



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS- GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
REDE NACIONAL - PROFMAT

**Aécio Batista Trindade**

**Curvas planas parametrizadas**

São Cristóvão - SE  
2018



**Aécio Batista Trindade**

## **Curvas planas parametrizadas**

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós -  
Graduação em Matemática da Universidade Fe-  
deral de Sergipe, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em Matemática.*

**Orientador: Prof. Dr. Naldisson dos Santos**

São Cristóvão - SE  
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

T833c Trindade, Aécio Batista  
Curvas planas parametrizadas / Aécio Batista Trindade ;  
orientador Naldisson dos Santos. - São Cristóvão, 2018.  
67 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal  
de Sergipe, 2018.

1. Matemática. 2. Superfícies (Matemática). 3. Curvas. 4.  
Curvas algébricas. 4. Cônicas. I. Santos, Naldisson dos orient. II.  
Título.

CDU 512.77



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

## Curvas planas parametrizadas

*por*

*Aécio Batista Trindade*

Aprovada pela banca examinadora:

*Naldisson dos Santos*

Prof. Naldisson dos Santos - UFS  
Orientador

*André V.S. Dória*

Prof. André Vinicius Santos Dória - UFS  
Primeiro Examinador

*Marcelo Fernandes de Almeida*

Prof. Marcelo Fernandes de Almeida - UFS  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 31 de Outubro de 2018

---

## Agradecimentos

---

A DEUS, em primeiro lugar, por me proporcionar a dádiva de viver.

Em especial ao meu pai, Aurelino Ribeiro Trindade e a minha mãe, Albertina Batista Trindade por contribuírem de forma consistente e eficaz para minha formação moral, intelectual e social.

Aos meus irmãos Claudio, Bruno e Getulio por apresentarem em todos os momentos incentivos e satisfação para o desenvolvimento deste momento singular na vida de um homem.

Ressalto este importante feito, também, a meus avôs, Jerônimo e Gertrudes, e, Joaquim e Porcina, pelos ensinamentos, orientações e lições de vida.

Aos meus padrinhos, Maria Trindade e Carlos Alberto Rodrigues.

À Tainá, Leozinho e Geovana, sobrinhos, que renovam aspectos afetivos em todos os momentos. E, enfim, aos enumeráveis parentes e amigos que contribuíram para esta importantíssima vitória.

Aos membros do grupo de estudos, formado por amigos, marcantes nesta jornada, componentes de uma maravilhosa turma, Profmat 2016, que tornou-se inesquecível.

Aos Profs. Antônio Cláudio da Hora Souza e Lucivânia Brito que ajudaram-me na tradução do Resumo, Abstract.

Consigno, também, meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Naldisson dos Santos, que com bastante desprendimento, compromisso, humildade, generosidade, amizade e atenção, me orientou no desenvolvimento deste trabalho, fundamentando e projetando perspectivas para novos horizontes profissionais.

Aos Profs. Drs. André Vinícius Santos Dória e Marcelo Fernandes de Almeida, membros da Banca.

À CAPES, pois, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ao apoio da cidade de Araçás - BA.

E por fim, agradeço, sem dúvida, a todos os Professores do Profmat que contribuíram para concretização deste especial momento.

---

## Resumo

---

No estudo de curvas cartesianas estamos acostumando a tomar uma variável como independente e a outra como dependente, ou seja  $y = f(x)$  ou  $x = h(y)$ . Porém, alguns movimentos ou caminhos são inconvenientes, difícil ou impossível de ser descritos por uma função de uma variável ou fórmula da forma  $y = f(x)$ . Em vez de definir  $y$  em termos de  $x$  ou  $x$  em termos de  $y$  definimos ambos  $x$  e  $y$  em termos de uma terceira variável chamada parâmetro. Tais curvas obtidas são chamadas de curvas parametrizadas.

Neste trabalho apresentamos técnicas de esboçar tais curvas, encontramos parametrizações para algumas curvas planas clássicas e também fizemos um estudo sobre o comprimento de arco, áreas limitadas por curvas e áreas de superfícies de revolução.

**Palavras-chave:** Curvas Parametrizadas; Parametrização das Cônicas; Curvas clássicas; Comprimento de arco; Áreas.

---

## Abstract

---

In the study of Cartesian curves we are accustomed to taking a variable as independent and the other as dependent, ie  $y = f(x)$  or  $x = h(y)$ . However, some movements or paths are inconvenient, difficult or impossible to describe by a function of a variable or formula of the form  $y = f(x)$ . Instead of defining  $y$  in terms of  $x$  or  $x$  in terms of  $y$  define both  $x$  and  $y$  in terms of a third variable called parameter. Such curves parameters are called parametrized curves.

In this work we present techniques to sketch such curves, we find parametrizations for some classical flat curves and also did a study on the length arch areas, curved boundary areas, and surface areas of revolution.

**Keywords:** Parametrized Curves; Parameterization of the Conics; Classical curves; Arc length; Areas.

---

## Lista de Figuras

---

1	Ciclóide . . . . .	12
2	Trajectoria de uma partícula . . . . .	12
2.1	Trajectoria de uma bola de basquete . . . . .	18
2.2	Forças atuantes na bola . . . . .	19
2.3	$\mathcal{C} : x = t^2 - 2t, y = t + 1$ . . . . .	22
2.4	$\mathcal{C} : x = \text{sen } t, y = \text{sen}^2 t$ . . . . .	23
2.5	$\mathcal{C} : y = x^2$ . . . . .	23
2.6	$\mathcal{C} : x = \text{cos } t, y = \text{sen } t$ . . . . .	24
2.7	$y = 1 - x$ e $\gamma : (x = \text{cos}^2 t, y = \text{sen}^2 t)$ , respectivamente. . . . .	25
2.8	$x = \text{cos}^2 t, 0 \leq t \leq 2\pi$ . . . . .	26
2.9	$y = \text{sen}^2 t, 0 \leq t \leq 2\pi$ . . . . .	26
2.10	Seção Cônica gerando a elipse, hipérbole e parábola, respectivamente. . . . .	26
2.11	Círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ . . . . .	27
2.12	Círculo $\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ . . . . .	29
2.13	$\varepsilon : \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ . . . . .	31
2.14	$\varepsilon_1 : x = 1 + 4 \text{cos } t, y = 2 + 2 \text{sen } t$ . . . . .	31
2.15	$\mathcal{H} : \frac{(x+1)^2}{4} - (y+1)^2 = 1$ . . . . .	33
2.16	$x = \frac{t^2}{2} - 2$ . . . . .	35
2.17	$y = t - 2$ . . . . .	35
2.18	Curva de Agnesi . . . . .	35

2.19	Curva de Agnesi . . . . .	37
2.20	Desenvolvimento da cicloide. . . . .	38
2.21	$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ . . . . .	39
2.22	$0 \leq t \leq \pi$ . . . . .	39
2.23	$0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ . . . . .	39
2.24	$0 \leq t \leq 2\pi$ . . . . .	39
2.25	<i>Cicloide</i> . . . . .	40
2.26	Deslocamento da partícula sob a ação da gravidade . . . . .	41
2.27	$r' \perp r$ e $P'$ simétrico de $P$ em relação a $r$ . . . . .	45
2.28	Folium de Descartes obtido com $a = 1$ . . . . .	47
2.29	$C : x = t^2 - 4, y = \frac{t}{2}$ . . . . .	48
2.30	Estudo do sinal de $\frac{dy}{dx}$ . . . . .	51
2.31	$C : x = t^2 + 1, y = \frac{-t^3}{3} + t + 1$ . . . . .	52
3.1	$C : x = t^2 + 1, y = \frac{-t^3}{3} + t + 1$ . . . . .	56
3.2	$C : x = t^2 + 1, y = \frac{-t^3}{3} + t + 1$ . . . . .	58
3.3	Semicírculo . . . . .	60
3.4	. . . . .	62

---

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminar</b>	<b>14</b>
1.1 O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^2$	14
1.1.1 Produto Escalar em $\mathbb{R}^2$	16
1.1.2 Ângulo entre Vetores	16
<b>2 Curvas Parametrizadas</b>	<b>18</b>
2.1 Definições e Exemplos	18
2.2 Parametrização das cônicas	26
2.2.1 Parametrização de um círculo	27
2.2.2 Parametrização de uma Elipse	30
2.2.3 Parametrização de uma Hipérbole	31
2.2.4 Parametrização de uma Parábola	33
2.3 Parametrização de Curvas Conhecidas	35
2.3.1 Curva de Agnesi	35
2.3.2 A Cicloide	37
2.3.3 A Braquistócrona	40
2.3.4 Fólium de Descartes.	43
2.4 Técnicas para Esboçar Curvas Definidas por Equações Paramétricas	47
2.4.1 MÉTODO I: Fazendo uma tabela	48

2.4.2	MÉTODO II: Eliminação do Parâmetro . . . . .	48
2.4.3	MÉTODO III: Usando Noções de Cálculo . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Comprimento de Arco e Áreas</b>	<b>53</b>
3.1	Comprimento de Arco . . . . .	53
3.2	Áreas Limitadas por Curvas Parametrizadas . . . . .	57
3.3	Área de Superfície de Revolução . . . . .	59
<b>A</b>	<b>Retas Tangentes às Curvas Parametrizadas</b>	<b>63</b>
	Referências . . . . .	65

---

## Introdução

---

De acordo com os autores em [9], a apresentação de alguns resultados de geometria e topologia das curvas planas são importantes, pois possuem generalizações para dimensões maiores. A escolha de trabalhar com curvas planas se deve ao fato de que muitos resultados podem ser apresentados de forma elementar. Salientando-se que os autores enfatizam que: quando trata de termos elementares, não querem dizer que os pré-requisitos necessários para o entendimento dos assuntos tratados na obra se reduzem a um bom curso de Cálculo e Geometria Analítica.

Daí, vemos tamanha importância de estudar propriedades e características relacionadas ao plano. Pois, podemos ter uma ideia visual no  $\mathbb{R}^2$ , ampliando-se as propriedades a fim de se obter uma abstração das mesmas em dimensões maiores.

No estudo de curvas cartesianas estamos acostumados a tomar uma variável como independente e a outra como dependente, ou seja  $y = f(x)$  ou  $x = h(y)$ . Porém, alguns movimentos ou caminhos são inconveniente, difícil ou impossível de ser descrito por uma função de uma variável ou fórmula da forma  $y = f(x)$ .

Por exemplo, é impossível de descrever na forma  $x = h(y)$ , a cicloide: trajetória de um ponto pertencente a um círculo de raio  $R$  posto a girar, sem deslizar, ao longo de uma reta situada num plano horizontal. Deduzimos equações paramétricas para a cicloide no capítulo 2.

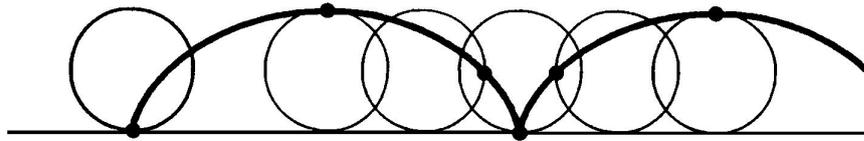


Figura 1: Ciclóide

Outro exemplo, suponhamos dois automóveis com mesma velocidade percorrendo caminhos retos de equações  $y = 2x + 3$  e  $y = 3x - 2$ , respectivamente. Será que eles vão colidir? Mesmo as retas se interceptando no ponto  $(5, 13)$ , as equações não indicam que os automóveis irão colidir.

Para resolver estes problemas, introduzimos curvas parametrizadas. Em vez de definir  $y$  em termos de  $x$  ou  $x$  em termos de  $y$  definimos ambos  $x$  e  $y$  em termos de uma terceira variável chamado parâmetro.

Imagine que uma partícula se mova ao longo de uma curva  $\mathcal{C}$ , como mostrado na figura abaixo. É impossível descrever  $\mathcal{C}$  por uma equação do tipo  $y = f(x)$  porque  $\mathcal{C}$  falha no teste

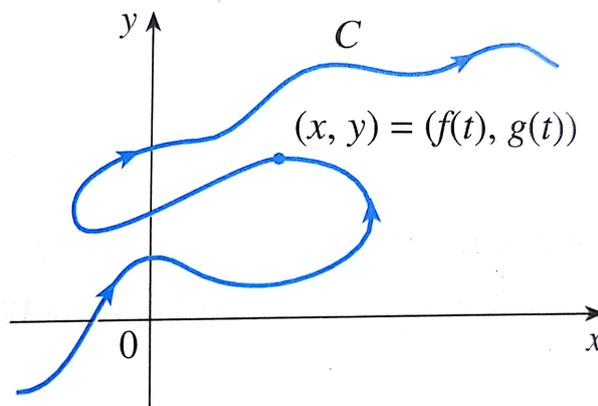


Figura 2: Trajetória de uma partícula

da reta vertical. Mas as coordenadas  $x$  e  $y$  da partícula são funções do tempo, e assim podemos escrever  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ . Tal par de equações são chamadas de equações paramétricas e  $t$  é chamado de parâmetro, o qual não necessariamente representa o tempo como será visto nos exemplos do capítulo 2.

Neste trabalho apresentamos técnicas de esboçar tais curvas, encontramos parametrizações para algumas curvas planas clássicas e também fizemos um estudo sobre o comprimento de arco, áreas limitadas por curvas e áreas de superfícies de revolução.

Estruturamos esta dissertação da seguinte forma: O espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , Curvas Parametrizadas, Comprimento de Arco, Áreas e Retas Tangentes às Curvas Parametrizadas.

No Capítulo 1, foi feito um estudo preliminar sobre o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ . Neste capítulo não nos preocupamos em demonstrar os resultados, apenas listamos algumas definições e notações básicas a fim de apresentar os resultados preliminares fundamentais para o desenvolvimento do cerne deste trabalho.

No Capítulo 2, definimos e exemplificamos curvas parametrizadas. Ainda no capítulo 2, parametrizamos as cônicas e algumas curvas conhecidas. No final do capítulo, apresentamos técnicas para esboçar curvas definidas por equações paramétricas.

No capítulo 3, estudamos o comprimento de uma curva bem como áreas limitadas por curvas parametrizadas e áreas de superfícies geradas pela rotação de curvas.

No capítulo 4, no qual é um apêndice, estudamos retas tangentes às curvas parametrizadas e também a análise da concavidade da curva através do sinal da segunda derivada. Este apêndice é essencial para a compreensão da subseção 2.4.3.

### 1.1 O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^2$

O objetivo deste capítulo é listar algumas definições e notações básicas do espaço  $\mathbb{R}^2$  a fim de apresentar os resultados preliminares fundamentais para o desenvolvimento do cerne deste trabalho. Entretanto, não nos preocupamos, neste capítulo, em demonstrar os resultados enunciados.

O conjunto  $\mathbb{R}^2$  é definido como o conjunto de todos os pares de números reais

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\},$$

comumente visualizado como um plano. Um par  $(x, y)$  pode ser visualizado geometricamente tanto como representando as coordenadas de um ponto ou as coordenadas de um vetor com ponto inicial na origem.

Segue portanto que dois vetores  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$  são iguais se, e somente se,  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ .

**Definição 1.1.1.** A soma de dois vetores  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  é definida por

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

A **multiplicação** de um vetor  $u = (x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  por um escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  é definido por

$$\alpha \cdot u = (\alpha x, \alpha y).$$

O **elemento neutro** da adição é o vetor  $0 = (0, 0)$  e o **simétrico aditivo** de um vetor  $u = (x, y)$  é o vetor  $-u = (-x, -y)$ . A **subtração** entre vetores  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  é definida por

$$u - v = u + (-v) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

**Proposição 1.1.1.** *Sejam  $u, v$  e  $w$  vetores de  $\mathbb{R}^2$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  escalares. Então:*

1.  $u + v = v + u$ ;
2.  $u + (v + w) = (u + v) + w$ ;
3.  $u + 0 = u$ ;
4.  $u - u = 0$ .
5.  $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ ;
6.  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ;
7.  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ ;
8.  $1 \cdot u = u$ .

O espaço  $\mathbb{R}^2$  é um exemplo típico do que chamamos espaços vetoriais. Um espaço vetorial é qualquer conjunto  $V$  onde podemos definir operações de soma e multiplicação por escalar que satisfazem todas as propriedades acima.

**Definição 1.1.2.** *Um subconjunto não vazio  $W \subseteq \mathbb{R}^2$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^2$  se satisfaz as duas condições seguintes:*

- (i) *Se  $u, v \in W$ , então  $u + v \in W$  também.*
- (ii) *Se  $u \in W$  e  $\alpha$  é um escalar, então  $\alpha u \in W$  também.*

Em outras palavras, um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^2$  é um conjunto fechado em relação às operações de soma de vetores e multiplicação por escalar, isto é, fazendo qualquer uma destas operações com elementos do conjunto não saímos dele. Note que um subespaço vetorial sempre

contém o vetor nulo  $0$ , pois por definição um subespaço é não vazio, logo deve conter algum vetor  $v$ ; mas daí, de acordo com (ii), o vetor  $0v$  também deve pertencer ao subespaço.

**Observação 1.1.1.** É possível mostrar que os únicos subespaços próprios de  $\mathbb{R}^2$  são as retas passando pela origem.

### 1.1.1 Produto Escalar em $\mathbb{R}^2$

**Definição 1.1.3.** O produto escalar de dois vetores  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  é definido por

$$u.v = x_1x_2 + y_1y_2.$$

A norma de um vetor  $u = (x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  é definido por

$$\|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Proposição 1.1.2 (Propriedades).** Se  $u, v$  e  $w$  são vetores em  $\mathbb{R}^2$  e  $\alpha$  é um escalar, então:

1.  $u.v = v.u$ ;
2.  $u.(v + w) = u.v + u.w$ ;
3.  $(\alpha u).v = u.(\alpha v) = \alpha(u.v)$ ;
4.  $u.u = \|u\|^2 \geq 0$  e  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ;
5. Desigualdade de Cauchy-Schwartz:  $|u.v| \leq \|u\|\|v\|$ ;
6. Desigualdade Triangular:  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

### 1.1.2 Ângulo entre Vetores

Sejam  $u$  e  $v$  dois vetores não nulos de  $\mathbb{R}^2$ . Segue da desigualdade de Cauchy - Schwartz que

$$\frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

ou equivalentemente,

$$-1 \leq \frac{u.v}{\|u\|\|v\|} \leq 1. \quad (1.1.1)$$

Como  $\cos \theta$  assume, uma única vez, cada valor no intervalo  $[-1, 1]$  quando  $\theta$  varia no intervalo  $[0, \pi]$ , segue de 1.1.1 que existe um único  $\theta \in [0, \pi]$  tal que

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

Definimos o **ângulo entre  $u$  e  $v$**  como o número real  $\theta$  acima mencionado.

## 2.1 Definições e Exemplos

**Motivação.** Descrever a trajetória de um objeto lançado ou arremessado ao espaço é um problema que apareceu corriqueiramente em muitos contextos da trajetória de nossa civilização, desde o arremesso de uma simples pedra ao lançamento de foguetes passando pelo lançamento de dardos, discos, pesos, ... nas olimpíadas. O lançamento de bolas de fogo por catapultas e bolas de ferro por canhoneiras só para lembrar alguns. Vamos nos concentrar, aqui, no arremesso de uma bola de basquete. Veja a trajetória que uma bola descreve desde o seu arremesso até a cesta na figura (2.1). A pergunta natural que segue é:

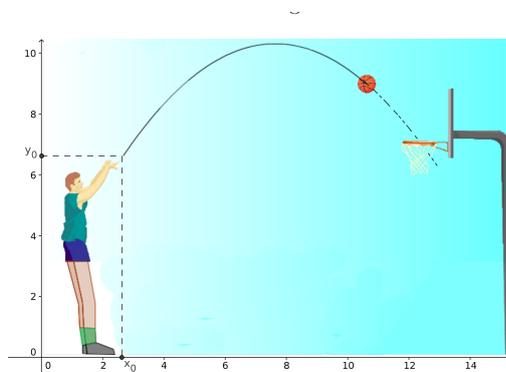


Figura 2.1: Trajetória de uma bola de basquete

- Qual a equação que descreve a trajetória da bola? Pelo pouco que sabemos de basquete, intuí-

mos, pelo menos, que a trajetória da bola descreve uma curva plana e depende de sua altura e sua velocidade no momento do arremesso e do ângulo do lançamento. Sabemos que a trajetória da bola é a composição de duas translações: uma na direção vertical e outra na horizontal. Por outro lado, o movimento acima é regido pela segunda Lei de Newton, a qual afirma que:

- a resultante das forças que atuam em cada direção é igual a massa da bola vezes a sua aceleração. Para descrever a trajetória da bola, especificando a sua posição em cada instante de tempo  $t$ , necessitamos estabelecer um sistema de coordenadas. A expressão matemática da trajetória está intimamente relacionada à escolha desse sistema. Uma "boa" escolha nos fornecerá uma expressão mais simples.

Nesse caso vamos estabelecer um sistema de coordenadas conforme mostra a figura (2.1). Após o arremesso da bola, as únicas forças atuantes sobre a bola são a resistência do ar e a gravidade. Iremos simplificar nosso problema desprezando a resistência do ar. Assim, a única força que resta sobre a bola é a da gravidade, ou seja, seu peso atuando na direção vertical (figura (2.2)). Como não há forças atuando na horizontal, pela 2ª Lei de Newton temos que a aceleração nessa direção é nula, isto é,

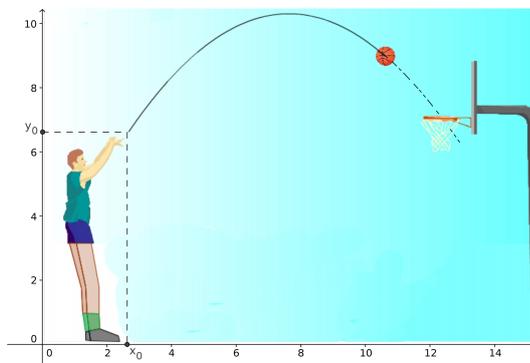


Figura 2.2: Forças atuantes na bola

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow x = x_0 + v_x t$$

onde  $v_x$  é a componente constante da velocidade na direção horizontal e  $x_0$  é o deslocamento horizontal inicial da bola.

Na direção vertical, devido a ação da gravidade, existe a força peso. Aplicando-se a 2ª Lei de Newton nessa direção e supondo a bola de massa  $m = 1$ , obtemos uma equação

diferencial de segunda ordem fácil de ser resolvida

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -g \Rightarrow y = y_0 + v_y t - \frac{gt^2}{2}$$

onde  $v_y$  é a componente da velocidade inicial na direção vertical e  $y_0$  é o deslocamento vertical inicial da bola. As equações obtidas acima

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

são ditas **equações paramétricas** da trajetória, porque fornecem a posição  $(x, y)$  da bola como funções de um parâmetro  $t$  que, nesse exemplo, representa o tempo transcorrido a partir do momento do arremesso.

O exposto acima motiva a seguinte definição.

**Definição 2.1.1.** *Sejam  $I$  um intervalo real,  $x(t)$  e  $y(t)$  funções reais contínuas definidas em  $I$  e  $C$  uma curva. Dizemos que uma aplicação*

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

é uma **parametrização** de  $C$  se a sua imagem coincide com  $C$ , ou seja,

$$Im(\gamma) = \gamma(I) = \{(x(t), y(t)); t \in I\} = C.$$

As equações

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I,$$

são chamadas de **equações paramétricas** da curva  $C$ . Dizemos também que essas equações parametrizam a curva  $C$ .

O parâmetro  $t$  pode ser interpretado como tempo e  $(x(t), y(t))$  nos dá a posição de um ponto no instante  $t$ , que se desloca no plano  $XOY$ . A curva  $C$  é a trajetória descrita pelo ponto. Assim como é possível fazer um percurso de várias maneiras (mais rápida ou mais devagar, num sentido ou no outro, etc) uma dada curva pode ter várias equações paramétricas. Se o domínio do parâmetro é o intervalo fechado  $[a, b]$ , então  $(x(a), y(a))$  é o ponto inicial da curva

e  $(x(b), y(b))$  é o ponto final da curva.

**Observação 2.1.1.** O gráfico de qualquer função pode ser pensado como uma curva parametrizada. De fato, dado uma função  $y = f(x)$ , o gráfico de  $f$  consiste dos pontos  $(x, f(x))$ , onde  $x$  percorre os valores permitidos do domínio. Se definimos

$$\begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = f(t) \end{cases},$$

então plotando os pontos  $P(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t))$  obtém-se o gráfico de  $f$ .

Vamos apresentar alguns exemplos para ilustrar curvas parametrizadas.

**Exemplo 2.1.1.** Determine equações paramétricas para a reta que passa pelos pontos  $P_0 = (x_0, y_0)$  e  $P_1 = (x_1, y_1)$ .

**Solução.** A reta que passa por  $P_0$  e  $P_1$  é o conjunto de pontos  $P = P(t) = (x(t), y(t))$  tais que  $\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{P_0P_1}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e portanto,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

representa a reta que passa pelos pontos  $P_0$  e  $P_1$ .

**Exemplo 2.1.2.** Esboce e identifique a curva definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 1 \end{cases}$$

**Solução.** Cada valor de  $t$  fornece um ponto na curva, como mostrado na Tabela 2.1 abaixo. Por exemplo, se  $t = 0$ , então  $x = 0$ ,  $y = 1$  e assim o ponto correspondente é  $(0, 1)$ . Na Figura (2.3) marcamos os pontos  $(x, y)$  determinados por diversos valores do parâmetro e os unimos para produzir a curva. Uma partícula cuja posição é dada por equações paramétricas se move ao longo da curva na direção das setas quando  $t$  aumenta. Observe que os pontos consecutivos marcados na curva aparecem em intervalos de tempo iguais, mas não as distâncias iguais. Isso ocorre porque a partícula desacelera e então acelera à que  $t$  aumenta.

Parece, a partir da Figura 2.3, que a curva traçada pela partícula poderia ser uma parábola. Isso pode ser confirmado pela eliminação do parâmetro  $t$ , como a seguir. Obtemos  $t = y - 1$  a partir da segunda equação e substituímos na primeira equação. Isso fornece

$t$	$x = t^2 - 2t$	$y = t + 1$
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

Tabela 2.1:

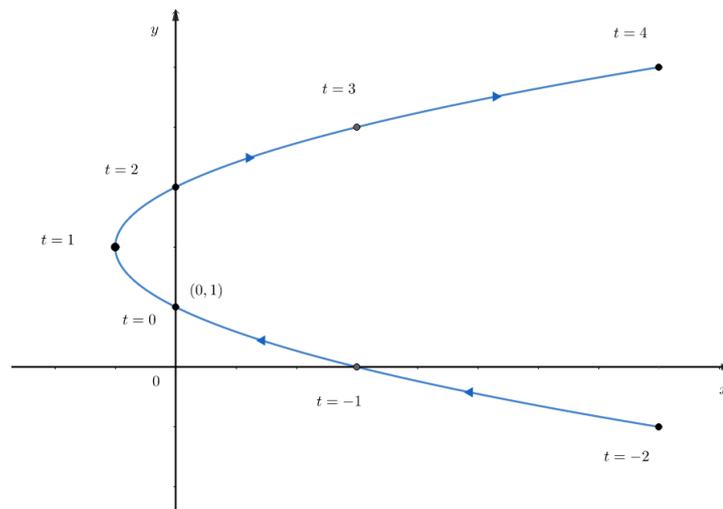


Figura 2.3:  $C : x = t^2 - 2t, y = t + 1$

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

e assim a curva representada pelas equações paramétricas dadas é a parábola  $x = y^2 - 4y + 3$ . Esta equação em  $x$  e  $y$  nos descreve onde a partícula esteve, mas não nos diz quando ela estava em um ponto específico. As equações paramétricas têm uma vantagem - elas nos dizem quando a partícula estava em determinado ponto. Elas também indicam a direção do movimento.

**Exemplo 2.1.3.** Esboce a curva definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \text{sen } t \\ y = \text{sen}^2 t \end{cases}$$

**Solução.** Observe que  $y = \text{sen}^2 t = x^2$  e dessa forma o ponto  $(x, y)$  se move na parábola  $y = x^2$ , o que pode ser constatado na Figura 2.4. Mas observe também que, como  $-1 \leq \text{sen } t \leq 1$ , temos  $-1 \leq x \leq 1$ , assim as equações paramétricas representam apenas a parte da parábola onde  $-1 \leq x \leq 1$ . Como  $\text{sen } t$  é periódica, o ponto  $(x, y) = (\text{sen } t, \text{sen}^2 t)$  se move para frente e para trás infinitamente ao longo da parábola de  $(-1, 1)$  até  $(1, 1)$ . (Veja a Figura 2.4).

$t$	$x = \text{sen } t$	$y = \text{sen}^2 t$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	1
$\pi$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	1
$2\pi$	0	0

Tabela 2.2:

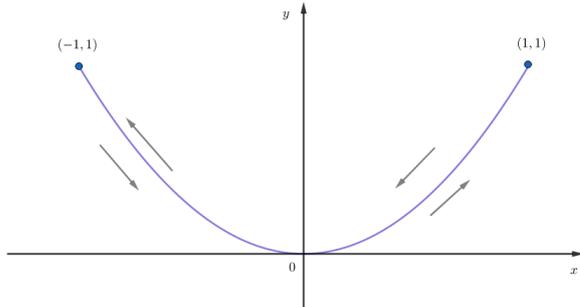


Figura 2.4:  $C : x = \text{sen } t, y = \text{sen}^2 t$

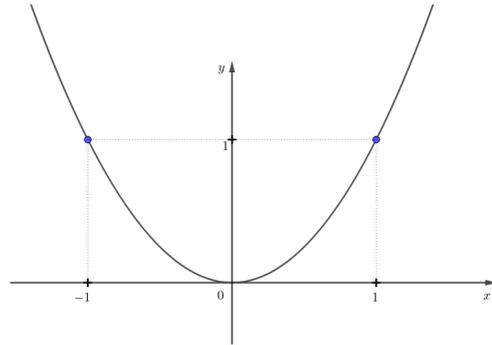


Figura 2.5:  $C : y = x^2$

**Exemplo 2.1.4.** Representar a curva dada pelas seguintes equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen } t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

**Solução.** Se marcarmos os pontos, parece que a curva é um círculo. Podemos confirmar esta impressão pela eliminação do parâmetro  $t$ . Observe que pela Relação Fundamental Trigonométrica  $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$  temos:

$$x^2 + y^2 = \text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Então, o ponto  $(x, y)$  se move no círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$ . Observe que, neste exemplo, o parâmetro  $t$  pode ser interpretado como ângulo (em radianos) mostrado na Figura 2.6. Quando  $t$  aumenta de 0 até  $2\pi$ , o ponto  $(x, y) = (\cos t, \text{sen } t)$  se move uma vez em torno do círculo, no sentido anti-horário, partindo do ponto  $(1, 0)$ . Observemos através da atribuição de valores para  $t$  na Tabela seguinte representa os valores no plano da posição do ponto  $P$ .

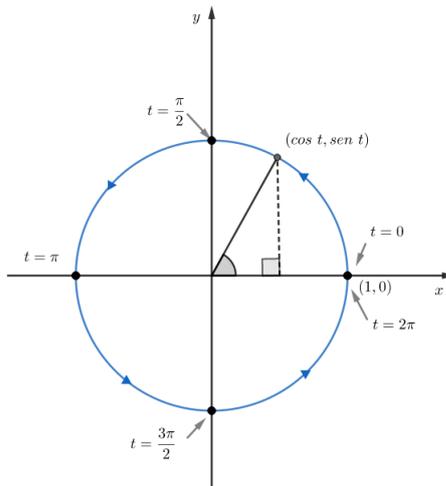


Figura 2.6:  $C : x = \cos t, y = \text{sen } t$

$t$	$x = \cos t$	$y = \text{sen } t$
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\pi$	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
$2\pi$	1	0

Tabela 2.3:

**Exemplo 2.1.5.** Esboce a curva  $\gamma = (\cos^2 t, \text{sen}^2 t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Solução.** Neste caso, é possível eliminar o parâmetro  $t$  através da Relação Trigonométrica Fundamental:  $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$ . A curva  $\gamma$  nos fornece que:

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \text{sen}^2 t \end{cases}$$

Assim, temos:

$$\cos^2 t + \text{sen}^2 t = x + y = 1 \iff x + y = 1 \iff y = 1 - x$$

Logo, concluímos que os pontos da curva  $\gamma$  satisfazem a equação da reta  $y = 1 - x$ . Daí, o traçado da curva está contido no gráfico de  $y = 1 - x$ .

A imagem de  $\gamma$  está contida no gráfico de  $y = 1 - x$ . Porém, a imagem de  $\gamma$  não preenche todo o gráfico  $y = 1 - x$ , pois  $x = \cos^2 t \geq 0$  (positivo e menor que 1), ou seja,

$0 \leq x = \cos^2 t \leq 1$  e  $0 \leq y = \sin^2 t \leq 1$  de modo equivalente  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$ . Vamos verificar na tabela abaixo o sentido de orientação da  $\gamma$  e, em seguida, o gráfico da reta  $y = 1 - x$  e o gráfico da curva.

Observamos na Figura 2.7 a representação da reta  $y = 1 - x$  enquanto que a imagem da curva  $\gamma$  está contida nesta reta entre os pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  indefinidamente já que  $t \in \mathbb{R}$ .

$t$	$x = \cos^2 t$	$y = \sin^2 t$
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\pi$	1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	1
$2\pi$	1	0

Tabela 2.4:

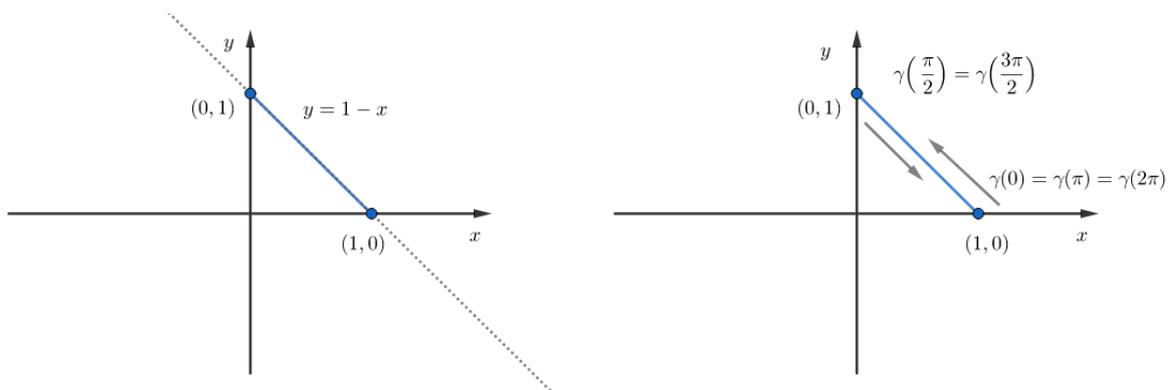


Figura 2.7:  $y = 1 - x$  e  $\gamma : (x = \cos^2 t, y = \sin^2 t)$ , respectivamente.

A análise feita, anteriormente, sobre o do deslocamento e sobre o sentido do deslocamento de  $P = (x, y)$ , o qual pertence à imagem da curva  $\gamma$  será ilustrado a partir do deslocamento ocorrido tanto no eixo  $OX$  representado pela função  $x = \cos^2 t$  quanto pelo deslocamento no eixo  $OY$  dado pela função  $y = \sin^2 t$ . Após a parametrização, teremos essas duas funções em relação a  $t$  tais que  $x = \cos^2 t$  e  $y = \sin^2 t$ . Os gráficos a seguir 2.8 e 2.9 descreverão o percurso desse ponto em cada uma das funções citadas em relação ao parâmetro  $t$ .

Veremos, no decorrer deste texto, um modo de obter as equações paramétricas de algumas curvas planas, dentre elas as cônicas, usando, por exemplo, relações trigonométricas básicas e observando as condições que um ponto deve satisfazer para pertencer à curva.

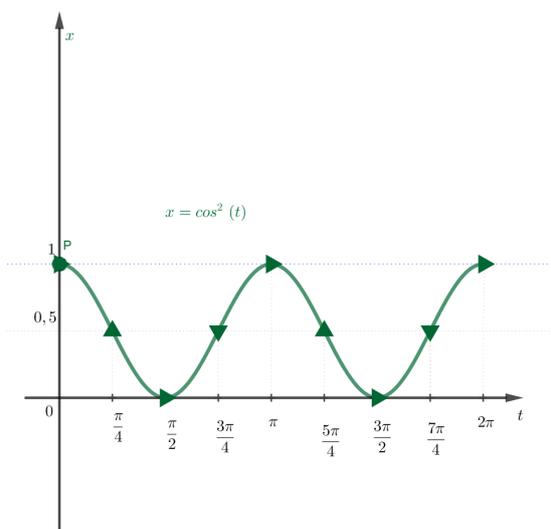


Figura 2.8:  $x = \cos^2 t, 0 \leq t \leq 2\pi$

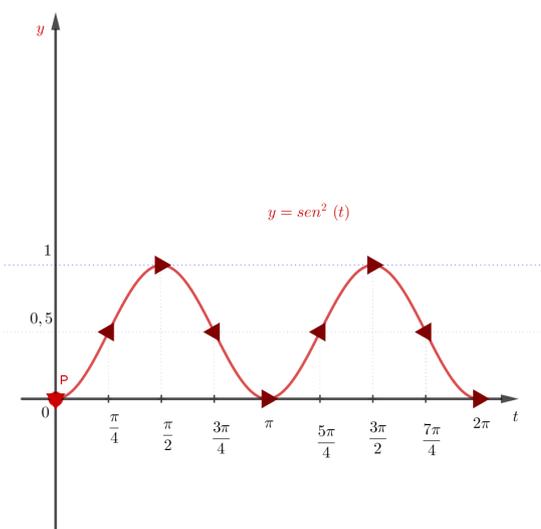


Figura 2.9:  $y = \text{sen}^2 t, 0 \leq t \leq 2\pi$

Vamos resolver vários exemplos a fim verificar técnicas e observar propriedades contidas no processo de parametrização.

## 2.2 Parametrização das cônicas

Os historiadores atribuem ao matemático Menaecmus (380 - 320 A.C. aproximadamente), discípulo de Eudócio na Academia de Platão, a descoberta das curvas cônicas ou seções cônicas quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que as elipses, as parábolas e as hipérbolas são obtidas como seções de um cone quando cortado por planos não paralelos à sua base.

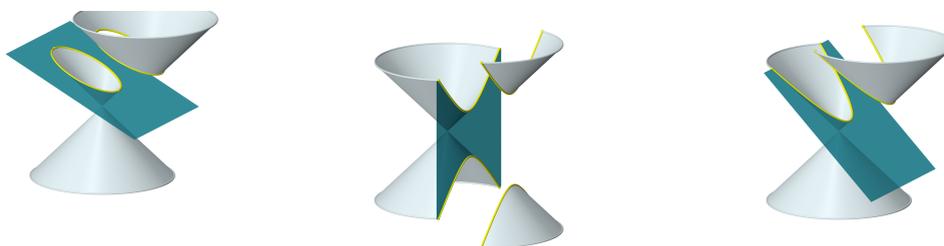


Figura 2.10: Seção Cônica gerando a elipse, hipérbole e parábola, respectivamente.

Segundo estudos de Fermat sobre a obra *Cônicas* de Apolônio e, através das propriedades que definem as seções cônicas, obteve suas equações. Seus estudos e análise deram lugar a sete equações que ele podia obter como formas irredutíveis a partir da equação geral do segundo

grau com duas variáveis que, escrita na linguagem atual, é:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (2.2.1)$$

De acordo com os valores dos coeficientes dessa equação,  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , Fermat classificou os lugares geométricos obtidos na seguinte nomenclatura: reta, hipérbole equilátera, par de retas concorrentes, parábola, círculo, elipse e hipérbole axial.

Os casos em que  $A \neq 0$  ou  $B \neq 0$  ou  $C \neq 0$  na equação (2.2.1) nos proporcionam uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, que são os principais lugares geométricos.

Nesta seção veremos como parametrizar uma elipse, uma hipérbole e uma parábola. Começaremos o estudo por um caso particular da elipse, mas extremamente importante, que é o círculo.

### 2.2.1 Parametrização de um círculo

Sejam  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$  o círculo de centro na origem e raio  $r > 0$ , e  $t$  a medida em radianos do ângulo  $\widehat{P_0OP}$  (tomada no sentido positivo), onde  $O$  é a origem do sistema cartesiano de coordenadas,  $P_0 = (r, 0)$  é o ponto de interseção do círculo com o semieixo positivo  $OX$  e  $P = (x, y)$  é um ponto de  $\mathcal{C}$ .

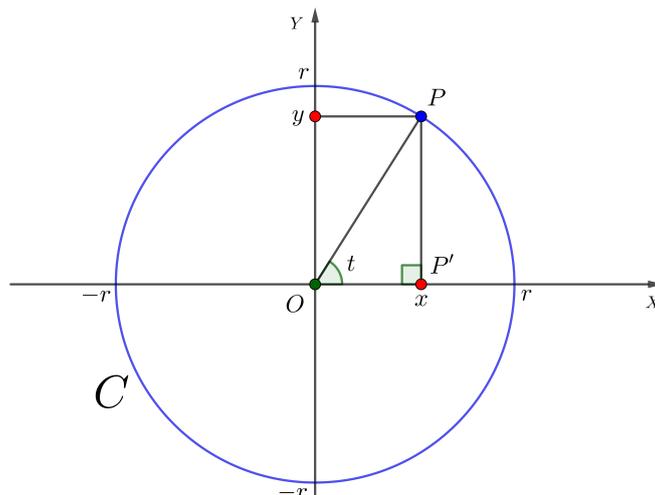


Figura 2.11: Círculo  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ .

Considere o ponto  $P' = (x, 0)$  tal que  $P'$  é projeção sobre o eixo  $OX$  do ponto  $P$  pertencente à  $\mathcal{C}$ . De acordo com a Figura 2.11 o triângulo  $OPP'$  é retângulo em  $P'$ . Daí,

queremos representar as expressões das coordenadas  $x$  e  $y$  em função do parâmetro  $t$ . Desse modo, temos a partir do triângulo  $OPP'$  suas relações fundamentais citadas abaixo:

$$\cos t = \frac{OP'}{OP} \implies \cos t = \frac{x}{r} \iff x = r \cos t$$

e

$$\sin t = \frac{PP'}{OP} \implies \sin t = \frac{y}{r} \iff y = r \sin t.$$

Portanto,  $x = x(t) = r \cos t$  e  $y = y(t) = r \sin t$ , implica uma curva  $\lambda(t) = (r \cos t, r \sin t)$  cujo a imagem está contida no círculo  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ , onde o parâmetro  $t$  percorre valores reais. Isto é, fazendo  $t$  percorrer os valores do intervalo  $[0, 2\pi)$ , obtemos todos os pontos do círculo.

Podemos também considerar  $t$  percorrendo todos os valores reais. Isto implica realizar um número infinito de voltas sobre o círculo. Portanto, uma possibilidade de equações paramétricas para o círculo  $\mathcal{C}$  é:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Observe que para quaisquer valores de  $a$  e  $b$ , com  $a \neq 0$ , as equações

$$\begin{cases} x = r \cos(at + b) \\ y = r \sin(at + b) \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

também são equações paramétricas para o círculo  $\mathcal{C}$ , pois:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2(at + b) + r^2 \sin^2(at + b) = r^2,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Conforme o parâmetro  $t$  percorre todos os valores em  $\left[-\frac{b}{a}, \frac{2\pi - b}{a}\right)$ , o ponto  $P = (r \cos(at + b), r \sin(at + b))$  percorre todos os pontos do círculo  $\mathcal{C}$ . Em particular, para  $a = -1$  e  $b = \frac{\pi}{2}$ , obtemos que

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = r \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = r \sin t \\ y = r \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = r \cos t \end{cases}; t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas para o círculo  $\mathcal{C}$ .

Note que o ponto  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , percorre o círculo no sentido anti-horário, enquanto o ponto  $\delta(t) = (r \sin t, r \cos t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , percorre o círculo no sentido horário.

Sejam agora o círculo  $\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$  de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $r > 0$ . Por uma translação do sistema de eixos  $OXY$ , obtemos um novo sistema de eixos  $\overline{OXY}$ , onde  $\overline{O} = (x_0, y_0)$  é o centro do círculo. Nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  do sistema  $\overline{OXY}$ , a equação

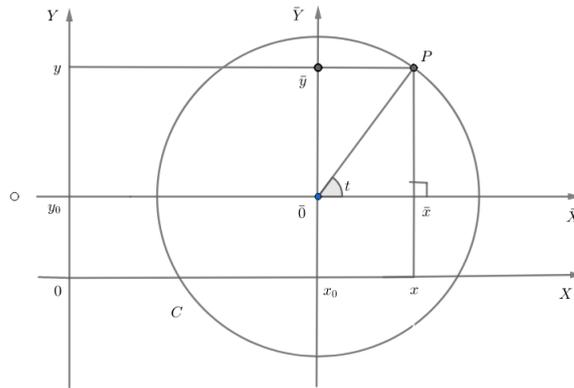


Figura 2.12: Círculo  $\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ .

cartesiana do círculo é  $x^2 + y^2 = r^2$ , pois, nesse sistema, o círculo  $\mathcal{C}$  tem raio  $r$  e centro na origem. Sendo  $\bar{x} = r \cos t$  e  $\bar{y} = r \sin t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , equações paramétricas de  $\mathcal{C}$  nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , segue que

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x_0 + \bar{x} = x_0 + r \cos t \\ y = y_0 + \bar{y} = y_0 + r \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R},$$

são também equações paramétricas do círculo  $\mathcal{C}$  nas coordenadas  $x$  e  $y$ . Temos também que

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x_0 + \bar{x} = x_0 + r \sin t \\ y = y_0 + \bar{y} = y_0 + r \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas do círculo  $\mathcal{C}$ .

**Exemplo 2.2.1.** Parametrize o círculo  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$ .

**Solução.** Completando os quadrados,

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12 \iff (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 12 + 4 + 9 = 25,$$

segue que  $\mathcal{C}$  é o círculo de centro  $C = (2, 3)$  e raio  $r = 5$ . Pelo visto acima,

$$\begin{cases} x = 2 + 5 \cos t \\ y = 3 + 5 \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas do círculo  $\mathcal{C}$ .

### 2.2.2 Parametrização de uma Elipse

Seja  $\varepsilon : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  uma elipse de centro  $(x_0, y_0)$ . Consideremos o círculo  $\mathcal{C} : \alpha^2 + \beta^2 = 1$  de centro na origem e raio  $r = 1$ . Como

$$(x, y) \in \varepsilon \iff (\alpha, \beta) = \left( \frac{x - x_0}{a}, \frac{y - y_0}{b} \right) \in \mathcal{C}$$

e

$$\begin{cases} \alpha = \cos t \\ \beta = \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \alpha = \sin t \\ \beta = \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

são parametrizações de  $\mathcal{C}$ , obtemos que

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + b \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = x_0 + a \sin t \\ y = y_0 + b \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

são duas parametrizações possíveis da elipse  $\varepsilon$ .

**Exemplo 2.2.2.** Parametrize a elipse  $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y = -1$ .

**Solução.** Completando os quadrados,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 4y^2 - 16y = -1 &\iff (x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = -1 + 1 + 16 = 16 \iff \\ &\frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1, \end{aligned}$$

vemos que a elipse  $\varepsilon$  tem centro no ponto  $(1, 2)$ , reta focal  $y = 2$  paralela ao eixo  $OX$ ,  $a = 4$  e  $b = 2$ . Então, as parametrizações de  $\varepsilon$  são:

$$\varepsilon_1 : \begin{cases} x = 1 + 4 \cos t \\ y = 2 + 2 \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 : \begin{cases} x = 1 + 4 \sin t \\ y = 2 + 2 \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Atribuindo valores para o parâmetro  $t$  tal que  $0 \leq t \leq 2\pi$  de acordo com a Tabela 2.5 obtemos a orientação anti-horária da curva  $\varepsilon_1$  no primeiro caso de parametrização acima. Podemos verificar que a imagem da curva, referente ao primeiro caso da parametrização, está contida no gráfico da elipse representada na Figura 2.13.

Poderemos verificar que a representação da imagem de  $\varepsilon_2$  também estará contida no gráfico da elipse da Figura 2.13, no entanto teremos o sentido horário da movimentação de um ponto da curva.

$t$	$x$	$y$
0	5	2
$\frac{\pi}{2}$	1	4
$\pi$	-3	2
$\frac{3\pi}{2}$	1	0
$2\pi$	5	2

Tabela 2.5:  $\varepsilon_1 : x = 1 + 4 \cos t, y = 2 + 2 \operatorname{sen} t$

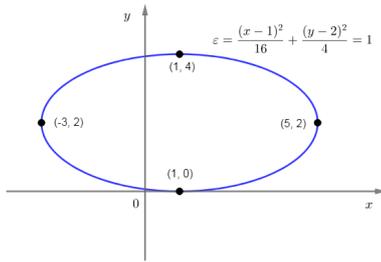


Figura 2.13:  $\varepsilon : \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

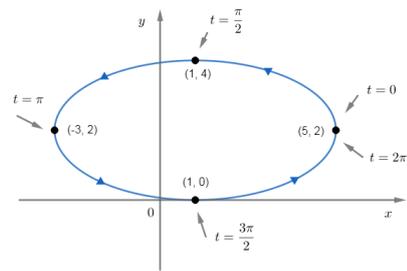


Figura 2.14:  $\varepsilon_1 : x = 1 + 4 \cos t, y = 2 + 2 \operatorname{sen} t$ .

### 2.2.3 Parametrização de uma Hipérbole

Consideremos a hipérbole  $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$  equilátera ( $a = b = 1$ ) de centro na origem cuja reta focal é o eixo  $OX$ . Sejam  $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  e  $\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, respectivamente. Os pontos  $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$  e  $(-\cosh t, \operatorname{senh} t)$  pertencem à hipérbole  $\mathcal{H}$ , pois

$$(\cosh t)^2 - (\operatorname{senh} t)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além disso, variando  $t$  em  $\mathbb{R}$ , vemos que  $x = \cosh t$  ( $x = -\cosh t$ ) percorre todos os valores em  $[1, +\infty)$  (respectivamente,  $(-\infty, -1]$ ), enquanto  $y = \operatorname{senh} t$  percorre todos os valores reais. Portanto,

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \operatorname{senh} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização do ramo  $\mathcal{H}^+$  de  $\mathcal{H}$  que intersecta o semieixo positivo  $OX$ , e

$$\begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \operatorname{senh} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização do ramo  $\mathcal{H}^-$  de  $\mathcal{H}$  que intersecta o semieixo negativo  $OX$ .

Seja agora a hipérbole  $\mathcal{H} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  de centro  $(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$ .

Consideremos a hipérbole  $\mathcal{H}_0 : \alpha^2 - \beta^2 = 1$ . Como um ponto  $(x, y)$  pertence à hipérbole  $\mathcal{H}$  se e só se o ponto  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{x - x_0}{a}, \frac{y - y_0}{b}\right)$  pertence à hipérbole  $\mathcal{H}_0$ , e

$$\mathcal{H}_0 : \begin{cases} \alpha = \pm \cosh t \\ \beta = \sinh t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de  $\mathcal{H}_0$ , obtemos que

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = x_0 \pm a \cosh t \\ y = y_0 + b \sinh t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas da hipérbole  $\mathcal{H}$  de reta focal paralela ao eixo  $OX$ . De modo análogo, podemos verificar que

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = x_0 + b \sinh t \\ y = y_0 \pm a \cosh t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas da hipérbole  $\mathcal{H} : \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$  de centro  $(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$ .

**Exemplo 2.2.3.** Parametrize a hipérbole  $\mathcal{H} : x^2 - 4y^2 + 2x - 8y = 7$ .

**Solução.** Completando os quadrados, temos

$$x^2 - 4y^2 + 2x - 8y = 7 \iff (x+1)^2 - 4(y+1)^2 = 7+1-4 = 4 \iff \frac{(x+1)^2}{4} - (y+1)^2 = 1.$$

Logo,  $\mathcal{H}$  é uma hipérbole de centro  $(-1, -1)$ , reta focal  $y = -1$  paralela ao eixo  $OX$ ,  $a = 2$  e  $b = 1$ . Assim, pelo visto acima,

$$\begin{cases} x = \pm 2 \cosh t - 1 \\ y = \sinh t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de  $\mathcal{H}$ .

**Exemplo 2.2.4.** Parametrize a hipérbole  $\mathcal{H} : -x^2 + 9y^2 - 2x + 18y - 1 = 0$ .

**Solução.** Completando os quadrados, temos

$$9(y^2+2y)-(x^2+2x) = 1 \iff 9(y+1)^2-(x+1)^2 = 1+9-1 = 9 \iff (y+1)^2 - \frac{(x+1)^2}{9} = 1.$$

Logo,  $\mathcal{H}$  é uma hipérbole de centro  $(-1, -1)$ , reta focal  $x = -1$  paralela ao eixo  $OY$ ,  $a = 1$  e  $b = 3$ . Portanto,

$$\begin{cases} x = 3\sinh t - 1 \\ y = \pm \cosh t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização possível de  $\mathcal{H}$ .

Vamos verificar a representação do gráfico da hipérbole  $\mathcal{H}$  na Figura abaixo.

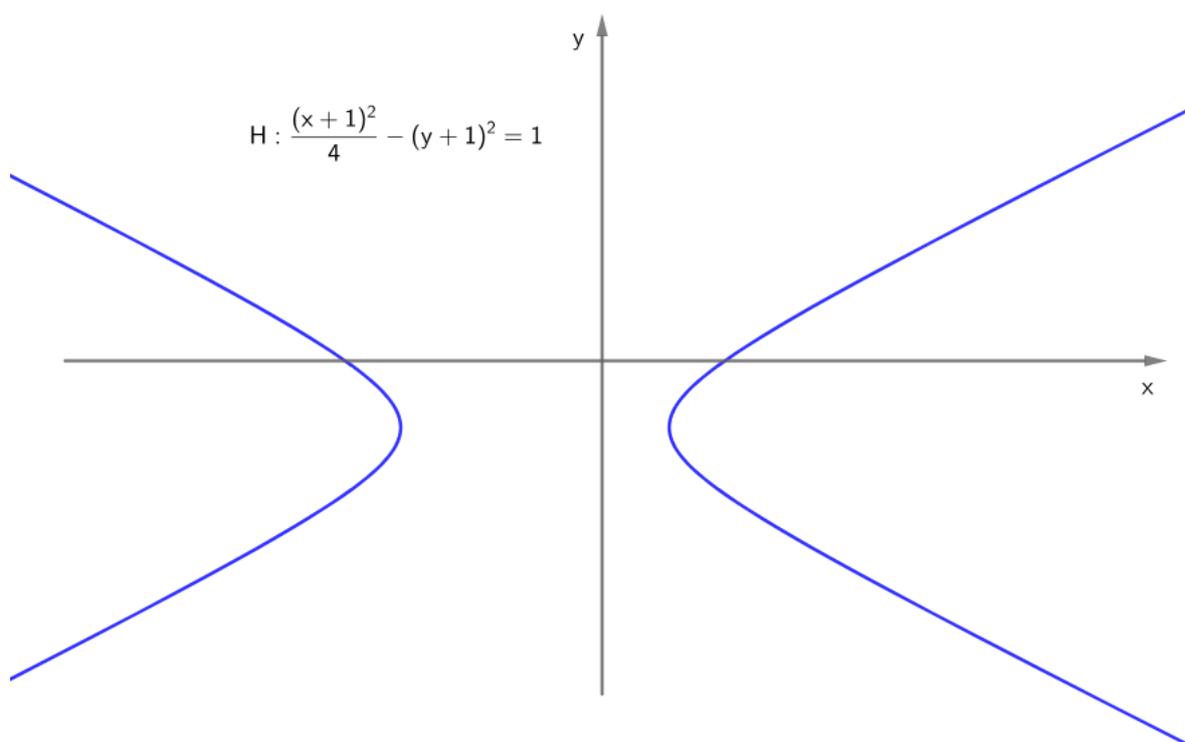


Figura 2.15:  $\mathcal{H} : \frac{(x+1)^2}{4} - (y+1)^2 = 1$

### 2.2.4 Parametrização de uma Parábola

As equações canônicas das parábolas se caracterizam por apresentar uma das variáveis no primeiro grau. Isso permite expressar essa variável como *função da variável do segundo grau*.

Assim, por exemplo, na parábola  $P$  de equação

$$(x - a)^2 = k(y - b) \iff y = \frac{1}{k}(x - a)^2 + b,$$

vértice  $(a, b)$  e reta-focal paralela ao eixo  $OY$ , escolhendo o parâmetro  $t$  como sendo  $x - a$ , a variável  $y$  se escreve

$$y = \frac{1}{k}t^2 + b.$$

Portanto,  $P$  pode ser parametrizada do seguinte modo:

$$P : \begin{cases} x = t + a \\ y = \frac{1}{k}t^2 + b \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 2.2.5.** Parametrize a parábola  $P : y^2 - 2x + 4y = 0$ .

**Solução.** Completando os quadrados:

$$\begin{aligned} y^2 - 2x + 4y = 0 &\iff y^2 + 4y = 2x \iff y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \iff y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 = \\ &2(x + 2) \iff (y + 2)^2 = 2(x + 2), \end{aligned}$$

segue que  $P$  é uma parábola de vértice  $V = (-2, -2)$  e reta focal  $y = -2$  paralela ao eixo  $OX$ .

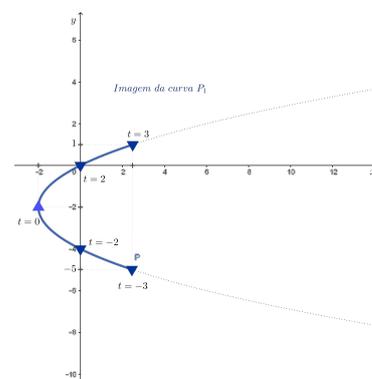
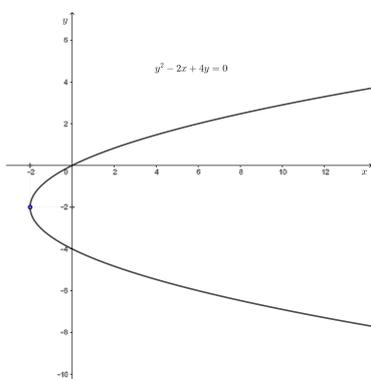
Temos que

$$(y + 2)^2 = 2(x + 2) \iff \frac{(y+2)^2}{2} = (x + 2) \iff \frac{(y+2)^2}{2} - 2 = x \iff x = \frac{(y+2)^2}{2} - 2.$$

A fim de explicitar uma parametrização para a parábola  $P$  chamando  $t = y + 2 \iff y = t - 2$ . E, como  $x = \frac{(y+2)^2}{2} - 2 \iff x = \frac{t^2}{2} - 2$ . Portanto, temos uma parametrização

tal que  $P : \begin{cases} x = \frac{t^2}{2} - 2 \\ y = t - 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ , são equações paramétricas da parábola  $P$ .

Vamos verificar nos gráficos abaixo os gráficos da parábola  $P$  e da imagem da curva parametrizada  $P_1$ .



Faremos a seguir, nas Figuras 2.16 e 2.17, a análise do percurso feito pelo ponto  $P$  em relação às funções  $x = \frac{t^2}{2} - 2$  e  $y = t - 2$ , respectivamente.

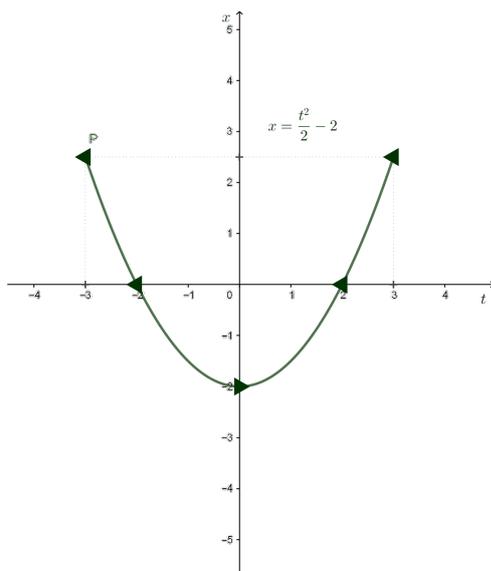


Figura 2.16:  $x = \frac{t^2}{2} - 2$

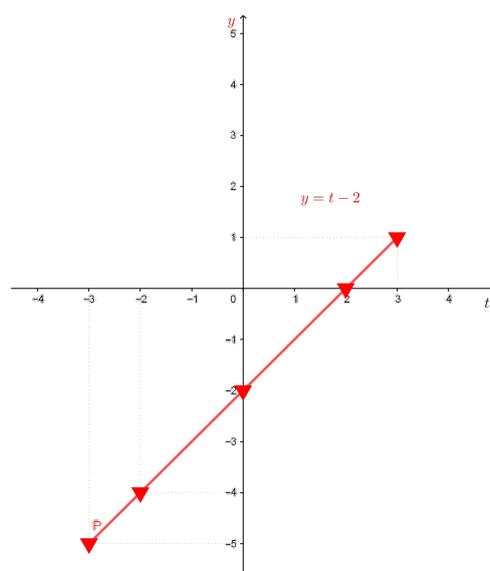


Figura 2.17:  $y = t - 2$

## 2.3 Parametrização de Curvas Conhecidas

### 2.3.1 Curva de Agnesi

Dado um círculo  $C$  de raio  $r$  tangente a duas retas paralelas  $s_1$  e  $s_2$ . Consideremos  $O$  e  $A$  os pontos de tangência de  $C$  com  $s_1$  e  $s_2$ , respectivamente, de acordo com a Figura 2.18. Do ponto  $O$  tracemos uma semirreta em direção à reta  $s_2$ . Sejam  $R$  e  $Q$  os pontos de interseção dessa semirreta com  $C$  e  $s_2$ , respectivamente. Tracemos o segmento  $QD$  perpendicular a  $s_1$ , com  $D \in s_1$ , e a reta  $s$  paralela a  $s_1$  que passa por  $R$ , ilustrado na Figura 2.18, abaixo.

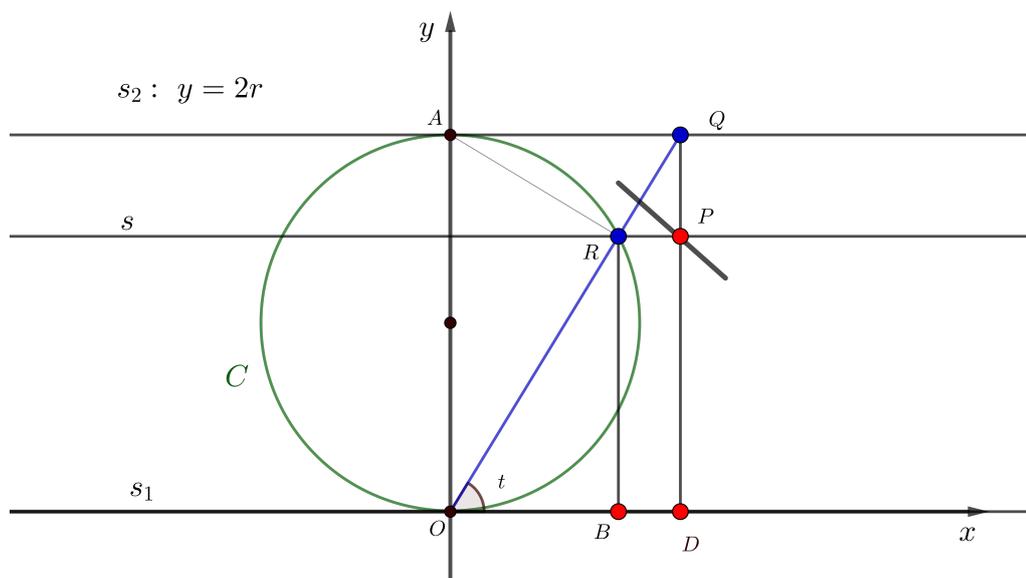


Figura 2.18: Curva de Agnesi

Seja  $P$  o ponto de interseção da reta  $s$  com o segmento  $QD$ . Os pontos  $P$  assim obtidos, traçando todas as semirretas de origem  $O$  que intersectam  $\mathcal{C}$ , descrevem a **curva de Agnesi**. Observe que o ângulo que essas semirretas fazem com o semieixo  $OX$  positivo varia no intervalo  $(0, \pi)$ .

Para obtermos as equações paramétricas da curva de Agnesi, vamos admitir que o ponto  $O$  seja a origem do sistema de coordenadas,  $s_1$  seja o eixo  $OX$  e  $s_2 : y = 2r$ . Isto implica que o ponto  $A$  terá as coordenadas  $(0, 2r)$  de acordo com a Figura 2.18.

Objetivamos determinar as coordenadas dos pontos  $P = (x, y)$  da curva em função de apenas um parâmetro. Esse parâmetro será o ângulo  $t$  formado por cada procedimento: segmento de reta formado pela ligação da origem  $O$  até a reta  $y = 2r$ .

É importante observar que no intervalo de  $0$  até  $\pi$  os valores de  $x$  e  $\cos t$  apresentam o mesmo sinal, ou seja, quando  $x$  é positivo  $\cos t$  também o é, o mesmo ocorrendo para parte negativa de  $x$ . Denotando por  $t$  a medida do ângulo  $\widehat{DOQ}$ , onde  $B$  é a projeção de  $R$  sobre o eixo  $OX$ , obtemos de acordo com a Figura 2.18:

$$|OD| = |OQ| |\cos t| \implies x = |OQ| \cos t \quad (2.3.1)$$

e

$$|RB| = |OR| |\sen t| \implies y = |OR| \sen t \quad (2.3.2)$$

Assim, o triângulo  $ORA$  representado na Figura 2.18, inserido num semicírculo de  $\mathcal{C}$ , é retângulo em  $R$  e a medida do ângulo  $\widehat{OAR}$  é  $t$ . Concluimos que  $|OR| = 2r \sen t$ . E, sendo o triângulo  $ODQ$  retângulo em  $D$  e  $|QD| = 2r$ , temos  $|OQ| = \frac{2r}{\sen t}$ . Substituindo estas relações em (2.3.1) e em (2.3.2), encontraremos, a seguir, equações paramétricas da curva de Agnesi.

$$x = |OQ| \cos t \iff x = \frac{2r}{\sen t} \cos t \iff x = 2r \cotg t \quad t \in (0, \pi) \quad (2.3.3)$$

e

$$y = |OR| \sen t \iff y = (2r \sen t) \sen t \iff y = 2r \sen^2 t \quad t \in (0, \pi) \quad (2.3.4)$$

Essas equações (2.3.3) e (2.3.4) descrevem o movimento de um ponto  $P = (x, y)$  conforme Figura abaixo.

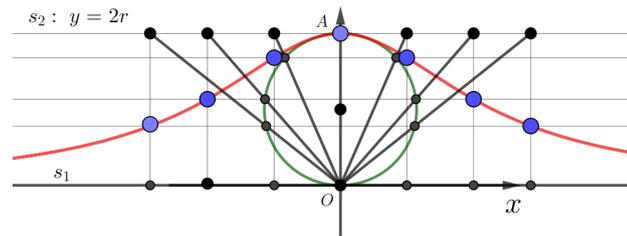


Figura 2.19: Curva de Agnesi

Portanto, através dos procedimentos descritos nesta subseção obtemos uma parametrização para a **Curva de Agnesi**, ou seja, a partir de (2.3.3) e (2.3.4) temos:

$$\delta(t) = \begin{cases} x = 2r \cot g t \\ y = 2r \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \text{ com } 0 \leq t \leq \pi$$

### 2.3.2 A Cicloide

Sejam  $\mathcal{C}$  um círculo de raio  $r$ ,  $s$  uma reta e  $P$  um ponto de  $\mathcal{C}$ . Denominamos **cicloide** a curva descrita pelo ponto  $P$  quando  $\mathcal{C}$  rola sobre a reta  $s$ , sem deslizar.

Esta curva ficou conhecida por "Helena de geometria" uma vez que, tal como a "Helena de Tróia" foi cobiçada e disputada por vários homens, também a cicloide gerou várias disputas na comunidade matemática. Joahnn Bernoulli chegou mesmo a chamá-la "curva fatídica do século *XVII*".

A curva cicloide foi arduamente estudada durante o século *XVII* e que, neste contexto, contribuiu para a construção do Cálculo Diferencial e Integral hoje conhecido. No início do estudo das equações diferenciais, os irmãos Bernoulli se depararam com a cicloide quando se propuseram a resolver o problema da braquistócrona, que fora proposta por Christiaan Huygens quando este estudou o pêndulo do relógio.

A cicloide é de fundamental importância na arquitetura e pode ser utilizada na construção de prédios com boa reflexão da luz natural quando associada a uma plataforma de luz na forma adequada. A utilização da iluminação natural na construção civil é uma forma de evitar danos ao meio ambiente. Para possibilitar uma maior incidência de luz, foi pensada uma cúpula com uma abertura acompanhada de uma prateleira de luz, que deveriam possuir formas adequadas para uma melhor otimização.

Para obtermos as equações paramétricas da cicloide, admitamos que:

- a reta  $s$  é o eixo  $OX$ ;
- o círculo  $\mathcal{C}$  inicia o movimento estando seu centro no ponto  $(0, r)$ ;
- o ponto  $P$  coincide com a origem do sistema de coordenadas no início do movimento.

Tracemos dois círculos:  $\mathcal{C}_1$ , representando  $\mathcal{C}$  em sua posição inicial, e  $\mathcal{C}_2$ , representando  $\mathcal{C}$  após ter rolado alguns instantes.

Veja, na Figura 2.20, a designação dos seguintes elementos:

- sejam  $O_1$  e  $O_2$  os centros de  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ , respectivamente;
- $P = (x, y)$  o ponto da cicloide em  $\mathcal{C}_2$ ;
- $A$  o ponto em que  $\mathcal{C}_2$  toca o eixo  $OX$ ;
- $Q = (x, 0)$  e  $T = (0, y)$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $OX$  e  $OY$ , respectivamente;
- $M$  e  $N$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $O_2O_1$  e  $O_2A$ , respectivamente;
- $t$  a medida do ângulo que  $O_2P$  faz com  $O_2A$ , no sentido positivo.

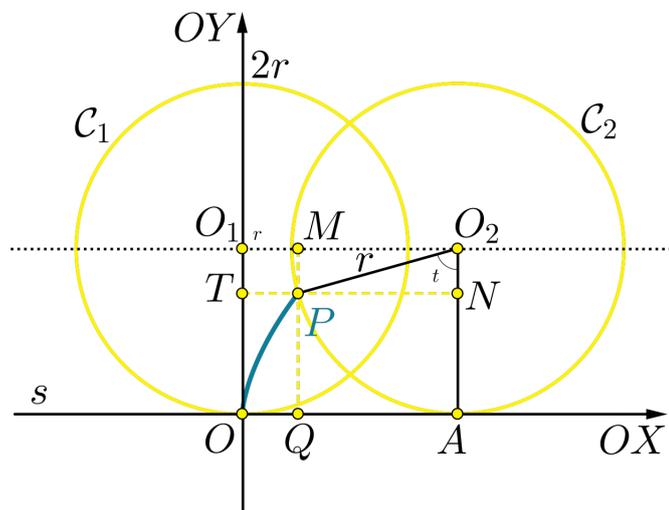


Figura 2.20: Desenvolvimento da cicloide.

Note que o segmento  $OA$  tem o mesmo comprimento que o arco de  $A$  a  $P$  sobre o círculo  $\mathcal{C}_2$ , que consiste dos pontos de  $\mathcal{C}$  que já fizeram contato com a reta  $s$ .

Como  $t$  é a medida de  $\widehat{AO_2P}$ , o comprimento do arco de  $\mathcal{C}_2$  de  $A$  a  $P$  que já fez contato com  $s$  é  $rt$ . Logo,  $|OA| = rt$ .

Então

$$x = |OQ| = |OA| \pm |QA| = |OA| \pm |O_2M| = rt \pm r|\text{sent}|$$

e

$$y = |OT| = |OO_1| \pm |TO_1| = r \pm |O_2N| = rt \pm r|\text{cost}|$$

onde o sinal depende da posição de  $Q$  na semirreta  $OA$  e da posição de  $T$  na semirreta  $OO_1$ , que, por sua vez, variam com a medida  $t$  do ângulo  $\widehat{AO_2P}$ .

Analisando o sinal de  $\text{sen } t$  e  $\text{cost}$  nos intervalos  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ,  $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$  e  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ , obtemos as seguintes equações paramétricas da cicloide:

$$\begin{cases} x = r(t - \text{sen } t) \\ y = r(1 - \text{cost}) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Veja como é feito o movimento na sequência de figuras abaixo.

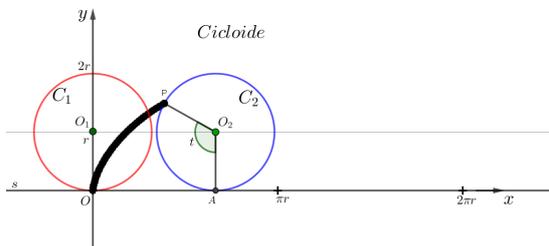


Figura 2.21:  $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$

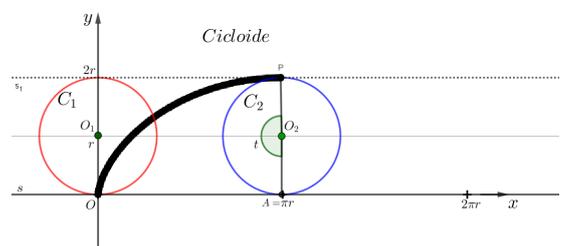


Figura 2.22:  $0 \leq t \leq \pi$

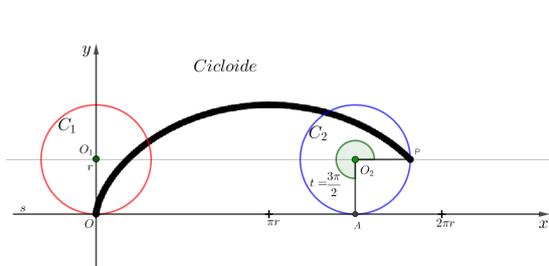


Figura 2.23:  $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

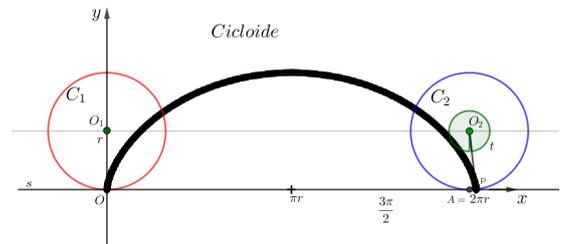
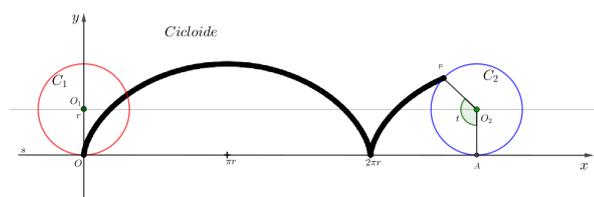


Figura 2.24:  $0 \leq t \leq 2\pi$

Figura 2.25: *Cicloide*

### 2.3.3 A Braquistócrona

A Braquistócrona é uma curva que é solução do problema: encontrar a curva ao longo da qual uma partícula desliza, sem fricção, em tempo mínimo (sob a ação da gravidade) a partir do ponto  $A$  até um ponto mais baixo  $B$  não na mesma vertical que contém  $A$ .

O matemático suíço Johann Bernoulli, que apresentou esse problema em 1696, mostrou que entre todas as possíveis curvas que unem  $A$  e  $B$ , como na Figura 2.26, a partícula levará o menor tempo deslizando de  $A$  até  $B$  se a curva for um arco invertido de uma cicloide. O Problema da Braquistócrona também foi resolvido por Jakob Bernoulli (irmão de Johann Bernoulli), Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Marquês de L'Hospital. Diz-se, embora sem comprovação, que Newton soube do problema no final da tarde de um dia cansativo na Casa da Moeda e que o resolveu naquela noite após o jantar. Ele publicou a solução anonimamente mas, ao vê-la, Johann Bernoulli observou: "Ah, conheço o leão pela sua pata".

O físico holandês Christian Huygens já tinha mostrado em 1673 por métodos geométricos que a cicloide é também a solução para o Problema da Tautócrona: a curva descrita por uma partícula deslizando livremente sob a ação apenas da gravidade, atingindo o ponto de mínimo (o fundo da curva) no mesmo instante independente do ponto de partida na curva.

Esse problema apareceu na construção de um relógio com pêndulo, cujo período é independente da amplitude de seu movimento. Mais tarde, a Tautócrona foi resolvida por Leibniz e Jakob Bernoulli usando argumentos analíticos. A solução de Bernoulli (em 1690) foi uma das primeiras ocasiões em que se resolveu explicitamente uma equação diferencial.

### Modelagem Matemática e Solução

O primeiro passo na resolução deste problema é encontrar o tempo que a partícula leva para se deslocar sobre uma curva qualquer que una os pontos  $A$  e  $B$  pois, a partir disso, podemos variar entre todas as possíveis curvas para encontrar a que minimize o tempo de deslocamento.

Esquematisando no plano coordenado, temos:

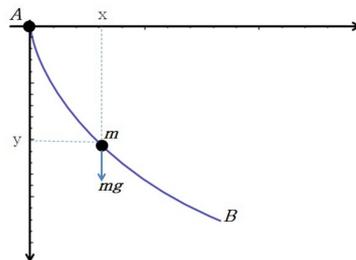


Figura 2.26: Deslocamento da partícula sob a ação da gravidade

Note que o eixo coordenado  $y$  foi orientado no sentido oposto ao usual. Isto é conveniente pois, neste caso, a força exercida pela gravidade fica orientada no sentido positivo. Além disso, escolhemos o sistema de coordenadas de modo que o ponto  $A$  fique localizado na origem.

Sabemos da física que quando uma partícula atua sob a ação da gravidade, o trabalho realizado para se deslocar de  $A$  até um ponto  $P$  é igual à variação da energia cinética. Assim, denotando por  $v$  o módulo da velocidade (velocidade escalar) da partícula no ponto  $P$ , por  $y$  o seu deslocamento vertical e por  $m$  a sua massa, temos

$$\text{trabalho} = mgy = \frac{1}{2}mv^2 = \text{variação da energia cinética.} \quad (2.3.5)$$

Mas a velocidade escalar é a variação do espaço percorrido pelo tempo, ou seja,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

e por 2.3.5,

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Usando o fato que o comprimento do arco percorrido para ir de  $A = (0, 0)$  a  $P = (x, y)$  através de uma curva que é representada pelo gráfico de uma função  $y = y(x)$  é dado por

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

obtemos

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}.$$

Assim, denotando por  $t$  o tempo gasto neste trajeto, ficamos com

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2gy}}.$$

Logo, para se deslocar de  $A = (0, 0)$  a  $B = (x_0, y_0)$  o tempo total gasto é

$$T(x_0) = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy}} dx. \quad (2.3.6)$$

O problema resume-se a encontrar uma função  $y = y(x)$  que minimize o tempo acima e o procedimento usual para sua resolução é fazer uso do Cálculo Variacional ( veja as referências [1] e [5] para maiores detalhes). Mais precisamente, devemos encontrar uma função  $y = y(x)$  que satisfaça

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2.3.7)$$

onde

$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy}} \quad (2.3.8)$$

Após algum algebrismo combinando (2.3.7) e (2.3.8) o problema se resume a encontrar uma função  $y = y(x)$ , que satisfaça

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [(1 + (y')^2)y] = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Integrando a equação (2.3.9) em relação à  $x$ , obtemos

$$(1 + (y')^2)y = k^2 \quad (2.3.10)$$

onde  $k^2$  é uma certa constante positiva a ser determinada posteriormente. Resolvendo esta última equação para  $y'$ , obtemos

$$dy = \sqrt{\frac{k^2 - y}{y}} dx. \quad (2.3.11)$$

Definimos uma nova variável  $t$  pela relação

$$y = k^2 \operatorname{sen}^2 t. \quad (2.3.12)$$

Assim,

$$dy = 2k^2 \operatorname{sen} t \cos t dt. \quad (2.3.13)$$

Substituindo (2.3.12) e (2.3.13) em (2.3.11) obtemos como resultado

$$2k^2 \operatorname{sen} t dt = dx. \quad (2.3.14)$$

Integrando (2.3.14), obtemos

$$k^2 \left( t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right) = x. \quad (2.3.15)$$

Fazendo

$$2t = \theta$$

a equação (2.3.15) se transforma em

$$x = \frac{1}{2} k^2 (\theta - \operatorname{sen} \theta). \quad (2.3.16)$$

Além disso, com esta substituição, a equação (2.3.12) transforma-se na equação

$$y = \frac{1}{2} k^2 (1 - \cos \theta). \quad (2.3.17)$$

As equações (2.3.16) e (2.3.17) são as equações paramétricas da solução da equação (2.3.10), cujo gráfico contém o ponto  $A = (0, 0)$ . O gráfico das equações (2.3.16) e (2.3.17) é uma cicloide, compare estas equações com as equações paramétricas da cicloide.

Podemos escolher a constante  $k$  de modo que a cicloide determinada pelas equações (2.3.16) e (2.3.17) passe também pelo ponto  $B = (x_0, y_0)$ .

### 2.3.4 Fólum de Descartes.

A curva chamada **Fólum de Descartes** é a curva cuja equação cartesiana é:

$$\mathcal{C} : x^3 + y^3 = 3axy, \quad (2.3.18)$$

onde  $a > 0$ .

Para fazermos um esboço detalhado desta curva, vamos primeiro parametrizá-la. Para isso, introduzimos o parâmetro  $t = \frac{y}{x}$ . Observe que:

- se  $(x, y) \in \mathcal{C}$ , então  $x = 0 \iff y = 0$ .
- se  $t = -1$  e  $(x, y) \in \mathcal{C}$ , então  $x = -y \Rightarrow x^3 + (-x)^3 = 3ax(-x) \Rightarrow 0 = -3ax^2 \Rightarrow x = 0$  e  $y = 0$ .

Substituindo  $y = tx$  na equação (2.3.18), obtemos:

$$x^3 + (tx)^3 = 3ax(tx) \iff (1 + t^3)x^3 = 3atx^2.$$

Portanto, para  $t \neq -1$ , temos que  $x = \frac{3at}{1+t^3}$  e  $y = tx = \frac{3at^2}{1+t^3}t$ .

Assim,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = \frac{3at}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} ; t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

é uma parametrização da Folium de Descartes. Observe que  $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ .

Vamos agora verificar algumas propriedades relativas a esta curva:

1. A curva intersecta a reta  $r : y = x$  nos pontos  $(0, 0)$  e  $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ .

De fato, fazendo  $y = x$  na equação (2.3.18), obtemos:

$$x^3 + x^3 = 3axx \iff 2x^3 = 3ax^2 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3a}{2}.$$

2. A curva é simétrica em relação à reta  $r : y = x$ .

Seja  $P = (x_0, y_0)$  um ponto do plano e  $P_0$  o simétrico de  $P$  em relação à reta  $r : x - y = 0$ .

Seja  $r'$  a reta perpendicular à reta  $r$  que passa pelo ponto  $P$ . Então,  $(1, -1) \parallel r'$  e

$$r' : \begin{cases} x = s + x_0 \\ y = -s + y_0 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

é uma equação paramétrica da reta  $r'$ . O ponto  $Q = (s + x_0, -s + y_0)$  de interseção da reta  $r'$  com a reta  $r$  têm parâmetro  $s$  dado por:

$$s + x_0 = -s + y_0 \iff s = \frac{y_0 - x_0}{2}.$$

Logo,

$$Q = \left( \frac{y_0 - x_0}{2} + x_0, -\frac{y_0 - x_0}{2} + y_0 \right) = \left( \frac{y_0 - x_0}{2} + x_0, \frac{x_0 - y_0}{2} + y_0 \right) = \left( \frac{y_0 + x_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2} \right)$$

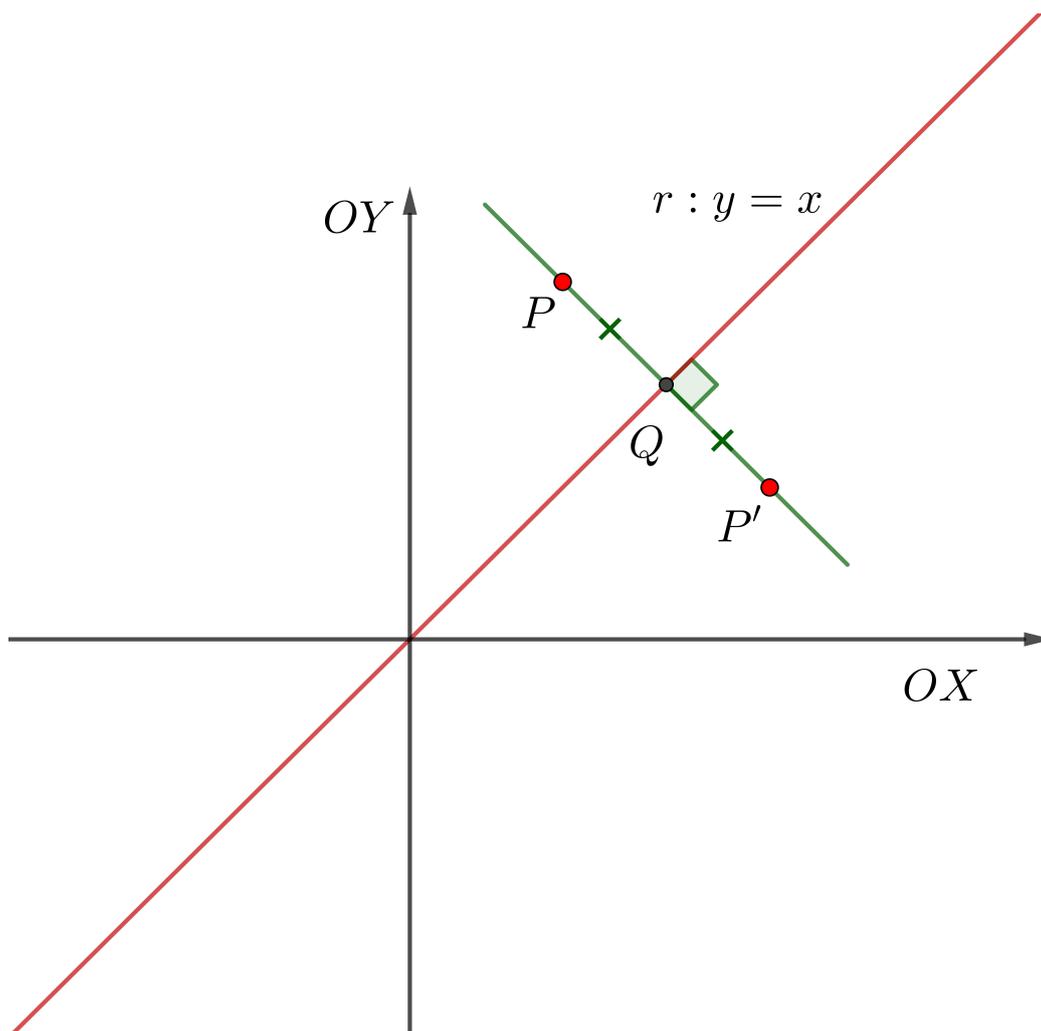


Figura 2.27:  $r' \perp r$  e  $P'$  simétrico de  $P$  em relação a  $r$ .

e, portanto,

$$P' = 2Q - P = (x_0 + y_0, x_0 + y_0) - (x_0, y_0) = (y_0, x_0).$$

Para verificar que  $C$  é simétrica em relação à reta  $r : y = x$ , basta mostrar que  $(x, y) \in C$  se, e só se,  $(y, x) \in C$ , o que é evidente pela equação cartesiana de  $C$ .

**Observação 2.3.1.** Podemos provar, de modo análogo, que o simétrico de um ponto  $P = (x, y)$  com respeito à reta  $y = -x$  é o ponto  $P' = (-y, -x)$ . Assim, um conjunto  $S$  é simétrico com relação à reta  $l$ , quando:  $(x, y) \in S \iff (-y, -x) \in S$ .

3. Vamos analisar agora o comportamento da curva em função do parâmetro  $t$  nos intervalos  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0]$ ,  $[0, 1]$  e  $[1, +\infty)$ .

(A) Para  $t \in (-\infty, -1)$ :  $1 + t^3 < 0$ ,  $x(t) > 0$  e  $y(t) < 0$ ;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3a}{1/t + t^2}, \frac{3a}{1/t^2 + t} \right) = (0, 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x(t), y(t)) = (+\infty, -\infty).$$

(B) Para  $t \in (-1, 0]$ :  $1 + t^3 > 0$ ,  $x(t) < 0$  e  $y(t) > 0$ ;  $(x(0), y(0)) = (0, 0)$  e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x(t), y(t)) = (-\infty, +\infty).$$

(C) Para  $t \in [0, 1]$ :  $1 + t^3 > 0$ ;  $x(t) > y(t) > 0$  se  $t \in (0, 1)$ ;  $x(0) = y(0) = 0$  e  $x(1) = y(1) = \frac{3a}{2}$ .

(D) Para  $t \in (1, +\infty)$ :  $1 + t^3 > 0$ ;  $y(t) > x(t) > 0$ ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3a}{1/t + t^2}, \frac{3a}{1/t^2 + t} \right) = (0, 0)$$

4. A curva está contida no semiplano  $x + y + a > 0$  e  $d((x(t), y(t)), r) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -1 \pm$ , onde  $r$  é a reta  $x + y + a = 0$ . Então,  $r$  é uma assíntota da curva.

De fato:

•

$$\begin{aligned} x(t) + y(t) + a &= \frac{3at}{1 + t^3} + \frac{3at^2}{1 + t^3} + a \\ &= \frac{3at + 3at^2 + a + at^3}{1 + t^3} \\ &= a \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{1 + t^3} \\ &= a \frac{(t + 1)(t^2 + 2t + 1)}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} \\ &= a \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - t + 1} \\ &= a \frac{(t + 1)^2}{t^2 - t + 1} > 0, \end{aligned}$$

pois  $(t + 1)^2 > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$  e  $t^2 - t + 1 > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

•

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1 \pm} d((x(t), y(t)), r) &= \lim_{x \rightarrow -1 \pm} \frac{|x(t) + y(t) + a|}{\sqrt{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1 \pm} \frac{a(t+1)^2}{\sqrt{2}(t^2 - t + 1)} \\
 &= \frac{a \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot 3} = 0.
 \end{aligned}$$

Usando as informações acima, podemos traçar a curva:

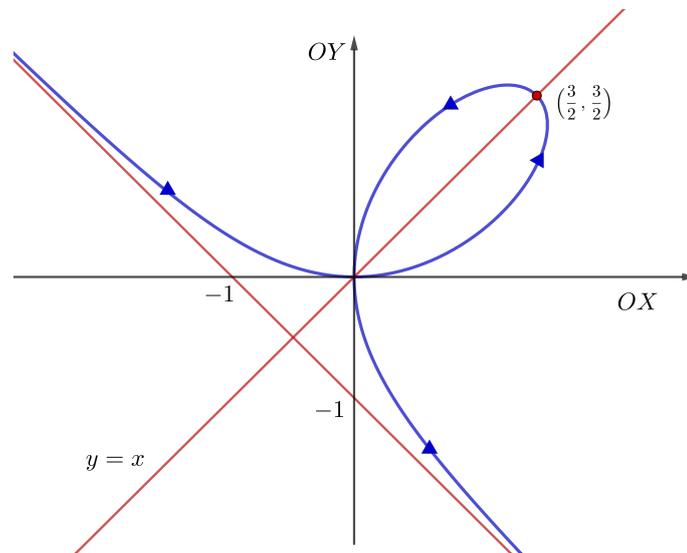


Figura 2.28: Folium de Descartes obtido com  $a = 1$ .

## 2.4 Técnicas para Esboçar Curvas Definidas por Equações Paramétricas

Neste tópico do trabalho iremos estudar três maneiras de esboçar curvas definidas por equações paramétricas

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I,$$

onde  $I$  é um intervalo de números reais.

### 2.4.1 MÉTODO I: Fazendo uma tabela

Às vezes, podemos esboçar a curva fazendo uma tabela escolhendo alguns valores de  $t$ . Este método nem sempre é aconselhável, pois é difícil saber até quantos valores de  $t$  podemos escolher para poder esboçar o gráfico perfeitamente.

**Exemplo 2.4.1.** Esboçar a curva descrita pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t^2 - 4 \\ y = \frac{t}{2} \end{cases}, -2 \leq t \leq 3.$$

**Solução.**

$t$	$x = t^2 - 4$	$y = \frac{t}{2}$
-2	0	-1
-1	-3	0,5
0	-4	0
1	-3	0,5
2	0	1
3	5	1,5

Tabela 2.6:

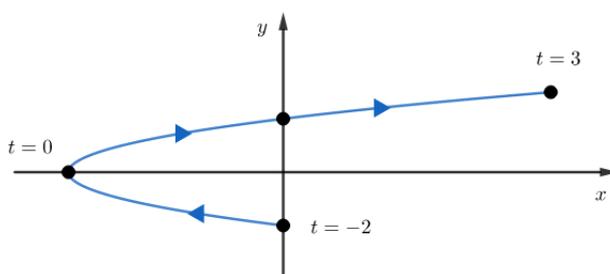


Figura 2.29:  $C : x = t^2 - 4, y = \frac{t}{2}$

### 2.4.2 MÉTODO II: Eliminação do Parâmetro

A equação cartesiana de uma curva que se apresenta na forma paramétrica é obtida pela eliminação do parâmetro  $t$ . Não existe um método geral para tal eliminação. O processo utilizado num problema depende, essencialmente, da forma das equações. A seguir, examinaremos alguns destes problemas.

**Exemplo 2.4.2.** Eliminar o parâmetro  $t$  nas seguintes equações paramétricas e esboçar a curva

$$\begin{cases} x = 3 \cos(2t) \\ y = 1 + \cos^2(2t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi.$$

**Solução.** Temos que

$$x = 3 \cos(2t) \Rightarrow \cos(2t) = \frac{x}{3}.$$

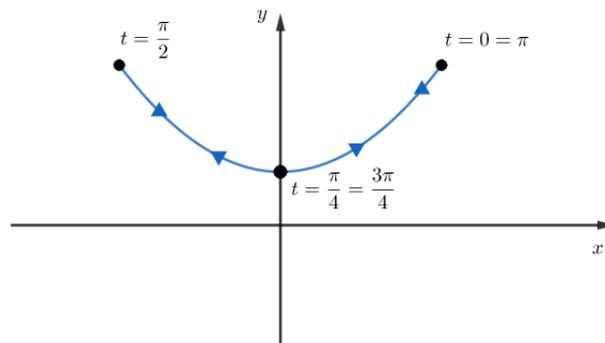
Substituindo em  $y = 1 + \cos^2(2t)$  obtemos

$$y = 1 + \frac{x^2}{9}.$$

Ou seja, a curva é a parte do gráfico da parábola

$$y = 1 + \frac{x^2}{9}$$

percorrido duas vezes, com  $-3 \leq x \leq 3$  e  $1 \leq y \leq 2$ .



**Exemplo 2.4.3.** Eliminar o parâmetro  $t$  nas seguintes equações paramétricas e esboçar a curva.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \\ y = \frac{t}{t+1} \end{cases}, t > -1.$$

**Solução.**

$$y = \frac{t}{t+1} \Rightarrow t = \frac{y}{1-y}.$$

Substituindo em  $x = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ , temos

$$x = \sqrt{1-y} \text{ ou } y = 1 - x^2.$$

Ou seja, a curva é parte do gráfico da parábola  $y = 1 - x^2$  com  $x > 0$  e  $y < 1$ .

### 2.4.3 MÉTODO III: Usando Noções de Cálculo

Para esboçar uma curva definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I,$$

devemos seguir os seguintes passos:

- (a) Pontos de interseção com os eixos coordenados, caso existam ou sejam fáceis de calcular.
- (b) Pontos de auto-interseção - pontos por onde a curva passa duas vezes (ou seja, em dois instantes diferentes), caso existam.
- (c) As tangentes horizontais  $\left(\frac{dy}{dt} = 0 \text{ e } \frac{dx}{dt} \neq 0\right)$ , caso existam.
- (d) As tangentes verticais  $\left(\frac{dx}{dt} = 0 \text{ e } \frac{dy}{dt} \neq 0\right)$ , caso existam.
- (e) Estudo de crescimento e decréscimo de  $x$  e  $y$ .
- (f) Estudo da concavidade.
- (g) Esboço da curva.

**Observação 2.4.1.** Para o bom entendimento dos itens (c), (d), (e) e (f) veja o apêndice (A).

**Exemplo 2.4.4.** Esboçar a curva  $\mathcal{C}$  definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = -\frac{t^3}{3} + t + 1 \end{cases}$$

**Solução.**

(a) **Interseção com os eixos:**  $y = 0 \Rightarrow -\frac{t^3}{3} + t + 1 = 0$  que é difícil de resolver. Além disso, como  $x \neq 0 \forall t$ , segue que a curva não intersecta o eixo  $y$ .

(b) **Auto-Interseção:** Sejam  $t_1 < t_2$  tais que  $x(t_1) = x(t_2)$  e  $y(t_1) = y(t_2)$ . Então

$$x(t_1) = x(t_2) \Rightarrow t_1^2 + 1 = t_2^2 + 1 \Rightarrow t_1^2 = t_2^2 \Rightarrow t_1 = \pm t_2.$$

Logo,  $t_1 = -t_2$ . Segue de  $y(t_1) = y(t_2)$  que

$$\frac{t_2^3}{3} - t_2 + 1 = -\frac{t_2^3}{3} + t_2 + 1 \Rightarrow \frac{t_2^3}{3} - t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \pm\sqrt{3}.$$

Dessa forma,

$$t = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

(c) **Tangentes horizontais:**

$$\frac{dx}{dt} = 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ e } \frac{dy}{dt} = -t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Logo, a curva possui 2 retas tangentes horizontais nos pontos  $(2, \frac{5}{3})$  e  $(2, \frac{1}{3})$ .

(d) **Tangentes verticais:** A curva tem uma reta tangente vertical quando  $t = 0$  que corresponde ao ponto  $(1, 1)$ .

(e) **Crescimento e decrescimento:** Temos que  $\frac{dx}{dt} = 2t$  e  $\frac{dy}{dt} = -t^2 + 1$ . Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-t^2 + 1}{2t}.$$

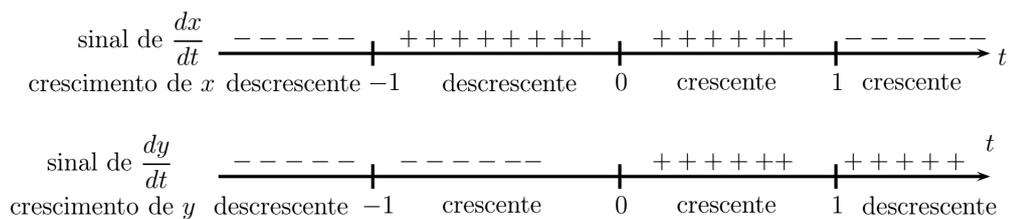


Figura 2.30: Estudo do sinal de  $\frac{dy}{dx}$ .

(f) **Estudo da concavidade:** Temos (veja o apêndice)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{-t^2 + 1}{2t}\right)}{\frac{-4t^2 + 2t^2 - 2}{4t^2}} \\ &= \frac{-2t^2 - 2}{8t^3} \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{t^2 + 1}{t^3}\right). \end{aligned}$$

Dessa forma, se  $t < 0$ , então  $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$  e portanto a curva é côncava para cima. Por outro lado, se  $t > 0$ , então  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$  e portanto a curva é côncava para baixo.

(g) **Esboço da curva:**

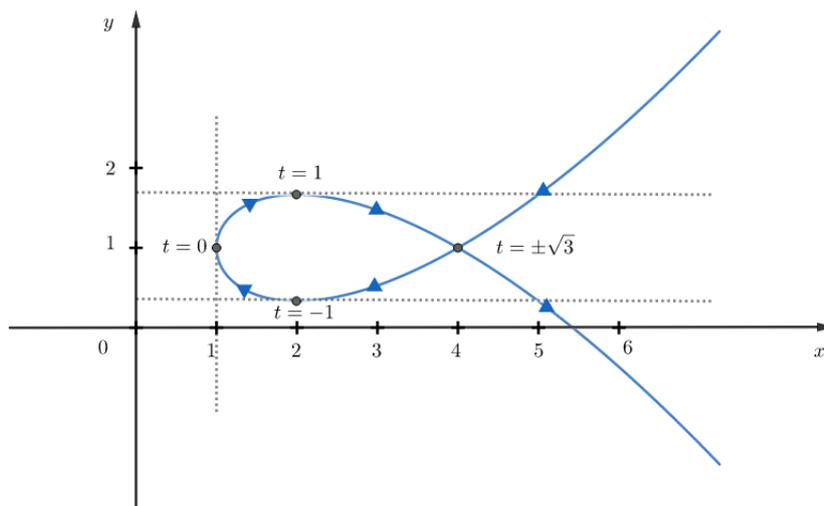


Figura 2.31:  $C : x = t^2 + 1, y = \frac{-t^3}{3} + t + 1$

---

## Comprimento de Arco e Áreas

---

### 3.1 Comprimento de Arco

Seja  $\mathcal{C}$  uma curva descrita pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (3.1.1)$$

Vamos supor que possamos eliminar o parâmetro  $t$  de forma que a curva  $\mathcal{C}$  seja dada pela equação  $y = F(x)$  com  $a \leq x \leq b$ . Sabemos do Cálculo 1 que se  $F'$  for contínua, então

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Suponha que  $\frac{dx}{dt} = f'(t) > 0$ . Isto significa que  $\mathcal{C}$  é percorrida uma vez, da esquerda para a direita, quando  $t$  aumenta de  $\alpha$  até  $\beta$  e  $f(\alpha) = a$ ,  $f(\beta) = b$ . Usando o fato de que  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$  (veja o apêndice) e a regra de substituição obtemos

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} dt.$$

Como  $dx/dt > 0$ , concluímos que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (3.1.2)$$

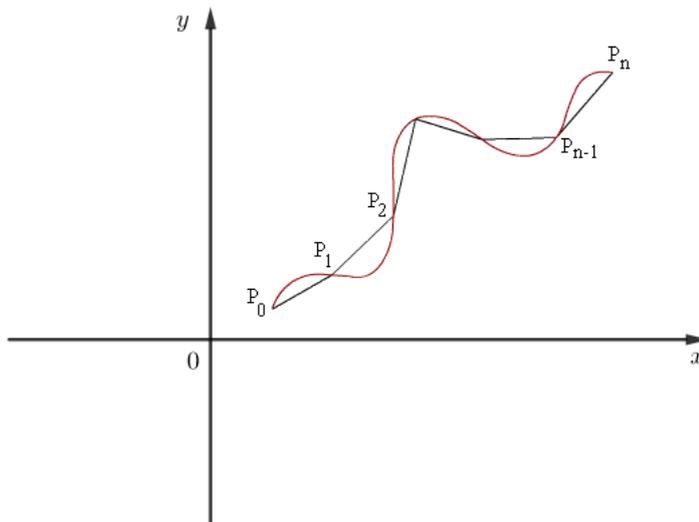
Mesmo que  $C$  não possa ser expressa na forma  $y = F(x)$ , a fórmula (3.1.2) ainda é válida, como veremos no próximo teorema.

**Teorema 3.1.1.** *Se uma curva  $C$  for descrita pelas equações paramétricas (3.1.1) onde  $f'$  e  $g'$  são contínuas em  $[\alpha, \beta]$  e  $C$  for percorrida exatamente uma vez quando  $t$  aumenta de  $\alpha$  até  $\beta$ , então o comprimento de  $C$  é*

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

**Demonstração.** Tomemos números  $t_0, t_1, \dots, t_n$  tais que  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = \beta$  e pontos sobre a curva  $P_i = (f(t_i), g(t_i))$ , para  $i = 1, \dots, n$ . O comprimento da linha poligonal

$$\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{i-1}P_i}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$$



é uma estimativa para  $L$ , e tomando-se pontos  $P_i$  cada vez mais próximo uns dos outros espera-se que este comprimento se aproxime cada vez mais de  $L$ . Isto é, indicando a distância entre

$P_{i-1}$  e  $P_i$  por  $d(P_{i-1}, P_i)$  temos

$$L \cong d(P_0, P_1) + d(P_1, P_2) + \dots + d(P_{n-1}, P_n).$$

Da geometria analítica temos,

$$\begin{aligned} d(P_{i-1}, P_i)^2 &= (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \iff \\ \iff d(P_{i-1}, P_i) &= \sqrt{(g(t_i) - g(t_{i-1}))^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} \end{aligned}$$

Como, por hipótese, cada uma das funções  $f(t)$  e  $g(t)$  tenha derivada contínua, pelo Teorema do Valor Médio para derivadas, em cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  existem  $\alpha_i, \beta_i \in [t_{i-1}, t_i]$  tais que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\alpha_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

e

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\beta_i) \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Indicando  $\Delta t_i = (t_i - t_{i-1})$  temos

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(g'(\beta_i))^2 + (f'(\alpha_i))^2} \Delta t_i.$$

Então,

$$L \cong \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{(g'(\beta_i))^2 + (f'(\alpha_i))^2} \Delta t_i$$

e

$$L = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{(g'(\beta_i))^2 + (f'(\alpha_i))^2} \Delta t_i \right).$$

Como  $g'(t)$  e  $f'(t)$  são contínuas,

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(g'(t))^2 + (f'(t))^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt.$$

**Exemplo 3.1.1.** Calcule o comprimento do círculo de Raio  $R$  e com centro na origem.

**Solução.** Temos que

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

são equações paramétricas para o círculo de raio  $R$  e centro na origem. Dessa forma,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \operatorname{sen} t)^2 + (R \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2 t + R^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2} dt \\ &= 2\pi R \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1.2.** Calcule o comprimento do laço da curva  $\mathcal{C}$  dada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = -\frac{t^3}{3} + t + 1 \end{cases}$$

**Solução.** Um esboço dessa curva já foi feito no capítulo anterior.

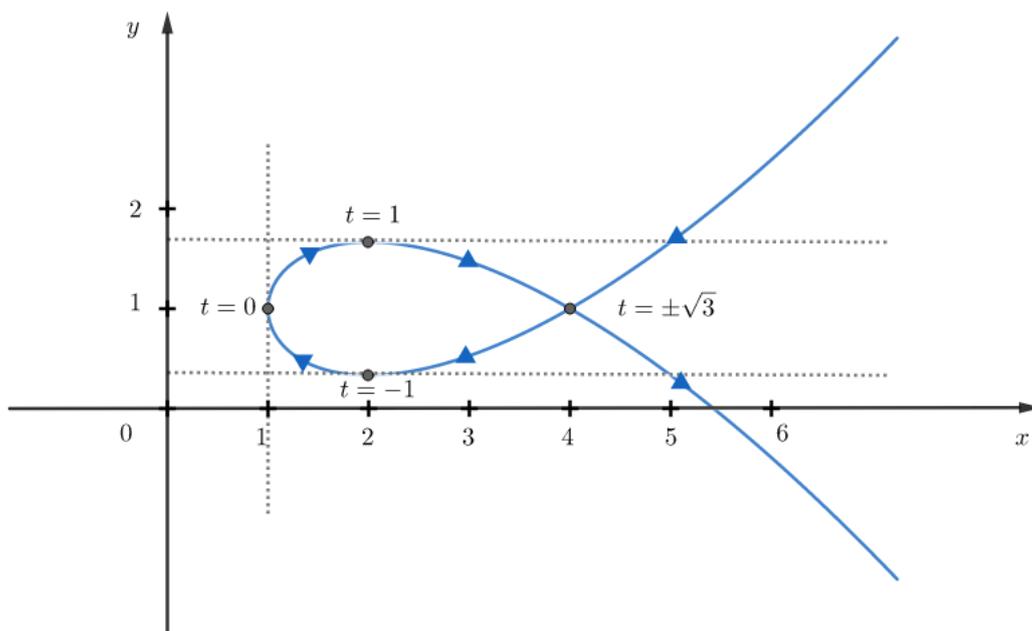


Figura 3.1:  $\mathcal{C} : x = t^2 + 1, y = -\frac{t^3}{3} + t + 1$

Temos que

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (-t^2 + 1)^2} dt \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1} dt \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} (t^2 + 1) dt \\
 &= 2 \left[ \frac{t^3}{3} + t \right]_0^{\sqrt{3}} \\
 &= 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

### 3.2 Áreas Limitadas por Curvas Parametrizadas

Determinamos a área sobre uma curva dada por equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (3.2.1)$$

tais que

$$t_1 \neq t_2 \Rightarrow (x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2)).$$

Recordamos que a área sob uma curva  $y = F(x)$  de  $a$  até  $b$  é

$$\int_a^b F(x) dx, \quad (3.2.2)$$

onde  $F(x) \geq 0$ .

Vamos supor que  $f(\alpha) = a$  e que  $f(\beta) = b$ . Usando as equações paramétricas (3.2.1) como mudança de variáveis na integral (3.2.2), temos

$$dx = f'(t) dt \quad \text{e} \quad y = F(x) = F(f(t)) = g(t).$$

Substituindo em (3.2.2), concluímos que a área é

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)f'(t)dt.$$

Ou

$$A = \int_{\beta}^{\alpha} g(t)f'(t)dt$$

se  $(f(\beta), g(\beta))$  for o extremo esquerdo.

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 3.2.1.** Calcular a área da região do plano limitada pelo laço da curva  $\mathcal{C}$  de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = -\frac{t^3}{3} + t + 1 \end{cases}$$

**Solução.** Note que essa curva já foi esboçada no capítulo anterior. Veja a figura abaixo

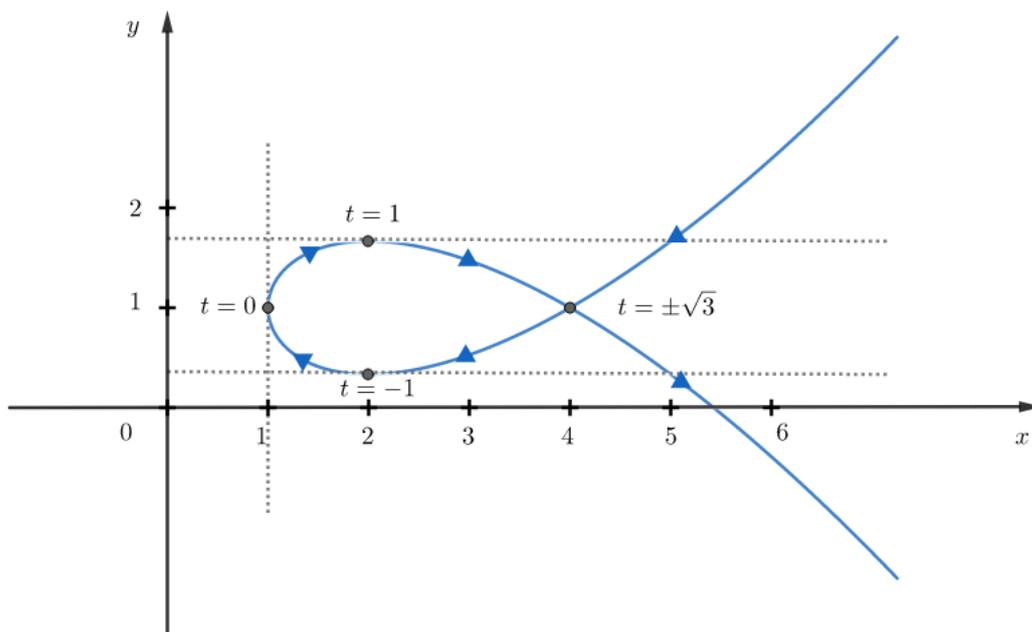


Figura 3.2:  $\mathcal{C} : x = t^2 + 1, y = -\frac{t^3}{3} + t + 1$

Temos

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left( -\frac{t^3}{3} + t + 1 \right) (2t) dt \\
 &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left( -\frac{2t^3}{3} + 2t^2 + 2t \right) dt \\
 &= \left[ -\frac{t^4}{6} + \frac{2}{3}t^3 + t^2 \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\
 &= -\frac{3}{2} + \frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}} + 3 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}} - 3 \\
 &= \frac{4}{3}3^{\frac{3}{2}} \\
 &= 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

### 3.3 Área de Superfície de Revolução

**Teorema 3.3.1.** *Se uma curva  $C$  dada pelas equações paramétricas  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , for girada ao redor do eixo  $x$ , onde  $f'$ ,  $g'$  são contínuas e  $g(t) \geq 0$ , então a área da superfície resultante é dada por*

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (3.3.1)$$

**Demonstração.** Vamos supor que possamos eliminar o parâmetro  $t$  de forma que a curva  $C$  seja dada pela equação  $y = F(x)$  com  $a \leq x \leq b$ . Sabemos do Cálculo 1 que se  $F'$  for contínua, então

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Suponha também que  $f(\alpha) = a$  e que  $f(\beta) = b$ . Usando o fato de que  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$  e a regra de substituição obtemos

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} dt \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt
 \end{aligned}$$

Mesmo que a curva  $\mathcal{C}$  não possa ser expressa na forma  $y = F(x)$ , a fórmula (3.3.1) ainda continua sendo válida. Basta seguir os passos da demonstração da fórmula de comprimento de arco.

**Exemplo 3.3.1.** Mostre que a área da superfície de uma esfera de raio  $r$  é  $4\pi r^2$ .

**Solução.** A esfera é obtida pela rotação do semicírculo

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

em torno do eixo  $x$  (veja a figura abaixo).

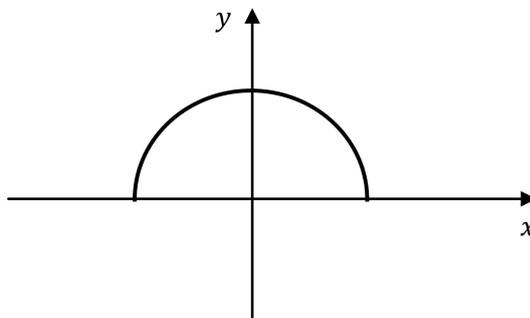


Figura 3.3: Semicírculo

Temos que

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t.$$

Dessa forma, a partir da fórmula (3.3.1), temos

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} r \operatorname{sen} t \sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t)} dt \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} r \operatorname{sen} t \sqrt{r^2} dt \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} r \operatorname{sen} t \cdot r dt \\
 &= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t dt \\
 &= 2\pi r^2 [-\operatorname{cos} t]_0^{\pi} \\
 &= 4\pi r^2.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.3.2.** Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \operatorname{sen} \theta \end{cases}, \quad \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, \quad (3.3.2)$$

em torno do eixo  $x$ .

**Solução.** Primeiramente, note que a superfície é uma porção de uma esfera do raio 2. E assim, pela fórmula (3.3.1), a área da superfície é

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 4\pi \operatorname{sen} \theta \sqrt{(-2\operatorname{sen} \theta)^2 + (2\operatorname{cos} \theta)^2} d\theta \\
 &= 4\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{sen} \theta \sqrt{4} d\theta \\
 &= 8\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{sen} \theta d\theta \\
 &= 8\pi [-\operatorname{cos} \theta]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
 &= 8\pi.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.3.3.** Calcule a área da superfície gerada pela rotação de um arco da cicloide  $x = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$ ,  $y = r(1 - \operatorname{cos} \theta)$  ao redor do eixo  $x$ .

**Solução.** Usando a fórmula (3.3.1), temos

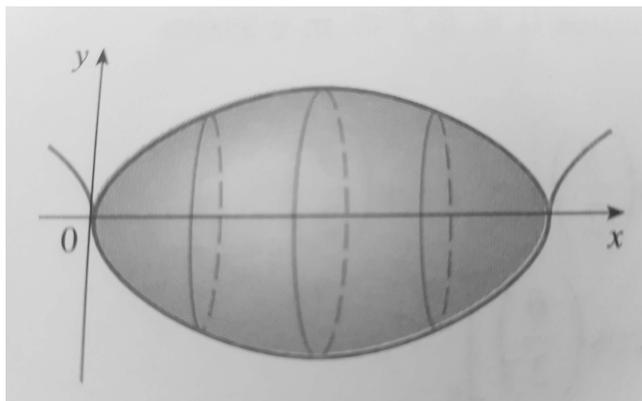


Figura 3.4:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 2\pi r(1 - \cos \theta) \sqrt{r^2(1 - \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta.
 \end{aligned}$$

Temos a seguinte identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.3.3)$$

Fazendo  $\theta = 2x$  na identidade (3.3.3), obtemos

$$1 - \cos \theta = 2\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Como  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , segue que  $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \pi$ , e assim  $\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$ . Portanto

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) 2\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
 &= 8\pi r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
 &= 16\pi r^2 \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} t - \cos^2 t \operatorname{sen} t) dt \\
 &= 16\pi r^2 \left[ -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{64\pi r^2}{3}.
 \end{aligned}$$

---

## Retas Tangentes às Curvas Parametrizadas

---

Nesta seção queremos determinar a equação da reta tangente à curva definida pelas equações paramétricas dado por:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I. \quad (\text{A.0.1})$$

Recordamos que a equação da reta tangente ao gráfico de  $y = F(x)$  no ponto  $(a, F(a))$  é dado por

$$y = F(a) + F'(a)(x - a). \quad (\text{A.0.2})$$

Então se podemos calcular  $\frac{dy}{dx}$  para as equações paramétricas, podemos usar A.0.2 para achar a equação da reta tangente.

Suponha que podemos eliminar o parâmetro  $t$  em A.0.1 e reescrevê-lo na forma  $y = F(x)$ . Se substituirmos  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  na equação  $y = F(x)$ , obtemos

$$y(t) = F(x(t)).$$

Derivando, usando a Regra da Cadeia, temos

$$y'(t) = F'(x(t))x'(t),$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = F'(x) \frac{dx}{dt}.$$

Resolvendo por  $F'(x) = \frac{dy}{dx}$  obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ desde que } \frac{dx}{dt} \neq 0. \quad (\text{A.0.3})$$

Para calcular a segunda derivada usamos a regra da cadeia duas vezes:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}, \text{ desde que } \frac{dx}{dt} \neq 0. \quad (\text{A.0.4})$$

- **Tangentes horizontais:** Podemos ver da equação A.0.3 que a curva tem uma tangente horizontal quando

$$\frac{dy}{dt} = 0 \text{ e } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

- **Tangentes verticais:** Note também a partir da equação A.0.3 que a curva tem uma tangente vertical quando

$$\frac{dy}{dt} \neq 0 \text{ e } \frac{dx}{dt} = 0.$$

**Observação A.0.1.** Se  $\frac{dy}{dt} = 0$  e  $\frac{dx}{dt} = 0$ , então devemos usar a regra de L'Hôpital.

**Exemplo A.0.1.** Seja  $\mathcal{C}$  a curva definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = 2t^2 - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Ache as retas tangentes à curva  $\mathcal{C}$  no ponto  $(0, 2)$ .
- Encontre os pontos de  $\mathcal{C}$  onde a tangente é horizontal.
- Encontre os pontos de  $\mathcal{C}$  onde a tangente é vertical.
- Determine onde a curva  $\mathcal{C}$  tem concavidade para baixo e para cima.

**Solução.**

(a) Temos que  $\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2$  e  $\frac{dy}{dt} = 4t$ . Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t}{3t^2 - 2}.$$

Quando  $x = 0$  e  $y = 2$ , obtemos  $t = \pm\sqrt{2}$ . Dessa forma,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pm\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}.$$

Assim, temos duas retas tangentes no ponto  $(0, 2)$ :

$$t = \pm\sqrt{2} \rightarrow y = 2 \pm \sqrt{2}x.$$

(b) As tangentes horizontais ocorrem nos pontos onde

$$\frac{dy}{dt} = 4t = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2 \neq 0.$$

Logo, temos uma tangente horizontal no ponto  $(0, -2)$  que corresponde a  $t = 0$ .

(c) As tangentes verticais ocorrem nos pontos onde

$$\frac{dy}{dt} = 4t \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2 = 0.$$

Logo, temos duas tangentes verticais:

$$t = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow \left( -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{4}{3} \right)$$

$$t = -\sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow \left( \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{4}{3} \right).$$

(d) A curva  $\mathcal{C}$  tem concavidade para baixo quando o parâmetro  $t$ , representando o tempo, pertence aos intervalos  $(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}})$  ou  $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty)$ , o que implica  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ . No entanto, a concavidade de  $\mathcal{C}$  está voltada para cima quando o parâmetro  $t$ , tempo, pertence ao intervalo  $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ , o que implica  $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ .

---

## Referências

---

- [1] Arnold, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. 2ª Ed. New York: Springer, 1978.
- [2] do Carmo, M. P.: *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, 6a edição. SBM, 2014.
- [3] Castro, L. M. D.: *O cálculo variacional e as curvas cicloidais*, Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado em Matemática: Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- [4] Delgado, J., Frensel, K., Crissaff, L., *Geometria Analítica*, Coleção PROFMAT, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [5] Gelfand, I. M.; et al. *Calculus of Variations*. N.J., Prentice-Hall, 1963.
- [6] Guidorizzi, H. L.: *Um curso de Cálculo*, vol. 1: Grupo Gen-LTC, 2000.
- [7] Holanda, F. D'a.: *Introdução à geometria diferencial das curvas planas*, Universidade Federal do Ceara - Fortaleza, 2016. Dissertação de Mestrado.
- [8] Medeiros, C. da S.: *Um relato sobre a cicloide: a helena do século XVII*, XI Seminário Nacional de História da Matemática:SBHmat: Universidade Federal do triângulo Mineiro, 2005.
- [9] Santos, W., Alencar, H.: *Geometria diferencial das curvas planas*, 24<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2003.
- [10] Stewart, J., *Cálculo*, Volume II, 6ª edição, Cengage Learning, 2009.

- [11] Venceslau, A. W. N.: Curvas parametrizadas, cicloides, experimentos e aplicações, Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT: São Cristovão - SE, 2015.