UFMS – UNIVERSIDADE FEDERAL DE
MATO GROSSO DO SUL - CAMPUS TRÊS LAGOAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

VITOR EIITI OBANA BELIZARIO

Um Estudo Sobre o Teorema de Pitágoras

TRÊS LAGOAS – MS

2018

UFMS – UNIVERSIDADE FEDERAL DE
MATO GROSSO DO SUL - CAMPUS TRÊS LAGOAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

VITOR EIITI OBANA BELIZARIO

Um Estudo Sobre o Teorema de Pitágoras

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul / UFMS, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Allan Edley R. De Andrade

TRÊS LAGOAS – MS
2018

VITOR EITTI OBANA BELIZARIO

Um Estudo Sobre o Teorema de Pitágoras

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT – do Curso de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora

Allan Edley

Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade (Orientador)
UFMS/CPTL

E. Opazo

Profa. Dra. Eugênia Brunilda Opazo Uribe
UFMS/CPTL

E. Rizziolli

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
IGCE/UNESP

Três Lagoas, 23 de outubro de 2018.

Dedico ao meu sobrinho Heitor Toshio Obana Belizario, que com certeza foi a corda que me tirou do fundo do poço e me fez escalar em direção à luz.

Agradecimentos

Agradeço meu pai e minha mãe, que me ajudaram muito nessa batalha. Agradeço meu pai por toda a força e apoio que me deu, mesmo que de forma tímida e as vezes retraída, mas com certeza com muita importância e de grande valor para mim. Agradeço minha mãe, que me aguenta de todos os jeitos feliz e nervoso, tranquilo e agitado e ultimamente muito estressado, e ela sempre esteve ao meu lado.

Agradeço meu professor e orientador Allan Edley R. De Andrade, um professor de verdade, que me ajudou e incentivou muito. Agradeço a ele por dividir um pouco do seu vasto conhecimento comigo e sempre de forma muita paciente e didática. Como já disse um verdadeiro PROFESSOR.

RESUMO

Esta dissertação aborda o famoso teorema de Pitágoras. Nela tratamos de algumas demonstrações, aplicações e atividades didáticas que relacionam o teorema com as áreas sobre o lado de um triângulo retângulo; e ternas pitagóricas com construção com régua e compasso de $\sqrt{n}$, para $n \in \mathbb{N}$. Além disso, desenvolvemos um estudo sobre ternas pitagóricas e como descobrir a quantidade e quais são os triângulos retângulos que possuem um dado cateto $n \in \mathbb{N}$.

Palavras-chave: Triângulo Retângulo, Pitágoras, Ternas Pitagóricas, Ensino de Geometria.

ABSTRACT

This dissertation studies the famous theorem of Pythagoras. It brings some demonstrations, applications and didactic activitys that relates the theorem with the areas on the sides of a right triangle; and pythagorean triple with construction with ruler and compass of $\sqrt{n}$, para $n \in \mathbb{N}$. Beyond that, we developed a study of Pythagorean triples and how to determine the quantity and what are the right triangles that have a given cathetus $n \in \mathbb{N}$.

Keyword: Right Triangle, Pythagoras, Pythagorean Triples, Geometry Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O teorema de Pitágoras é considerado, por vários estudiosos, um dos teoremas mais importantes e atraentes da história antiga da Matemática, possuindo muitas aplicações, entre elas, algumas aplicações no campo da geometria plana e da geometria espacial como veremos no decorrer da dissertação. O seu conteúdo é ministrado no ensino fundamental II e muito utilizado no ensino médio. Sendo assim, desenvolvemos um estudo sobre esse teorema com o objetivo de proporcionar ao professor de matemática um melhor entendimento do assunto.

No primeiro capítulo foi apresentado uma breve história do teorema de Pitágoras. Artefatos históricos mostram que a aplicação do teorema era usada pelos mesopotâmios, egípcios e hindus, antes de Pitágoras de Samos. Porém, segundo Howard Eves (2011), podem ter sido os gregos os primeiros a demonstrar o teorema.

No segundo capítulo são apresentados assuntos preliminares, os quais podem ajudar no entendimento das atividades dos próximos capítulos.

No terceiro capítulo apresentamos algumas demonstrações as quais são de fácil entendimento, podendo serem usadas pelo professor em sala de aula com os alunos. Também temos dois casos de generalização do teorema de Pitágoras e uma recíproca do teorema, também de fácil entendimento.

Nos quarto e quinto capítulos temos algumas aplicações do teorema. Sendo que no quarto temos aplicações em exercícios do ensino médio e no quinto um estudo mais detalhado das ternas pitagóricas.

Por fim, encerramos com uma atividade didática que visa fixar o conhecimento do aluno sobre a relação do teorema de Pitágoras e as áreas das figuras construídas nos lados de um triângulo retângulo. Desta forma tentamos contribuir com a reflexão sobre a temática teorema de Pitágoras.

CAPÍTULO 1 - NOTAS HISTÓRICAS

O teorema de Pitágoras atribuído a Pitágoras de Samos (572a.c – 496a.c) que provavelmente foi primeiro matemático a dar uma demonstração formal ao teorema, segundo Eves (2001, p.103). Entretanto as aplicações do teorema, eram usadas por civilizações mais antigas que Pitágoras, como veremos na breve passagem histórica. Para o desenvolvimento desse capítulo foram usados os livros: *Introdução à História Matemática* (1997) de H. Eves; *História da Matemática* (1974) de C. Boyer; *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas* (2012) de T. Roque; *Introdução à História da Matemática* (2013) R.S. Mol; *Episódios da História Antiga da Matemática* (1984) A. Aaboe.

1.1- Mesopotâmia

A Mesopotâmia é considerada o berço da civilização, localizada nos vales dos rios Tigres e Eufrates, no que hoje corresponde ao Iraque e regiões adjacentes. A matemática Mesopotâmia esteve intimamente ligada à resolução de problemas do dia a dia, esta relação pode ser constatada nas tábulas de argila com escritas cuneiformes encontradas por arqueólogos. Os arqueólogos já descobriram milhares de tábulas de argila, a maioria das tábulas encontradas são do período de 1700 a.c, segundo Boyer (1974, p.20).

Para Eves (2011, p.62), nesse período a civilização Mesopotâmia já tinha conhecimento das regras gerais da área de figuras como; retângulos, triângulos retângulos e isósceles, e trapézio. Segundo Boyer (1974, p.27) e Eves (2011, p.64), os mesopotâmios conheciam o teorema de Pitágoras e usavam de maneira algébrica, como pode se constatar na tábula de Plimpton 322, catalogada sob o número 322 pela Universidade de Columbia, figura 1.1[1].

[1] Figura: Todas as imagens deste documento são de domínio público adquiridas em repositórios como http://wikimedia.org ou https://pixabay.com. Algumas figuras foram criadas com software de geometria dinâmica pelo próprio autor

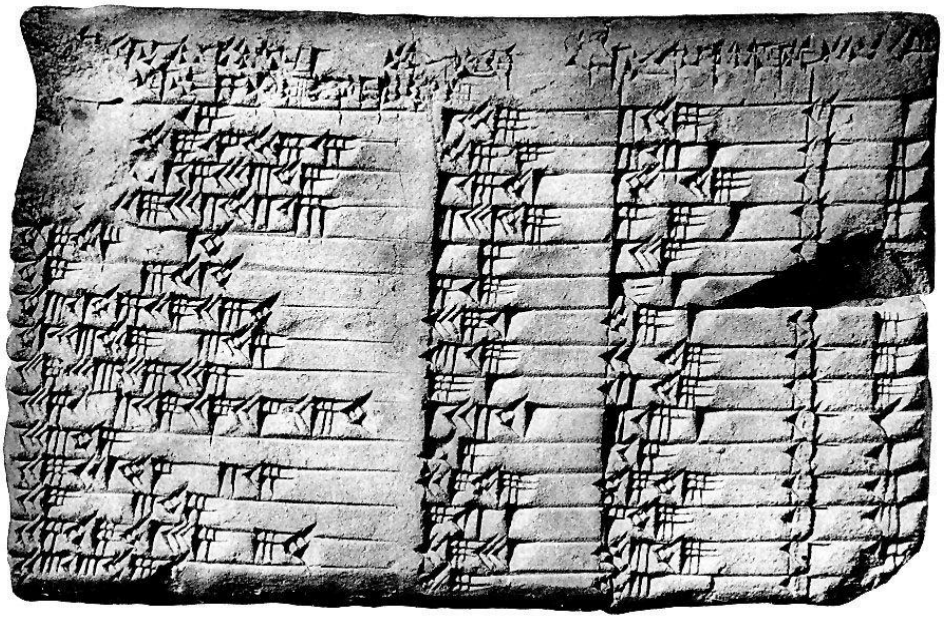

Figura 1.1 – Tábula de Plimpton 322

A tábula escrita por volta de 1800 a.c., traz três colunas praticamente completas de "figuras" que, por conveniência, foram completadas e representadas em notação decimal na Tabela 1.1.

A	B	C	u	v
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
4	3	5	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

Tabela 1.1: Representação da Plimpton 322 (Universidade de Columbia)

A quarta e quinta coluna da tabela representam os valores dos parâmetros u e v, que levam aos termos pitagóricos. Segundo Otto Neugebauer, os mesopotâmios já possuíam conhecimento de uma possível fórmula para a representação paramétrica geral das ternas pitagóricas. Fórmula essa que será explorada no capítulo 5 sobre Ternas Pitagóricas.

1.2- Egípcios

A margem do rio Nilo no nordeste africano, se desenvolveu a civilização egípcia. Localizada na região do deserto do Saara, o vale do rio tem extrema importância para a agricultura e a economia desse povo. Segundo o historiador grego Heródoto (484 a.c. – 420 a.c.), a necessidade de redistribuir os campos cultiváveis a seus proprietários com o intuito de reduzir as taxas de impostos aos prejudicados, pela inundação do rio Nilo, fez surgir à geometria egípcia, Roque (2012, p.92)

Algumas grandes fontes de informações que possibilitaram a compreensão da matemática egípcia antiga, segundo Boyer (1974) e Eves (2011), foram a Pedra da Roseta, o papiro de Cairo, o papiro de Moscou e o papiro de Rhind. O Papiro de Rhind, provavelmente de 1650 a.c., é uma das fontes primárias mais ricas em matemática egípcia antiga, o papiro traz a resolução de oitenta problemas matemáticos. Para Eves (2011, p. 86), os egípcios antigos já construíam triângulos com lados 3, 4 e 5, com uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós para demarcar ângulos retos.

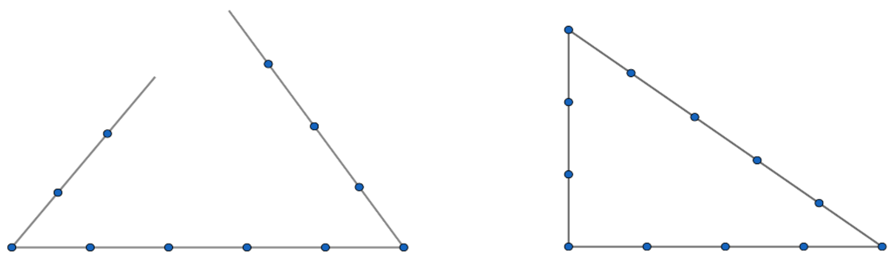

Figura 1.2 – Corda Egípcia com 11 nós

O papiro de Cairo, provavelmente de 300 a.c., contem 40 problemas de matemática, sendo 9 relacionados exclusivamente ao teorema de Pitágoras e mostra que os egípcios dessa época sabiam que triângulos com lados (3,4,5), (5,12,13) e (20,21,29) são triângulos retângulos.

Exemplo 1.1. (Papiro Cairo) Problema proposto por Eves (2011, p. 87). Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que distância a escada alcança?

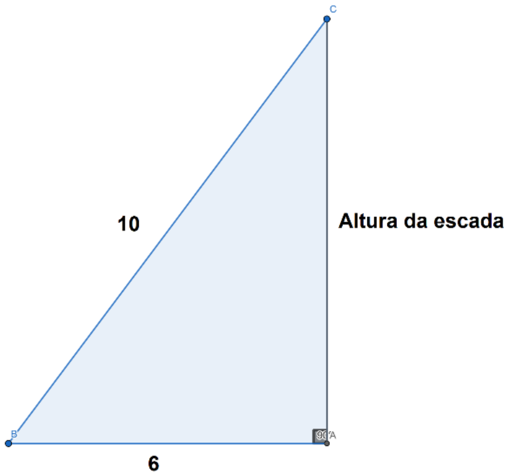

Figura 1.3 – Problema do Papiro do Cairo

1.3- Hindus

Os indianos dos primeiros tempos eram divididos em pequenos principados desunidos, como consequência dessa desunião a Índia era constantemente invadida por outros povos. Em 1500 a.c., uma invasão nômade exterminou os indianos antigos, dando espaço para a ocupação ariana e o desenvolvimento do Hinduísmo. Apenas restos arqueológicos de uma cidade de 5000 anos encontrada em Mohenjo Daro evidenciam a existência desse povo, segundo Eves (2011, p.236)

Figura1.4 – Índia

Em Mohenjo Daro, há vestígios que indicam uma civilização bem desenvolvida na parte matemática e de engenharia, porém a falta de registros históricos dificulta o saber do desenvolvimento da matemática hindu antiga, Eves (2011). Os primeiros vestígios matemáticos da Índia são as sulbasutras do século VI a.C.. Nelas continham regras geométricas para a construção de altares (mediante ao esticar de cordas) em que se revela certo conhecimento das ternas pitagóricas, Eves (2011, p.248).

As sulbasutras mais importantes do ponto de vista matemático, são o Baudhayana e Katyayana, onde encontram-se evidências de que os hindus conheciam o teorema de Pitágoras, e a pelo menos três versões de como esse conhecimento foi adquirido. A saber:

1ª Versão[2]:

Pela observação de que o quadrado sobre a diagonal de um quadrado pode ser dividido em quatro triângulos, cada um deles de área igual à metade da área do primeiro quadrado.

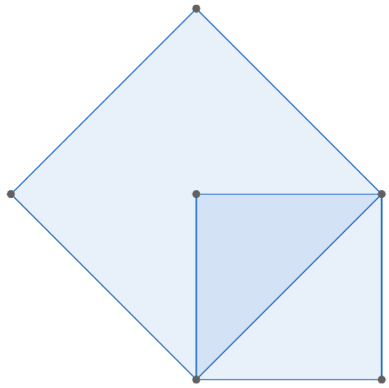

Figura 1.5: Quadrado versão Baudhayana

2ª Versão:

A partir da construção do atman, que é um quadrado de 4 *purushas** de área e é feito unindo 4 quadrados de uma *purusha*. Se traçarmos as diagonais dos quadrados menores como na figura 1.6, formamos um quadrado que está dividido em quatro triângulos de área meia *purusha*[3]. Assim, o teorema pode ter sido descoberto pela observação de que o quadrado sobre a diagonal de um quadrado tem área igual ao dobro da área desse quadrado.

---

[2] Versões retiradas da Revista do Professor de Matemática 87. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/87/2.html), acessado em; 25/09/2018 as 19:38.

[3] Purusha: unidade de medida de comprimento equivalente à altura de um homem em pé com os braços esticados para cima.

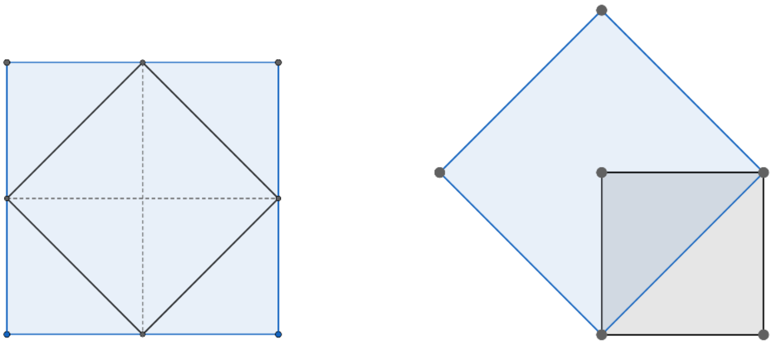

Figura 1.6: Segunda explicação: Descoberta hindu

3ª Versão:

A terceira explicação estaria relacionada à construção do altar *paitrkyvedi*, que é feita a partir da construção de um quadrado de duas *purushas* e as quinas do Vedi ficam sobre os pontos médios dos lados. O diagrama da construção é o mesmo da figura 1.6, porém nesse caso a construção se inicia com o quadrado cujo lado mede duas *purushas*.

Essas três explicações, podem estar relacionadas com a descoberta do Teorema de Pitágoras pelos indianos, segundo estudos de Gaspar (2015).

1.4- Grécia

Figura 1.7 – Mapa da Grécia Antiga.

Floresceu no século VIII a.c., a civilização antiga que desempenhou o papel mais significativo na construção da matemática tal como a conhecemos, a civilização grega, Mol (2013, p. 29). A matemática na Grécia antiga, deixou de ser uma coleção de resultados empíricos e passou a ter o formato de uma ciência organizada, de maneira sistemática e por elementos racionais. A matemática, tanto na Mesopotâmia quanto no Egito, tinha o caráter concreto e prático.

Na Grécia, ela passou a ser essencialmente abstrata, com certa independência em relação às aplicações práticas, Mol (2013, p.29). Tales de Mileto (624 – 546 a.c.), qualificado por Aristóteles o primeiro filosofo de tradição grega, foi quem iniciou o estudo sistemático da matemática na Grécia. A ele são atribuídas as primeiras demonstrações matemáticas, e assim considerado o criador da geometria dedutiva. Tales foi fundador da escola Iônica, baseada na união dos estudos da astronomia ao da geometria e da teoria dos números, segundo Mol (2013, p. 32).

Pitágoras de Samos (570 – 495a.c.), nascido em Samos, próximo a Mileto, provavelmente aluno de Tales, realizou viagens em sua juventude e terminou por estabelecer-se no sudeste da Itália, em Crotona. Onde fundou a escola Pitagórica sucessora da escola Iônica, segundo Mol (2013, p. 33).

Segundo Eves (2011, p. 97), a escola pitagórica além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias. Com tempo o crescimento da escola foi tão grande, que forças da democracia destruíram o prédio da escola. E pelo que sabe Pitágoras fugiu para Metaponto, onde morreu.

A história é unanime em atribuir a Pitágoras a descoberta do teorema sobre triângulos retângulos, hoje mundialmente conhecido por seu nome – teorema de Pitágoras. Vimos que muitas civilizações antigas já faziam uso das aplicações do teorema, porém sua primeira demonstração geral pode ter sido dado por Pitágoras, segundo Eves (2011, p. 103). Existem muitas pressuposições de como Pitágoras poderia ter demonstrado o teorema, para Eves (2011, p. 103), Pitágoras usou uma demonstração por decomposição, como a que segue ilustrada na figura a seguir.

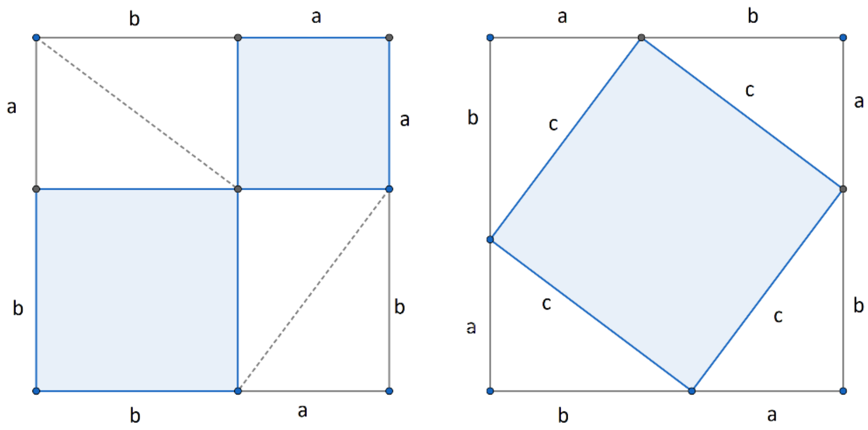

Figura 1.8: Provável demonstração de Pitágoras.

A figura 1.8, sugere que ao retirar quatro triângulos de duas diferentes formas do mesmo quadrado, temos que a soma das áreas dos dois primeiros quadrados $(a^2 + b^2)$ e igual à área do terceiro quadrado (c^2), ou seja, $a^2 + b^2 = c^2$. No capítulo 3, analisaremos a suposta demonstração de Pitágoras com mais atenção.

A filosofia pitagórica tinha como base os números inteiros. Ao adotar o teorema para achar a diagonal de um quadrado de lado 1, chegou se ao resultado $\sqrt{2}$, um número não inteiro, mais tarde chamado de número irracional. Talvez a descoberta mais importante da matemática da época, segundo Mol (2013).

CAPÍTULO 2 – ASSUNTOS PRELIMINARES

Neste capítulo vamos tratar de alguns assuntos o quais podem facilitar a compreensão das questões dadas nos capítulos seguintes. Para isso utilizamos como referência os livros: *Geometria Euclidiana Plana (2012) de J. L. M. Barbosa, Fundamentos de Matemática Elementar (1993) de O. Dolce e J. N. Pompeo e* por fim *Coleção ProfMat: Geometria (2014) de A. C. N. Muniz.*

2.1- Congruência de triângulos

Definição 2.1.1 - Diremos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes quando eles têm o mesmo comprimento; diremos que dois ângulos A e B soa congruentes se eles têm a mesma medida. Para facilitar nossa notação, iremos utilizar o símbolo " $=$ " para significar congruentes.

Definição 2.1.2 - Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Axioma 2.1.3 - (1º caso de congruência: L.L.A – Lado, Lado, Ângulo) Dados dois triângulos ABC e DEF; $se\ \overline{AB} = \overline{DE},\ \overline{AC} = \overline{DE}\ e\ \hat{A} = \hat{D}$ então $ABC\ =\ DEF.$

Teorema 2.1.4 – (2º caso de congruência de triângulos: A.L.A – Ângulo, Lado, Ângulo) dados dois triângulos ABC e DEF, se $\hat{A} = \hat{D},\ \overline{AB} = \overline{DE}\ e\ \hat{B} = \hat{E}$ então $ABC\ =\ DEF.$

Teorema 2.1.5 – (3º caso de congruência de triângulos: L.L.L. – Lado, Lado, Lado). Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.

Teorema 2.1.6 – (4º caso de congruência de triângulos retângulos: Cateto, hipotenusa). Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

2.2- Semelhanças de triângulos

Definição 2.2.1 Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais. Ou seja, se ABC e DEF são dois triângulos semelhantes então existe correspondência entre seus vértices, consequentemente,

$$\hat{A} = \hat{D}\,, \qquad \hat{B} = \hat{E}, \qquad \hat{C} = \hat{F} \qquad e \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado razão de proporcionalidade entre os dois triângulos. Para facilitar usaremos o símbolo "$\sim$" para significar semelhança.

Teorema 2.2.2 – (1º caso de semelhança de triângulos: A.A. – Ângulo, Ângulo) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}$, então $ABC \sim DEF$.

Teorema 2.2.3 – (2º caso de semelhança de triângulos: L.A.L. – Lado, Ângulo, Lado) Se, em dois triângulos ABC e DEF tem-se $\hat{A} = \hat{D}\ e\ \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, então $ABC \sim DEF$.

Teorema 2.2.4 – (3º caso de semelhança de triângulos: L.L.L. – Lado, Lado, Lado) se, em dois triângulos ABC e DEF tem-se $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, então $ABC \sim DEF$.

2.3- Círculo

Definição 2.3.1 – Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é o conjunto constituídos por todos os pontos B do plano, tais que $AB = r$.

Proposição 2.3.2 – Seja Γ um círculo de centro O e P um ponto de Γ. Se t é a reta que passa por P e é perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$, então t é tangente a Γ.

2.4- Paralelismo e perpendicularidade

Definição 2.4.1 – Dadas duas retas $r\ e\ s$, dizemos que elas são paralelas quando não possuem nenhum ponto em comum.

Definição 2.4.2 – Dadas duas retas $r\ e\ s$, se essas duas retas possuem um ponto P em comum e ainda o ângulo formado entre as duas retas for de 90º, dizemos que elas são perpendiculares.

2.5- Áreas de figuras planas

2.5.1 - Área do triângulo

A área de um triângulo ABC de base b e altura h é dada por:

$$Área(ABC) = \frac{b.h}{2}.$$

2.5.2 - Área do quadrado

A área de um quadrado $ABCD$ de base a e altura h e dada por:

$$Área(ABCD) = a.h\,.$$

2.5.3 - Área do círculo

A área de um círculo C de raio r e dado por,

$Área(C) = \pi.r^2$, onde π vale aproximadamente 3,14.

2.5.4 - Relação entre semelhança e área

2.5.4.1 – **Teorema** As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.

2.6- Ponto notável de um triângulo

Dado um triângulo ABC, como na figura abaixo. Classificamos como baricentro (G) o encontro das medianas de cada segmento.

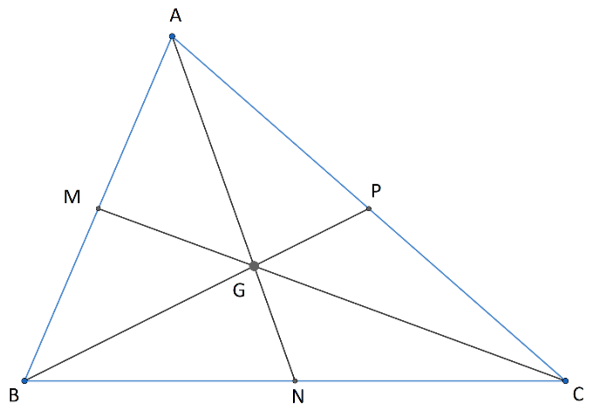

Figura 2.1 – Baricentro de um triângulo.

Sendo G baricentro do triângulo, podemos estabelecer;

$$\overline{GP} = 2.\overline{GB}\ ;\ \overline{GN} = 2.\overline{GA}\ ;\ \overline{GM} = 2.\overline{GC}\ .$$

CAPÍTULO 3 – ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Neste capítulo temos algumas demonstrações do teorema de Pitágoras. Demonstrações essas de fácil entendimento e que busca proporcionar ao professor de matemática um melhor entendimento do conteúdo e talvez um método novo de abordagem em sala de aula. Para esse capítulo foram utilizados os livros: *O Teorema de Pitágoras* (2003) de C. A. Cintra; *Temas e Problemas (2005) de A. C. Morgado, E. Wagner, P. C. Carvalho, E. L. Lima*.; *Revista do Professor de Matemática* – número 2 (1983) de E. Rosa; *The Pythagorean Proposition* (1940) de E. S. Loomis; *Os Elementos, Euclides* (2009) traduzido por I. Bicudo.

3.1- Demonstração proposta por Euclides

Euclides de Alexandria, foi um filósofo e matemático grego, o qual nasceu por volta de 360 a.c. e faleceu aproximadamente em 265 a.c., seus locais e datas de nascimento e morte são incertos. Euclides escreveu uma das maiores obras da matemática: ‘‘Os Elementos’’.

Em “Os Elementos” de Euclides, o livro I, traz o teorema de Pitágoras e sua demonstração na proposição 47.

Euclides enuncia o teorema da seguinte maneira:

“Em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que formam o ângulo reto. ”

Demonstração:

Dado um triângulo retângulo ABC, retângulo em A. Construímos sobre cada um de seus lados, quadrados exteriores ao triângulo. Logo sobre o cateto $\overline{AB}$ temos o quadrado $ABKH$ de lado *c*, sobre o cateto $\overline{AC}$ temos o quadrado ACFG de lado b e sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ temos o quadrado $BCDE$ de lado a. Em seguida traçamos os segmentos $\overline{BF}$, $\overline{CK}$, $\overline{AD}$ ($\overline{AD}$ encontra hipotenusa em I), $\overline{AE}$ ($\overline{AE}$ encontra a hipotenusa em M) e por fim o segmento $\overline{AL}$ perpendicular a $\overline{DE}$ ($\overline{AL}$ encontra a hipotenusa em J). Como na figura 3.1.

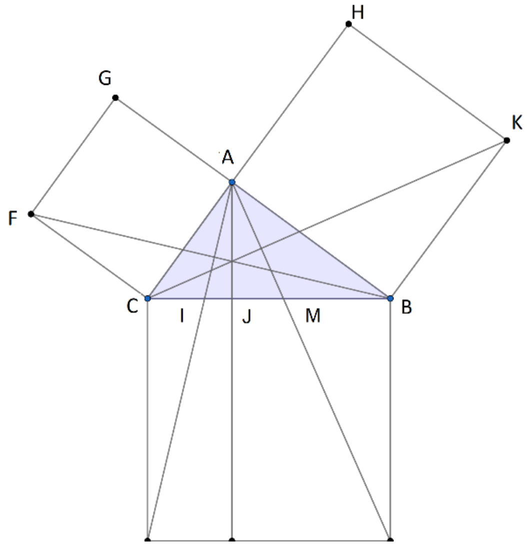

Figura 3.1 – Demonstração de Euclides

Primeiramente;

$$F\hat{C}B = A\hat{C}F + A\hat{C}B = 90° + A\hat{C}B = B\hat{C}D + A\hat{C}B = A\hat{C}D,$$

logo $F\hat{C}B = A\hat{C}D$.

Assim, os triângulos FCB e ACD são congruentes por L.A.L., pois

$$\begin{cases} \overline{AC} = \overline{FC}; & \text{lados do quadrado } ACFG \\ F\hat{C}B = A\hat{C}D & \\ \overline{CD} = \overline{CB}; & \text{lados do quadrado } BCDE. \end{cases}$$

logo Área (FCB) = Área (ACD).

Olhando para as áreas dos triângulos BCF e ACD, temos

- Área (FCB) em relação a base $\overline{CF}$ $\Rightarrow Área\ (FCB) = \frac{\overline{CF}.\overline{GF}}{2} = \frac{\overline{CF}.\overline{CF}}{2} = \frac{b.b}{2}$.
- Área (ACD) em relação a base $\overline{CD}$ $\Rightarrow Área(ACD) = \frac{\overline{CD}.\overline{DL}}{2}$.
- Analisando a área do retângulo $CDLJ$, temos

$$Área\ (CDLJ) = \overline{CD}\,.\overline{DL} = 2.Área\ (ACD) = 2.Área\ (FCB) = \frac{2\,.b\,.b}{2} = b^2 \quad (1)$$

Posteriormente analisando os triângulos BCK e BEA.

BCK é congruente a BEA por L.A.L., pois

$$\begin{cases} \overline{BC} = \overline{BE}; & \text{lado do quadrado } BCDE \\ C\hat{B}K = 90º + A\hat{C}B = A\hat{B}C & \\ \overline{BK} = \overline{AB}; & \text{lado do quadrado } ABKH, \end{cases}$$

logo Área (BEA) = Área (BCK).

Olhando para as áreas dos triângulos BCK e BEA, temos

- Área (BCK) em relação a $\overline{BK} \Rightarrow (BCK) = \frac{\overline{BK}.\overline{KH}}{2} = \frac{\overline{BK}.\overline{BK}}{2} = \frac{c.c}{2}$,
- Área (BEA) em relação a $\overline{BE} \Rightarrow (BEA) = \frac{\overline{BE}.\overline{LE}}{2}$.

Analisando a área do retângulo BJLE, temos

$$Área(BJLE) = \overline{BE}.\overline{LE} = 2.Área(BEA) = 2.Área(BCK) = \frac{2.c.c}{2} = c^2 \qquad (2)$$

Analisando o quadrado $BCDE$, temos que a área do quadrado $BCDL$ é a soma das áreas dos quadrados $CDLJ$ e $BJLE$, logo

Área ($BCDE$) = Área ($CDLJ$) + Área ($BJLE$).

Utilizando (1) e (2), temos

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

3.2- Demonstração proposta por Bhaskara

Bhaskara, foi um matemático indiano, o qual nasceu no ano de 1114 e faleceu no ano de 1185, conhecido como Bhaskaracharya Bhaskara, o professor. Abaixo temos a suposta decomposição usada por Bhaskara para a demonstração do teorema de Pitágoras, Barbosa (1993).

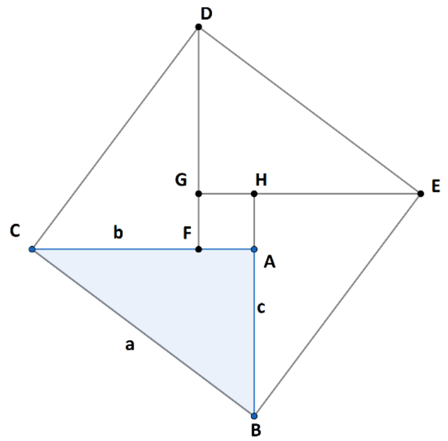

Figura 3.2 – Demonstração de Bhaskara.

Dado o triângulo retângulo ABC, com hipotenusa $\overline{CB}$. Sobre a hipotenusa $\overline{CB}$ é construído o quadrado $CBED$, de lado $\overline{CD}$ = a. Em seguida, constrói-se o segmento $\overline{DF}$;

$\overline{DF}$ // $\overline{AB}$, tendo $G \epsilon \overline{DF}$ e o segmento $\overline{EG}$; $\overline{EG}$ // $\overline{CF}$ e seja H obtido pela interseção de $\overline{GE}$ com o prolongamento de $\overline{BA}$.

Nota-se primeiramente que $E\widehat{H}C = B\hat{A}C = C\hat{F}D = D\hat{G}E = 90^0$, todos são alternos internos.

Dessa igualdade e dos triângulos BHE e EGD, temos

$$H\hat{B}E + B\hat{E}H = 90°$$
$$D\hat{E}H + E\widehat{D}G = 90°$$
$$D\hat{E}H + B\hat{E}H = 90°,$$

logo $E\widehat{D}G = H\hat{B}E$.

$$H\hat{B}E + B\hat{E}H = 90°$$
$$D\hat{E}H + E\widehat{D}G = 90°$$
$$D\hat{E}H + B\hat{E}H = 90°,$$

logo $G\widehat{D}E = H\hat{E}B$.

Tem se que $DE = EB$, lados do quadrado $DEBC$.

Assim, os triângulos BHE e EGD são congruentes por A.L.A.

Analogamente temos a congruência dos triângulos ACB, FDC e BHE.

Observa se que o quadrilátero $GHAF$ é um quadrado, pois;

- $B\hat{A}C + C\hat{A}H = 180° \; e \; B\hat{A}C = 90°, logo \; C\hat{A}H = 90°$.

Analogamente para os ângulos AHG, HGF e GFA.

- $\overline{HA} = \overline{HB} – \overline{AB} = b – c$.

Analogamente para os lados $\overline{HG}, \overline{GF} \; e \; \overline{FA}$.

Assim, $GHFA$ é um quadrado de lado $b – c$.

Podemos verificar o teorema da seguinte situação:

A área do quadrado $DEBC$ é igual a quatro vezes a área do triângulo ABC somado a área do quadrado $GHAF$.

Logo

$$Área\ (DEBC) = 4.Área(ABC) + Área(GHAF) \quad \Rightarrow$$

$$a^2 = 4.\left(\frac{b.c}{2}\right) + (b-c)^2 \quad \Rightarrow$$

$$a^2 = 2.b.c + b^2 - 2.b.c + c^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

3.3- Demonstração proposta por Pitágoras

Acredita-se que Pitágoras tenha feito sua demonstração baseada na comparação de áreas, provavelmente uma demonstração semelhante como as das figuras abaixo:

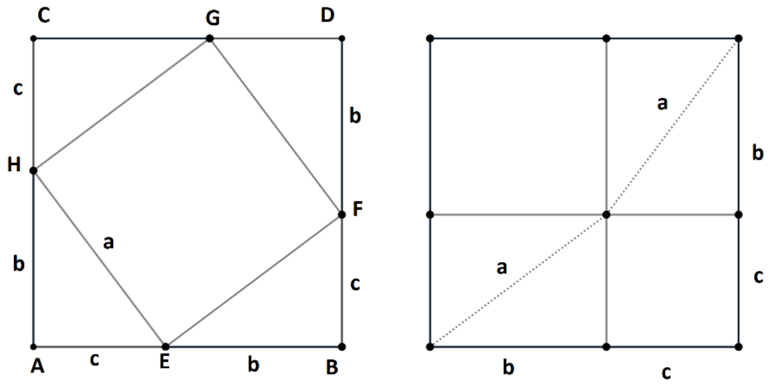

Figura 3.3 – Demonstração de Pitágoras

Primeiro temos um quadrado de lado $b + c$, tal que de cada vértice mediu comprimento c e obteve-se os pontos E, F, G e H.

Tendo os segmentos;

$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = c \qquad e \qquad \overline{EB} = \overline{FC} = \overline{GD} = \overline{HA} = b.$$

Como A, B, C e D são vértices de um quadrado, temos a congruência dos triângulos AEH, EBF, FDG e GCH por L.A.L..

Logo $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = a.$

E o quadrilátero $HEFG$ é um quadrado, pois

$$\begin{cases} \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} \\ \quad \text{e} \\ E\hat{F}G = B\hat{F}C - E\hat{B}F - G\hat{F}C \Rightarrow E\hat{F}G = 180° - (E\hat{B}F + G\hat{F}C) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E\hat{F}G = 180° - (E\hat{B}F + E\hat{F}B)$$

$$\Rightarrow E\hat{F}G = 180° - 90° = 90°.$$

Reagrupando os quatro triângulos retângulos congruentes conseguimos formar um novo quadrado de lado $b + c$ e com dois retângulos formados pelos 4 triângulos, como o segundo quadrado da figura 3.3. Sobrando dois quadrados um de lado b e outro de lado c.

Portanto

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

3.4- Demonstração por semelhança

Agora demonstraremos o teorema de Pitágoras utilizando semelhança de triângulos. Esse método é o mais utilizado nos livros didáticos pois trata do teorema de Pitágoras utilizando um conteúdo importante, semelhança de triângulos, além de obter outras relações entres as medidas dos lados, altura e projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

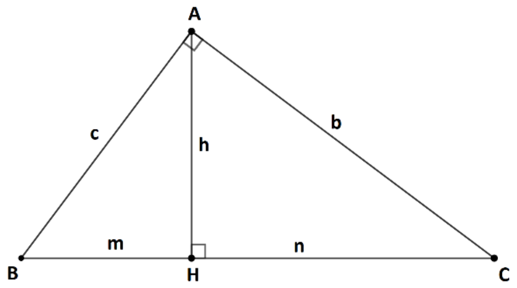

Figura 3.4 – Demonstração por Semelhança

Considere o triângulo retângulo ABC, retângulo em A, com altura $\overline{AH}$ relativa a hipotenusa $\overline{BC}$, como na figura 3.4.

Para facilitar a demonstração iremos adotar $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b, \overline{BC} = a, \overline{BH} = m, \overline{HC} = n \, e \, \overline{AH} = h.$

Analisando os triângulos ABC e HBA, podemos observar a semelhança por A.A., pois $B\hat{A}C = B\hat{H}A = 90°$ e $A\hat{B}H$ é ângulo comum.

Logo

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}.$$

Dessa igualdade, temos

$$(1)\ a.h = c.b$$
$$(2)\ c^2 = a.m$$
$$(3)\ b.m = c.h.$$

Analisando agora os triângulos ABC e AHC, podemos observar a semelhança por A.A., pois $B\hat{A}C = A\hat{H}C = 90°$ e $A\hat{C}H$ é ângulo comum.

Logo

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{h} = \frac{a}{b}.$$

Dessa igualdade, temos

$$
\begin{aligned}
&(4)\ b.h = n.c \\
&(5)\ b^2 = n.a \\
&(6)\ c.b = h.a
\end{aligned}
$$

De usando (2) e (5), temos

$$c^2 + b^2 = a.m + a.n = a.(m + n);$$

Nota se que $a = m + n$, assim

$$c^2 + b^2 = a.(m + n) = a.a = a^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

3.5- Demonstração de Perigal

Antes de fazermos a prova do teorema de Pitágoras proposta por Perigal. Vamos provar um lema antes, o qual será utilizado de apoio para a demonstração posterior.

Lema 1 - Sejam $ABCD$ um quadrado e O seu centro (intersecção das diagonais AC e BC). Seja E um ponto qualquer sobre o lado AD. Considere o segmento EF passando pelo ponto O e F sobre o lado BC desse quadrado. Então

(a) O é ponto médio do segmento EF.
(b) $DE = BF$.
(c) $AE = CF$.

Além disso, se o segmento GH passa pelo centro do quadrado e é perpendicular ao segmento EF com G no segmento AB e H em CD, então os quadriláteros $EAGO$, $HDEO$, $FCHO$ e $GBFO$ são congruentes.

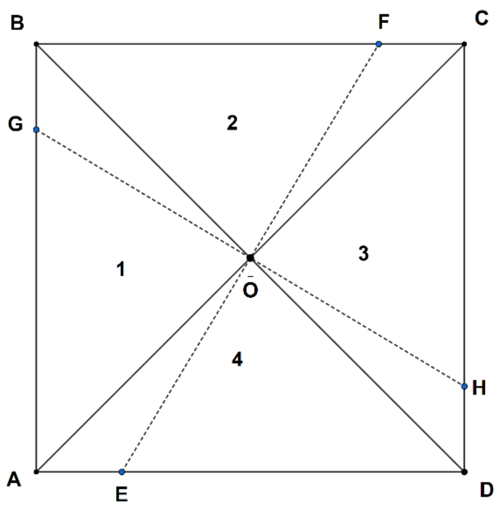

Figura 3.5 – Lema

Demonstração:

Lembrando que as diagonais de um quadrado servem de bissetriz para os vértices do quadrado e encontro das diagonais forma um ângulo reto.

Nota-se que os triângulos FCO e EAO são congruentes por A.L.A., pois

$F\hat{O}C = A\hat{O}E$; são opostos pelo vértice;
$\overline{AO} = \overline{OC}$; O é ponto médio de AC;
$F\hat{C}O = E\hat{A}O$; alternos internos.

Logo $\overline{FO} = \overline{OE}$ *e* $\overline{FC} = \overline{AE}$.

Como $\overline{AD} = \overline{BC}$, temos

$$\overline{ED} = \overline{AD} - \overline{AE} = \overline{BC} - \overline{FC} = \overline{BF} \Rightarrow \overline{ED} = \overline{BF}.$$

Agora vamos provar que os quadriláteros $EAOD, HDOC, FCOB$ e $GBOA$ são congruentes.

Nota se que

Quadrilátero ($EAGO$) = Triângulo (EAO) + Triângulo (OAG);
Quadrilátero ($HDEO$) = Triângulo (HDO) + Triângulo (DOE);
Quadrilátero ($FCHO$) = Triângulo (FCO) + Triângulo (CHO);
Quadrilátero ($GBFO$) = Triângulo (BGO) + Triângulo (BFO).

Assim, para provar a congruência dos quadriláteros, basta provar que

(1) Os triângulos EAO, HDO, FCO e BGO são congruentes;
(2) Os triângulos OAG, DOE, CHO e BFO são congruentes.

Vamos provar a afirmação (1);

Vamos primeiro provar que os triângulos BGO e HDO são congruentes. Nota se a congruência por A.L.A., pois

$B\hat{O}G = D\hat{O}H$; são opostos pelo vértice
$\overline{BO} = \overline{OD}$; O é ponto médio de BD
$G\hat{B}O = H\hat{D}O$; são alternos internos.

Logo os triângulos BGO e HDO são congruentes.

Analogamente para os triângulos FCO e AEO.

Provando agora que os triângulos BGO e FCO são congruentes. Nota-se a congruência por A.L.A., pois

$G\hat{B}O = F\hat{C}O$; as diagonais do quadrado bissectam os ângulos dos vértices
$\overline{BO} = \overline{CO}$; ambos os segmentos são metade da diagonal do quadrado
$B\hat{O}G = C\hat{O}F$; pois $GOF = BOC = 90°$; $B\hat{O}F$ ângulo comum.

Logo, os triângulos BGO e FCO são congruentes.

Assim, fica provado que os triângulos EAO, DHO, FCO e BGO são congruentes.

Agora vamos provar (2);

Nota se da afirmação (1) que $\overline{BG} = \overline{AE} = \overline{DH} = \overline{CF}$.

Logo $\overline{GA} = \overline{ED} = \overline{HG} = \overline{FB}$.

Temos também que o ponto O é ponto médio dos segmentos $\overline{BD}, \overline{CA}, \overline{FE}$ e $\overline{GH}$.

Logo

$$\overline{BO} = \overline{OD} = \overline{CO} = \overline{AO} \text{ e } \overline{FO} = \overline{OE} = \overline{GO} = \overline{OH}.$$

Desta conclusão podemos provar a congruência dos triângulos OGA, DOE, CHO e BFO por L.L.L.

Assim, das afirmações (1) e (2), temos; que os quadriláteros $EAGO, HDEO, FCHO$ e $GBFO$ são congruentes.

Agora vamos para a demonstração que Perigal propôs do teorema de Pitágoras. Inicialmente, dado um triângulo retângulo ABC, retângulo em A;

- Construímos sobre a hipotenusa CB, sobre o cateto AB e sobre o cateto AC os quadrados $CBMN, ACDE$ e $ABGF$, respectivamente. Tais que $CBMN$ tem lado igual a, $ACDE$ tem lado igual b e $ABGF$ tem lado igual c.
- Agora, no quadrado $ABGF$ marcamos o ponto de central do quadrado L e sobre esse ponto constrói-se dois segmentos, o primeiro $\overline{HJ}$ tal que $\overline{HJ} // \overline{CB}$ e o segundo $\overline{IK}$ tal que $\overline{IK}$ é perpendicular a $\overline{CB}$.
- Por fim no quadrado $CBMN$ marcamos os pontos médios R, O, P e Q dos segmentos e a partir desses pontos traçamos os segmentos $\overline{RV}$ e $\overline{PT}$ paralelos ao segmento $\overline{CA}$ e os segmentos $\overline{QU}$ e $\overline{OS}$ paralelos ao segmento $\overline{AB}$.

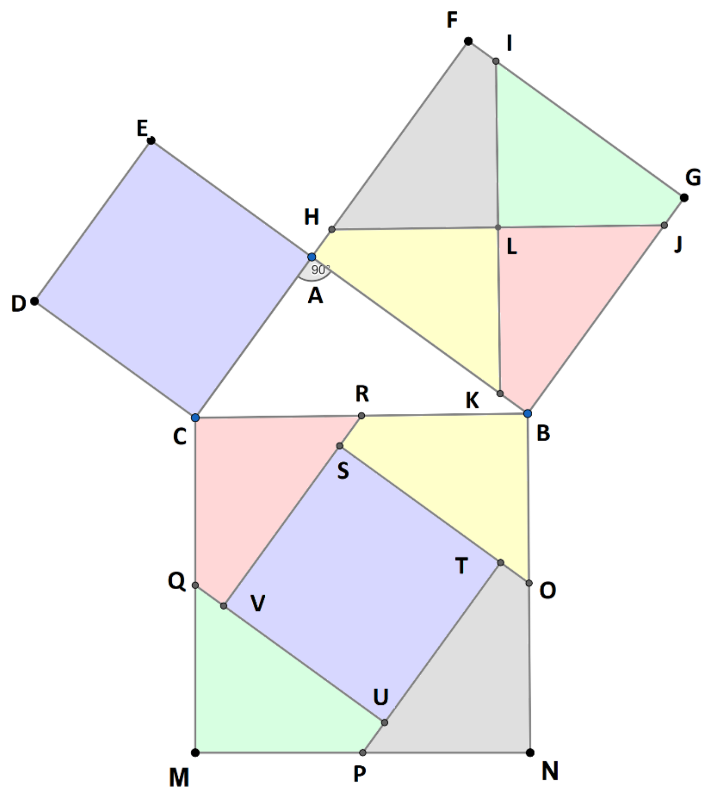

Figura 3.5.1 – Demonstração de Perigal

Pelo lema, os quadriláteros $AHLK$, $FILH$, $GJLI$ e $BKLJ$ são congruentes. Segue;

$$\overline{AH} = \overline{GJ} = \overline{KB} = \overline{FI}$$
$$\overline{HF} = \overline{AK} = \overline{BJ} = \overline{GI}$$
$$\overline{HL} = \overline{LK} = \overline{LG} = \overline{LI}.$$

Por outro lado, pela construção temos que o quadrilátero $BCHJ$ é um paralelogramo, logo seus lados opostos são iguais, então

$$\overline{BC} = \overline{JH} \quad e \quad \overline{CB} = \overline{BJ}.$$

Tem-se que L é o ponto médio de HI e R é ponto médio de CB, logo

$$\overline{HL} = \overline{LI} = \overline{CR} = \overline{RB}.$$

Para a prova de Perigal do teorema de Pitágoras, vamos concluir a congruência dos quadriláteros:

$$AHLK = RSBO$$
$$GJLI = UPNQ$$
$$FILH = TOMP$$
$$BKLJ = VQCR.$$

Provando a Congruência dos quadriláteros $AHLK$ e $RSBO$:
Nota-se que

$AHLK$ = Triângulo HLK + Triângulo AHK
$RSBO$ = Triângulo RBO + Triângulo SRO

Assim, se provamos a congruência dos triângulos HLK e RBO e depois dos triângulos AHK e SRO temos provado a congruência dos quadriláteros.

Inicialmente observamos que pela construção, obtemos

$$\overline{HL} = \overline{RB} = \overline{LK} = \overline{BO} \quad e \quad H\hat{L}K = R\hat{B}O = 90°.$$

Assim, os triângulos HLK e RBO são congruentes por L.A.L., pois

$\overline{LH} = \overline{RB}$;	por construção da figura
$H\hat{L}B = R\hat{B}O$;	Ângulo reto
$\overline{LK} = \overline{BO}$;	por construção da figura

Logo

$$\overline{HK} = \overline{RO}, \quad L\hat{H}K = B\hat{R}O, \quad L\hat{K}H = B\hat{O}R.$$

Ainda,

$$\overline{HL} \mathbin{//} \overline{RB}; \ \overline{LK} \mathbin{//} \overline{BO}; \ \overline{KA} \mathbin{//} \overline{OS} \ e \ \overline{AH} \mathbin{//} \overline{SR}.$$

Disto segue,

$$H\hat{L}K = R\hat{B}O, \quad L\hat{K}A = B\hat{O}S, \quad K\hat{A}H = O\hat{S}R \ e \ A\hat{H}L = S\hat{R}B.$$

Logo

$$A\hat{H}K = A\hat{H}L - K\hat{H}L = S\hat{R}B - B\hat{R}O = S\hat{R}O$$
$$A\hat{K}H = A\hat{K}L - H\hat{K}L = B\hat{O}S - B\hat{O}R = S\hat{O}R.$$

Portanto os triângulos AHK e SRO são congruentes por A.L.A., pois

$$A\hat{H}K = S\hat{R}O$$
$$\overline{HK} = \overline{RO}$$
$$A\hat{K}H = S\hat{O}R.$$

Assim, temos que os triângulos HLK e RBO são congruentes e os triângulos AHK e SRO também são congruentes. Logo os quadriláteros $AKLH$ e $RSOB$ são congruentes.

Analogamente podemos concluir a congruência dos outros quadriláteros.

Por fim, provamos a congruência de $ACDE$ e $STUV$.

Pela congruência dos quadriláteros $CQVR$ e $LKBJ$, obtemos $\overline{VR} = \overline{BJ}$.

Pelo paralelogramo $HCBJ$ temos que $\overline{HC} = \overline{BJ} \Rightarrow \overline{VR} = \overline{HC}$.

Como $AHLK$ e $RSOB$ são congruentes então $\overline{AH} = \overline{SR}$, então;

$$\overline{VS} = \overline{VR} - \overline{SR} = \overline{HC} - \overline{AH} = \overline{CA}\,.$$

Logo temos que os quadriláteros $ACDE$ e $STUV$ possuem mesma medida para os lados. Agora vamos mostrar que $STUV$ também é quadrado;

Da congruência dos quadriláteros $FILH$ e $TOMP$, temos $H\hat{F}I = P\hat{T}O = 90°$ logo $U\hat{T}S = 90°$. Analogamente podemos provar a perpendicularidade dos ângulos TUV, UVS e VST.

Assim, fica provado que $ACDE$ e $STUV$ são congruentes.

Portanto temos que;

$$Área\,(CBMN) = Área\,(EDCH) + Área\,(FABG).$$

Assim, a área do quadrado feito sobre a hipotenusa pode ser preenchida pelos quatro quadriláteros do quadrado $FABG$ e pelo quadrado $EDCH$.

3.6- Recíproca do teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é muito conhecido por todos, no entanto um resultado que poucos conhecem é que a recíproca do teorema de Pitágoras também é verdadeira, ou seja, “Se um triângulo com lados $a, b\ e\ c$ é tal que $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo. ”

Para demonstrar essa afirmação considere ABC um triângulo com lados $a, b\ e\ c$ tais que seus lados satisfaçam a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

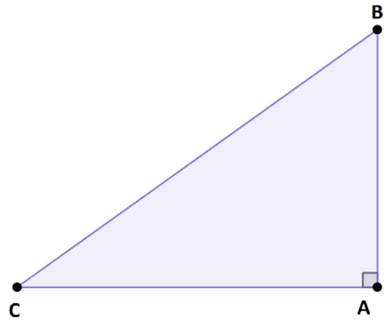

Figura 3.6 – Triângulo ABC

Constroem-se dois segmentos $A'B'$ e $A'C'$ perpendiculares, concorrentes em A', com medidas b e c respectivamente.

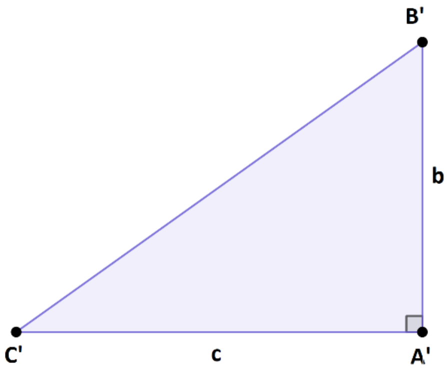

Figura 3.6.1 – Triângulo A'B'C'

Temos o triângulo $A'B'C'$, retângulo em A' (por construção);

Logo utilizando o teorema de Pitágoras;

$$\left(\overline{B'C'}\right)^2 = \left(\overline{A'B'}\right)^2 + \left(\overline{A'C'}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\left(\overline{B'C'}\right)^2 = (b)^2 + (c)^2.$$

Temos que $a^2 = b^2 + c^2$, logo

$$\left(\overline{B'C'}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \left(\overline{B'C'}\right) = a \,.$$

Assim, temos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, por L.L.L.

Logo ABC é retângulo em A.

3.7- Generalização do teorema de Pitágoras

Pela demonstração de Perigal nota se que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.
Vejamos agora, figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

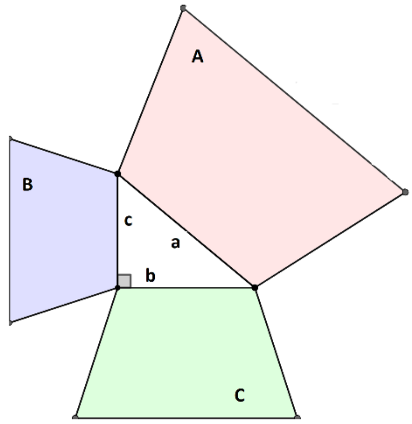

Figura 3.7 – Generalização do Teorema de Pitágoras.

Sejam então A, B e C as áreas de figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo como mostra a figura 3.7.

Em figuras semelhantes temos que a razão entre as áreas das figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Logo

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \ ou \ \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

$$\frac{A}{C} = \frac{a^2}{c^2} \ ou \ \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Portanto

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Temos,

$$a^2 = \frac{A.b^2}{B}, c^2 = \frac{C.b^2}{B}$$

Fazendo,

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{A.b^2}{B} = \mathrm{b}^2 + c^2 \Rightarrow A.b^2 = B.b^2 + B.c^2 \Rightarrow A.b^2 = B.b^2 + \frac{B.C.b^2}{B}$$

$$\Rightarrow \quad A.b^2 = B.b^2 + C.b^2 \Rightarrow A = B + C.$$

Assim, concluímos que, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos é igual a área da figura construída sobre a hipotenusa.

3.8- Outra generalização do teorema de Pitágoras

Considere um triedro tri-retangular de vértice O, cortado por um plano qualquer, formando o tetraedro $OABC$ com $\overline{AO} = a, \overline{OB} = b$ e $\overline{OC} = c$, como mostra a figura 3.8.

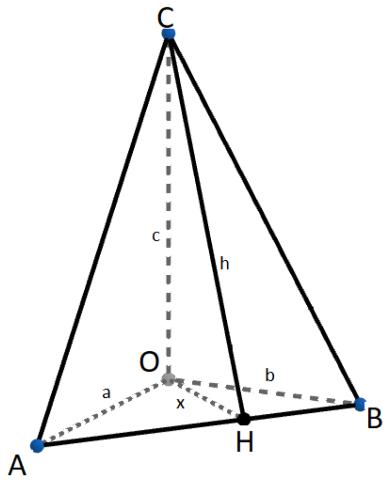

Figura 3.8 – Triedro Tri-retangular.

Sejam: área de ABC = A, área OAB = A_1, área de OBC = A_2 e área de OCA = A_3.

Vamos mostrar que a área do triângulo ABC ao quadrado é igual a soma das áreas dos triângulos AOC, BOC e AOB ao quadrado, ou seja,

$$A = (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2$$

Primeiramente, observe a figura, constrói-se um plano que contem $\overline{OC}$ temos que esse plano corta o segmento $\overline{AB}$ em H, formando os segmentos $\overline{OH}$ e $\overline{CH}$, ambas perpendiculares a $\overline{AB}$. Sendo $\overline{OH} = x$ e $\overline{CH} = h$.

Temos,

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2} \,.\, AB \,.\, H$$

$$\text{Área } (OAB) = \frac{1}{2} \,.\, a \,.\, b = \frac{1}{2} \,.\, AB \,.\, x$$

$$\text{Área } (OBC) = \frac{1}{2} \,.\, b \,.\, c$$

área (OCA) = $\frac{1}{2}\ . a\ . c$

Note-se que dos triângulos retângulos CHO e ABO, temos a relação

$$h^2 = x^2 + c^2 \qquad \text{e} \qquad (AB)^2 = a^2 + b^2.$$

Logo

$$\begin{aligned}\left(\text{á}rea(ABC)\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\ .AB\ .h\right)^2 = \frac{1}{4}\ .(AB)^2.(x^2 + c^2)\\ &= \frac{1}{4}\ .(AB)^2.x^2 + \frac{1}{4} \cdot (AB)^2.c^2 = \frac{1}{4}\ .(AB)^2.x^2 + \frac{1}{4}\ .(a^2 + b^2).c^2\\ &= \frac{1}{4}\ .(AB)^2.x^2 + \frac{1}{4}\ .a^2.c^2 + \frac{1}{4}\ .b^2.c^2.\end{aligned}$$

Assim, $A = (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2$, como queríamos.

CAPÍTULO 4 – EXERCÍCIOS E APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Este capítulo contém 9 exemplos de aplicação do teorema de Pitágoras. Sendo que todos os exemplos podem ser utilizados com estudantes do ensino médio. Para esta seção usamos de base as referências o livro in *Temas e Problemas* de A. C. Morgado, E. Wagner, P. C. Carvalho, E. L. Lima *(2005)* e a dissertação do Profmat intitulada *Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações* de Zanella, I. A. *(2013).*

Exercício 4.1- Determine o raio da circunferência a um triângulo isósceles de base 8 e altura 10. Dado que AM é altura.

Solução:

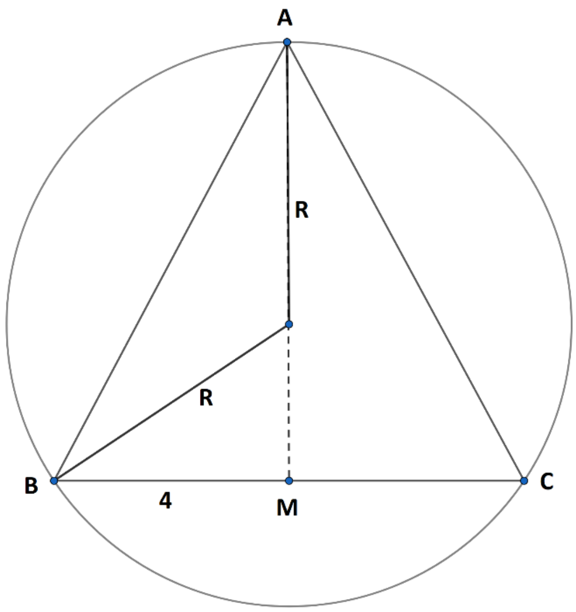

Figura 4.1 – Triângulo Inscrito.

Temos que o ponto O é o centro da circunferência. Assim, podemos notar que os triângulos BMO e CMO são congruentes pois ambos são triângulos retângulos com o cateto e a hipotenusa congruentes. Dessa congruência temos, que M é ponto médio de $\overline{BC}$.

Sendo assim, o triângulo BOM é retângulo.

Temos que $\overline{BM} = 4, \overline{BO} = R$ e $\overline{OM} = \overline{AM} - \overline{AO} \Rightarrow \overline{AM} = 10 - R$.

Adotando o teorema de Pitágoras, temos,

$$\left(\overline{BO}\right)^2 = \left(\overline{BM}\right)^2 + \left(\overline{OM}\right)^2 \Rightarrow (R)^2 = (4)^2 + (10-R)^2 \Rightarrow R^2$$
$$= 16 + 100 - 20R + R^2 \Rightarrow R = 5{,}8.$$

Logo R = 5,8.

Exercício 4.2 -. Considere um triângulo retângulo. Sobre seus lados são construídas três semicircunferências tendo os lados do triângulo como diâmetro. Mostre que vale a relação das áreas; $\boldsymbol{P = M + N}$. Como na figura abaixo.

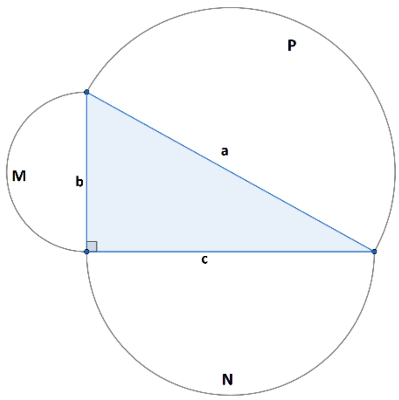

Figura 4.2 – Triângulo Retângulo.

Solução:

Note que sobre o cateto b temos a semicircunferência M, no cateto c temos a semicircunferência N e na hipotenusa a temos a semicircunferência P.

Assim a área de cada circunferência é,

$$\text{Área(P)} = \frac{\pi a^2}{8} \quad ; \quad \text{Área(M)} = \frac{\pi b^2}{8} \quad ; \quad \text{Área(N)} = \frac{\pi c^2}{8}.$$

Como o triângulo é retângulo temos que $a^2 = b^2 + c^2$.

Logo

$$\text{Área(P)} = \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi(b^2+c^2)}{8} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} = Área(M) + Área(N).$$

Portanto temos provada a relação das áreas; $P = M + N$.

Exercício 4.3 – Em um sistema de coordenadas perpendiculares, qual é a distância entre os pontos $\boldsymbol{B = (x_1, y_1)}$ e $\boldsymbol{C = (x_2, y_2)}$?

Solução:

Construindo o triângulo retângulo ABC com catetos paralelos aos eixos, temos que

$$\overline{AB} = |x_2 - x_1| \quad \text{e} \quad \overline{AC} = |y_2 - y_1|.$$

Como $d(B,C) = \overline{BC}$, utilizando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, temos

$$d(B,C)^2 = (\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 \Rightarrow (\overline{BC})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow$$

$$d(B,C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Exercício 4.4 – Em um sistema de coordenadas de origem $\boldsymbol{O}$ são dados os pontos $\boldsymbol{A = (x_1, y_1)}$ *e* $\boldsymbol{B = (x_2, y_2)}$. Se os segmentos $\boldsymbol{OA}$ e $\boldsymbol{OB}$ são perpendiculares, que relação existe entre as coordenadas dos pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$?

Solução:

Sendo OA e OB perpendiculares então o triângulo AOB é retângulo. Assim, podemos adotar o teorema de Pitágoras. Temos que;

$$[d(A,B)]^2 = [d(O,A)]^2 + [d(O,B)]^2,$$

Sendo;

- $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;
- $d(O,A) = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2}$;
- $d(O,B) = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2}$.

Assim,

$$[d(A,B)]^2 = [d(O,A)]^2 + [d(O,B)]^2 \Rightarrow$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2 \Rightarrow$$

$$x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \Rightarrow$$

$$-2x_1x_2 - 2y_1y_2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Assim, temos a relação;

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Exercício 4.5 – Dado um paralelepípedo retângulo podemos associar a diagonal *d* que corta o paralelepípedo ligando duas faces opostas com as medidas dos lados *a* e *b* e da altura *c*. Como na figura 4.3.

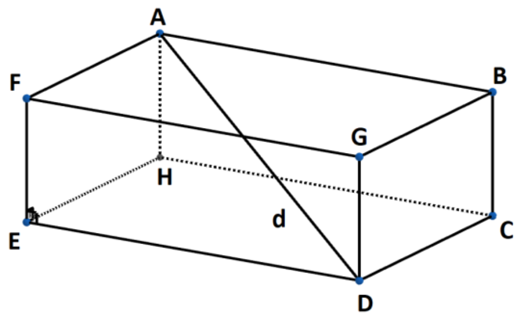

Figura 4.3 – Paralelepípedo.

Solução:

Primeiro olhando para o triângulo AHD percebe-se que ele é retângulo pois AH pode ser considerada altura do paralelepípedo. Logo qualquer segmento contido no plano $EDCH$ será perpendicular a AH. Assim AH é perpendicular a HD.

Sendo $\overline{HD} = x$ temos;

$$(1)\ (\overline{AD})^2 = (\overline{AH})^2 + (\overline{HD})^2 \Rightarrow d^2 = c^2 + x^2.$$

Olhando agora para o triângulo HDE nota-se que ele é retângulo pois $EDCH$ é retângulo, logo HEC é ângulo reto. Assim

$$(2)\ (\overline{HD})^2 = (\overline{HE})^2 + (\overline{ED})^2 \Rightarrow x^2 = b^2 + c^2.$$

Usando o resultado obtido em (2) na equação (1), temos

$$d^2 = c^2 + x^2 \Rightarrow$$
$$d^2 = c^2 + b^2 + c^2.$$

Exercício 4.6 – Em um triângulo ABC, as medianas que partem de A e de B são perpendiculares. Se BC = 8 e AC = 6, calcule AB.

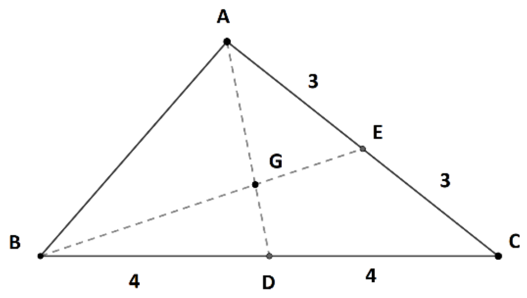

Figura 4.4 – G: Baricentro do triângulo.

Seja o triângulo ABC como o da figura 4.6.

Solução:

Do encontro das medianas obtemos o ponto G baricentro do triângulo ABC, logo

$$\overline{AG} = \frac{2\overline{AD}}{3} \quad ; \quad \overline{GD} = \frac{\overline{AD}}{3} \quad ; \quad \overline{BG} = \frac{2\overline{BE}}{3} \quad e \quad \overline{GE} = \frac{\overline{BE}}{3}.$$

Vamos usar o fato de que os triângulos formados internamente são retângulos.

Do triângulo AEG, temos

$$(\overline{AE})^2 = (\overline{AG})^2 + (\overline{GE})^2 \Rightarrow 9 = \frac{4(\overline{AD})^2}{9} + \frac{(\overline{BE})^2}{9} \Rightarrow 81 = 4(\overline{AD})^2 + (\overline{BE})^2.$$

Do triângulo BDG, temos

$$(\overline{AD})^2 = (\overline{DG})^2 + (\overline{GB})^2 \Rightarrow 16 = \frac{(\overline{AD})^2}{9} + \frac{2(\overline{BE})^2}{9} \Rightarrow 144 = (\overline{AD})^2 + 4(\overline{BE})^2.$$

Das equações obtidas em (1) e (2) podemos montar o sistema;

$$\begin{cases} 81 = 4(\overline{AD})^2 + (\overline{BE})^2 \\ 144 = (\overline{AD})^2 + 4(\overline{BE})^2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que $(\overline{AD})^2 = 12$ e $(\overline{BE})^2 = 33$, assim

$$(\overline{AG}) = \frac{2\overline{AD}}{3} \Rightarrow (\overline{AG})^2 = \frac{4\,.12}{9} \quad e \quad (BG) = \frac{2\overline{BE}}{3} \Rightarrow (\overline{BG})^2 = \frac{4\,.33}{9}$$

Agora analisando o triângulo ABG que é retângulo, temos;

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{BG})^2 + (\overline{AG})^2 \rightarrow (\overline{AB})^2 = \frac{4\,.12 + 4\,.33}{9} \rightarrow (\overline{AB})^2 = 20$$

Logo

$$(\overline{AB}) = 2\sqrt{5}.$$

Exercício 4.7 – É dado um quadrado $ABCD$ de lado a. Determine o raio da circunferência que contém os vértices A e B e é tangente a CD.

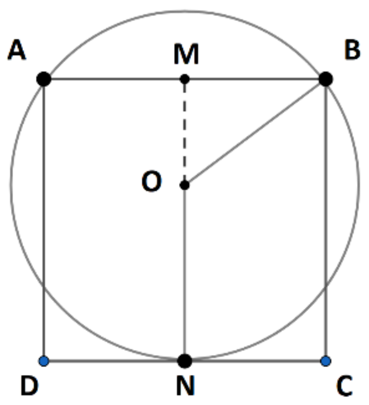

Figura 4.5 – Quadrado ABCD.

Solução:

Inicialmente note que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{DC}$ pois a circunferência é tangente a $\overline{DC}$. Logo os triângulos OAM e OBM são congruentes, pois;

$$\begin{cases} \overline{OB} = \overline{AO} = R; & \\ O\hat{A}M = O\hat{B}M & \text{pois } AOB \text{ é triângulo isósceles;} \\ O\hat{M}A = O\hat{M}B = 90° & \end{cases}$$

Logo M é ponto médio de AB.

Tem-se também que o triângulo OMB é retângulo, assim podemos adotar o teorema de Pitágoras;

$$(\overline{OM})^2 = (\overline{MB})^2 + (\overline{MO})^2 \Rightarrow (R)^2 = \left(\frac{a}{2}\right) + (a - R)^2 \Rightarrow$$

$$R = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2aR + R^2 \Rightarrow R = \frac{5a}{8}.$$

Exercício 4.8 – Em um triângulo ABC, retângulo em A, o ponto M é médio de BC e o ponto N pertence ao cateto AC. Se BA = 5, BN = 7 e BC = 11, calcule o comprimento de MN.

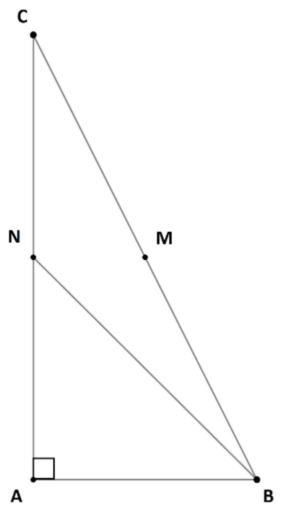

Figura 4.6 – M ponto médio de BC

Solução:

Seja o triângulo igual da figura 4.8.

Inicialmente notamos que os triângulos ABC e ABN são retângulos em A. Logo podemos adotar o teorema de Pitágoras para ambos.

Analisando o triângulo ABC, temos;

$$(1)\ (\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2 \Rightarrow 11^2 = (\overline{AC})^2 + 5^2 \Rightarrow \overline{AC} = 4\sqrt{6}.$$

Analisando o triângulo ABN, temos;

$$(2)\ (\overline{NB})^2 = (\overline{AN})^2 + (\overline{AB})^2 \Rightarrow 7^2 = (\overline{AN})^2 + 5^2 \Rightarrow \overline{AN} = 2\sqrt{6}.$$

De (1) e (2), temos que N é ponto médio de $\overline{AC}$, logo $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{AB}$ e consequentemente $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$. Assim, o triângulo NCM é retângulo.

Adotando o teorema de Pitágoras, temos;

$$(\overline{CM})^2 = (\overline{NC})^2 + (\overline{NM})^2 \Rightarrow \left(\frac{11}{2}\right)^2 = (\overline{NC})^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow (\overline{NC}) = \frac{5}{2}.$$

A seguir veremos como utilizar o teorema de Pitágoras em uma geometria não euclidiana[4]. Obtendo relações trigonométricas na esfera.

Exercício 4.9 - Seja ABC um triângulo esférico, com lados a, b e c, e ângulos inteiros A, B e C. Então,

- $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$
- $\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos B$
- $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$

[4] Geometria não euclidiana: Geometria baseada num sistema axiomático, onde não é verificado o quinto postulado, o qual diz que pôr um ponto fora de uma reta passa uma única paralela.

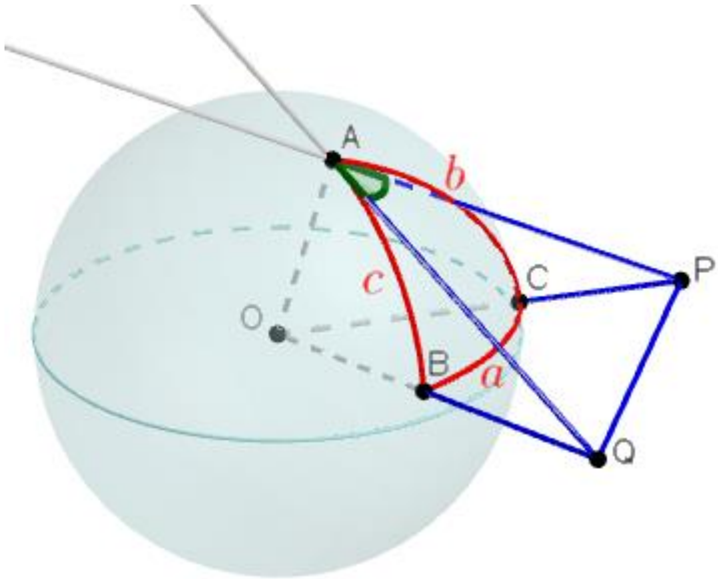

Figura 4.7 – Triângulo Esférico.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo esférico sobre uma esfera de centro O e raios $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1$.

Podemos afirmar que $\begin{cases} a \text{ equivale ao ângulo central } C\hat{O}A \\ b \text{ equivale ao ângulo central } A\hat{O}C \\ c \text{ equivale ao ângulo central } A\hat{O}B. \end{cases}$

O ângulo interno A é formado pelas retas tangentes aos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$ em A, o ângulo B é formado pelas retas tangentes aos arcos $\widehat{BA}$ e $\widehat{BC}$ em B e o ângulo C é formado pelas retas tangentes aos arcos $\widehat{CA}$ e $\widehat{CB}$ em C.

Temos que a, b e c são opostos aos ângulos $A, B\ e\ C$, respectivamente.

Do prolongamento das retas tangentes em A e das restas $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$, obtemos os pontos Q e P, como na figura acima.

As retas $\overline{AP}$ e $\overline{AQ}$ são tangentes a superfície da esfera e, portanto, as semirretas AO e AP são perpendiculares, pois uma reta tangente a esfera é perpendicular ao raio. O mesmo vale com as semirretas $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{AP}$.

Nota-se que os triângulos OAP e OAQ são retângulos em A.

Podemos estabelecer a relação;

$$\cos b = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}};\ \operatorname{sen} b = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}}$$

$$\cos c = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}}\ ;\ \text{sen}\, c = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}.$$

Como os triângulos $OAP\ E\ OAQ$ são retângulos vamos adotar Pitágoras;

$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2$$

$$\overline{QO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2.$$

Analisando agora os triângulos PQO e PQA que não são retângulos, vamos adotar a lei dos cossenos neles;

$$(1)\ \overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO}.\overline{QO}\cos\alpha$$
$$(2)\ \overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP}.\overline{AQ}\cos A.$$

De (1) e (2), temos;

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2.\overline{PO}.\overline{QO}.\cos\alpha = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2.\overline{AP}.\overline{AQ}.\cos A \Rightarrow$$

$$2.\overline{PO}.\overline{QO}.\cos\alpha = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - \overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2 + 2.\overline{AP}.\overline{AQ}.\cos A \Rightarrow$$

$$2.\overline{PO}.\overline{QO}.\cos\alpha = 2.\overline{AO}^2 + 2.\overline{AP}.\overline{AQ}.\cos A \Rightarrow$$

$$\overline{PO}.\overline{QO}.\cos\alpha = \overline{AO}.\overline{AO} + \overline{AP}.\overline{AQ}.\cos A \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AOAO}}{\overline{POQO}} + \frac{\overline{APAQ}}{\overline{POQO}}\cos A.$$

Logo

$$\cos\alpha = \cos b.\cos c + \text{sen}\, b.\text{sen}\, c.\cos A.$$

De forma análoga podemos chegar às outras duas relações.

Esta relação e outras são parte do estudo da trigonometria na Geometria Esférica e tem aplicação na navegação náutica e astronomia para determinar a posição de uma embarcação em alto-mar mediante a observação dos corpos celestes, para mais detalhes veja *Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações* de Zanella, I. A. *(2013)*.

Agora vejamos duas questões tiradas do *Banco de Questões 2010 – OBMEP* de Druck S. (2010).

Exercício 4.10 – Lado do quadrado – Quatro peças iguais, em forma de triângulo retângulo, foram dispostas de dois modos diferentes, como mostram as figuras dadas. Os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ tem lados respectivamente iguais a 3 cm e 9 cm. Determine a medida do lado do quadrado $IJKL$.

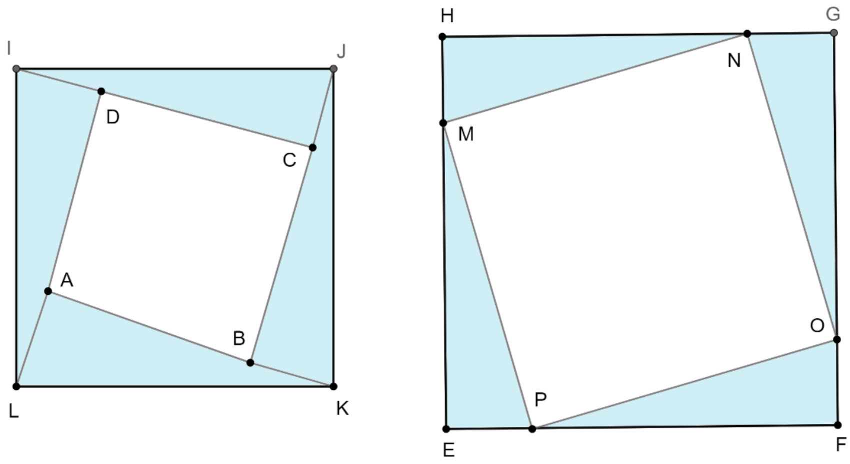

Figura 4.8 – Lado do quadrado

Solução:

Primeiro nota-se que os triângulos que compõem as duas figuras são todos iguais e além disso são todos triângulos retângulos. Disso

$\overline{DC} = \overline{IC} - \overline{ID}$ e $\overline{HG} = \overline{HN} + \overline{NG}$ por outro lado $\overline{IC} = \overline{HN} = x$ e $\overline{NG} = \overline{ID} = y$.

Logo

$$\begin{cases} \overline{DC} = \overline{IC} - \overline{ID} \Rightarrow 3 = x - y \\ \overline{HG} = \overline{HN} + \overline{NG} \Rightarrow 9 = x + y. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = 6$ e $y = 3$.

Como os triângulos são retângulos podemos adotar o teorema de Pitágoras.

$$\left(\overline{IJ}\right)^2 = \left(\overline{IC}\right)^2 + \left(\overline{JC}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{IJ}\right)^2 = (6)^2 + (3)^2 \Rightarrow \overline{IJ} = \sqrt{36+9} \Rightarrow$$

$$\overline{IJ} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Exercício 4.11 – Poste elétrico – Uma companhia de eletricidade instalou um poste num terreno plano. Para fixar bem o poste, foram presos cabos no poste, a uma altura de 1,4 metros do solo e a 2 metros de distância do poste, sendo que um dos cabos mede 2,5 metros, conforme a figura 4.9.

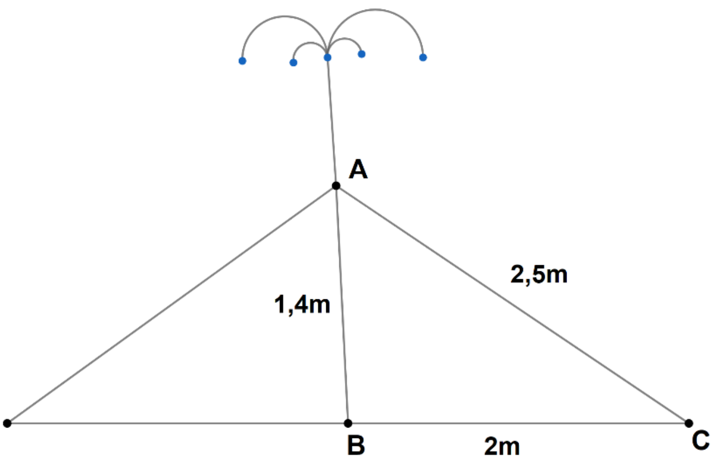

Figura 4.9 – Poste elétrico

Um professor de Matemática, após analisar as medidas, afirmou que o poste não está perpendicular ao solo. Você acha que o professor está certo? Justifique sua resposta.

Solução:

Se o poste estiver perpendicular ao solo temos um triângulo retângulo formado e vale a relação $\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{BC}\right)^2$.

Assim temos

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{BC}\right)^2 \Rightarrow (2,5)^2 = (1,4)^2 + (2)^2$$

$$\Rightarrow 6,25 = 1,96 + 4 \Rightarrow 6,25 = 5,96,$$

gerando assim um absurdo.

Portanto o poste não está perpendicular ao solo e o professor está correto.

CAPÍTULO 5 – TERNAS PITAGÓRICAS

Nesse capítulo vamos estudar as ternas pitagóricas, observaremos que existem várias ternas e que temos alguns mecanismos para achar o número de ternas e quais são elas, e que esse mecanismo é diferente para ternas pitagóricas primitivas e não primitivas. Os livros a seguir foram usados como base para o desenvolvimento desse capítulo; *Tópico de Teoria dos Números (2012) de C. G. T. A. Moreira, F. E. B. Martínez, N. C. Saldanha* e *Revista do Professor de Matemática 07 – Números Pitagóricos de A. Rothbart, B. Pausell*.

Definição 5.1: A tripla $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ chama-se terna pitagórica se, e somente se, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ forem inteiros positivos tais que $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$.

Como falado na definição, se $a, b, e\ c$ são comprimentos dos lados de um triângulo retângulo e queremos caracterizar os triângulos retângulos com lados inteiros, o problema é equivalente a encontrar todas as triplas de números inteiros (a, b, c) tais que se verifique a relação $a^2 + b^2 = c^2$. Como já foi observado anteriormente, tais triplas são denominadas ternas pitagóricas.

Observamos que podemos gerar infinitas ternas pitagóricas a partir de uma. Temos que (3, 4, 5) é uma terna pitagórica, de fato, $3^2 + 4^2 = 5^2$, e dela podemos obter várias outras ternas:

(6, 8, 10); (9, 12, 15); ...; $(3k, 4k, 5k)$ tal que $k \in \mathbb{Z}$.

As ternas listadas acimas, são do tipo não primitivas pois são obtidas da multiplicação de $(3, 4, 5)$ por um número inteiro positivo maior que 1, por outro lado $(3, 4, 5)$ são chamadas terna pitagórica primitiva, isto é, uma terna pitagórica (a, b, c) é chamada de primitiva se ele não é obtido a partir de outra multiplicando por uma constante inteira maior ou igual a 2, portanto seus termos não possuem fator comum dois a dois.

Uma observação feita por Pitágoras foi que no caso em que o cateto e a hipotenusa são inteiros consecutivos $(a, b, b + 1)$, consegue-se obter infinitas ternas pitagóricas primitivas. As ternas geradas por $(a, b, b + 1)$ são conhecidas como ternas pitagóricas clássicas de primeiro tipo, e é fácil observar que;

$$(1)\ a^2 = (b + 1)^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 2b + 1.$$

Como a^2 é um número ímpar então a também é um número ímpar, sendo,

$$(2)\ a = 2k + 1\ ;\ k \in \mathbb{N}.$$

Usando (1) e (2) temos,

$$a^2 = 2b + 1 \Rightarrow (2k+1)^2 = 2b + 1 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 2b + 1 \Rightarrow$$

$$b = 2k^2 + 2k$$

Assim,

$$c = b + 1 \Rightarrow c = 2k^2 + 2k + 1.$$

Logo

$$(a, b, c) = (2k + 1, 2k^2 + 2k, 2k^2 + 2k + 1); k \in \mathbb{Z},$$

são as famílias das ternas pitagóricas clássicas de primeiro tipo.

Por outro lado, Platão observou que no caso que a diferença de um cateto e a hipotenusa for dois $(a, b, b + 2)$, consegue-se obter uma família infinita de ternas pitagóricas. As ternas observadas por Platão são conhecidas como ternas pitagóricas clássicas de segundo tipo.

Analisando as ternas de Platão, temos;

(1) $a^2 = (b+2)^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 4b + 4 - b^2 \Rightarrow a^2 = 2(2b + 2).$

Como a^2 é um numero par então a também será um número par, sendo,

(2) $a = 2s \,;\ s \in \mathbb{N}.$

Usando (1) e (2) temos,

$$a^2 = 2(2b + 2) \Rightarrow (2s)^2 = 2(2b + 2) \Rightarrow 4s^2 = 4b + 4 \Rightarrow s^2 = b + 1.$$

Como estamos interessados somente em ternas Pitagóricas primitivas, então b não pode ser par, assim s não pode ser ímpar, logo $s = 2k \,;\ k \in \mathbb{Z}$.

Assim,

$$(a, b, c) = (4k, 4k^2 - 1, 4k^2 + 1); k \in \mathbb{Z},$$

são as famílias das ternas pitagóricas clássicas de segundo tipo.

Depois de ver as observações feitas por Pitágoras e Platão, agora iremos ver dois teoremas que geram as ternas pitagóricas primitivas e as não primitivas. Os teoremas a seguir mostram que a partir de dois números inteiros podemos obter algumas ternas.

Teorema 5.1: ***(a, b, c) é uma terna pitagórica primitiva, se e somente se, existirem inteiros positivos m e n, $m > n$, m e n primos entre si e não ambos ímpares, tais que***

$$\boldsymbol{(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2 \cdot m \cdot n, m^2 + n^2).}$$

Demonstração:

$(\Rightarrow)$

Primeiro nota-se que a e b não podem ser simultaneamente ímpares, pois supondo a e b ímpares temos,

$$a^2 = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

Logo a^2 é um número ímpar, verificasse também que

$$a^2 \equiv 1\, mod 4.$$ [5]

Analogamente temos o mesmo procedimento para b.

Logo

$$(1)\ a^2 + b^2 \equiv 2\, mod\, 4\ .$$

Por outro lado, c é um número par logo

$$(2)\ c^2 \equiv 0\, mod\, 4\ .$$

De (1) e (2) temos um absurdo pois $a^2 + b^2 = c^2$.

Assim, vamos supor que a é par e b é ímpar e consequentemente c é ímpar.

Analisando agora

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = (c + a)(c - a).$$

Como c e a não possuem fator em comum. Denotando por

$$u = \frac{c + a}{2} \quad e \quad v = \frac{c - a}{2},$$

temos

$$u + v = c \qquad e \qquad u - v = a.$$

Observe que $u\ e\ v$ não podem ter fator em comum, pois

$$x|u\ e\ x|v \Rightarrow x|(u + v)\ e\ x|(u - v) \Rightarrow x|a\ e\ x|c$$

Logo x seria fator comum de a e c, absurdo.

Fazendo,

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = (u + v)^2 - (u - v)^2 \Rightarrow b^2 = 4uv.$$

Assim, o quadrado de um número inteiro é o produto $u.v$. Porém $u\ e\ v$ não possuem fator em comum, logo cada um deles tem de ser o quadrado de um número inteiro.

Portanto

$$m^2 = u = \frac{c + a}{2}\ e\ \frac{c - a}{2} = v = n^2,$$

[5] Dizemos que $x \equiv y\ mod\ M$, se e somente se, $M|(x - y)$.

com $b = 2.m.n$, tal que $m \; e \; n$ não possuem fator comum, consequentemente u e v não possuem fator comum.

Supondo m e n ambos ímpares, tem-se que m^2 e n^2 também são números ímpares. Como $u = m^2$ e $v = n^2$, logo u e v são ímpares. Portanto

$$\begin{cases} u + v \text{ é } um\ número\ par \Rightarrow c \text{ é } par \\ u - v \text{ é } um\ numero\ par \Rightarrow a \text{ é } par \end{cases}$$ (Absurdo). Pois 2 seria um fator comum de c e a. Logo m e n não podem ser ambos ímpares.

Assim, todas as ternas pitagóricas primitivas são geradas por

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2).$$

($\Leftarrow$)

Sendo $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$.

Nota se inicialmente que

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2 \Rightarrow 0 = 0.$$

E como $m \; e \; n$ são primos entre si eles não possuem fator comum, logo $a, b \; e \; c$ também não irão possuir fator comum.

Assim, temos uma terna pitagórica primitiva.

Fazendo uma aplicação do resultado anterior;

Exercício 5.1 – Encontre as ternas pitagóricas primitivas correspondentes para cada $\boldsymbol{m \; e \; n}$, dados abaixo.

a) $\boldsymbol{m = 7}$ e $\boldsymbol{n = 2}$.

Resolução:

Sendo $m = 7$ e $n = 2$, temos que m e n segue as regra do teorema 5.1. Assim,

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2.m.n, m^2 + n^2) = (7^2 - 2^2, 2.7.2, 7^2 + 2^2) = (45,28,53).$$

b) $\boldsymbol{m = 11}$ e $\boldsymbol{n = 4}$.

Resolução:

Sendo $m = 11$ e $n = 4$, temos que m e n segue as regras do teorema 5.1. Assim,

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2.m.n, m^2 + n^2) = (11^2 - 4^2, 2.11.4, 11^2 + 4^2)$$
$$= (105,88,137).$$

Exercício 5.2 - Encontre todas as ternas pitagóricas de números $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ tais que $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{b}^2$ e $\boldsymbol{c}^2$ estão em progressão aritmética.

Resolução:

Queremos que a terna pitagórica (a, b, c) seja progressão aritmética, logo a diferença de dois termos consecutivos é constante.

Assim dado a tripla numérica (a, b, c) temos,

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = 2b^2.$$

Logo $a^2 + c^2$ e um número par então a e c possuem mesma paridade.

Assim temos,

$$r, s \in \mathbb{Z}\,;\; c = r + s \; e \; a = r - s \;\Rightarrow r = \frac{c + a}{2} \; e \; s = \frac{c - a}{2}.$$

Deste modo, substituindo;

$$2b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow 2b^2 = (r - s)^2 + (r + s)^2 \Rightarrow b^2 = r^2 + s^2.$$

Donde (r, s, b) é uma terna pitagórica, portanto existem $m \; e \; n$ inteiros tais que

$$r = m^2 - n^2;\; s = 2mn\,;\; b = m^2 + n^2.$$

Conclui-se que,

$$a = m^2 - n^2 - 2mn\,;\; b = m^2 + n^2;\; c = m^2 - c^2 + 2mn.$$

Com $m > n$ e $m + n$ ímpar, é um terna que satisfaz a propriedade.

Teorema 5.2: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ é uma terna pitagórica, se e somente se, existirem inteiros positivos $\boldsymbol{u}\; \boldsymbol{e}\; \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} > \boldsymbol{v}$, de igual paridade, tais que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ seja um quadrado perfeito e

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \left(\sqrt{\boldsymbol{uv}}, \frac{\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{2}}, \frac{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{2}} \right).$$

Demonstração:

$(\Rightarrow)$

Seja (a, b, c) uma terna pitagórica, tal que

$$u = c + b \; e \; v = c - b;$$

Temos,

$$b > -b \Rightarrow b + c > -b + c \;\Rightarrow\; u > v.$$

Como (a, b, c) é uma terna pitagórica então

$$c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow a^2 = (c + b)(c - b) \Rightarrow a^2 = u \cdot v \rightarrow a = \sqrt{u.v}.$$

De $u = c + b \; e \; v = c - b$, temos

$$c = \frac{u+v}{2} \; e \; b = \frac{u-v}{2}.$$

Logo

$$(a, b, c) = \left(\sqrt{u.v}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2} \right).$$

Ainda de

$$u = c + b \quad e \quad v = c - b;$$

Temos duas possibilidades;

$$\begin{cases} u = 2k \; ; \; k \in \mathbb{Z}, & v = 2(k - b) \\ u = 2k + 1 \; ; \; k \in \mathbb{Z}, & v = 2(k - b) + 1 \end{cases}$$

Assim, podemos notar que $u \; e \; v$ possuem mesma paridade.

(⇐)

Supondo que $u \cdot v$ é um quadrado perfeito, com $u.v = x^2$, segue que

$$a = \sqrt{u.v} \Rightarrow a = \sqrt{x^2} \Rightarrow a = x.$$

Logo a é um inteiro positivo.

Fazendo $u > v \; com \; u = 2k + 2 \; e \; v = 2k$, temos

$$b = \frac{u-c}{2} = \frac{2k+2-2k}{2} = 1 \; e \; c = \frac{u+c}{2} = \frac{2k+2+2k}{2} = 2k + 1.$$

Logo $a \; e \; b$ são números inteiros positivos.

Fazendo agora $u > v \; com \; u = 2k + 3 \; e \; v = 2k + 1$,temos

$$b = \frac{u-v}{2} = \frac{2k+3-2k-1}{2} = 1 \; e \; c = \frac{u+v}{2} = \frac{2k+3+2k+1}{2} = 2k + 2.$$

Logo $a \; e \; b$ são números inteiros positivos.

Analisando agora

$$a^2 + b^2 = \left(\sqrt{u.v} \right)^2 + \left(\frac{u-v}{2} \right)^2 = \frac{4.u.v + u^2 - 2.u.v + v^2}{4} =$$

$$\frac{u^2 + 2.u.v + v^2}{4} = \left(\frac{u+v}{2} \right)^2 = c^2.$$

Fazendo a aplicação da fórmula.

Exercício 5.3 – Encontre as ternas pitagóricas correspondentes para cada u e v dados abaixo.

a) $\boldsymbol{u = 25}$ **e** $\boldsymbol{v = 9.}$

Resolução:

Podemos adotar o teorema 5.2 para $u = 25$ e $v = 9$.

Assim,

$$(a, b, c) = \left(\sqrt{25.9}, \frac{25 - 9}{2}, \frac{25 + 9}{2}\right) = (15,8,17)\ .$$

b) $\boldsymbol{u = 40}$ **e** $\boldsymbol{v = 10.}$

Resolução:

Podemos adotar o teorema 5.2 para $u = 40$ e $v = 10$.

Assim,

$$(a, b, c) = \left(\sqrt{40.10}, \frac{40 - 10}{2}, \frac{40 + 10}{2}\right) = (20,15,25).$$

Exercício 5.4 - Determine todas as ternas pitagóricas que tem $\boldsymbol{a = 12.}$

Solução:

$$a^2 = 144.$$

Fatorando a^2 de todos os modos possíveis, como produto de u e v com mesma paridade e $u > v$.

Sendo assim, ficamos com

$$a^2 = 144 = 72.2 = 36.4 = 24.6 = 18.8$$

Logo;

u	**v**	**B**	**c**
72	2	35	37
36	4	16	20
24	6	9	15
18	8	5	13

Assim, temos as ternas pitagóricas,

$$(12,35,37);\ (12,16,20);\ (12,9,15);\ (12,5,13).$$

Exercício 5.5 – Determine todas as ternas pitagóricas que tem $\boldsymbol{a = 14.}$

Solução:

$$a^2 = 196.$$

Fatorando a^2 de todos os modos possíveis, como produto de $u\ e\ v$ com mesma paridade e $u > v$.

Sendo assim, ficamos com

$$a^2 = 196 = 98.2\,.$$

Temos assim apenas $u = 98 \; e \; v = 2$. Logo $b = 48 \; e \; c = 50$. Sendo a única terna pitagórica $(14{,}48{,}50)$.

Agora que já sabemos obter ternas pitagóricas primitivas e não primitivas a partir de dois números inteiros. Vamos aprender a calcular o número de ternas pitagóricas dado um dos termos. Novamente notaremos que há diferença de cálculo para ternas pitagóricas primitivas e não primitivas.

Primeiramente vamos aprender a calcular o número de ternas pitagóricas primitivas, dado um termo M ímpar e posteriormente par.

Teorema 5.3 – Sendo $\boldsymbol{M = p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k}}$; $\boldsymbol{M \epsilon \mathbb{N}}$ ímpar, então existem $\boldsymbol{2^{k-1}}$ triângulos pitagóricos primitivos com $\boldsymbol{M}$ sendo usado como um dos catetos.

Demonstração:

Sendo M ímpar e usando o Teorema 5.1, podemos adotar

$M = m^2 - n^2 = (m + n).(m - n)$;

Sendo $m \; e \; n$ inteiros positivos, $m > n$, $m \; e \; n$ primos entre si e não ambos ímpares.

Considerando $u = m + n \; e \; v = m - n$, nota se que u e v são primos entre si.

Assim sendo;

$$M = m^2 - n^2 = (m + n).(m - n) = u.v = p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3} \ldots p_k^{l_k}$$

Temos que os fatores primos de M formam u e v porém,

$$p_k^{l_k} \epsilon \, u \qquad ou \qquad p_k^{l_k} \epsilon \, v,$$

pois,

$$p_k^{l_k} \epsilon \, u \; e \; p_k^{l_k} \; \epsilon \, v \; \Rightarrow \; p_k^{l_k} \text{ é } fator \; comunm \; de \; u \; e \; v \; .$$

Assim, para contarmos o número de triângulos pitagóricos primitivos formados por M ímpar, basta, calcular a combinação de cada fator primo de M em relação a $u \; e \; v$.

Logo cada

$$p_k^{l_k} \; tem \; duas \; possibilidades \; de \; escolha \; (u \; ou \; v).$$

Assim, o número de possibilidades é;

$$2^k; \, k \text{ é } o \text{ número } de \; fatores \; primos \; em \; M.$$

Porém temos que levar em consideração que $u > v$, portanto;

$$\frac{2^k}{2} = 2^{k-1}\ ; k \text{ é } o\ número\ de\ fatores\ primos\ de\ M.$$

Exercício 5.6 – Determine todas as ternas pitagóricas primitivas que tem $M = 15$.

Solução:

Primeiramente vamos adotar a fórmula do teorema 5.3.

Logo

$$M = 15 = 3^1 \cdot 5^1 \Rightarrow k = 2.$$

Assim, teremos

$$2^{k-1} = 2^{2-1} = 2^1.$$

Tendo assim 2 triângulos primitivos pitagóricos.

Utilizando o teorema 5.1, vamos descobrir os dois triângulos pitagóricos primitivos.

Sendo

$$M = 15 = 5 \cdot 3 = 15 \cdot 1 = (m+n) \cdot (m-n).$$

Temos

- $5 = (m+n)\ e\ 3 = (m-n)$, resolvendo, temos $m = 4\ e\ n = 1$.

Portanto a terna é (15,8,16).

- $15 = (m+n)\ e\ 1 = (m-n)$, resolvendo, temos $m = 7\ e\ n = 6$.

Portanto a terna é (15,112,113).

Teorema 5.4 – Sendo M um número par com $M = 2^{l_1}.p_1^{l_2}.p_2^{l_3}.p_3^{l_4}\ldots p_k^{l_k}$; $M \in \mathbb{N}$, então, existem 2^{k-1} triângulos pitagóricos primitivos com M sendo usado como cateto.

Demonstração:

Sendo M par e usando o teorema 5.1, podemos adotar

$$M = 2.m.n;$$

Em que $m\ e\ n$ são inteiros positivos, $m > n$, $m\ e\ n$ primos entre si e não ambos ímpares.

Logo

$$M = 2.m.n = 2^{l_s}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k} \Rightarrow$$

$$m.n = 2^{l_s-1}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}...p_3^{l_k}$$

Do teorema 5.1, temos que $m\ e\ n$ são primos entre si e não ambos ímpares.

Logo, vamos considerar m par e n ímpar.

Assim para contarmos o número de triângulos primitivos pitagóricos formados por M par, basta, calcular a combinação de cada fator primo de M em relação à m e n.

Como m é par a parcela 2^{l_s-1} o acompanha.

Assim os fatores restantes vão ter duas possibilidades de escolha (m ou n).

Logo,

$$2^k\ possibilidades$$

Porém devemos considerar apenas os casos que $u > v$, portanto;

$$\frac{2^k}{2} = 2^{k-1}\ ;k \text{ é } o\ numero\ de\ fatores\ primos\ de\ M.$$

Exercício 5.7 – Determine todos os triângulos pitagóricos primitivos que tem $M = 60$.

Solução:

Primeiramente vamos adotar a fórmula do teorema 5.4, logo,

$$M = 60 = 2^2.3.5$$

Assim,

$$2^{k-1} = 2^{3-1} = 2^2 = 4$$

Tendo assim 4 triângulos pitagóricos primitivos.

Utilizando o teorema 5.1, vamos descobrir os quatro triângulos.

Sendo

$$M = 2.m.n \Rightarrow 60 = 2.m.n \Rightarrow 30 = m.n.$$

Logo

$$m.n = 30.1 = 15.2 = 10.3 = 6.5$$

Portanto os triângulos pitagóricos primitivos possíveis são;

$$(889{,}60{,}901);\ (221{,}60{,}229);\ (91{,}60{,}109);\ (11{,}60{,}61).$$

Agora veremos o caso de ternas pitagóricas não primitivas, dado um termo M ímpar e posteriormente par.

Teorema 5.5 – Sendo $\boldsymbol{M = p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k}}$; $\boldsymbol{M \epsilon \mathbb{N}}$ e $\boldsymbol{M}$ sendo um número ímpar, então, existem

$$\frac{\boldsymbol{(2l_1+1).(2l_2+1).(2l_3+1)\ldots.(2l_k+1)-1}}{\boldsymbol{2}};$$

triângulos pitagóricos com $\boldsymbol{M}$ usando em um dos catetos.

Demonstração:

Assim sendo M um número ímpar e usando o teorema 6.2, temos;

$$M = p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k} = \sqrt{u.v} \Rightarrow p_1^{l^1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k} = \sqrt{u.v}\ .$$

Fazendo;

$$\left(p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k}\right)^2 = \left(\sqrt{u.v}\right)^2 \Rightarrow$$

$$p_1^{2l_1}.p_2^{2l_2}.p_3^{2l_3}\ldots p_k^{2l_k} = u.v.$$

Assim, nota se que $u \cdot v$ são formados pelos fatores primos de M.

Logo cada $p_k^{2l_k} \epsilon\ u$ ou/e $p_k^{2l_k} \epsilon\ v$, pois agora u e v pode possuir fator primo em comum.

Portanto cada fator primo pode ser distribuído como na tabela a seguir;

$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{v}$
$p_k^{2l_k}$	p_k^0
$p_k^{2l_k-1}$	p_k^1
$p_k^{2l_k-2}$	p_k^2
$p_k^{2l_k-3}$	p_k^3
$\vdots$	$\vdots$
p_k^2	$p_k^{2l_k-2}$
p_k^1	$p_k^{2l_k-1}$
p_k^0	$p_k^{2l_k}$

Logo podemos observar que cada fator tem

$$2l_k + 1;$$

opções para ocupar u e/ou v.

Assim, para fazer a contagem de $u\ e\ v$, basta, analisar a distribuição dos fatores primos.

Sendo M, tal que M possui k fatores primos, a contagem da distribuição dos fatores primos, se dá;

$$(1) \quad (2l_1 + 1).(2l_2 + 1).(2l_3 + 1)\ldots(2l_{k-1} + 1).(2l_k + 1)$$

Porém em (1) temos que considerar apenas os casos em que $u > v$, logo devemos retirar $u = v$;

$$(2) \quad (2l_1 + 1).(2l_2 + 1).(2l_3 + 1)\ldots(2l_{k-1} + 1).(2l_k + 1) - 1\,.$$

E de (2) agora retiramos os casos em que $v > u$;

$$(3) \quad \frac{(2l_1+1).(2l_2+1).(2l_3+1)\ldots(2l_{k-1}+1).(2l_k+1)-1}{2}\;;$$

Assim, em (3) temos apenas os casos $u > v$.

Portanto sendo M um número ímpar, o número de triângulos pitagóricos utilizando M como um dos catetos é dado, por;

$$\frac{(2l_1 + 1).(2l_2 + 1).(2l_3 + 1)\ldots(2l_{k-1} + 1).(2l_k + 1) - 1}{2}.$$

Exercício 5.8 – Determine todos os triângulos pitagóricos que contém um cateto igual a 45.

Solução:

Primeiramente adotando o teorema 5.5, e sendo $M = 45 = 3^2.5$, temos

$$\frac{(2l_1 + 1).(2l_2 + 1) - 1}{2} = \frac{(2.2 + 1).(2.1 + 1) - 1}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Portanto teremos 7 triângulos pitagóricos.

Usando agora o teorema 5.2, vamos descobrir os sete triângulos. Sendo;

$$M = 45 \Rightarrow M = \sqrt{u.v} \Rightarrow 45 = \sqrt{u.v} \Rightarrow 2025 = u.v.$$

Achando os possíveis valores para u e v e já achando os valores de b e c, temos;

u	v	b	c
2025	1	1012	1013
675	3	336	339
405	5	200	205
225	9	108	117
135	15	60	75
81	25	28	53
75	27	24	51

Logo os triângulos são;

$$(45,1012,1013);\ (45,336,339);\ (45,200,205);\ (45,108,117);$$

$$(45,60,75);\ (45,28,53)\,e\ (45,24,51).$$

Teorema 5.6 - Sendo M um número par com $M = 2^{\alpha}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\dots p_k^{l_k}$; $M \in \mathbb{N}$, então, existem

$$\frac{(2\alpha-1).(2l_1+1).(2l_2+1).(2l_3+1)\dots(2l_{k-1}+1).(2l_k+1)-1}{2}$$

triângulos pitagóricos com M usado como um dos catetos.

Demonstração:

Assim sendo M um número par e usando o teorema 5.2, temos

$$M = 2^{\alpha}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\dots p_k^{l_k} = \sqrt{u.v} \Rightarrow$$

$$2^{\alpha}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\dots p_k^{l_k} = \sqrt{u.v}\,.$$

Fazendo;

$$\left(2^{\alpha}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\dots p_k^{l_k}\right)^2 = \left(\sqrt{u.v}\right)^2 \Rightarrow$$

$$2^{2\alpha}.p_1^{2l_1}.p_2^{2l_2}.p_3^{2l_3}\dots p_k^{2l_k} = u.v\,.$$

Assim, nota-se que $u.v$ são formados pelos fatores de primos de M.

Logo cada;

$p_k^{2l_k} \in u$ ou/e $p_k^{2l_k} \in v$, pois u e v podem possuir fator comum. Porém u e v possuem mesma paridade logo u e v são números pares dado que M é par.

Portanto a distribuição de $2^{\alpha}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\dots p_k^{l_k}$entre u e v, fica como na tabela;

$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{v}$
$2^{2\alpha-1}\ p_k^{2l_k}$	$2^1 \mathrm{p}_\mathrm{k}^0$
$2^{2\alpha-2} p_k^{2l_k-1}$	$2^2 \mathrm{p}_\mathrm{k}^1$
$2^{2\alpha-3}\ p_k^{2l_k-2}$	$2^3 \mathrm{p}_\mathrm{k}^2$
$\vdots$	$\vdots$
$2^3 p_k^2$	$2^{2\alpha-3} p_k^{2l_k-2}$
$2^2 p_k^1$	$2^{2\alpha} p_k^{2l_k-1}$
$2^1 p_k^0$	$2^{2\alpha-1} p_k^{2l_k}$

Logo podemos observar que cada fator primo tem;

$$2l_k + 1,$$

opções para ocupar u e v e também temos que a distribuição do $2^{2\alpha}$, é dado;

$$2\alpha + 1.$$

Assim, para fazer a contagem de $u \; e \; v$, basta analisar a distribuição dos fatores primos e do fator 2.

Sendo M, tal que M possui k fatores primos, a contagem da distribuição dos fatores primos, se dá;

(1) $(2\alpha - 1).(2l_1 + 1).(2l_2 + 1).(2l_3 + 1).\cdots.(2l_{k-1} + 1).(2l_k + 1)$.

Porém em (1) devemos considerar apenas os casos que $u > v$. Retirando $u = v \; e \; v > u$, temos

(2) $\frac{(2\alpha-1).(2l_1+1).(2l_2+1).(2l_3+1)...(2l_{k-1}+1).(2l_k+1)-1}{2}$

Em (2) temos apenas os casos $u > v$.

Portanto sendo M um número par o número de triângulos pitagórico utilizando M como um dos catetos é dado por,

$$\frac{(2\alpha - 1).(2l_1 + 1).(2l_2 + 1).(2l_3 + 1) \dots (2l_{k-1} + 1).(2l_k + 1) - 1}{2}$$

Exercício 5.9 – Determine todos os triângulos pitagóricos que contém um cateto igual a 20.

Solução:

Primeiramente adotando o teorema 5.6, temos $M = 20 = 2^2.5$. Assim,

$$\frac{(2\alpha - 1).(2l_1 + 1) - 1}{2} = \frac{(2.2 - 1).(2.1 + 1) - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Logo teremos quatro triângulos pitagóricos.

Usando agora o teorema 5.2, vamos descobrir os quatros triângulos. Sendo;

$$M = 20 \Rightarrow M = \sqrt{u.v} \Rightarrow 20 = \sqrt{u.v} \Rightarrow 400 = u.v.$$

Achando os possíveis valores para $u \; e \; v$ e já achando os valores de $b \; e \; c$, temos;

u	v	b	c
200	2	99	101
100	4	48	52
50	8	21	29
40	10	15	25

Logo os triângulos pitagóricos procurados são;

$$(20,99,101); \quad (20,48,52); \quad (20,21,29); \quad (20,15,25).$$

CAPÍTULO 6 – ATIVIDADE DIDÁTICA

Atividade 1

O teorema de Pitágoras é um conteúdo ministrado no nono ano do ensino fundamental. O teorema na maioria das vezes é entendido pelos alunos apenas como uma relação entre lados de um triângulo retângulo e se esquece a informação de que as áreas das figuras construídas sobre os lados do triângulo também possuem uma relação.

Sendo assim, foi desenvolvida uma atividade para verificar se os alunos possuíam esse entendimento das relações entre as áreas das figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo.

A atividade proposta abaixo foi desenvolvida na Escola Estadual Luiz Lopes, localizada na cidade de Três Lagoas/MS. Foi trabalhado com alunos do terceiro ano do ensino médio, pois trata-se de uma sala com bastante alunos interessados pela matemática e que se dispuseram a aprender um conteúdo além do programático ao longo do ano. A sala possui uma lista de 39 alunos matriculados, porém tem uma frequência em média de 25 alunos. No dia que desenvolvi a atividade estavam presentes 20 alunos.

Desenvolvimento da atividade.

Duração da atividade 100 minutos (duas aulas).

Inicialmente enunciei a teorema de Pitágoras, como é apresentado na maioria das vezes;

"O teorema de Pitágoras diz que o quadrado da hipotenusa (a) é igual à soma dos quadrados dos catetos $(b\ e\ c)$, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$."

A partir desse enunciado desenvolvi as ideias que os alunos traziam do teorema. A partir das falas dos alunos já se podia ter ideia de que o conhecimento da sala era no sentido algébrico do teorema, todos tinham a afirmação "hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos" gravada na memória. Assim propus a eles uma atividade teste envolvendo o teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE TESTE - A atividade trás 5 exercícios o quais dois deles exigem aplicação direta em lados de um triângulo retângulo, e os outros três traz a relação entra as áreas das figuras. Segue abaixo o enunciado das questões usadas na atividade.

Atividade Teste

Exercícios;

1- Dado o triângulo ABC, retângulo em B, calcule o valor do segmento $\overline{AC}$, sabendo que $\overline{AB} = 15cm \; e \; \overline{BC} = 20cm$.

2- A partir da figura abaixo;

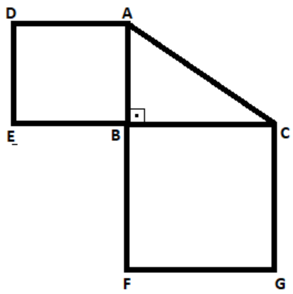

Figura 6.1 – Atividade 2.

Sabendo que $ABED$ e $BCGF$ são quadrados e que a área de $ABED = 784cm^2 \; e \; de \; BCGF = 2025cm^2$ .Calcule o comprimento de $\overline{AC}$.

3- Do topo de uma torre, três cabos de aço estão ligados à superfície por meio de ganchos, dando sustentabilidade à torre. Sabendo que a medida de cada cabo é de 29 metros e que a distância dos ganchos até à base da torre é de 20 metros, determine a medida de sua altura.

4- Tendo a junção de três quadriláteros, como mostra abaixo;

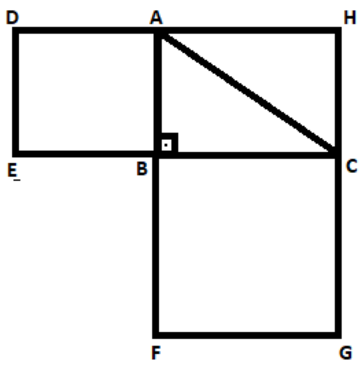

Figura 6.2 – Atividade 4.

Sabendo que $ABED$ e $BCGF$ são quadrados, e que a área de $BCGF = 256m^2 \; e \; AC = 20m$. Calcule o valor da área de $ABED$.

5- Considere um triângulo retângulo. Sobre seus lados são construídas três semicircunferências tendo os lados do triângulo como diâmetro. Mostre que vale a relações das áreas; $P = M + N$. Como na figura abaixo.

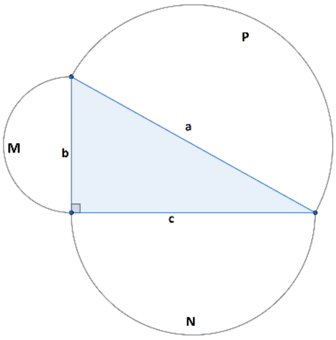

Figura 6.3 – Atividade 5.

Sabendo que $a = 5, b = 3\ e\ c = 4$. (Adote $\pi = 3$)

Após aplicação da atividade fiz a correção.

Na correção da atividade tivemos um grande índice de acerto nas questões 1 e 3, enquanto que as questões 2 e 4 o índice de acerto foi baixo e a questão 5 foi zero. Como se nota no gráfico abaixo.

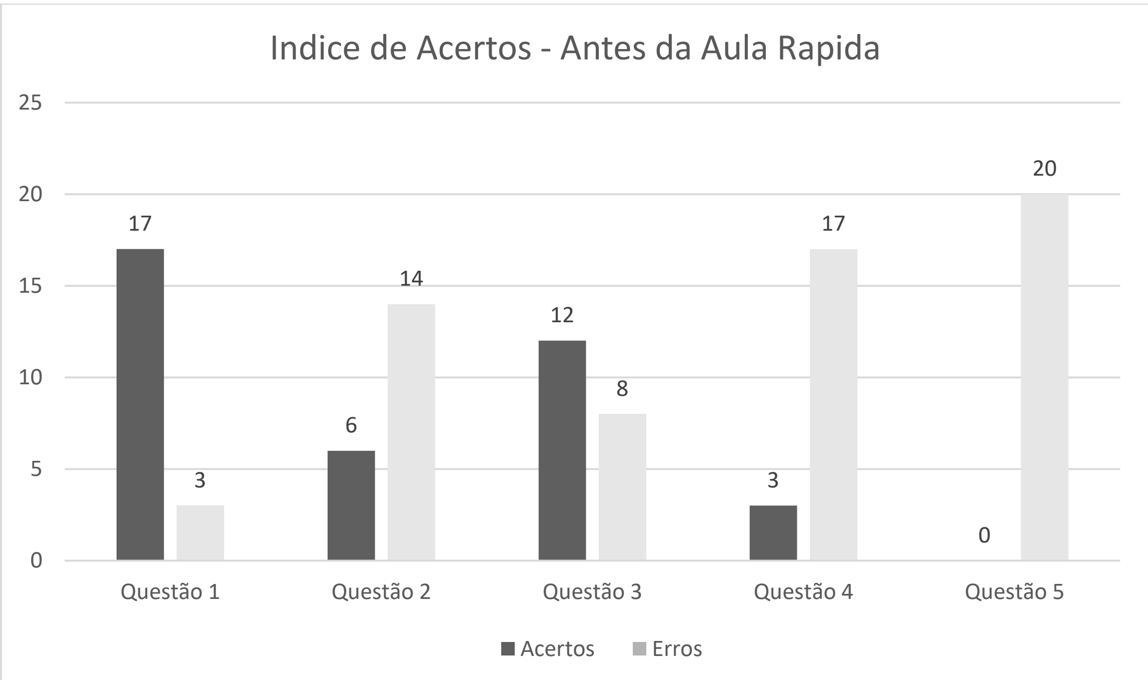

Gráfico 6.1 – Antes da Aula Rápida.

A partir desse resultado, foi dada uma atenção maior a questão cinco do teste. Muitos alunos consideram a questão cinco como não sendo relacionada ao teorema de Pitágoras e por isso a maioria dos alunos a deixou em branco e alguns apenas calcularam as áreas dos círculos. Tendo em consideração que a questão cinco é que mais relaciona o teorema de Pitágoras com a áreas de figuras construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, podemos notar que os alunos têm dificuldade de "enxergar" essa relação.

Assim foi desenvolvida uma aula que visou deixar claro essa relação.

Aula Rápida

Iniciei enunciando o teorema de Pitágoras;

"O teorema de Pitágoras diz que o quadrado da hipotenusa (a) é igual à soma dos quadrados dos catetos $(b\ e\ c)$, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$."

E coloque o desenho de "Perigal" sem os cortes, na lousa;

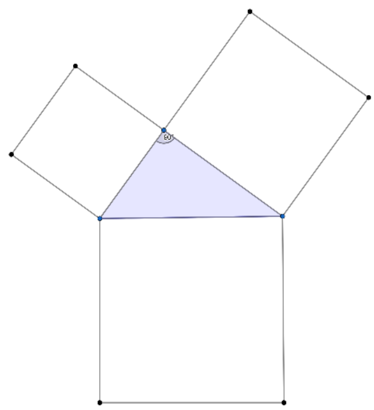

Figura 6.4 – Esboço Perigal.

A partir do enunciado e do desenho de Perigal, expliquei aos alunos a relação entra a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ e áreas das figuras localizada sobre os lados dos triângulos e fui além deixei claro para eles sobre o conceito da generalização do teorema de Pitágoras, exposto nessa dissertação, pg. 35.

Segue uma imagem do trabalho em sala de aula.

Figura 6.5 – Atividade em sala

Para fixar esse entendimento dos alunos sobre a relação, foi proposta uma atividade lúdica onde os alunos recortavam da folha o esboço de Perigal e faziam o encaixe das figuras, como as ilustrações abaixo:

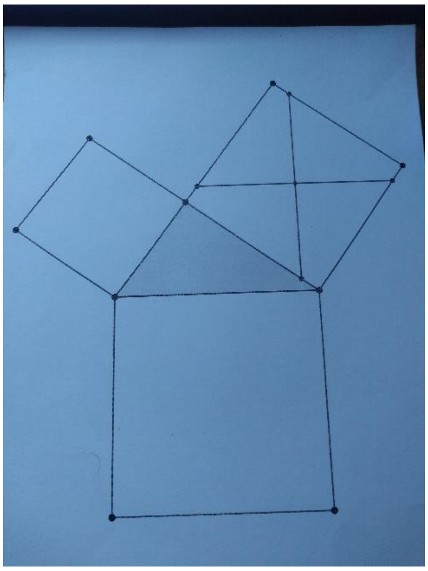

Figura 6.5.1 – Cortes na folha 1

Numa folha de papel cartão temos o desenho de Perigal com os cortes no quadrado construído sobre o cateto maior.

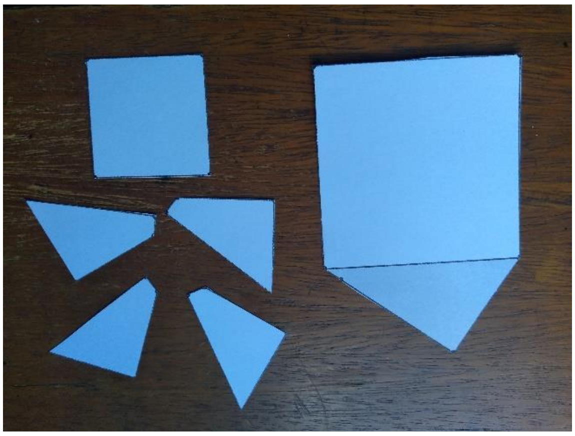

Figura 6.5.2 – Cortes na folha 2

A partir dos traços são recortados os quadrados construídos sobre os dois catetos e além disso recorta-se o quadrado construído sobre o cateto maior seguindo os traços.

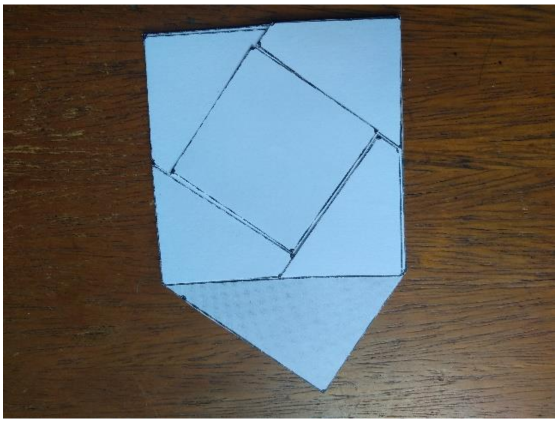

Figura 6.5.3 – Cortes na folha 3

Por fim é feito o encaixe das 5 peças no quadrado construído sobre a hipotenusa.

Na figura 6.6 temos os cortes feitos para a atividade e no fim dessa dissertação tem-se o apêndice ensinando como fazer os cortes no Geogebra.

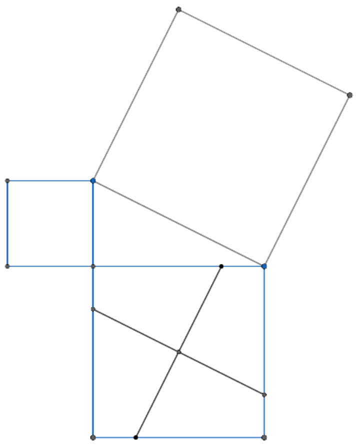

Figura 6.6 – Cortes da atividade.

Com a explicação e atividade lúdica procurei deixar claro aos alunos a relação que podemos fazer com o teorema de Pitágoras e a áreas de figuras construídas sobre seus lados.

Após o término da Aula Rápida, reapliquei a atividade teste aos alunos.

O gráfico abaixo mostra a evolução no teste;

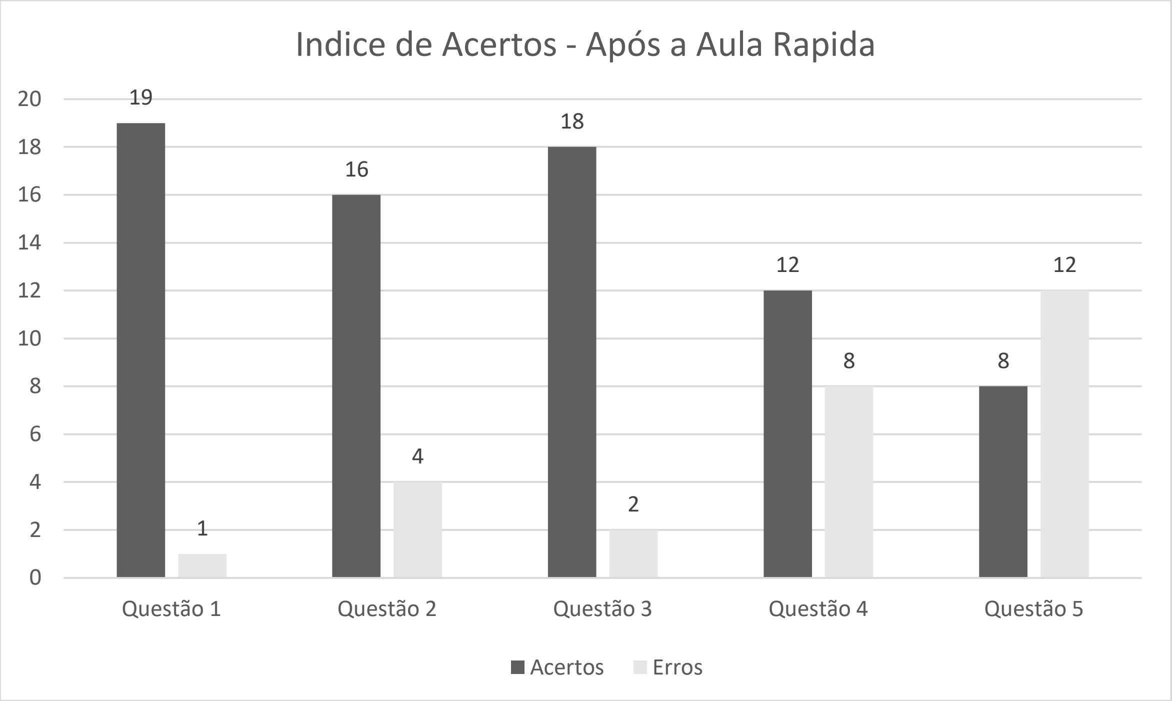

Gráfico 6.1 – Antes da Aula Rápida

Observou-se a partir dos resultados da nova aplicação que os alunos compreenderam a relação e conseguiram fazer uso dela. E a questão cinco que havia sido considerada como não sendo de Pitágoras agora foi solucionada por oito alunos, segue abaixo alguns exemplos de resposta da questão cinco.

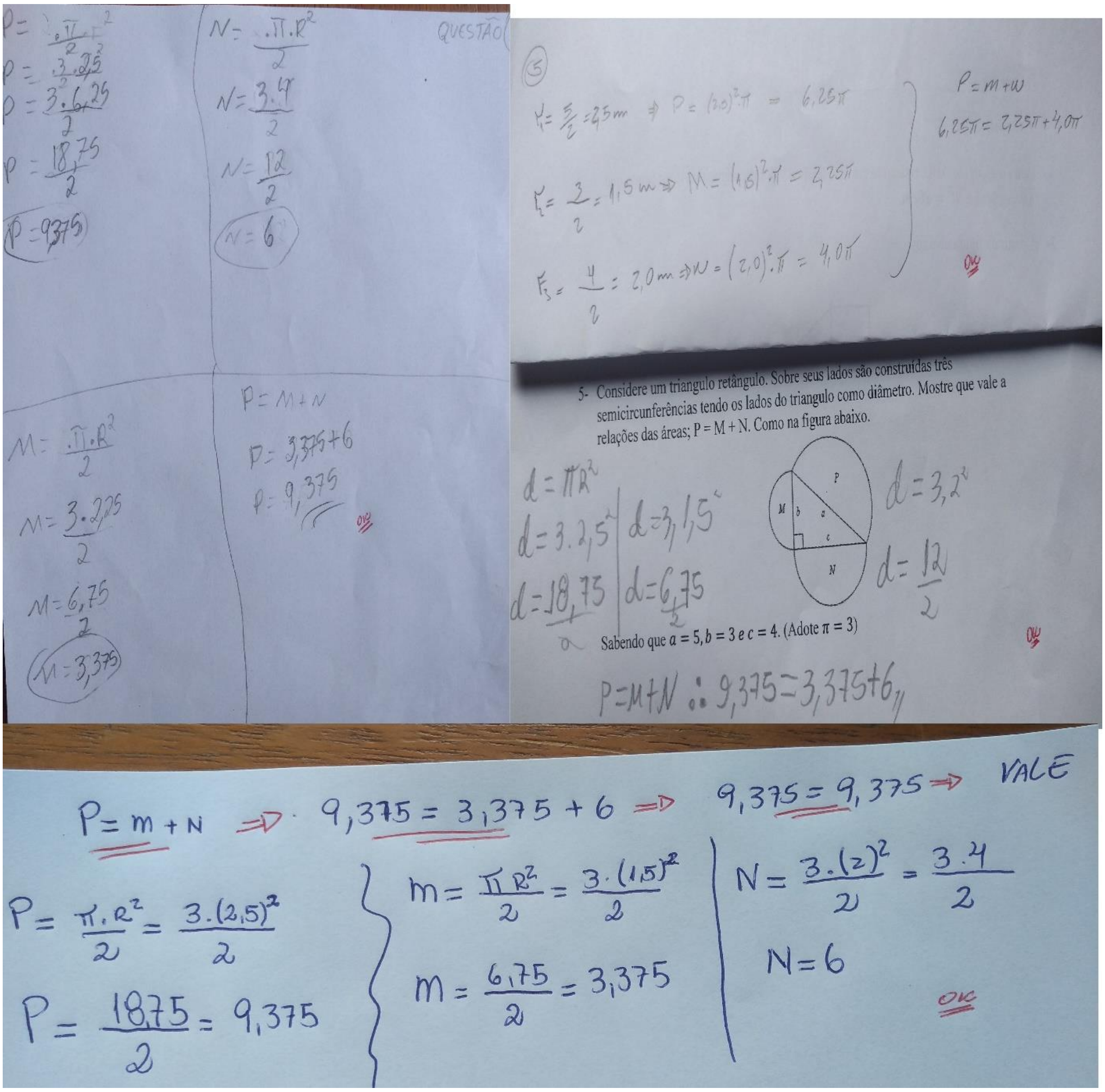

Figura 6.7 – Resposta da questão cinco

Assim, pode se concluir que os alunos têm o entendimento do teorema de Pitágoras com relação aos lados do triângulo, porém com a área das figuras formadas sobre os lados desse triângulo já não é tão familiar a eles. Durante a aula pude observar também que quando apresentado a eles a relação das áreas com o teorema de Pitágoras, ficou mais claro o surgimento da fórmula;

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Atividade 2

A atividade dois traz o uso das ternas pitagóricas mesclado com a construção de triangulo retângulo usando régua e compasso. Por ser uma atividade mais lúdica, pode desenvolver um maior interesse do aluno, além de fixação o conteúdo.

Desenvolvimento da atividade:

Primeiramente seria enunciado e explicado aos alunos o teorema de Pitágoras. Posteriormente com os alunos enunciaríamos o teorema 5.2 e resolver o exemplo 5.2, que se encontram no capítulo 5.

E por fim como teste para checar o entendimento dos alunos sobre o tema, seria passada a questão;

Questão teste: Usando régua e compasso, construa um segmento de $\sqrt{51}$.

Solução:

1. Escreva $n = 51$ como produto de $u\ e\ v$, temos abaixo as opções em que $u > v$;

$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{v}$
17	3
51	1

2. Adotando o caso em que $u\ e\ v$ tem mesma paridade; $u = 17\ e\ v = 3$, logo;

$$\frac{u-v}{2} = 7\ e\ \frac{u+v}{2} = 10\ , assim\ b = 7\ e\ c = 10.$$

3. Usando régua e compasso, construa duas retas perpendiculares $l_1\ e\ l_2$. Chame B o ponto de intersecção das retas.
4. Sobre o ponto B, marcamos com régua e compasso a distância de 7 sobre a reta $l_{1.}$ Obtendo assim o ponto C.
5. No ponto C, com o compasso com abertura em 10, desenhasse um arco e chamamos de A o ponto de intersecção entre o arco e a reta $l_{2.}$
6. A partir desses três pontos temos o triângulo ABC, retângulo em B. Sendo $\overline{BA}$ a o seguimento procurado.
   Provando que $\overline{BA} = \sqrt{51}$;
   Como ABC é um triângulo retângulo, podemos utilizar o teorema de Pitágoras. Logo

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{CB}\right)^2 + \left(\overline{BA}\right)^2 \Rightarrow (10)^2 = (7)^2 + \left(\overline{BA}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{BA}\right)^2 = 100 - 49 \Rightarrow$$

$$\left(\overline{BA}\right) = \sqrt{51}.$$

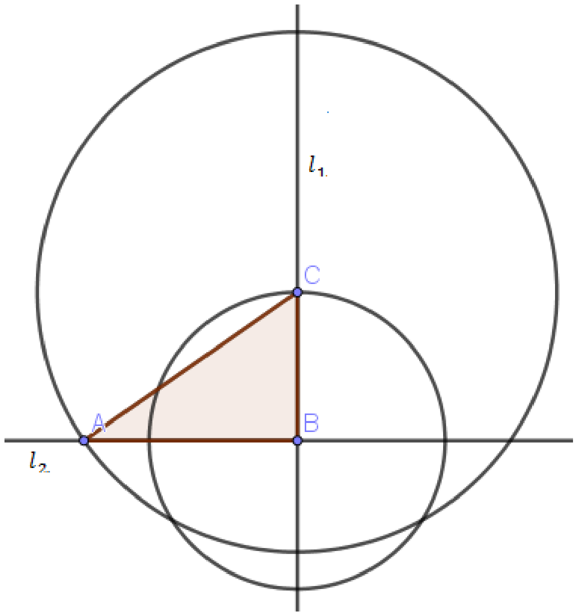

Figura 6.8 – Construção com régua e compasso de $\sqrt[2]{51}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos neste trabalho que por volta de mil anos antes de Pitágoras, a civilização mesopotâmia já tinha conhecimento da relação que posteriormente foi conhecida como teorema de Pitágoras. Esta relação aparece em diversos problemas encontrados em papiros na civilização egípcia e nos chamados sulbasutras na civilização hindu. Além disso, os hindus já demonstravam o conhecimento dessa relação na construção de altares.

Nota-se que o teorema de Pitágoras possui inúmeras demonstrações. Algumas foram expostas aqui, porém existem mais centenas de demonstração as quais podem ser encontradas no livro *The Pythagoran Proposition - (1940) de E.S. Loomis*. As aplicações do teorema de Pitágoras também são inúmeras, podendo encontrar exercícios nas diferentes áreas da matemática. Fato esse que demonstra a importância e relevância que esse teorema trouxe para a matemática.

Observou-se a existência de infinitas ternas pitagóricas, e que para essa imensidão de ternas podemos utilizar mecanismos para calcular o número de ternas com um cateto dado e quais são as ternas formadas por esse cateto.

Nota-se que apesar de toda a importância do teorema de Pitágoras, alguns professores não relacionam o teorema com as áreas das figuras formadas sobre os lados do triângulo, fato esse que deixa o teorema vago e acaba que dificultando o entendimento do mesmo. Na atividade didática ficou claro que muitos alunos não têm esse entendimento da relação das áreas das figuras com o teorema, levando alguns alunos resolverem apenas as questões que falavam dos lados dos triângulos. Após a demonstração de Perigal, a relação entre o teorema e as áreas ficou mais clara, o que se pode notar na reaplicação da atividade teste.

Por fim, após essa pesquisa sobre o teorema de Pitágoras, observa-se que o teorema é um dos conteúdos mais importantes da matemática tendo sua aplicação utilizada ao longo de vários anos até o hoje. Notou-se também que o teorema é bastante conhecido pelos estudantes e ex-estudantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, A; **Episódios da História Antiga da Matemática**. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM. Rio de Janeiro, 1984.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática, SBM. Rio de Janeiro, 2012.

BICUDO, I. **Os Elementos, Euclides**. 1 ed. 2009.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

CINTRA, C. A. CINTRA, R. J. S. **O Teorema de Pitágoras**. Editoração Eletrônica (Latex), 2003.

DANTE, L. R. Projeto Teláris: **Matemática - Volume 4**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2012.

DOLCE, O. POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Plana - Volume 9. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp, São Paulo, 1997.

GASPAR, M. T. J. **O teorema de Pitágoras na antiguidade: Um olhar sobre a história da matemática indiana.** RPM, v. 87, p. 2-8, 2015.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition**. Washington, National Council of Teachers of Mathematics, 1940.

MOREIRA, C. G. T. A.; MARTÍNEZ F. E. B.; SALDANHA N. C. **Tópicos de Teoria dos Números**. Rio de Janeiro, SBM, 2012

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P.; WARGNER, E.; LIMA, E. L. **Temas e Problemas Elementares**. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2005.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: CAED UFMG, 2013.

MUNIZ, A. C. N. **Geometria: Coleção PROFMAT**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM,2014.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**.1. ed. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2012.

ROSA, E. **Revista do professor de Matemática**. São Paulo, 1983, número 2.

ZANELLA, I. A.. **Geometria esférica**: **uma proposta de atividades com aplicações.** Londrina-PR, 2013. Dissertação apresentada no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT- Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2013.

APÊNDICE

Neste apêndice iremos aprender como fazer os cortes usado na Atividade 1. Lembrando que para atividade usamos a demonstração de Perigal.

Para a atividade 1, fizemos apenas os cortes sobre o quadrado construídos sobre o cateto maior pois ficava a cargo do aluno achar como encaixar os cinco quadriláteros no quadrados construído sobre a hipotenusa.

Caso não possua o GeoGebra em seu computador, acesse o site www.geogebra.org e baixe grátis e licenciado.

Agora no GeoGebra;

1- Construa um triângulo retângulo. Como o da figura A.1;

1.1- Clicando no triângulo na área de polígonos da parte de ferramentas do Geogebra, crie o triângulo que desejar. (Aconselhamos que não utilize catetos de medidas próximas).

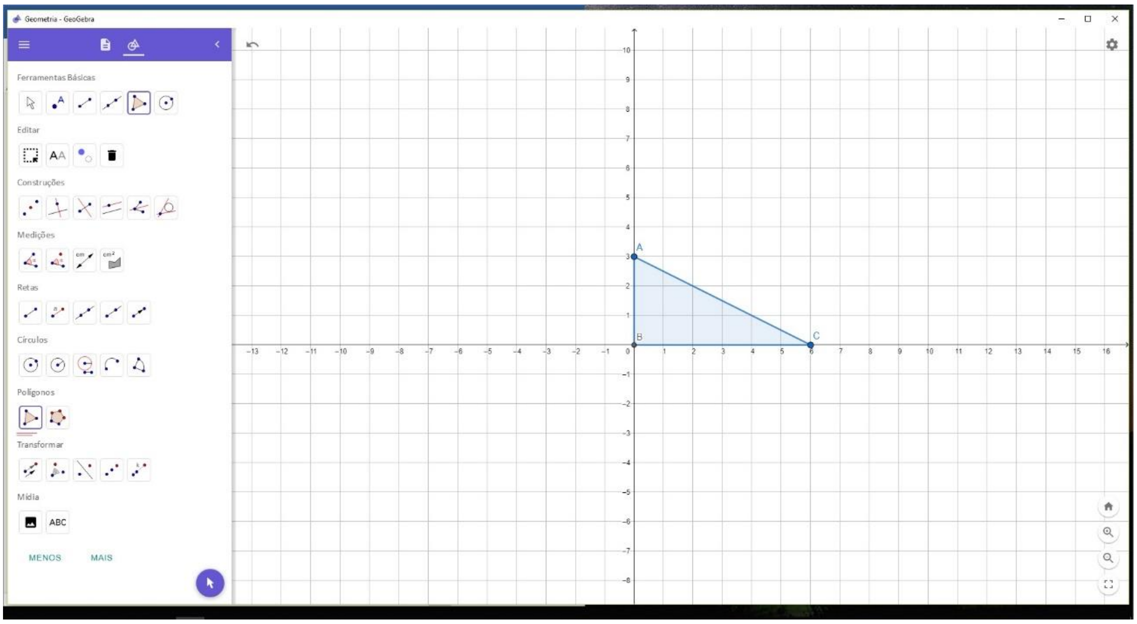

Figura A.1 – Construindo um triângulo retângulo.

2- Construa três quadrados; um sobre o cateto menor seguindo sua medida, outro sobreo cateto maior seguindo sua medida e o último sobre a hipotenusa seguindo a sua medida.

2.1-Clicando no pentágono na área de polígonos da parte de ferramentas do GeoGebra.

2.2-Sobre cada lado do triângulo, selecione ele por completo e escolha um polígono de 4 vértices.

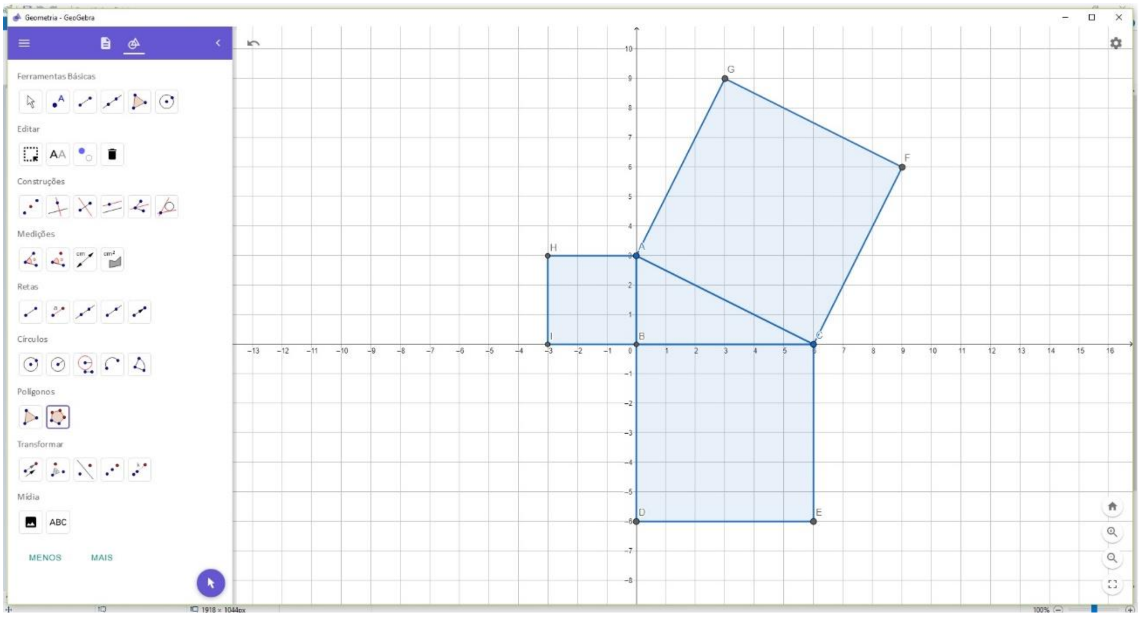

Figura A.2 – Construção de quadrados sobre os lados do triângulo retângulo.

3- No quadrado construído sobre o cateto maior, construa dois segmentos que ligue os vértices opostos desse quadrado.

3.1-Clicando no segmento na área de retas na parte de ferramentas do GeoGebra, depois ligue os dois vértices.

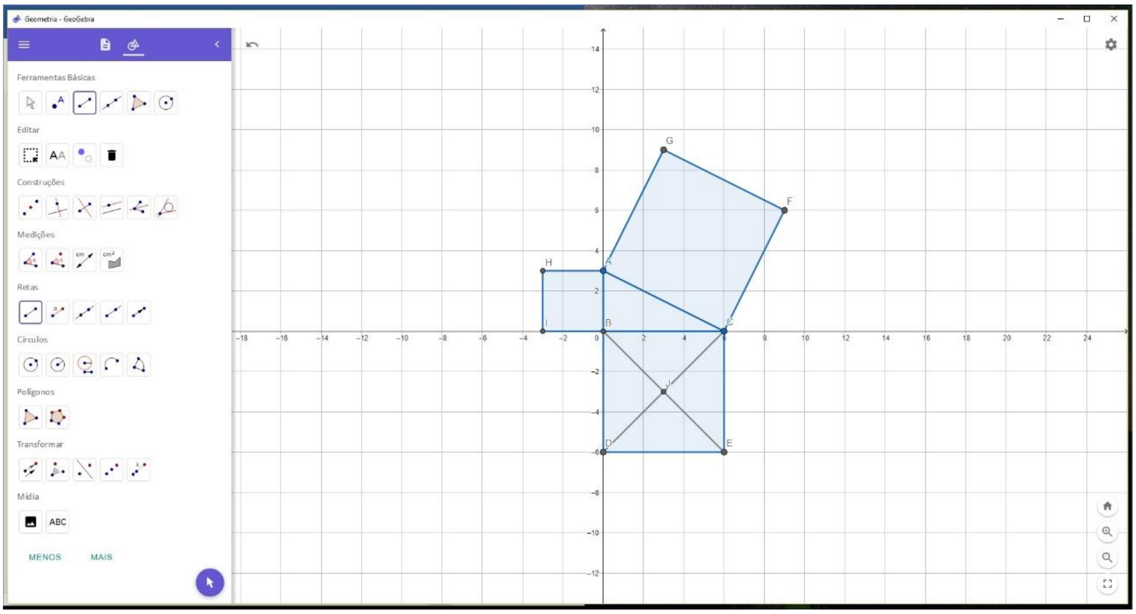

Figura A.3 – Ponto central do quadrado.

3.2-No ponto de intersecção das duas diagonais, trace um segmento paralelo a hipotenusa e outro perpendicular a hipotenusa.

3.3- Sobre essas duas retas, trace os segmentos. Como na figura A.4.

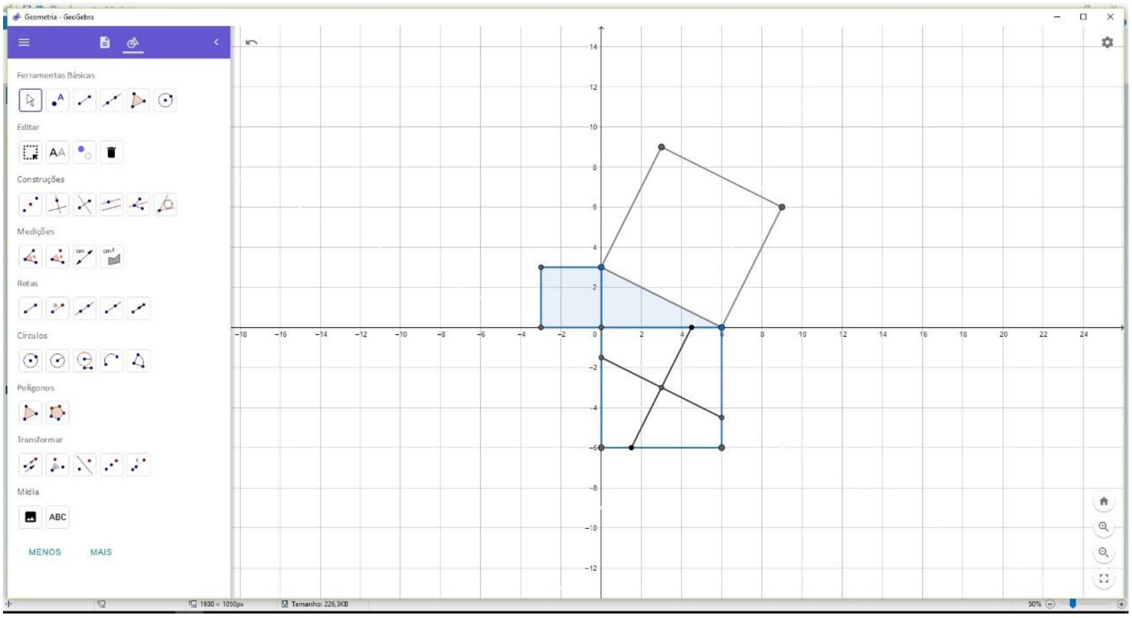

Figura A.4 – Corte de Perigal.

Para finalizar retira a malha e as linhas dos eixos. Na figura A.5 temos os cortes para atividade.

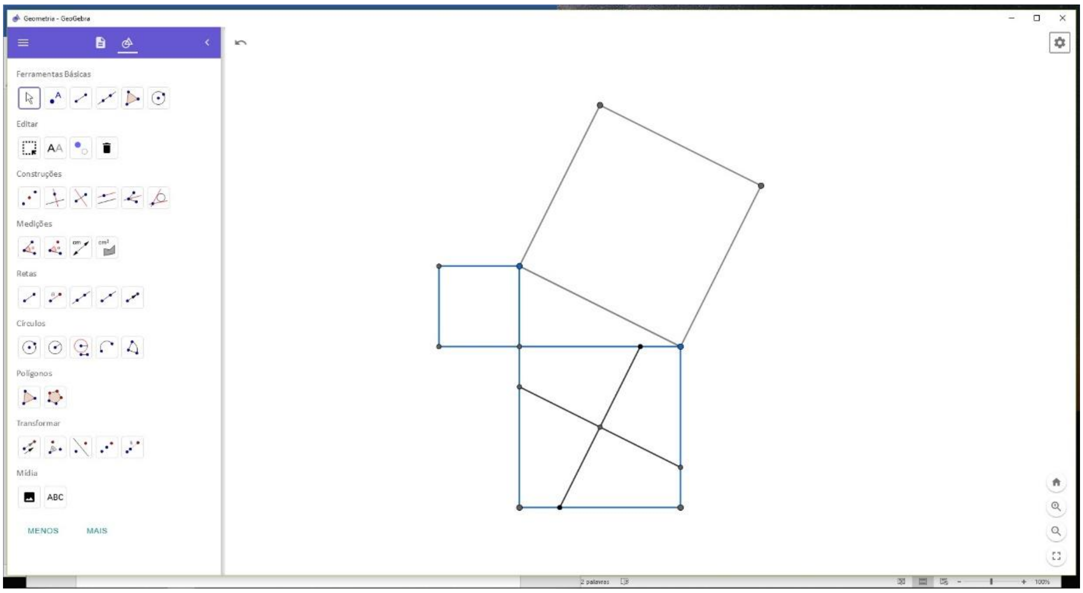

Figura A.5 – Corte para a Atividade.