UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

LÍGIA DALVANE SAMARTINO CARNEVALI

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU E FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Três Lagoas - MS

2018

LÍGIA DALVANE SAMARTINO CARNEVALI

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU E FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vitor Moretto F. da Silva

Três Lagoas – MS

2018

LÍGIA DALVANE SAMARTINO CARNEVALI

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU E FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva (Orientador)
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez
UNESP

Prof.ª Dr.ª Eliedete Pinheiro Lino
UFMS/CPTL

Três Lagoas, 03 de Novembro de 2018.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser a força maior que guia o meu viver. Aos meus pais Dalva e Laerte que são exemplos de determinação e dedicação para minha vida, e ao meu esposo Julio César pela compreensão e companheirismo em toda esta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus por iluminar meus pensamentos, fortalecer-me nas dificuldades, abençoar minha vida e por ter me dado saúde para buscar a realização deste sonho.

Aos meus pais Dalva e Laerte que são a minha fonte de inspiração, que me deram todo o apoio possível nesta jornada, deixando seus afazeres e me acompanhando nas viagens às aulas, me proporcionando segurança e confiança, sempre incentivando e acreditando no meu potencial principalmente nos momentos em que eu achava que não daria conta.

Ao meu esposo Julio César, por todo apoio e paciência que teve comigo ao longo desta jornada, todo entusiasmo levantado nos momentos difíceis para ajudar-me e pelo exemplo de esforço e dedicação na vida.

A minha avó Hilda, que preocupou-se a cada dia, lembrando de colocar-me nas suas orações. Aos meus avós Antônia, Afonso e Egídio (in memorian), com muito amor e saudade.

Gostaria de agradecer também aos professores da UFMS Câmpus de Três Lagoas, por cada aprendizado que tivemos. De forma particular ao meu orientador Prof. Dr. Vitor Moretto pelo tempo dedicado a mim, pelas suas ricas orientações, e a todos professores que de alguma forma contribuíram para minha formação.

.

RESUMO

A abordagem utilizada para o ensino de equações do 2º grau e funções quadráticas é fundamental no Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio, entretanto, há uma defasagem que permeia a aprendizagem da temática e parte da responsabilidade recai sobre a metodologia mecanizada utilizada para o ensino. Este trabalho analisa os métodos abordados nos livros didáticos, visando apontar recursos facilitadores do processo ensino e aprendizagem, tanto para introdução como para revisão e resgate do conteúdo, com o objetivo de proporcionar ao aluno uma aprendizagem mais significativa. O trabalho mostra que atividades envolvendo equações do 2º grau e funções quadráticas, podem ser desenvolvidas sem a utilização de métodos mecanizados.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Equações do segundo grau. Funções quadráticas.

ABSTRACT

The approach used to teach 2nd grade equations and quadratic functions on the both Primary and Secondary Education is fundamental, however there is a discrepancy on the students learning, what is provided in part for the mechanized methodology applied. This work analysis the methods used in textbook aiming to explore the keypoints that support the process of teaching in phases, such as introduction, revision and retrieval of the learned content, thus being able to facilitate the learning process for the students. This work shows that 2nd grade equations and quadratic functions activities can be teached with no mechanized methodology.

Key-words: Mathematics Teaching. Equations of the second degree. Quadratic functions.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – COMPLETAMENTO DE QUADRADOS....14
FIGURA 2 – INTEPRETAÇÃO GEOMÉTRICA....15
FIGURA 3 – A FÓRMULA DE RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU....16
FIGURA 4 – INFORMATIVO SOBRE BHÁSKARA....17
FIGURA 5 – A FÓRMULA DE BHÁSKARA....18
FIGURA 6 – A MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA....19
FIGURA 7 – CONTINUAÇÃO - A MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA....20
FIGURA 8 – FRANÇOIS VIÈTE....21
FIGURA 9 – MÉTODO - COMPLETAR QUADRADOS....21
FIGURA 10 – FUNÇÃO QUADRÁTICA....23
FIGURA 11 – FUNÇÃO DE 2º GRAU....24
FIGURA 12 – DIFERENTES FUNÇÕES....25
FIGURA 13 – UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA....25
FIGURA 14 – DETALHES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA....26
FIGURA 15 – CONCLUSÃO SOBRE FUNÇÃO DO 1º E 2º GRAU....27

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **09**
1 REFLEXÃO SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA **10**
1.1 PCNs - Ensino da História da Matemática 10
1.2 O Ensino de Matemática 10
2 EQUAÇÃO DO 2°GRAU **12**
2.1 PCNs – Uma abordagem sobre equação do 2°grau 12
2.2 Sequência didática para equação de 2º grau nos livros didáticos 13
2.2.1 Dante: Projeto Teláris *14*
2.2.2 Marília Centurión: Matemática na medida certa *17*
2.2.3 Álvaro Andrini: Praticando Matemática *21*
3 FUNÇÕES QUADRÁTICAS **22**
3.1 Contexto histórico das funções 22
3.2 Sequência didática para função quadrática nos livros didáticos 23
3.2.1 Dante: Projeto Teláris *23*
3.2.2 Marília Centurión: Matemática na medida certa *24*
3.2.3 Álvaro Andrini: Praticando Matemática *25*
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS **28**
APÊNDICE A – UMA PROPOSTA PARA ENSINO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU...32
APÊNDICE B - UMA PROPOSTA PARA ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS..44
REFERÊNCIAS **48**

INTRODUÇÃO

Muito se tem discutido, recentemente, acerca do baixo rendimento dos alunos na disciplina de Matemática, mostrando o nível de insuficiência de aprendizagem e a necessidade de mudança no processo ensino e aprendizagem. Através do método completamento de quadrado, pode-se ter acesso ao estudo de Equações do 2º grau e Funções Quadráticas de modo mais instigante e construtivo. Assim, neste trabalho é proposto a utilização deste método visando despertar no educando o interesse pela Matemática, facilitando a absorção do conteúdo.

Este trabalho é organizado começando com uma reflexão sobre o Ensino de Matemática no Capítulo 1, trazendo uma análise sobre a importância da história da Matemática na aprendizagem e os motivos que levam a aprender esta matéria.

No Capítulo 2 é destacado o ensino de Equação do 2º grau, assim como seu embasamento nos PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais, além das análises de sequências didáticas para equação de 2º grau nos livros didáticos.

O tema Funções Quadrática, é abordado no Capítulo 3, onde é apresentado seu contexto histórico e realizada uma análise do modo como é apresentado nos livros didáticos disponíveis ao Ensino Regular Público do Estado de São Paulo.

Prosseguindo, o Apêndice A vem contribuir com uma proposta para ensino de equações do 2º grau, listando exercícios sugestivos para o desenvolvimento das etapas, tendo a finalidade de construir conceitos necessários para a compreensão da temática.

Para finalizar, o Apêndice B dispõe de uma proposta para ensino de funções quadráticas, listando exercícios, trazendo análise das etapas das funções quadráticas em gráficos, a fim de construir os conceitos necessários para interpretação das funções em estudo.

1 REFLEXÃO SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA

O ensino de Matemática contempla o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, porém não se limita a isso. Também é decisivo para estimular reflexão abstrata. A história da matemática nos revela o sentido do surgimento dos estudos que foram desenvolvidos ao longo dos anos e a seguir é realizada uma breve retomada observando a importância da presença do mesmo ensino de Matemática.

1.1 PCNs - Ensino da História da Matemática

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2001, p.32), também conhecido como PCNs, temos que a História da Matemática foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática, por problemas vinculados a outras ciências, bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. Assim, surgiram os teoremas, as fórmulas e os símbolos, que com o tempo foram sendo aprimoradas, enriquecendo cada vez mais.

Segundo os PCNs, tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos. Ou seja, com o passar do tempo, as fórmulas foram perdendo o sentido primitivo na qual foram fundamentadas.

1.2 O Ensino de Matemática

O ensino atual da matemática, ou “Matemática da Escola”, trabalha o formalismo das regras, das fórmulas e dos algoritmos, bem como a complexidade dos cálculos com seu caráter rígido e disciplinador, levando a exatidão e precisão dos resultados (RODRIGUES, 2005).

A forma como o autor expressa o ensino de Matemática retrata-a como sendo cansativa e sem instigação ao aluno. Com isso, consequências têm sido provocadas por conta dessa prática educacional e tornou-se objeto de estudo de educadores matemáticos. Para D’Ambrosio (1989, p.16)

> (...) primeiro, os alunos passam a acreditar que a aprendizagem da matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo, os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, dos quais não se duvida ou questiona, e nem mesmo se preocupam em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios.

Na atual era educacional é essencial para o educador a existência de uma reflexão periódica sobre sua prática pedagógica, sendo esse um dos saberes necessários para o bom andamento do processo ensino e aprendizagem. Afinal, ensinar é mediar a construção dos conhecimentos pelos alunos proporcionando análise, reflexões e sentido aos envolvidos.

É comum ouvir afirmações sobre a falta de afinidade com a Matemática. Isso pode ocorrer (como em qualquer área do conhecimento), porém é notável que está cada vez mais comum, o que é alarmante. Muitas vezes, o ensino de Matemática tem sido pautado em uma metodologia que promove a aplicação de fórmulas de modo “mecânico”, sem desenvolver o raciocínio lógico e isso faz com que os alunos distanciem da ciência por achá-la sem sentido e não abracem a oportunidade de aprofundar-se.

A importância de aprender Matemática não está apenas atrelada à disciplina, mas com o vínculo que ela tem com as demais áreas do conhecimento, desenvolvendo a lógica e possibilitando sua aplicabilidade no nosso cotidiano.

2 EQUAÇÃO DO 2° GRAU

Dentre as temáticas abordadas no ensino regular, tem-se o tópico equação do 2º grau e a seguir é apresentada uma breve retomada do que os Parâmetros Curriculares Nacionais descrevem sobre esse tema e serão analisadas as propostas de alguns livros didáticos sobre o conteúdo.

2.1 PCNs – Uma abordagem sobre equação do 2° grau

O conteúdo Equação do 2º grau é abordado nos PCNs no bloco Números e Operações, e as orientações deste documento é que o professor desenvolva a temática mediante problemáticas, proporcionando ao aluno uma melhor compreensão.

A aplicação de situações-problemas, propicia o desenvolvimento do pensamento crítico, construtivo e reflexivo, proporcionando a aprendizagem de forma significativa para a vida, pois sua construção se dá gradativamente a partir dos conhecimentos prévios.

Segundo os PCNs (BRASIL, 1998, p.84) é fundamental “[...] a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da ‘sintaxe’ (regras para resolução) de uma equação”. É preciso trabalhar as etapas de compreensão da equação de 2º grau a fim de desmitificar os significados e sentidos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.88) também nos trazem que a resolução de situações-problema pode ser desenvolvida por uma equação de segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta. Com isso, é possível refletir sobre as problemáticas e inserir incógnitas, obtendo assim o resultado procurado de forma mais significativa.

Destacando o processo de ensino aprendizagem de equações do 2º grau, a maior parte dos livros enfatiza a aplicação de fórmulas e as situações problemas aparecem com menos intensidade no fim do capítulo. Essa abordagem precisa mudar, dando mais sentido aos conteúdos, mostrando para o aluno a aplicabilidade do que está sendo estudado.

Segundo Dante (1991, p. 25),

> (...) é possível, por meio da resolução de problemas, desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia a dia, na escola ou fora dela.

Dante ressalta a importância de trabalhar com situações problema, destacando a possibilidade de mudanças na aprendizagem dos alunos, quando criado rotina de situações problema. Os alunos precisam estar habituados para inserir os conteúdos matemáticos nas situações do cotidiano.

É preciso mostrar que a Matemática não é apenas para aplicar fórmulas, como relata os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> (...) a matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (PCN, Brasil, 1998)

Não se pode esquecer que a Matemática tem um valor formativo essencial, sendo fundamental para desenvolver e estruturar o raciocínio lógico e dedutivo, assim não se deve simplesmente mecanizá-la e aceitar que não é possível melhorar.

2.2 Sequência didática para equação de 2º grau nos livros didáticos

Neste capítulo, é apresentada uma análise de livros didáticos do 9º ano que abordam o conteúdo Equação do 2º grau, buscando averiguar a proposta de sequência didática deste conteúdo.

Para Polya (2006, p.3):

> Há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao dirigir a seus alunos uma indagação ou uma sugestão: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.

No Apêndice A, é apresentada uma proposta para ensino de equações do 2º grau, sendo uma sequência de exercícios para trabalhar diferentes situações. Vale notar também que os livros didáticos analisados poderiam dedicar mais tempo estudando equações do 2º grau antes de apresentarem as fórmulas, a fim de refletir sobre as possíveis resoluções com os conhecimentos previamente adquiridos.

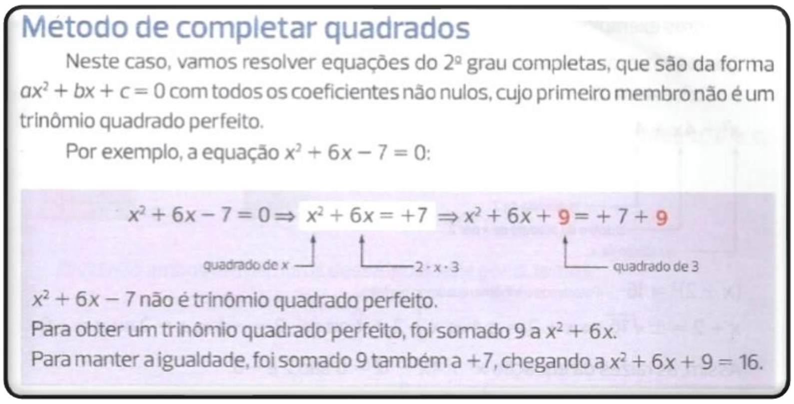
Assim, é possível analisar e aprimorar a partir das orientações dos livros didáticos e encontrar uma proposta metodológica que resulte em uma aprendizagem mais significativa. Isso também vai ao encontro da visão que Moreira (2017, p.2) tem baseado na Teoria de Aprendizagem Significativa:

> A aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos.[...]. Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva.

Com isso, temos que a aprendizagem deve ocorrer de maneira interativa, envolvendo os conhecimentos previamente adquiridos e os novos, a fim de dar mais significado ou maior estabilidade cognitiva.

2.2.1 Dante: Projeto Teláris

No livro "Projeto Teláris" que teve sua segunda edição em 2016, Dante apresenta alguns fatos históricos que marcaram o surgimento da Equação do 2º grau. Logo no início do Capítulo 2 – Equações e sistemas de equações do 2º grau, após introduzir resolução de equações incompletas e equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ cujo primeiro membro é trinômio quadrado perfeito, Dante apresenta o método de completar quadrados na equação $x^2 + 6x - 7 = 0$ e utiliza a ideia geométrica de completar quadrados por meio da noção de área. Dessa forma chega à solução da equação apresentando as raízes $x' = -7$ e $x" = 1$.



Método de completar quadrados

Neste caso, vamos resolver equações do 2º grau completas, que são da forma $ax^2 + bx + c = 0$ com todos os coeficientes não nulos, cujo primeiro membro não é um trinômio quadrado perfeito.

Por exemplo, a equação $x^2 + 6x - 7 = 0$:

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2}_{\text{quadrado de } x} + \underbrace{6x}_{2 \cdot x \cdot 3} = +7 \Rightarrow x^2 + 6x + \underbrace{9}_{\text{quadrado de 3}} = +7 + 9$$

$x^2 + 6x - 7$ não é trinômio quadrado perfeito.

Para obter um trinômio quadrado perfeito, foi somado 9 a $x^2 + 6x$.

Para manter a igualdade, foi somado 9 também a +7, chegando a $x^2 + 6x + 9 = 16$.

Figura 1. Completamento de quadrados. (DANTE,2016, p.41)

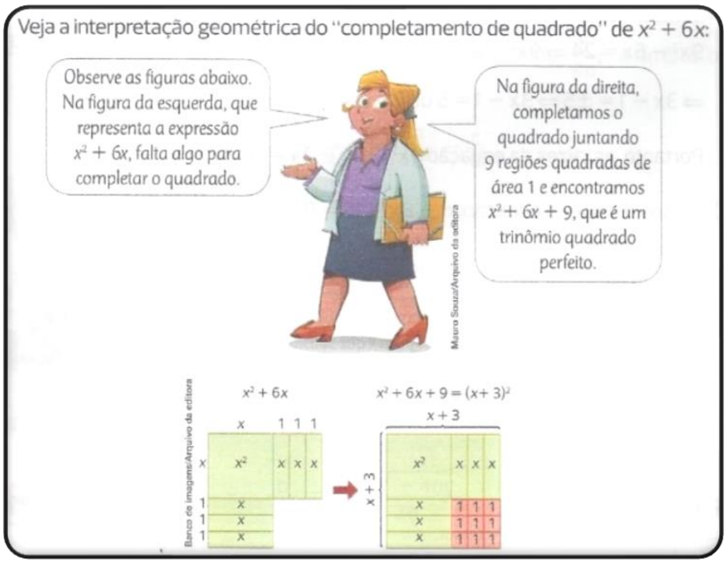
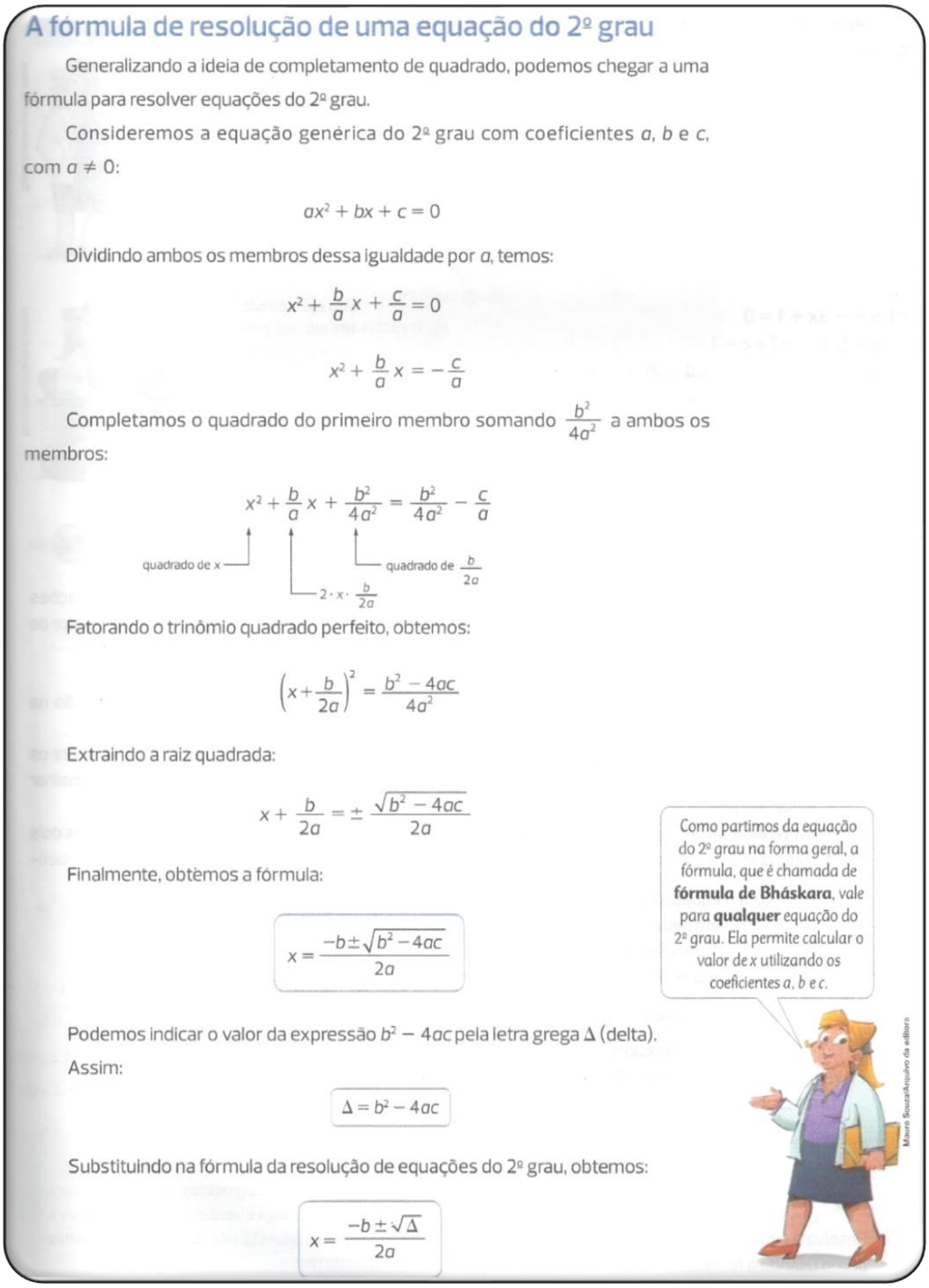


Figura 2. Interpretação geométrica. (DANTE,2016, p.41)

Dante faz uma relação entre o lúdico e o teórico a fim de que o aluno não apenas entenda o método como também compreenda sua origem. Dando continuidade aos tópicos, o autor propõe que seja apresentado a fórmula e a história de Bháskara, mostrando aos alunos que apesar da fórmula ser chamada de Bháskara, não há evidências que comprovem este fato. Esse costume aparentemente é apenas brasileiro. Embora tenha ocorrido esse equívoco, é importante lembrar a considerável contribuição que Bháskara proporcionou para a matemática.



A fórmula de resolução de uma equação do 2º grau

Generalizando a ideia de completamento de quadrado, podemos chegar a uma fórmula para resolver equações do 2º grau.

Consideremos a equação genérica do 2º grau com coeficientes a, b e c, com $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por a, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completamos o quadrado do primeiro membro somando $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros:

$$\underbrace{x^2}_{\text{quadrado de } x} + \underbrace{\frac{b}{a}x}_{2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}} + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2}}_{\text{quadrado de } \frac{b}{2a}} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Fatorando o trinômio quadrado perfeito, obtemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extraindo a raiz quadrada:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, obtemos a fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Podemos indicar o valor da expressão $b^2 - 4ac$ pela letra grega Δ (delta). Assim:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Substituindo na fórmula da resolução de equações do 2º grau, obtemos:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Figura 3. A fórmula de resolução de uma equação do 2º grau. (DANTE,2016, p.43)

Leituras

Quem foi Bháskara e por que "fórmula de Bháskara"

Bháskara (1114-1185) foi um matemático e astrônomo indiano, considerado um dos mais importantes matemáticos do século XII. Porém, curiosamente, a fórmula de resolução de equações do 2º grau, que leva seu nome, não foi escrita por ele!

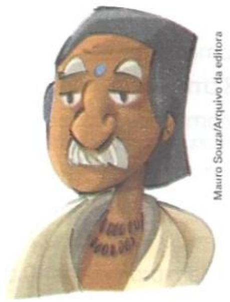


Ilustração fictícia do matemático indiano Bháskara.

Na verdade, o hábito de dar o nome de Bháskara para essa fórmula se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente, é apenas brasileiro, pois não se encontra o nome de Bháskara para a fórmula em outros países.

Os fatos apresentados a seguir contribuem para indicar que Bháskara provavelmente não é o autor da fórmula.

- Problemas que recaem em uma equação de 2º grau já apareciam, há quase 4 mil anos, em textos escritos pelos babilônios (como foi visto na introdução do capítulo). Nesses textos, o que se tinha era uma "receita" (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos (veja o texto "Os babilônios e as equações do 2º grau", na seção *Ponto de chegada*).
- As duas obras mais conhecidas de Bháskara, *Lilavati* e *Vijaganita*, que tratam de Aritmética e Álgebra, respectivamente, contêm numerosos problemas sobre equações de 1º e 2º graus, porém resolvidas também com receitas em prosa.
- Até o fim do século XVI, não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do 2º grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito a partir de François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603.

Logo, embora não devam ser negadas a importância e a riqueza da obra de Bháskara, não é adequado atribuir a ele a fórmula de resolução da equação do 2º grau.

Fonte: *Revista do Professor de Matemática*, n. 6 e n. 39.

Figura 4. Informativo sobre Bháskara. (DANTE,2016, p.47)

É notável que Dante descreve breves históricos das temáticas abordadas e aos poucos o aluno vai conhecendo o surgimento da Equação do 2º grau.

2.2.2 Marília Centurión: Matemática na medida certa

Na primeira edição lançada em 2015, Marília traz um breve histórico na introdução do capítulo 3 – Álgebra: equações e sistemas de equações do segundo grau, relatando que os primeiros registros da álgebra eram em palavras e não em símbolos. Uma das primeiras situações-problemas que o livro lança é: "Eu deveria dividir 4,5 por um número x, mas me distraí e, em vez da divisão, fiz a subtração. Ao fazer os cálculos, encontrei, no entanto, o mesmo resultado de antes. Foi muita coincidência: isso só acontece para dois valores de x. Vamos descobrir quais são?" (CENTURIÓN, 2015, p. 59)

Também traz os relatos da história de Bháskara de forma ilustrativa e mostra que o método da resolução da Equação do 2º grau já era aplicado por Al-Khowarizmi, propiciando que os alunos percebam que não foi Bháskara quem criou essa fórmula. Em seguida, Marília apresenta a resolução de algumas equações do 2º grau usando o método de completar quadrados.

4 A fórmula de Bhaskara

Existe um método que nos permite resolver qualquer equação do 2º grau. Aplicando esse método, obtemos uma fórmula resolutiva conhecida como **fórmula de Bhaskara**.

Bhaskara foi um matemático hindu nascido por volta do ano 1100. Embora a fórmula que vamos conhecer leve seu nome, ele não a formulou. Equações quadráticas já eram resolvidas há milênios, e inclusive o Al-Khowarizmi (mencionado nas páginas de abertura deste capítulo) já havia categorizado várias formas de resolvê-las, 300 anos antes de Bhaskara. A atribuição do nome Bhaskara à fórmula foi uma homenagem, já que ele é considerado um importante astrônomo hindu.

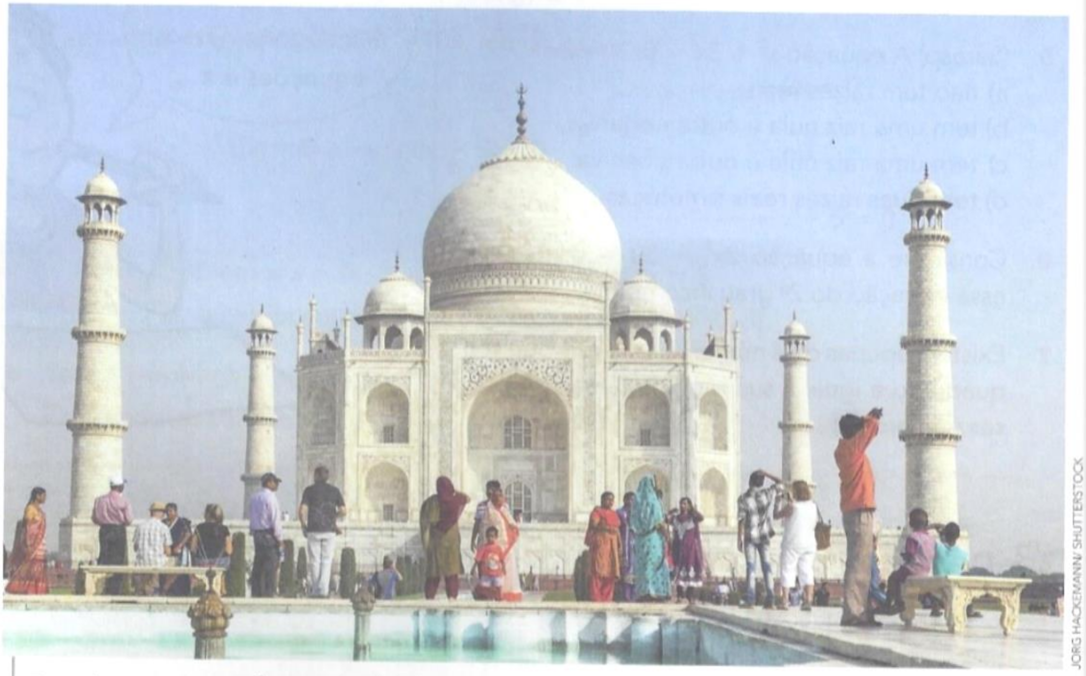


Foto do Taj Mahal, na Índia, país do matemático Bhaskara.

Antes de ver como se usa o método, devemos fazer as seguintes considerações para resolver uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$:

- Se $ax^2 + bx + c$ for um trinômio quadrado perfeito, a resolução é simples. Vimos isso nas páginas anteriores.
- Se $ax^2 + bx + c$ não for um trinômio quadrado perfeito, podemos transformá-lo num trinômio quadrado perfeito. Como? Somando um número conveniente aos dois membros da equação.

Figura 5. A fórmula de Bháskara. (CENTURIÓN,2015, p.66)

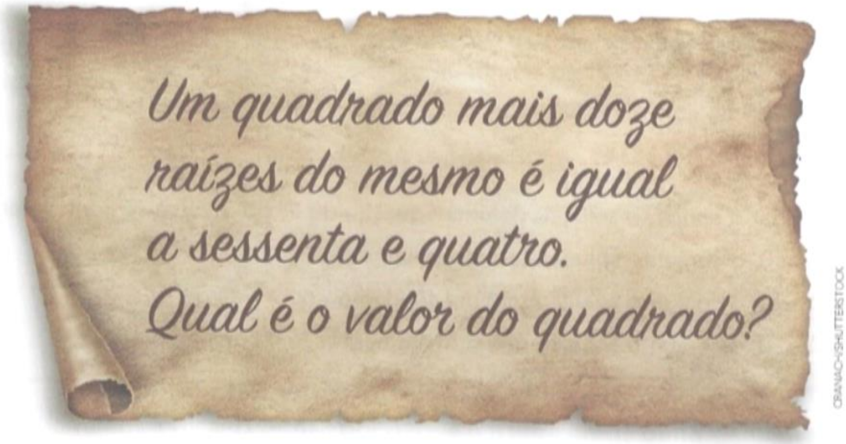
A matemática tem história

O método de completar quadrados de Al-Khowarizmi

Nas páginas de abertura deste capítulo citamos o grande matemático persa Al-Khowarizmi que viveu em Bagdá no século IX. Al-Khowarizmi propôs um interessante método para resolver equações do 2º grau na forma $x^2 + bx = a$, baseado na interpretação geométrica da expressão $(a + b)^2$, que você já conhece.

Vale lembrar que, naquele tempo, não se consideravam raízes negativas e também que não se usavam símbolos, daí que os problemas apresentados e as respectivas soluções eram escritas por meio de palavras.

Veja, por exemplo, como Al-Khowarizmi propunha a resolução da equação $x^2 + 12x = 64$:



Na ilustração abaixo, está representada geometricamente a expressão $\mathbf{x^2 + 12x}$. Veja:

- Um quadrado de lado x, portanto sua área é $\mathbf{x^2}$.
- Como o coeficiente de x é 12, formamos quatro retângulos com medidas dos lados **x** e **3**, em que área de cada um é **3x**.

A soma das áreas dos 4 retângulos mais a do quadrado de lado **x** é igual a **64**, pois $\mathbf{x^2 + 12x = 64}$.

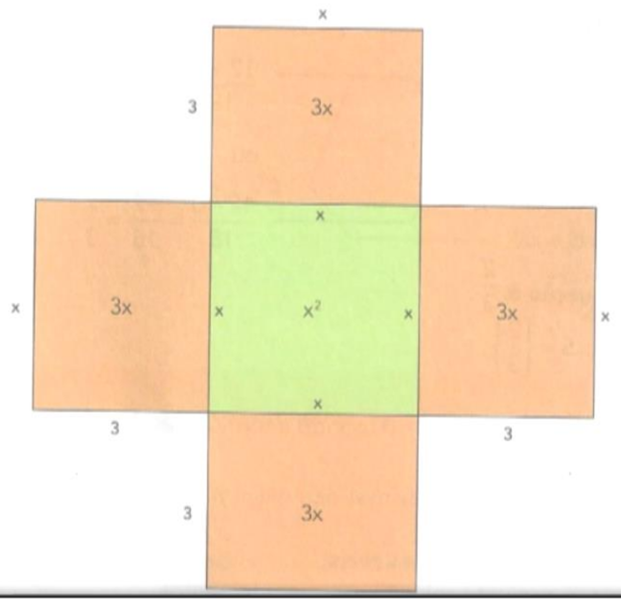
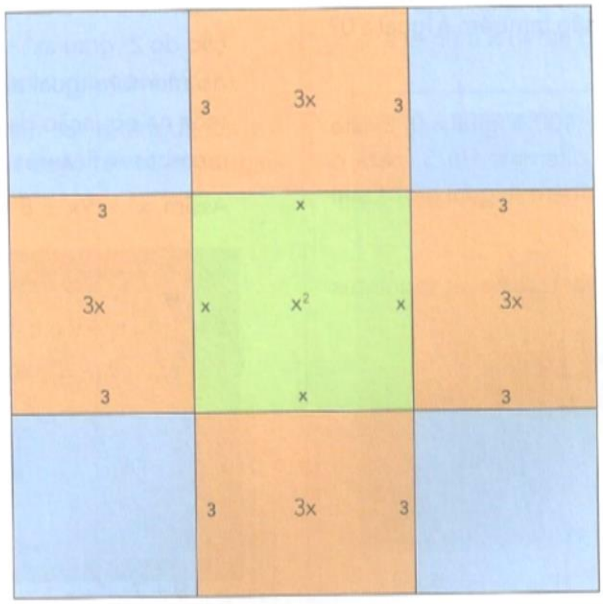


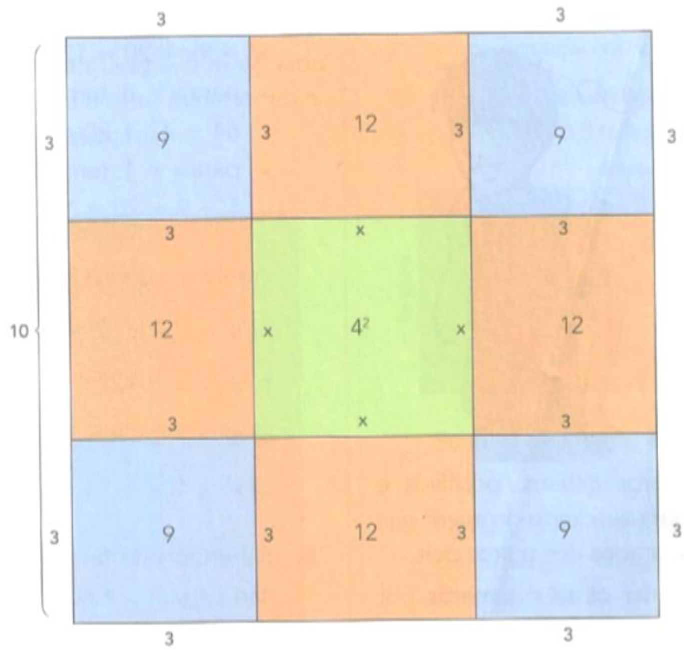
Figura 6. A matemática tem história. (CENTURIÓN,2015, p.70)

Para completar um novo quadrado, vamos acrescentar 4 quadrados menores com medida do lado igual a 3 (aqui, colorimos esses quatro quadrados em azul):



Como cada um desses quadrados tem área 9, então **a área do novo quadrado deve ser 100**, pois a área 64 (que já tínhamos) foi acrescentada em 36 (área dos quatro quadrados azuis).

Portanto, o lado do novo quadrado será 10, e o valor positivo de **x** é 4 (10 − 6).



Esse método é conhecido como "completar quadrados". Al-Khowarizmi não usava números negativos; por isso, aparece apenas a solução positiva da equação.

Figura 7. Continuação - A matemática tem história. (CENTURIÓN,2015, p.71)

2.2.3 Álvaro Andrini: Praticando Matemática

No livro da quarta edição de 2015, da Editora do Brasil, Andrini faz uma introdução a equação do 2º grau e apresenta um breve relato sobre François Viète.

Coleção Particular, França. Bridgeman Images/Keystone Brasil

François Viète (1540-1603). Anônimo (escola francesa). Gravura.

Um francês, nascido em 1540, teve grande importância no desenvolvimento da Álgebra.

François Viète era advogado, mas dedicava seu tempo livre à matemática. Em seu livro *In Arten Analyticam Isagoge*, publicado em 1591, mostrou a vantagem de representar um número desconhecido (que chamamos hoje de incógnita) por uma letra.

Viète usou nessa obra uma vogal para representar uma quantidade desconhecida, no entanto, ele ainda utilizava palavras em várias situações. Por exemplo:

a^2 ele escrevia como a *quadratus*.

Fontes: Universidade de Lisboa. <www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm21/equacoes.htm>; Carl B. Boyer. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 223.

Figura 8. François Viète. (ANDRINI,2015, p.49)

Nota-se que o livro não faz referência a Bháskara o que o torna diferente dos demais analisados, além disso, destaca a importância da técnica de completar quadrados.

CONECTANDO SABERES

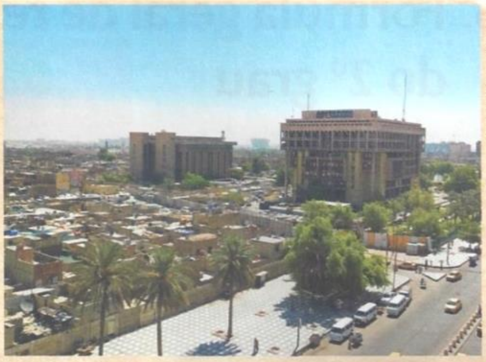
Você achou a técnica de completar quadrados interessante? Muitas civilizações antigas utilizavam essa técnica, entre elas os babilônios.

Os árabes e os hindus, no século IX, utilizavam essa técnica para resolver equações do 2º grau.

Esses povos tiveram um papel muito importante no desenvolvimento da matemática.

Sabemos que o sistema de numeração decimal posicional teve origem na Índia e foi difundido no mundo ocidental pelos árabes. Daí os nossos algarismos serem chamados de **indo-arábicos**.

Falamos anteriormente do matemático árabe al-Khwarizmi, lembra?



Bagdá, atual capital do Iraque, é uma cidade de cultura predominantemente árabe. No passado, durante o califado de al-Mamun (809-833), Bagdá se transformou em importante centro cultural. O califa levou a essa cidade sábios de toda parte, que traduziram e escreveram importantes obras. Entre eles estava al-Khwarizmi.

Do nome dele derivam as palavras **algarismo** e **algoritmo**, e do título de um de seus livros, *Al jabr wa'l muqābalah*, veio o nome **Álgebra**.

Na obra de al-Khwarizmi encontram-se vários exemplos da técnica de completar quadrados.

Fonte de pesquisa: Carl B. Boyer. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Figura 9. Método - Completar Quadrados. (ANDRINI,2015, p.53)

3 FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Dentre as temáticas abordadas no ensino regular, tem-se o tópico função quadrática e a seguir é apresentada uma breve retomada da história observando o modo como originou o estudo de função do 2º grau.

3.1 Contexto histórico das funções

O conceito que se tem sobre função foi construído ao longo de vários séculos. Entretanto, foi a partir do século XVII que começou a surgir o desenvolvimento da noção de função, temos Keppler (1571-1630) e Galileu (1564–1642) instigados pela busca em estabelecer as leis de movimento. Em paralelo aos estudos de Kepler e Galileu, alguns outros cientistas e matemáticos da época vinham realizando pesquisas acerca de variáveis dentro de um determinado cálculo matemático.

No século XVIII, a partir da análise matemática, Leibniz usa pela primeira vez o termo função para designar a relação de dependência entre termos. A inovadora concepção de função foi publicada por Bernoulli em um artigo no ano de 1718, com a seguinte definição “chamamos de função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes”. Muitos outros cientistas aperfeiçoaram o estudo das funções matemáticas, atribuindo conceitos que hoje são aprendidos em sala de aula.

É possível verificar que o conceito de função passou por diversas mudanças e que sua construção foi bastante lenta. Euller (1707-1783), propõe mais tarde em 1748, a seguinte definição “Se x é uma quantidade variável, então toda quantidade que depende de x de qualquer maneira, ou seja, determinada por aquela, chama-se função da dita variável”.

Foi somente no século XIX, que Peter Dirchlet, Dedekind e Cantor, expandiram o sentido de função ao que se tem hoje em dia, a função como uma relação entre os elementos de dois conjuntos satisfazendo determinadas condições (ROQUE, 2012).

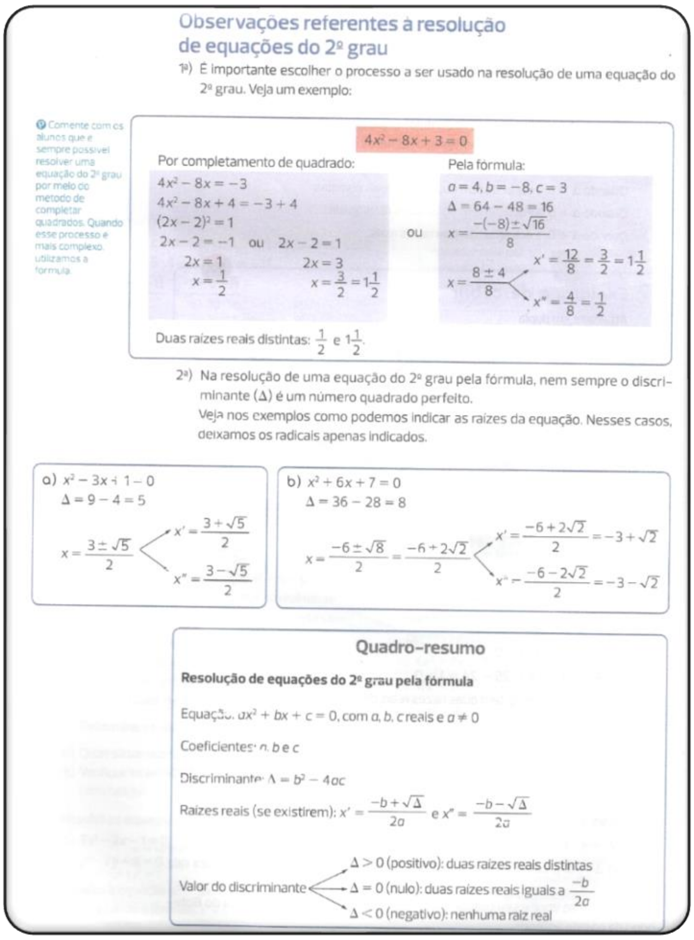
3.2 Sequência didática para função quadrática nos livros didáticos

A seguir é apresentada a análise de alguns livros didáticos disponíveis para escolha no Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Público do Estado de São Paulo, observando o modo como contemplam o assunto da função do 2º grau.

No Apêndice B, é exibida uma proposta para ensino de funções quadráticas, sendo uma sequência de funções para exercitar diferentes situações. Aqui, os livros didáticos analisados poderiam trabalhar um pouco mais com funções do 2º grau sem as fórmulas, a fim de refletir sobre as possíveis resoluções com os conhecimentos previamente adquiridos.

3.2.1 Dante: Projeto Teláris

No livro da segunda edição de 2016, da Editora Ática, Dante faz uma introdução para determinar os zeros da função quadrática e se embasa no teorema conhecido como sendo de Bháskara para solucioná-lo.



Observações referentes à resolução de equações do 2º grau

1ª) É importante escolher o processo a ser usado na resolução de uma equação do 2º grau. Veja um exemplo:

Comente com os alunos que é sempre possível resolver uma equação do 2º grau por meio do método de completar quadrados. Quando esse processo é mais complexo, utilizamos a fórmula.

$4x^2 - 8x + 3 = 0$

Por completamento de quadrado:

$4x^2 - 8x = -3$

$4x^2 - 8x + 4 = -3 + 4$

$(2x - 2)^2 = 1$

$2x - 2 = -1$ ou $2x - 2 = 1$

$2x = 1$ $\qquad$ $2x = 3$

$x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

ou

Pela fórmula:

$a = 4, b = -8, c = 3$

$\Delta = 64 - 48 = 16$

$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{8}$

$x = \frac{8 \pm 4}{8}$: $x' = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; $x'' = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Duas raízes reais distintas: $\frac{1}{2}$ e $1\frac{1}{2}$.

2ª) Na resolução de uma equação do 2º grau pela fórmula, nem sempre o discriminante (Δ) é um número quadrado perfeito.
Veja nos exemplos como podemos indicar as raízes da equação. Nesses casos, deixamos os radicais apenas indicados.

a) $x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$: $x' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $x'' = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

b) $x^2 + 6x + 7 = 0$

$\Delta = 36 - 28 = 8$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$: $x' = \frac{-6 + 2\sqrt{2}}{2} = -3 + \sqrt{2}$; $x'' = \frac{-6 - 2\sqrt{2}}{2} = -3 - \sqrt{2}$

Quadro-resumo

Resolução de equações do 2º grau pela fórmula

Equação: $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b, c reais e $a \neq 0$

Coeficientes: a, b e c

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$

Raízes reais (se existirem): $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Valor do discriminante:
- $\Delta > 0$ (positivo): duas raízes reais distintas
- $\Delta = 0$ (nulo): duas raízes reais iguais a $\frac{-b}{2a}$
- $\Delta < 0$ (negativo): nenhuma raiz real

Figura 10. Função quadrática. (DANTE,2016, p.46)

3.2.2 Marília Centurión: Matemática na medida certa

Na primeira edição lançada em 2015, Marília introduz a função do 2º grau fazendo análise de problemáticas e refletindo sobre a construção geométrica. A construção do gráfico é realizada por atribuições de valores a x.

Função de 2º grau

Um automóvel anda a 50 km/h. O motorista vê um obstáculo e pisa fundo no freio. Quantos metros o automóvel percorre a partir do instante em que o obstáculo foi avistado?

A distância depende dos reflexos do motorista e do modelo do automóvel. Entretanto, a distância **d** é função da velocidade **v**.

Para cada modelo de automóvel, engenheiros determinam uma lei de associação da função após certos testes. Uma lei de associação usual para esses casos, sendo **d** a distância em metros e **v** a velocidade em quilômetros por hora, é:

$$\boxed{d = 0{,}004v^2 + 0{,}1v}$$

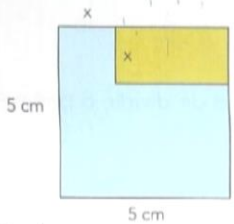
Se considerarmos que o automóvel de nosso exemplo obedece a essa lei, você pode calcular quantos metros ele vai percorrer até parar.

A função dada por $\mathbf{d = 0{,}004v^2 + 0{,}1v}$ é chamada de **função polinomial de 2º grau**, porque $0{,}004v^2 + 0{,}1v$ é um polinômio de 2º grau. Para abreviar, vamos chamar de **função de 2º grau** toda função dada por:

$$\mathbf{y = ax^2 + bx + c}, \text{ sendo } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Exemplo

Vamos chamar de **y** a medida da área da região em azul deste quadrado.



A área **y** dessa região é função de **x**.

A medida da área **y** (área do quadrado menos a do retângulo amarelo) é dada por:

$$y = 25 - x(5 - x)$$

Portanto:

$$\mathbf{y = x^2 - 5x + 25}$$

Note que essa é uma lei do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = -5$ e $c = 25$.

Então, as áreas das regiões azuis são funções de **x**, de 2º grau.

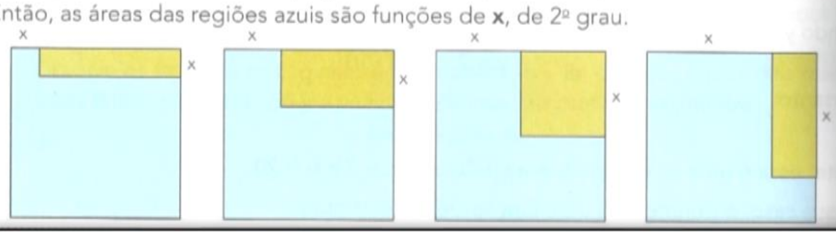


Figura 11. Função de 2º grau. (CENTURIÓN,2015, p.188)

3.2.3 Álvaro Andrini: Praticando Matemática

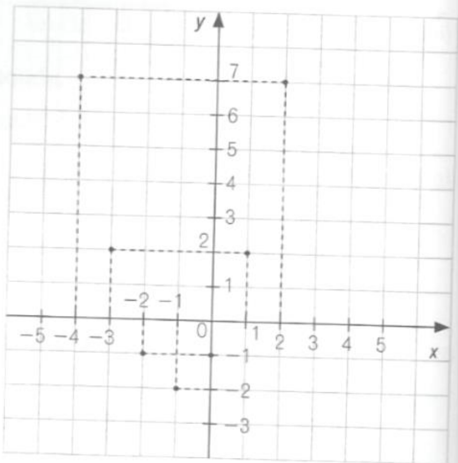
No livro da quarta edição de 2015, da Editora do Brasil, Andrini faz uma construção de gráfico de função através da montagem de tabelas atribuindo valores a x e calculando, por meio de lei de formação, os valores de y correspondentes. Explica ao longo deste exemplo que na função, x pode ser qualquer número real. Ao encerrar a construção de um gráfico de uma equação do 1º grau, lança o questionamento apresentado na Figura 12.

Figura 12. Diferentes funções. (ANDRINI,2015, p.116)

Em seguida, Andrini mostra que a resposta é não, fazendo novamente, por meio da construção de tabela, a substituição dos valores na lei de formação de uma equação quadrática.

A resposta é não. Vamos montar uma tabela com alguns valores de x e de y para a função dada por $y = x^2 + 2x - 1$ e representar os pares ordenados $(x; y)$ no sistema cartesiano.

x	$y = x^2 + 2x - 1$	$(x; y)$
-4	7	$(-4; 7)$
-3	2	$(-3; 2)$
-2	-1	$(-2; -1)$
-1	-2	$(-1; -2)$
0	-1	$(0; -1)$
1	2	$(1; 2)$
2	7	$(2; 7)$

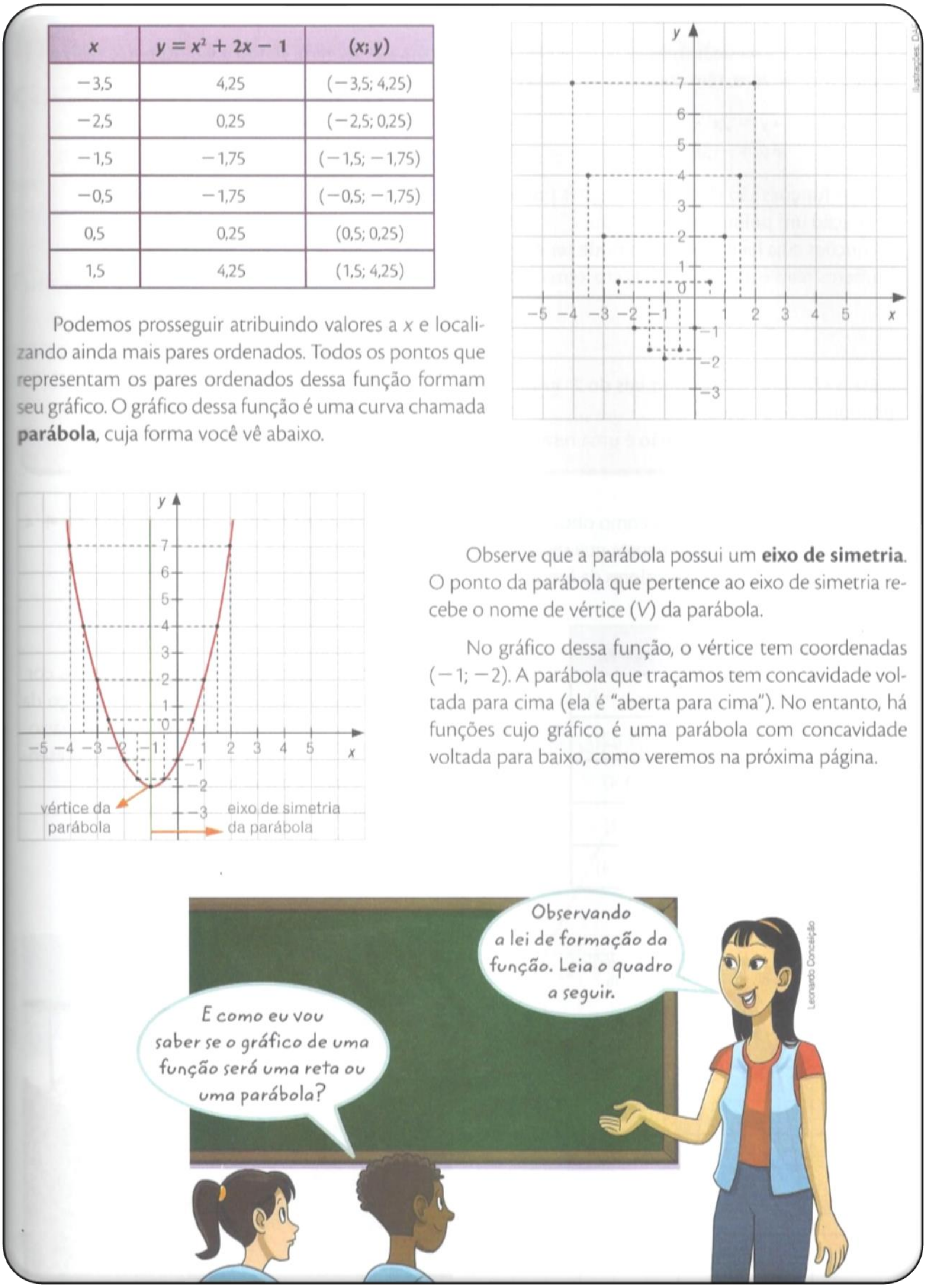


Os pontos não estão alinhados, portanto não determinam uma reta.

Nessa função, x pode ser qualquer número real. Podemos fazer $x = 0{,}5$; $x = 124$; $x = \frac{3}{5}$ etc.

Vamos atribuir mais valores a x na tabela, obtendo outros pares ordenados $(x; y)$ da função. Representando mais pontos no sistema cartesiano nos aproximaremos mais da forma final do seu gráfico.

Figura 13. Uma função quadrática. (ANDRINI,2015, p.116)



x	$y = x^2 + 2x - 1$	$(x; y)$
$-3{,}5$	$4{,}25$	$(-3{,}5; 4{,}25)$
$-2{,}5$	$0{,}25$	$(-2{,}5; 0{,}25)$
$-1{,}5$	$-1{,}75$	$(-1{,}5; -1{,}75)$
$-0{,}5$	$-1{,}75$	$(-0{,}5; -1{,}75)$
$0{,}5$	$0{,}25$	$(0{,}5; 0{,}25)$
$1{,}5$	$4{,}25$	$(1{,}5; 4{,}25)$

Podemos prosseguir atribuindo valores a x e localizando ainda mais pares ordenados. Todos os pontos que representam os pares ordenados dessa função formam seu gráfico. O gráfico dessa função é uma curva chamada **parábola**, cuja forma você vê abaixo.

Observe que a parábola possui um **eixo de simetria**. O ponto da parábola que pertence ao eixo de simetria recebe o nome de vértice (V) da parábola.

No gráfico dessa função, o vértice tem coordenadas $(-1; -2)$. A parábola que traçamos tem concavidade voltada para cima (ela é "aberta para cima"). No entanto, há funções cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, como veremos na próxima página.

Figura 14. Detalhes da função quadrática. (ANDRINI,2015, p.117)

No fechamento, Andrini faz a seguinte conclusão:

Funções cuja lei de formação pode ser escrita na forma $\boldsymbol{y = ax + b}$, sendo a e b números reais e a diferente de zero, têm como gráfico uma **reta**. É o caso das funções:

- $y = 2x$ $\quad$ $(a = 2 \text{ e } b = 0)$
- $y = -3x + 1$ $\quad$ $(a = -3 \text{ e } b = 1)$

Essas funções são chamadas **funções polinomiais do 1º grau**, pois encontramos na sua lei de formação um polinômio do 1º grau.

Funções cuja lei de formação pode ser escrita na forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, sendo a, b, e c números reais e a diferente de zero, têm como gráfico uma **parábola**. É o caso das funções:

- $y = x^2 + 2x - 1$ $\quad$ $(a = 1, b = 2 \text{ e } c = -1)$
- $y = -2x^2 + 4$ $\quad$ $(a = -2, b = 0 \text{ e } c = 4)$

Essas são **funções polinomiais do 2º grau**, pois encontramos na sua lei de formação um polinômio do 2º grau.

Há funções cujo gráfico não é uma reta nem uma parábola.

Figura 15. Conclusão sobre função do 1º e 2º grau. (ANDRINI,2015, p.118)

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dentre os métodos para ensino de equações do 2º grau disponíveis nos livros pesquisados do Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Público regular do Estado de São Paulo, intensificamos o olhar no método de completar quadrados de Al-Khowarizmi, pois a utilização deste método proporciona um maior envolvimento com a resolução tornando-a menos mecânica e mais significativa.

Esta estratégia também dispõe de uma melhor resposta quando a equação não possui solução real, pois associa ao tratamento de área o que evidencia a não existência dos números negativos.

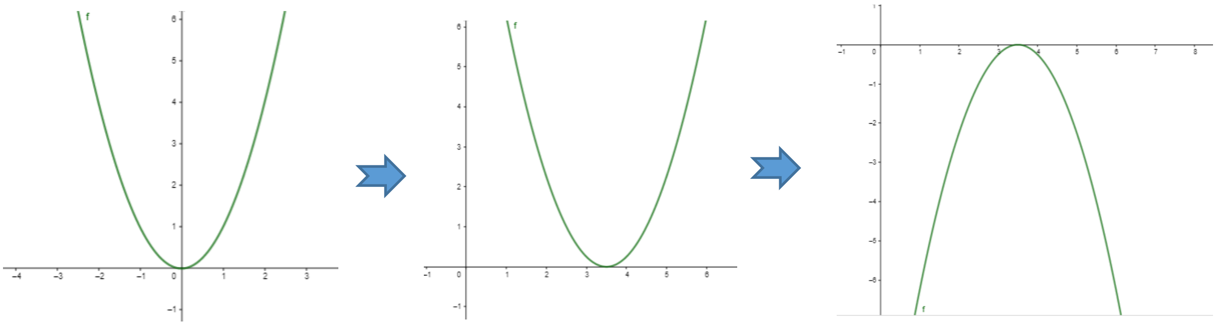
Outro ponto que fortalece a utilização do método de completar quadrados, é a facilidade de visualizar a simetria que aparece em funções quadráticas, trazendo consigo as características do estudo desta função.

Assim, conclui-se que dentre os métodos dispostos nos livros didáticos apresentados aos alunos de escola pública regular, o método de completar quadrados de Al-Khowarizmi traz suas vantagens e consideravelmente deve ser enfatizado.

Analisando nos livros pesquisados do Ensino Público regular do Estado de São Paulo disponíveis para escolha no Programa Nacional do Livro Didático, não houve um método que sobressaísse, entretanto permaneceremos na proposta de completar quadrados, pois podemos ver o gráfico de uma função quadrática como deslocamento e multiplicação por uma constante do gráfico de $f(x) = x^2$.

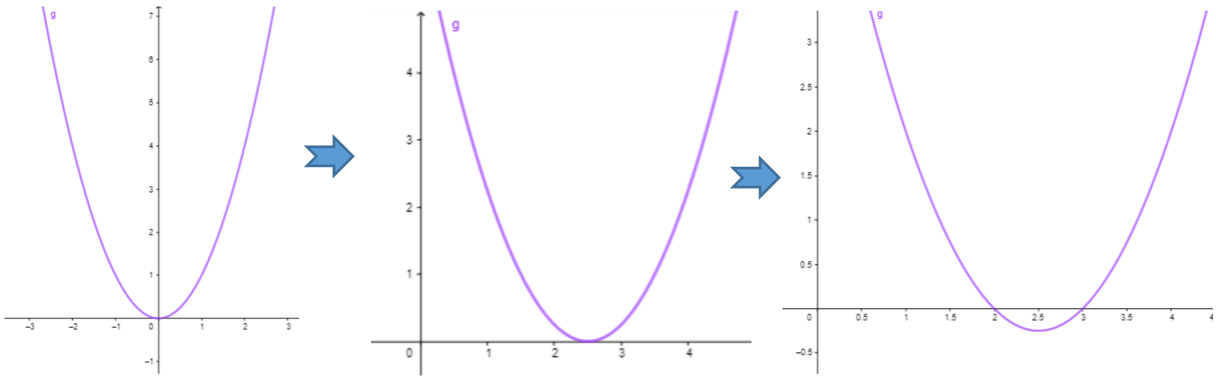
Por exemplo, $f(x) = -x^2 + 7x - \frac{49}{4}$, sendo $f(x) = (-1)\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$ partindo do gráfico x^2, desloca-se horizontalmente $\frac{7}{2}$ para a direita, ou seja, o vértice que ficava em $(0{,}0)$ agora ficará em $\left(\frac{7}{2}; 0\right)$. Agora inverte-se o sentido do gráfico, ao invés de uma parábola com concavidade voltada para cima, tem-se para baixo.

$\boxed{f(x) = x^2}$ $\boxed{f(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2}$ $\boxed{f(x) = (-1)\left(x - \frac{7}{2}\right)^2}$



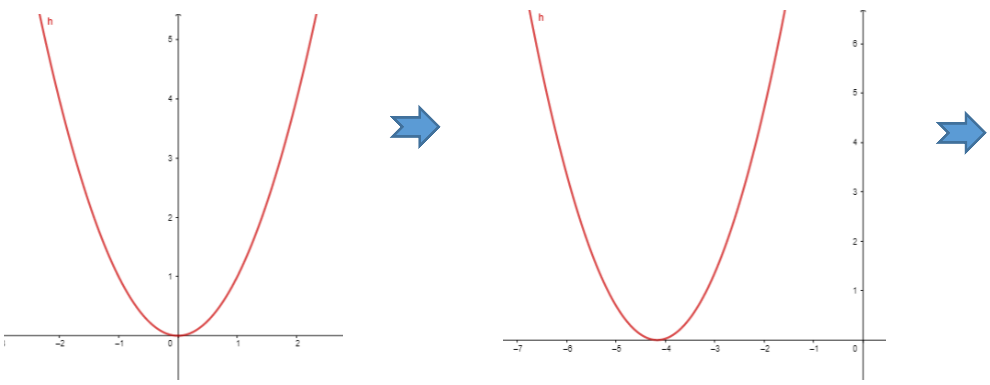
Outro exemplo dado, $g(x) = x^2 - 5x + 6$, analisando $g(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, partindo do gráfico de x^2, desloca-se horizontalmente $\frac{5}{2}$ para a direita, depois desloca-se verticalmente $\frac{1}{4}$ para baixo, assim obtém-se o gráfico de $g(x)$.

$\boxed{g(x) = x^2}$ $\boxed{g(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2}$ $\boxed{g(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$

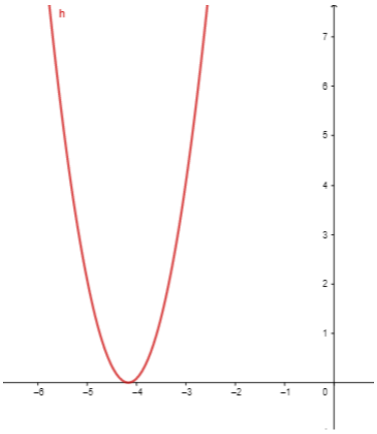


Analisando $h(x) = 3x^2 + 25x - 10$, visualizando $h(x) = 3\left(x + \frac{25}{6}\right)^2 - \frac{745}{12}$, parte-se do gráfico x^2, deslocando o gráfico horizontalmente $\frac{25}{6}$ para esquerda, depois ampliando três vezes a amplitude e deslocando o resultado verticalmente $\frac{745}{12}$ para a baixo obtém-se $h(x)$.

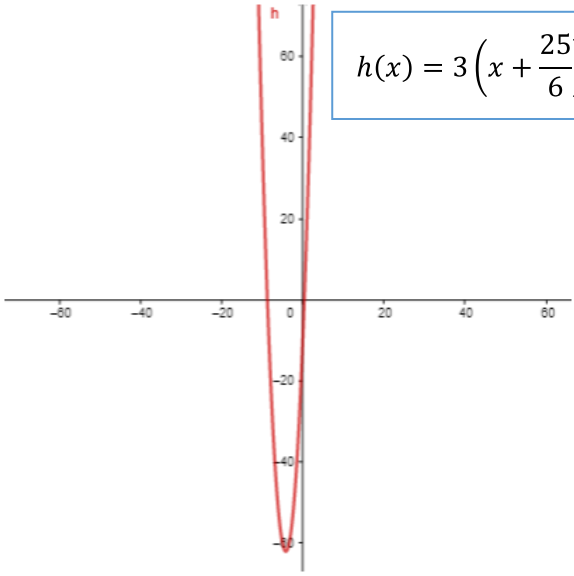
$\boxed{h(x) = x^2}$ $\boxed{h(x) = \left(x + \frac{25}{6}\right)^2}$



$$h(x) = 3\left(x + \frac{25}{6}\right)^2$$



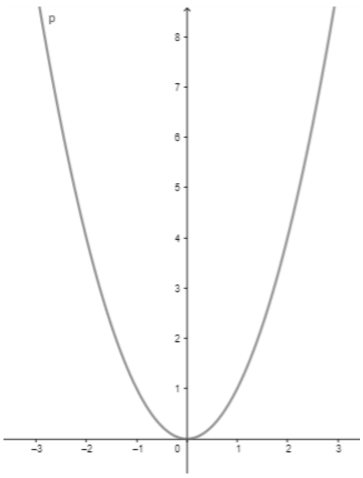
$$h(x) = 3\left(x + \frac{25}{6}\right)^2 - \frac{745}{12}$$

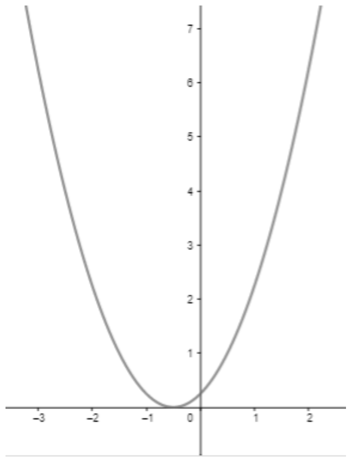


Para encerrar, é feita uma análise sobre $p(x) = 2x^2 + 2x + 3$, que também pode ser observada sobre a forma $p(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$, partindo do gráfico x^2, deslocando-o $\frac{1}{2}$ horizontalmente para esquerda, multiplicando a amplitude por dois, para finalizar, deslocar o gráfico verticalmente $\frac{5}{2}$ para baixo e assim encontra-se $p(x)$.

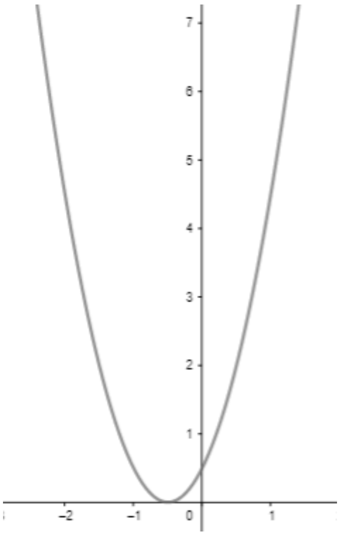
$$p(x) = x^2$$

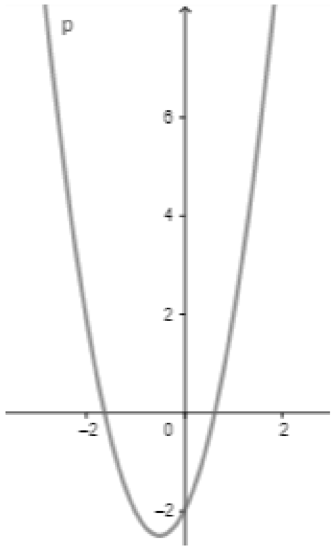
$$p(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$





$$\boxed{p(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \qquad \boxed{p(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}}$$





Dessa forma, as principais informações da parábola são bem mais evidentes na forma fatorada tornando a análise mais prática e eficiente (ao menos mais fácil do que a abordagem por fórmulas como proposto em outros métodos).

APÊNDICE A – Uma proposta para ensino de equações do 2º grau

Na sequência de aulas propostas a seguir, é visada a contribuição para o desenvolvimento dos conceitos necessários para a compreensão e resolução da equação do 2º grau.

Aula 1: Desenvolvimento de Produtos Notáveis.

Na aula inicial, os alunos irão desenvolver exercícios que envolvam o produto da soma e da subtração, e reduzir os termos semelhantes.

Exercícios Sugeridos:

1-) Efetue as multiplicações:

a-) $(x + y).(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

b-) $(a + b).(2a + 3b) =$

c-) $(a - b).(a - b) =$

d-) $(2x - y).(x - 2y) =$

e-) $(a + b).(a - b) =$

f-) $(3a - 2b).(a + 4b) =$

2-) Desenvolva os produtos notáveis e reduza os termos semelhantes.

a-) $(x + 7)(x - 7) - x^2 + 50 = x^2 - 7x + 7x - 49 - x^2 + 50 = 1$

b-) $(3x + 1)(3x - 1) - 8x^2 + 1$

c-) $(2a - 3b)(2a + 3b) + 9b^2 + 1$

d-) $(5x - 2)(5x - 2) + (x - 3)(x - 2)$

e-) $(x - 5)(x - 5) - (x - 3)(x - 3) - 16$

f-) $(2x + 1)(2x + 1) - 3x^2 + 8$

g-) $(x + 2)(x + 2) - (x + 4)(x + 2) + 4x + 12$

h-) $(x + 1)(x - 3) + 2(x + 1)$

i-) $6(a + 2)(a + 2) + 2(a – 3)(a – 3) + (a – 4)(a + 4)$
j-) $(2m^2 – 3) – 2(m^2 + 1)(m^2 – 1)$
k-) $(a^2b – 5)(a^2b + 5) + 2a(ab – 1)$
l-) $(x – 1)(x – 1) – (2x – 1)(2x – 1) + (3x – 1)(3x – 1)$

3-) Abaixo temos alguns produtos notáveis. Você deve descobrir quais foram as multiplicações que resultaram neles.

a-) $y^2 - 49$
b-) $r^2 + 2rs + s^2$
c-) $y^2 - 2y + 1$
d-) $a^2 - b^2$

4-) Calcule os seguintes produtos notáveis:

a) $(yx + 2a)(yx – 2a)$
b) $(yx + 2a)(yx + 2a)$
c) $(x + a)(y – 2)$
d) $(y + a)(x + 2)$
e) $(yx + 2a)^2$

5-) O resultado de $(xy - 11)(xy + 11)$ é o quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo. O quadrado do primeiro termo é _____ e o do segundo é _____. Portanto, o resultado é ________.

6-) Calcule os seguintes produtos:

a-) $\left(\frac{35m^4+5}{n^3-2}\right)\left(\frac{n^6-3}{14m^5+1}\right) =$
b-) $\left(\frac{x^2-y^2}{26xy}\right).\left(\frac{13y}{x+y}\right) =$
c-) $\left(\frac{x^2-10x+25}{x^2-9}\right).\left(\frac{x^2-3x}{x^2-5x}\right) =$
d-) $\left(\frac{2x^2-1}{3}\right).\left(\frac{3a}{4x^5+1}\right).\frac{5a^3}{3a} =$

Aula 2: Equação quando é um quadrado perfeito.

Esta aula tem o objetivo de propiciar que o aluno escreva algebricamente a expressão que identifica a área de quadrados, formados por outras figuras planas. Depois faremos uso destes conceitos para encontrar a solução de uma equação do 2º grau.

Exercícios Sugeridos:

1-) Desenvolva os produtos notáveis e reduza os termos semelhantes.

a-) $(x + 1)^2 =$
b-) $(2x + 3)^2 =$
c-) $(2x + 3y)^2 =$
d-) $(5a + x)^2 =$
e-) $(2ab + 1)^2 =$
f-) $(x^2 + y^2)^2 =$
g-) $(a^2b + ab^2)^2 =$
h-) $(3a + 2bc)^2 =$
i-) $(3x^2 + y^6)^2 =$
j-) $(3a - 1)^2 =$
k-) $(3m - 5n)^2 =$
l-) $(4x - 3y)^2 =$
m-) $(a2 - b3)^2 =$
n-) $(3x^3 - y^2)^2 =$
o-) $(5ab - 1)^2 =$
p-) $(ab^2 - a^2b)^2 =$
q-) $(x^2y - xy^2)^2 =$
r-) $(3x^2 - y)^2 =$
s-) $\left(\frac{x}{3} + 7\right)^2 =$
t-) $\left(\frac{4x}{3} + \frac{y}{2}\right)^2 =$
u-) $\left(\frac{7s}{2} - \frac{r}{5}\right)^2 =$

v-) $\left(9 - \frac{m}{3}\right)^2 =$

2-) A respeito dos produtos notáveis, assinale verdadeiro (V) ou falso (F) para cada caso a seguir.

a) (   ) $(x + a)^2 = x^2 + a^2$
b) (   ) $(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$
c) (   ) $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
d) (   ) $(x - a)^2 = x^2 - a^2$
e) (   ) $(x - a)^2 = x^2 - 2x - a^2$
f) (   ) $(x - a)^2 = x^2 - 2x + a^2$

3-) Seja $x^2 + y^2 = 60$. Qual é o valor positivo de $x + y$, sabendo que $xy = 20$?

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20
e) 25

4-) A seguir, cada trinômio é o quadrado de uma expressão. Determine a expressão de cada equação.

a-) $a^2 + 2a + 1 =$

$$a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$

$$a^2 \qquad\qquad 1^2$$

b-) $1 - 4x + 4x^2 =$

$$1 - 4x + 4x^2 = (1 - 2x)^2$$

1^2 $(2x)^2$

c-) $9m^2 + 6m + 1 =$

d-) $1 - 2y + y^2 =$

e-) $x^2 - 14x + 49 =$

f-) $25x^2 - 10x + 1 =$

g-) $4x^2 - 12xy + 9y^2 =$

h-) $a^6 + 12a^3 + 36 =$

i-) $121x^2y^2 + 44xy + 4 =$

j-) $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{3}m + \frac{1}{9} = 0$

k-) $x^2 + 8x + 16 = 0$

l-) $x^2 - 10x + 25 = 0$

m-) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

n-) $16x^2 - 8x + 1 = 0$

o-) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$

p–) $x^2 - 6x + 9 = 0$

q-) $n^2 - n + \frac{1}{4} = 0$

r-) $4z^2 - 20z + 25 = 0$

s-) $9a^2 + 12a + 4 = 0$

t-) $v^2 + 14v + 49 = 0$

u-) $0{,}01m^2 + 0{,}24mn + 1{,}44n^2 = 0$

v-) $\frac{4x^2}{9} + \frac{16x}{3} + 16 = 0$

Aula 3: Equação do segundo grau que não é um trinômio quadrado perfeito, a equação que possui raízes reais distintas e fatoração da equação usando as raízes.

Nesta etapa, será inserido o método de completar quadrados que é utilizado para resolver equações do segundo grau, transformando-as em um produto notável. Ao resolver as equações podemos encontrar raízes. Raiz é o valor do qual substituído nas incógnitas, torna a sentença verdadeira. A raiz pode ser chamada de solução da equação e essas soluções encontradas formarão o conjunto verdade ou conjunto solução, que será representado pela letra S.

Exercícios Sugeridos:

Descubra o número que deve ser somado nos dois lados da equação, para tornar o primeiro membro um quadrado perfeito, depois resolva as equações a seguir:

a-) $x^2 + 6x = 40$

$$x^2 + 6x + 9 = 40 + 9$$
$$(x + 3)^2 = 49$$
$$\sqrt{(x + 3)^2} = \sqrt{49}$$
$$x + 3 = \pm 7$$

$x + 3 = 7$ ou $x + 3 = -7$

$x + 3 - 3 = 7 - 3$ $x + 3 - 3 = -7 - 3$

$x = 4$ $x = -10$

$$S = \{-10; 4\}$$

b-) $x^2 + 5x = 39$

c-) $y^2 + 5y - 6 = 0$

d-) $x^2 + x - 2 = 0$

e-) $m^2 - 7m + 10 = 0$

f-) $x^2 + x - 12 = 0$

g-) $n^2 - 3n - 10 = 0$

h-) $x^2 + 12x = 28$

i-) $x^2 + 8x = 9$

j-) $x^2 - 10x = 39$

k-) $t^2 + 6t + 7 = 0$

l-) $x^2 - 3x + 1 = 0$

m-) $x^2 - 2x - 3 = 0$

n-) $x^2 - 0{,}6x + 0{,}08 = 0$

o-) $x^2 + 3x - 10 = 0$

p-) $c^2 - 5c + 4 = 0$

q-) $x^2 - x - 6 = 0$

r-) $x^2 + 8x + 12 = 0$

s-) $x^2 + x - 20 = 0$

t-) $x^2 - \frac{1}{20}x - \frac{3}{40} = 0$

Aula 4: O caso em que o coeficiente “a” é diferente de 1.

No caso anterior, os cálculos foram feitos considerando-se o coeficiente “a” da equação do segundo grau igual a 1. Desenvolver a concepção que nos casos em que “a” é diferente de 1, basta dividir toda a equação pelo valor de a.

Se o termo independente estiver no primeiro membro, deve-se isolar no segundo termo, colocando o coeficiente “a” em evidencia no primeiro membro, em seguida divide-se a equação pelo valor do coeficiente “a”, descobrindo o número para completar o quadrado perfeito. Soma-se esse valor nos dois membros da equação, para tornar o primeiro membro um quadrado perfeito, e finalmente ao resolver a equação, é encontrada suas raízes. Calcule:

a-) $4x^2 - 8x = -3$

$$4(x^2 - 2x) = -3$$

$$\frac{4(x^2 - 2x)}{4} = \frac{-3}{4}$$

$$x^2 - 2x = \frac{-3}{4}$$

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{-3}{4} + 1$$

$$(x-1)^2=\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{(x-1)^2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x-1=\pm\frac{1}{2}$$

$$x'-1=\tfrac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad x''-1=-\tfrac{1}{2}$$

$$x'-1=\tfrac{1}{2} \qquad\qquad x''-1=-\tfrac{1}{2}$$

$$x'-1+1=\tfrac{1}{2}+1 \qquad\qquad x''-1+1=-\tfrac{1}{2}+1$$

$$x'=\tfrac{3}{2} \qquad\qquad x''=\tfrac{1}{2}$$

$$S=\left\{\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$$

b-) $2x^2-3x+1=0$

$$2x^2-3x+1-1=-1$$

$$2(x^2-3x)=-1$$

$$\frac{2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)}{2}=\frac{-1}{2}$$

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}$$

$$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=-\frac{1}{2}+\frac{9}{16}$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{1}{4}$$

$$x'-\tfrac{3}{4}=\tfrac{1}{4} \qquad \text{ou} \qquad x''-\tfrac{3}{4}=-\tfrac{1}{4}$$

$$x'-\tfrac{3}{4}=\tfrac{1}{4} \qquad\qquad x''-\tfrac{3}{4}=-\tfrac{1}{4}$$

$$x'-\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4} \qquad\qquad x''-\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}=-\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}$$

$$x' = 1 \qquad\qquad x'' = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$$

c-) $-3x^2 + 10x - 3 = 0$

d-) $4x^2 - 11x + 6 = 0$

e-) $10x^2 - 7x - 12 = 0$

f-) $4y^2 - 13y + 3 = 0$

g-) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

h-) $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$

i-)$\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + 1 = 0$

j-) $2x^2 - 10x - 12 = 0$

k-) $2x^2 - 5x = -1$

l-) $2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = 0$

m-) $2x^2 + 6x - 40 = 0$

n-) $0{,}1x^2 - 0{,}7x + 1 = 0$

o-) $2x^2 + 7x + 5 = 0$

p-) $-x^2 + 8x + 9 = 0$

q-) $2x^2 + 3x + 11 = 0$

r-) $25x^2 - 10x + 1 = 0$

s-) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

t-) $-4x^2 + 16x - 16 = 0$

Aula 5: Equação que não possui raízes reais.

Fechando o ciclo de apresentações de equações do 2º grau, tem-se as que não possuem raízes reais, mencionando assim, a existência do conjunto dos números complexos.

Determine o conjunto das soluções de cada equação:

a-) $x^2 + x + 2 = 0$

$$x^2 + x + 2 - 2 = -2$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = -2 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{7}{4}$$

Entretanto, o quadrado de qualquer número real não é negativo, ou seja, $S=\{\quad\}$.

b-) $x^2+x+1=0$

$$x^2+x+1-1=-1$$
$$x^2+x=-1$$
$$x^2+x+\frac{1}{4}=-1+\frac{1}{4}$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$$

Como o quadrado de qualquer número real não é negativo, então $S=\{\quad\}$.

c-) $x^2-5x+71=0$

d-) $5x^2+3x+5=0$

e-) $y^2-4y+5=0$

f-) $4x^2+8x+6=0$

g-) $4x^2-2x+1=0$

h-) $t^2-7t+15=0$

i-) $5x^2-2x+5=0$

j-) $x^2+6x=-40$

k-) $x^2+5x=-39$

l-) $x^2+9=0$

m-) $x^2-2x+4=0$

n-) $x^2-5x+8=0$

o-) $x^2+9=4x$

p-) $7x^2+x+2=0$

q-) $(x-3)^2=-2x^2$

r-) $3x^2-4x+2=0$

s-) $k^2+15k+56=0$

t-) $\frac{x^2}{3}=-\frac{x}{3}-2$

Aula 6: Exercícios de fixação

Propor exercícios de fixação a fim de exercitar os tópicos apresentados anteriormente, entretanto neste momento faça alternadamente para que o aluno possa identificar em qual dos casos se encaixa cada exercício.

1-) Determine o conjunto das soluções de cada equação:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $x^2 - 8x + 12 = 0$
c) $x^2 + 2x - 8 = 0$
d) $x^2 - 5x + 8 = 0$
e) $2x^2 - 8x + 8 = 0$
f) $x^2 - 4x - 5 = 0$
g) $-x^2 + x + 12 = 0$
i) $-x^2 + 6x - 5 = 0$
j) $6x^2 + x - 1 = 0$
k) $3x^2 - 7x + 2 = 0$
l) $2x^2 - 7x = 15$
m) $x^2 + 5x + 6 = 0$
n) $x^2 - 7x + 12 = 0$
o) $x^2 + 5x + 4 = 0$
p) $7x^2 + x + 2 = 0$
q) $x^2 - 18x + 45 = 0$
r) $-x^2 - x + 30 = 0$
s) $x^2 - 6x + 9 = 0$

2-) Determine o conjunto das soluções de cada equação:

a) $4x^2 + 9 = 12x$
b) $x^2 = x + 12$
c) $2x^2 = -12x - 18$
d) $x^2 + 9 = 4x$

e) $25x^2 = 20x - 4$

f) $2x = 15 - x^2$

3-) Determine o conjunto das soluções de cada equação:

a) $x^2 + 3x - 6 = -8$

b) $x^2 + x - 7 = 5$

c) $4x^2 - x + 1 = x + 3x^2$

d) $3x^2 + 5x = -x - 9 + 2x^2$

e) $4 + x(x - 4) = x$

f) $x(x + 3) - 40 = 0$

g) $(x + 3)^2 = 1$

h) $(x - 5)^2 = 1$

i) $(2x - 4)^2 = 0$

j) $(x - 3)^2 = -2x^2$

APÊNDICE B – Uma proposta para ensino de funções quadráticas

Iniciando com alguns exemplos. Dado $f(x) = -x^2 + 7x - \frac{49}{4}$, primeiramente nota-se que $x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$, assim tendo:

$$f(x) = -x^2 + 7x - \frac{49}{4}$$

$$f(x) = (-1)\left(x^2 - 7x + \frac{49}{4}\right)$$

$$f(x) = (-1)\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$$

Ao reescrever $f(x)$ dessa forma, fica evidente que o maior valor possível para $f(x)$ é 0 , (pois $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$) e esse valor é atingido quando $x = \frac{7}{2}$.

Dando prosseguimento, o próximo exemplo é $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Para iniciar observe que $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$, assim:

$$g(x) = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6$$

$$g(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4}$$

$$g(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Ao reescrever $g(x)$ dessa forma, fica claro que o menor valor possível para $g(x)$ é $-\frac{1}{4}$ (uma vez que $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$) e esse valor é atingido quando $x = \frac{5}{2}$.

Agora, analisando $h(x) = 3x^2 + 25x - 10$, observa-se que $x^2 + \frac{25}{3}x + \frac{625}{36} = \left(x + \frac{25}{6}\right)^2$ assim tem-se:

$$h(x) = 3x^2 + 25x - 10$$

$$h(x) = 3\left(x^2 + \frac{25}{3}x + \frac{625}{36} - \frac{625}{36}\right) - 10$$

$$h(x) = 3\left(x^2 + \frac{25}{3}x + \frac{625}{36}\right) - 10 - 3.\frac{625}{36}$$

$$h(x) = 3\left(x + \frac{25}{6}\right)^2 - \frac{120}{12} - \frac{625}{12}$$

$$h(x) = 3\left(x + \frac{25}{6}\right)^2 - \frac{745}{12}$$

Reescrevendo assim $h(x)$, fica claro que o menor valor possível para $h(x)$ é $-\frac{745}{12}$, (uma vez que $\left(x + \frac{25}{6}\right)^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$) e esse valor é atingido quando $x = -\frac{25}{6}$.

Observando $p(x) = 2x^2 + 2x + 3$, primeiro nota-se que $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, assim se tem:

$$p(x) = 2x^2 + 2x + 3$$

$$p(x) = 2(x^2 + x) + 3$$

$$p(x) = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 3$$

$$p(x) = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 3 - 2.\frac{1}{4}$$

$$p(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{6}{2} - \frac{1}{2}$$

$$p(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$$

Ao reescrever $p(x)$ dessa forma, visualiza-se melhor o menor valor possível para $p(x)$ que é $-\frac{5}{2}$ (uma vez que $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$) e esse valor é atingido quando $x = -\frac{1}{2}$.

A seguir são propostos exercícios como sugestão de treinamento de estudo de funções quadráticas.

1-) Calcule as raízes, caso existam, das seguintes funções quadráticas abaixo.

a-) $f(x) = x^2 - 1$

b-) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

c-) $f(x) = x^2 + x - 2$

d-) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

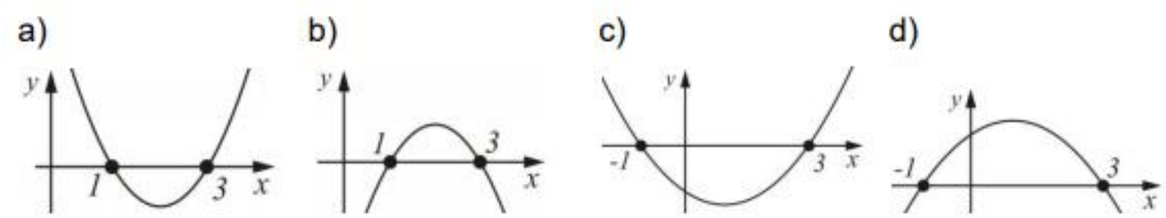
e-) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

f-) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

g-) $f(x) = x^2 - x - 2$

h-) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

2-) O esboço do gráfico da função quadrática $f(x) \ = \ 2x^2 \ - \ 8x \ + \ 6$ é:



3-) Calcule as raízes, caso existam, das seguintes funções quadráticas abaixo.

a) $y \ = \ -x^2 \ + \ 6x \ + \ 5$

b) $y \ = \ -x^2 \ - \ 6x \ + \ 5$

c) $y \ = \ -x^2 \ - \ 6x \ - \ 5$

d) $y \ = \ -x^2 \ + \ 6x - 5$

e) $y \ = \ x^2 \ - \ 6x \ + \ 5$

Tem-se que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ é equivalente a $ax^2 + bx = -c$, multiplicando os dois membros por $4a$ temos $4a.(ax^2 + bx) = 4a(-c)$, ou seja, $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$. O lado esquerdo da equação acima pode ser interpretado como a soma da área de um quadrado de lado $2ax$ com a área de dois retângulos de lados b e $2ax$. Para "completarmos o quadrado", falta adicionar à expressão $4a^2x^2 + 4abx$ a área de um quadrado de lado b. Assim, adicionando b^2 aos dois membros da equação $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$, se obtém $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$, ou seja, $(2ax + b)^2 = -4ac + b^2$.

Contudo, é dado que $ax^2 + bx + c = \frac{(2ax+b)^2}{4a} + \frac{-b^2+4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$, para simplificar a expressão tem-se $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{-b^2+4ac}{4a}$, obtendo assim f na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ que é sua forma padrão. Assim, é possível concluir que o vértice do gráfico da parábola, representada pela função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem coordenadas $(h,k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$, seu eixo de simetria é a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$, e sua imagem será o intervalo $\left[\frac{-b^2+4ac}{4a}, +\infty\right)$ se $a > 0$ ou o intervalo será $\left(-\infty, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right]$ se $a < 0$. Ou seja, através do completamento de quadrados conseguimos avaliar a função quadrática.

Referências

ANDRINI A., VASCONCELLOS M. J. **Praticando Matemática 9.** 4.ed. Renovada. - São Paulo: Editora do Brasil, 2015

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª série):** Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2001.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª série):** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CENTURIÓN M., JAKUBOVIC J. **Matemática na medida certa**. 1.ed. São Paulo: Leya, 2015.

D'AMBROSIO, B. S. **Como Ensinar Matemática Hoje?** SBEM, Brasília, ano II, n.2, p.15-19, 1989.

D´AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática , 1991.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris: Matemática: Ensino Fundamental 2**. São Paulo: Ática, 2016.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação. São Paulo: SEE, 2010.

MOREIRA, M. A. **O que é afinal aprendizagem significativa?** Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>. Acesso em: 27 de setembro de 2018.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. 2 reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RODRIGUES, L. L. **A Matemática ensinada na escola e a sua relação com o cotidiano.** Brasília: UCB, 2005.

ROQUE, T. **A História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos.** 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.