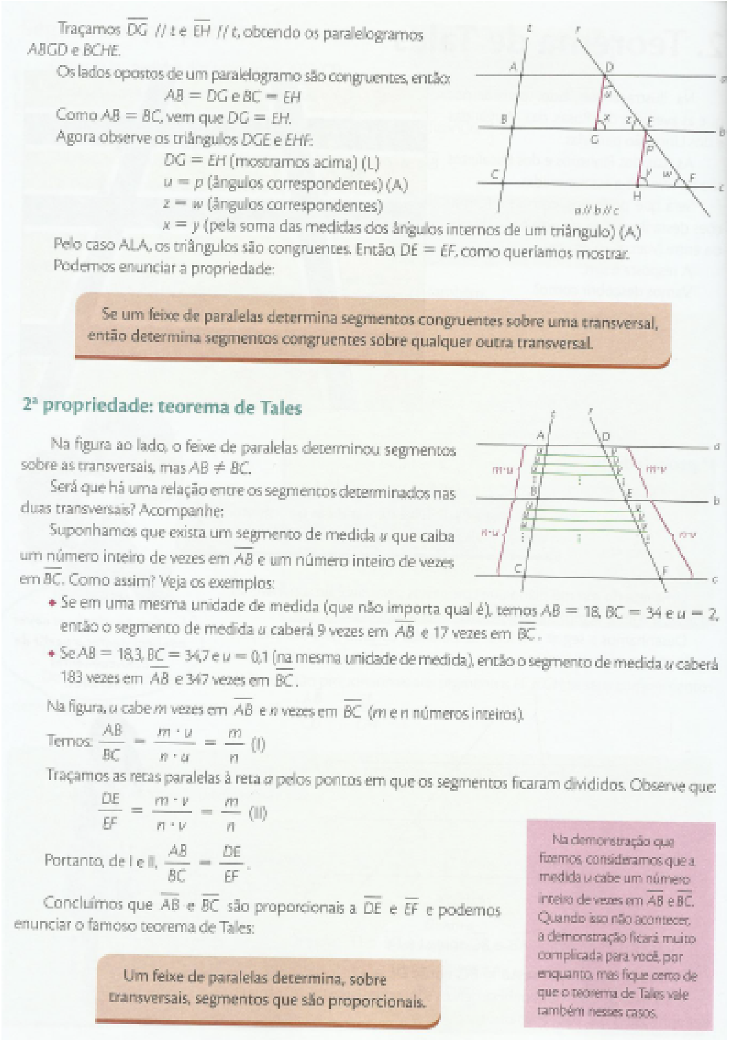
Vamos mostrar que se $AB = BC$, então $DE = EF$.

Para isso, utilizaremos conhecimentos sobre congruência de triângulos e propriedades dos paralelogramos.

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

Os autores retomam o conceito de semelhanças na demonstração do que chamam de primeira propriedade (repetindo o equívoco) e fazem um fechamento generalizando-a. A Figura 4.14 ilustra que os autores tratam o Teorema de Tales, erroneamente, como uma propriedade, e fazem o inverso do proposto anteriormente, primeiro demonstrando, depois, enunciaando (o que não interfere na aprendizagem do conteúdo, mas poderia haver um padrão).

Figura 4.14 – Separação do Teorema em propriedades



Traçamos $\overline{DG}$ // t e $\overline{EH}$ // t, obtendo os paralelogramos $ABGD$ e $BCHE$.

Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, então:

$AB = DG$ e $BC = EH$

Como $AB = BC$, vem que $DG = EH$.

Agora observe os triângulos DGE e EHF:

$DG = EH$ (mostramos acima) (L)

$u = p$ (ângulos correspondentes) (A)

$z = w$ (ângulos correspondentes)

$x = y$ (pela soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo) (A)

Pelo caso ALA, os triângulos são congruentes. Então, $DE = EF$, como queríamos mostrar.

Podemos enunciar a propriedade:

Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

2ª propriedade: teorema de Tales

Na figura ao lado, o feixe de paralelas determinou segmentos sobre as transversais, mas $AB \neq BC$.

Será que há uma relação entre os segmentos determinados nas duas transversais? Acompanhe:

Suponhamos que exista um segmento de medida u que caiba um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e um número inteiro de vezes em $\overline{BC}$. Como assim? Veja os exemplos:

- Se em uma mesma unidade de medida (que não importa qual é), temos $AB = 18$, $BC = 34$ e $u = 2$, então o segmento de medida u caberá 9 vezes em $\overline{AB}$ e 17 vezes em $\overline{BC}$.
- Se $AB = 18{,}3$, $BC = 34{,}7$ e $u = 0{,}1$ (na mesma unidade de medida), então o segmento de medida u caberá 183 vezes em $\overline{AB}$ e 347 vezes em $\overline{BC}$.

Na figura, u cabe m vezes em $\overline{AB}$ e n vezes em $\overline{BC}$ (m e n números inteiros).

Temos: $\frac{AB}{BC} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$ (I)

Traçamos as retas paralelas à reta a pelos pontos em que os segmentos ficaram divididos. Observe que:

$\frac{DE}{EF} = \frac{m \cdot v}{n \cdot v} = \frac{m}{n}$ (II)

Portanto, de I e II, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Concluímos que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são proporcionais a $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ e podemos enunciar o famoso teorema de Tales:

Um feixe de paralelas determina, sobre transversais, segmentos que são proporcionais.

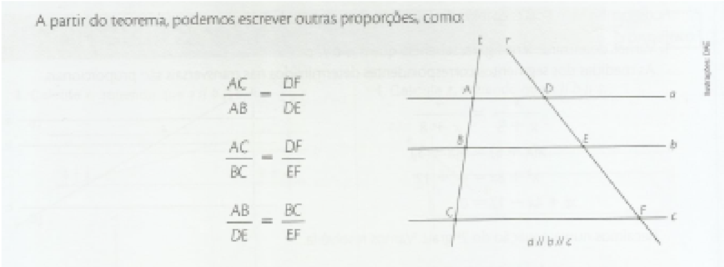
Na demonstração que fizemos, consideramos que a medida u cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Quando isso não acontecer, a demonstração ficará muito complicada para você, por enquanto, mas fique certo de que o teorema de Tales vale também nesses casos.

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

Observamos que o autor não prova a validade do Teorema para os conjuntos dos números racionais e irracionais, porém ressalta que não o faz pois a demonstração é muito complicada para o momento. Acreditamos que tal fato não é verdadeiro, pois os alunos do 9º ano já possuem informações sobre estes conjuntos e poderiam trabalhar o Teorema nesse universo.

A Figura 4.15 generaliza as proporções (talvez uma estratégia para demonstrar que o teorema é valido no triângulo, futuramente).

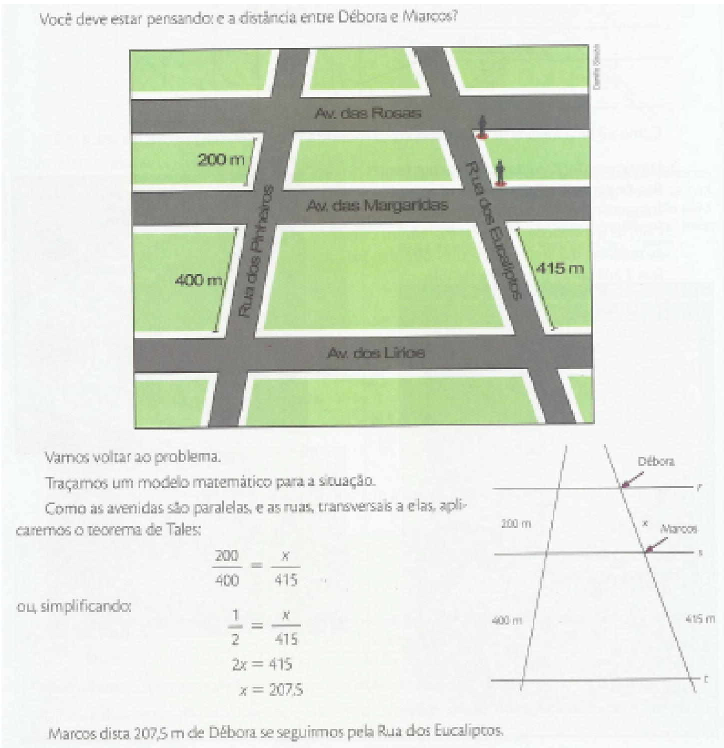
Figura 4.15 – Proporções do Teorema



Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

A Figura 4.16 ilustra a retomada do exercício de motivação, o qual passa a ser resolvido visto que neste momento o aluno possui as ferramentas necessárias para isso.

Figura 4.16 – Retomada da motivação



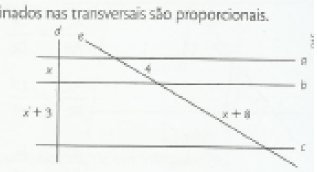
Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

Os autores também apresentam um exemplo direto, como ilustra a Figura 4.17, relacionando o conteúdo de equação quadrática, que neste livro, antecede o tópico que está sendo analisado, algo muito interessante. Além de fazer o aluno retomar o conteúdo anterior, o faz refletir que a matemática não está dividida em blocos.

Figura 4.17 – Aplicação do Teorema

Acompanhe mais dois exemplos de aplicação do teorema de Tales.

1. Vamos determinar x na figura, sabendo que $a \,//\, b \,//\, c$.
As medidas dos segmentos correspondentes determinados nas transversais são proporcionais.



$$\frac{x}{x+3} = \frac{4}{x+8}$$
$$x(x+8) = 4(x+3)$$
$$x^2 + 8x = 4x + 12$$
$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Recaímos numa equação do 2º grau. Vamos resolvê-la.

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

$$x = \frac{-4 \pm 8}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+8}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-4-8}{2} = -6 \end{cases}$$

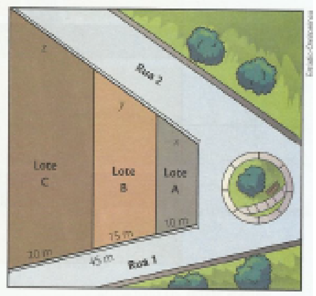
Como x é uma medida de comprimento, só consideraremos a solução positiva, ou seja, $x = 2$.

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

Em outro exemplo, ilustrado na Figura 4.18, separa os lotes da rua, sendo um exercício com pouca força interpretativa mas que se torna válido apenas para não deixa-lo direto.

Figura 4.18 – Outra aplicação do Teorema

2. Um terreno foi dividido em lotes com frentes para a Rua 1 e para a Rua 2, como você vê na representação a seguir. As laterais dos terrenos são paralelas.
Com as informações do desenho, vamos calcular as medidas das frentes dos lotes que dão para a Rua 2 aplicando o teorema de Tales.



$\frac{45}{10} = \frac{54}{x}$	$\frac{45}{15} = \frac{54}{y}$	$\frac{45}{20} = \frac{54}{z}$
$\frac{9}{2} = \frac{54}{x}$	$\frac{3}{1} = \frac{54}{y}$	$\frac{9}{4} = \frac{54}{z}$
$9x = 108$	$3y = 54$	$9z = 216$
$x = 12$	$y = 18$	$z = 24$

Portanto, as medidas das frentes para a Rua 2 são: lote A: 12 m; lote B: 18 m; lote C: 24 m.

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

Os autores apresentam um ótimo quadro reflexivo na Figura 4.19, mostrando outra possível solução e um possível erro cometido por alunos. Acreditamos que alguns alunos até podem se identificar com Mariana e Paulo.

Figura 4.19 – Quadro reflexivo

REFLETINDO

1. Mariana escreveu as proporções necessárias para resolver o problema do exemplo 2 assim:

$$\frac{45}{54} = \frac{10}{x}; \frac{45}{54} = \frac{15}{y}; \frac{45}{54} = \frac{20}{z}$$

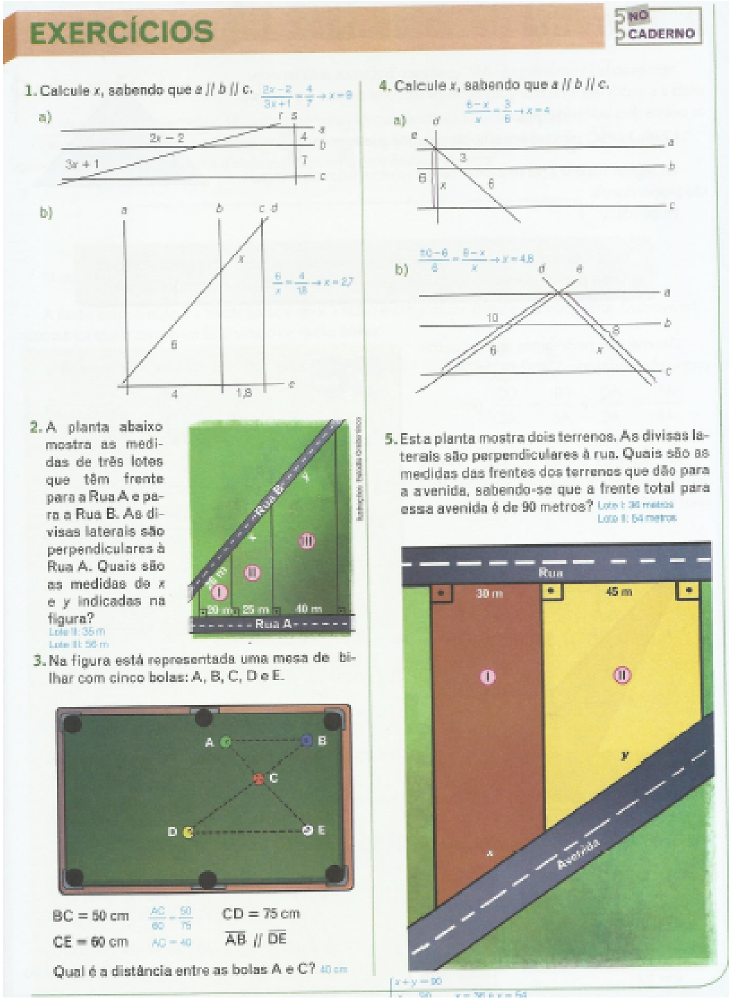
As proporções estão corretas? Ela encontrará os mesmos valores para x, y e z encontrados acima? Sim. Sim.

2. Para determinar x no problema do exemplo 2, Paulo fez: $\frac{x}{45} = \frac{54}{10}$. Ele acertou? Não.

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

Observamos a presença de poucos exercícios mecânicos e alguns com o intuito de incentivar conteúdos futuros, como ilustra a Figura 4.20.

Figura 4.20 – Lista de exercícios



EXERCÍCIOS

NO CADERNO

1. Calcule x, sabendo que $a \parallel b \parallel c$. $\frac{2x-2}{3x+1} = \frac{4}{7} \rightarrow x = 9$

a)

b) $\frac{6}{x} = \frac{4}{1,8} \rightarrow x = 2,7$

2. A planta abaixo mostra as medidas de três lotes que têm frente para a Rua A e para a Rua B. As divisas laterais são perpendiculares à Rua A. Quais são as medidas de x e y indicadas na figura? Lote II: 35 m Lote III: 56 m

3. Na figura está representada uma mesa de bilhar com cinco bolas: A, B, C, D e E.

BC = 50 cm $\frac{AC}{60} = \frac{50}{75}$ CD = 75 cm

CE = 60 cm AC = 40 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

Qual é a distância entre as bolas A e C? 40 cm

4. Calcule x, sabendo que $a \parallel b \parallel c$.

a) $\frac{6-x}{x} = \frac{3}{6} \rightarrow x = 4$

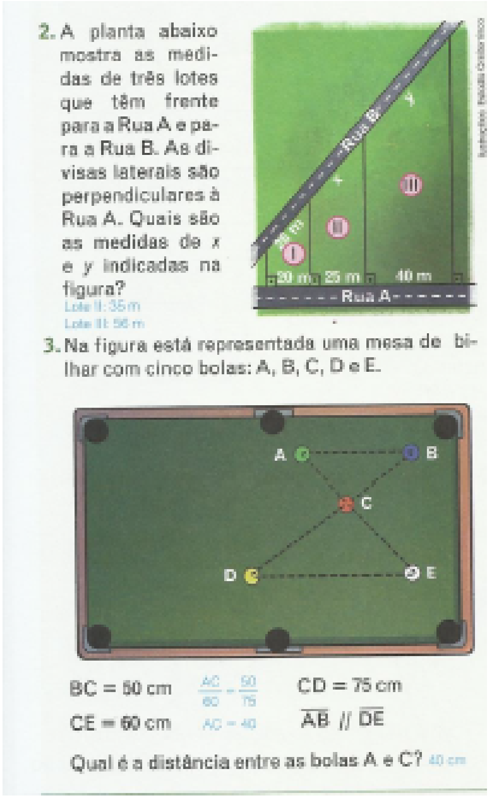
b) $\frac{10-6}{6} = \frac{8-x}{x} \rightarrow x = 4,8$

5. Esta planta mostra dois terrenos. As divisas laterais são perpendiculares à rua. Quais são as medidas das frentes dos terrenos que dão para a avenida, sabendo-se que a frente total para essa avenida é de 90 metros? Lote I: 36 metros Lote II: 54 metros

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

Alguns dos exercícios de aplicação podem ser reproduzidos e modificados pelos alunos em sala de aula, como é o exemplo da mesa de bilhar na Figura 4.21, onde os alunos poderão criar uma mesa com papelão e fazer as medições de possíveis jogadas aplicando o Teorema.

Figura 4.21 – Exercícios que podem ser trabalhados em sala


2. A planta abaixo mostra as medidas de três lotes que têm frente para a Rua A e para a Rua B. As divisas laterais são perpendiculares à Rua A. Quais são as medidas de x e y indicadas na figura?

Lote II: 35 m
Lote III: 56 m

3. Na figura está representada uma mesa de bilhar com cinco bolas: A, B, C, D e E.

BC = 50 cm $\frac{AC}{60} = \frac{50}{75}$ CD = 75 cm

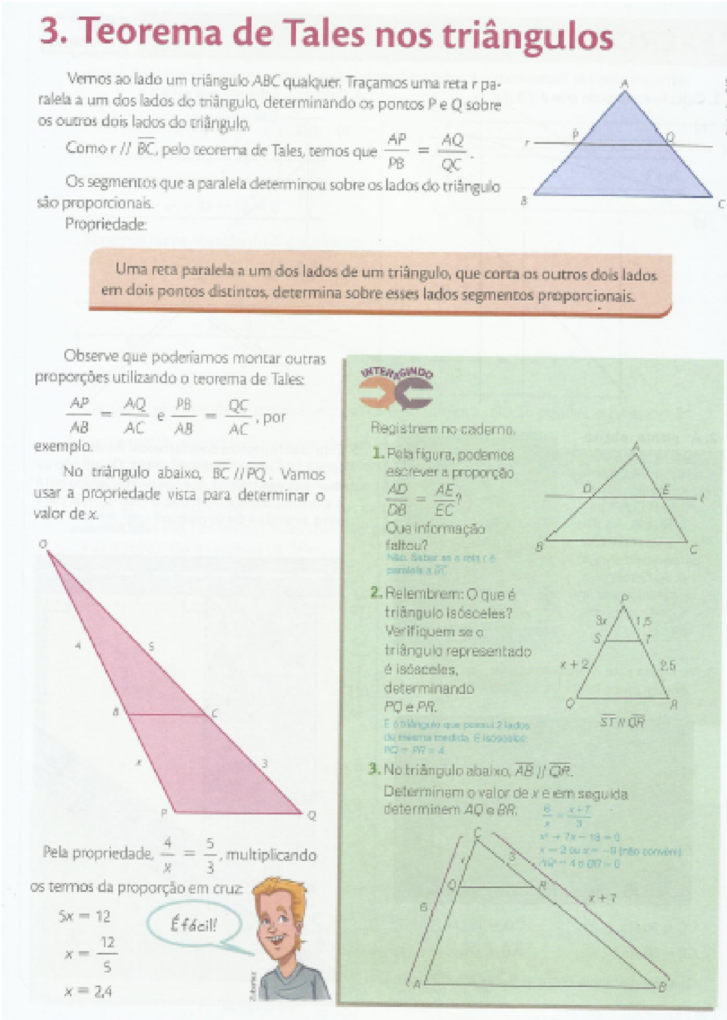
CE = 60 cm AC = 40 $\overline{AB} \,//\, \overline{DE}$

Qual é a distância entre as bolas A e C? 40 cm

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

A Figura 4.22 ilustra uma demonstração do Teorema de Tales para triângulos sem uma motivação ou aplicação. Logo após apresenta um exemplo, novamente sem aplicação. Os exercícios não fazem o aluno refletir sobre a importância do conteúdo, apenas exploram a reprodução de fórmulas.

Figura 4.22 – Aplicação do Teorema nos Triângulos



3. Teorema de Tales nos triângulos

Vemos ao lado um triângulo ABC qualquer. Traçamos uma reta r paralela a um dos lados do triângulo, determinando os pontos P e Q sobre os outros dois lados do triângulo.

Como $r \parallel \overline{BC}$, pelo teorema de Tales, temos que $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.

Os segmentos que a paralela determinou sobre os lados do triângulo são proporcionais.

Propriedade:

Uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, que corta os outros dois lados em dois pontos distintos, determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

Observe que poderíamos montar outras proporções utilizando o teorema de Tales:

$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$ e $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC}$, por exemplo.

No triângulo abaixo, $\overline{BC} \parallel \overline{PQ}$. Vamos usar a propriedade vista para determinar o valor de x.

Pela propriedade, $\frac{4}{x} = \frac{5}{3}$, multiplicando os termos da proporção em cruz:

$5x = 12$

$x = \frac{12}{5}$

$x = 2{,}4$

É fácil!

INTERAGINDO

Registrem no caderno.

1. Pela figura, podemos escrever a proporção $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$? Que informação faltou?
Não. Saber se a reta t é paralela a $\overline{BC}$.

2. Relembrem: O que é triângulo isósceles? Verifiquem se o triângulo representado é isósceles, determinando PQ e PR.
É o triângulo que possui 2 lados de mesma medida. É isósceles: $PQ = PR = 4$.

$\overline{ST} \parallel \overline{QR}$

3. No triângulo abaixo, $\overline{AB} \parallel \overline{QR}$.
Determinem o valor de x e em seguida determinem AQ e BR.
$\frac{6}{x} = \frac{x+7}{3}$

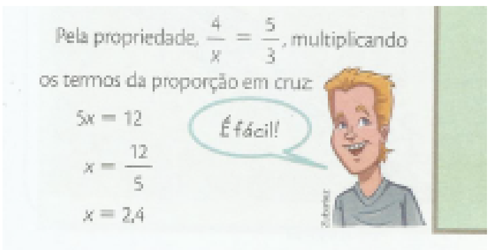
$x^2 + 7x - 18 = 0$

$x = 2$ ou $x = -9$ (não convém)

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

Observamos que a Figura 4.23 ilustra um balão com um comentário "É fácil?", o que segundo Dalcin (2002), é uma imagem ornamental.

Figura 4.23 – Balão ornamental



Pela propriedade, $\frac{4}{x} = \frac{5}{3}$, multiplicando os termos da proporção em cruz:

$5x = 12$

$x = \frac{12}{5}$

$x = 2{,}4$

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELOS, 2015)

Conforme Dalcin (2002) é uma ilustração que não apresenta vínculo algum, seja com a simbologia matemática ou com o texto escrito, exercendo apenas a função de "quebra de ritmo de leitura", sem influência na aprendizagem do conteúdo matemático em questão, o que ainda pode deixar o aluno desmotivado, caso não consiga realizar a atividade.

O Quadro 4.1 é um quadro comparativo sobre características presentes (ou ausentes) nos dois livros analisados. Esse quadro foi construído no intuito de esclarecer os aspectos positivos e negativos que cada um dos livros possui.

Quadro 4.1 – Quadro comparativo dos livros A e B

Questões	Livro 1	Livro 2
Exercício de motivação		X
Demonstração do Teorema para todos os casos	X	X
Exercícios interpretativos	X	X
Exercícios que visam atividades concretas		
Conceitos matemáticos equivocados		X
Atividades resolvidas	X	X
Retomada de conteúdos anteriores		X
De acordo com BNCC	X	X
De acordo com PCN		

Fonte: Elaborado pelo autor.

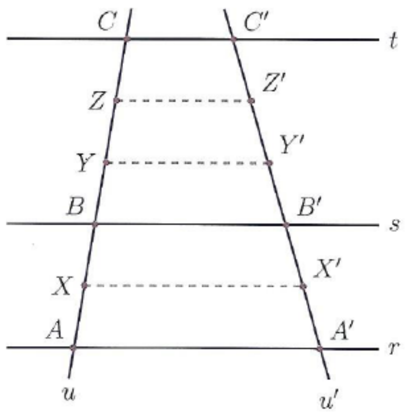
Com isso, a escolha que melhor se adequa aos alunos é o Livro B, pois, embora ainda hajam algumas falhas e equívocos na demonstração, alguns exercícios e atividades eram mais instigantes. Com trabalho e criatividade do professor, pensamos que tais atividades podem se tornar exercícios práticos, fazendo com que os alunos tomem gosto pelo que estão aprendendo. Acreditamos que o excesso de exercícios mecânicos do Livro A é a sua principal falha. Observamos que o potencial de ter mais atividades práticas a fixação de fórmulas é o principal intuito deste livro, somado a isso, há também pequenos deslizes com o desenvolvimento do conteúdo.

4.5 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Conforme o que foi estudado sobre este assunto na disciplina de Geometria Plana do PROFMAT - UFSM desenvolvemos essa seção, no intuito de se ter uma comparação entre o que os livros abordam e o que deveriam abordar. Para isso utilizaremos a demonstração feita por Neto (2013).

Seja a situação ilustrada na Figura 4.24: temos, no plano, retas paralelas r, s e t. Traçamos, em seguida retas u e u', a primeira intersectando r, s e t respectivamente nos pontos A, B e C e a segunda, intersectando r, s e t respectivamente em A', B' e C'.

Figura 4.24 – Modelo inicial do Teorema de Tales



Fonte: (NETO, 2013)

Caso tenhamos $\overline{AB} = \overline{BC}$ então, pelo Teorema da Base Média, teremos que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$, assim:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1$$

Vamos considerar, agora, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3}$ para verificar que o segmento não necessariamente precisa ser dividido no ponto médio, então, vamos dividir os segmentos $\overline{AB}$ em duas partes iguas e $\overline{BC}$ em três partes iguais, tendo X, Y e Z em u tais que $\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}$. Traçamos então, por X, Y e Z as paralelas à retas r, s e t as quais intersectam u' em X', Y' e Z', daí teremos mais aplicações do Teorema da Base Média de um trapézio, com $\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}$, logo, teremos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}$$

Agora, vamos considerar isto válido para qualquer partição racional, com $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$, daí dividindo $\overline{AB}$ em m partes iguas e $\overline{BC}$ em n partes iguais e conseguimos garantir que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$, já que, como visto antes:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$$

Será que a relação continua válida para partições irracionais? A resposta é sim, para entender o porquê que isso ocorre, vamos utilizar o seguinte fato: dados $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Q}$ tal que $x < a_n < x + \frac{1}{n}$.

Suponha que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x,$$

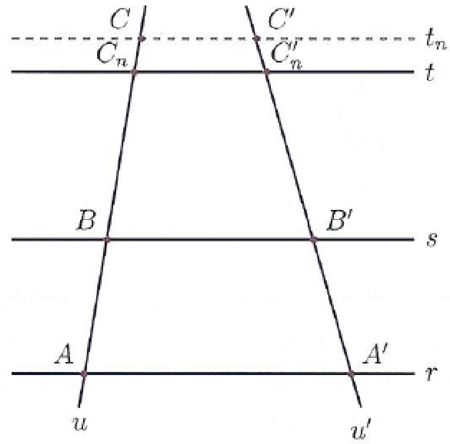
com x irracional e agora tome uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de racionais positivos tal que,

$$x < a_n < x + \frac{1}{n} \forall \in \mathbb{N}.$$

Marque o ponto $C_n \in u$ conforme a Figura 4.25 tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n$$

Figura 4.25 – Razão irracional



Fonte: (NETO, 2013)

Assim, obtemos que

$$x < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < x + \frac{1}{n}$$

ou ainda,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}.$$

Com isso podemos notar que quanto mais o valor de $n \in \mathbb{N}$ aumenta, o valor de C_n fica cada vez mais próximo de C e, já que, $t_n || t$, temos que C'_n fica cada vez mais próximo de C' de modo que a razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}}$ se aproximará da razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ podemos escrever isto da seguinte forma:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \to \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow n \to \infty.$$

Por outro lado podemos concluir através da equação citada anteriormente que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \to \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow n \to \infty.$$

Agora podemos utilizar o fato que uma sequência de números reais não pode se aproximar simultaneamente de dois valores reais distintos quando n tende ao infinito somos forçados a concluir que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

A discussão acima nos prova um dos grandes resultados da Geometria Eucliana Plana, conhecido como Teorema de Tales, o qual podemos enunciar da seguinte forma:

Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos os pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$ de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

4.6 PROPOSTA ALTERNATIVA

Pretendemos iniciar a proposta alternativa apresentando e demonstrando o Teorema de Tales, que possui o seguinte enunciado: "Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos os pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$ de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então

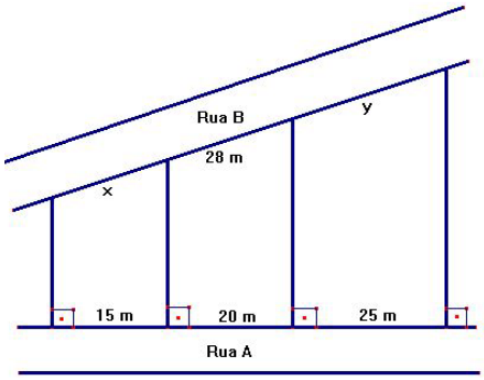
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}\text{''},$$

Será utilizada a demonstração apresentada na secção anterior baseada em Neto (2013), visto o autor não separa em casos (como ocorre nos livros didáticos analisados) e dessa forma o teorema é válido para qualquer tipo de partição.

Na sequência serão propostos três conjuntos de atividades. O primeiro conjunto, que denominaremos de atividade 1, possui como objetivo verificar a aplicabilidade do Teorema em exercícios.

- **ATIVIDADE 1:**
- Exercício A: A Figura 4.26 indica três lotes de terreno com frente para a rua A e para rua B. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua A, medem, respectivamente, $15m$, $20m$ e $25m$. A frente do lote 2 para a rua B mede $28m$. Qual é a medida da frente para a rua B dos lotes 1 e 3?

Figura 4.26 – Ilustração da situação



Fonte: O autor

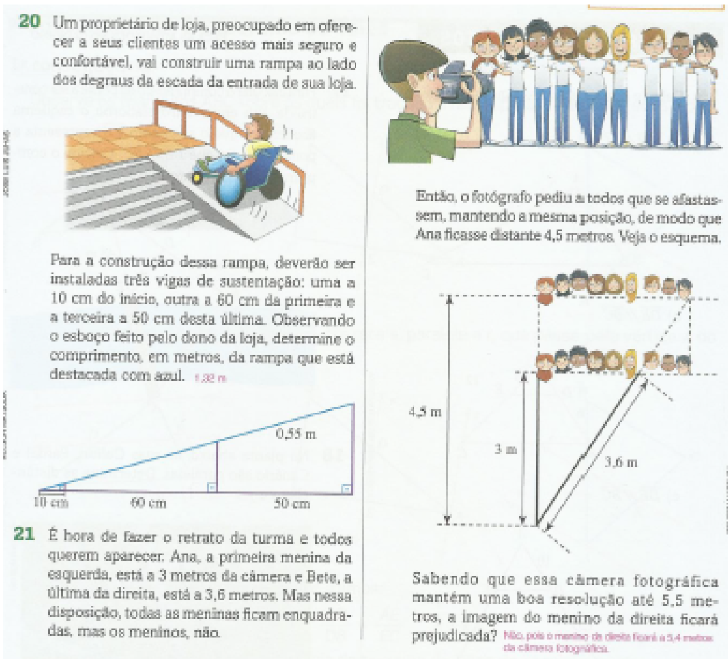
- Exercício B: Duas avenidas que partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas tem $80m$ e $90m$ de comprimento, respectivamente. Na segunda avenida, o primeiro dos quarteirões determinados mede $60m$. Qual o comprimento do outro quarteirão?

Já o segundo conjunto de atividades, tem como objetivo verificar possíveis aplicações do teorema. Nesse item, serão propostos dois exercícios que foram adaptados dos livros analisados(Figura 4.27), o diferencial é que a aplicação também será desenvolvida pelos alunos em sala de aula.

- **ATIVIDADE 2:**

- Exercício A:

Figura 4.27 – Aplicações



20 Um proprietário de loja, preocupado em oferecer a seus clientes um acesso mais seguro e confortável, vai construir uma rampa ao lado dos degraus da escada da entrada de sua loja.

Para a construção dessa rampa, deverão ser instaladas três vigas de sustentação: uma a 10 cm do início, outra a 60 cm da primeira e a terceira a 50 cm desta última. Observando o esboço feito pelo dono da loja, determine o comprimento, em metros, da rampa que está destacada com azul. 1,32 m

21 É hora de fazer o retrato da turma e todos querem aparecer. Ana, a primeira menina da esquerda, está a 3 metros da câmera e Bete, a última da direita, está a 3,6 metros. Mas nessa disposição, todas as meninas ficam enquadradas, mas os meninos, não.

Então, o fotógrafo pediu a todos que se afastassem, mantendo a mesma posição, de modo que Ana ficasse distante 4,5 metros. Veja o esquema.

Sabendo que essa câmera fotográfica mantém uma boa resolução até 5,5 metros, a imagem do menino da direita ficará prejudicada? Não, pois o menino da direita ficará a 5,4 metros da câmera fotográfica.

Fonte: O autor

Como comentado anteriormente, uma horta, ou uma maquete, poderiam ser situações aplicáveis para os aluno. O estudo de Anamorfismos Oblíquos também aborda aplicações do Teorema de Tales, e pode ser estudado e produzido por alunos no ambiente escolar. Dessa forma, o terceiro conjunto de atividades, tem como objetivo propor a construção de anamorfismos e a verificação da aplicabilidade do teorema.

- **Atividade 3:**

- Exercício A:

  Foi proposto para os alunos o trabalho sobre criação de figuras anamórficas. Em um primeiro momento, conceituamos anamorfismos conforme realizado na subseção 3. Em um segundo momento, foi apresentado o exemplo com a placa PARE (Figura 2.7) como motivação para a aplicação do Teorema de Tales.

  Nesse sentido, assim como o que foi exposto na pesquisa do conhecimento, questionamos aos alunos a motivação para as letras, setas e símbolos da palavra PARE na Figura 2.7 estarem desproporcionais e alongados verticalmente. As respostas foram discutidas e o Manual Brasileiro de Sinalização de Trânsito foi citado, assim como o Quadro 2.1 foi apresentado.

  Na sequência, o seguinte exemplo foi discutido com os alunos:

- Exercício B:

Considere um motorista dirigindo seu veículo em via rural, onde a velocidade permitida seja superior a $80km/h$. Para esse caso, segundo a regulamentação de trânsito, as letras devem ter altura de $4m$. Supondo que nesse modelo de carro os olhos do motorista ficam a uma altura de $1,6m$ em relação ao solo, determine a distância que o motorista enxerga a placa sem deformações.

- Exercício C: Essa atividade teve como objetivo, apresentar aos alunos, exemplos de mensagens deformadas, como ilustra a Figura 4.28 e sua relação com o Teorema de Tales. Verifique alguma possibilidade de leitura das palavras a seguir:

Figura 4.28 – Anamorfismo no computador

Fonte: O autor

Em um terceiro momento, foi solicitado aos alunos que criassem suas palavras ou frases no papel da mesma forma que os exemplos mostrados pelo professor. A atividade foi adaptada de Iavorski (2014).

- Exercício D: Esta atividade propõe a deformação de mensagens de forma similar com a que é realizado nas sinalizações de trânsito. O objetivo da atividade é que sejam criadas mensagens quaisquer. Para aumentar a deformação das mensagens construa uma sobreposta a outra, sendo uma no sentido vertical e a outra no sentido horizontal como no exemplo da Figura 4.28 .

5 RELATO DA APLICAÇÃO

Conforme descrito anteriormente, a aplicação iniciou com o enunciado e demonstração do teorema e as atividades 1 e 2. Na sequência, foi realizada uma explicação sobre anamorfismo, tendo como base a apresentação dos exemplos citados na subseção 3. Acreditamos que a aplicação dessas atividades não trouxeram nada de inovador ou diferente do habitual, dessa forma decidimos suprimí-las desse relato.

A ideia inicial era desenvolver anamorfismos como os ilustrados na Figura 5.1, entretanto o tempo e os recursos impossibilitaram a atividade.

Figura 5.1 – Exemplos de Anamorfismos

Fonte: (Galindo, Ana, 2016)

Após apresentar o exercício D da Atividade 3, solicitamos aos alunos que formassem grupos de 3 a 5 componentes. O desenvolvimento da atividade foi realizada em sala de aula com auxílio do professor.

Os alunos utilizaram papel quadriculado para desenvolver as criações. Por meio de alguns cálculos, aproximados por valores encontrados em medições com réguas, os próprios educandos concluíram que uma boa aproximação para as letras seria de 2 quadros de largura e 25 quadros de altura.

Ao olhar com certa angulação, o aluno poderia ler sem problemas o que estaria escrito apenas segurando o papel com a mão. Assim, com auxílio de papel quadriculado, os alunos criaram suas frases escrevendo gírias próprias, sentimentos e outras palavras, utilizando a técnica aprendida.

A Figura 5.2 ilustra um momento onde os alunos estavam iniciando a atividade, decidindo quais as palavras que seriam escritas.

Figura 5.2 – Início da atividade

Fonte: Dados da Pesquisa

Logo após, começaram as medições para se decidir o tamanho das letras, como ilustra a Figura 5.3.

Figura 5.3 – Início da confecção das palavras

Fonte: Dados da Pesquisa

A Figura 5.4 ilustra a etapa do rascunho. Após realizá-lo, os alunos construíram as mensagens no papel quadriculado.

Figura 5.4 – Passando a limpo as palavras

Fonte: Dados da Pesquisa

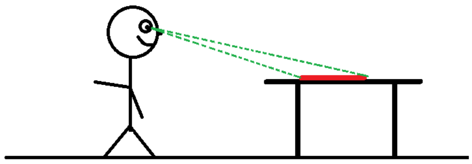
A Figura 5.5 ilustra o momento em que o trabalho finda. Percebemos que os alunos estão satisfeitos com o resultado.

Figura 5.5 – Conclusão da atividade

Fonte: Dados da Pesquisa

Com o objetivo de identificar qual a "mensagem"construída pelos alunos e decifrar a palavra escondida, a técnica utilizada foi tirar uma fotografia utilizando o celular. Ao tirar a foto, foi tomado o cuidado de formar um ângulo obtuso com a folha, como se estivesse olhando a folha perto da linha dos olhos, conforme ilustra a Figura (5.6).

Figura 5.6 – Ilustração do ângulo de visão

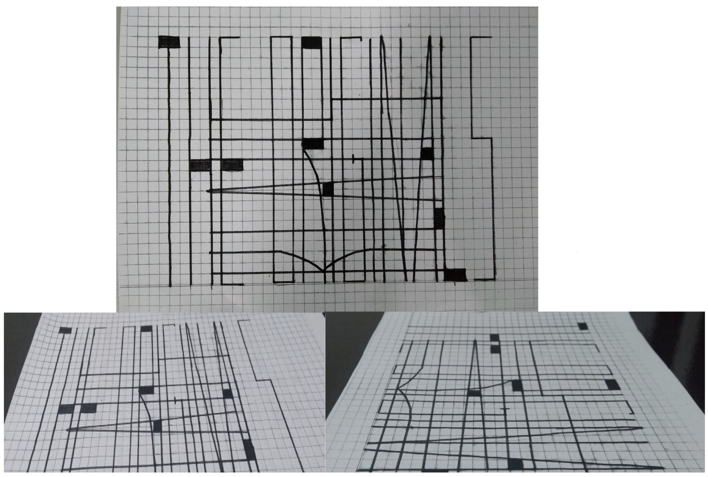


Fonte: Dados da Pesquisa

No que segue, apresentaremos o resultado final de cada grupo.

A Figura (5.7) ilustra o trabalho do Grupo A, que escreveu a palavra "The Originals"na horizontal e "Klaus"na vertical.

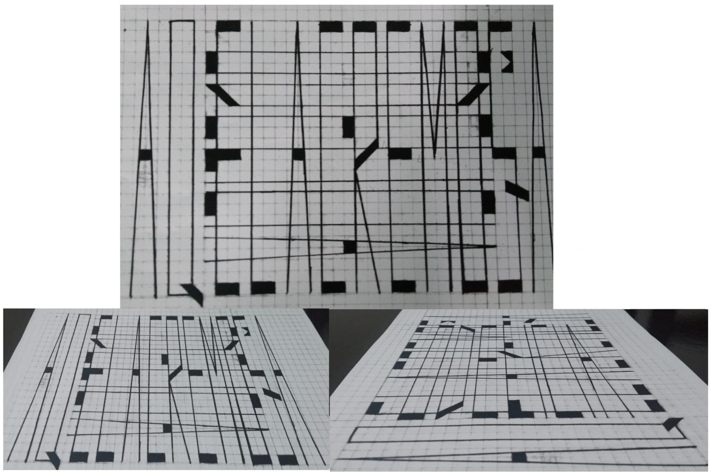
Figura 5.7 – The Originals (horizontal), Klaus (vertical)



Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo B optou pelas expressões: "Aquela cremosa"e "Ô delícia", conforme ilustra a Figura (5.8). Observamos que as expressões são muito informais e fazem parte do dia a dia dos alunos.

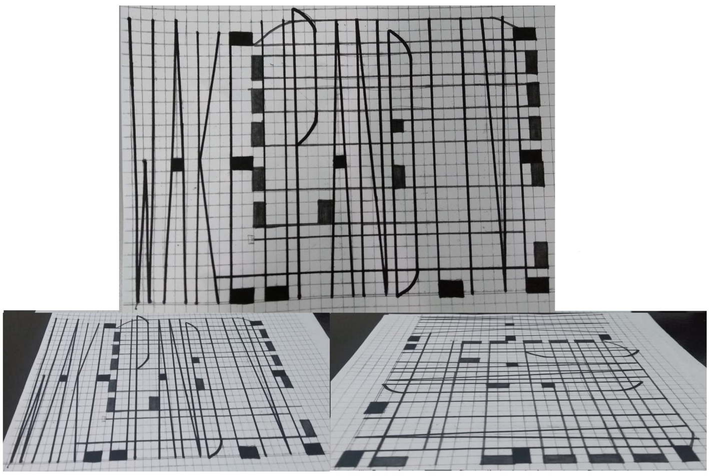
Figura 5.8 – Aquela cremosa (horizontal), Ô delícia (vertical)



Fonte: Dados da Pesquisa

A Figura (5.9) ilustra o trabalho do Grupo C, que escreveu "Wake up and live"no sentido horizontal e "Life good"no sentido vertical.

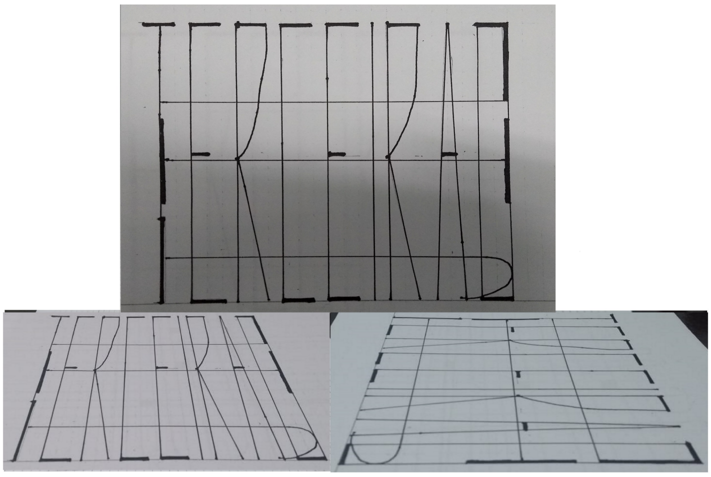
Figura 5.9 – Wake up and live (horizontal), Life good (vertical)



Fonte: Dados da Pesquisa

As expressões escolhidas pelo grupo D tinham uma diferença significativa no número de letras. A Figura (5.10) ilustra o trabalho deste grupo, que escolheu as expressões "Terceirão"no sentido horizontal e "JIL"no sentido vertical. Observamos que JIL é o apelido carinhoso dado a escola onde as atividades foram desenvolvidas.

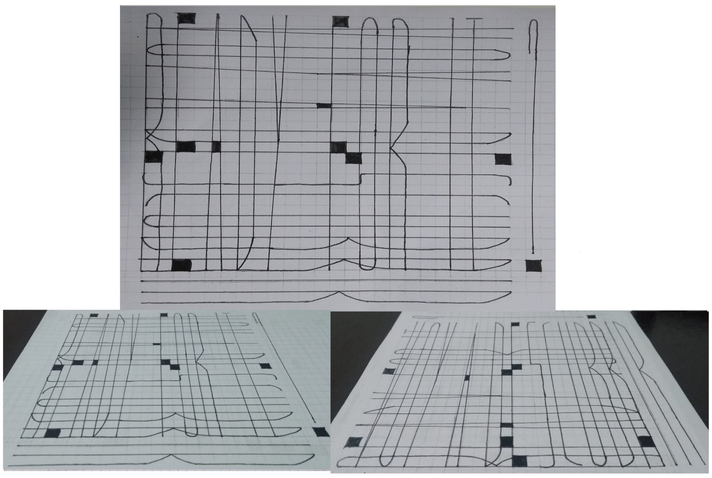
Figura 5.10 – Terceirão (horizontal), JIL (vertical)



Fonte: Dados da Pesquisa

A Figura (5.11) ilustra o trabalho do Grupo E, que escolheu as expressões "Ready for it?"e "Voy a descubrir".

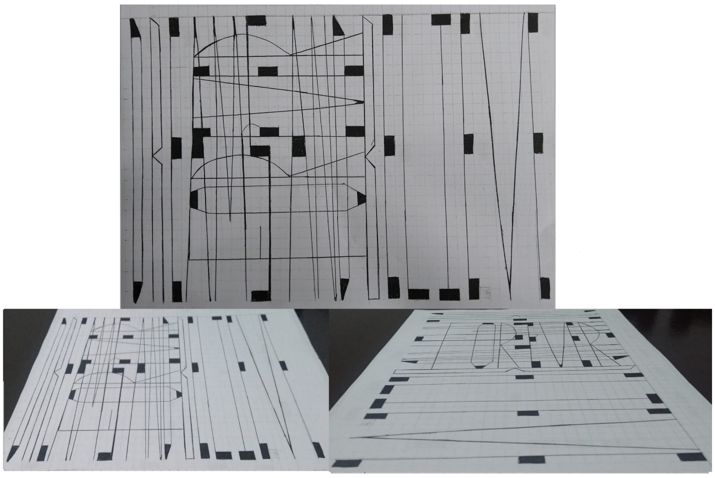
Figura 5.11 – Ready for it? (horizontal), Voy a descubrir (vertical)



Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo F decidiu construir as palavras "Dreams and believe"no sentido horizontal e "forever"no sentido vertical (Figura 5.12).

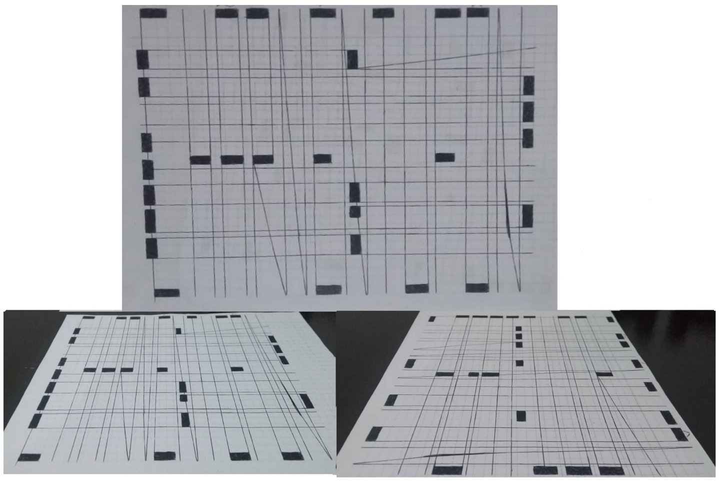
Figura 5.12 – Dreams and believe (horizontal), forever (vertical)



Fonte: Dados da Pesquisa

A Figura (5.13) ilustra o trabalho do Grupo G, que utilizou gírias de seu cotidiano ("Charnentufon"e "Agatiuor").

Figura 5.13 – Charnentufon (horizontal), Agatiuor (vertical)



Fonte: Dados da Pesquisa

Após a atividade, foi questionado aos alunos sobre a validade da mesma, com o objetivo de saber se existiu significado utilizar a construção das figuras na compreensão do Teorema de Tales. Muitos alunos gostaram da atividade, alguns disseram nunca terem estudado o teorema no ensino fundamental, ou não lembravam, mas que a aplicação da atividade foi muito relevante para a compreensão do conteúdo.

Alguns alunos falaram que gostariam de mais atividades como a que foi proposta, principalmente em outros conteúdos de matemática. Entretanto, houve alunos que não gostaram e argumentaram que não se estava trabalhando muito no caderno. Acreditamos que os anamorfismos e a construção dos mesmo, seja apenas algo para impulsionar o pensamento crítico do aluno, de forma que ele perceba à sua volta outros pontos onde o Teorema de Tales possa ser utilizado, não necessitando que sejam feitos cálculos, mas que seja notada a aplicabilidade do mesmo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por muitos séculos, a Geometria Euclidiana Plana já é estudada e abordada. Atualmente, percebemos que tanto no Ensino Básico como no Ensino Superior, inúmeros campos deste conteúdo não são desenvolvidos. Citamos, por exemplo a Geometria Fractal, que assim como o Teorema abordado, possui inúmeras aplicações. O Teorema de Tales é um assunto que na maioria das vezes, é explorado. Porém, pela análise realizada nos livros didáticos e pelas experiências obtidas, ele não é trabalhado de uma forma que gere interesse aos alunos.

Após a análise dos livros, podemos perceber o quanto o Teorema de Tales é tratado apenas como aplicação de fórmulas matemáticas, sem muito estímulo a fazer os alunos serem críticos a situações em que o teorema possa estar envolvido, mesmo sem a necessidade direta da realização de cálculos. Além disto, foi notável a falha nos conceitos matemáticos dos livros.

Acreditamos que a proposta abordando os anamorfismos foi uma aplicação consistente para o teorema. Percebemos que os alunos puderam construir as expressões e palavras por eles escolhidas, entendendo como o teorema era aplicado. Pretendemos em uma próxima oportunidade, criar figuras anamórficas de três dimensões, entendendo a aplicação do teorema e avançando um pouco mais as habilidades artísticas dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, N. a. D. de. **Uma Análise da apresentação do Teorema de Tales em livros didáticos do nono ano do Ensino Fundamental**. 2013. 57 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2013.

ANDRINI, Á.; VASCONCELOS, M. J. **Praticando Matemática, 9**. [S.l.]: Editora do Brasil, 2015.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini, 9**. [S.l.]: Moderna, 2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ministério da Educação.Secretaria da Educação Básica, 1997. Acesso em: 16 nov 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>.

____. **Base nacional comum curricular.** Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica, 2016. Acesso em: 16 nov 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc>.

COELHO, M. N.; LIMA, J. P. d.; VIEIRA, S. M. Uma transformação matemática para a produção de imagens anamórficas cônicas. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, n. 95, 2018.

CONTRAN. Manual brasileiro de sinalização de trânsito. **Conselho Nacional de Trânsito,Brasília**, 2007.

DALCIN, A. Um olhar sobre o paradidático de matemática. **Campinas: UNICAMP**, 2002.

FERREIRA, L. d. S. **Como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano**. 2017. 48 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2017.

FLORES, M.; ARAÚJO, A.; FIGUEIREDO, M. Anamorfoses e outras tecnologias imersivas no contexto da educação artística. **Colóquio Desafios Curriculares e Pedagógicos na Formação de Professores**, Universidade do Minho. Instituto de Educação. Centro de Investigação em Estudos da Criança, p. 243–250, 2017.

Galindo, Ana. **Itinerarios matematicos V trampantojos.** Blog Mat Tic y Arte, 2016. Acesso em: 16 jul 2018. Disponível em: <http://proyectomatematicasyarte.blogspot.com/2016/02/itinerarios-matematicos-v-trampantojos.html>.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. [S.l.]: 6. ed. Ediitora Atlas SA, 2008.

IAVORSKI, C. **Ensinando conteúdos matemáticos usando anamorfose**. 2014. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Curitiba, 2014.

MARTINS, E. N. **UMA ABORDAGEM CONSTRUTIVISTA DO TEOREMA DE TALES SOB A PESRPECTIVA DA TEORIA DE VAN HIELE**. 2014. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

Mota, Leticia. **Anamorfose a perspectiva da mentira**. Blog Cutedrop, 2011. Acesso em: 16 jul 2018. Disponível em: <http://www.cutedrop.com.br/2011/09/anamorfose-a-perspectiva-de-mentira/>.

National Gallery. **The National Gallery website**. London, 2018. Acesso em: 24 jul 2018. Disponível em: <https://www.nationalgallery.org.uk/paintings/hans-holbein-the-younger-the-ambassadors>.

NETO, A. C. M. Geometria. **Rio de Janeiro: SBM**, 2013.

PEREIRA, A. R. **TEOREMA DE TALES: ANALISE DE SUA APRESENTAÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS E PROPOSIÇÃO DE ATIVIDADES**. 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Curitiba, 2014.

PRIBERAM, D. Dicionário priberam da língua portuguesa. **Assessed on October 15th**, 2010.

REIS, P. F. S. d. **O TEOREMA DE TALES POR MEIO DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS**. 2014. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — niversidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes, 2014.

SANTOS, C. d. Diretrizes para sinalização de trânsito anamórfica: uma proposta no redesenho da sinalização horizontal. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2018.

SAVIANI, B. Mecanismos de linguagem nas artes durante a contrarreforma. **Pós. Revista do Programa de Pós-Graduação em Arquitetura e Urbanismo da FAUUSP**, v. 22, n. 38, p. 192–209, 2015.

SEMMER, S. **Ensino de geometrias não-euclidianas usando arte e matemática**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2013.

SILVA, V. c. d. N. **Teorema de Tales e suas Aplicações**. 2015. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — niversidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

UFRGS. **Análise e Produção de Material didático**. PPGEMat, 2018. Acesso em: 16 jul 2018. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/ppgemat/disciplinas/planos-de-ensino/disciplinas-2018-1/analise-e-producao-de-material-didatico/view>.