UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MARIA APARECIDA CEZÁRIO DE MIRANDA OLIVEIRA

O estudo da cônica elipse com atividades extraclasse

Três Lagoas - MS

2018

MARIA APARECIDA CEZÁRIO DE MIRANDA OLIVEIRA

O estudo da cônica elipse com atividades extraclasse

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Eugenia Brunilda Opazo Uribe

Três Lagoas – MS

2018

MARIA APARECIDA CEZÁRIO DE MIRANDA OLIVEIRA

O ESTUDO DA CÔNICA ELIPSE COM ATIVIDADES EXTRACLASSE

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Comissão Julgadora:

E. Opazo

Profa. Dra. Eugenia Brunilda Opazo Uribe
UFMS/CTPL
Presidente da Banca

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza
UFMS/CPTL

Profa. Dra. Nair Rodrigues
IFMS Três Lagoas

Dedico esse trabalho a Deus, por ter me dado muita força. Ao meu filho, João Guilherme e ao meu esposo, Cleber.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dado força e coragem para enfrentar todos os obstáculos.

Aos meus pais, pelo apoio e carinho em todos os momentos de minha vida.

Ao meu esposo, Cleber, pelo incentivo e apoio.

A minha amiga e companheira de estudo, Giovana Marques dos Reis, que dividiu comigo todas as dificuldades e alegrias.

A amiga, Ângela, por todo o apoio e ajuda e aos companheiros de viagem, Panda e Zonta.

A todos os amigos da escola E. E. Profa. Yone Dias de Aguiar, que sempre deram apoio e incentivo.

A orientadora, Profa. Dra. Eugenia Brunilda Opazo Uribe, pela orientação e apoio.

Por fim, a todos os professores, pelo incentivo.

RESUMO

O estudo das cônicas hoje, no Ensino Médio, apresenta um problema que é a falta do tempo para o aprofundamento do assunto. Na tentativa de amenizar essa situação, apresenta-se nesse trabalho, atividades extraclasse para o estudo da cônica elipse que foram propostas a alunos do 3º Ano do Ensino Médio numa escola da rede estadual de ensino do estado de São Paulo.

Este trabalho é composto por uma breve história das cônicas, um estudo da cônica elipse, uma análise de como o estudo da elipse está sendo feito no Ensino Médio e do relato das atividades extraclasse sobre a elipse que foram apresentadas aos alunos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Cônicas; Elipse; Atividades Extraclasse.

ABSTRACT

The study of conics today, in High School, faces a problem that is the lack of time for the deepening of the subject. In an attempt to soften this situation, we present in this work, extraclass activities for the study of the conical ellipse that were proposed to students of the 3rd Year of High School in a school of the state education network of the state of São Paulo.

This work consists of a brief history of the conics, a study of the conical ellipse, an analysis of how ellipse study is being done in high school and the report of extraclass activities on the ellipse that were presented to the students.

Keywords: Mathematics Teaching; Conics; Ellipse; Extraclass Activities.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Sumário

INTRODUÇÃO

O estudo das cônicas no Ensino Médio enfrenta um problema, que é a falta do tempo para o aprofundamento do assunto, como é citado nas orientações do Caderno do Professor da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo:

> Na presente proposta, reservou-se apenas um volume para a Geometria Analítica Plana. Dependendo do número de aulas disponíveis para o professor, nem todos os temas podem ser tratados com a mesma profundidade, cabendo ao professor mesmo selecionar as ideias que serão mais ou menos contempladas (SÃO PAULO, 2014, p. 59).

Motivo pelo qual foi escolhido para ser o tema desse trabalho de conclusão de curso que, de acordo com o catálogo de disciplinas do PROFMAT, deve versar sobre tema específico pertinente ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenha impacto na prática didática em sala de aula.

Ao fazer uma pesquisa no Banco de Dissertações da página do PROFMAT, foram encontradas 84 dissertações sobre cônicas e mais 7 dissertações que tratam especificamente da elipse. A maioria das dissertações foca aspectos teóricos e o uso de tecnologias para a abordagem das cônicas, algumas dessas dissertações apresentam propostas de sequências didáticas e atividades para utilização no ensino médio. Destacamos o trabalho de SANTOS (2018) que, além de apresentar uma proposta teórica de utilização de números complexos para resolver cônicas, faz um estudo do ensino desses conteúdos em sala de aula, entrevistando professores de ensino médio de escolas públicas e privadas de Sergipe e Alagoas, refletindo sobre as dificuldades encontradas pelos professores. Uma das conclusões do trabalho é que mesmo sendo considerado pelos professores de grande relevância e importância, esses conteúdos não são colocados nos planejamentos anuais e quando são relacionados aparecem no fim do ano letivo de forma sucinta e geralmente após a realização do ENEM, já que este exame prioriza alguns conteúdos mais básicos que passam a ter prioridade.

Assim, na tentativa de amenizar o problema descrito e atender ao objetivo proposto pelo PROFMAT, o presente trabalho buscou propor atividades extraclasse para o ensino da cônica elipse baseadas nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, que dizem:

> São apresentados, a seguir, tópicos que podem servir muito bem aos propósitos das feiras e dos clubes de ciências, ou para atividades em laboratórios de Matemática, ou ainda para compor, de forma interdisciplinar, a parte diversificada do currículo. Alguns desses tópicos também servem para trabalhar as aplicações matemáticas. Em outros tópicos, tem-se o aspecto artístico e lúdico no trabalho de construção de modelos concretos ilustrativos.
> Por exemplo, o estudo das curvas cônicas como lugar geométrico de pontos (**elipse**, parábola e hipérbole), acompanhado de suas equações (BRASIL, 2006, p. 92).

O trabalho foi estruturado numa breve pesquisa histórica sobre as cônicas, num estudo sobre os conceitos e as principais características da cônica elipse, numa pesquisa sobre as orientações dadas por documentos e livros didáticos para o tema e num relato sobre as atividades extraclasse que foram aplicadas para alunos do 3º Ano do Ensino Médio da E. E. Profa. Yone Dias de Aguiar, no município de Penápolis, no estado de São Paulo.

No capítulo 1, é apresentado uma breve revisão histórica sobre a origem das curvas cônicas, elipse, hipérbole e parábola, citando os principais colaboradores na construção do que hoje se sabe sobre elas.

No capítulo 2, é abordado o estudo da elipse, sua definição, seus elementos, suas equações e algumas propriedades.

No capítulo 3, é apresentado como o estudo da elipse está sendo tratado no Ensino Médio, baseado nos documentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio PCNEM (1998), nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), nos documentos oficiais do Estado de São Paulo e numa breve análise de alguns livros didáticos.

No capítulo 4, é feito o relato das atividades que foram desenvolvidas com alunos do 3º Ano do Ensino Médio da escola E. E. Profa. Yone Dias de Aguiar, da cidade de Penápolis-SP, buscando complementar e aprofundar o trabalho realizado em sala de aula.

Espera-se que o trabalho sirva de inspiração para outros professores desenvolverem atividades extraclasse que ajudem os alunos a aprofundarem os seus conhecimentos sobre as cônicas.

CAPÍTULO 1

UM POUCO DE HISTÓRIA

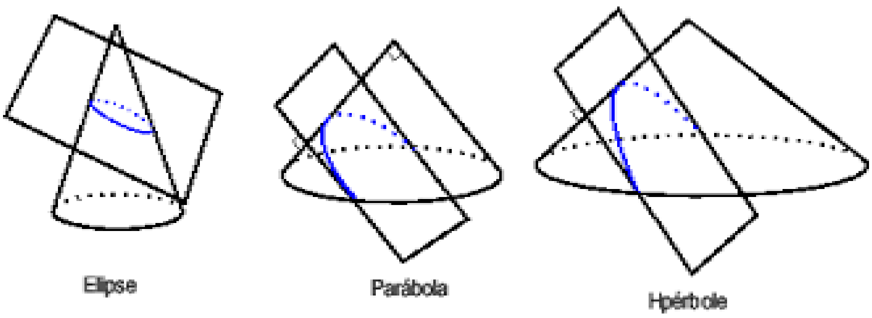
Neste capítulo, será apresentada uma breve história sobre a origem das curvas cônicas, elipse, hipérbole e parábola, citando os principais colaboradores na construção do que hoje se sabe sobre elas. Destaca-se na seção 1 a História das Cônicas e na seção 2 a História da Elipse, baseadas nos estudos de EVES (2004) e de MÁXIMO e ALVARENGA (2010).

1.1 Uma breve história sobre as Cônicas

Muitos historiadores atribuem a Menaecmo (380-320 a. C., aproximadamente), amigo de Platão e discípulo de Eudoxo, a descoberta das curvas cônicas ou seções cônicas. Tal descoberta foi realizada quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo, que consistia em construir, usando apenas régua e compasso, outro cubo com volume duas vezes maior que o volume de um cubo dado.

Na busca pela solução desse problema, Hipócrates de Chias (470–410 a. C.) mostrou que a duplicação do cubo podia ser conseguida utilizando-se de curvas e foi Menaecmo quem determinou essas curvas através de seções de cones de bases circulares retos quando cortados por planos não paralelos à sua base, conforme figura 1.1:

Figura 1.1: Cônicas obtidas por Menaecmo



Fonte:sato.prof.ufu.br (2018)

O primeiro tratado sobre as seções cônicas foi feito pelo geômetra Aristeu (370 –300 a. C.). Euclides também escreve sobre as seções cônicas, mas nenhum escrito compara-se com o que Apolônio de Perga (262–190 a.C.), astrônomo e matemático, escreve em seu tratado “Seções Cônicas”, com cerca de 400 proposições em seus oito livros, sendo que apenas os sete primeiros chegaram até nós.

Antes de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas a partir de três tipos de cones diferentes, conforme o ângulo no vértice do cone fosse agudo, reto ou obtuso. Apolônio mostra que de um único cone duplo de base circular, reto ou oblíquo, podem ser obtidas todas as três espécies de seções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção, conforme figura 1.2:

Figura 1.2: Cônicas obtidas por Apolônio

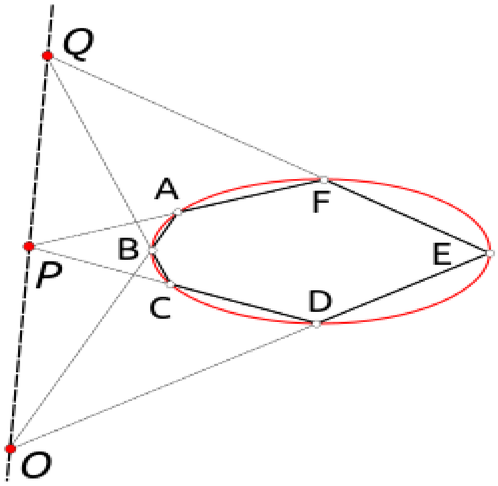
Fonte: DELGADO, FRENSEL e CRISSAFF, 2017, p. 98

As curvas cônicas foram nomeadas na obra de Apolônio, porém os nomes elipse, hipérbole e parábola foram usados antes, conforme relata Eves:

> Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos por Apolônio e foram tomados da terminologia pitagórica antiga referente à aplicação de áreas. Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta (isto é, colocavam a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento), eles diziam que se tinha um caso de “ellipsis”, “parabole” ou “hyperbole”, conforme a base do retângulo ficava aquém do segmento de reta, coincidia com ele ou o excedia (EVES, 2004,p. 199).

Após os estudos de Apolônio sobre as cônicas, novas contribuições foram apresentadas apenas no século XVI por Girard Desargues (1591–1661), que propôs uma teoria unificada das cônicas usando projeções. Logo depois, Blaise Pascal (1623–1662) escreve um pequeno livro, encontrado apenas recentemente, em que ele introduz, num ensaio sobre as cônicas, o teorema de Pascal, que diz que se um hexágono é inscrito numa cônica, então os três pontos de interseção dos lados opostos são colineares.

Figura 1.3: Teorema de Pascal



Fonte: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pascal (2018)

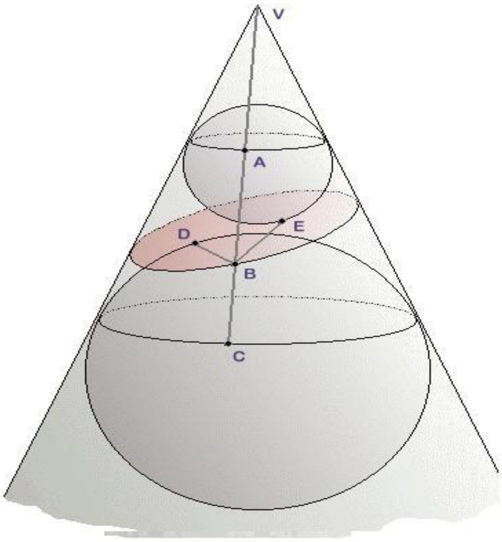
Mais tarde, Philippe de Haire (1640–1768), matemático francês, introduz as definições focais das cônicas usando a geometria analítica de Descartes. Essa é a caracterização das cônicas utilizada no Ensino Médio.

Em 1754, Ruggero Guiseppe Boscovich (1711-1787) publicou uma teoria unificada das cônicas usando a excentricidade, ainda hoje utilizada.

Germinal Pierre Dandelin (1794-1847), matemático belga, utiliza as duas caracterizações das cônicas com os planos que cortam o cone e com as ideias dos focos na elaboração do teorema de Dandelin, mostrando que há uma equivalência perfeita entre essas duas caracterizações. Na figura 1.4, apresenta-se um exemplo utilizando a elipse. Considera-se o cone de vértice V cortado por um plano que determina uma elipse. Duas esferas são introduzidas no cone de modo a tangenciar o plano nos pontos D e E, que são os focos da elipse. Observe que as esferas tangenciam o cone em círculos paralelos. Seja B um ponto qualquer da elipse, a geratriz do cone que passa por B tangencia as esferas nos pontos A e C, localizados nos círculos mencionados. Como os círculos são paralelos, o segmento AC tem comprimento constante, à medida que B varia na elipse. Observe que os segmentos DB e BC têm o mesmo comprimento, pois ambos tangenciam a mesma esfera a partir do ponto B. Do mesmo modo, BE = BA. Assim, tem-se que:

DB + BE = BC + BA = AC = constante

Figura 1.4: Teorema de Dandelin na Elipse.



Fonte: http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/maasruas/ensino/gd/imagens/dandelin2.gif (2018)

A maioria dos historiadores creditam à René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601?-1665) a origem da geometria analítica. Segundo Eves,

> Enquanto Desargues e Pascal abriam um novo campo, a geometria projetiva, Descartes e Fermat concebiam as ideias da geometria analítica moderna. Há uma diferença fundamental entre as duas matérias, pois enquanto a primeira é um ramo da geometria a segunda é um método da geometria. Poucas experiências escolares podem ser mais emocionantes para um aluno do curso colegial avançado ou início de faculdade do que uma introdução a esse novo e poderoso método de enfrentar problemas geométricos. A essência da ideia, quando aplicada ao plano, lembre-se, consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis, de maneira tal que para cada curva do plano está associada uma equação bem definida f(x, y) = 0 e para cada equação dessas está associada uma curva (ou conjunto de pontos) bem definida do plano. Estabelece-se, além disso, uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação f(x, y) = 0 e as propriedades geométricas da curva associada. Transfere-se assim, de maneira inteligente, a tarefa de provar um teorema em geometria para a de provar um teorema correspondente em álgebra e análise (EVES, 2004,p. 382).

A grande contribuição dos trabalhos de Descartes e Fermat foi de traduzir um problema geométrico numa equação algébrica e a importância desse trabalho é sentida na Física, que se valeu desses conhecimentos para resolver inúmeros problemas. No estudo das cônicas isso será de grande utilidade.

Johann Kepler, por volta de 1610, descobriria as trajetórias elípticas dos planetas, com o Sol ocupando um dos seus focos.

1.2 Uma breve história sobre a elipse

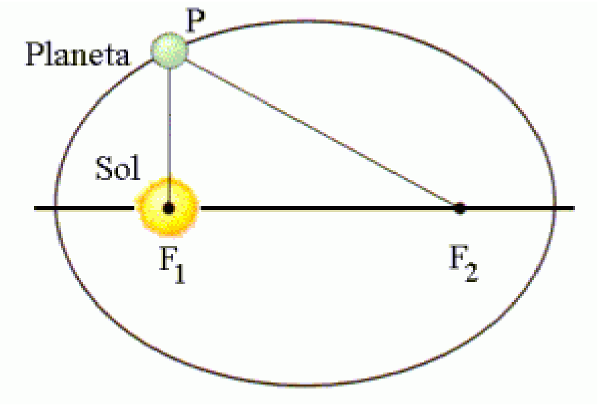
Como foi visto anteriormente, o nome elipse foi dado por Apolônio, que utilizou a terminologia pitagórica conhecida como "*ellipsis*" para designar "a falta" quando um retângulo era aplicado num segmento de reta.

Nessa época, as cônicas foram estudadas sem pretensões de aplicações práticas. Somente no século XVII, Johannes Kepler (1571-1630), físico e matemático alemão, ao estudar a órbita dos planetas sem utilizar nenhum aparelho para observação, apenas o olho e muitos cálculos complexos, percebeu que a órbita era elíptica, contrariando assim a teoria de Nicolau Copérnico (1473-1543), segundo a qual os planetas giravam em torno do Sol descrevendo órbitas circulares.

Kepler estendeu essa lei a todos os planetas, ficando conhecida como a 1ª Lei de Kepler, que afirma: "Qualquer planeta gira em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica, na qual o Sol ocupa um dos focos" (MÁXIMO e ALVARENGA, 2010, p. 200).

A 1ª Lei de Kepler, pode ser representada pela Figura 1.5, abaixo:

Figura 1.5: A 1ª Lei de Kepler



Fonte: https://www.enem.com.br/noticia/fisica-para-o-enem-entenda-as-leis-de-kepler;jsessionid=NRdW7jgRlkLb+96nEl0Ll8yT.sp-tucson1 (2018)

A órbita dos planetas não é uma elipse tão achatada como sugere a Figura 1.5, na realidade, a elipse pouco difere de uma circunferência. Os cálculos realizados por Kepler foram bastante precisos.

No próximo capítulo, será abordado, com mais detalhes, o estudo da elipse.

CAPÍTULO 2

UM ESTUDO SOBRE A ELIPSE

Neste capítulo será abordado o estudo da elipse, sua definição, seus elementos, suas equações e algumas propriedades, como referência para o desenvolvimento teórico será utilizado DELGADO, FRENSEL e CRISSAFF (2017) e IEZZI, (2013).

2.1 A definição de elipse

Em Delgado, Frensel e Crissaff (2017), a definição de elipse é dada como lugar geométrico:

> “Uma elipse Ɛ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante 2a > 0, maior do que a distância entre os focos 2c ≥ 0. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e d(F_1, F_2) = 2c, Ɛ = {P |d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a}” p. 99

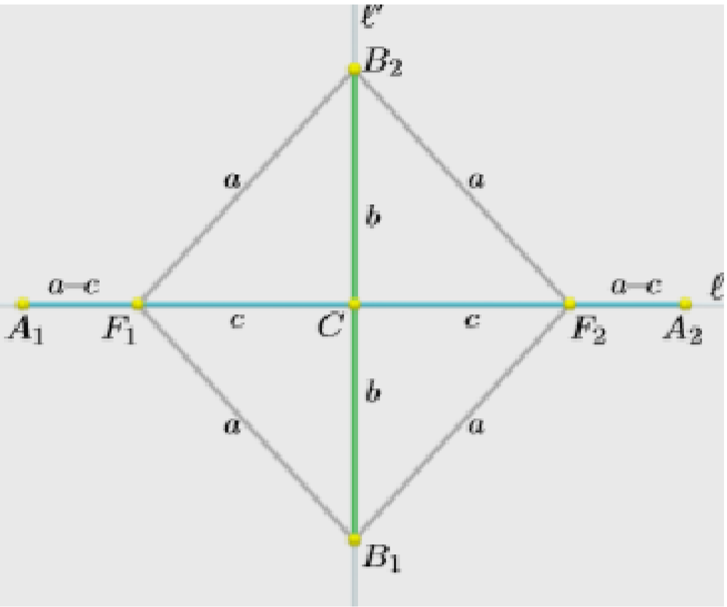
Partindo dessa definição de elipse, será realizado o estudo dos seus principais elementos.

2.2 Os principais elementos da elipse

- Pela definição, temos que F_1 e F_2 são os **focos da elipse** e a reta ℓ é a **reta focal**. O segmento $F_1 F_2$ mede 2c.
- A interseção da elipse com a reta focal determina dois pontos A_1 e A_2 , chamados **vértices da elipse sobre a reta focal**. O segmento $A_1 A_2$ é o **eixo focal** da elipse e mede 2a.
- O **centro C da elipse** é o ponto médio dos segmentos $F_1 F_2$ e $A_1 A_2$.
- A **reta não focal** é a reta ℓ' perpendicular à reta ℓ, que passa pelo centro C.

- A interseção da elipse com a reta não focal determina dois pontos B_1 e B_2, chamados de **vértices da elipse sobre a reta não focal**. O segmento $B_1\,B_2$ é o **eixo não focal da elipse** e mede 2b. Observando a figura 2.1, como as retas ℓ e ℓ' são perpendiculares, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo B_2CF_2, por exemplo, encontra-se que $b^2 = a^2 - c^2$.
- O número $e = \frac{c}{a}$ é chamado de **excentricidade da elipse**. Ele mede o desvio da elipse em relação a uma circunferência e sendo $e = 0$, tem-se que a elipse é uma circunferência de centro C e raio a.

Figura 2.1: Os principais elementos da elipse



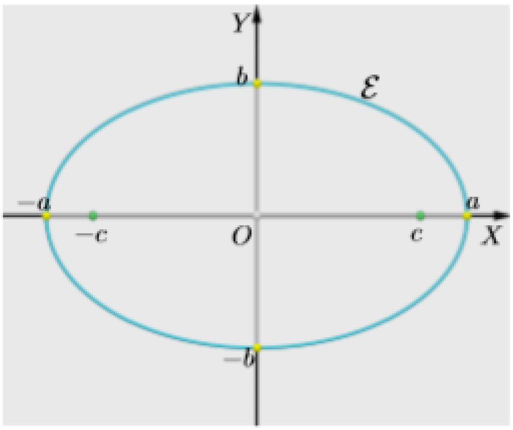
Fonte: DELGADO, FRENSEL e CRISSAFF,(2017, p. 100)

2.3 A equação da elipse

Usando a definição da elipse, obtém-se sua equação canônica (ou reduzida), para alguns casos especiais, em relação a um sistema cartesiano ortogonal OXY.

2.3.1 A equação da elipse com centro na origem e reta focal no eixo OX

Figura 2.2: Esboço da elipse com centro na origem e reta focal no eixo OX



Fonte: DELGADO, FRENSEL e CRISSAFF, 2017, p. 103

Seja a elipse com os focos e vértices:

F_1=(−c,0)	A_1=(−a,0)	B_1=(0,−b)
F_2=(c,0)	A_2=(a,0)	B_2=(0,b),

onde 0 < c < a e b = $\sqrt{a^2-c^2}$.

Logo, considerando um ponto genérico da elipse, P = (x,y), pela definição da elipse, temos que:

d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow 4xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4xc$$

$$\Leftrightarrow a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-cx\right)^2=a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]$$

$$\Leftrightarrow a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

Usando o fato que $b^2 = \sqrt{a^2 - c^2}$, temos:

$$\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é a forma reduzida ou canônica da elipse de centro na origem e focos no eixo X.

Observe a seguir um exemplo dado por Iezzi (2005):

Uma elipse com eixo maior 10 e distância focal 6 apresenta:

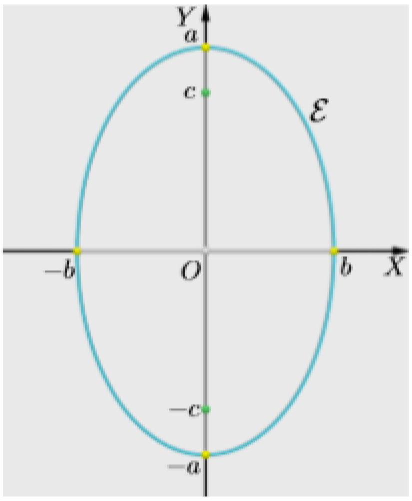
$a = 5$ e $c = 3 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow b = 4$.

Se a elipse tem o centro na origem e a sua reta focal coincide com o eixo X, então a sua equação é:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \ .$$

2.3.2 A equação da elipse com centro na origem e reta focal no eixo OY

Figura 2.3: Esboço da elipse com centro na origem e reta focal no eixo OY



Fonte: DELGADO, FRENSEL e CRISSAFF, 2017, p. 103

Seja a elipse com os focos e vértices:

F_1 =(0,−c)	A_1 = (0,-a)	B_1 = (-b,0)
F_2 = (0, c)	A_2 = (0, a)	B_2 = (b,0),

onde 0 < c < a e b = $\sqrt{a^2 - c^2}$.

Analogamente, como foi visto em 2.2, considerando um ponto genérico P = (x,y) contido na elipse e aplicando a definição, verifica-se que a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Observe o exemplo a seguir dado por Iezzi (2013):

Uma elipse com eixo maior 10 e eixo menor 8 apresenta a = 5 e b = 4.

Se a elipse tem o centro na origem e sua reta focal coincide com o eixo Y, então a sua equação é:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

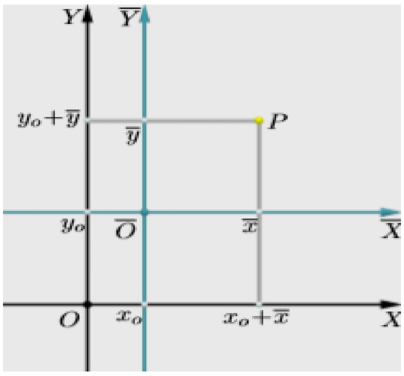
2.3.3 A equação da elipse com centro no ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$

Se uma elipse tem o centro no ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$, para se obter sua equação basta fazer uma translação dos eixos coordenados.

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais, $\bar{O} = (x_0, y_0)$, um ponto no plano e $\bar{O}\,\bar{X}\,\bar{Y}$ o sistema cujos eixos $\bar{O}\,\bar{X}$ e $\bar{O}\,\bar{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm o mesmo sentido destes eixos, respectivamente. Seja $(\bar{x}, \bar{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\bar{O}\,\bar{X}\,\bar{Y}$ e (x,y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY.

O problema agora é estabelecer uma relação entre as coordenadas de P no sistema $\bar{O}\,\bar{X}\,\bar{Y}$ e no sistema OXY.

Figura 2.4: Translação dos eixos coordenados



Fonte: DELGADO, FRENSEL e CRISSAFF, 2017, p. 105

Observando a figura 2.4, tem-se que:

- No eixo x

$$x = \overline{x} + x_0 \Leftrightarrow \overline{x} = x - x_0$$

- No eixo y

$$y = \overline{y} + y_0 \Leftrightarrow \overline{y} = y - y_0$$

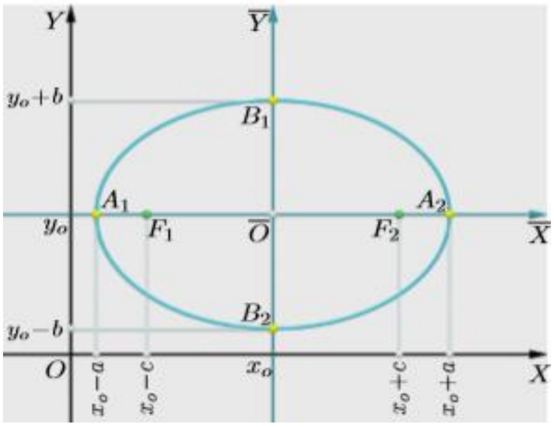
A seguir, serão apresentados dois casos de elipse com o centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$.

Caso I – Reta focal paralela ao eixo OX

Nesse caso, tem-se que a equação da elipse é:

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Figura 2.5: Esboço da elipse com o centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX



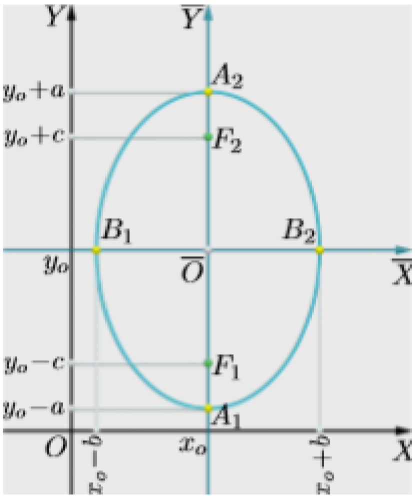
Fonte: DELGADO, FRENSEL e CRISSAFF,(2017, p. 107)

Caso II – Reta focal paralela ao eixo OY

Nesse caso, tem-se que a equação da elipse é:

$$\frac{\bar{x}^2}{b^2}+\frac{\bar{y}^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

Figura 2.6: Esboço da elipse com o centro $\bar{O}=(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY



Fonte: DELGADO, FRENSEL e CRISSAFF, 2017, p. 107

Veja a seguir um exemplo em DELGADO, FRENSEL e CRISSAFF (2017):

Os focos de uma elipse Ɛ são (3,8) e (3,2) e o comprimento de seu eixo não focal é 8. Determine a equação de Ɛ, seus vértices e sua excentricidade.

Solução: Como F_1 = (3,2) e F_2 = (3,8) são os focos da elipse, sua reta focal é ℓ: x = 3 (paralela ao eixo OY) e seu centro é $C=\frac{F_1+F_2}{2}=(3,5)$.

Além disso, 2b = 8, isto é, b = 4, c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3 e $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=5$.

Portanto, a excentricidade, $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$; A_1 = (3,0) e A_2 = (3,10) são os vértices sobre a reta focal; ℓ' : y = 5 é a reta não focal; B_1 = (−1,5) e B_2 = (7,5) são os vértices sobre a reta não focal e sua equação é:

Ɛ: $$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1.$$

2.3.4 A equação do segundo grau com $B=0$ e $AC\rangle 0$

Considere a equação da elipse de centro no ponto $\bar{O}=(x_0,y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Desenvolvendo essa equação, tem-se que:

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2x_0x-2a^2y_0y+b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0,$$

que é da forma:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$, onde

$A=b^2$, $B=0$, $C=a^2$, $D=-2b^2x_0$, $E=-2a^2y_0$ e $F=b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2$.

Reciprocamente, tem-se:

Se os coeficientes A e C da equação do segundo grau

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

têm o mesmo sinal, ou seja $AC\rangle 0$, então a equação representa um dos seguintes conjuntos:

- uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados;
- um ponto;
- o conjunto vazio.

Quando essa equação representa um ponto ou o conjunto vazio, são denominados **casos degenerados da elipse**.

Em Delgado, Frensel e Crissaff (2017), tem-se o seguinte exemplo:

Verifique se as equações abaixo representam uma elipse ou uma elipse degenerada.

a-) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$

Solução: Completando os quadrados, obtemos:

$$4(x^2-10x)+9(y^2+4y)=-100$$
$$\Leftrightarrow 4(x^2-10x+25)+9(y^2+4y+4)=-100+4\times 25+9\times 4$$
$$\Leftrightarrow 4(x-5)^2+9(y+2)^2=36$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

Logo, a equação representa uma elipse.

b-) $36x^2+9y^2-108x+6y+82=0$

Solução: Completando os quadrados, obtemos:

$$36\left(x^2-3x\right)+9\left(y^2+\frac{6}{9}y\right)=-82$$

$$\Leftrightarrow 36\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+9\left(y^2+\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}\right)=-82+36\times\frac{9}{4}+9\times\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 36\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+9\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=-82+81+1$$

$$\Leftrightarrow 36\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+9\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=0.$$

Assim, apenas o ponto $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{3}\right)$ satisfaz à equação dada, isto é, a equação representa um ponto, ou seja, é uma elipse degenerada.

c-) $9x^2+4y^2+18x-9y+25=0$

Solução: Completando os quadrados, obtemos:

$$9\left(x^2+2x\right)+4\left(y^2-\frac{9}{4}y\right)=-25$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x^2+2x+1\right)+4\left(y^2-\frac{9}{4}y+\frac{81}{64}\right)=-25+9\times 1+4\times\frac{81}{64}$$

$$\Leftrightarrow 9(x+1)^2+4\left(y-\frac{9}{8}\right)^2=-16+\frac{81}{16}=-\frac{175}{16}.$$

Como $-\frac{175}{16}\langle 0$, nenhum ponto do plano satisfaz à equação, isto é, a equação representa o conjunto vazio, ou seja, é uma elipse degenerada.

No capítulo seguinte será apresentado como o estudo da cônica elipse está sendo feito no Ensino Médio, analisando alguns documentos oficiais.

CAPÍTULO 3

O ESTUDO DA ELIPSE NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, será apresentado como o estudo da elipse está sendo tratado no Ensino Médio. A seção 1 abordará o estudo da elipse baseado nos documentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio PCNEM (Brasil, 1998) e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006), e a seção 2, nos documentos oficiais do Estado de São Paulo. Na seção 3, uma breve análise qualitativa de seis livros didáticos, baseada no estudo dos documentos oficiais, será apresentada, a fim de entender como o assunto é abordado pelos autores. Na seção 4, são apresentados alguns problemas de vestibulares e ENEM abordando o estudo da elipse, que mostram a necessidade de articulação entre compreensão de significados e manipulação algébrica.

3.1 O estudo da elipse nos PCNEM e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio

Nos PCNEM (Brasil, 1998), entre as finalidades do ensino da Matemática, um dos objetivos é levar o aluno a:

> - aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; [...]
> - expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> - estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; [...] (BRASIL, 1998, p. 42)

Esses três objetivos são encontrados no estudo das cônicas e, em especial, no estudo da elipse, onde esses conhecimentos são utilizados na interpretação da ciência e em atividades do cotidiano. No estudo da elipse, o aluno expressa-se graficamente, o uso da tecnologia auxilia as interpretações e as conexões com outras áreas do currículo é estabelecida.

Os PCNEM trata-se de um documento geral a uma área do conhecimento, não foi encontrado nada específico ao estudo das cônicas.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006), é possível visualizar duas citações sobre o estudo das cônicas:

> Para o estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, **cônicas**, superfícies), tem-se uma grande variedade de programa de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação – inequação (BRASIL, 2006, p. 89, grifo nosso).

Observa-se a orientação para que o estudo das cônicas possa ser acompanhado do uso das tecnologias, utilizando-se de programas que possibilitem a exploração algébrica e geométrica. No capítulo 4, será apresentado, como exemplo, o uso do Geogebra.

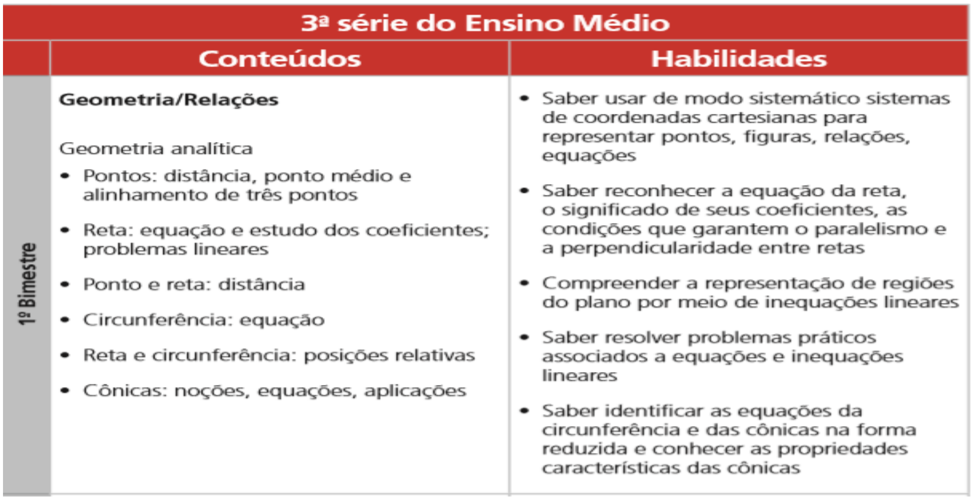
Na segunda citação, verifica-se a preocupação com a aplicação prática das cônicas na atualidade:

> São apresentados, a seguir, tópicos que podem servir muito bem aos propósitos das feiras e dos clubes de ciências, ou para atividades em laboratórios de Matemática, ou ainda para compor, de forma interdisciplinar, a parte diversificada do currículo. Alguns desses tópicos também servem para trabalhar as aplicações matemáticas. Em outros tópicos, tem-se o aspecto artístico e lúdico no trabalho de construção de modelos concretos ilustrativos.
>
> Por exemplo, o estudo das curvas cônicas como lugar geométrico de pontos (**elipse**, parábola e hipérbole), acompanhado de suas equações. As mais simples, se bem escolhida a posição do sistema de coordenadas, geram um tópico interessante, pois trata-se de curvas que podem ser a solução de uma equação geral de grau dois em duas variáveis (vale lembrar que até então esse estudo estava restrito à reta, círculo e parábola). Podem-se, com isso, explicar os princípios de funcionamento de uma antena parabólica, dos espelhos hiperbólicos usados em telescópios e dos **espelhos elípticos** (BRASIL, 2006, p. 92, grifo nosso).

3.2 O estudo da elipse nos documentos oficiais do Estado de São Paulo

No Currículo do Estado de São Paulo o conteúdo sobre a elipse é apresentado no 1º Bimestre da 3º série do Ensino Médio. O conteúdo é descrito como “Cônicas: noções, equações, aplicações” e a habilidade relacionada é “Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.” (São Paulo, 2014, p.69), como se pode observar no Quadro 3.1 a seguir:

Quadro 3.1: Currículo Oficial do Estado de São Paulo

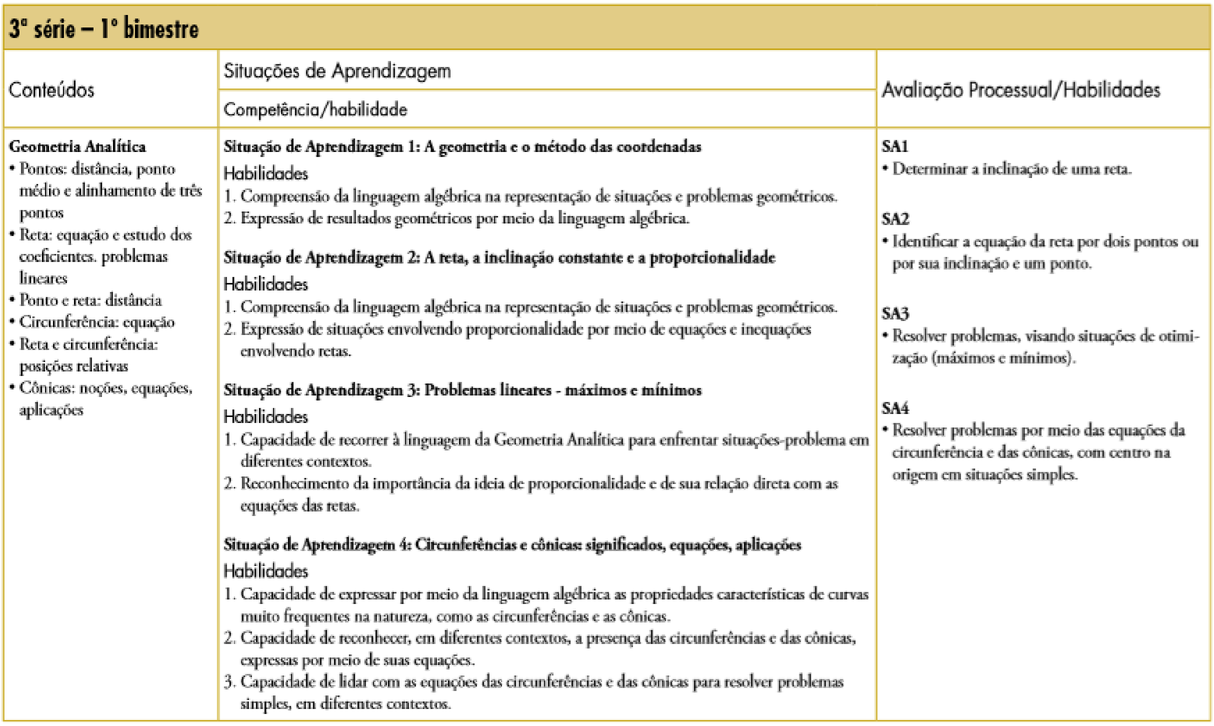


3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Geometria/Relações** Geometria analítica • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos • Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares • Ponto e reta: distância • Circunferência: equação • Reta e circunferência: posições relativas • Cônicas: noções, equações, aplicações	• Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações • Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas • Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares • Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares • Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas

Fonte: SÃO PAULO,(2012, p. 69)

Na Matriz de Avaliação Processual, encontra-se o conteúdo e a habilidade descritos no Currículo e a situação de aprendizagem relacionada com esse conteúdo, conforme o Quadro 3.2:

Quadro 3.2: Matriz de Avaliação Processual



3ª série – 1º bimestre		
Conteúdos	Situações de Aprendizagem Competência/habilidade	Avaliação Processual/Habilidades
Geometria Analítica • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos • Reta: equação e estudo dos coeficientes. problemas lineares • Ponto e reta: distância • Circunferência: equação • Reta e circunferência: posições relativas • Cônicas: noções, equações, aplicações	**Situação de Aprendizagem 1: A geometria e o método das coordenadas** Habilidades 1. Compreensão da linguagem algébrica na representação de situações e problemas geométricos. 2. Expressão de resultados geométricos por meio da linguagem algébrica. **Situação de Aprendizagem 2: A reta, a inclinação constante e a proporcionalidade** Habilidades 1. Compreensão da linguagem algébrica na representação de situações e problemas geométricos. 2. Expressão de situações envolvendo proporcionalidade por meio de equações e inequações envolvendo retas. **Situação de Aprendizagem 3: Problemas lineares - máximos e mínimos** Habilidades 1. Capacidade de recorrer à linguagem da Geometria Analítica para enfrentar situações-problema em diferentes contextos. 2. Reconhecimento da importância da ideia de proporcionalidade e de sua relação direta com as equações das retas. **Situação de Aprendizagem 4: Circunferências e cônicas: significados, equações, aplicações** Habilidades 1. Capacidade de expressar por meio da linguagem algébrica as propriedades características de curvas muito frequentes na natureza, como as circunferências e as cônicas. 2. Capacidade de reconhecer, em diferentes contextos, a presença das circunferências e das cônicas, expressas por meio de suas equações. 3. Capacidade de lidar com as equações das circunferências e das cônicas para resolver problemas simples, em diferentes contextos.	**SA1** • Determinar a inclinação de uma reta. **SA2** • Identificar a equação da reta por dois pontos ou por sua inclinação e um ponto. **SA3** • Resolver problemas, visando situações de otimização (máximos e mínimos). **SA4** • Resolver problemas por meio das equações da circunferência e das cônicas, com centro na origem em situações simples.

Fonte: SÃO PAULO, (2016, p. 42)

Assim, é possível verificar que se espera que o aluno saiba resolver problemas por meio das equações da circunferência e das cônicas com centro na origem em situações simples, reduzindo o estudo de cônicas a uma simples manipulação de fórmulas, deixando de lado aspectos históricos, aplicações ou abordagem em situações contextualizadas, bem como o uso de materiais concretos ou recursos computacionais.

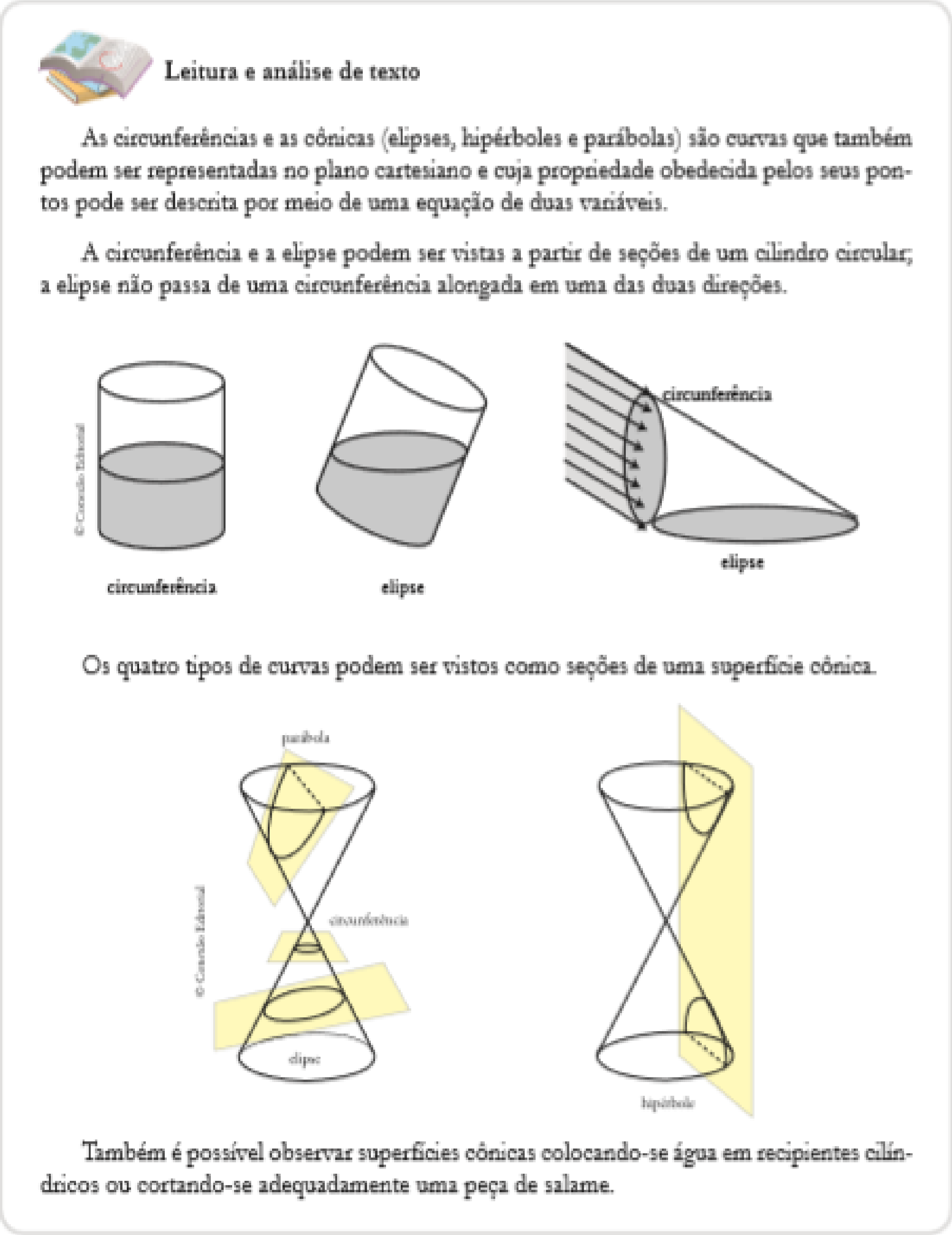
No Estado de São Paulo, foi implantado um projeto denominado São Paulo Faz Escola, em que os professores e os alunos recebem um material de apoio baseado no Currículo Oficial do Estado. Tal material é composto pelos Cadernos do Professor e do Aluno, que são organizados por disciplina, ano e bimestre.

Em Matemática, nos Cadernos do Professor, Ensino Médio, 3ª série, Volume1, são apresentadas orientações didático-pedagógicas para as atividades presentes no Caderno do Aluno, baseadas nos conteúdos do Currículo Oficial do Estado de São Paulo. No conteúdo que envolvem as elipses, encontra-se:

> Na Unidade 7, as cônicas são apresentadas e caracterizadas por meio de propriedades de diversas maneiras. Além de constituírem interseções de um plano com uma superfície cônica, o que lhes garante a denominação, a elipse é uma circunferência “achatada”; a hipérbole surge na representação de grandezas inversamente proporcionais; e a parábola, na representação de uma grandeza que é proporcional ao quadrado de outra. Complementarmente, as cônicas também são apresentadas pelas suas importantes propriedades características em relação aos focos.
>
> Na Unidade 8 são apresentadas as equações da elipse, da hipérbole e da parábola, em posições convenientes em relação aos eixos de coordenadas, de modo a simplificar os cálculos (SÃO PAULO, 2014, p. 7 e 8).

No Caderno do Aluno, 3ª série, Volume 1, o conteúdo sobre a elipse está na situação de aprendizagem 4 com o título “Circunferências e Cônicas: significados, equações, aplicações”. A primeira atividade trata-se da leitura e interpretação de um texto:

Figura 3.1: Texto sobre as Cônicas



Leitura e análise de texto

As circunferências e as cônicas (elipses, hipérboles e parábolas) são curvas que também podem ser representadas no plano cartesiano e cuja propriedade obedecida pelos seus pontos pode ser descrita por meio de uma equação de duas variáveis.

A circunferência e a elipse podem ser vistas a partir de seções de um cilindro circular; a elipse não passa de uma circunferência alongada em uma das duas direções.

Os quatro tipos de curvas podem ser vistos como seções de uma superfície cônica.

Também é possível observar superfícies cônicas colocando-se água em recipientes cilíndricos ou cortando-se adequadamente uma peça de salame.

Fonte: SÃO PAULO, 2014, p. 36

Após a leitura e interpretação do texto, são propostos alguns exercícios sobre a equação da circunferência e novamente é apresentado outro texto sobre a elipse para a leitura e interpretação, conforme Figura 3.2:

Figura 3.2: Texto sobre a elipse

Leitura e análise de texto

Elipse

As curvas chamadas cônicas – a elipse, a hipérbole e a parábola – ocorrem com muita frequência na natureza e no dia a dia. Vamos conhecer suas principais características, começando pela elipse.

Quando inclinamos um recipiente cilíndrico aberto, de seção circular, contendo água em repouso, o contorno da superfície da água é uma elipse. Também é uma elipse a sombra projetada de uma circunferência situada em um plano vertical, quando a luz do Sol, ou outra luz, incide obliquamente.

Foi Johannes Kepler (1571–1630), em seus estudos de Astronomia, quem associou às trajetórias dos planetas ao redor do Sol não mais circunferências, mas sim elipses, ou seja, circunferências "achatadas".

Nessas elipses, Kepler destacou a existência de dois pontos simetricamente opostos em relação ao centro, chamados focos, em um dos quais o Sol se situava.

A partir desses dois pontos, uma propriedade fundamental pode ser utilizada para caracterizar uma elipse: qualquer ponto da elipse é tal que a soma das distâncias até esses dois pontos fixados, que são os focos, é constante. Jardineiros utilizam frequentemente essa propriedade para construir canteiros elípticos: fincando-se duas estacas, uma em cada foco, e deslocando-se um estilete, com um barbante de comprimento L (maior do que a distância entre os focos) esticado, obtém-se uma elipse.

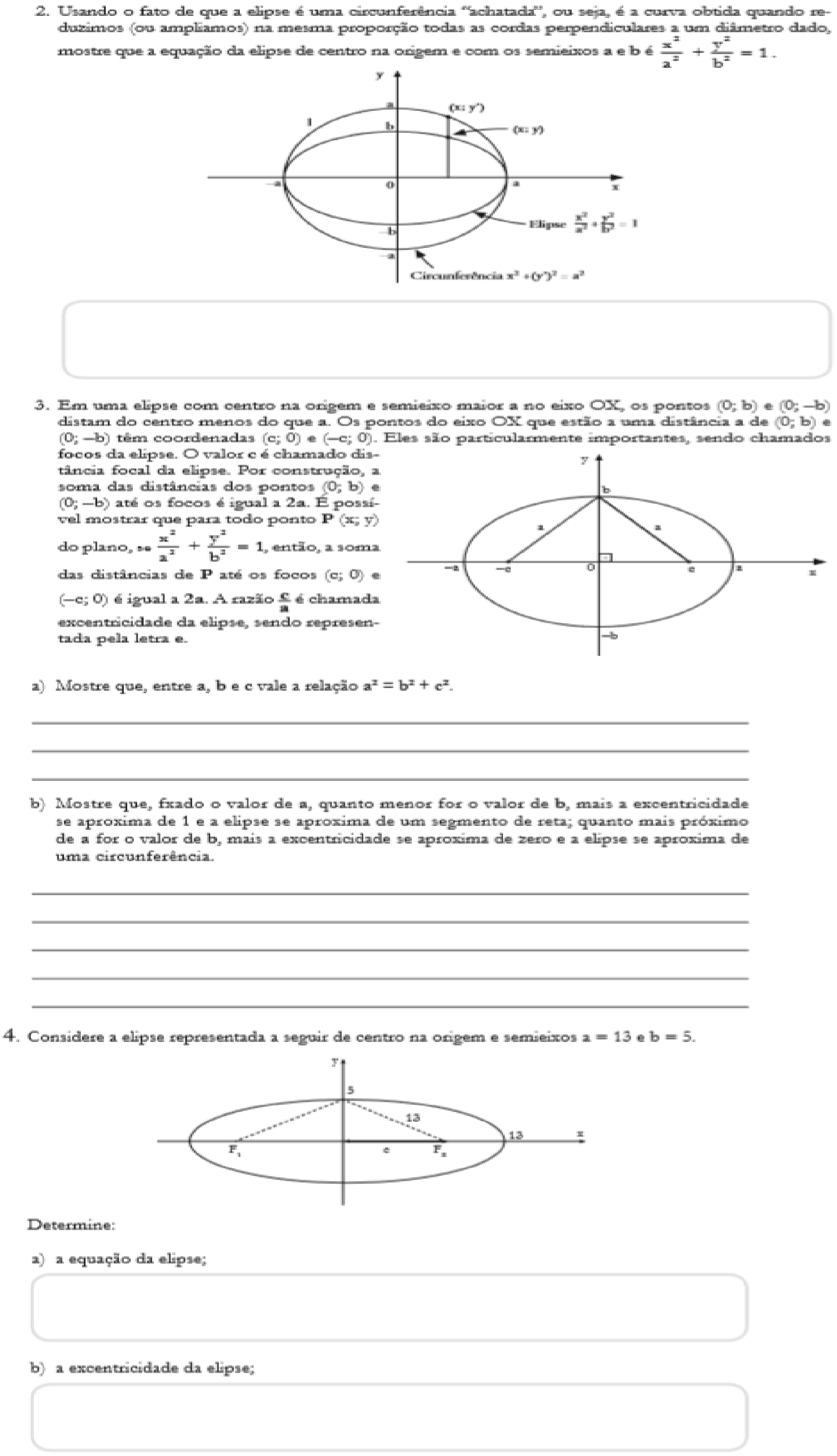
Um coador de café de plástico pode ilustrar o fato de que as elipses podem ser consideradas curvas intermediárias entre a circunferência e o segmento de reta:

Uma elipse apresenta dois eixos de simetria: o semieixo maior costuma ser representado por **a**, o menor por **b**. Assim, os dois eixos são **2a** e **2b**.

Fonte: SÃO PAULO, (2014, p. 38 e 39)

As atividades que são propostas na sequência apresentam as propriedades, a equação, os elementos da elipse, como pode ser observado na Figura 3.3:

Figura 3.3: Atividades sobre a elipse



2. Usando o fato de que a elipse é uma circunferência "achatada", ou seja, é a curva obtida quando reduzimos (ou ampliamos) na mesma proporção todas as cordas perpendiculares a um diâmetro dado, mostre que a equação da elipse de centro na origem e com os semieixos a e b é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Em uma elipse com centro na origem e semieixo maior a no eixo OX, os pontos (0; b) e (0; –b) distam do centro menos do que a. Os pontos do eixo OX que estão a uma distância a de (0; b) e (0; –b) têm coordenadas (c; 0) e (–c; 0). Eles são particularmente importantes, sendo chamados focos da elipse. O valor c é chamado distância focal da elipse. Por construção, a soma das distâncias dos pontos (0; b) e (0; –b) até os focos é igual a 2a. É possível mostrar que para todo ponto **P** (x; y) do plano, se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então, a soma das distâncias de **P** até os focos (c; 0) e (–c; 0) é igual a 2a. A razão $\frac{c}{a}$ é chamada excentricidade da elipse, sendo representada pela letra e.

a) Mostre que, entre a, b e c vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

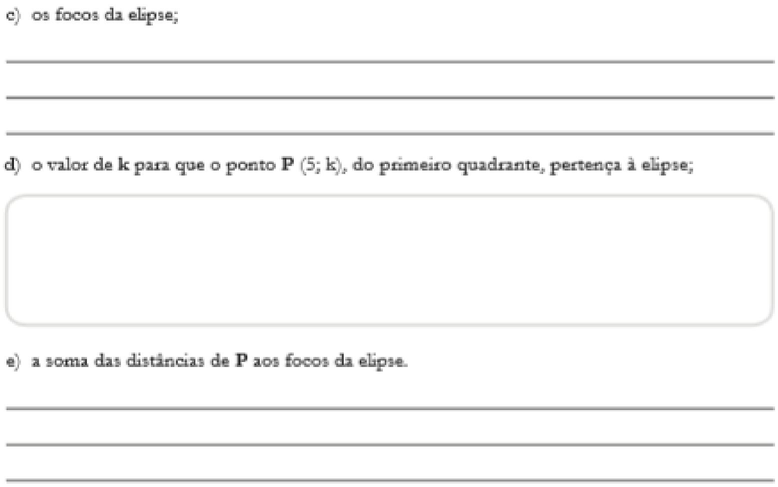
b) Mostre que, fixado o valor de a, quanto menor for o valor de b, mais a excentricidade se aproxima de 1 e a elipse se aproxima de um segmento de reta; quanto mais próximo de a for o valor de b, mais a excentricidade se aproxima de zero e a elipse se aproxima de uma circunferência.

4. Considere a elipse representada a seguir de centro na origem e semieixos a = 13 e b = 5.

Determine:

a) a equação da elipse;

b) a excentricidade da elipse;



c) os focos da elipse;

d) o valor de k para que o ponto P (5; k), do primeiro quadrante, pertença à elipse;

e) a soma das distâncias de P aos focos da elipse.

Fonte: SÃO PAULO,(2014, p. 40, 41 e 42)

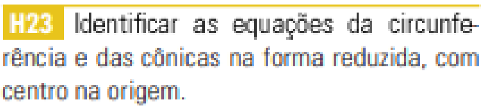
No Caderno do Professor, no final das orientações sobre os conteúdos da situação de aprendizagem, encontram-se considerações sobre a avaliação e, no caso específico do estudo das cônicas, é citada a questão do tempo para o aprofundamento do assunto. Ainda é sugerida a construção de instrumentos para as curvas serem desenhadas pelos alunos:

> Na presente proposta, reservou-se apenas um volume para a Geometria Analítica Plana. Dependendo do número de aulas disponíveis para o professor, nem todos os temas podem ser tratados com a mesma profundidade, cabendo ao professor mesmo selecionar as ideias que serão mais ou menos contempladas.
>
> Na apresentação das circunferências e das cônicas, buscou-se destacar mais o significado e as ocorrências de cada uma delas em diferentes contextos do que as manipulações algébricas com as equações. Trata-se, naturalmente, de uma escolha, em razão das limitações do tempo disponível. Sugere-se, portanto, que a avaliação concentre-se na caracterização da circunferência, da elipse, da hipérbole e da parábola em situações simplificadas, escrevendo as equações das curvas com centro na origem, e adiando-se ou omitindo-se uma exploração algébrica mais detida dos casos mais gerais.
>
> Quanto à forma de avaliação, também aqui consideramos que o assunto favorece a utilização de múltiplos instrumentos, não devendo se limitar às provas. No caso das cônicas, seu reconhecimento em situações como as indicadas no texto (seção de cones, sombras de circunferências, cortes ou inclinações de cilindros etc.) pode ser simples e motivador. A construção de instrumentos para desenhá-las no plano, como alguns sugeridos no texto, também pode ser muito interessante (SÃO PAULO, 2014, p. 59).

Pode-se observar que no Caderno do Professor a abordagem das cônicas é feita favorecendo a questão de significados, destacando aplicações e mencionando aspectos históricos em detrimento da manipulação algébrica, enfatizando que seria uma escolha em função da limitação de tempo disponível. O material sugere inclusive que não se adote a prova como único instrumento de avaliação.

Na Matriz de Referência para Avaliação do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) o conteúdo das cônicas é apresentado na habilidade de número 23, conforme se observa no Quadro 3.3:

Quadro3.3: Habilidade na matriz do SARESP



H23 Identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida, com centro na origem.

Fonte: SÃO PAULO, (2009, p. 87)

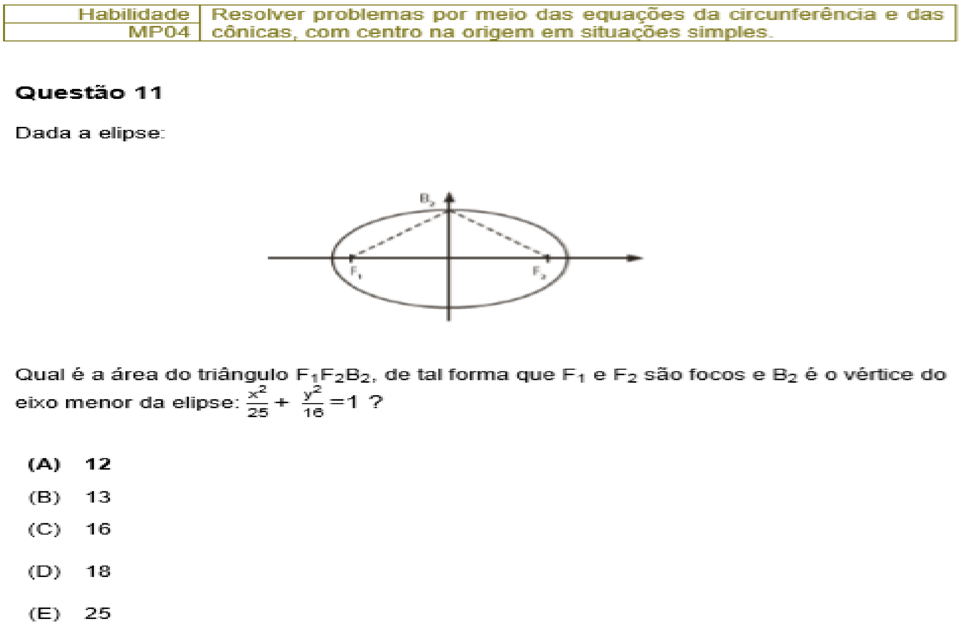
O acesso às questões que são aplicadas no SARESP não é mais permitido e assim não é possível observar se a habilidade citada faz parte das últimas avaliações.

As Avaliações da Aprendizagem em Processo (AAP), são avaliações aplicadas nos finais de bimestres, tendo o objetivo de ser uma avaliação diagnóstica para a recuperação contínua.

> A AAP, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos, de forma individualizada, tendo caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades e os docentes na elaboração de estratégias adequadas, a partir da análise de seus resultados, que contribuam efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua. (SÃO PAULO, 2017, p. 2)

Nas Avaliações da Aprendizagem em Processo, duas questões que envolvem o conteúdo de elipse apareceram nas avalições do 1º Bimestre do 3º Ano do Ensino Médio em 2016 e 2017. A primeira questão é a de número 11:

Figura 3.4: Questão de nº 11 da AAP de 2017 – 1º Bimestre – 3º Ano do Ensino Médio



Habilidade MP04	Resolver problemas por meio das equações da circunferência e das cônicas, com centro na origem em situações simples.

Questão 11

Dada a elipse:

Qual é a área do triângulo $F_1F_2B_2$, de tal forma que F_1 e F_2 são focos e B_2 é o vértice do eixo menor da elipse: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$?

(A) 12
(B) 13
(C) 16
(D) 18
(E) 25

Fonte: São Paulo, 2017, p. 47

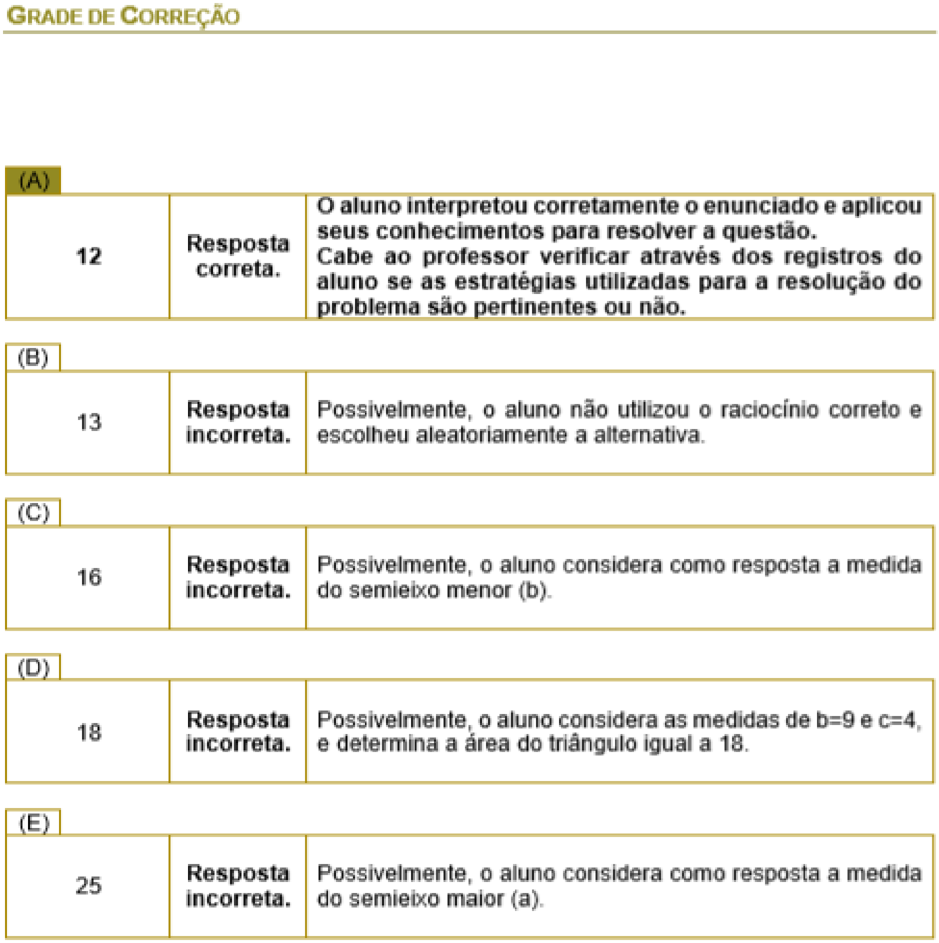
O aluno poderia resolver essa questão reconhecendo a equação da elipse, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ com centro em C=(0,0) e concluir que a = 5 e b = 4.

Como o triângulo $F_1F_2B_2$ é isósceles de base F_1F_2 e sendo B_2 um ponto da elipse, usando a definição de elipse, tem-se que $d(B_2,F_1)+d(B_2,F_2)=2a$, logo $B_2F_1=B_2F_2=a$ e assim, aplicando o Teorema de Pitágoras em $B_2C=b$, $B_2F_2=a$ e $CF_2=c$, conclui-se que $c^2=a^2-b^2$, logo c = 3.

A base do triângulo $F_1F_2B_2$ é $F_1F_2=6$ e a altura é $B_2C=4$, portanto, a área do triângulo $F_1F_2B_2$ é $A(\Delta F_1F_2B_2)=\frac{6\times 4}{2}=12$.

Na grade de correção apresentada no quadro 3.4, o professor pode analisar a resposta indicada pelo aluno.

Quadro 3.4: Grade de Correção da Questão de nº 11 da AAP de 2017 – 1º Bimestre – 3º Ano do Ensino Médio



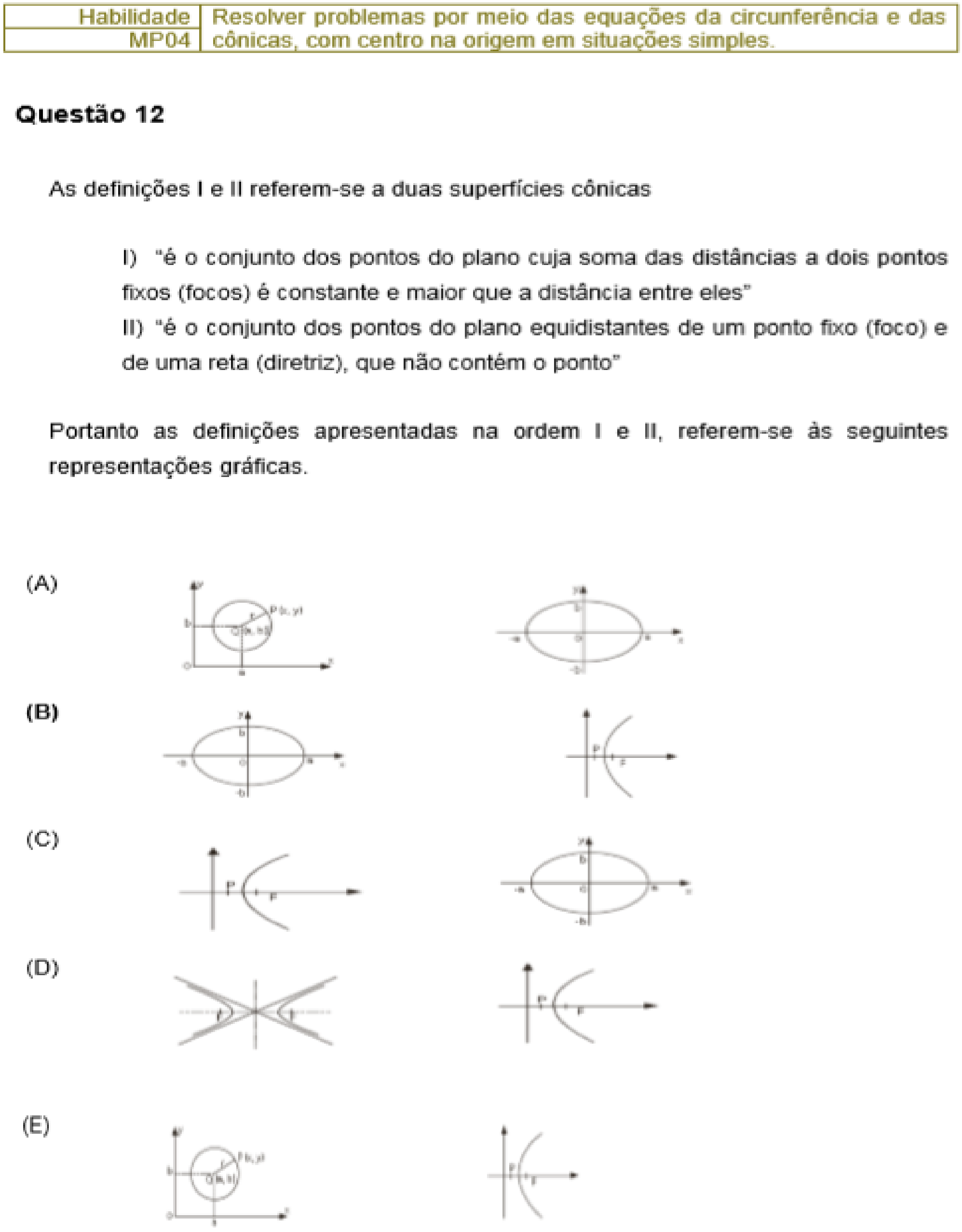
GRADE DE CORREÇÃO

(A)	12	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**
(B)	13	**Resposta incorreta.**	Possivelmente, o aluno não utilizou o raciocínio correto e escolheu aleatoriamente a alternativa.
(C)	16	**Resposta incorreta.**	Possivelmente, o aluno considera como resposta a medida do semieixo menor (b).
(D)	18	**Resposta incorreta.**	Possivelmente, o aluno considera as medidas de b=9 e c=4, e determina a área do triângulo igual a 18.
(E)	25	**Resposta incorreta.**	Possivelmente, o aluno considera como resposta a medida do semieixo maior (a).

Fonte: SÃO PAULO,(2017, p. 49)

A segunda questão é a de número 12. Para a sua resolução, não são necessários cálculos, mas apenas o conhecimento e interpretação das definições das cônicas e o reconhecimento do esboço, para assim concluir que a alternativa correta é a letra B. O termo “superfícies cônicas”, que foi utilizado na questão, não é o mais apropriado, visto que, superfície cônica é a superfície gerada por uma reta g (geratriz) que se move apoiada em um ponto V (vértice) e em uma curva fixa d (diretriz).

Figura 3.5: Questão de nº 12 da AAP de 2017 – 1º Bimestre – 3º Ano do Ensino Médio



Habilidade MP04	Resolver problemas por meio das equações da circunferência e das cônicas, com centro na origem em situações simples.

Questão 12

As definições I e II referem-se a duas superfícies cônicas

I) "é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e maior que a distância entre eles"
II) "é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta (diretriz), que não contém o ponto"

Portanto as definições apresentadas na ordem I e II, referem-se às seguintes representações gráficas.

(A)

(B)

(C)

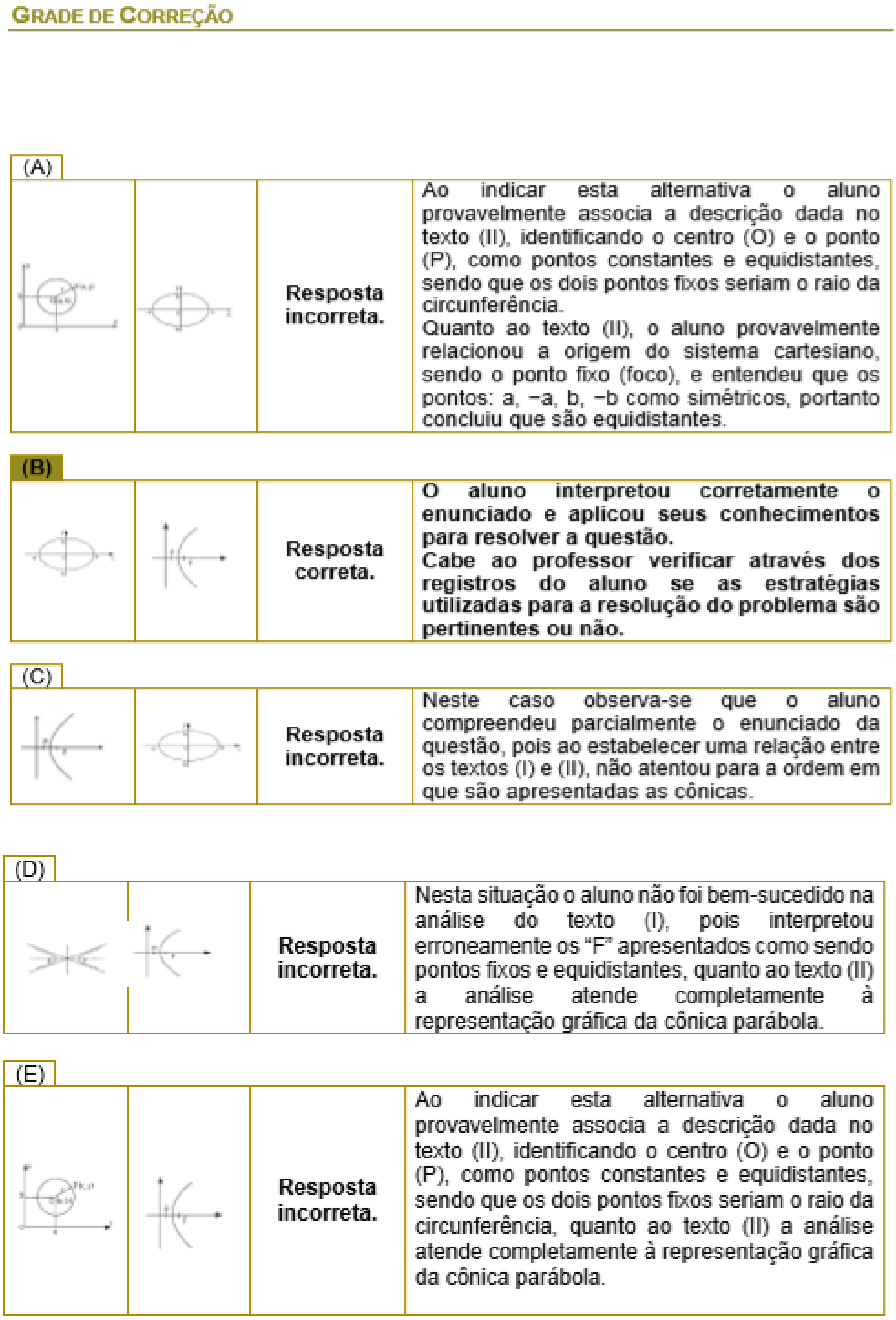
(D)

(E)

Fonte: São Paulo, (2017, p. 50)

Para análise das respostas dos alunos, o professor pode utilizar a grade de correção dessa questão, conforme o Quadro 3.5:

Quadro 3.5: Grade de Correção da Questão de nº 12 da AAP de 2017 – 1º Bimestre – 3º Ano do Ensino Médio



GRADE DE CORREÇÃO

(A)			**Resposta incorreta.**	Ao indicar esta alternativa o aluno provavelmente associa a descrição dada no texto (II), identificando o centro (O) e o ponto (P), como pontos constantes e equidistantes, sendo que os dois pontos fixos seriam o raio da circunferência. Quanto ao texto (II), o aluno provavelmente relacionou a origem do sistema cartesiano, sendo o ponto fixo (foco), e entendeu que os pontos: a, −a, b, −b como simétricos, portanto concluiu que são equidistantes.
(B)			**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**
(C)			**Resposta incorreta.**	Neste caso observa-se que o aluno compreendeu parcialmente o enunciado da questão, pois ao estabelecer uma relação entre os textos (I) e (II), não atentou para a ordem em que são apresentadas as cônicas.
(D)			**Resposta incorreta.**	Nesta situação o aluno não foi bem-sucedido na análise do texto (I), pois interpretou erroneamente os "F" apresentados como sendo pontos fixos e equidistantes, quanto ao texto (II) a análise atende completamente à representação gráfica da cônica parábola.
(E)			**Resposta incorreta.**	Ao indicar esta alternativa o aluno provavelmente associa a descrição dada no texto (II), identificando o centro (O) e o ponto (P), como pontos constantes e equidistantes, sendo que os dois pontos fixos seriam o raio da circunferência, quanto ao texto (II) a análise atende completamente à representação gráfica da cônica parábola.

Fonte: SÃO PAULO, (2017, p. 52 e 53)

3.3 Breve análise qualitativa em livros didáticos sobre o estudo da elipse

O livro didático é um importante recurso pedagógico do professor em sala de aula. Assim, deve-se estar atento à qualidade do mesmo. Não deve ser o único recurso a ser utilizado pelo professor, mas sim um dos meios para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Nos PCN’s, menciona-se a importância da utilização do livro didático dentro das escolas brasileiras:

> Dentre os diferentes recursos, o livro didático é um dos materiais de mais forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 96).

Foram analisados alguns livros didáticos escolhidos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), no ensino de elipse em relação à apresentação de conteúdos, inclusão de demonstrações, abordagem de conceitos, inclusão de exemplos teóricos, inclusão de situações aplicadas e uso de recursos didáticos. Após a análise, percebe-se que há pontos em comum entre eles e foram definidos os seguintes itens para comparação:

I1: Definem a elipse como lugar geométrico;

I2: Fazem a demonstração da equação reduzida da elipse;

I3: Apresentam o estudo da excentricidade da elipse.

Esses três itens apresentam a preocupação com o objetivo descrito no PCNEM (1998) de levar o aluno a expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática.

I4: Apresentam situações práticas para a construção da elipse;

I5: Apresentam atividades com o uso de recursos computacionais.

Os resultados da análise e os itens observados estão resumidos no quadro 3.6:

Quadro 3.6: Quadro com análise de livros didáticos

Livros Didáticos:	Itens relacionados:				
	I 1	I 2	I 3	I 4	I 5
Matemática Completa, Giovanni,José Ruy e Bonjorno,José Roberto Editora FTD, 2005	X	X	X	X	
Quadrante Matemática 3 Chavante, Eduardo e Prestes, Diego Editora SM, 2016	X		X	X	
Matemática Contexto e Aplicações Dante, Luiz Roberto Editora Ática, 2010	X		X		X
Matemática Paiva Volume 3 Paiva, Manoel Editora Moderna, 2009	X	X	X	X	
Matemática Ensino Médio 3 Smole, Kátia Stocco e Diniz, Maria Ignez Editora Saraiva, 2005	X	X	X	X	
Matemática Ciência e Aplicações Iezzi, Gelson e outros Editora Saraiva, 2013	X	X	X	X	

Fonte: Própria autora (2018)

Os itens no quadro 3.6, que foram assinalados, foram encontrados nos livros didáticos considerados. O item I 5 foi o único que apareceu em apenas um dos livros didáticos considerados.

3.4 Problemas de vestibulares e ENEM abordando a cônica elipse

Os alunos do ensino médio são estimulados a ingressar no ensino superior, para isso muitos participam de vestibulares e do ENEM como forma de ingresso às universidades. As cônicas aparecem como um dos temas cobrados em provas de vestibulares e também do ENEM, o que reforça a necessidade de se conseguir equilibrar o uso de materiais didáticos e tecnológicos, significados e aspectos históricos com a manipulação algébrica necessária para a resolução de problemas inseridos nessas provas.

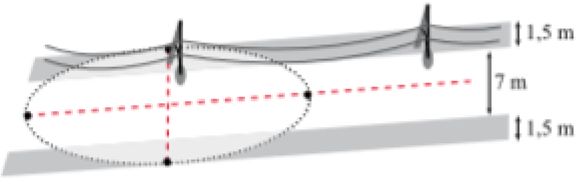
São apresentados alguns problemas de vestibulares e ENEM que mostram a necessidade de articulação entre compreensão de significados e manipulação algébrica. Os exercícios estão resolvidos no apêndice.

Exemplo 3.1 (UNESP-2010) A figura mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5 m de largura, separadas por uma pista de 7 m de largura. Vamos admitir que:

I. os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;
II. o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;
III. o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).

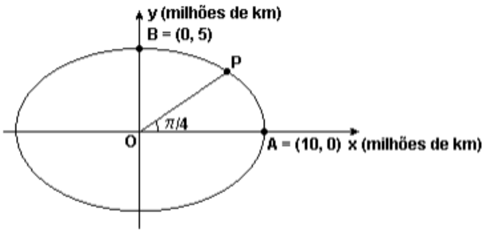
Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de aproximadamente:

Dado: $0{,}943^2 \approx 0{,}889$ e $\sqrt{0{,}111} \approx 0{,}333$



(A) 35. (B) 30. (C) 25. (D) 20. (E) 15.

Exemplo 3.2 (Unesp 2008) Suponha que um planeta P descreva uma órbita elíptica em torno de uma estrela O, de modo que, considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, sendo a estrela O a origem do sistema, a órbita possa ser descrita aproximadamente pela equação $\left(\frac{x^2}{100}\right)+\left(\frac{y^2}{25}\right)=1$, com x e y em milhões de quilômetros. A figura representa a estrela O, a órbita descrita pelo planeta e sua posição no instante em que o ângulo PÔA mede $\frac{\pi}{4}$.



(figura fora de escala)

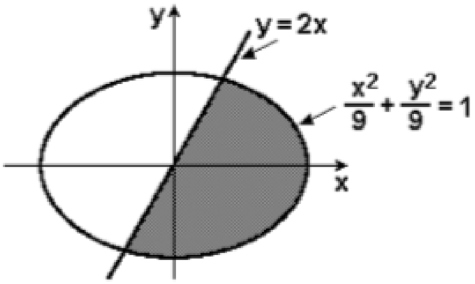
A distância, em milhões de km, do planeta P à estrela O, no instante representado na figura, é:

(A) $2\sqrt{5}$.   (B) $2\sqrt{10}$.   (C) $5\sqrt{2}$.   (D) $10\sqrt{2}$.   (E) $5\sqrt{10}$.

Exemplo 3.3 (FUVEST-2001) A elipse $x^2 + (y^2/2) = 9/4$ e a reta y = 2x + 1, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento AB é:

(A) (-2/3, -1/3).   (B) (2/3, -7/3).   (C) (1/3, -5/3).   (D) (-1/3, 1/3).   (E) (-1/4, 1/2).

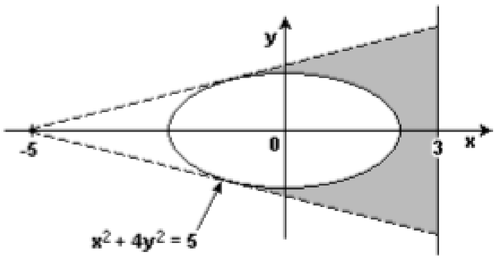
Exemplo 3.4 (Unifesp-2004) A área sombreada na figura,



limitada pela elipse e pela reta indicadas, é:

(A) π.   (B) 2π.   (C) 3π.   (D) 4π.   (E) 6π.

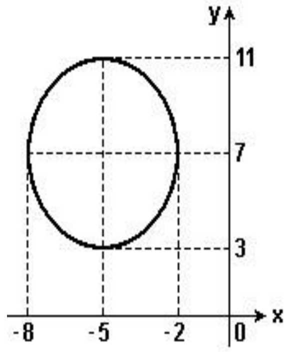
Exemplo 3.5 (UERJ-2004) Um holofote situado na posição (-5,0) ilumina uma região elíptica de contorno $x^2 + 4y^2 = 5$, projetando sua sombra numa parede representada pela reta x = 3, conforme ilustra a figura abaixo.



Considerando o metro a unidade dos eixos, o comprimento da sombra projetada é de:

(A) 2.   (B) 3.   (C) 4.   (D) 5.

Exemplo 3.6 (UNESP-2003) A figura representa uma elipse.



A partir dos dados disponíveis, a equação desta elipse é

(A) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{7}=1$. (B) $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-7)^2}{16}=1$. (C) $(x-5)^2+(y-7)^2=1$.

(D) $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+7)^2}{16}=1$. (E) $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-4)^2}{7}=1$.

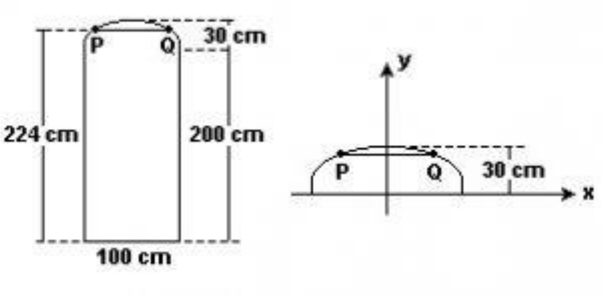
Exemplo 3.7 (Unesp-2000) Considere a elipse de equação $x^2/25 + y^2/9 = 1$

a) Mostre que o ponto P (3,12/5) pertence à elipse e calcule a distância de P ao eixo das abscissas.

b) Determine os vértices Q e R da elipse que pertencem ao eixo das abscissas e calcule a área do triângulo PQR, onde P (3,12/5).

Exemplo 3.8 (UERJ-2001) Uma porta colonial é formada por um retângulo de 100cm×200cm e uma semi-elipse.

Observe as figuras:



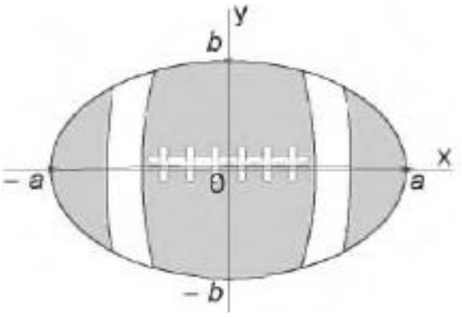
Na semi-elipse o eixo maior mede 100cm e o semi-eixo menor, 30cm. Calcule a medida da corda PQ, paralela ao eixo maior, que representa a largura da porta a 224cm de altura.

Exemplo 3.9 (Ita-2005) A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, -2) são, respectivamente,

(A) $\sqrt{3}$ e 1/2. (B) 1/2 e $\sqrt{3}$. (C) $(\sqrt{3})/2$ e 1/2.

(D) $\sqrt{3}$ e $(\sqrt{3})/2$. (E) $2\sqrt{3}$ e $(\sqrt{3})/2$.

Exemplo 3.10 (ENEM-2015) A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores *a* e *b* são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por V = $4ab^2$. O volume dessa bola, em função apenas de b, é dado por

(A) $8b^3$. (B) $6b^3$. (C) $5b^3$. (D) $4b^3$. (E) $2b^3$.

Na tentativa de amenizar a dificuldade da falta de tempo para o aprofundamento do estudo da elipse, no próximo capítulo, serão propostas atividades extraclasse para serem desenvolvidas com os alunos do 3º Ano do Ensino Médio.

CAPÍTULO 4

ATIVIDADES EXTRACLASSE SOBRE A ELIPSE

Neste capítulo, será feito o relato das atividades que foram desenvolvidas com alunos do 3º Ano do Ensino Médio da escola E.E. Profa. Yone Dias de Aguiar, no município de Penápolis, estado de São Paulo, sobre o estudo da elipse, na tentativa de amenizar a dificuldade da falta de tempo para o aprofundamento do estudo. O desenvolvimento da atividade buscou complementar o trabalho realizado em sala de aula, oferecendo ao aluno a possibilidade de vivenciar na prática conceitos sobre a elipse. As atividades foram realizadas juntamente com a professora Giovana Marques dos Reis, que abordou a cônica hipérbole.

4.1 Relato sobre a escola

A escola E. E. Prof.ª Yone Dias de Aguiar, localizada no bairro Vila Fátima, na cidade de Penápolis-SP, atende hoje 338 alunos do Ensino Fundamental-Anos Finais e 242 alunos do Ensino Médio, sendo 76 alunos do 3º Ano do Ensino Médio que frequentam o período da manhã com uma carga horária de 30 aulas semanais, sendo 5 aulas para a disciplina de Matemática.

Conta com duas salas de multimídia sendo que uma tem acesso à internet e um laboratório de informática com 18 computadores que fazem parte de um projeto do estado de São Paulo conhecido como Acessa Escola.

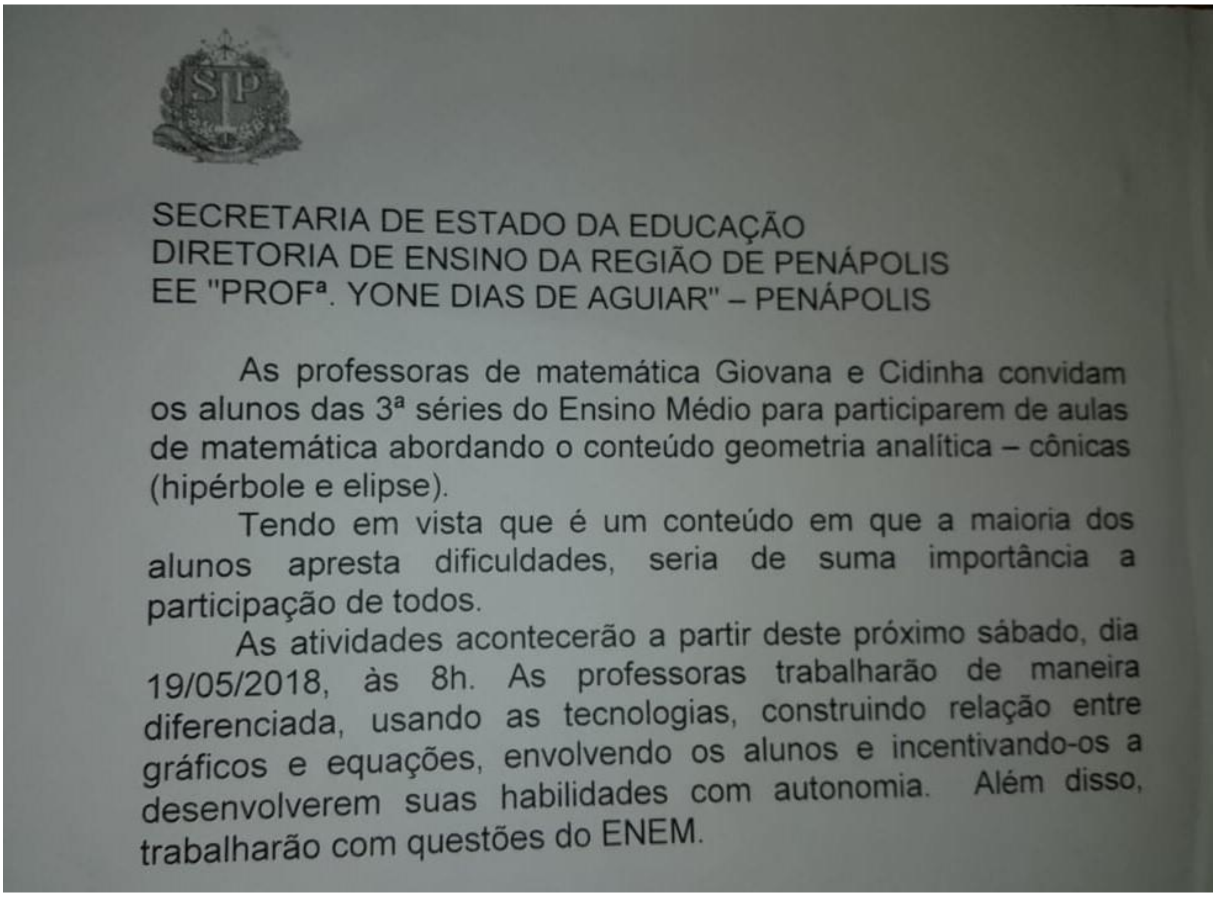
Trabalhando há 14 anos nessa escola, com alunos do ensino fundamental e médio, antes de dar início à realização das atividades, houve o contato com a equipe gestora da escola, que demonstrou muito interesse e apoio.

4.2 Relato das atividades

A professora titular das turmas dos 3º anos foi comunicada sobre a realização das atividades. Esta informou que os alunos apresentaram muitas dificuldades no tópico de Geometria Analítica já apresentado, e que não haveria tempo suficiente para prosseguir o estudo das cônicas em sala de aula.

Para a realização das atividades a coordenadora preparou um convite para todos os alunos, conforme se observa a seguir:

Figura 4.1: Convite para as atividades extraclasse



SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE PENÁPOLIS
EE "PROFª. YONE DIAS DE AGUIAR" – PENÁPOLIS

As professoras de matemática Giovana e Cidinha convidam os alunos das 3ª séries do Ensino Médio para participarem de aulas de matemática abordando o conteúdo geometria analítica – cônicas (hipérbole e elipse).

Tendo em vista que é um conteúdo em que a maioria dos alunos apresta dificuldades, seria de suma importância a participação de todos.

As atividades acontecerão a partir deste próximo sábado, dia 19/05/2018, às 8h. As professoras trabalharão de maneira diferenciada, usando as tecnologias, construindo relação entre gráficos e equações, envolvendo os alunos e incentivando-os a desenvolverem suas habilidades com autonomia. Além disso, trabalharão com questões do ENEM.

Fonte: Própria autora (2018)

De comum acordo entre professoras e alunos, foram definidas as datas e horários em que seriam realizadas as atividades. Na primeira data marcada não havia energia elétrica na escola, assim a aula teve que ser adiada para outro dia.

4.2.1 Relato da primeira atividade

Para a primeira atividade de duração de uma hora, compareceram 5 alunos muito motivados para aprender e tentar sanar suas dificuldades. Iniciou-se a atividade com uma roda de conversa para se verificar os conhecimentos prévios sobre o assunto, onde se pode verificar que o conteúdo sobre cônicas realmente não havia sido trabalhado em sala de aula.

Através de um experimento com cones de barbante, construídos antes da aula, baseado no estudo de Kaleff (2010), foram mostradas para os alunos as cônicas com feixes luminosos usando um retroprojetor.

Figura 4.2: Cônicas como curvas luminosas

Fonte: Própria autora

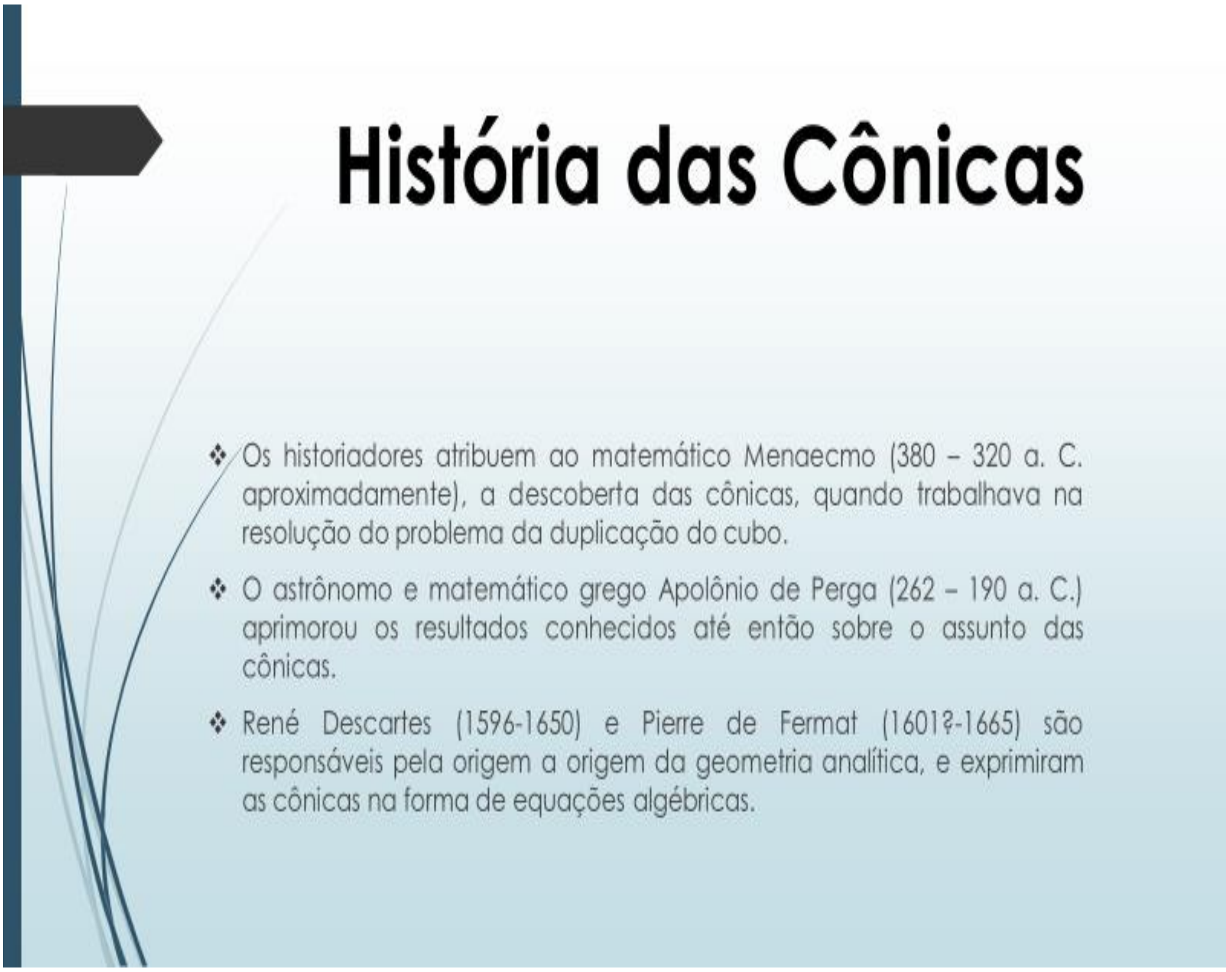
Figura 4.3: A elipse luminosa

Fonte: Própria autora

Os alunos ficaram motivados com o experimento das cônicas luminosas e fizeram vários questionamentos sobre as cônicas e suas características.

Com a apresentação no Power Point de alguns slides que foram preparados, deu-se início à parte histórica das cônicas.

Figura 4.4: Parte histórica das cônicas



História das Cônicas

- Os historiadores atribuem ao matemático Menaecmo (380 – 320 a. C. aproximadamente), a descoberta das cônicas, quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo.
- O astrônomo e matemático grego Apolônio de Perga (262 – 190 a. C.) aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto das cônicas.
- René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601?-1665) são responsáveis pela origem a origem da geometria analítica, e exprimiram as cônicas na forma de equações algébricas.

Fonte: Própria autora

Os alunos comentaram, nesse momento, sobre a origem da Matemática e dos números, sempre mostrando muito interesse em aprender.

Outros slides foram apresentados com figuras sobre a elipse na atualidade.

Figura 4.5: Cônicas na Atualidade

Cônicas na Atualidade

Fonte: //br.freepik.com/fotos-premium/dentista-examinando-os-dentes-dos-pacientes-na-cadeira-sob-luz-brilhante_1910692.htm (2018)

Figura 4.6: Cônicas na Atualidade

Cônicas na Atualidade

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=O3ndN4gv4cc (2018)

Nesse momento, com as imagens, os alunos começaram a observar algumas características da curva elipse, comparando com a circunferência que foi estudada em sala de aula.

4.2.2 Relato da segunda atividade

Aqui os alunos realizaram a construção da elipse com materiais concretos, utilizando uma prancha com papel sulfite, dois marcadores, um pedaço de linha e caneta pincel. Comentou-se sobre a definição da elipse como lugar geométrico e sobre os focos. A atividade teve duração de uma hora.

Figura 4.7: Construção da elipse

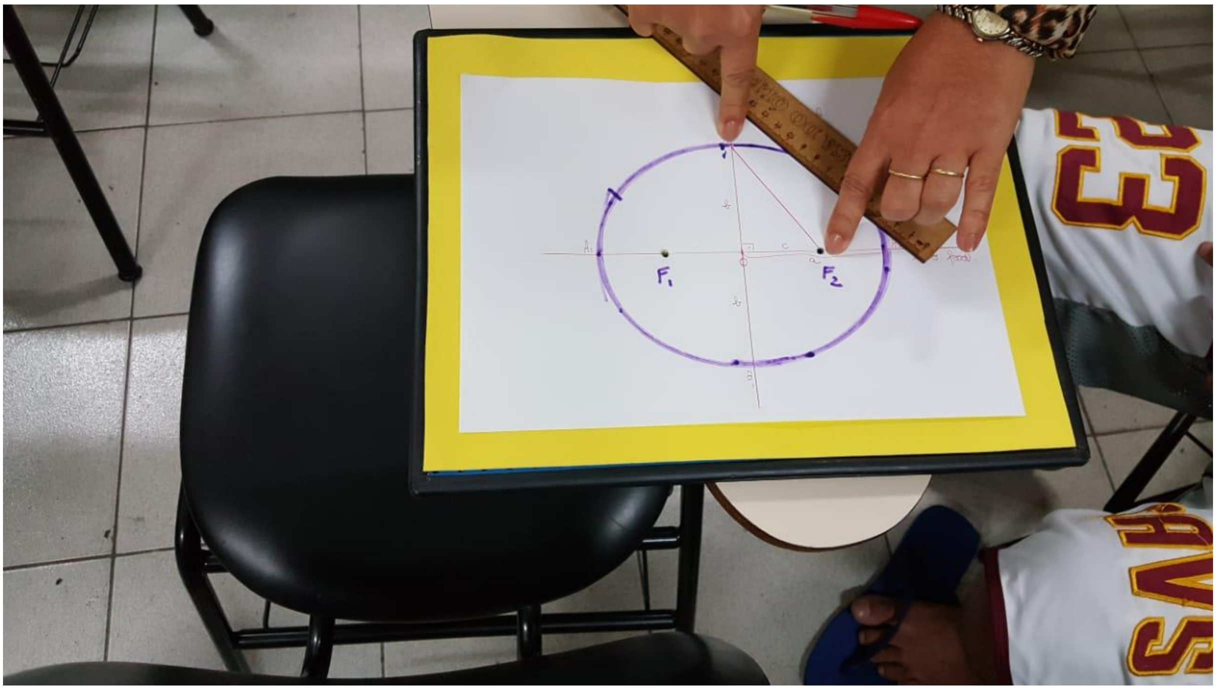
Fonte: Própria autora (2018)

Figura 4.8: Alunos construindo a elipse

Fonte: Própria autora (2018)

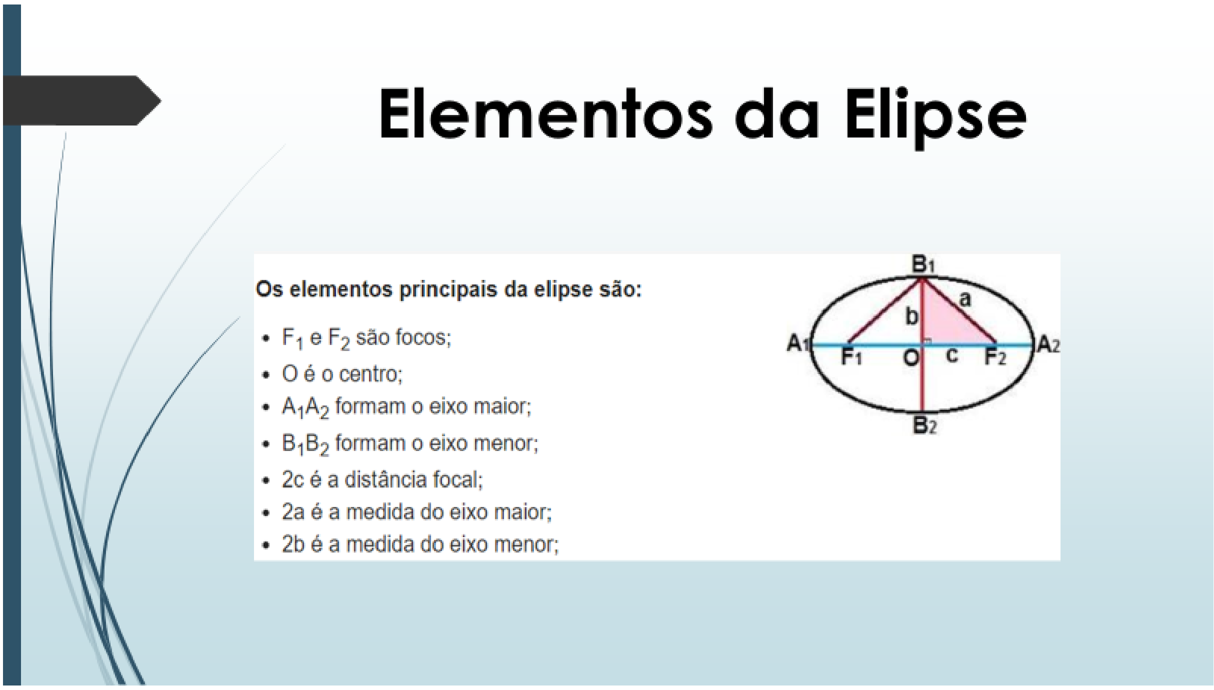
Usando a construção feita pelos alunos, prosseguiu o estudo dos principais elementos da elipse, destacando-os na figura da elipse e apresentando alguns slides.

Figura: 4.9: Os elementos da elipse



Fonte: Própria autora (2018)

Figura 4.10: Elementos da elipse



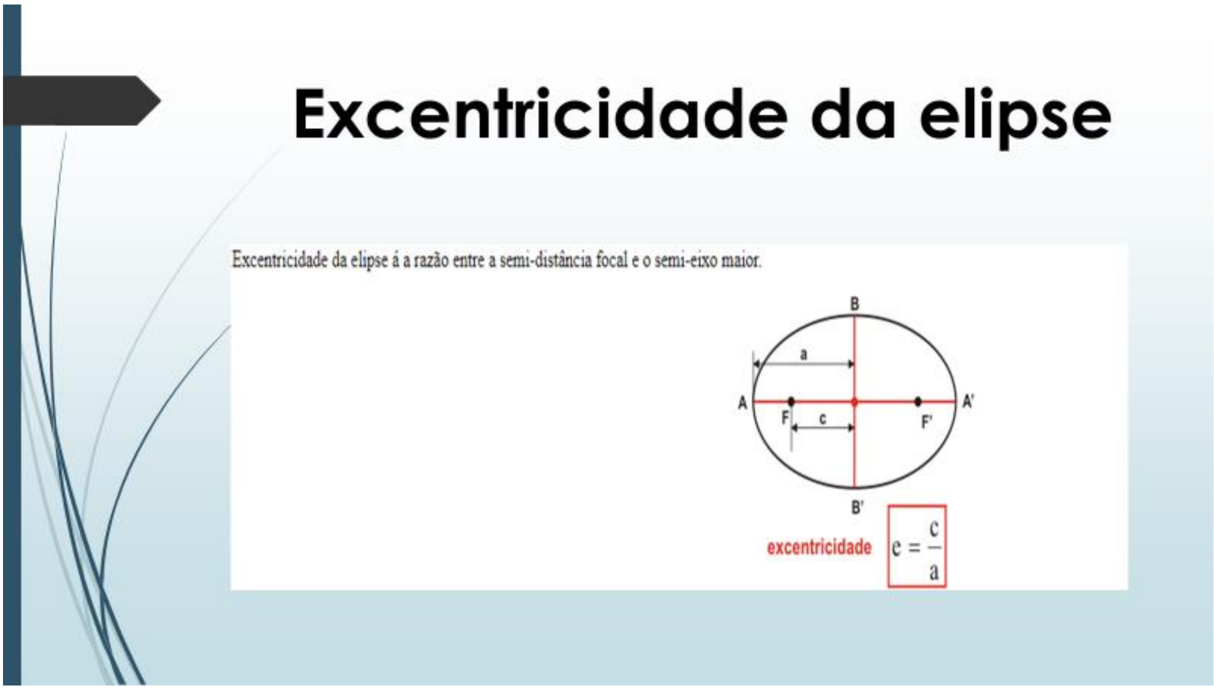
Elementos da Elipse

Os elementos principais da elipse são:

- F_1 e F_2 são focos;
- O é o centro;
- A_1A_2 formam o eixo maior;
- B_1B_2 formam o eixo menor;
- 2c é a distância focal;
- 2a é a medida do eixo maior;
- 2b é a medida do eixo menor;

Fonte: Própria autora (2018)

Figura 4.11: Excentricidade da elipse



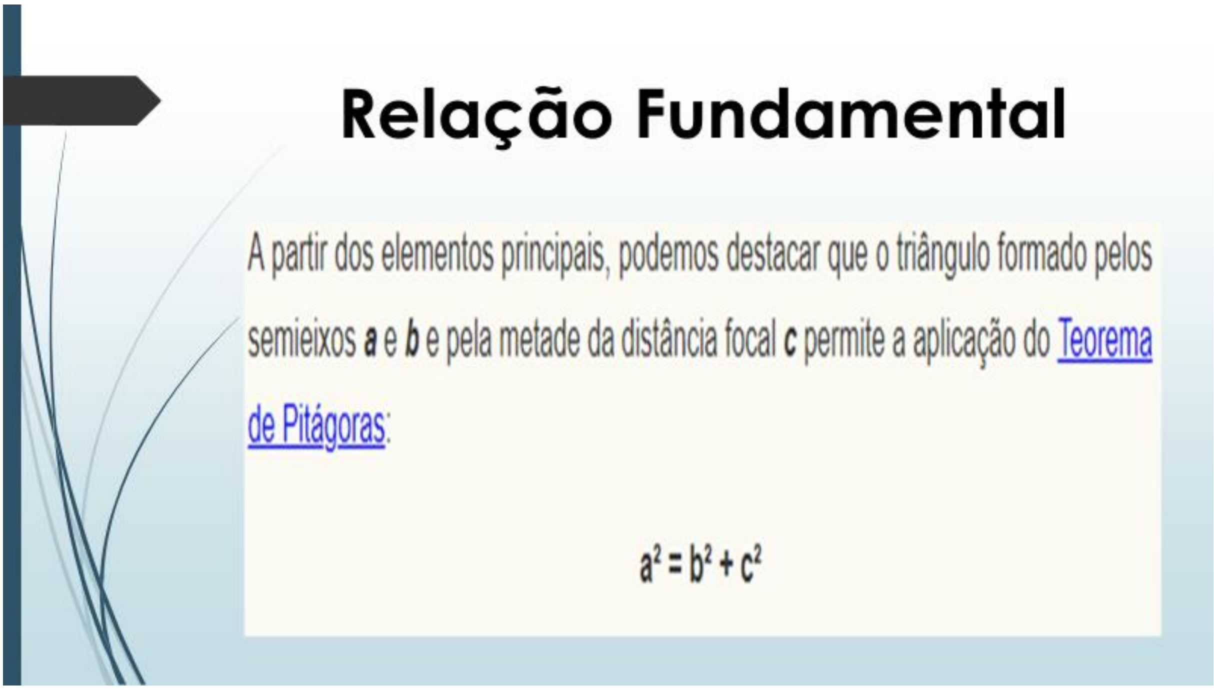
Excentricidade da elipse

Excentricidade da elipse á a razão entre a semi-distância focal e o semi-eixo maior.

excentricidade $\boxed{e = \frac{c}{a}}$

Fonte: Própria autora (2018)

Figura 4.12: Relação Fundamental



Relação Fundamental

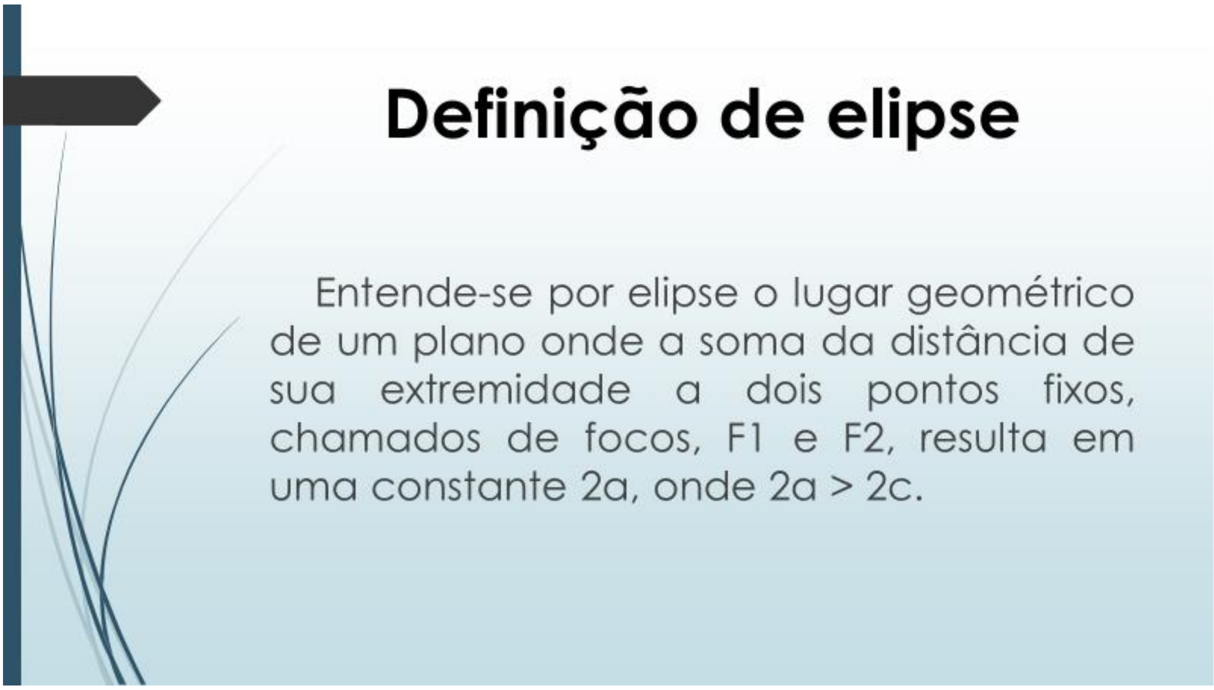
A partir dos elementos principais, podemos destacar que o triângulo formado pelos semieixos **a** e **b** e pela metade da distância focal **c** permite a aplicação do Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: Própria autora (2018)

Para a demonstração da equação reduzida da elipse foi apresentada a definição formal e os alunos buscaram deduzir as fórmulas com muito auxílio do professor, pois vários conceitos estavam esquecidos ou não aprendidos.

Figura 4.13: Definição de elipse

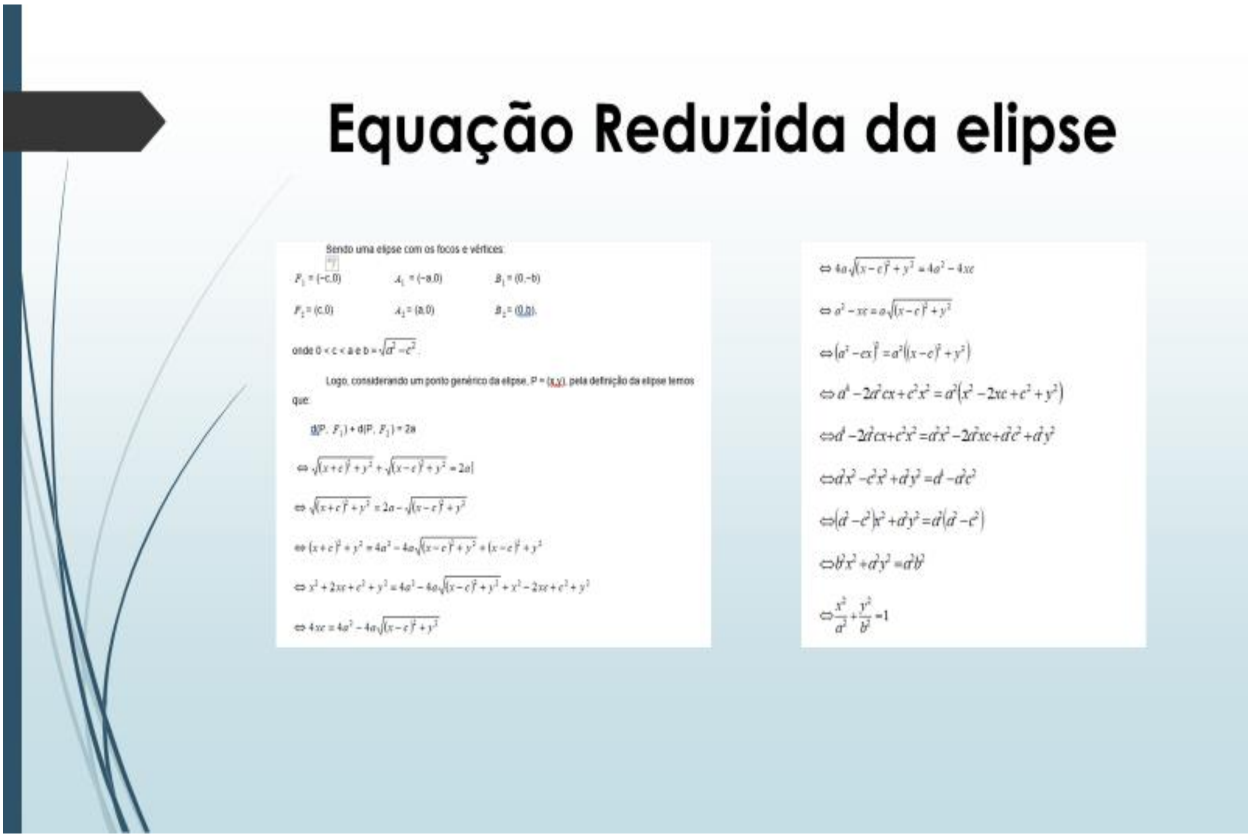


Definição de elipse

Entende-se por elipse o lugar geométrico de um plano onde a soma da distância de sua extremidade a dois pontos fixos, chamados de focos, F1 e F2, resulta em uma constante 2a, onde 2a > 2c.

Fonte: Própria autora (2018)

Figura 4.14: Equação reduzida da elipse



Equação Reduzida da elipse

Sendo uma elipse com os focos e vértices:

$F_1 = (-c,0)$ $A_1 = (-a,0)$ $B_1 = (0,-b)$

$F_2 = (c,0)$ $A_2 = (a,0)$ $B_2 = (0,b)$,

onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Logo, considerando um ponto genérico da elipse, $P = (x,y)$, pela definição da elipse temos que:

$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$\Leftrightarrow a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

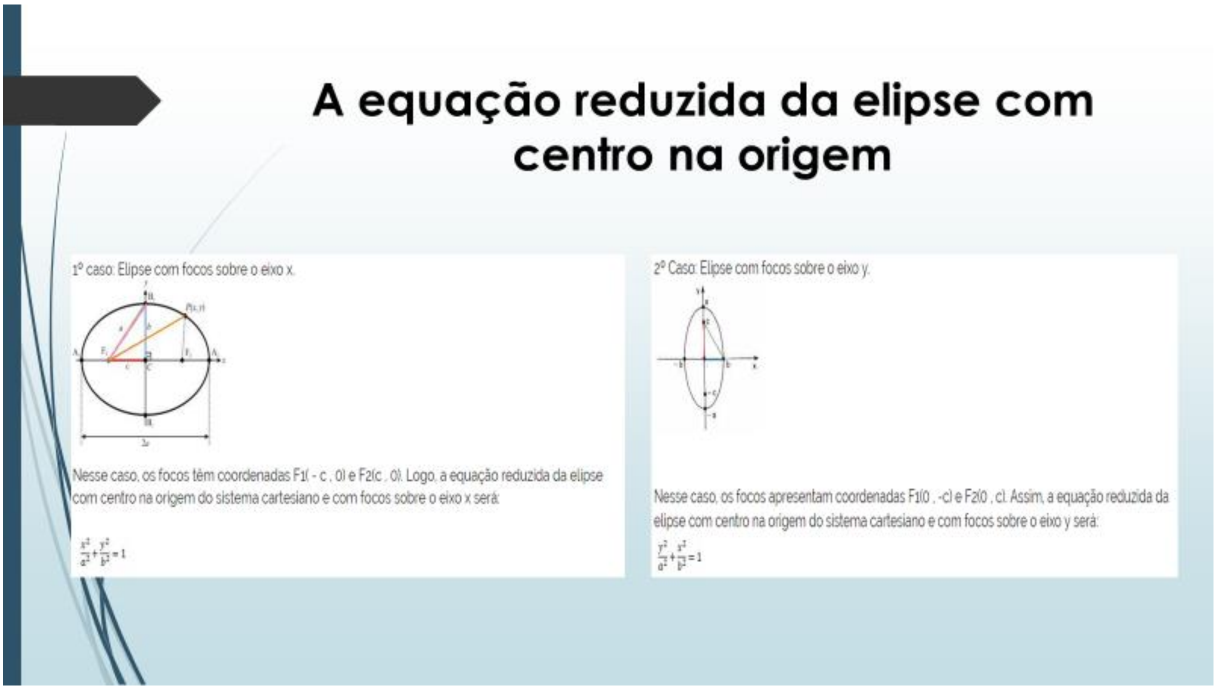
$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fonte: Própria autora (2018)

Figura 4.15: As equações reduzidas da elipse



A equação reduzida da elipse com centro na origem

1º caso: Elipse com focos sobre o eixo x.

Nesse caso, os focos têm coordenadas F1(- c , 0) e F2(c , 0). Logo, a equação reduzida da elipse com centro na origem do sistema cartesiano e com focos sobre o eixo x será:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2º Caso: Elipse com focos sobre o eixo y.

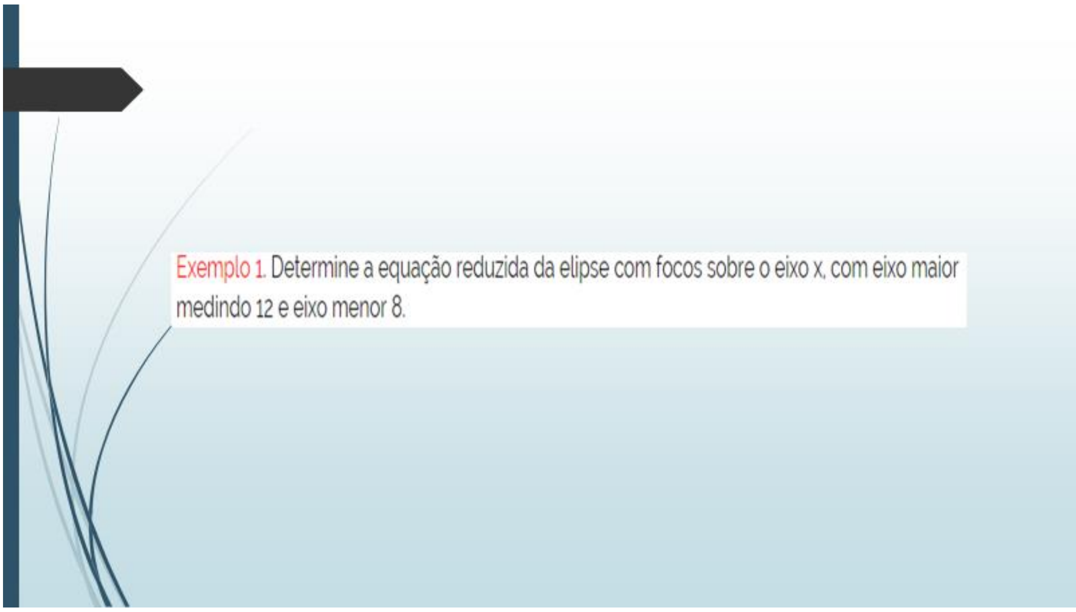
Nesse caso, os focos apresentam coordenadas F1(0 , -c) e F2(0 , c). Assim, a equação reduzida da elipse com centro na origem do sistema cartesiano e com focos sobre o eixo y será:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Fonte: Própria autora (2018)

Após a apresentação dos slides, dois exemplos de exercícios envolvendo a equação reduzida da elipse foram apresentados aos alunos. Eles resolveram em grupo, dentro do tempo previsto e sem dificuldades e solicitaram outras atividades para fixação do conteúdo apresentado.

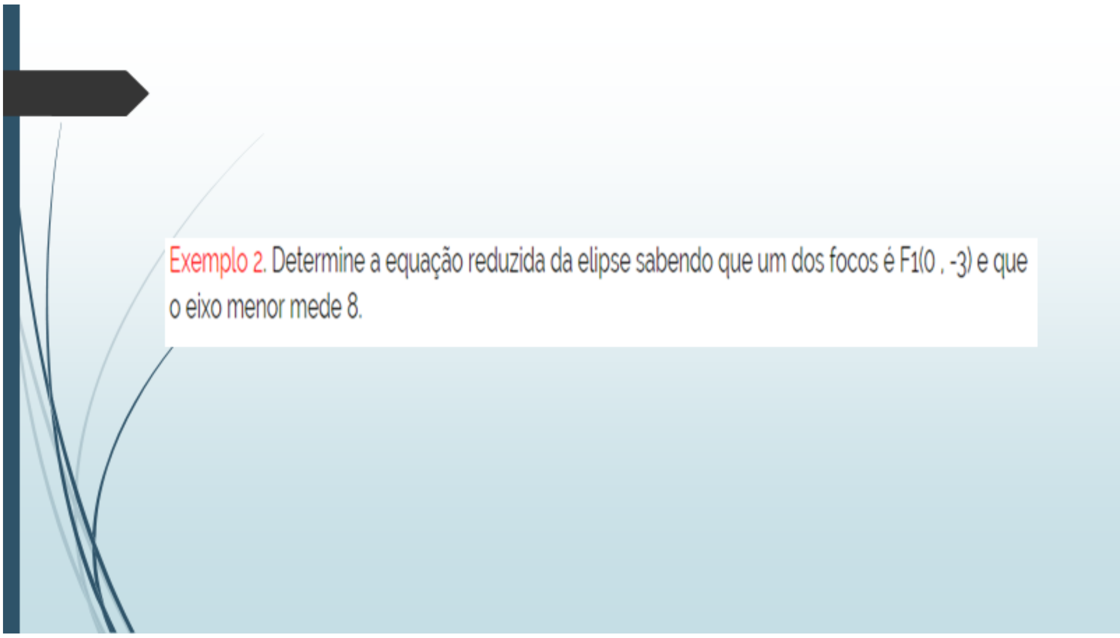
Figura 4.16: Exemplo de exercício envolvendo a equação da elipse



Exemplo 1. Determine a equação reduzida da elipse com focos sobre o eixo x, com eixo maior medindo 12 e eixo menor 8.

Fonte: Própria autora (2018)

Figura 4.17: Exemplo de exercício envolvendo a equação da elipse



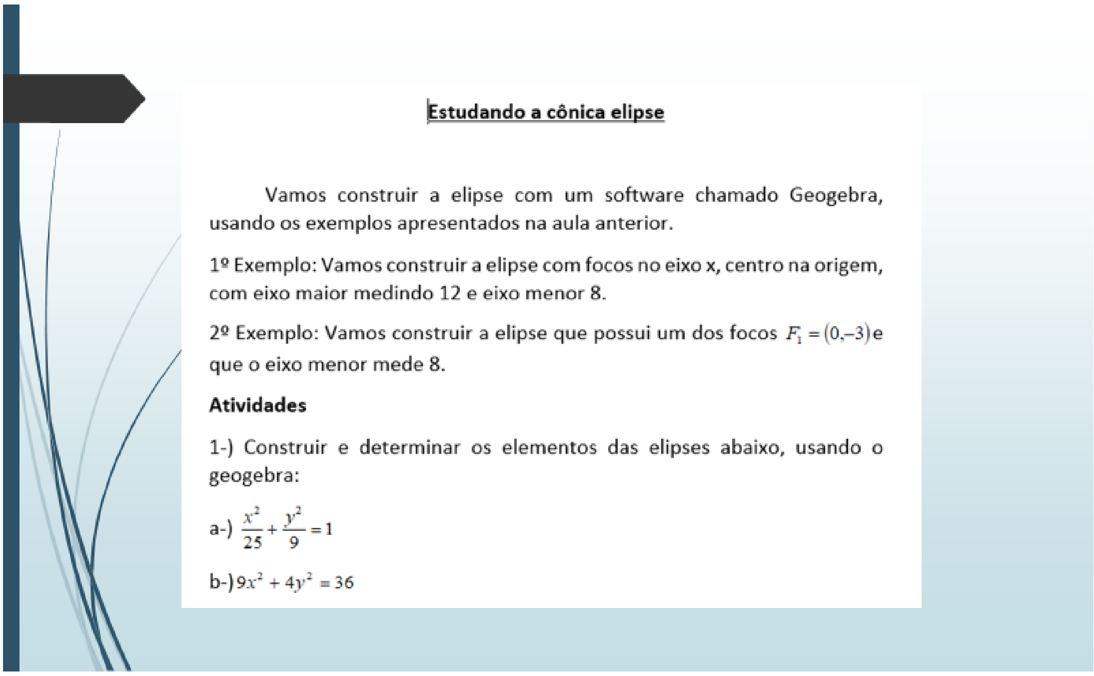
Exemplo 2. Determine a equação reduzida da elipse sabendo que um dos focos é F1(0 , -3) e que o eixo menor mede 8.

Fonte: Própria autora (2018)

4.2.3 Relato da terceira atividade

Na sala de informática, os alunos tiveram o primeiro contato com o software GeoGebra e conheceram os principais comandos. Propôs-se as atividades apresentadas na Figura 4.18:

Figura 4.18: Estudando a cônica elipse usando o GeoGebra



Estudando a cônica elipse

Vamos construir a elipse com um software chamado Geogebra, usando os exemplos apresentados na aula anterior.

1º Exemplo: Vamos construir a elipse com focos no eixo x, centro na origem, com eixo maior medindo 12 e eixo menor 8.

2º Exemplo: Vamos construir a elipse que possui um dos focos $F_1 = (0,-3)$ e que o eixo menor mede 8.

Atividades

1-) Construir e determinar os elementos das elipses abaixo, usando o geogebra:

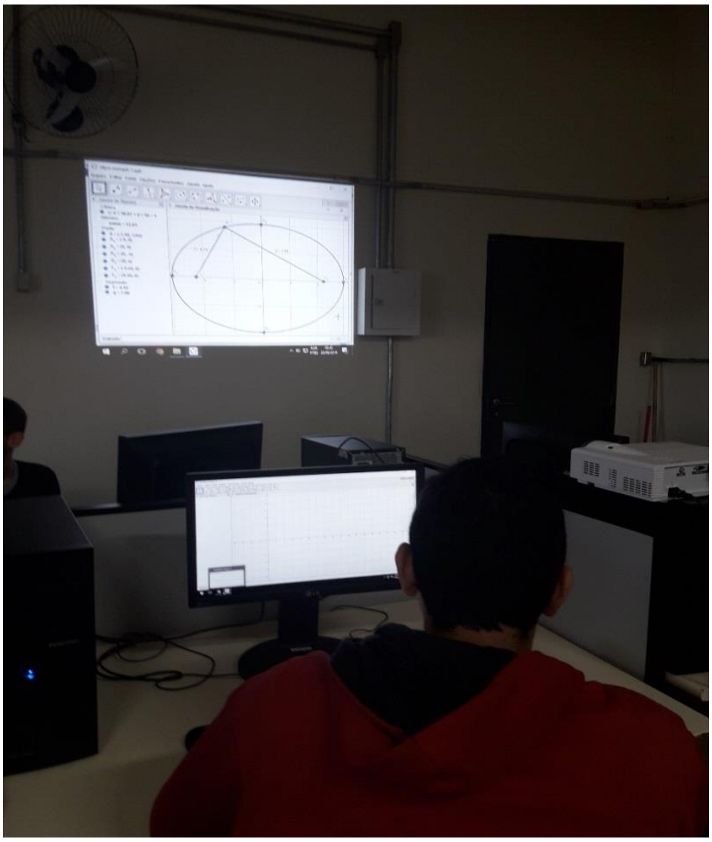
a-) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b-) $9x^2 + 4y^2 = 36$

Fonte: Própria autora (2018)

Os alunos participaram com empenho e não apresentaram dificuldades nas construções que foram propostas, realizaram as atividades individualmente dentro do tempo previsto de aproximadamente uma hora.

Figura 4.19: Alunos construindo a elipse no GeoGebra



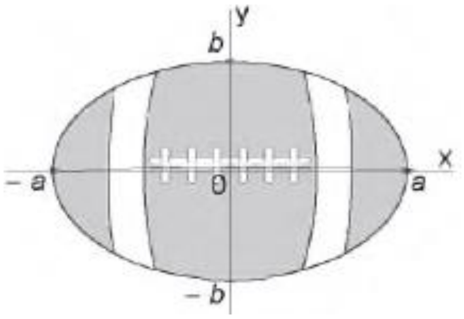
Fonte: Própria autora

4.2.4 Relato da quarta atividade

Para essa atividade foram trabalhados aspectos teóricos, através da resolução de problemas envolvendo elipse, retirados de vestibulares e ENEM. Foi solicitado aos alunos que respondessem as questões apresentadas a seguir:

Atividades sobre elipse

(ENEM-2015) A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores *a* e *b* são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$. O volume dessa bola, em função apenas de b, é dado por

(A) $8b^3$

(B) $6b^3$

(C) $5b^3$

(D) $4b^3$

(E) $2b^3$

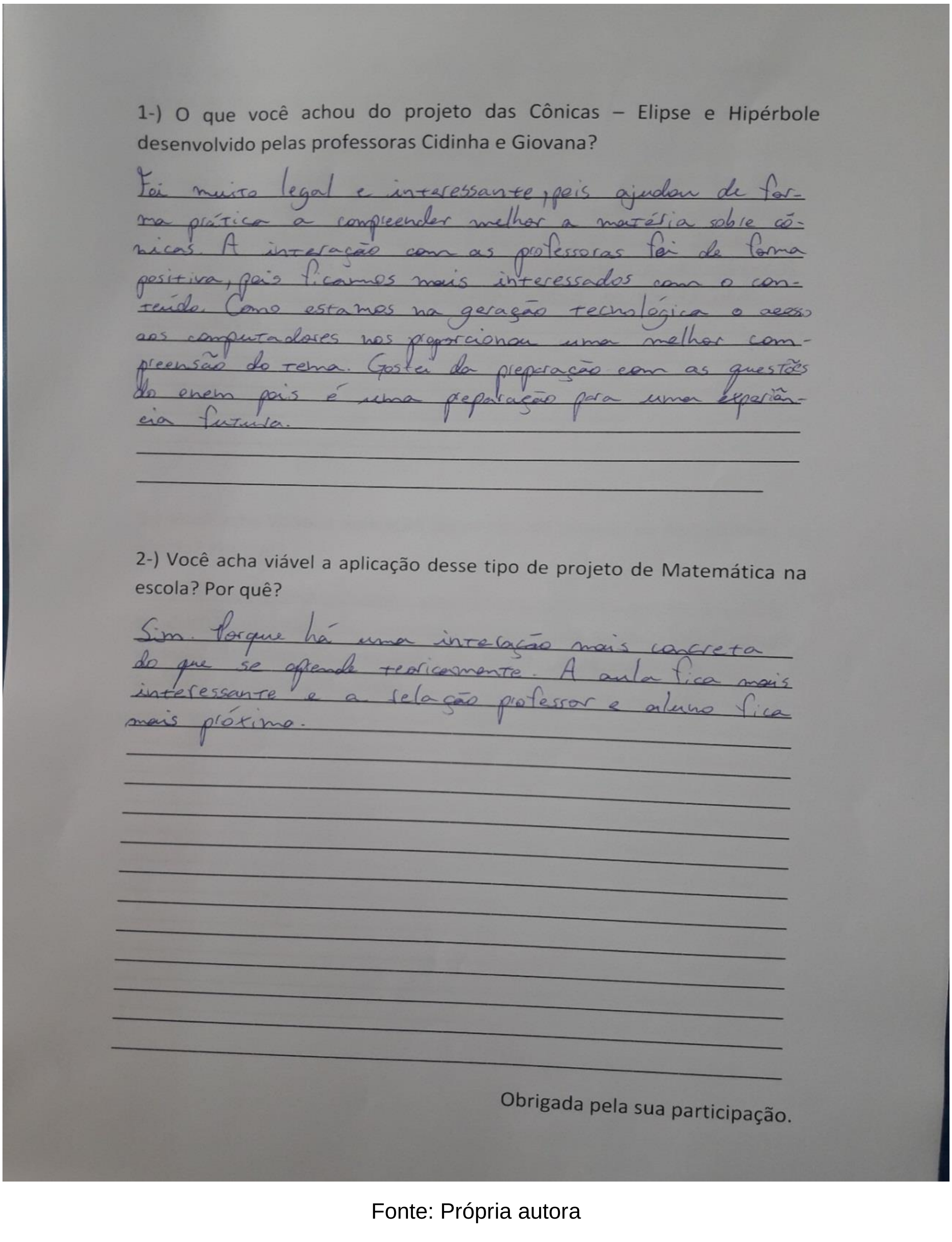
(UEL) Em uma praça dispõe-se de uma região retangular de 20 m de comprimento por 16 m de largura para construir um jardim. A exemplo de outros canteiros, este deverá ter a forma elíptica e estar inscrito nessa região retangular. Para aguá-lo, serão colocados dois aspersores nos pontos que correspondem aos focos da elipse. Qual será a distância entre os aspersores?

a) 4 m b) 6 m c) 8 m d) 10 m e) 12 m

Os alunos responderam as questões no tempo de quarenta minutos, em grupos e não apresentaram muita dificuldade.

Para finalizar as atividades, foi solicitado que respondessem algumas questões, como forma de avaliar as atividades realizadas. A seguir são apresentadas as respostas de dois alunos:

Figura 4.20: Comentários dos alunos sobre as atividades



1-) O que você achou do projeto das Cônicas – Elipse e Hipérbole desenvolvido pelas professoras Cidinha e Giovana?

Foi muito legal e interessante, pois ajudou de forma prática a compreender melhor a matéria sobre cônicas. A interação com as professoras foi de forma positiva, pois ficamos mais interessados com o conteúdo. Como estamos na geração tecnológica o acesso aos computadores nos proporcionou uma melhor compreensão do tema. Gostei da preparação com as questões do enem pois é uma preparação para uma experiência futura.

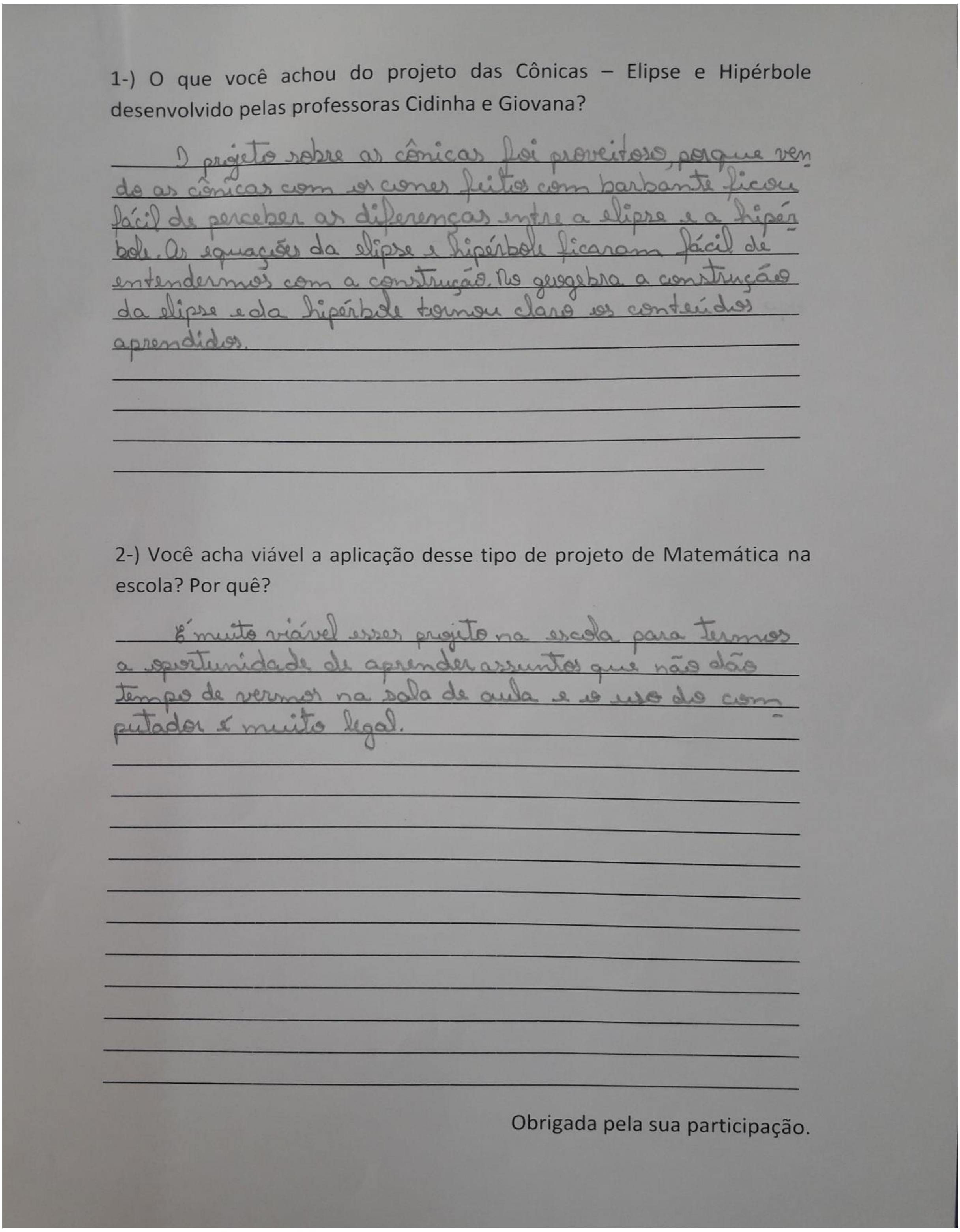
2-) Você acha viável a aplicação desse tipo de projeto de Matemática na escola? Por quê?

Sim. Porque há uma interação mais concreta do que se aprende teoricamente. A aula fica mais interessante e a relação professor e aluno fica mais próximo.

Obrigada pela sua participação.

Fonte: Própria autora

Figura 4.21: Comentários dos alunos sobre as atividades



1-) O que você achou do projeto das Cônicas – Elipse e Hipérbole desenvolvido pelas professoras Cidinha e Giovana?

O projeto sobre as cônicas foi proveitoso, porque vendo as cônicas com os cones feitos com barbante ficou fácil de perceber as diferenças entre a elipse e a hipérbole. As equações da elipse e hipérbole ficaram fácil de entendermos com a construção. No geogebra a construção da elipse e da hipérbole tornou claro os conteúdos aprendidos.

2-) Você acha viável a aplicação desse tipo de projeto de Matemática na escola? Por quê?

É muito viável esses projeto na escola para termos a oportunidade de aprender assuntos que não dão tempo de vermos na sala de aula e o uso do computador é muito legal.

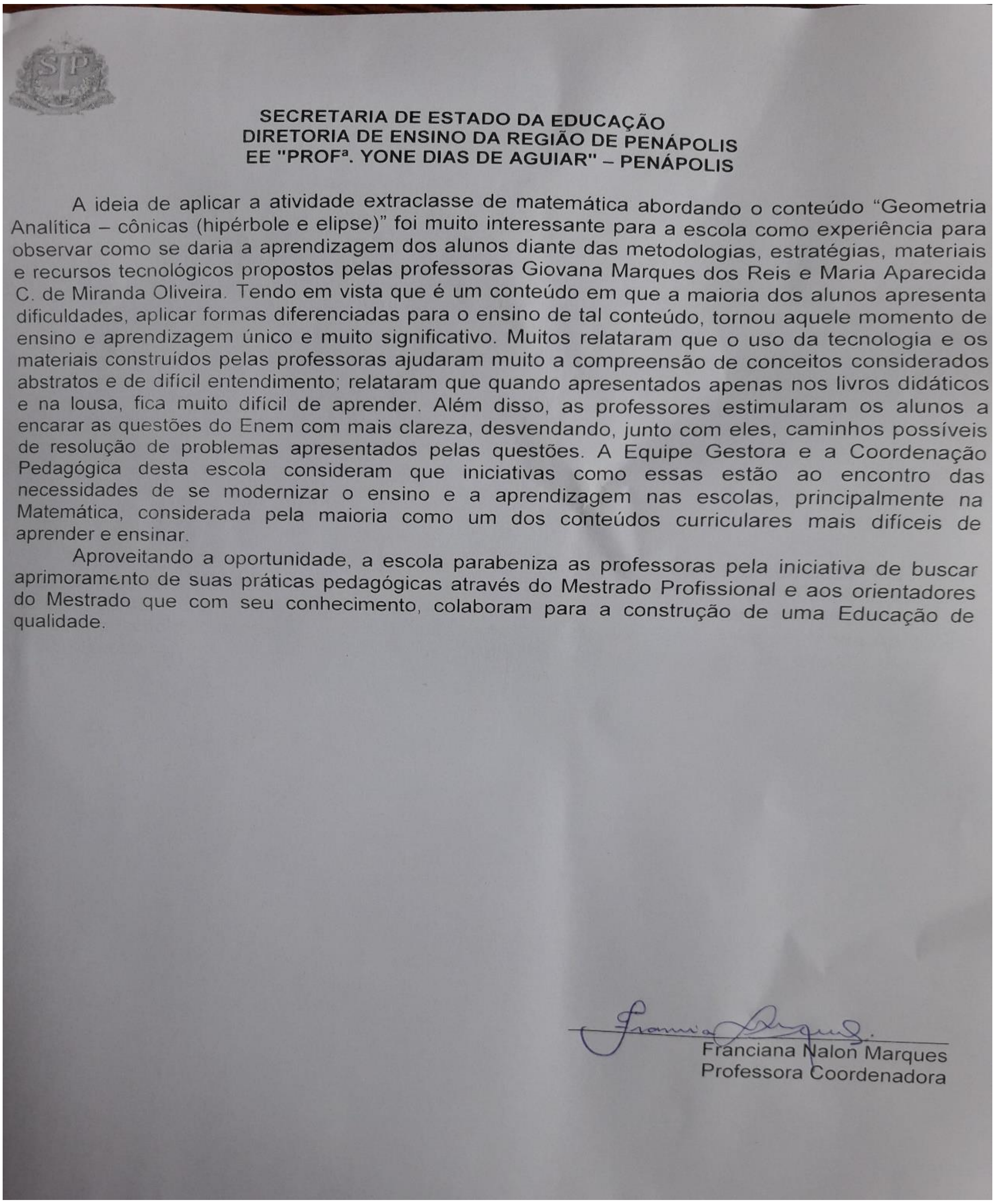
Obrigada pela sua participação.

Fonte: Própria autora

Os alunos que participaram das atividades estavam motivados e mostraram muito interesse em aprender, porém representaram apenas, aproximadamente 7% do total de alunos do 3º Ano da escola considerada.

A professora coordenadora da escola, Franciana Nalon Marques, apresentou um relatório sobre as atividades que foram aplicadas, como podemos observar na figura 4.22.

Figura 4.22: Relatório da professora coordenadora sobre as atividades



SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE PENÁPOLIS
EE "PROFª. YONE DIAS DE AGUIAR" – PENÁPOLIS

A ideia de aplicar a atividade extraclasse de matemática abordando o conteúdo "Geometria Analítica – cônicas (hipérbole e elipse)" foi muito interessante para a escola como experiência para observar como se daria a aprendizagem dos alunos diante das metodologias, estratégias, materiais e recursos tecnológicos propostos pelas professoras Giovana Marques dos Reis e Maria Aparecida C. de Miranda Oliveira. Tendo em vista que é um conteúdo em que a maioria dos alunos apresenta dificuldades, aplicar formas diferenciadas para o ensino de tal conteúdo, tornou aquele momento de ensino e aprendizagem único e muito significativo. Muitos relataram que o uso da tecnologia e os materiais construídos pelas professoras ajudaram muito a compreensão de conceitos considerados abstratos e de difícil entendimento; relataram que quando apresentados apenas nos livros didáticos e na lousa, fica muito difícil de aprender. Além disso, as professores estimularam os alunos a encarar as questões do Enem com mais clareza, desvendando, junto com eles, caminhos possíveis de resolução de problemas apresentados pelas questões. A Equipe Gestora e a Coordenação Pedagógica desta escola consideram que iniciativas como essas estão ao encontro das necessidades de se modernizar o ensino e a aprendizagem nas escolas, principalmente na Matemática, considerada pela maioria como um dos conteúdos curriculares mais difíceis de aprender e ensinar.

Aproveitando a oportunidade, a escola parabeniza as professoras pela iniciativa de buscar aprimoramento de suas práticas pedagógicas através do Mestrado Profissional e aos orientadores do Mestrado que com seu conhecimento, colaboram para a construção de uma Educação de qualidade.

Franciana Nalon Marques
Professora Coordenadora

Fonte: Própria autora

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os alunos que participaram das atividades extraclasse confirmaram a informação dada pela professora titular das salas de que não houve tempo para o estudo das cônicas e assim as atividades apresentadas não foram um aprofundamento, mas uma complementação do currículo oficial do estado de São Paulo, que prevê o estudo das cônicas no final do 1º Bimestre do 3º Ano do Ensino Médio.

O breve estudo sobre a parte histórica das cônicas trouxe muitos questionamentos por parte dos alunos que ficaram motivados a conhecer a história da matemática.

Com as atividades com os cones de barbante, os alunos perceberam as diferenças entre as cônicas elipse, hipérbole e parábola e, com a apresentação de slides sobre as aplicações da elipse na atualidade, perceberam a importância dessa curva, principalmente nas órbitas dos planetas, que era desconhecida de muitos alunos, pois também se trata de um assunto que, em Física, muitas vezes, necessita de mais tempo para ser estudado.

Os elementos da elipse foram apresentados com o desenho da elipse construído pelos alunos na prancha. Os alunos destacaram o aspecto da elipse com uma circunferência achatada, observaram a elipse como um lugar geométrico e foi apresentada a dedução da equação reduzida da elipse. Os exemplos de exercícios apresentados serviram de fixação dos elementos e das equações da elipse.

Os alunos não conheciam o software GeoGebra e assim foram primeiramente estudados os principais comandos e depois realizaram-se as atividades de construções da elipse. Como se observa no relato dos alunos, as atividades com o computador trouxeram uma maior compreensão do conteúdo estudado.

As questões do Enem e do vestibular que foram resolvidas pelos alunos foram motivadoras, pois eles perceberam que o conteúdo das cônicas é solicitado nas avaliações.

Perceber e sentir a motivação dos alunos para aprenderem um conteúdo traz para os professores uma grande alegria, mesmo com um número reduzido de apenas 7% do total de alunos matriculados no 3º Ano, que cabe no futuro para um próximo estudo. A resposta dos alunos mostra que é possível investir em atividades extraclasse de maneira a complementar e aprofundar conteúdos importantes como é o caso das cônicas e que por falta de tempo acaba não sendo incluído nas aulas regulares.

Espera-se que as atividades extraclasse relatadas nesse trabalho motivem outros professores a ajudarem seus alunos no estudo da cônica elipse, bem como possam servir de inspiração para a abordagem de outros temas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EUCAÇÃO BÁSICA. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Mec/Semtec, 2006.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio:** Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Mec/Semtec, 1998.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Matemática 3.** 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

DELGADO, F.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica.** Rio de Janeiro: SBM, 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 3. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa.** 2. Ed. São Paulo: FTD, 2005.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo: Caderno do aluno.** Matemática. 3ª série. Volume 1. São Paulo: SE, 2014.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo: Caderno do professor.** Matemática. 3ª série. Volume 1. São Paulo: SE, 2014.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação. São Paulo: SEE, 2010.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Matriz de avaliação processual:** matemática. São Paulo: SE, 2016.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO**. Matriz de Referência para a avaliação de matemática.** 15. ed. São Paulo: SEE, 2017.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Matrizes de referência para avaliação Saresp:** documento básico: coordenação geral Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática ciência e aplicações, Volume 3.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland, **Cônicas como curvas luminosas**. Disponível em <http://www.uff.br/cdme/curvas_luminosas/index.html> Acesso em 20 de junho de 2018.

MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. **Curso de Física, Volume 1**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva 3.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

SANTOS, P. A. B. Números Complexos e Cônicas: Abordagem pelo Professor do Ensino Médio, Reflexões e Propostas. 2018. 90p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2018.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática Ensino Médio 3.** 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

CÔNICAS COMO CURVAS LUMINOSAS. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/curvas_luminosas/index.html> Acesso em 20 de junho de 2018.

CÔNICAS NA ATUALIDADE. Disponível em site<https://br.freepik.com/fotos-premium/dentista-examinando-os-dentes-dos-pacientes-na-cadeira-sob-luz-brilhante_1910692.htm> Acesso em 16/08/2018.

CÔNICAS NA ATUALIDADE. Disponível em site<https://www.youtube.com/watch?v=O3ndN4gv4cc> Acesso em 16/08/2018.

CÔNICAS OBTIDAS POR MENAECMO. Disponível em: <sato.prof.ufu.br> Acesso em 17 de março de 2018.

LEI DE KEPLER. Disponível em: <: https://www.enem.com.br/noticia/fisica-para-o-enem-entenda-as-leis-de-kepler;jsessionid=NRdW7jgRlkLb+96nEl0Ll8yT.sp-tucson1> Acesso em 17/03/2018.

TEOREMA DE DANDELIN NA ELIPSE. Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/maasruas/ensino/gd/imagens/dandelin2.gif>Acesso em 17 de março de 2018.

TEOREMA DE PASCAL. Disponível em: <https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pascal> Acesso em 16 de maio de 2018.

Apêndice

Resoluções dos problemas de vestibulares e ENEM apresentados no capítulo 3

1-) Para que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades do eixo maior, chamaremos de **2a** a distância entre dois postes. A medida do eixo menor da elipse é de 2b=1,5+7+1,5⇒b=5 e como a excentricidade da elipse é de 0,943, temos que, $\frac{c}{a} = 0,943 \Rightarrow c = 0,943a$.

Assim, usando a relação fundamental, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 5^2 + (0,943a)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 + 0,889a^2$$

$$\Rightarrow 0,111a^2 = 25$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{25}{0,111}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{0,333}$$

$$\Rightarrow a = 15$$

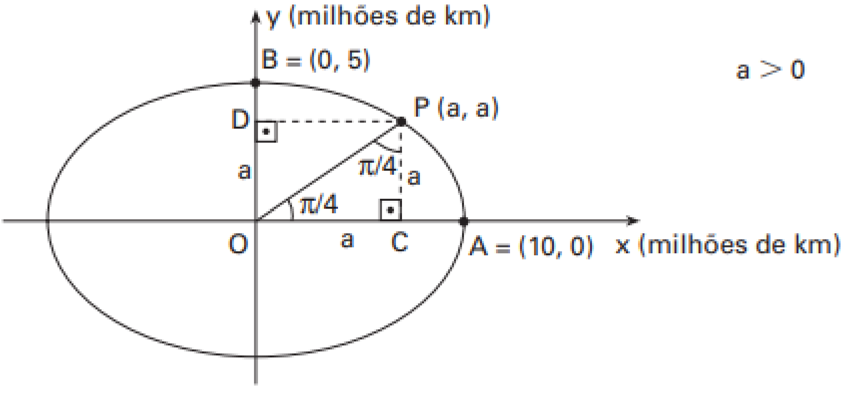
Como a distância entre dois postes é 2a, temos:

2a=30 metros

Portanto, a distância entre dois postes consecutivos deverá ser de 30 metros.

Resposta: B

2-) Do enunciado, temos a figura:



(figura fora de escala)

No instante em que o ângulo PÔA mede $\pi/4$, temos que P (a, a). Como o ponto P (a, a) pertence à curva de equação $\left(\frac{x^2}{100}\right)+\left(\frac{y^2}{25}\right)=1$, temos:

$$\left(\frac{a^2}{100}\right)+\left(\frac{a^2}{25}\right)=1$$

$$\Rightarrow a^2 = 20$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo POC, temos:

$$(PO)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow (PO)^2 = 40 \Rightarrow PO = 2\sqrt{10}$$

Portanto, a distância, em milhões de quilômetros, do planeta P à estrela O, no instante representado na figura é $2\sqrt{10}$.

Resposta: B

3-) Primeiro, vamos encontrar os valores de A e B.Temos que y = 2x +1.Substituindo na equação da elipse, vamos ter:

$x^2 + (2x + 1)^2/2 = 9/4$

$x^2 + (4x^2 + 4x + 1)/2 = 9/4$

Multiplicando tudo por 4, teremos:

$x^2 + (4x^2 + 4x + 1)/2 = 9/4$

$4 x^2 + 2(4x^2 + 4x + 1) = 9$

$4 x^2 + 8x^2 + 8x + 2 - 9 = 0$

$4 x^2 + 8x^2 + 8x + 2 - 9 = 0$

$12\ x^2 + 8x - 7 = 0$ (I)

Resolvendo a equação do 2º grau (I), teremos as seguintes raízes:

$x' = 1/2$

$x'' = -7/6$

Substituindo na equação em y:

$y' = 2(1/2) + 1 = 2$

$y'' = 2(-7/6) + 1 = -7/3 + 1 = (-7 + 3)/3 = -4/3$

Portanto, os pontos são:

A(1/2,2)

B(-7/6,-4/3)

Valor da distância AB para a coordenada x:

$1/2 - (-7/6) = (3 + 7)/6 = 10/6 = 5/3$

Metade da distância AB para a coordenada x:

$5/3 \Rightarrow (5/3)/2 = 5/6$

O ponto médio para a coordenada x será:

$-7/6 + 5/6 = -2/6 = -1/3$

Valor da distância AB para a coordenada y:

$2 - (-4/3) = (6 + 4)/3 = 10/3$

Metade da distância AB para a coordenada y:

10/3 => (10/3)/2 = 10/6 = 5/3

O ponto médio para a coordenada y será:

-4/3 + 5/3 = 1/3

Portanto, o ponto médio de AB será:

Ponto médio = (-1/3,1/3)

Resposta: D

4-) A equação da elipse é: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. A equação da reta é: y = 2x.

A área sombreada é igual à metade da área limitada pela elipse, com a = 3 e b = 2.

Portanto: $A=\frac{\pi.a.b}{2}=\frac{\pi.3.2}{2}=3\pi$

Resposta: C

5-) Sejam r_1 e r_2 as retas que passam por (-5, 0) e tangenciam a elipse. Essas retas tem equação da forma y = m(x + 5).

Cada um desses pontos de tangencia satisfazem o sistema:

{$x^2 + 4y^2 = 5$

{y = m(x + 5)

Substituindo:

$x^2 + 4m^2(x + 5)^2 = 5 \Rightarrow (4m^2 + 1)x^2 + (40m^2)x + (100m^2 - 5) = 0$

Para que essa equação tenha solução única, tem-se:

$\Delta = (40m^2)^2 - 4(4m^2 + 1)(100m^2 - 5) = 0 \Rightarrow m^2 = 1/16 \Rightarrow m = \pm 1/4$

Para m = 1/4, tem-se:

r_1 : y = (1/4) (x + 5).

Para m = -1/4, tem-se:

r_2 : y = (-1/4) (x + 5).

Os pontos de tangência dessas retas com a elipse são (-1, 1) e (-1, -1). A distância entre esses pontos é 2.

O triângulo na imagem tem altura 8 e base B. O triângulo cujos vértices são os pontos (-5, 0), (-1, 1) e (-1, -1) tem altura 4 e base 2. Esses triângulos são semelhantes e, portanto:

$$\frac{B}{8}=\frac{2}{4}\Rightarrow B=4$$

Resposta: C

5-) A elipse da figura tem centro no ponto (−5; 7). O eixo maior mede 11 – 3 = 8 e é paralelo ao eixo Oy. O eixo menor é paralelo ao eixo Ox e mede -2-(-8) = 6. Assim, temos:

$$\frac{(x-(-5))^2}{3^2}+\frac{(y-7)^2}{4^2}=1$$

Portanto, a equação da elipse é $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-7)^2}{16}=1$.

Resposta: B

6-)

a-) Substituindo as coordenadas do ponto P(3,12/5) na equação da elipse dada, temos:

$$\frac{3^2}{25}+\frac{\left(\frac{12}{5}\right)^2}{9}=1\Rightarrow\frac{9}{25}+\frac{144}{25.9}=1\Rightarrow\frac{9.9}{25.9}+\frac{144}{25.9}=1\Rightarrow\frac{81}{225}+\frac{144}{225}=1\Rightarrow\frac{225}{225}=1$$

Portanto, o ponto P(3,12/5) pertence à elipse.

Como a elipse dada possui o centro na origem do plano cartesiano a distância do ponto P(3,12/5) ao eixo das abcissas é igual ao valor da sua ordenada, ou seja, a distância do ponto P ao eixo das abcissas é de 12/5.

b-) Os vértices Q e R da elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ que pertencem ao eixo das abcissas possuem coordenada Q(-5,0) e R(5,0), pois, $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$.

Logo, a área do triângulo PQR, com P(3,12/5) pode ser calculada usando:

$\frac{1}{2}\det|P,Q,R| \Rightarrow \frac{1}{2}.24 = 12$

Portanto, a área do triângulo PQR é de 12 u^2.

7-) Considere um sistema xOy com origem no meio da parte reta superior da porta. Os semi-eixos da elipse são a = 50, b = 30, logo a equação da elipse é

$x^2/50^2 + y^2/30^2 = 1 \Rightarrow x^2/50^2 + y^2/900 = 1$

Para y = 24 , temos que:

$x^2/50^2 + 24^2/900 = 1 \Rightarrow x^2/50^2 + 576/900 = 1 \Rightarrow x^2/50^2 + 16/25 = 1 \Rightarrow x^2/50^2 = 9/25 \Rightarrow$

$x/50 = 3/5 \Rightarrow x = 30$

$PQ = 2x \Rightarrow PQ = 60$ cm

Portanto, a medida da corda PQ é de 60 cm.

8-) Como a elipse passa pelos pontos (1,0) e (0,-2), temos que:

b=1 e a=2 $\Rightarrow c^2 = 2^2 - 1^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

Assim, a distância focal é $2c = 2\sqrt{3}$.

A excentricidade da elipse é

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Resposta: E

9-) Pelo enunciado do problema, temos que:

$a - b = \frac{b}{2} \Rightarrow a = \frac{3b}{2}$ (I)

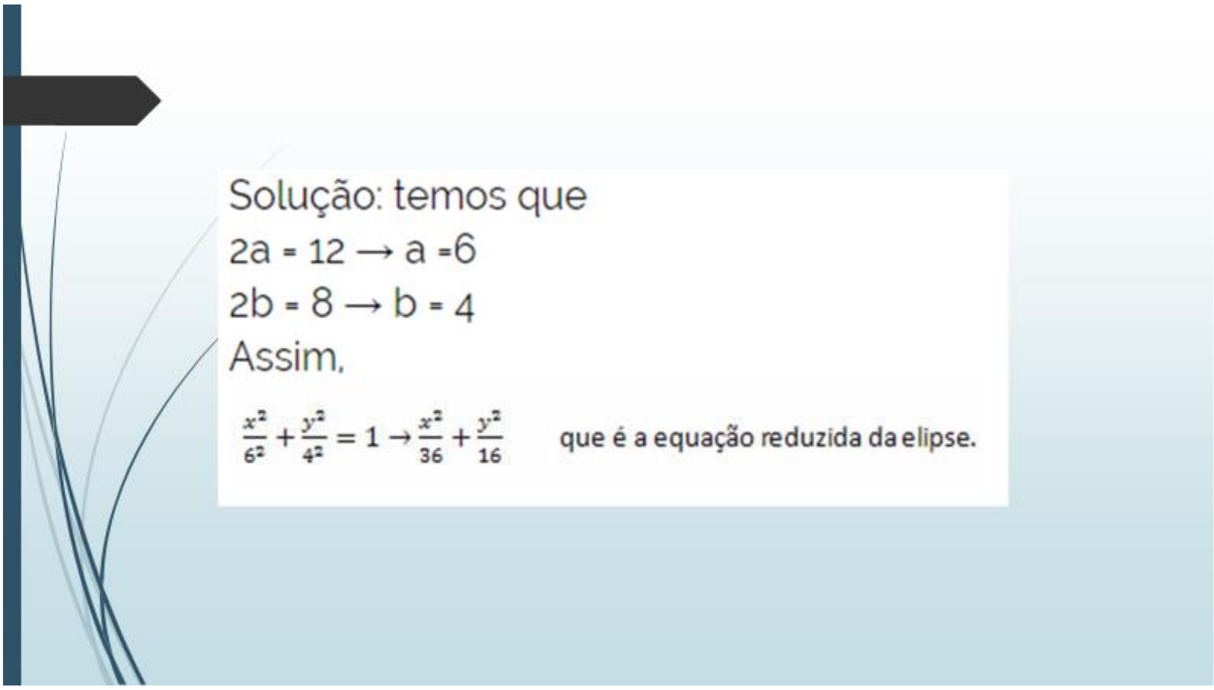
Substituindo (I), em $V = 4.a.b^2$, temos que:

$V = 4.\frac{3b}{2}.b^2 \Rightarrow V = 6b^3$

Portanto, $V = 6b^3$.

Resposta: B

Resolução do exercício apresentado na figura 4.16



Solução: temos que

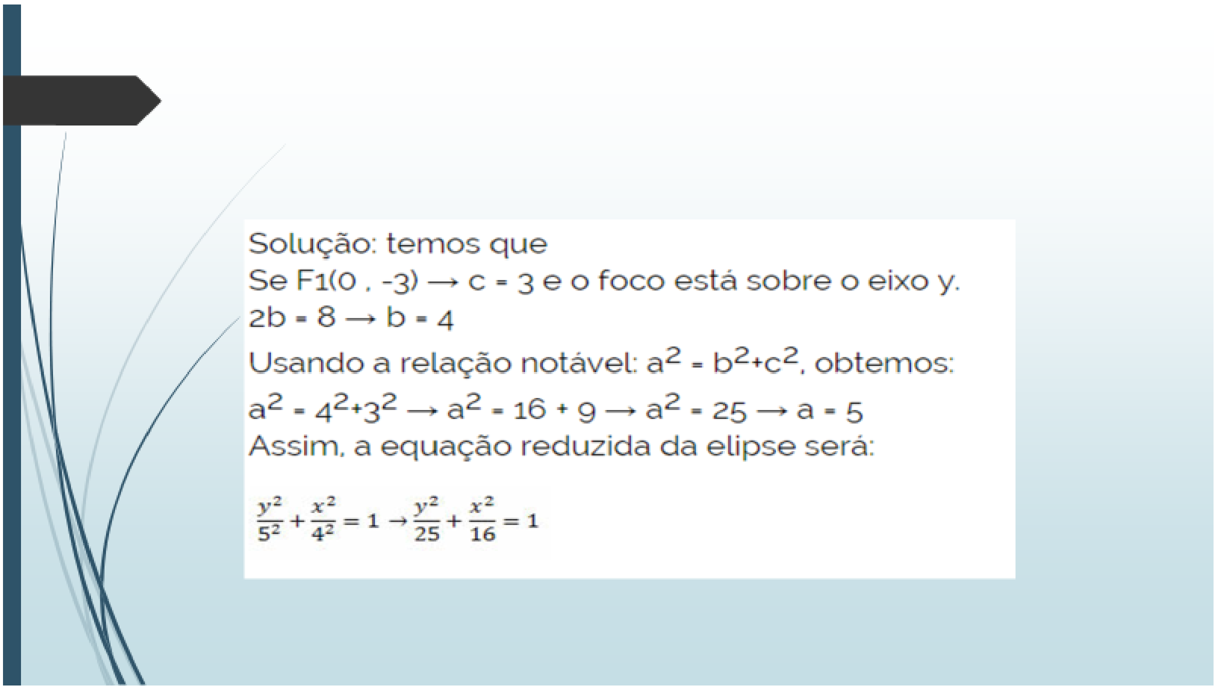
2a = 12 → a =6

2b = 8 → b = 4

Assim,

$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}$ que é a equação reduzida da elipse.

Resolução do exercício apresentado na figura 4.17



Solução: temos que

Se F1(0 , -3) → c = 3 e o foco está sobre o eixo y.

2b = 8 → b = 4

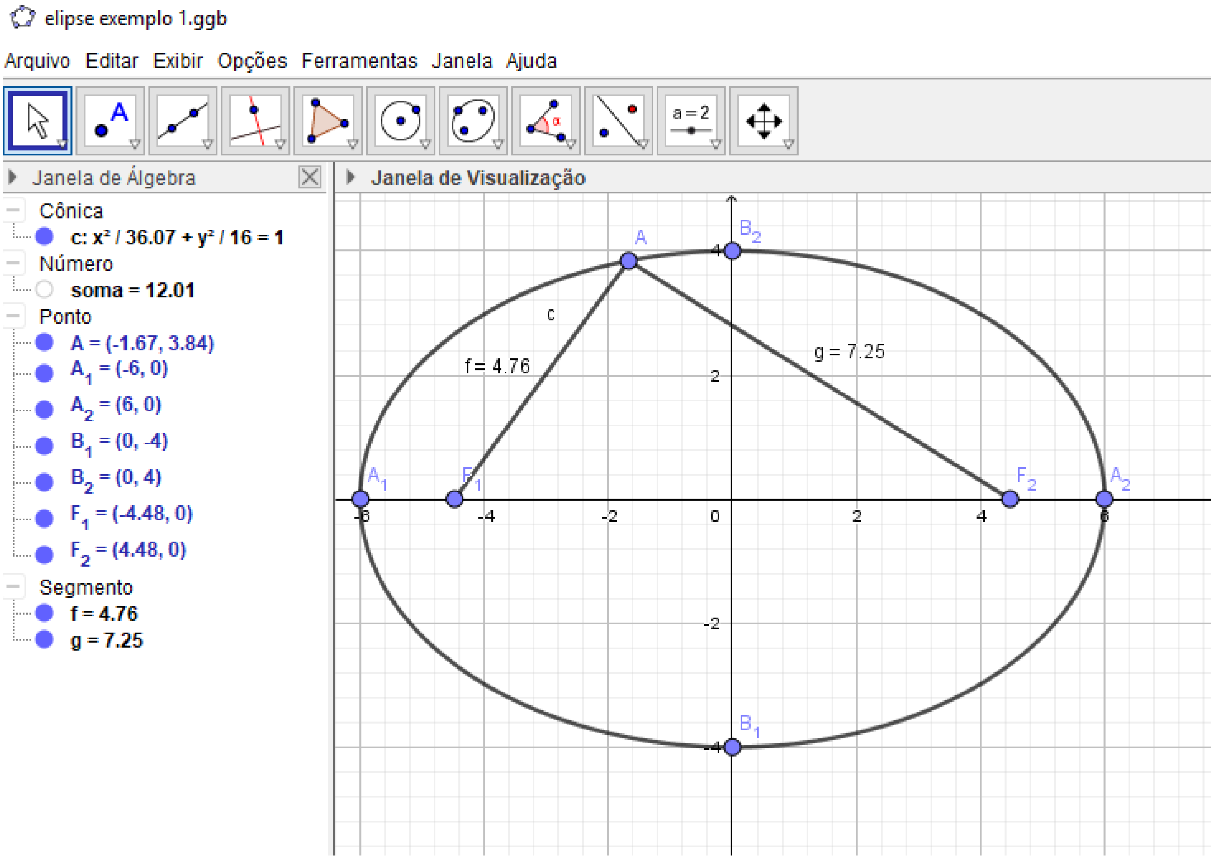
Usando a relação notável: $a^2 = b^2+c^2$, obtemos:

$a^2 = 4^2+3^2 \rightarrow a^2 = 16 + 9 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5$

Assim, a equação reduzida da elipse será:

$\frac{y^2}{5^2}+\frac{x^2}{4^2}=1 \rightarrow \frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$

Resolução do 1º exemplo proposto na figura 4.18



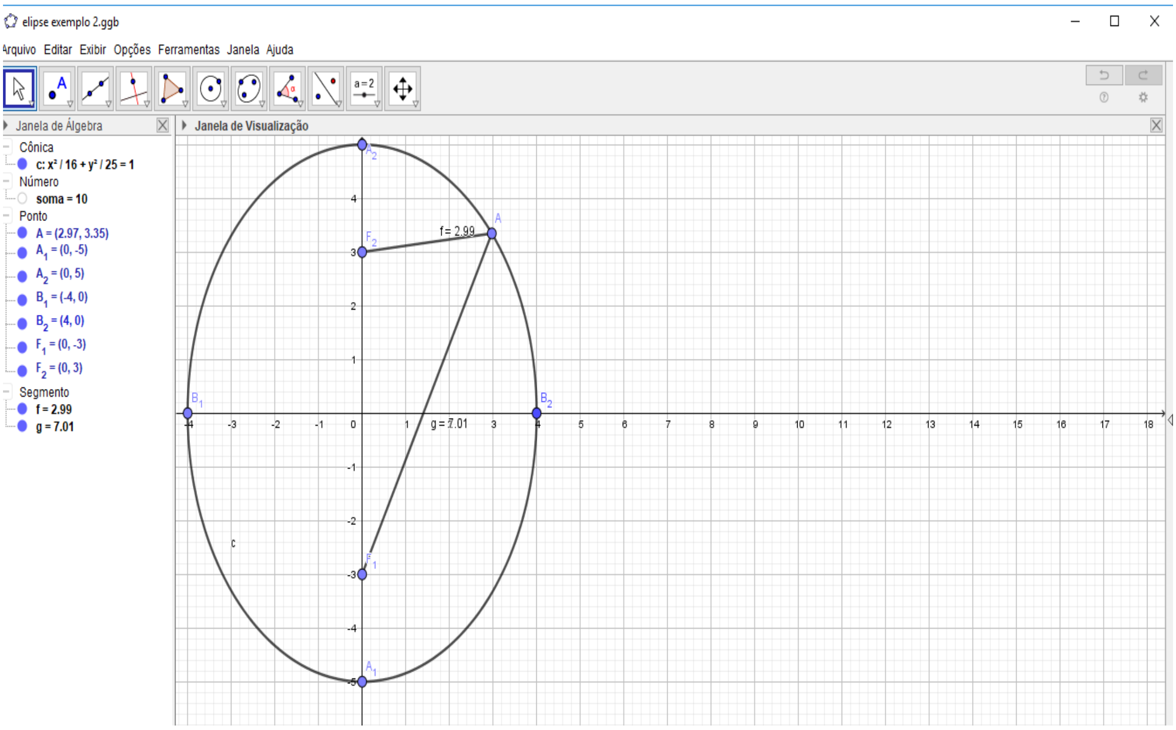
Cônica
- c: x² / 36.07 + y² / 16 = 1

Número
- soma = 12.01

Ponto
- A = (-1.67, 3.84)
- A_1 = (-6, 0)
- A_2 = (6, 0)
- B_1 = (0, -4)
- B_2 = (0, 4)
- F_1 = (-4.48, 0)
- F_2 = (4.48, 0)

Segmento
- f = 4.76
- g = 7.25

Resolução do 2º exemplo proposto na figura 4.18



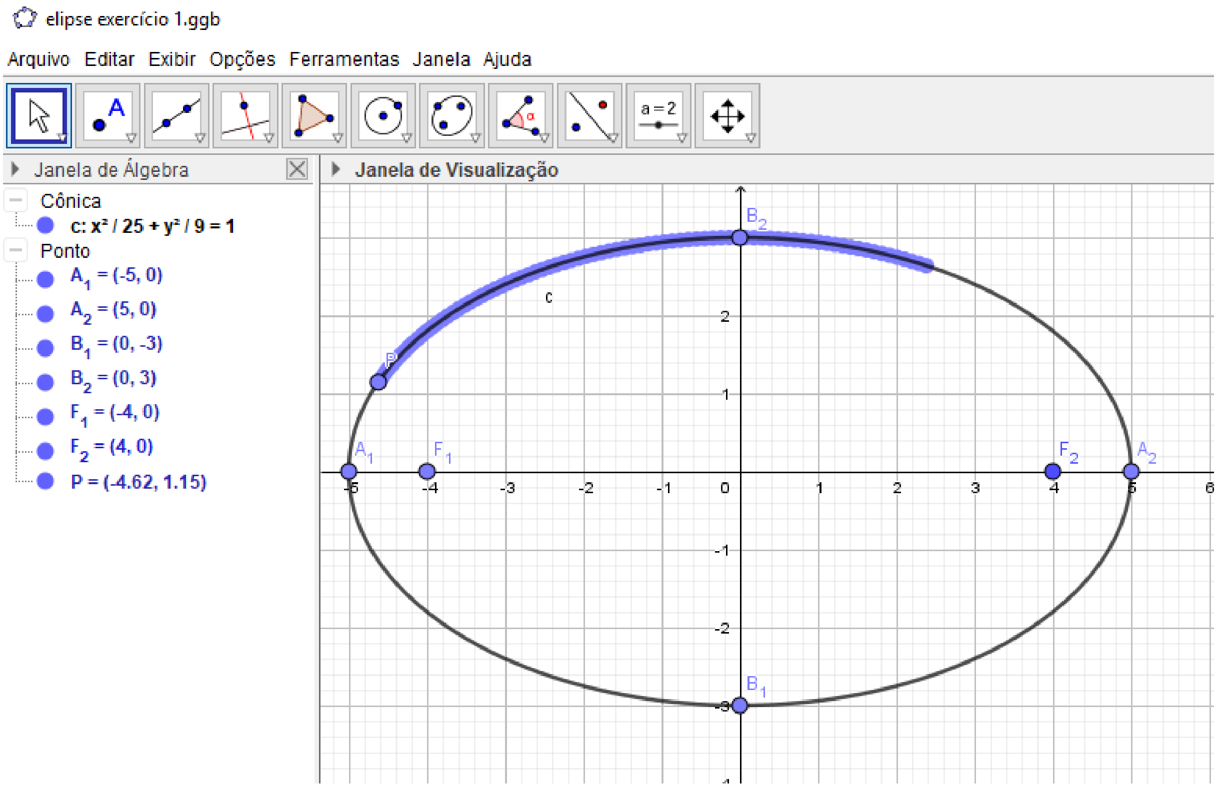
Cônica
- c: x² / 16 + y² / 25 = 1

Número
- soma = 10

Ponto
- A = (2.97, 3.35)
- A_1 = (0, -5)
- A_2 = (0, 5)
- B_1 = (-4, 0)
- B_2 = (4, 0)
- F_1 = (0, -3)
- F_2 = (0, 3)

Segmento
- f = 2.99
- g = 7.01

Resolução da atividade 1 proposta na figura 4.18



Cônica

$c: x^2 / 25 + y^2 / 9 = 1$

Ponto

$A_1 = (-5, 0)$

$A_2 = (5, 0)$

$B_1 = (0, -3)$

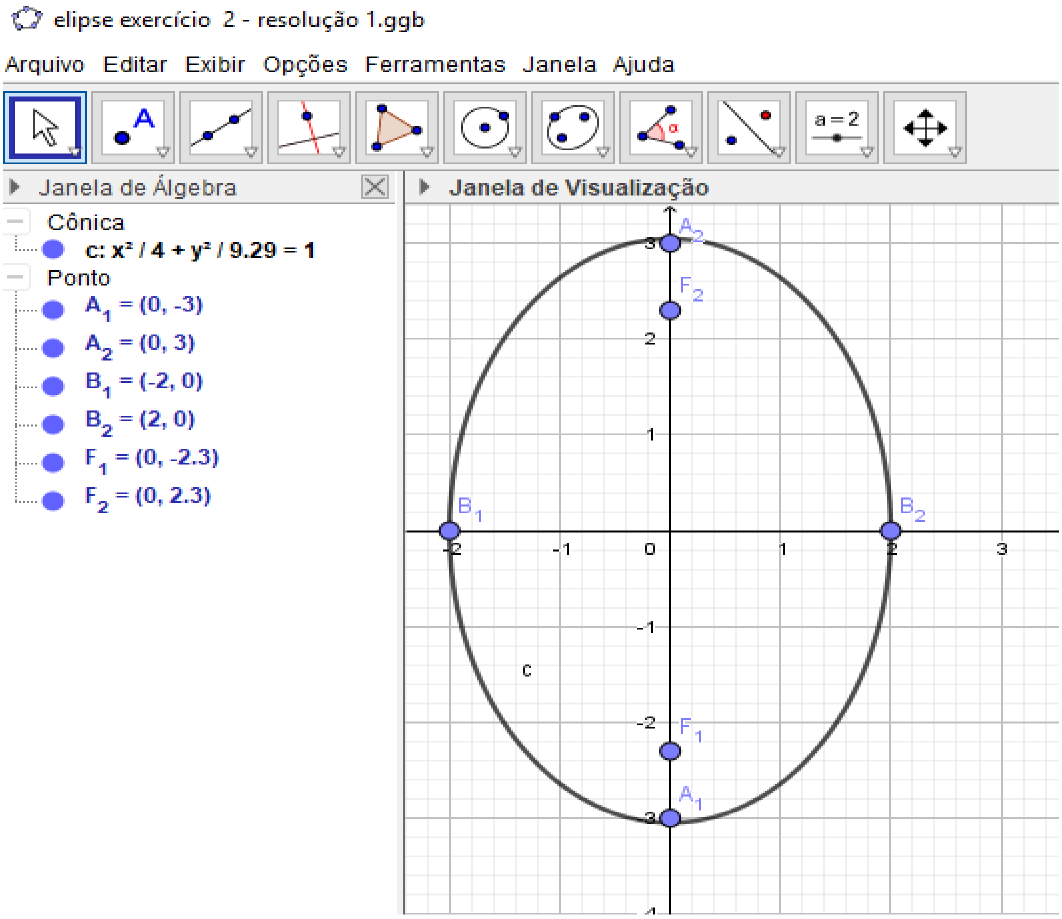
$B_2 = (0, 3)$

$F_1 = (-4, 0)$

$F_2 = (4, 0)$

$P = (-4.62, 1.15)$

Resolução da atividade 2 proposta na figura 4.18



Cônica

$c: x^2 / 4 + y^2 / 9.29 = 1$

Ponto

$A_1 = (0, -3)$

$A_2 = (0, 3)$

$B_1 = (-2, 0)$

$B_2 = (2, 0)$

$F_1 = (0, -2.3)$

$F_2 = (0, 2.3)$

Resolução da atividade apresentada em 4.2.4

(UEL) Sendo o comprimento do retângulo de 20m, temos que o eixo maior da elipse é 2.a=20$\Rightarrow a = 10$. A largura do retângulo é de 16m, logo, o eixo menor da elipse é de 2.b=16$\Rightarrow b = 8$. Assim, usando a relação fundamental, temos que:

$10^2 = 8^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$

Portanto, a distância focal é de 2.c=12.

Resposta: E