**2013: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT**
**Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ**
**Sociedade Brasileira de Matemática - SBM**

# PROBABILIDADE ATRAVÉS DE JOGOS NO ENSINO BÁSICO

Kátia de Oliveira Rufino Medeiros [1]
Nilton César da Silva[2]

**Resumo:** Este trabalho apresenta uma metodologia de ensino de probabilidade através de jogos, direcionada ao ensino básico, cujo objetivo é fornecer reflexões que incentivem um aprendizado com envolvimento prazeroso, significativo e formal, capaz de possibilitar ao aluno desenvolver suas competências de enfrentar desafios e resolver problemas utilizando-se de habilidades como: experimentação, abstração e modelagem.

**Palavras-chave:** Probabilidade. Jogos. Ensino.

## 1 Introdução

O ensino de probabilidade desde o ensino fundamental constitui uma das recomendações que constam nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1999. p. 257) e é reforçada em Minas Gerais, segundo Carneiro através do CBC (Proposta curricular, 2005. p. 35) que diz:

> Provavelmente é no tratamento de dados que a matemática manifesta mais claramente a sua utilidade no cotidiano. Hoje em dia a Estatística Descritiva e a Probabilidade fazem parte do discurso jornalístico e científico cotidiano quando se trata, por exemplo, de pesquisas de intenção de voto, perfil sócio-econômico da população brasileira, as chances da cura de determinada doença ou riscos de contraí-la. Espera-se, portanto, que numa formação básica do cidadão, não apenas se adquira a capacidade de ler e analisar dados expostos em diversas formas, mas que se possa refletir criticamente sobre os seus significados e emitir juízos próprios. Por essa razão, a análise de dados é escolhida como um dos temas estruturadores da Matemática, pois proporciona uma adequada contextualização sócio-cultural, aproximando o conhecimento adquirido na Escola da realidade do aluno. Este tema é importante também por ser utilizado em quase todas as demais áreas do conhecimento, como, por exemplo, demografia, saúde, lingüística, possibilitando o desenvolvimento de várias atividades integradas dentro da escola.

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: katruf@hotmail.com
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: nsilva@ufsj.edu.br

Essa exigência ou preocupação procede, pois o ensino de probabilidade deve iniciar cedo, para que o aluno tenha tempo de desenvolver e solidificar suas percepções.

De acordo com os PCNs "quando se propõem métodos de aprendizado ativo, em que os alunos se tornem protagonistas do processo educacional, não pacientes destes, quer se ter a certeza de que o conhecimento foi de fato apropriado pelos alunos, ou mesmo elaborado por eles". Por isso a escolha de jogos como metodologia visando sequências didáticas que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio e a participação efetiva dos alunos nos experimentos. Segundo Moura [3], "o jogo será conteúdo assumido com a finalidade de desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, possibilitando ao aluno a oportunidade de estabelecer planos de ação para atingir determinados objetivos, a executar jogadas segundo este plano e a avaliar a eficácia destas jogadas nos resultados. Desta maneira, o jogo aproxima-se da matemática via desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas."

Neste trabalho constam três jogos, direcionados às turmas do ensino fundamental e médio com a finalidade de construir conceitos de probabilidade. Todos os jogos foram aplicados em sala de aula em turmas do terceiro ano e oitavo ano.

# 2 Desenvolvimento

A probabilidade desenvolveu-se a partir dos jogos de azar e mostrou-se útil em diversas áreas. Ela está presente no valor dos seguros, nos planos de saúde, nos riscos de investimentos, na confiabilidade dos produtos, nas previsões meteorológicas, no mercado financeiro e em muitas outras situações do cotidiano. Por isso, a metodologia segue a mesma linha histórica, se inicia com os jogos, que possibilitam ao aluno manipular os materiais, assimilar as regras, desenvolver suas estratégias e pensar nas melhores jogadas; e finaliza com a formalização dos conceitos probabilísticos numa linguagem matemática coerente. O professor orientador deverá acompanhar os registros, analisar os métodos utilizados, explorar as noções matemáticas presentes no jogo e direcionar os alunos para a visualização dos conceitos probabilísticos envolvidos no jogo.

## 2.1 Conceitos básicos

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos básicos em probabilidade segundo LIMA e OLIVEIRA, que serão construídos durante a aplicação dos jogos e formalizados após o entendimento de todos.

**Definição 2.1 (Experimento Determinístico)** *É o experimento que quando repetido em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos. No caso dos jogos, são aqueles que seguem padrões e encontrando o padrão se ganha sempre.*

**Definição 2.2 (Experimento Aleatório)** *É todo experimento que, quando repetido sob as mesmas condições várias vezes, produz resultados imprevisíveis. É o caso da maioria dos jogos: antes de se iniciarem as jogadas, não é possível saber com exatidão qual é o resultado.*

**Definição 2.3 (Espaço Amostral)** *Espaço Amostral* $(\Omega)$ *é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.*

[3]Encontra-se em: http: bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/hande/123456789/126

**Definição 2.4 (Evento)** *Evento(A) são todos os subconjuntos do espaço amostral. É também conhecido como evento simples. Quando coincide com o espaço amostral, é denominado evento certo. Se for vazio, será um evento impossível.*

## 2.2 Probabilidade

A probabilidade é uma medida que quantifica a incerteza de um determinado fato ou evento futuro ocorrer. Apesar da idéia de probabilidade ser bem antiga, a primeira obra conhecida sobre jogos de azar -"De Ludo Aleae- é de Jerônimo Cardano ($1501 - 1576$), sendo o primeiro a concluir que a probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual a razão entre os resultados favoráveis (evento) e o total de resultados (espaço amostral).

Mas foi Laplace que referindo-se aos elementos de A (ou eventos elementares que compõem A) como os casos favoráveis, os elementos do espaço amostral ($\Omega$) como casos possíveis que definiu:

$$\mathcal{P}(A) = \frac{A}{\Omega}$$

Segundo Laplace [4] "a teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis."Essa definição é conhecida como definição clássica de probabilidade.

**Definição 2.5** *Probabilidade é uma função $\mathcal{P}$, que associa a cada evento A e B do espaço amostral $\Omega$, um número real, pertencente ao intervalo $[0, 1]$, satisfazendo os seguintes axiomas:*

1. $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$
2. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
3. *Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então* $\mathcal{P}(A \bigcup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$.

A partir da definição de probabilidade, podemos demonstrar a seguinte proposição.

**Proposição 2.1** *Se $\Omega$ é um espaço amostral e A e B são eventos de $\Omega$ , então:*

1. $\mathcal{P}(\varnothing) = 0$, *onde* $\varnothing$ *é o conjunto vazio.*
2. *Denotando por $A^c$ o evento complementar de A, então* $\mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A)$.
3. *Se A e B forem dois eventos quisquer, então* $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \bigcap B)$.
4. *Se $A \subset B$, então* $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$

[4] Encontra-se em: Morgado et al, 1991. p.118

**Demonstração.**

1. Um evento qualquer $A \subset \Omega$ pode ser escrito como $A \cup \varnothing$ , e além disso tem-se que $A \cap \varnothing = \varnothing$, então conclui-se que são disjuntos. Como $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$, temos:

   $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cup \varnothing) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\varnothing) = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(\varnothing) = 0.$

2. Como $1 = \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(A \cup A^c) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(A^c)$, segue que $\mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A)$.

3. Sabe-se que $\mathcal{P}(A \bigcup B) = \mathcal{P}[(A - B) \bigcup B] = \mathcal{P}(A - B) + \mathcal{P}(B)$ pois $A - B$ e $B$ são mutuamente excludentes. Como $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A \bigcap B)$, resulta $\mathcal{P}(A \bigcup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \bigcap B)$.

4. Como $A \subset B$ então $A = B - A^C$ ou $B = A \bigcup A^c \Rightarrow \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \bigcup A^c) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(A^c)$, como $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$ então $\mathcal{P}(B) \geq \mathcal{P}(A)$.

$\square$

## 2.3 Adição de Eventos

A adição surge quando queremos conhecer a chance de ocorrência de um dentre dois ou mais acontecimentos, ou seja, se um evento pode ter diferentes resultados possíveis A, B, C, a possibilidade de que A ou B ocorram é igual à soma das probabilidades individuais de A e B, e a soma das probabilidades de todos os resultados possíveis (A, B e C e assim por diante) é igual a 1. De acordo com o item 3 da proposição 2.1 temos:

$$\mathcal{P}(A \bigcup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$$

## 2.4 Probabilidade Condicional

É a probabilidade de ocorrência de um evento $A$ sabendo que ocorreu um outro evento $B$, ou seja, uma vez realizado o experimento, se você tem informação da ocorrência de $B$, a probabilidade de ocorrência de $A$ muda com esta informação.

**Definição 2.6** *Dados dois eventos $A$ e $B$, a probabilidade condicional de $A$ dado que ocorreu $B$ é representada por $\mathcal{P}(A|B)$ e definida por:*

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

### 2.5 Independência de eventos

**Definição 2.7** *Dois eventos $A$ e $B$ são independentes se a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, isto é, $\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)$ ou $\mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B)$ ou ainda, a seguinte forma equivalente: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$*

Ou seja, se dois eventos possíveis, $A$ e $B$, forem independentes, a probabilidade de que $A$ e $B$ ocorram é igual ao produto de suas probabilidades individuais.

## 3 Jogos

### 3.1 Jogo do Bingo

O bingo é um jogo muito comum no mundo inteiro, composto por 75 bolas numeradas (1 até 75) que são colocadas dentro de um globo, e sorteadas uma a uma de forma aleatória e sem reposição. Cartelas com 24 números aleatórios dispostos em 5 linhas e 5 colunas onde o termo central (terceira linha e terceira coluna) é neutro. São utilizados feijões, milho ou canetas para marcar os números sorteados. Com este jogo tem-se a possibilidade de explorar os conceitos de espaço amostral, evento, probabilidade clássica e independência de eventos.

Regras:

1. Cada aluno receberá uma cartela contendo 24 números e uma caneta.
2. Sorteiam-se as bolinhas (numeradas de 1 a 75) aleatoriamente e sem reposição.
3. Os alunos vão marcando nas cartelas os números sorteados.
4. Ganha quem completar a cartela toda.

Direcionamento

Jogam-se duas partidas para entendimento das regras. Iniciam-se os questionamentos acerca do experimento: determinístico ou aleatório, aproveitando o momento para defini-los. Após o entendimento de que se refere a um experimento aleatório, se introduz o conceito de espaço amostral ($\Omega$) como sendo 75 bolinhas numeradas de 1 a 75. Em seguida estimulam-se os alunos a concluírem que cada um deles possui um jogo distinto um do outro, dentre as inúmeras possibilidades de combinação dos 75 números possíveis; de onde se constrói o conceito de evento(A). Podem-se lançar as seguintes indagações: sabendo que temos um total de 75 números (espaço amostral) e deles vocês possuem 24 (evento) em sua cartela, qual a probabilidade de que o primeiro número sorteado esteja na sua cartela? Espera-se como resposta que: a cartela contém 24 números (evento) num total de 75 (espaço amostral) que serão sorteados, então a probabilidade de o primeiro número sorteado estar nela é:

$$P = \frac{24}{75}$$

Qual a probabilidade do primeiro número sorteado ser menor ou igual a 15?
Sendo o evento($A$): números menores ou iguais a 15, num total de 75 (espaço amostral) que serão sorteados. A probabilidade de o primeiro número sorteado ser menor ou igual a 15 é:

$$\mathcal{P} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$$

Sabendo que o número sorteado é menor ou igual a 15, qual a probabilidade desse número estar em sua cartela?
Sendo o evento($B$): Número estar em sua cartela, então:

$$\mathcal{P}(B|A) = \frac{\frac{5}{75}}{\frac{15}{75}} = \frac{1}{3}$$

Quantas cartelas distintas pode-se formar?

$$C_{75,24} = \frac{75!}{24! \times 51!} \cong 2,58 \times 10^{19}$$

Se a turma possui 30 alunos, cada um com uma cartela, qual a probabilidade que cada um tem de ganhar?
Apesar de existir uma quantidade alta de cartelas distintas, como só estão concorrendo 30 cartelas, a probabilidade de cada aluno será:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{30}$$

Você pode aumentar essa probabilidade?
Espera-se que os alunos percebam que a probabilidade vai aumentar se o seu número de cartelas for maior que dos seus colegas, ou mantendo o mesmo número de cartelas, que alguns desistam.
Caso o primeiro número sorteado não esteja em sua cartela, qual a probabilidade de você marcar os três próximos números sorteados?
Neste caso espera-se que os alunos percebam que o espaço amostral para o segundo número não será o mesmo, pois, a primeira bolinha sorteada não é reposta. Sabendo que a cartela contém 24 números (evento) entre um total de 75 (espaço amostral) que serão sorteados. A primeira rodada passou e não foi marcado nenhum número, então a probabilidade dos três próximos números da sua cartela serem sorteados é:

$$\begin{aligned} 2^{\text{o}}\ \text{Sorteio}: \ \mathcal{P}(D) &= \frac{24}{74} \\ 3^{\text{o}}\ \text{Sorteio}: \ \mathcal{P}(E) &= \frac{23}{73} \\ 4^{\text{o}}\ \text{Sorteio}: \ \mathcal{P}(F) &= \frac{22}{72} \end{aligned}$$

Como os eventos são independentes, ou seja, a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro, então a probabilidade $\mathcal{P}(T)$ será o produto entre $\mathcal{P}(D)$, $\mathcal{P}(E)$ e $\mathcal{P}(F)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(T) &= \frac{24}{74} \times \frac{23}{73} \times \frac{22}{72} \\ \mathcal{P}(T) &= \frac{12144}{388944} \\ \mathcal{P}(T) &= 0,0312 \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade do 2º, 3º e 4º números sorteados serem da sua cartela é de $3,12\%$.

Na Tabela 1 completamos as possibilidades por rodada:

Tabela 1: Exemplo de probabilidade por rodada do jogo do Bingo.

| Rodadas | Evento | Espaço Amostral | Probabilidade |
|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 75 | 32% |
| 2 | 23 | 74 | 31,08% |
| 3 | 22 | 73 | 30,14% |
| 4 | 21 | 72 | 29,17% |
| 5 | 20 | 71 | 28,17% |
| 6 | 19 | 70 | 27,14% |
| 7 | 18 | 69 | 26,09% |
| 8 | 17 | 68 | 25% |
| 9 | 16 | 67 | 23,88% |
| 10 | 15 | 66 | 22,73% |
| 11 | 14 | 65 | 21,54% |
| 12 | 13 | 64 | 20,31% |
| 13 | 12 | 63 | 19,05% |
| 14 | 11 | 62 | 17,74% |
| 15 | 10 | 61 | 16,39% |
| 16 | 9 | 60 | 15% |
| 17 | 8 | 59 | 13,56% |
| 18 | 7 | 58 | 12,07% |
| 19 | 6 | 57 | 10,53% |
| 20 | 5 | 56 | 8,93% |
| 21 | 4 | 55 | 7,27% |
| 22 | 3 | 54 | 5,56% |
| 23 | 2 | 53 | 3,77% |
| 24 | 1 | 52 | 1,92% |

## 3.2 Jogo da Ameba

Este jogo [5] analisa uma família de amebas até a quinta geração, começando com uma única ameba na geração zero e seguindo ou não para gerações seguintes dependendo do resultado do lançamento de uma moeda (um lançamento para cada ameba), que irá determinar se a ameba morre ou divide-se em duas. Nesse jogo as amebas podem ser representadas por sementes em geral, canudinhos cortados ou bolinhas de papel. As gerações serão marcadas em uma folha sulfite ou cartolina através de círculos concêntricos de raios diferentes. O jogo da ameba possibilita aos alunos a formalização de conceitos sobre soma, complementar e independência de eventos. Para a construção das cartelas de gerações da ameba, pode-se aproveitar para abordar os conceitos de desenho geométrico (construção de circunferências concêntricas) e geometria plana (raio, área, perímetro, setor circular e anel).

[5] Encontra-se em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1017

Regras:

1. Divida a turma em grupos de quatro alunos.
2. Cada grão representará uma ameba, que pode-se dividir em duas ou morrer.
3. Se sair cara, a ameba morre; se sair coroa, se divide em duas amebas.
4. As amebas podem ser classificadas em gerações.
5. A geração $g_0$ é formada por uma única ameba.
6. A primeira geração $g_1$ é formada pelas duas amebas nascidas da divisão da primeira.
7. A segunda geração g2 é formada pelas amebas nascidas da segunda divisão, e assim por diante.
8. Numa disputa de par ou ímpar decide-se o time que inicia o jogo e este escolhe ser time A ou time B.
9. O time A ganha um ponto na rodada se, na $5^a$ geração não houver nenhuma ameba.
10. O time B ganha um ponto na rodada se houver pelo menos uma ameba na quinta rodada.
11. Ganha o jogo a equipe que marcar 10 pontos primeiro.

Direcionamento

Peça aos alunos que completem a tabela abaixo, considerando
c = coroa e k = cara

Tabela 2: Resultado de uma partida do jogo da Ameba.

| Lançamentos | Total Caras | Total Coroas | Total Gerações | Time Ganhador |
|---|---|---|---|---|
| ckk | 2 | 1 | 0 | A |
| k | 1 | 0 | 0 | A |
| k | 1 | 0 | 0 | A |
| cckkk | 3 | 2 | 1 | A |
| ccckckkkk | 5 | 4 | 3 | A |
| k | 1 | 0 | 0 | A |
| ckk | 2 | 1 | 1 | A |
| ckk | 2 | 1 | 1 | A |
| ccccckkckkckkc | 6 | 7 | 5 | B |
| ccckkkckk | 5 | 4 | 3 | A |
| k | 1 | 0 | 0 | A |

Deixe os alunos jogarem duas partidas, para entenderem as regras. Sugira que façam um diagrama de árvore, questionando qual é o número máximo de amebas que pode haver

na quinta geração. Espera-se que os alunos percebam que o número máximo de amebas na $5^a$ geração é $2^5$. Continue as intervenções querendo saber qual a probabilidade de não haver amebas em cada uma das gerações.
Na $1^a$ geração podemos ter 0 ou 2 amebas, dependendo do resultado do primeiro lançamento da moeda. Logo, a probabilidade de que não exista nenhuma ameba na primeira geração é igual a probabilidade de obter cara no primeiro lançamento.

$$\frac{1}{2} = 50\%$$

Na $2^a$ geração, podemos ter 0, 2 ou 4 amebas, dependendo dos lançamentos anteriores, então: Probabilidade de 4 amebas na $2^a$ geração acontecerá se os lançamentos obtiverem coroa, coroa e coroa; representadas aqui por P(ccc), portanto:

$$\mathcal{P}(ccc) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Probabilidade de 2 amebas na $2^a$ geração será P(ccK ou ckc), portanto:

$$\mathcal{P}(cck) + P(ckc) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Probabilidade de 0 amebas na $2^a$ geração será o complementar da união de 2 e 4 amebas:

$$\mathcal{P} = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8} = 62,5\%$$

Na $3^a$ geração, podemos ter 0, 2, 4, 6 ou 8 amebas, dependendo dos lançamentos anteriores, então: Probabilidade de 8 amebas na $3^a$ geração será P(ccccccc), portanto:

$$\mathcal{P} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

Probabilidade de 6 amebas na $3^a$ geração será P(ccccckcc ou ccckccc ou cccccck ou ccccckc), portanto:

$$\mathcal{P} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{4}{128} = \frac{1}{32}$$

Probabilidade de 4 amebas na $3^a$ geração será P(cccccckk ou ccckkcc ou ccccckkc ou ccccckck ou ccckckc ou ccckcck ou cckcc ou ckccc), portanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{6}{128} + \frac{2}{32} = \frac{14}{128} = \frac{7}{64}\end{aligned}$$

Probabilidade de 2 amebas na $3^a$ geração será P(cckck ou cckkc ou ckcck ou ckckc ou ccccckkk ou ccckckk ou ccckkck ou ccckkkc), portanto:

$$\mathcal{P} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{4}{32} + \frac{4}{128} = \frac{20}{128} = \frac{5}{32}$$

Probabilidade de 0 amebas na $3^a$ geração será o complementar da união de 2, 4 e 6 amebas:

$$\mathcal{P} = 1 - \left(\frac{1}{128} + \frac{1}{32} + \frac{7}{64} + \frac{5}{32}\right) = \frac{39}{128} \cong 30,47\%$$

Na $4^a$ geração, podemos ter 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ou 16 amebas, dependendo dos lançamentos anteriores, então: Probabilidade de 16 amebas na $4^a$ geração será P(ccccccccccccccc), portanto:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2^{15}}$$

Probabilidade de 14 amebas na $4^a$ geração será $\mathcal{P} = C_{8,1} = 8$, portanto:

$$\mathcal{P} = \frac{8}{2^{15}} = \frac{1}{2^{15}}$$

Probabilidade de 12 amebas na $4^a$ geração será $\mathcal{P} = \left(\frac{1}{2^{15}} \times C_{8,2} + \frac{1}{2^{13}} \times C_{4,1}\right)$, portanto:

$$\mathcal{P} = \frac{28}{2^{15}} + \frac{4}{2^{13}} = \frac{44}{2^{15}} = \frac{11}{2^{13}}$$

Probabilidade de 10 amebas na $4^a$ geração será $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2^{15}} \times C_{8,3} + \frac{1}{2^{13}} \times C_{4,1} \times C_{6,1}\right)$, portanto:

$$\mathcal{P} = \frac{56}{2^{15}} + \frac{24}{2^{13}} = \frac{152}{2^{15}} = \frac{19}{2^{12}}$$

Probabilidade de 8 amebas na $4^a$ geração será

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{2^{15}} \times C_{8,4} + \frac{1}{2^{15}} \times C_{4,1} \times C_{6,2} + \frac{1}{2^{11}} \times C_{4,2} + \frac{1}{2^{9}} \times C_{2,1}\right)$$

portanto:

$$\mathcal{P} = \frac{70}{2^{15}} + \frac{60}{2^{13}} + \frac{6}{2^{11}} + \frac{2}{2^{9}} = \frac{534}{2^{15}} = \frac{267}{2^{14}}$$

Probabilidade de 6 amebas na $4^a$ geração será

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{2^{15}} \times C_{8,5} + \frac{1}{2^{13}} \times C_{4,1} \times C_{6,3} + \frac{1}{2^{11}} \times C_{4,2} \times C_{4,1} + \frac{1}{2^{9}} \times C_{2,1} \times C_{4,1}\right)$$

portanto:

$$\mathcal{P} = \frac{56}{2^{15}} + \frac{80}{2^{13}} + \frac{24}{2^{11}} + \frac{8}{2^{9}} = \frac{1272}{2^{15}} = \frac{159}{2^{12}}$$

Probabilidade de 4 amebas na $4^a$ geração será

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{2^{15}} \times C_{8,6} + \frac{1}{2^{13}} \times C_{4,1} \times C_{6,4} + \frac{1}{2^{11}} \times C_{4,2} \times C_{4,2} + \frac{1}{2^{9}} \times C_{4,3} + \frac{1}{2^{9}} \times C_{2,1} \times C_{4,2} + \frac{1}{2^{7}} \times C_{2,1} \times C_{2,1}\right)$$

portanto:

$$\mathcal{P} = \frac{28}{2^{15}} + \frac{60}{2^{13}} + \frac{36}{2^{11}} + \frac{4}{2^{9}} + \frac{12}{2^{9}} + \frac{4}{2^{7}} = \frac{2892}{2^{15}} = \frac{723}{2^{13}}$$

Probabilidade de 2 amebas na $4^a$ geração será

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{2^{15}}\times C_{8,7}+\frac{1}{2^{13}}\times C_{4,1}\times C_{6,5}+\frac{1}{2^{11}}\times C_{4,2}\times C_{4,3}+\frac{1}{2^{11}}\times C_{4,3}\times C_{2,1}+\frac{1}{2^{9}}\times C_{2,1}\times C_{4,3}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^{7}}\times C_{2,1}\times C_{2,1}\times C_{2,1}\right)$$

portanto:

$$\mathcal{P}=\frac{8}{2^{15}}+\frac{24}{2^{13}}+\frac{24}{2^{11}}+\frac{8}{2^{9}}+\frac{8}{2^{9}}+\frac{8}{2^{7}}=\frac{3584}{2^{15}}=\frac{7}{2^{6}}$$

Probabilidade de 0 amebas na $4^a$ geração será o complementar:

$$\mathcal{P}=1-\left(\frac{1}{2^{15}}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{11}{2^{13}}+\frac{19}{2^{12}}+\frac{267}{2^{14}}+\frac{159}{2^{12}}+\frac{723}{2^{13}}+\frac{7}{2^{6}}\right)=1-\frac{8486}{2^{15}}=74,1\%$$

Na $5^a$ geração, seguindo o mesmo raciocínio encontraremos que $\mathcal{P}=77,5\%$ Sabendo as chances das amebas morrerem em cada geração, qual é probabilidade que a família viva até a quinta geração?

$$\mathcal{P}=100-77,5=22,5\%$$

Se você foi o vencedor do par ou ímpar do início do jogo, qual time você vai escolher? Por que?
Espera-se que escolham o time A porque tem aproximadamente 77,5% de ganhar o jogo.

## 3.3 Jogo dos dados

O jogo de dados é bem antigo e muito conhecido no mundo inteiro. Existem várias versões e para os propósitos deste trabalho utilizar-se-á de dois dados de cores diferentes e uma tabela. Apesar de bem simples, apresenta informações sobre conceitos de espaço amostral, eventos, adição de eventos e probabilidade condicional.

Regras

1. Separa-se a turma em grupos de 4 alunos, que formarão dois times A e B.

2. Jogam-se os dois dados de uma vez e anota-se a soma das faces voltadas para cima na tabela 3.

3. O time A marca um ponto na rodada se a soma dos dois dados for par ou maior ou igual a nove.

4. O time B marca um ponto na rodada se a soma dos dois dados for menor que nove.

5. As jogadas serão alternadas entre os times A e B.

6. Se houver interseção marca o ponto o time que jogou os dados.

7. Ganha o jogo o time que tiver mais pontos após a décima rodada.

Direcionamento

Deixe os alunos jogarem para entenderem as regras.

Peçam para completarem a tabela com os resultados obtidos:

Tabela 3: Resultado de uma partida do jogo dos dados iniciada pelo time A.

| Rodadas | Soma | Time A | Time B |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | | 1 |
| 2 | 4 | | 1 |
| 3 | 5 | | 1 |
| 4 | 8 | | 1 |
| 5 | 12 | 1 | |
| 6 | 10 | 1 | |
| 7 | 8 | 1 | |
| 8 | 6 | | 1 |
| 9 | 9 | 1 | |
| 10 | 4 | | 1 |
| Soma | | 4 | 6 |

Observando a tabela abaixo, qual time tem mais chance de ganhar um ponto na rodada? Sabendo que a probabilidade do time $A$ é $\mathcal{P}(A)$ e probabilidade do time $B$ é $\mathcal{P}(B)$ e

Tabela 4: Somas possíveis das faces de dois dados.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1,1)=2$ | $(2,1)=3$ | $(3,1)=4$ | $(4,1)=5$ | $(5,1)=6$ | $(6,1)=7$ |
| $(1,2)=3$ | $(2,2)=4$ | $(3,2)=5$ | $(4,2)=6$ | $(5,2)=7$ | $(6,2)=8$ |
| $(1,3)=4$ | $(2,3)=5$ | $(3,3)=6$ | $(4,3)=7$ | $(5,3)=8$ | $(6,3)=9$ |
| $(1,4)=5$ | $(2,4)=6$ | $(3,4)=7$ | $(4,4)=8$ | $(5,4)=9$ | $(6,4)=10$ |
| $(1,5)=6$ | $(2,5)=7$ | $(3,5)=8$ | $(4,5)=9$ | $(5,5)=10$ | $(6,5)=11$ |
| $(1,6)=7$ | $(2,6)=8$ | $(3,6)=9$ | $(4,6)=10$ | $(5,6)=11$ | $(6,6)=12$ |

consultando a tabela 4, temos: Se o Time $A$ iniciar o jogo:

$$\mathcal{P}(A)=\frac{18}{36}+\frac{10}{36}-\frac{4}{36}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

$$\mathcal{P}(B)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

Se o time $B$ iniciar o jogo:

$$\mathcal{P}(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

$$\mathcal{P}(B)=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$$

Logo o time que tem maior chance de vencer a rodada é o que está jogando.

Sabendo que a soma dos dois dados é menor que nove, qual a probabilidade que o time A tem de ganhar um ponto na rodada?
Sabendo que ganha um ponto o time que jogou o dado e que C = soma menor que nove, temos: Se o time A jogar o dado: C = Soma menor que nove

$$\mathcal{P}(A|C) = \frac{\frac{14}{36}}{\frac{26}{36}} = \frac{14}{26} \cong 53,85\%$$

Se o time B jogar o dado:

$$\mathcal{P}(A|C) = \frac{0}{\frac{26}{36}} = 0\%$$

evento impossível

Sabendo que a soma dos dois dados é menor que nove, qual a probabilidade que o time B tem de ganhar um ponto na rodada? Se o time A jogar o dado, temos:

$$\mathcal{P}(B|C) = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{26}{36}} = \frac{12}{26} \cong 46,15\%$$

Se o time B jogar o dado:

$$\mathcal{P}(B|C) = \frac{\frac{26}{36}}{\frac{26}{36}} = 100\%$$

evento certo.

Os jogos foram aplicados em duas turmas de 3º ano e uma de 8º ano da Escola Estadual Professor João Fernandino Júnior de Sete Lagoas. Os dados apresentados nas tabelas 1, 2 e 3 foram coletados aleatoriamente de registros dos grupos formados por estas turmas.

# 4 Considerações Finais

Vários estudos apontam a necessidade do ensino de probabilidade ser iniciado, cada vez mais cedo, motivo pelo qual está incluso em vários currículos educacionais. Diversos artigos e pesquisas, constataram a eficiência dos jogos no ensino. Esta proposta procurou desenvolver o ensino de probabilidade através de jogos, onde os conceitos foram apresentados no final, após o aluno ter construído a ideia intuitiva do assunto. Os jogos apresentados neste trabalho foram confeccionados com materiais simples, apesar disso, mostraram-se eficientes. Porque quando o conteúdo é introduzido apenas formalmente, é raro conseguir a participação de todos os alunos e com esta ferramenta, verificou-se que estimula a participação de todos. Nestes experimentos, houve envolvimento, discursão e refleção sobre o tema.

# 5 Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me guiado e iluminado, sustentando-me nos momentos mais difíceis. A todos os professores e coordenadores que nos incentivaram e nos ajudaram em todos os momentos, em especial ao meu orientador Professor Nilton César Silva, pela competência e boa vontade. À CAPES pelo apoio financeiro para a execução desse projeto. A minha família pelo apoio e compreensão. Ao meu marido Antunes, pelo amor e cumplicidade mesmo nos momentos difíceis. Aos meus colegas pela solidariedade e generosidade. Aos meus alunos que participaram e contribuíram com questionamentos e sugestões nos jogos. Enfim, a todos que de alguma maneira contribuíram para a execução desse trabalho. Muito Obrigada!

# Referências Bibliográficas


BRASIL, Ministério da Educação.**Secretaria de Educação Média e Tecnológica Parâmetros curriculares nacionais : ensino médio./Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Brasília: Ministério da Educação. 1999. 364p.

CARNEIRO, Mário Jorge Dias. et al.**CBC: matemática, proposta curricular, ensino fundamental e médio**. Minas Gerais. 2005.

LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio - volume 2 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. - 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

MORGADO, Augusto César.**Análise combinatória e probabilidade/Augusto César Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Pedro Fernandez**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

OLIVEIRA, Marcos Santos de.**Probabilidade e estatística/Marcos Santos de Oliveira; Daniela Carine Ramires de Oliveira**. São João del-Rei: material didático para o curso a distância PGMAT-UFSJ, 2009. 87p.

LOPES, José Marcos; TEODORO, João Vitor, REZENDE, Josiane de Carvalho. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. Campinas, 2011. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/126>. Acesso em : 16 nov. 2012.

Laboratório UNICAMP. Recursos educacionais multimídia para a matemática no ensino médio. Campinas. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1017>. Acesso em: 30/01/2013.

Mundo Educação. Probabilidade no bingo. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com.br /matematica/probabilidade-no-bingo.htm>. Acesso em: 16/02/2013.