



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RAIMUNDO NONATO BARBOSA CAVALCANTE

TEOREMA DE BORSUK NO PLANO DE MINKOWSKI

QUIXADÁ-CEARÁ

2018

RAIMUNDO NONATO BARBOSA CAVALCANTE

TEOREMA DE BORSUK NO PLANO DE MINKOWSKI

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Ciências e Letras do Sertão Central – FECLESC, pólo Quixadá, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira

QUIXADÁ-CEARÁ

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Cavalcante, Raimundo Nonato Barbosa.

Teorema de Borsuk no Plano de Minkowski [recurso eletrônico] / Raimundo Nonato Barbosa Cavalcante. - 2018.

1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 60 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Quixadá, 2018.

Área de concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira.

1. Recobrimento de Figuras. 2. Teorema de Borsuk.
3. Plano de Minkowski. I. Título.

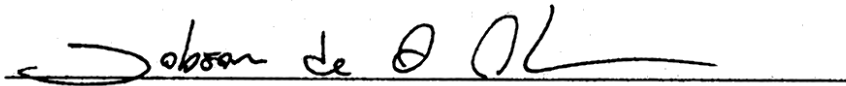
RAIMUNDO NONATO BARBOSA CAVALCANTE

TEOREMA DE BORSUK NO PLANO DE MINKOWSKI

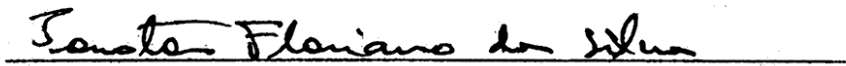
Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Ciências e Letras do Sertão Central – FECLESC, pólo Quixadá, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 20 de setembro de 2018.

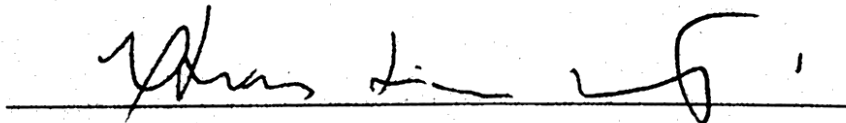
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. Dr. Ulisses Lima Parente
Universidade Estadual do Ceará – UECE

A Meus Avós (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus!

Aos meus pais, Paulo Rodrigues Cavalcante e Bernadete Barbosa Cavalcante, que sempre me incentivaram e acompanharam de perto a conquista desse sonho.

A Maria Hortência Rodrigues Sousa, minha namorada, que me apoiou, incentivou e possibilitou a finalização desse trabalho.

Ao meu professor e Orientador Jobson de Queiroz Oliveira pela paciência e presteza com o qual me orientou na construção desse trabalho.

Aos professores Luzeilton, Tony e Ulisses.

Aos colegas de curso pela parceria que formamos nesse período.

Ao meu amigo César Marcos do Nascimento Lucas pelos incentivos ao ingresso no profmat e durante todo o curso.

RESUMO

A geometria é um ramo da matemática que apresenta inúmeros conceitos, que podem ser abordados de diversas maneiras. Como ocorre com o recobrimento de figuras, uma área da matemática, especificamente geométrica, associada à divisão de figuras na perspectiva apresentada pelo teorema de Borsuk, sendo possível o estudo mesmo no plano usual da geometria euclidiana quanto plano de Minkowski, plano este assemelhado ao primeiro mas com características únicas. O presente trabalho tem como objetivo apresentar a dinâmica da construção do problema de Borsuk, que consiste na divisão de figuras em partes de menor diâmetro no plano de Minkowski. Nesse caso, a distância entre dois pontos é a soma dos módulos da diferença absoluta entre suas coordenadas cartesianas, diferindo assim da distância entre dois pontos considerada na geometria euclidiana e apresentar tópicos relevantes desse estudo aos estudantes do 3º ano do ensino médio da Escola Ministro Jarbas Passarinho, trabalho este conduzido em forma de oficinas. O problema do recobrimento de figuras é detalhado e a partir de então apresentado o problema da divisão de figuras, tornando os problemas bem próximos, de tal forma que recobrir figuras passa a ser uma modalidade de dividir figuras e a partir de então se faz um estudo do plano de Minkowski. É apresentando as peculiaridades desse plano, essencialmente no que tange à distância entre dois pontos e seu círculo unidade, que servem de base para o referido estudo. As atividades realizadas com os alunos foram formatadas para que os mesmos interagissem, com auxílio do professor no momento em que os mesmos apresentassem alguma dificuldade, tendo primeiramente um resgate de conteúdos prévios necessários para a compreensão e realização das oficinas, tais como semelhança de figuras e distância entre dois pontos.

Palavras-chave: Recobrimento de figuras. Teorema de Borsuk. Plano de Minkowski.

ABSTRACT

The geometry is a branch of mathematics that introduce many concepts, that can be approached in different forms. Just as it occurs with covering of figures, a mathematics part, specifically geometric, in association at the division of figures the perspective presented of Borsuk's theorem being possible the same study in a usual plan of the euclidean geometry as also in Minkowski's plan, being such plan has similar characteristics but the second has specials characteristics. The present paper has of goal is show the dynamic of the construction the Borsuk problem's, that consists of the division of figures in smaller parts in the Minkowski's plan. In this case, the distance between two points is the sum of the absolute differences of their cartesian coordinates, differing of the distance between two points in euclidean geometry and introduce students in the third year high school of the Ministro Jarbas Passarinho school relevant topics, which work was conducted in the form of workshops. The problem of cover of figures is detailed and then is presented the division of figures problem, it making the problems close stay, of such form that transform covering figures in a model of division of figures and from then on a study of the Minkowski's plan. Is showed the peculiarities of this plan, in that it concerns to distance between two points and your unit circle that are the base for referred study. The realized activities with the students was formatted for that they would interact, with the help of the teacher in moment that the same showed any difficult, having initially a revision of previous content for the comprehension and realization of workshops, such as similarity of figures and distance between two points.

Keywords: Covering of figures. Borsuk's theorem. Minkowski's plan.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Hermann Minkowski	14
Figura 2 – Karol Borsuk	16
Figura 3 – Região convexa (esquerda) e não convexa (direita)	18
Figura 4 – Hexágono	18
Figura 5 – Recobrimento do hexágono regular por outros cinco hexágonos regulares homotéticos	19
Figura 6 – Recobrimento do paralelogramo e do círculo	20
Figura 7 – Um círculo não se recobre por dois outros de diâmetro menor	20
Figura 8 – Possibilidades de trajetos que o mototáxi pode percorrer.	22
Figura 9 – Ruas hipotéticas de Minkowski	22
Figura 10 – Distâncias no plano	25
Figura 11 – Círculo unidade.	26
Figura 12 – G é simétrico em relação a O	27
Figura 13 – Raios r e r' nas direções dos vetores BC e CA	29
Figura 14 – Representação da homotetia	30
Figura 15 – Círculo contém F	31
Figura 16 – Distância do ponto A a t	32
Figura 17 – Segmento de t pertencente a F	33
Figura 18 – Retas de apoio de F(esq.) e largura de F (dir.)	33
Figura 19 – Círculo com diâmetro igual a largura de F	34
Figura 20 – Largura de F igual a d	35
Figura 21 – Largura do círculo	36
Figura 22 – Exemplo de figura de largura constante	37
Figura 23 – Soma de figuras convexas F e F'	37
Figura 24 – Paralelogramo no plano de Minkowski	40
Figura 25 – Divisão de F e G no plano de Minkowski	40
Figura 26 – Retas de apoio paralelas aos lados do paralelogramo ABCD	42
Figura 27 – Reta s intersecta o paralelogramo ABCD	42
Figura 28 – Hexágono que contém o paralelogramo	43
Figura 29 – Divisão do hexágono em duas partes	43
Figura 30 – F contém vértices de G' ou vértices de um triângulo equilátero a partir de G'	44

Figura 31 – Divisão da figura G a partir do paralelogramo F’	46
Figura 32 – Divisão da figura F’ por p	47
Figura 33 – Possibilidades para M e N situados em G	47
Figura 34 – Semelhança entre triângulos	51
Figura 35 – Figura base da atividade 1	51
Figura 36 – A esquerda: homotetia de centro transforma r em r' r. A direita: $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$ e $\overline{OB'} = k \cdot \overline{OB}$ então $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$...	52
Figura 37 – Semelhança obtida por homotetia	53
Figura 38 – Alunos realizando as atividades da oficina - Homotetia	54
Figura 39 – Distância entre dois pontos	54
Figura 40 – Trajeto para o resgate	56
Figura 41 – Plano cartesiano	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distâncias - origem aos pontos dados	57
Tabela 2 – Distâncias - origem a outros pontos dados	58

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	14
2.1	SOBRE BORSUK E MINKOWSKI	14
2.1.1	Breve Histórico de Hermann Minkowski	14
2.1.2	Breve Histórico de Karol Borsuk	16
2.2	RECOBRIMENTO DE FIGURAS	18
2.3	INTRODUÇÃO A GEOMETRIA DO PLANO DE MINKOWSKI	21
2.4	PLANO DE MINKOWSKI	26
3	TEOREMA DE BORSUK	39
3.1	O PROBLEMA DE BORSUK NO PLANO DE MINKOWSKI	39
3.2	TEOREMA DE BORSUK – DEMONSTRAÇÃO	45
4	EM SALA DE AULA – PROPOSTAS PEDAGÓGICAS	49
4.1	HOMOTETIAS	50
4.2	GERANDO O CÍRCULO UNIDADE NO PLANO DE MINKOWSKI	54
5	CONCLUSÃO	59
	REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

Quando se trata de Matemática, há um universo extenso de conteúdos que podem ser abordados por um pesquisador, professor ou aluno, ao buscar um aprofundamento. Sejam em qualquer área de atuação matemática: Números e Funções, Geometria, Matemática Discreta, Tratamento da Informação ¹, entre tantos outros mais voltados ao estudo matemático superior.

Ao buscar falar de determinado assunto e principalmente ter uma visão de como tal trabalho ou pesquisa pode ser trazido à realidade de jovens estudantes do ensino médio temos um bom desafio. Aqui há inúmeras possibilidades, o que fazer, como fazer, quais resultados esperar e principalmente a reação dos atores envolvidos na proposta.

Para a realização do trabalho é fundamental o envolvimento na pesquisa. E quando se trata de assuntos diferentes do habitual no universo do professor de matemática do Ensino Médio, o trabalho se torna a princípio apreensivo, porém quando se debruça sobre o mesmo e começa-se a desenvolvê-lo, a experiência vai se tornando mais gratificante, e cada resultado, progresso obtido, dar mais ânimo para continuá-lo.

Uma das partes mais gratificantes está na parte prática. Desde a formatação das atividades que envolvem os alunos, quando imagina-se a reação dos mesmos ao trabalho a ser desenvolvido, na execução destas, na providência de materiais, entre outros.

Assim, este trabalho tem o objetivo de apresentar ao leitor uma versão do teorema de Borsuk aplicado ao plano de Minkowski, com suas características e alguns resultados, e utilizar conceitos necessários ao desenvolvimento do tema em atividades com a alunos do ensino médio, a fim de apresentá-los conceitos novos, diversos do currículo, e ainda aproveitando o decorrer das oficinas para reforçar conteúdos matemáticos importantes como semelhança, localização de pontos no plano, segmento de retas, distâncias entre dois pontos, definição de círculo e circunferência.

Os conceitos da geometria, divisão de figuras – conceito que recai no recobrimento de figuras – e o plano de Minkowski, foram desenvolvidos, respectivamente, pelos matemáticos Karol Borsuk (1905 — 1982) e Hermann Minkowski (1864 — 1909). Um breve histórico de ambos é apresentado na seção Preliminares.

Ainda nessa seção iniciamos o estudo do problema do recobrimento de figuras, iniciando com uma visão mais geral, depois voltando para o problemas da divisão no plano apresentando problemas e resultados. Passamos então a apresentar o Plano de Minkowski e

¹ Tal divisão é apresentada na discussão curricular para o Ensino Médio, a partir dos estudos da SBM, com vistas a elaboração do currículo, reiniciados em Novembro de 2014 como contribuição à construção da Base Nacional Comum Curricular.

suas características, um plano que apresenta uma geometria com característica peculiar, distanciando a mesma da geometria euclidiana, embora a geometria do Plano de Minkowski não seja uma geometria neutra ou absoluta.

Na seção seguinte abordamos o Teorema de Borsuk, aplicado ao recobrimento de figuras. Uma vez que o tal teorema é relacionado à divisão de figuras, assim é feita uma releitura da aplicação do recobrimento de figuras na divisão das mesmas, tendo isso lugar no Plano de Minkowski.

As atividades formatadas para a interação dos alunos do Ensino Médio - no caso alunos das turmas do 3º ano da Escola Ministro Jarbas Passarinho, escola da rede estadual de ensino do Ceará, localizada na cidade de Sobral - são apresentadas na quarta seção. São duas atividades que tem como tema dois conteúdos base de todo o trabalho teórico apresentado, Homotetias e Gerando o círculo unidade no Plano de Minkowski, trazendo uma linguagem acessível, trabalhadas de forma dinâmica como oficinas. E na quinta seção apresentamos a conclusão.

2 PRELIMINARES

2.1 SOBRE BORSUK E MINKOWSKI

2.1.1 Breve Histórico de Hermann Minkowski

Figura 1 – Hermann Minkowski



Fonte: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Minkowski5.Jpeg>

Hermann Minkowski, nascido em 22 de Junho de 1864, na época em Alexotas, Império Russo, atual Kaunas, Lituânia. Morreu jovem, com 44 anos de idade em 12 de Janeiro de 1909 em Göttigen, Alemanha. Seu pai, Lewin Minkowski era um homem de negócios, e sua mãe era Rachel Taubmann. Hermann tinha três irmãos e uma irmã. Os pais de Hermann eram alemães, porém ele nasceu na Rússia, em um período em que a família viveu lá. Quando ele tinha oito anos de idade a família voltou para Alemanha e foram viver em Königsberg.

Minkowski mostrou seu talento enquanto estudava no ginásio em Königsberg. Nessa época ele já lia os trabalhos de Dedekind, Dirichlet e Gauss. Suas notáveis habilidades mostradas foram descritas em uma carta que Heinrich Weber, então na universidade de Königsberg, escreveu para Dedekind em 1881.

Ele estudou na Universidade de Königsberg, ingressando em Abril de 1880, tendo cursado três semestres na Universidade de Berlim, lá tornou-se amigo pessoal de Hilbert também estudante universitário da mesma universidade. Tornou-se doutor em 1885 pela Universidade de Königsberg com a tese intitulada *Untersuchungen über quadratische Formen, Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält*².

² Studies on square shapes, determining the number of different forms, containing a given genus - Estudos sobre formas quadradas, determinando o número de formas diferentes, contendo um determinado gênero.

Minkowski interessou-se cedo pelas formas quadráticas em seus estudos universitários. Em 1883 ele ganhou o Grande Prêmio de Ciências Matemáticas da Academia de Ciências de Paris pela solução do *problema do número de representações de um inteiro como a soma de cinco quadrados* cuja fórmula Eisenstein tinha exibido em 1847 mas não demonstrado. Com apenas 18 anos de idade, Minkowski reconstruiu a teoria de Eisenstein das formas quadráticas e produziu uma prova elegante para ganhar o prêmio.

Minkowski ensinou na Universidade de Bonn de 1887 até 1892, retornou para Königsberg onde passou dois anos, antes de ser indicado para Eidgenössische Polytechnikum Zürich, lá ele se tornou colega de trabalho de seu amigo Hurwitz que havia sido indicado para ocupar a cadeira deixada por outro.

Ele influenciou bastante Einstein, com o desenvolvimento de uma nova visão do espaço-tempo e construiu os fundamentos matemáticos da teoria da relatividade quando em 1907 verificou que o trabalho de Lorentz e Einstein poderia ser melhor compreendido em um espaço não euclidiano. Ele considerou espaço e tempo, antes pensados independentes em um contínuo espaço-tempo quadridimensional. Essas ideias foram usadas por Einstein para desenvolver a teoria geral da relatividade.

Em Dezembro de 1986, Minkowski ingressou no comitê organizador do Primeiro Congresso Internacional de Matemática que ocorreu em Zurich em 1987. Ele não pode ir ao encontro preliminar em Julho. Ele juntou-se ao comitê de entretenimento e foi nomeado para o subcomitê responsável pela escolha dos palestrantes.

Minkowski agiu como um dos secretários na ICM 1900 em Paris, foi palestrante na ICM 1904 em Heidelberg, com a palestra intitulada *Zur Geometrie der Zahlen* (Na Geometria dos Números) e representou a Universidade de Göttingen, da mesma forma na ICM de 1908, em Roma. Seu maior destaque foi com o trabalho Geometria dos Números, iniciado em 1890. Sua atuação nessa área o levou a trabalhar em corpos convexos e a questões sobre problemas de recobrimento, maneiras pelas quais figuras de uma determinada forma podem ser colocadas dentro de outra figura.

2.1.2 Breve Histórico de Karol Borsuk

Figura 2 – Karol Borsuk



Fonte:<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Borsuk.jpg>

Karol Borsuk nasceu em 08 de Maio de 1905, em Varsóvia, Império Russo, atual Polônia. Morreu em 24 de Janeiro de 1982 em também em Varsóvia. Seu pai Marian Borsuk era cirurgião, sua mãe era Zofia Maciejewska. Borsuk frequentou a escola em Varsóvia mas com o início da Primeira Guerra Mundial, antes dele iniciar a escola secundária, ocorreram muitas mudanças na Polônia.

Em Agosto de 1915, as forças russas que mantinham o controle da Polônia por muitos anos retiraram-se de Varsóvia. Alemanha e Austria-Hungria tomaram o controle de parte do país e a Universidade de Varsóvia foi refundada e começou a operar como uma Universidade Polonesa. Rapidamente uma forte escola de matemática se formou na Universidade de Varsóvia, Sendo a topologia uma das principais áreas. Janiszewski, Mazurkiewicz, Kuratowski e Sierpinski foram os principais expoentes que atuaram nesse período nessa universidade. Quando Borsuk entrou na Universidade de Varsóvia para estudar matemática lá era um avançado centro de pesquisa em topologia, Saks e Mazurkiewicz foram professores e fizeram grande avanço nessa área.

Borsuk obteve seu grau de mestre da Universidade de Varsóvia em 1927 e então, em 1929 começou a ensinar na Universidade. Ele continuou seus estudos no doutorado, sobre a supervisão do professor Mazurkiewicz, tendo conquistado o título de doutor em 1930 com a dissertação *Sur les rétractes*³, publicado em 1931 na qual ele apresentou a teoria das retrações.

³ On retractions → Retrações.

O segundo centro de pesquisa em matemática na Polônia era Lvov. Borsuk o visitou e em uma dessas visitas iniciou uma colaboração com Ulam. Em Lvov, Borsuk juntou-se aos matemáticos no Scottish Café e contribuiu nos problemas abertos publicados em um livro.

A carreira de Borsuk foi interrompida pelo início da Segunda Guerra Mundial. Depois da invasão da Polônia pela Alemanha, em 1939, a vida lá passou a ser extremamente difícil. Havia uma estratégia alemã para acabar com a vida intelectual da Polônia e para que isso ocorresse eles enviaram muitos acadêmicos para os campos de concentração ou os assassinavam. Porém, os poloneses tiveram uma experiência de sobreviver a tais ataques durante o período de dominação russa e usaram a mesma tática, organizaram uma universidade secreta. Kuratowski, professor na universidade secreta, escreveu: [...] *Devido a essa organização clandestina, contrariando condições extremamente difíceis, continuamos a produzir trabalhos científicos e ensinar, embora em pequena escala, é claro. A importância da educação clandestina consiste em manter, entre outras, o espírito da resistência, bem como otimismo e confiança no futuro, tão necessários nas condições de ocupação.*[...]

Durante a ocupação nazista Borsuk tentou manter a Universidade de Varsóvia funcionando como Kuratowski descreveu. Porém Borsuk foi descoberto pelos nazistas e preso, escapou da prisão e permaneceu escondido até o fim da guerra.

Terminada a Segunda Guerra Mundial todo o sistema educacional tinha sido destruído e precisava ser completamente reconstruído. Borsuk e Kuratowski tiveram importante papel nessa reconstrução. Borsuk continuou em seu posto na Universidade de Varsóvia que ele manteve ao longo de sua carreira, sendo promovido a professor em 1946.

Em Varsóvia, Borsuk conduziu um seminário na qual desenvolveu uma atmosfera de sucesso única de cooperação internacional. Ele influenciou fortemente o desenvolvimento de toda a área de topologia infinito-dimensional com sua teoria da retração e teoria dos corpos, teoria esta que passou a ser o tópico mais discutido nesse seminário.

Muitas honras foram dadas a Karol Borsuk por suas notáveis contribuições. Ele passou a ser vice-diretor do Instituto de Matemática da Academia de Ciências Polonesa em Varsóvia em 1956. Foi-lhe concedido o título de membro honorário da Sociedade Matemática Polonesa em 1978, ano em que também organizou a Conferência Internacional em Topologia Geométrica.

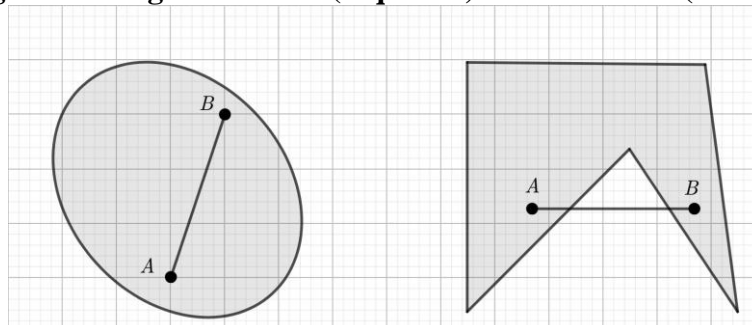
2.2 RECOBRIMENTO DE FIGURAS

Para iniciarmos o estudo do recobrimento de figuras precisamos antes de algumas definições importantes

Definição 1. Em uma região limitada do plano, designada pela figura F , o *diâmetro* é uma distância d tal que, primeiramente entre quaisquer dois pontos A' e B' de F não há distância maior que d e que seja possível ainda encontrar, em tal figura, outros dois pontos A e B tal que essa distância seja exatamente igual a d , ou seja, o diâmetro de uma figura é a máxima distância possível entre dois pontos dessa figura.

Definição 2. Uma região F no plano é convexa quando, para todos os pontos $A, B \in F$, tivermos $AB \subset F$. Caso contrário dizemos que F é uma região não convexa.

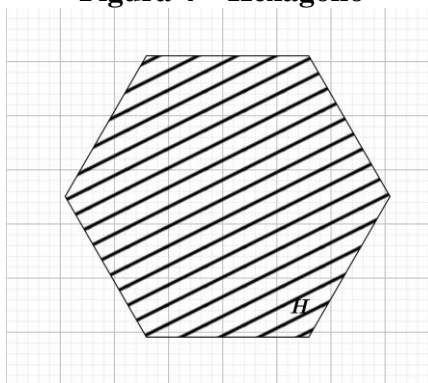
Figura 3 – Região convexa (esquerda) e não convexa (direita)



Fonte: Elaborado pelo autor

Seja o hexágono H abaixo uma figura convexa limitada

Figura 4 – Hexágono



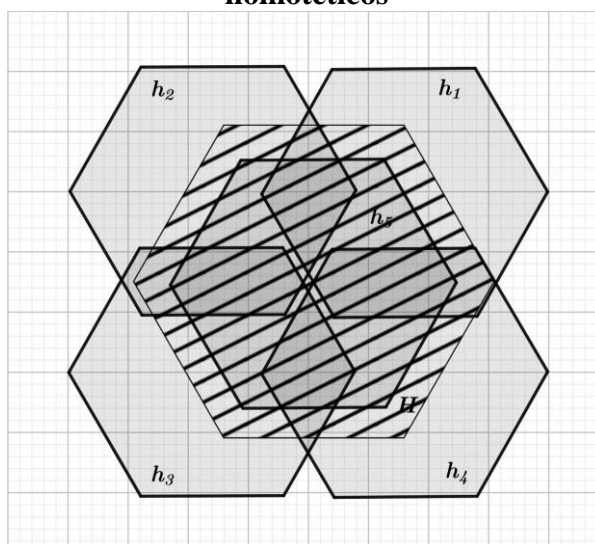
Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos recobri-lo por uma quantidade de hexágonos menores, sem que haja nenhum ponto de H que não esteja recoberto por pelo menos um dos hexágonos $h_1, h_2, h_3, h_4,$ e h_5 . Tais hexágonos são semelhantes ao hexágono original obtidos por *homotetia*.

Definição 3. Homotetia é transformação que multiplica por um fator constante a distância de um ponto qualquer do espaço a um ponto fixo, deslocando-o sobre a reta definida

por estes dois pontos, ou seja, dizemos que uma figura F' é homotética a outra F quando, no plano Π fixado um ponto O e dado um número real k , coeficiente de homotetia, $k \neq 0$, cada ponto A de F no plano Π associa ao ponto A' de tal forma que $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

Figura 5 – Recobrimento do hexágono regular por outros cinco hexágonos regulares homotéticos

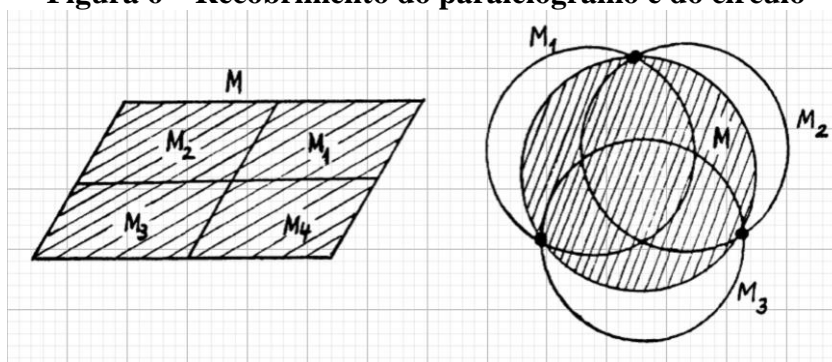


Fonte: Elaborado pelo autor

Definição 4. O *recobrimento de figuras* consiste na cobertura de uma figura convexa e limitada F por outras, cópias semelhantes a original, com diâmetro d' menor que o diâmetro d de F , ou seja, figuras homotéticas a F . Assim, um recobrimento de uma figura F é uma coleção de figuras F_1, F_2, \dots, F_e , homotéticas a F , com razão de homotetia $k < 1$, tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^e F_i$. O menor inteiro positivo para o qual existe cobertura de F será denotado por $b(F)$.

Se, por exemplo, $F \subset \mathbb{R}^2$ é um paralelogramo, então $b(F) = 4$. De fato uma figura F_1 , homotética a F , com coeficiente de homotetia k menor que 1 não pode conter dois vértices de F . Dessa forma, cada vértice P precisa de uma figura F' homotética a F nas mesmas condições de F_1 , para recobri-lo. Assim, a quantidade mínima de figuras $b(F)$ para recobrir tal paralelogramo é $b(F) \geq 4$, porém quatro são suficientes.

Figura 6 – Recobrimento do paralelogramo e do círculo



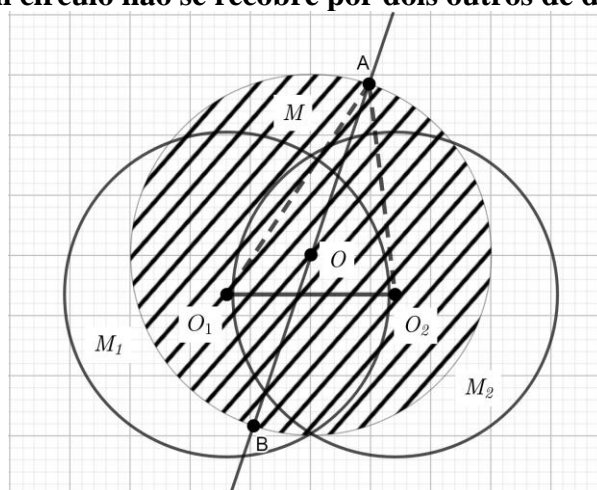
Fonte: V. Boltyanski et al., 1997, p. 256

No entanto, se M é uma figura limitada, convexa, com $M \subset \mathbb{R}^2$, diferente do paralelogramo então $b(M) = 3$. De fato, não é possível cobrir um círculo M com diâmetro d com outros dois círculos com diâmetro d' , $d' < d$, assim, $b(M) > 3$. Sendo M_1 e M_2 tais círculos de diâmetro d' , com centros O_1 e O_2 , traçando por O , centro do círculo M uma reta perpendicular ao segmento $\overline{O_1O_2}$. Tal reta intercepta a circunferência de M nos pontos A e B . Seja A o ponto situado no mesmo semiplano determinado pela reta que passa por $\overline{O_1O_2}$. Então,

$$\overline{OA_1} \geq \overline{OA} = r$$

$$\overline{OA_2} \geq \overline{OA} = r$$

Figura 7 – Um círculo não se recobre por dois outros de diâmetro menor



Fonte: Elaborado pelo autor

Os raios dos círculos M_1 e M_2 são menores que r e o ponto A não pertence a nenhum deles. Analogamente o mesmo ocorre tomando o ponto B no mesmo semiplano de O . Portanto, não é possível recobrir M por outros dois círculos de menor diâmetro. Mas com três círculos menores fica simples cobri-lo, assim, se a figura é um círculo, $b(M) = 3$. Para mais

esclarecimentos acerca de recobrimento de figuras e o número $b(F)$ consultar (BOLTIANSKI, etal, 1997), (BOLTIANSKI, GOJBERG, 1973).

2.3 INTRODUÇÃO A GEOMETRIA DO PLANO DE MINKOWSKI

Sejam dois pontos A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B) a distância euclidiana entre A e B é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

De onde obtemos os resultados a seguir

- $d_{AB} = 0$, se $A = B$;
- $d_{AB} = |x_A - x_B|$, se $y_A = y_B$;
- $d_{AB} = |y_A - y_B|$, se $x_A = x_B$;

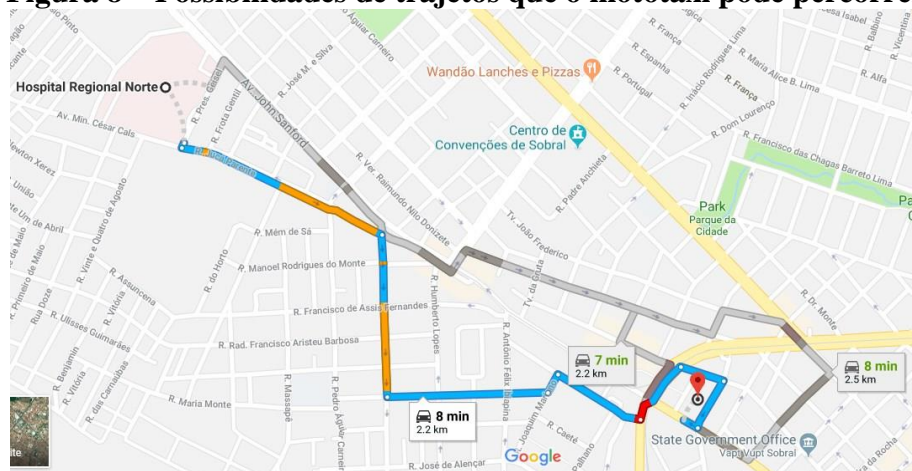
Tal forma de medir distâncias entre dois pontos representa a menor distância possível mas que em certos momentos, apesar de válida, não necessariamente é a mais adequada.

Vamos considerar como exemplo uma situação hipotética na cidade de Sobral: Um mototaxista que tem seu ponto em frete ao Hospital Regional Norte, bairro do Junco, verifica que precisa regularizar sua situação junto à prefeitura, no Centro, e para isso precisa ir até lá dar entrada nos papéis da regularização.

Em um mapa impresso ou aplicativo de celular, esses dois lugares podem ser representados por dois pontos, logo poderíamos verificar a distância que o mototaxista iria percorrer utilizando um sistema de coordenadas e a partir de então aplicar a definição de distância entre dois pontos usual.

Na verdade tal distância não será a mesma que o mototaxista percorrerá, ele simplesmente não pode ultrapassar prédios, praças ou qualquer edificação existente entre esses pontos, ele precisa obedecer ao traçado das ruas.

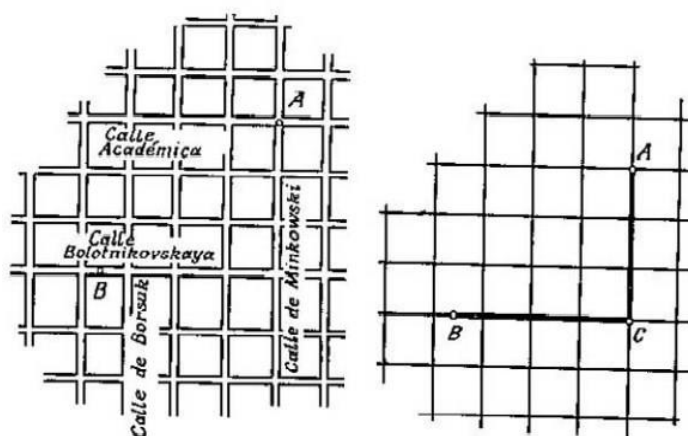
Figura 8 – Possibilidades de trajetos que o mototáxi pode percorrer



Fonte: Aplicativo Google Maps.

Suponhamos que nos encontramos em uma grande cidade. Essa cidade é planejada de tal forma que em seu plano as ruas estão traçadas verticalmente e horizontalmente, por todo seu território, equidistantes, como no plano cartesiano, em que as ruas são as retas passando por pontos determinados pelas unidades das coordenadas, todas paralelas e perpendiculares entre si. (fig. 9). Alguém, deseja ir do ponto A da cidade ao ponto B. Qual a melhor forma de percorrer este trajeto?

Figura 9 – Ruas hipotéticas de Minkowski



Fonte: Boltianski e Gojberg, 1973, p. 43

Para resolver esse problema o matemático russo Hermann Minkowski propôs uma métrica. A geometria dessa métrica ficou conhecida como a geometria do Plano de Minkowski, atualmente chamada de *geometria do táxi* ou *taxigeometria*. Minkowski escreveu e publicou um trabalho inteiro com várias métricas incluindo essa que ficou conhecida como a métrica do táxi.

Assim criou-se uma forma de encontrar as distâncias “reais” em um plano de ruas paralelas e ortogonais entre si, conhecida recentemente por Geometria Urbana, sendo assim denominada, porque as distâncias percorridas por um táxi, carro ou veículo qualquer pelas ruas aproximam-se melhor desta maneira de calcular distâncias do que no modo euclidiano, uma vez que esses transportes precisam obedecer o trajeto das ruas para chegar ao seu destino, usando o plano cartesiano usual com um sistema de coordenadas ortogonais xy .

Sem dúvida alguma, tendo o plano da cidade, é possível traçar com uma régua o segmento AB e medir seu comprimento. No entanto, em nossa cidade, tal distância poderia ser real, porém inacessível, já que para deslocar-se pelo segmento AB seria necessário passar através de paredes das casas. Portanto, essa métrica ficou assim conhecida especialmente por considerar a distância entre dois pontos como uma distância na qual são consideradas os traçados das ruas.

Assim, o menor percurso entre A e B é dado pela soma dos comprimentos, $AC + CB$, então deve-se considerar como a distância real entre os pontos A e B o comprimento ACB , apresentado na figura (fig. 9).

Além disso, não somente ACB é o único caminho de menor distância em oposição a considerarmos inicialmente a menor distância o comprimento do seguimento de reta AB . Aqui há uma série de outros caminhos reais de A até B como o mesmo comprimento de ACB , porém, caminho mais curto não há.⁴

Introduzindo no plano da cidade um sistema de coordenadas, com um ponto fixado como origem e os eixos coordenados traçados sobre duas ruas reciprocamente perpendiculares, a distância real entre os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ dessa cidade, o comprimento do segmento AB de acordo com a geometria adotada, é igual a

$$AB = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \quad (1)$$

- Tal geometria apresenta propriedades semelhantes às da geometria euclidiana:
- As distâncias são sempre não negativas, já que são dadas pela soma dos módulos;
- A distância entre A e B é zero se, e somente se, os pontos A e B coincidirem;
- É simétrica: a distância entre A e B é a mesma que a distância entre B e A ;

⁴ Em 1952 uma exposição foi exibido no Museu de Ciência e Indústria de Chicago, que destacou a geometria. Um pequeno livreto foi distribuído intitulado “Você vai gostar de geometria”. Nas páginas deste livreto a geometria de Minkowski foi chamada de geometria do táxi.

- Satisfaz a desigualdade triangular;
- Se A e B estiverem na mesma *rua horizontal* ou a mesma *rua vertical* então tal distância é igual a medida da distância na geometria euclidiana entre A e B.

Porém, sobre outros aspectos ela se distância bastante desta

- Se aplicarmos uma rotação ao segmento AB ela pode alterar a distância entre dois pontos.⁵

De tais propriedades deduz-se que a distância, outrora dada pelo comprimento de um segmento, agora pode ser dada por uma região do plano utilizando a soma dos comprimentos de seguimentos verticais e horizontais contidos nessa região. Assim temos mais de uma possibilidade para encontrar a distância d_{AB} . Por exemplo, se $A(2;1)$, $C(8;1)$, $B(8;6)$ e $D(2;6)$, então, todo ponto P do retângulo ABCD satisfaz a

$$d_{AB} = d_{AP} + d_{PB} \quad (2)$$

Se os pontos A e B são pontos pertencentes a uma mesma reta vertical, ou seja, $x_A = x_B$ ou analogamente, a uma mesma reta horizontal, ou seja, $y_A = y_B$, tal retângulo vai degenerar no segmento \overline{AB} , sendo, neste caso, a soma mínima entre os pontos A e B coincidente com o segmento \overline{AB} , assim como na geometria euclidiana.

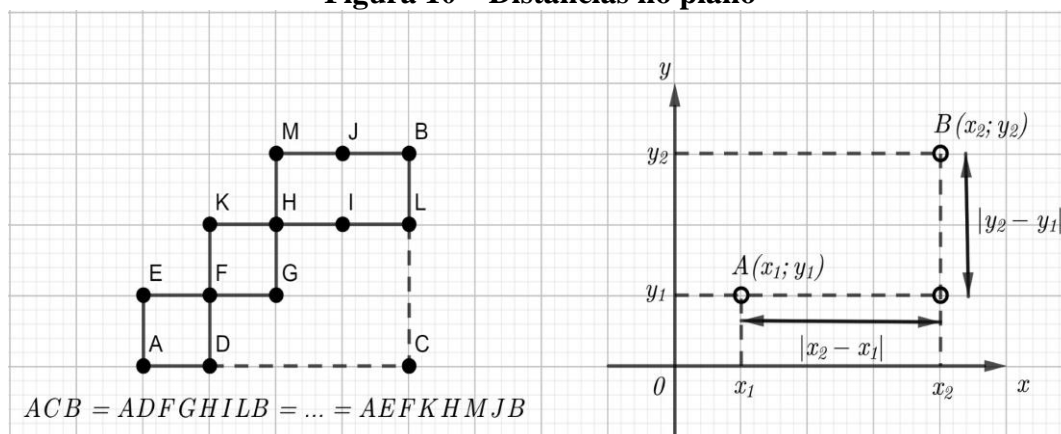
Conhecendo agora, como determinar distâncias “possíveis” entre dois pontos da cidade, e considerando que um círculo de centro O e raio r é o lugar geométrico dos pontos do plano que têm distância menor que ou igual a r de O.

Sendo *círculo unidade* o conjunto dos pontos cuja distância $d_{PO} \leq 1$ e seja $P(x,y)$ o conjunto dos pontos que satisfazem a desigualdade, descrevamos tal círculo no plano de Minkowski. Como o ponto O possui coordenadas (0,0), segundo (2) a distância do ponto O ao ponto P, será igual

⁵ Se $A = (0;0)$ e $B = (1;1)$, a distância $d_{AB} = |0-1| + |0-1| = 2$. Girando o segmento em torno da origem 45° no sentido anti-horário, A permanecerá o mesmo, enquanto B se transformará em B' que terá sua abscissa igual a 0 e a ordenada será a distância euclidiana entre A e B, ou seja $\sqrt{2}$, como B' está na mesma reta vertical que A, a distância entre A e B no plano de Minkowski será agora $d_{AB} = \sqrt{2}$.

$$\overline{OP} = |x + y| \quad (3)$$

Figura 10 – Distâncias no plano



Fonte: Elaborado pelo autor

Como o plano de Minkowski traz uma noção de distância diferente daquela apresentada convencionalmente, então tal figura geométrica assume agora uma forma bem característica, intrigante para o modo a qual estamos familiarizados.

Tal circunferência assume a forma apresentada na fronteira de um quadrado, com diagonais paralelas aos eixos coordenados. Sendo $O = (x_0; y_0)$, a equação da circunferência de centro O e raio r é

$$|x - x_0| + |y - y_0| = r \quad (4)$$

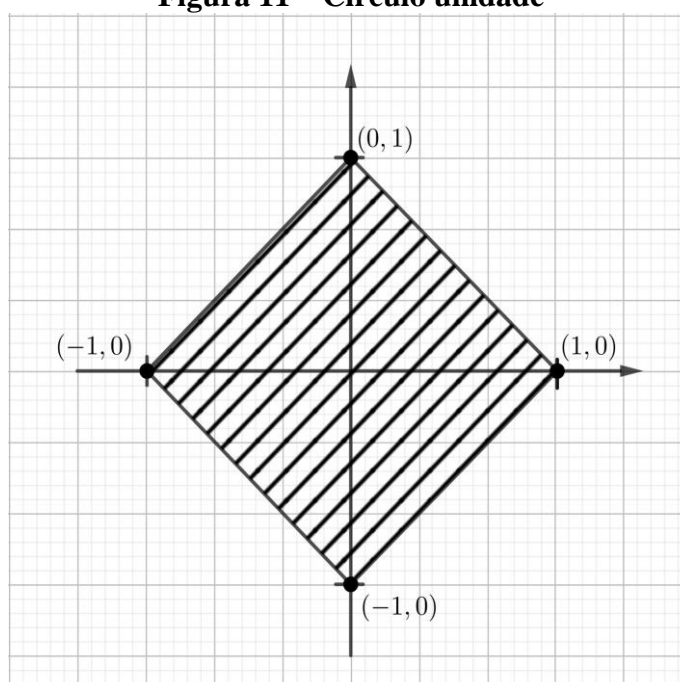
A distância no plano de Minkowski não varia por translação, podemos considerar uma circunferência com centro O na origem do plano. Assim para qualquer ponto pertencente a fronteira do quadrado sua distância à origem de fato é r .

Consequentemente, nesta cidade o *círculo unidade* se determinará pela desigualdade

$$|x| + |y| \leq 1 \quad (5)$$

Então, no plano dessa cidade tal *círculo unidade* é um quadrado. (fig. 11)

Figura 11 – Círculo unidade



Fonte: Elaborado pelo autor

Tendo agora como base o *círculo unidade*, podemos determinar a distância entre dois pontos A e B quaisquer do plano, como indicado anteriormente.

Precisamente, sendo dados dois pontos A e B arbitrários, marcando no contorno do *círculo unidade* um ponto C, tal que $OC \parallel AB$ e então o comprimento do segmento AB será igual a razão

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OC}}$$

Esta ideia de considerar como o *círculo unidade* certa figura centrossimétrica é a base da geometria de Minkowski no plano.

2.4 PLANO DE MINKOWSKI

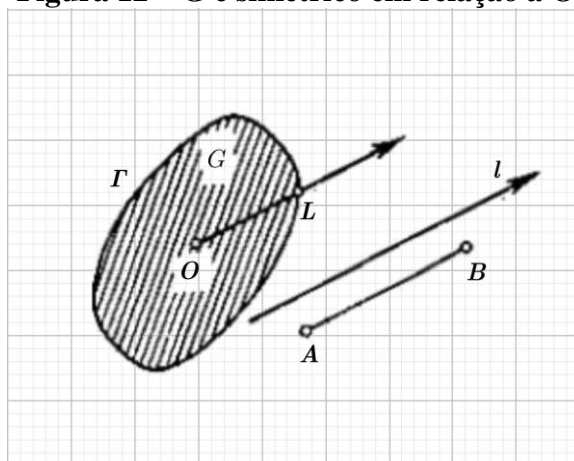
Seja G uma figura limitada plana convexa, simétrica em relação a certo ponto O (fig. 12) designemos por Γ a curva que delimita a figura G. Suponhamos que a unidade de comprimento que corresponde a direção l é o segmento \overline{OL} de raio paralelo a essa direção, desde o ponto O até o ponto L de interseção deste raio com a linha Γ . O comprimento do segmento \overline{AB} em relação ao novo sistema de escalas, se determina neste caso pela razão

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OL}}$$

de onde \overline{OL} é a unidade de comprimento paralela a direção l , que se determina pelo vetor \overline{AB} . (Nesse caso, em que o ponto A coincide com o ponto B, é natural considerar que o

comprimento de \overline{AB} é igual a zero). Sendo M um ponto arbitrário do plano, temos que $\overline{OM} = 1$ se, e somente se, quando o ponto M se encontra na curva Γ . Se esse ponto está situado no interior da figura G, então $\overline{OM} < 1$ e se M está fora de G, $\overline{OM} > 1$.

Figura 12 – G é simétrico em relação a O



Fonte: Boltianski e Gojberg, 1973, p. 44

Digamos que se a figura G coincide com o círculo, chegaremos a uma definição habitual, em que o comprimento do segmento depende somente de seu tamanho mas não de sua direção, enquanto que, se G é um quadrado (fig. 11), chegaremos a definição do comprimento citada anteriormente. Indiquemos agora as propriedades principais da nova definição de comprimento. Como já sabemos,

$$AB > 0 \quad (6)$$

Tendo em conta que a igualdade só se verifica quando os pontos A e B são coincidentes. E ainda, da simetria central da figura G se deduz a igualdade

$$AB = BA$$

E finalmente, se \overline{AB} e \overline{CD} não são segmentos paralelos e ainda

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = k \implies \overline{AB} = k \cdot \overline{CD} \quad (7)$$

a convexidade da figura G assegura a validade de uma das mais importantes propriedades do novo comprimento:

Teorema 1. Desigualdade Triangular: Em todo ΔABC , o comprimento de um dos seus lados é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Demonstração. Suponhamos que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, agora tracemos na figura G os raios OP e OQ na mesma direção dos vetores \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{CA} (fig. 13). Logo, tomemos um ponto M, tal que,

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{MP}} = \frac{a}{b}$$

e tracemos no triângulo ΔOPQ o segmento $\overline{MN} \parallel \overline{OQ}$. Da semelhança de triângulos entre ΔOPQ e ΔMPN , temos:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{OQ}} = \frac{b}{a+b}$$

E conseqüentemente,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{OM}} = \frac{a}{\frac{a}{a+b}} = a+b$$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{MN}} = \frac{b}{\frac{b}{a+b}} = a+b$$

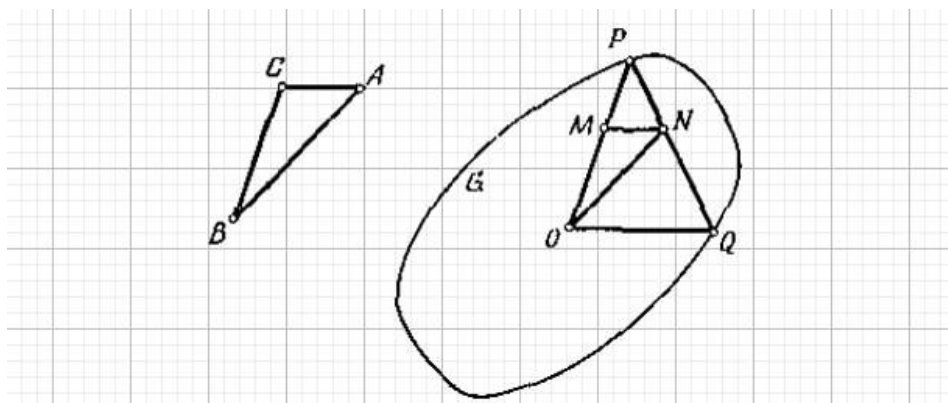
Desse modo, $\frac{\overline{BC}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{MN}}$, temos ainda que $\angle BCA = \angle OMN$. Logo, os triângulos

ΔBCA e ΔOMN são semelhantes e por esta razão, $\overline{AB} \parallel \overline{ON}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{ON}} = a+b$, ou

seja

$$\overline{ON} = \frac{\overline{AB}}{a+b} = \frac{c}{a+b}$$

Figura 13 – Raios r e r' nas direções dos vetores BC e CA



Fonte: Boltianski e Gojberg, 1973, p. 47

Porém, os pontos P e Q pertencem a figura G . Em virtude da convexidade da figura, todo o segmento PQ pertence a ela e em particular, o ponto N pertence à figura G , de onde conclui-se que $ON \leq 1$ quer dizer, $\frac{c}{a+b} \leq 1$ e finalmente, $c \leq a + b$, portanto

$$\overline{AB} \leq \overline{BC} + \overline{AC}. \quad (8)$$

□

O plano em que as escalas de longitude se dão por meio de certa figura centrossimétrica G , se chama *Plano de Minkowski*. A própria figura G se chama *círculo unidade* do plano de Minkowski.

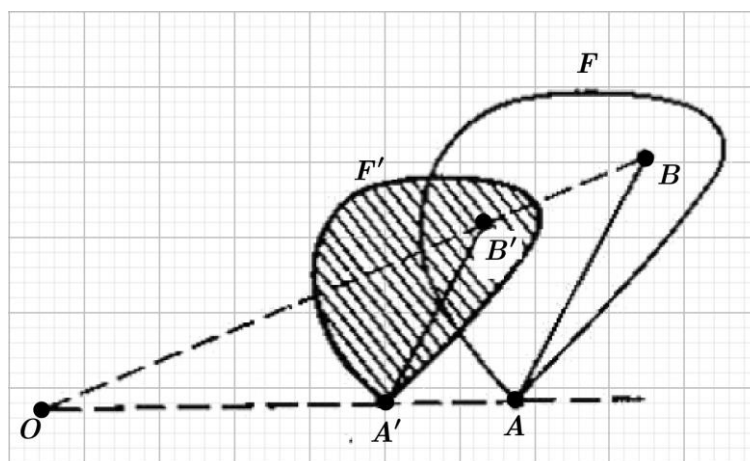
Seja r certo número e C um ponto arbitrário do Plano de Minkowski, o conjunto de pontos A , afastados do ponto C a uma distância menor que r , ou seja, em que $\overline{CA} \leq r$, será o círculo de raio r . Dizemos que, se dois pontos A e B pertencem a um mesmo círculo de raio r então, a distância entre eles não será maior que $2r$. Sendo C o centro desse círculo. Em virtude da desigualdade do triângulo,

$$\overline{AB} \leq \overline{BC} + \overline{AC} \leq r + r = 2 \cdot r. \quad (9)$$

Para a representação do círculo no plano de Minkowski, utilizando a definição de homotetia, seja F uma figura plana, tomemos no plano um ponto arbitrário O e um número positivo k , para todo ponto A da figura F , encontramos no raio \overline{OA} um ponto A' tal que

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$$

Figura 14 – Representação da homotetia



Fonte: Boltianski e Gojberg, 1973, p. 48

O conjunto de pontos A' assim obtidos formarão uma nova figura F' . A redução ou ampliação F' da figura F é uma homotetia de centro O , com coeficiente de homotetia k . A figura F' é homotética em relação a figura F . Sendo F uma figura convexa, a figura homotética F' também é convexa, como \overline{AB} está contido inteiramente em F , o segmento $\overline{A'B'}$ pertence inteiramente à figura F' (fig. 14). Dizemos que se o coeficiente de homotetia

$$0 < k < 1 \tag{10}$$

então F' é uma redução de F . Caso o coeficiente de homotetia

$$1 < k < n, n \in \mathbb{R} \tag{11}$$

então F' é uma ampliação de F . De posse dos resultados acima podemos descrever todos os círculos no plano de Minkowski:

Lema 1. *Uma figura é um círculo no plano de Minkowski de raio $r \leq 1$, se e somente se, tal figura é homotética a um círculo unidade G , com coeficiente de homotetia igual a r .*

Demonstração. \Rightarrow Suponhamos que G' é, no plano de Minkowski, uma homotetia de um círculo unidade G . Seu raio é R , em que $R = R \cdot 1$, logo, G' é uma ampliação de G e portanto um círculo com raio $R \leq 1$.

\Leftarrow Reciprocamente, toda figura homotética a um círculo unitário, $r = 1$, é uma ampliação ou redução de tal círculo. Assim a figura homotética a G é um círculo tal que

$$0 < R < 1$$

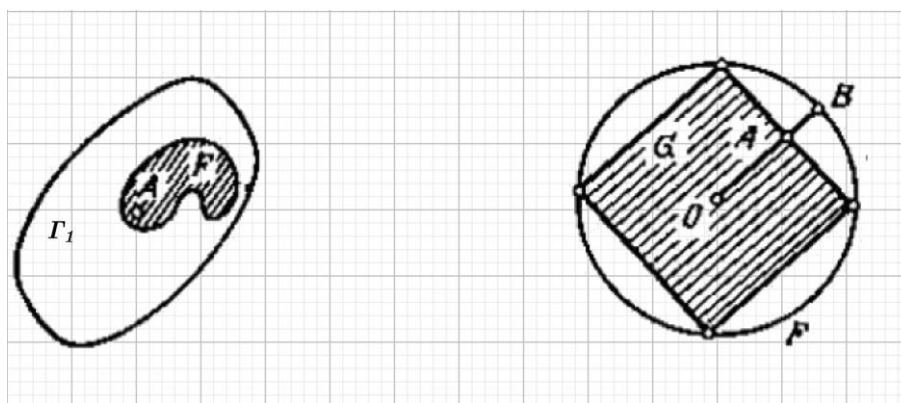
ou seja, uma redução de G ou é um círculo tal que $R > 1$, ou seja, uma ampliação de G , ambos com coeficiente de homotetia igual a R .

□

Seja F uma figura no plano de Minkowski e G seu círculo unidade. O diâmetro d de F é a maior das distâncias \overline{AB} , onde A e B são pontos quaisquer de F .

Se o diâmetro d' de F não é maior que o diâmetro d de Γ_1 , sendo A um ponto qualquer da figura F e também o centro de Γ_1 , então Γ_1 contém F completamente e reciprocamente, se todo círculo contém F , o diâmetro d' de F não será maior que o diâmetro d de tal círculo.

Figura 15 – Círculo contém F



Fonte: Boltianski e Gojberg, 1973, p. 49

O círculo como conhecemos, na geometria euclidiana, é determinado por:

$$\Gamma : x^2 + y^2 \leq 1 \tag{12}$$

cujo diâmetro $d = 2$. Examinando o plano de Minkowski, em que o círculo unidade seja um quadrado como na figura 11, o círculo euclidiano circunscrito a esse quadrado tem, nessa geometria, um diâmetro

$$d = 2\sqrt{2}$$

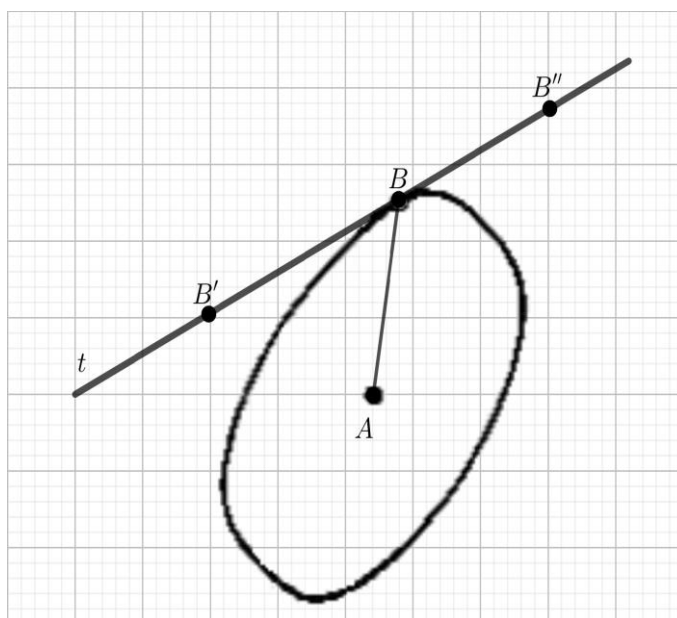
Esse fato será mostrado em (17).

Seja t uma reta e A um ponto tal que $A \notin t$. Examinando círculos de raio r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, ambos com centro em A , entre eles pode-se encontrar só um para o qual t é reta de apoio.

O raio r do círculo Γ_1 é a distância do ponto A até a reta t . Tal denominação se explica porque se B é um ponto arbitrário da reta t , tal ponto ou se encontra fora do círculo e então $\overline{AB} > r$ ou se encontra na circunferência de Γ_1 , então $\overline{AB} = r$.

Dessa forma, assim como na geometria euclidiana, a distância de A a reta t é a menor distância entre eles.

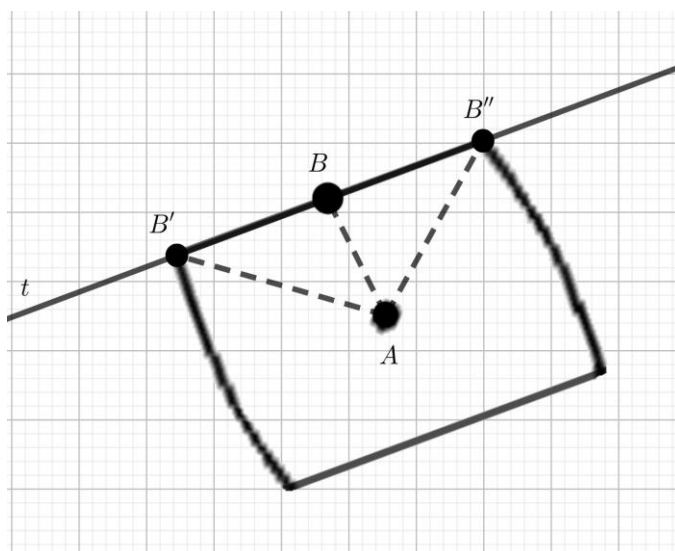
Figura 16 – Distância do ponto A a t



Fonte: Elaborado pelo autor

Na geometria de Minkowski a distância de um ponto A até a reta t não se mede pela perpendicular baixada do ponto A até t , e ainda a reta pode conter um segmento que faz parte da figura

Figura 17 – Segmento de t pertencente a F



Fonte: Elaborado pelo autor

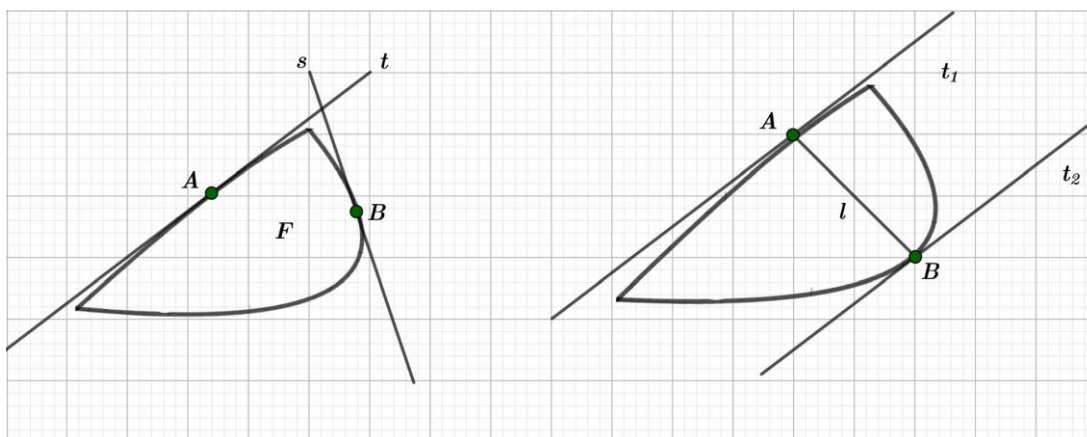
Se s e t são retas paralelas, a distância de qualquer ponto A , tal que $A \in s$ até a reta t , não depende na posição de A da reta s . O mesmo ocorre com a distância de um ponto qualquer da reta t em relação a s .

Antes de prosseguirmos, convém definir reta de apoio e largura de uma figura. Temos que

Definição 5. A reta que contém pelo menos um ponto da figura F e limita o semiplano que a contém é denominada reta de apoio de F .

Definição 6. A largura l de uma figura F , em determinada direção, é dada pelo comprimento da distância entre duas retas de apoio t_1 e t_2 , em que $t_1 \parallel t_2$.

Figura 18 – Retas de apoio de F (esq.) e largura de F (dir.)



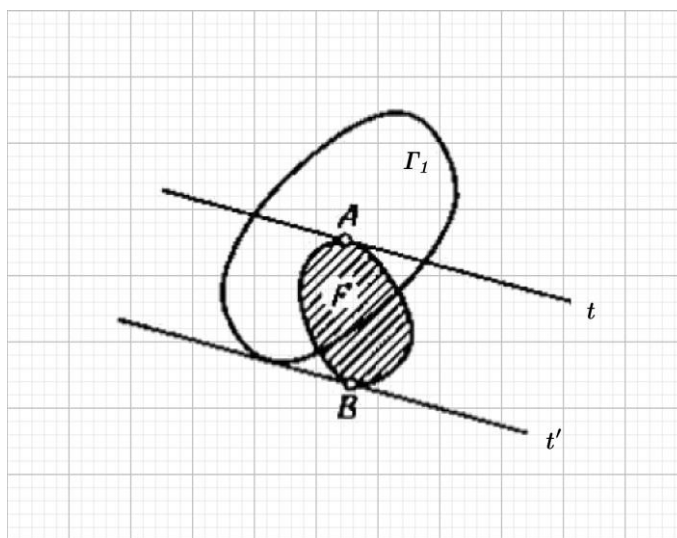
Fonte: Elaborado pelo autor

Se t_1 e t_2 são duas retas de apoio do círculo unidade Γ_1 (fig. 15) a distância entre elas é igual a 2. Seja F uma figura convexa qualquer, no plano de Minkowski, e G seu círculo unidade com s e t suas retas de apoio, a distância entre as retas t_1 e t_2 é a largura l de F na direção de t . O diâmetro d de tal figura é sua largura máxima.

Efetivamente, sejam t e t' duas retas paralelas de apoio da figura F e sejam A e B os pontos de interseção, respectivamente, das retas com a figura F (fig. 19). Tracemos no plano de Minkowski um círculo Γ_1 com centro no ponto A e para qual a reta t' é de apoio. Então o raio r deste círculo será igual a distância entre as retas t e t' , quer dizer, é igual a largura da figura F na direção de t . O ponto B ou está situado no limite do círculo Γ_1 , onde $B \in \Gamma_1 \cap t'$, ou $B \notin \Gamma_1$, ou seja, fora do círculo.

Assim $AB \geq r$ e conseqüentemente, o diâmetro d da figura F é maior ou igual a r . Dessa forma, a largura da figura F , em qualquer direção, não é maior que d e portanto, sua largura máxima não é maior que d .

Figura 19 – Círculo com diâmetro igual a largura de F



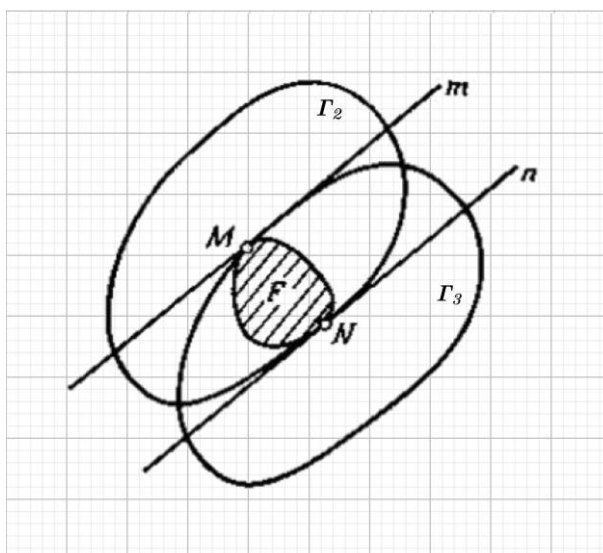
Fonte: Boltianski e Gojberg, 1973, p. 102

Resta-nos demonstrar que haverá tal direção em que a largura da figura F seja igual a seu diâmetro. Dados M e N dois pontos da figura F , não necessariamente distintos de A e B , cuja distância entre eles é igual ao seu diâmetro d , então a figura está completamente situada no círculo Γ_2 de raio d e com centro no ponto M . Analogamente, a figura F está contido completamente no círculo Γ_3 de raio d e com centro no ponto N .

Tracemos uma reta de apoio n do círculo Γ_2 que passa pelo ponto N , assim uma reta m paralela a n e que passa pelo ponto M é reta de apoio do círculo Γ_3 . Assim toda a figura F

fica situada entre as retas m e n , sendo estas, retas de apoio da figura F. Da construção (fig. 20) vemos que a distância entre as retas m e n , ou seja, a largura da figura F em direção a m é igual ao raio do círculo Γ_2 , portanto, igual a d .

Figura 20 – Largura de F igual a d



Fonte: Boltianski e Gojberg, 1973, p. 102

Seja um círculo unitário G , o quadrado representado na figura 11 e seja F um círculo euclidiano, circunscrito ao redor de tal quadrado G , neste caso, a largura da figura F na direção paralela ao lado de G é dado, como mencionado anteriormente, por $2\sqrt{2}$.

Seja L , a largura do círculo paralela a l , lado do quadrado (fig. 21) passando pela origem do plano O , assim

$$L = \overline{OF} + \overline{OE} \quad (13)$$

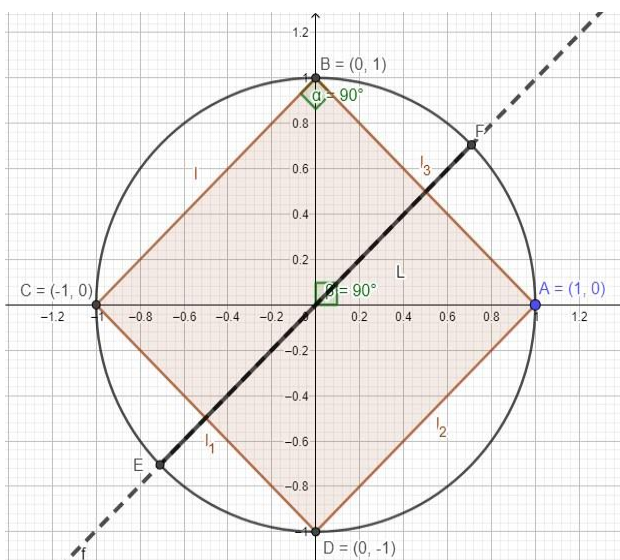
O raio do círculo euclidiano é 1, assim em tal geometria $\overline{OF} = 1$, Sejam X_F e Y_F , as coordenadas do ponto F , o triângulo ΔOFX_F é retângulo em X_F , com o ângulo $\angle X_F\hat{O}F = 45^\circ$, então

$$\begin{aligned} \overline{OX_F} &= \cos 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

e

$$\begin{aligned}\overline{OY_F} &= \text{sen } 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\tag{15}$$

Figura 21 – Largura do círculo



Fonte: Elaborado pelo autor

No plano de Minkowski a distância entre os pontos OF é dada por

$$\begin{aligned}\overline{OF} &= |\overline{OX_F}| + |\overline{OY_F}| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}\tag{16}$$

Como $\overline{OF} = \overline{OE}$ então

$$\begin{aligned}L &= |\overline{OF}| + |\overline{OE}| \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= 2\end{aligned}\tag{17}$$

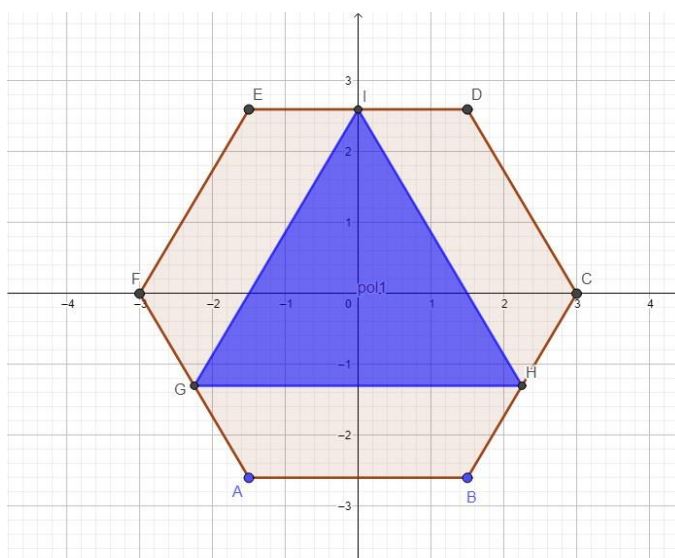
por outro lado \overline{AC} é diâmetro do círculo unitário de Minkowski e $\overline{AC} = 2$, dessa forma, o círculo euclidiano, no plano de Minkowski não possui largura constante, pois

$$AC \neq EF$$

Em geral, se a figura F , no plano de Minkowski tem em todas as direções uma mesma largura d , então, em tal geometria, F possui largura constante.

Consideremos um círculo G como um hexágono regular. Um triângulo equilátero, inscrito em tal hexágono, com vértices nos pontos médios de lados não adjacentes desse hexágono, é uma figura de largura constante.

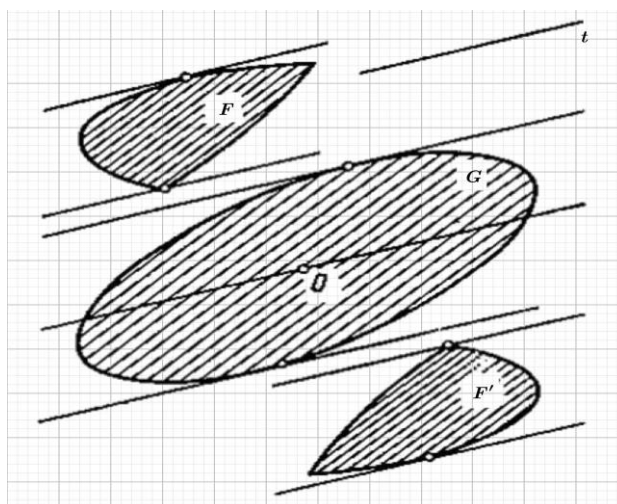
Figura 22 – Exemplo de figura de largura constante



Fonte: Elaborado pelo autor

Teorema 2. F será uma figura de largura constante no Plano de Minkowski com círculo unidade G se, e só se, a soma $F + F'$ de uma figura F com a figura centrossimétrica F' é em tal geometria um círculo.

Figura 23 – Soma de figuras convexas F e F'



Fonte: Boltianski e Gojberg, 1973, p. 102

Demonstração. Seja F uma figura convexa arbitrária e F' , outra figura simétrica a ela com relação a um ponto O . Designemos a soma $F + F'$ por G . Neste caso a figura G é convexa centrossimétrica que se toma como um círculo unidade no Plano de Minkowski. A largura de F em qualquer direção t é igual a largura de F' na mesma direção. Consequentemente, a largura da figura G na direção arbitrária t é duas vezes maior que a largura de F nessa mesma direção.

Mas a largura da figura G é, em qualquer direção, igual a 2, pois G é um círculo unidade do plano de Minkowski. A largura de F em toda direção é igual a 1, já que F é uma figura de largura constante 1.

Sem dúvida, se como círculo unidade, se toma no lugar de $G = F + F'$ outra figura qualquer, homotética a $F + F'$, resulta que na geometria do plano de Minkowski F ainda assim será figura de largura constante.

Por outro lado, Seja F uma figura de largura constante em certa geometria de Minkowski, neste caso F' também será uma figura de largura constante e, portanto, $F + F'$ também o será. Mas a figura $F + F'$ é centrossimétrica e uma figura centrossimétrica convexa possui largura constante somente quando ela é um círculo na geometria de Minkowski a considerar.

□

Deste teorema deduz-se que toda figura convexa F é uma figura de largura constante na geometria de Minkowski com *círculo unidade* $k \cdot (F + F')$ e só em tal geometria, com k um número positivo arbitrário.

3 TEOREMA DE BORSUK

O teorema de Borsuk trata da divisão de figuras na geometria plana, sendo que para qualquer figura F podemos considerar o problema de sua divisão em partes de menor diâmetro. É possível dividir essa figura em inúmeras partes, mas há um número mínimo de divisões para atender ao critério do menor diâmetro. Essa quantidade mínima de partes é designada por $a(F)$. Portanto, se F é um círculo ou um triângulo equilátero, esse número é igual a 3, por outro lado, se F é uma elipse ou um paralelogramo, esse número é 2.

Podemos considerar o problema da divisão em partes para qualquer figura F cujo diâmetro de cada uma dessas partes é menor que o diâmetro da figura original. Para certas figuras planas $a(F)$ toma um valor igual a 2, para outras, $a(F) = 3$. Será que é possível encontrar uma figura plana para qual $a(F) > 3$? Quais valores $a(F)$ pode assumir? Para responder a esse questionamento o eminente matemático polonês K. Borsuk, no ano de 1933, mostrou que na realidade, sempre são suficientes três partes, conforme enunciado no seguinte teorema, estabelecido por ele:

Teorema 3. *Toda figura F de diâmetro d pode ser dividida em três partes de diâmetro menor que d , tal que, $a(F) \leq 3$.*

Para melhor compreensão do teorema e a demonstração do mesmo consultar (BOLTIANSK, et. al, 1997) e (BOLTIANSK, GOJBERG, 1973).

3.1 O PROBLEMA DE BORSUK NO PLANO DE MINKOWSKI

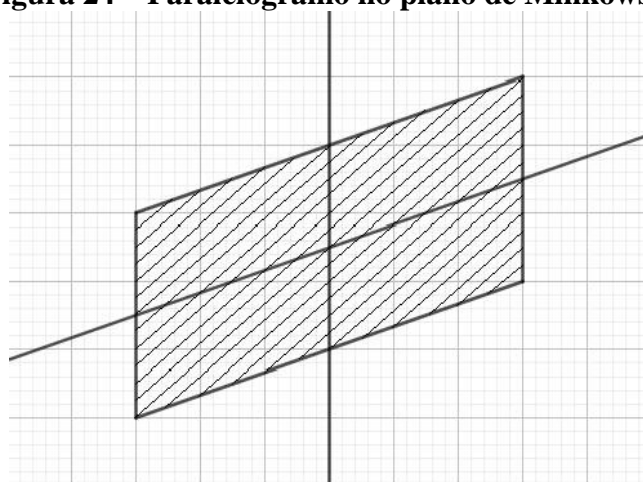
No Plano de Minkowski, se aplicam as definições de figuras convexas, diâmetros, largura e figuras de largura constante vindas do estudo da divisão de figuras e particularmente o *Teorema de Borsuk* se aplica a essa geometria. Por esse motivo faz sentido estudar o teorema e tais definições em referido plano.

Seja F uma figura em um plano de Minkowski e seja G o seu círculo unidade. Seja d seu diâmetro nessa geometria. Vamos verificar a divisão dessa figura em partes de menor diâmetro. Seja $a_G F$ o número mínimo de partes para resolver o problema. É evidente que tanto o diâmetro de F como de suas partes menores depende em alto grau da geometria de Minkowski na qual se verifica tal diâmetro, ou seja, depende do círculo unidade G . Por isso, $a_G F$ depende essencialmente da escolha do círculo unitário G .

Por exemplo, ao determinar a largura se pode dividir o paralelogramo em duas partes de menor diâmetro, se este paralelogramo está situado no plano de Minkowski em que o próprio paralelogramo é o círculo unidade G , então o diâmetro de todo paralelogramo e de

suas partes, é igual a 2, pois no plano de Minkowski o comprimento de cada lado e de cada diagonal do paralelogramo também é igual a 2. Por isso, neste caso, o paralelogramo G não pode ser dividido em três partes de menor diâmetro. Porém, quatro partes serão suficientes para efetuar tal divisão.

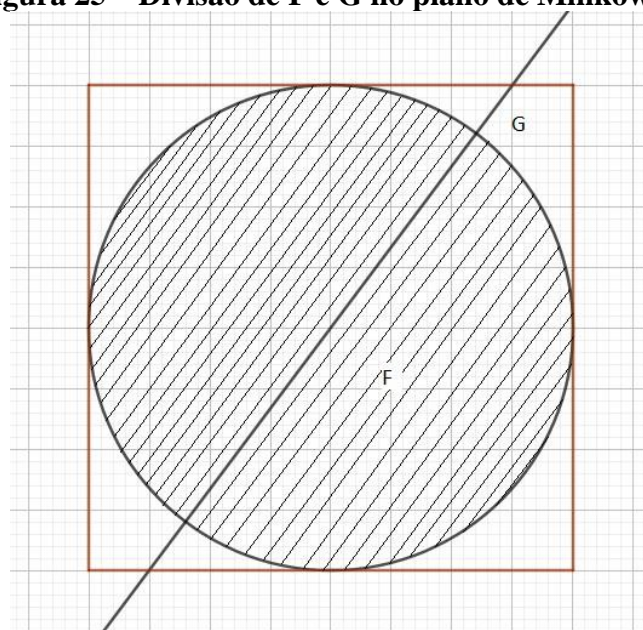
Figura 24 – Paralelogramo no plano de Minkowski



Fonte: Elaborado pelo autor

Neste caso $a_G(G) = 4$. Isso nos mostra que, para certas figuras F e G, pode ser válida a desigualdade $a_G(F) > a(F)$. Há, porém, casos em que $a_G(F) < a(F)$. Com efeito, se G é um quadrado e F, um círculo, podemos verificar que $a_G(F) = 2$ (fig. 25), enquanto que $a(F) = 3$.

Figura 25 – Divisão de F e G no plano de Minkowski



Fonte: Elaborado pelo autor

Teorema 4. *Para qualquer figura plana limitada F é válida a relação*

$$a_G(F) \leq 4,$$

em que a igualdade só é válida se a cobertura convexa de F é um paralelogramo homotético a G , ou seja, se a figura F contém quatro pontos que são os vértices de um paralelogramo homotético a G , com coeficiente de homotetia $\frac{d}{2}$, onde d é o diâmetro da figura F .

A demonstração do teorema usa informações que não foram tratadas até aqui, sendo retomada na próxima seção, onde os elementos para tal demonstração serão apresentados. Para maiores esclarecimentos sobre $a(F)$ consultar (BOLTIANSKI, GOLJBERG, 1973)

Primeiramente, examinemos quando o círculo unidade G do plano de Minkowski é um paralelogramo. Podemos enunciar o seguinte teorema:

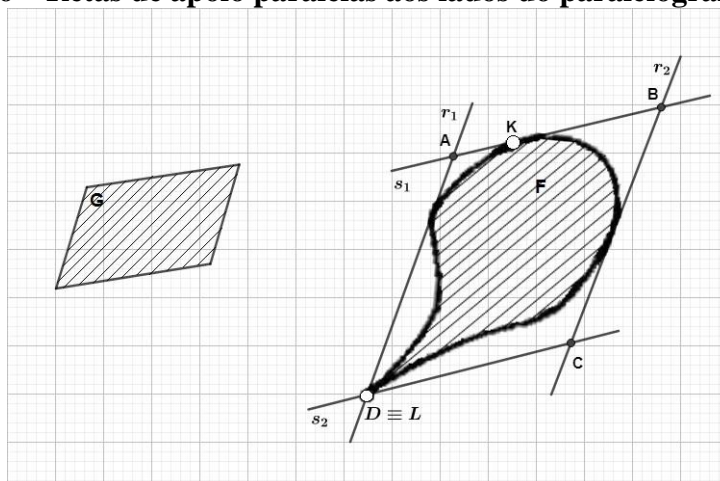
Teorema 5. *Seja F certa figura de diâmetro d , situada no plano de Minkowski e cujo círculo unidade é um paralelogramo G . A igualdade $a_G(F) = 2$, só é válida unicamente, se a figura não contém três pontos que são vértices de um triângulo equilátero, no plano de Minkowski, com lado igual a d .*

Demonstração. Admitamos que pontos é uma figura que contém três pontos que são vértices de um triângulo equilátero, com lado igual a d . Nenhum conjunto de diâmetro menor que d pode conter dois desses pontos. Então concluímos que $a_G(F) > 3$.

Suponhamos, ainda, que a figura F não contém três pontos que sejam vértices de tal triângulo equilátero, com lado d . Tracemos quatro retas de apoio⁶, r_1, r_2, s_1 e s_2 da figura F , paralelas aos lados do paralelogramo G (fig. 26). Estas retas formam o paralelogramo $ABCD$ que contém a figura F . Como os lados de tal paralelogramo são retas de apoio de F , em cada um de seus lados se tem ao menos um ponto de F .

⁶ Para cada ponto limite K da figura convexa F passa pelo menos uma reta de apoio.

Figura 26 – Retas de apoio paralelas aos lados do paralelogramo ABCD

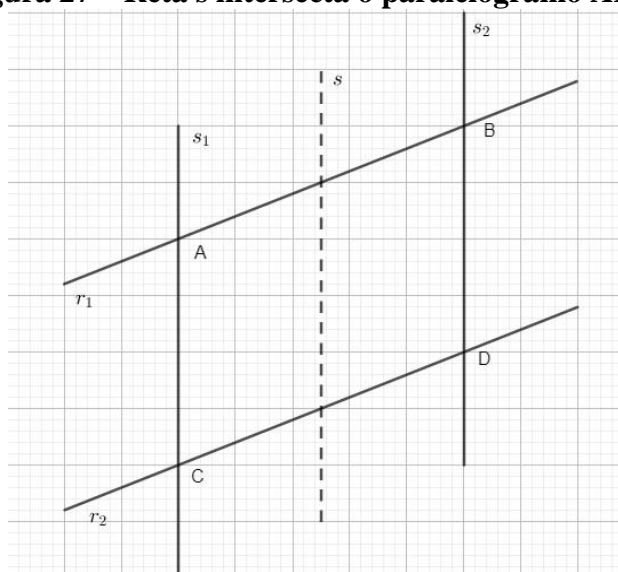


Fonte: Elaborado pelo autor

Seja K um ponto da figura F situado no segmento \overline{AB} e L outro ponto dessa figura no segmento \overline{CD} , já que os pontos K e L pertencem a F então $KL_G \leq d$, conseqüentemente a distância entre certos pontos das retas r_1 e r_2 não é maior que d e portanto, a distância entre tais retas, também não será maior que d . Analogamente, demonstra-se que a distância entre as retas s_1 e s_2 não é maior que d .

Suponhamos que a distância entre as retas r_1 e r_2 é menor que d , então, traçando uma reta s paralela a s_1 e s_2 e que intersekte o paralelogramo ABCD (fig. 16), dividimos o paralelogramo, e a figura F em duas partes em que cada uma possui diâmetro menor que d . Conseqüentemente, neste caso $a_G F = 2$. Analogamente, se a distância entre as retas s_1 e s_2 é menor que d , $a_G F = 2$.

Figura 27 – Reta s intersecta o paralelogramo ABCD



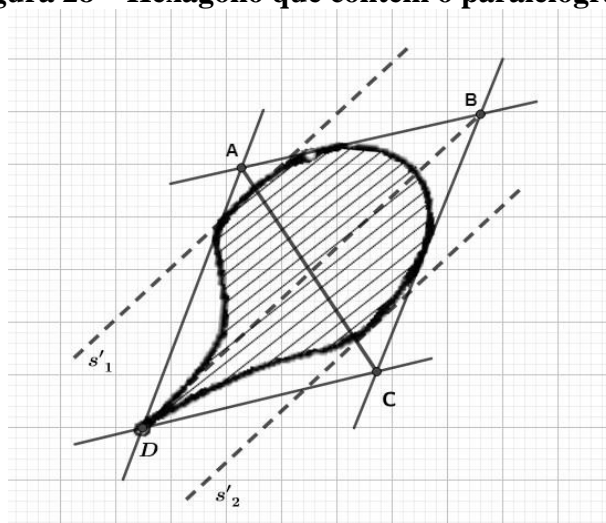
Fonte: Elaborado pelo autor

Nos resta examinar, ainda, quando a distância entre r_1, r_2, s_1 e s_2 é igual a d , ou seja, quando paralelogramo ABCD é um círculo de raio igual $\frac{d}{2}$.

Suponhamos, primeiramente, que nenhum dos pontos A e C pertencem a figura F, verifica-se que a reta \overleftrightarrow{AC} divide F em duas partes e que o diâmetro de cada uma delas é menor que d .

Tracemos duas retas r'_1 e r'_2 paralelas a diagonal \overline{BD} e que formam um hexágono, a partir do paralelogramo, que contém F.

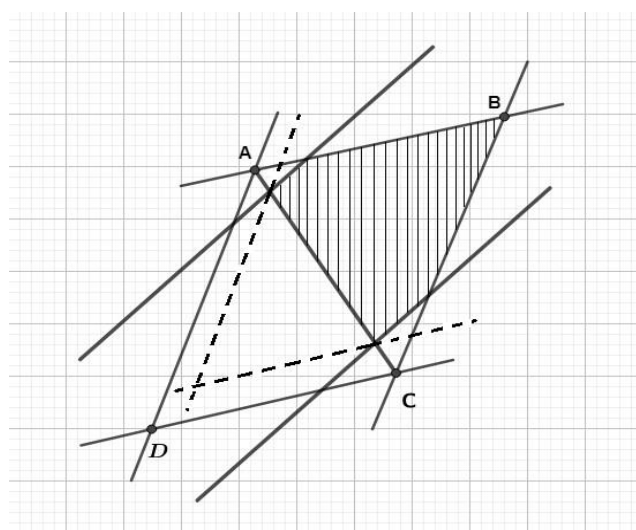
Figura 28 – Hexágono que contém o paralelogramo



Fonte: Elaborado pelo autor

A reta \overline{AC} divide o hexágono e F simultaneamente em duas partes, ambas com diâmetro menor que d .

Figura 29 – Divisão do hexágono em duas partes



Fonte: Boltianski e Gojberg, 1973, p. 44

Desse modo, $a_G(F) = 2$. Analogamente, se nenhum dos pontos B e D pertencem a F, então, $a_G(F) = 2$.

Finalmente, examinemos o caso em que pelo menos um dos pontos A, C e ainda, um dos pontos B, D pertencem a figura F. Tal caso não é real. Suponhamos que um dos pontos A, C, digamos que $A \in F$ e que um dos pontos B, D, digamos que $B \in F$. Seja L um ponto do segmento \overline{CD} , com $L \in F$. Temos que \overline{CD} é uma reta de apoio da figura F,

Então,

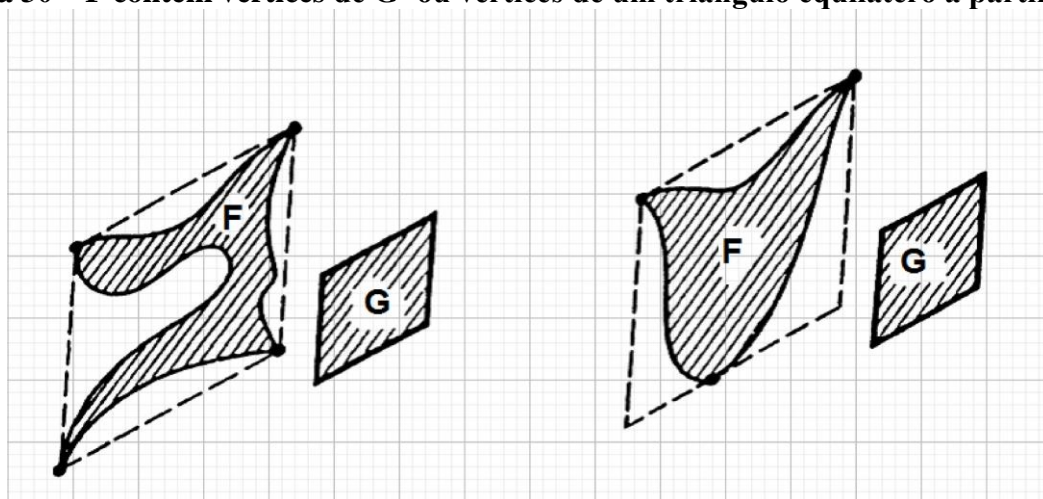
$$AB = AL = BL = d$$

(18)

quer dizer, ABL é um triângulo equilátero com lado $l = d$. □

Dos teoremas 3 e 4 encontramos a solução para $a_G(F)$ quando G é um paralelogramo: Se uma figura F de diâmetro d contém quatro pontos que são os vértices de um paralelogramo homotético a G, com coeficiente de homotetia igual a $\frac{d}{2}$, então $a_G(F) = 4$; Agora se F não contém esses quatro pontos nestas condições, mas contém três pontos que são vértices de um triângulo equilátero, com $l = d$, então $a_G(F) = 3$, nos demais casos $a_G(F) = 2$.

Figura 30 – F contém vértices de G' ou vértices de um triângulo equilátero a partir de G'



Fonte: V. Boltyanski et al., 1997, p. 253

Desta forma, o problema do quantidade $a_G(F)$ está resolvido para estes dois casos.

3.2 TEOREMA DE BORSUK – DEMONSTRAÇÃO

A demonstração do teorema requer o auxílio de alguns resultados preliminares. Primeiramente precisamos considerar o problema do recobrimento de figuras de uma forma que tal resultado se aproxime da divisão de figuras em partes de menor diâmetro ⁷ da seguinte maneira:

Seja $b(F)$ o número mínimo de partes menores em que podemos dividir a figura convexa, o problema do recobrimento de uma figura convexa, uma vez que cada parte $b(F)$ dessa figura advém de seu recobrimento por uma mesma quantidade figuras homotéticas a F , de diâmetro d' menor que o diâmetro d de F , ou seja, com coeficiente de homotetia k positivo e menor que 1, então temos que o recobrimento de figuras pode ser interpretado como o problema da divisão da figura F em partes de menor tamanho, o que nos aproxima do problema de Borsuk para divisão de figuras. Para toda figura convexa F é válida a desigualdade

$$a(F) \leq b(F)$$

O problema da divisão em partes de menor tamanho só é válida para figuras convexas, enquanto que o problema de Borsuk da divisão de figuras em partes de menor diâmetro é válido inclusive para figuras não convexas.

O paralelogramo é a única figura que precisa de 4 figuras homotéticas para recobri-lo inteiramente, como visto na seção 2. Então podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 6. *Para toda figura plana, limitada e convexa F , que não é um paralelogramo, $b(F) = 3$; se F é um paralelogramo, $b(F) = 4$.*

De posse desses resultados seguimos à demonstração do teorema de Borsuk.

Demonstração – Teorema 3: Vamos considerar primeiramente o caso quando a figura F é convexa. A desigualdade $a(F) \leq b(F)$, se satisfaz inclusive no plano de Minkowski:

$$a_G(F) \leq b(F) \tag{19}$$

⁷ Toda figura plana F de diâmetro d pode ser dividida em três partes de diâmetro menor que d .

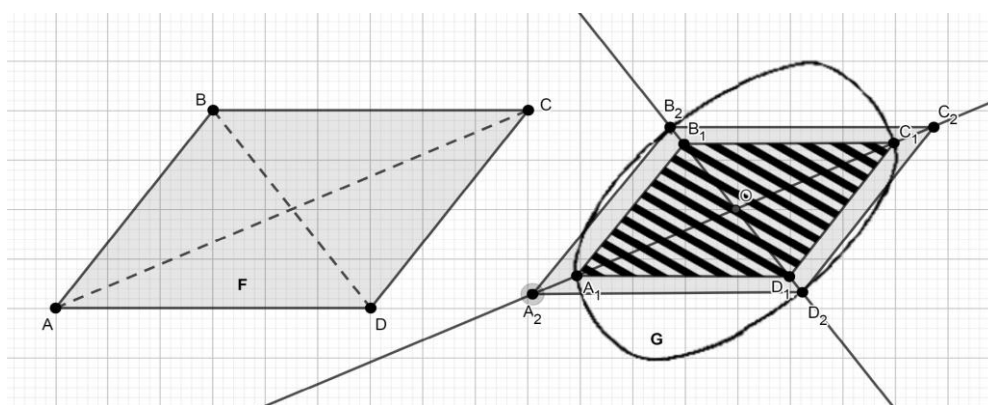
Consequentemente, se F não é um paralelogramo, em virtude do teorema 6,

$$a_G(F) \leq b(F) = 3.$$

Seja F um paralelogramo, tracemos pelo ponto O , centro da figura G , duas retas paralelas as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} de F e designemos por $\overline{A_1C_1}$ e $\overline{B_2D_2}$ os segmentos limitados de tais retas pelo limite da figura G . Agora consideremos os segmentos $\overline{A_1C_1}$ e $\overline{B_2D_2}$ como diagonais e construamos dois outros paralelogramos com lados paralelos aos lados do paralelogramo F , no caso

$$\overline{A_1C_1} \parallel \overline{AC} \text{ e } \overline{B_2D_2} \parallel \overline{BD}$$

Figura 31 – Divisão da figura G a partir do paralelogramo F '



Fonte: Elaborado pelo autor

Designemos por F' o menor dos paralelogramos, ou seja, o paralelogramo $A_1B_1C_1D_1$, com uma das diagonais A_1C_1 . Os paralelogramos F e F' são homotéticos. Assim,

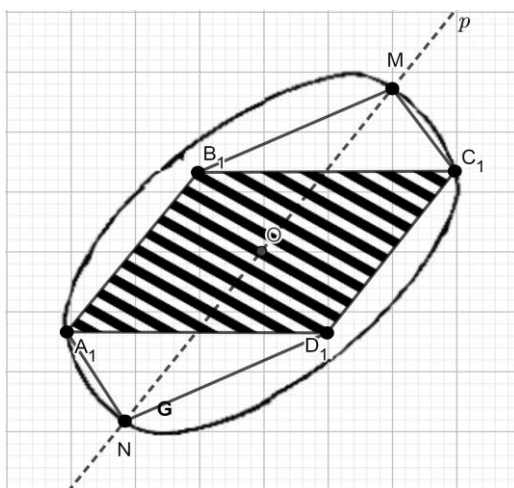
$$a_G(F) = a_G(F')$$

dessa forma, usaremos agora F' ao invés de F .

O comprimento $\overline{A_1C_1} = 2$, consequentemente o diâmetro de F' é maior que ou igual a 2, porém tal diâmetro de F' não pode ser maior que 2 uma vez que $F' \subset G$ e G é um *círculo unidade no Plano de Minkowski* com diâmetro $d = 2$ e portanto o diâmetro d' de F' também é igual a 2.

Agora traçando por O uma reta p , paralela aos lados C_1D_1 e A_1B_1 . Sejam M e N os pontos de interseção de p com o limite da figura G .

Figura 32 – Divisão da figura F' por p



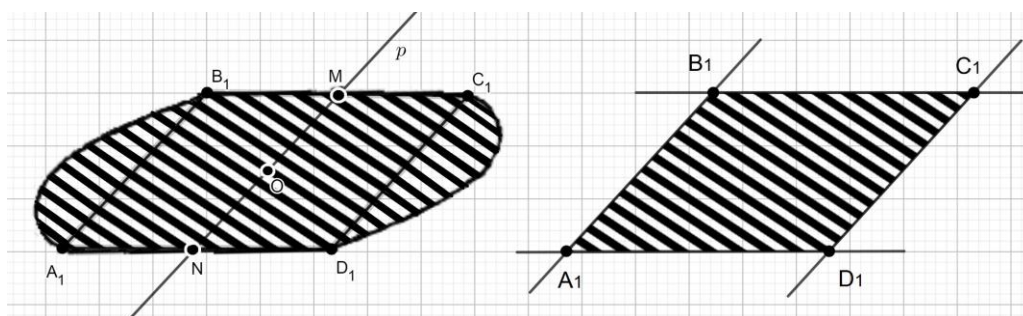
Fonte: Elaborado pelo autor

Se M e N não se encontram nos lados $\overline{B_1C_1}$ e $\overline{A_1D_1}$ do paralelogramo F' , o hexágono $A_1B_1MC_1D_1N$ está contido na figura G . A reta p divide a figura F' em duas partes com diâmetro d'' de cada parte menor que 2, então $a_G(F') = 2$.

Suponhamos agora que os pontos M e N estejam situados, respectivamente, sobre os lados $\overline{B_1C_1}$ e $\overline{A_1D_1}$ do paralelogramo F' . As retas $\overline{B_1C_1}$ e $\overline{A_1D_1}$ devem ser retas de apoio da figura G , uma vez que o ponto M deve encontra-se sobre uma reta de apoio de G , enquanto que outra reta diferente de $\overline{B_1C_1}$ que passe pelo paralelogramo F' corta a figura G , dessa forma G encontra-se integralmente situada entre as retas $\overline{B_1C_1}$ e $\overline{A_1D_1}$, assim,

$$a_G(F) = a_G(F') = 2$$

Figura 33 – Possibilidades para M e N situados em G



Fonte: Elaborado pelo autor

ou ainda G coincide com o paralelogramo F' , ou seja, G é homotética a F e neste caso

$$a_G(F) = a_G(F') = 4$$

O que nos mostra que o teorema é válido para figuras convexas.

Seja agora F uma figura não convexa, se a figura \tilde{F} convexa, que recobre F , é um paralelogramo homotético a G , então $a_G(F) = 4$, caso contrário, se \tilde{F} não é homotético a G , de acordo com o demonstrado $a_G(\tilde{F}) \leq 3$ e como $F \subset \tilde{F}$ temos que $a_G(F) \leq 3$.

□

4 EM SALA DE AULA – PROPOSTAS PEDAGÓGICAS

O ensino de matemática é um desafio intrigante, com aspectos bem peculiares à própria disciplina. Exigindo do professor e do aluno bem mais do que uma preparação prévia. Exige-se dos atores do processo ensino/aprendizagem uma conduta de buscar compreender um mundo específico, no qual aqueles que pretendem desbravá-lo precisam estar cientes de que é necessário imergi-lo.

O caminho é árduo, basta uma pesquisa rápida com algumas pessoas no ambiente escolar, acadêmico ou no convívio social para constatar-se tal fato. Os resultados das próprias avaliações do sistema educacional evidenciam isso. Mas como professor ou estudante de um curso de matemática, em qualquer nível que se esteja, precisa-se buscar aprimoramento na forma como se dá esse processo de ensino/aprendizagem em matemática. Sem ele uma boa parte do que vivenciamos não tem um sentido prático, ou seja, tudo que está ao nosso redor é indiferente.

Sem tal compreensão a realidade passa ao conceito de existência por acaso e, por isso, os indivíduos tornam-se incapazes de exercer de fato a cidadania, a capacidade crítica e tão pouco conseguem se aventurar no mundo da própria matemática e das ciências, muito menos evoluir neles. Deixando-se assim de conseguir-se avançar nos quatro eixos que se busca desenvolver o indivíduo na educação básica para obtenção de uma formação humana e integral segundo propõe as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN)

[...] Nesse sentido, o Ensino Médio, como etapa responsável pela terminalidade do processo formativo da Educação Básica, deve se organizar para proporcionar ao estudante uma formação com base unitária, no sentido de um método de pensar e compreender as determinações da vida social e produtiva; que articule **trabalho, ciência, tecnologia e cultura** na perspectiva da emancipação humana.(BRASIL, 2013. pg. 41 ; ênfase nossa)

A abordagem em sala de aula de conteúdos específicos pode ser inserida a fim de proporcionar aquisição de novos conhecimentos bem como reforçar algum conteúdo outrora adquirido mas que no momento se encontra esquecido ou perdido de fato pelo aluno. No aspecto do aluno a aprendizagem matemática, quando adquirida de maneira consistente trará para o mesmo uma grande possibilidade de exercer com qualidade sua cidadania e a capacidade de desenvolver competência e habilidades necessárias a sua formação humana e integral.

Os temas apresentados aos alunos, por serem de fácil compreensão, trazem a estes uma abordagem matemática em forma de oficinas, para que haja interações mais relevantes,

conduzindo a uma experiência agradável. De acordo com a perspectiva do trabalho há uma introdução de temas que podem fazer-se diversificados do currículo escolar. Como diz Nuno Crato,

[..] Mas faz parte da escola desviar-se de vez em quando do seu caminho sistemático e fazer uma incursão por temas novos, que podem estar não diretamente relacionados com os programas. Nesses desvios dão-se referências, abrem-se horizontes. Entusiasmam-se alguns alunos, despertam-se outros. O erro não está em motivar os estudantes com matérias atrativas, está em fazer dessa atração o pressuposto do estudo. Estuda-se com gosto quando se tem gosto. E tem-se gosto quando se conhece. Usar um só caminho nessa dialética é um tremendo erro. (CRATO, 2012, prefácio in: SÁ, C. C. de; Rocha, J, 2012.)

Nessa perspectiva foram formatadas e aplicadas as duas atividades como proposta pedagógica deste trabalho, as oficinas foram realizadas em duas aulas de 50 minutos cada, abrangendo grupos de até 10 alunos no laboratório de matemática da escola. Todas as atividades foram realizadas propiciando aos alunos intervenção colaborativa ou explicativa a medida que os conceitos eram apresentados e as atividades eram feitas de acordo com o princípio de que o aluno é o principal protagonista no processo de ensino/aprendizagem e que o professor tem o papel de auxiliá-lo nesse caminho como mediador.

4.1 HOMOTETIAS

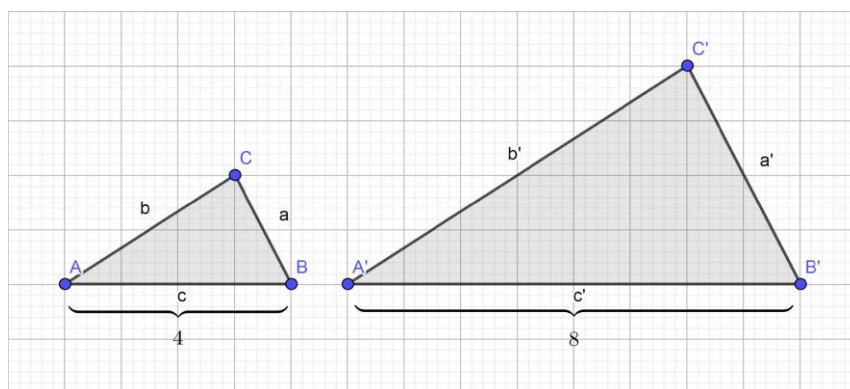
Para a abordagem do assunto e posterior aplicação da oficina, foi primeiramente feito um feedback da noção de semelhança.

Definição 7. Duas figuras são semelhantes quando possuem ângulos correspondentes iguais e lados homólogos proporcionais. Dois lados homólogos consecutivos formam ângulos iguais.

Definição 8. Razão de semelhança é o número que exprime a proporção entre os lados homólogos.

Assim, dados os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ abaixo, temos que

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Figura 34 – Semelhança entre triângulos

Fonte: Elaborado pelo autor

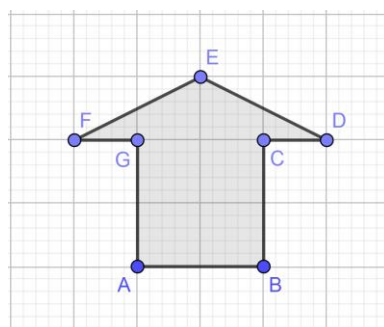
sendo k a razão de semelhança, temos

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2 \rightarrow k = 2$$

Quando temos:

- $k > 1$ obtemos uma figura semelhante por *Ampliação*
- $0 < k < 1$ obtemos uma figura semelhante por *Redução*
- $k = 1$ obtemos uma figura *congruente*

1. Para iniciar a oficina foi pedido para que cada aluno, de posse do seu material para uso individual - uma malha quadriculada, em centímetros, tamanho 20x10, uma régua, lápis e borracha - construísse uma figura ABCDEFG conforme registro abaixo:

Figura 35 – Figura base da atividade 1

Fonte: Elaborado pelo autor

Em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{GA} = 2\text{cm}$, $\overline{CD} = \overline{FG} = 1\text{cm}$ e $\overline{DE} = \overline{EF} = \sqrt{5}\text{cm}$

2. Após desenhada tal figura na malha, foi pedido para que os mesmos, ampliassem a figura de tal forma que $k = 5$, ou seja, deveriam ampliar a figura em 5 vezes.
3. Na terceira etapa, foi pedido para que os mesmos, ampliassem a figura de tal forma que $k = \frac{1}{2}$, ou seja, deveriam reduzir a figura em 2 vezes.

Após o término dessa etapa, e conforme os desenhos feitos foi apresentado aos alunos o que é Homotetia:

A homotetia é uma técnica específica de desenho que se utiliza da semelhança para, a partir de uma figura, se obter outra semelhante à primeira sendo esta reduzida ou ampliada. Duas figuras são homotéticas quando uma é obtida a partir da outra por homotetia, e elas se correspondem ponto a ponto. A homotetia é, portanto, um tipo de semelhança no plano.

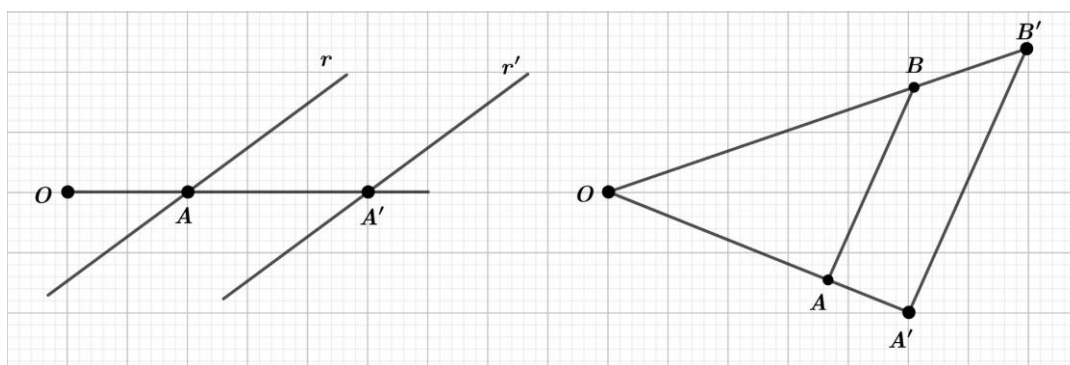
Fixando um ponto O no plano e dado um número real k , designado por coeficiente de homotetia, $k \neq 0$, a homotetia de centro O e razão k é a transformação que associa cada ponto P do plano a um ponto P' de tal forma que

$$\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$$

Se

- $k > 0$, temos uma *homotetia direta*
- $k < 0$, temos uma *homotetia inversa*
- $k = 1$, a figura não se altera e portanto $H_{0,1}$ e a *transformação identidade*
- $k = -1$, então, $\overline{OP'} = -\overline{OP}$ e neste caso a transformação é uma *simetria* em relação ao ponto O, ou uma *rotação de 180°* em torno de O.

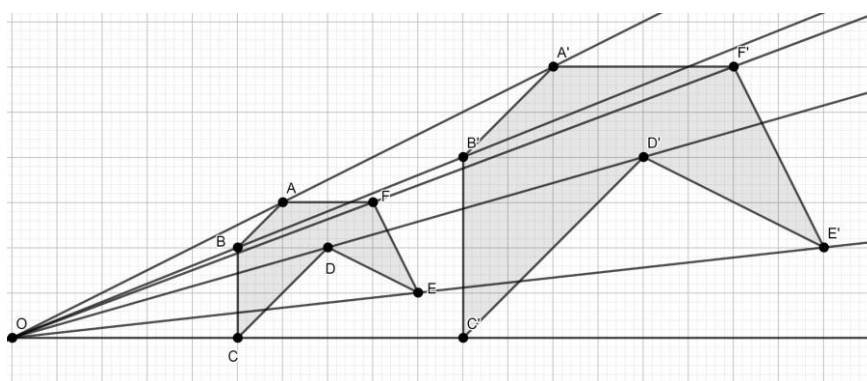
Figura 36 – Homotetia de centro transforma r em $r' \parallel r$ (esq.). $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$ e $\overline{OB'} = k \cdot \overline{OB}$ então $\overline{A'B'} = |k| \cdot \overline{AB}$ (dir.)



Se o ponto O pertence a uma reta t , a imagem de t por uma homotetia de centro O coincide com t . Se O não pertence a uma reta r , então $r' = H_{O,k}(r)$ é uma reta paralela a r .

A homotetia preserva ângulos. Seja ainda A e B dois pontos quaisquer do plano e se $A' = H_{O,k}(A)$ e $B' = H_{O,k}(B)$ então, $\overline{A'B'} = |k| \cdot \overline{AB}$, fato decorrente da semelhança dos triângulos ΔOAB e $\Delta OA'B'$.

Figura 37 – Semelhança obtida por homotetia



Fonte: Elaborado pelo autor

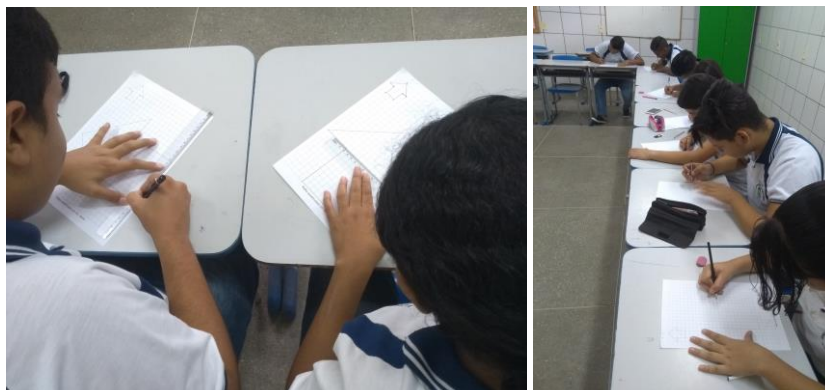
Na figura acima $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$; $\overline{OB'} = k \cdot \overline{OB}$; $\overline{OC'} = k \cdot \overline{OC}$; $\overline{OD'} = k \cdot \overline{OD}$; $\overline{OE'} = k \cdot \overline{OE}$; $\overline{OF'} = k \cdot \overline{OF}$.

Considerando o que foi visto de sobre semelhança e homotetia passemos aos itens a seguir:

4. As figuras semelhantes obtidas na primeira etapa podem ser consideradas homotéticas?
5. Vamos obter agora um paralelogramo semelhante a outro, com razão de semelhança $k = 3$ a partir da homotetia. Para isso siga os passos a seguir:
 - Na malha quadriculada, sentido retrato, marque o ponto $O(0,10)$ linha 10;
 - Marque os pontos $A(2,9)$; $B(4,11)$; $C(8,11)$ e $D(6,9)$;
 - Ligue os pontos AB , BC , CD e DA ;
 - A partir do ponto O trace as semirretas \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OD} ;
 - Meça a partir de O o valor encontrado na semirreta \overrightarrow{OA} e marque o ponto A' ;
 - Repita o mesmo procedimento para os pontos B , C , e D , obtendo os pontos B' , C' e D' ;
 - Ligue os pontos $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ e $D'A'$;

O paralelogramo $A'B'C'D'$ é a figura procurada, homotética a $ABCD$.

Figura 38 – Alunos realizando as atividades da oficina - Homotetia



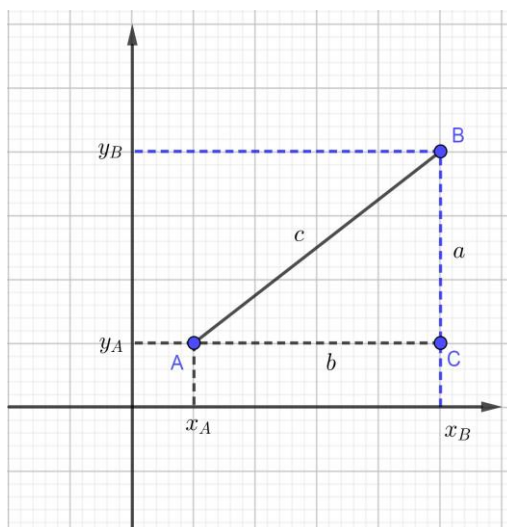
Fonte: Elaborado pelo autor

4.2 GERANDO O CÍRCULO UNIDADE NO PLANO DE MINKOWSKI

Antes de iniciar a oficina, primeiramente é necessário inserir ou relembrar, no caso de turmas de 3º ano do Ensino Médio a noção usual de distância d entre dois pontos. Sejam dois pontos $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ encontremos a distância euclidiana entre os dois pontos A e B. Vamos representá-los no Plano Cartesiano.

Repare que temos um triângulo ΔABC , retângulo em C. Observe que $AC = |x_B - x_A|$ e que $BC = |y_B - y_A|$ então $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ e $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$

Figura 39 – Distância entre dois pontos



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 d &= (d_{A,B})^2 = (A,C)^2 + (BC)^2 \\
 &= \sqrt{(A,C)^2 + (BC)^2} \\
 &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}
 \end{aligned} \tag{20}$$

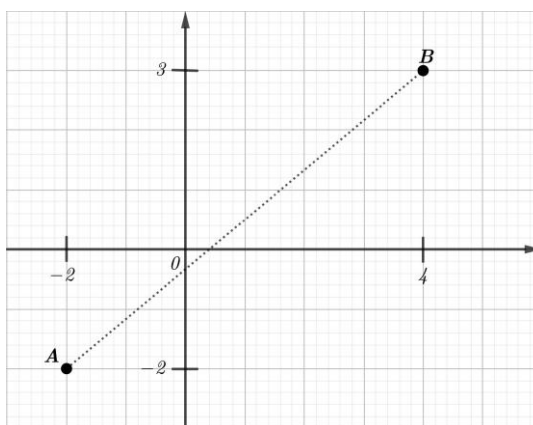
Agora, analisemos a distância d' em que para chegar de A a B faz-se necessário prosseguir de A a C, com distância AC e depois de C a B, com distância CB, assim, d' será dada por:

$$\begin{aligned}
 d' &= d_{AB} = (AC) + (BC) \\
 &= \sqrt{(A,C)^2 + (BC)^2} \\
 &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Agora vejamos as situações problema elencadas a seguir:

1. Analisemos a seguinte situação: você está perdido em uma floresta. Em um momento na sua tentativa de ser encontrado, você consegue chegar a uma clareira, faz uma fogueira e assim sinaliza onde fica sua localização. Por sorte, um avião de pequeno porte passa por lá, e sendo conhecido o fato de que você se encontra perdido, este avisa ao Corpo de Bombeiros. Você não sairá do local visto que depois de um dia de caminhada, você não encontrou lugar mais propício para o resgate e nem possui energia suficiente para gastar suas reservas. Suponha que o Corpo de Bombeiros use um sistema de eixos coordenados nos quais os pontos que representam o local A onde o helicóptero que vai lhe resgatar está e o local onde você se encontra B estão representados na figura abaixo e que a medida é dada em quilômetros:

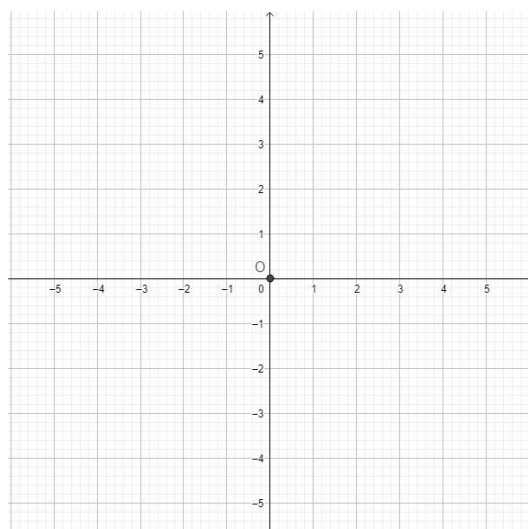
Figura 40 – Trajeto para o resgate



Fonte: Elaborado pelo autor

- a) Supondo que o helicóptero percorra uma trajetória em linha reta. Qual a distância a ser percorrida pelo helicóptero?
 - b) Será que a forma de medir distância apresentada na questão anterior é como medimos distância no nosso dia a dia?
 - c) Em caso negativo, como medimos distância na maioria dos casos no dia a dia?
2. Suponha que estejamos na cidade de Sobral, em que a origem do plano cartesiano seja o Centro de Convenções denotado por $O(0;0)$. Você deseja ir ao Parque da Cidade, lugar onde a galera se reúne aos fins de semana, situado no eixo das abscissas e denotado por $A(500;0)$. Mas você espera seus amigos na lanchonete Vandão, onde primeiro vão lanchar, situado no eixo das ordenadas no ponto $B(0;50)$. A unidade de medida é o metro.
- a) Na medição usual, a que distância você se encontra do Parque da Cidade?
 - b) Mas vocês vão percorrer esse trajeto a pé. Supondo que não haja outras ruas que dê acesso ao Parque da Cidade de onde você está, além das ruas representadas nos eixos paralelos. Quanto você e sua turma andarão, em metros? Descreva como será determinado o seu trajeto.
 - c) Que características diferentes são apresentadas nas distâncias encontradas nos itens a e b? Justifique.
3. Dado o plano cartesiano

Figura 41 – Plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor

- a) Localizar no plano cartesiano os pontos dados, O (0;0) e cada ponto A (3;0), B(2;1), C(1;2), D(0;3), E(-1;2), F(-2;1), G(-3;0), H(-2;-1), I(-1;-2), J(0;-3), K(1;-2), L(2;-1)
- b) Encontrar as distâncias entre a origem O (0;0) e todos os outros pontos dados

Tabela 1 – Distâncias - origem aos pontos dados

	Distâncias $ x_2 - x_1 + y_2 - y_1 $
\overline{OA}	$ 3 - 0 + 0 = 3 + 0 = 3 \Rightarrow \overline{OA} = 3$ (exemplo)
\overline{OB}	
\overline{OC}	
\overline{OD}	
\overline{OE}	
\overline{OF}	
\overline{OG}	
\overline{OH}	
\overline{OI}	
\overline{OJ}	
\overline{OK}	
\overline{OL}	

Fonte: Elaborado pelo autor

- c) Verifique que as distâncias entre $O(0;0)$ e $A'(2,5;0,5)$, $B'(1,5;1,5)$, $C'(0,5;2,5)$, $D'(0,5;2,5)$, $E'(-1,5;1,5)$, $F'(-2,5;0,5)$, $G'(-2,5;-0,5)$, $H'(-1,5;-1,5)$, $I'(-0,5;-2,5)$, $J'(0,5;-2,5)$, $K'(1,5;-1,5)$, $L'(2,5;-0,5)$, também é 3.

Tabela 2 – Distâncias - origem a outros pontos dados

	Distâncias $ x_2 - x_1 + y_2 - y_1 $
\overline{OA}	$ 3 - 0 + 0 = 3 + 0 = 3 \Rightarrow OA = 3$ (exemplo)
\overline{OB}	
\overline{OC}	
\overline{OD}	
\overline{OE}	
\overline{OF}	
\overline{OG}	
\overline{OH}	
\overline{OI}	
\overline{OJ}	
\overline{OK}	
\overline{OL}	

Fonte: Elaborado pelo autor

- d) Ligando os pontos $A, A', B, B', C, C', D, D', E, E', F, F', G, G', H, H', I, I', J, J', K, K', L, L'$ qual figura geométrica obtemos?
- e) A definição de circunferência nos diz que: *Sendo C um ponto no plano e r uma distância não nula, chama-se circunferência de centro C e raio r o conjunto dos pontos desse plano cuja distância ao ponto C é igual a r . Então qual a forma da circunferência no plano de Minkowski?*

5 CONCLUSÃO

A abordagem do Teorema de Borsuk, aqui direcionado ao recobrimento de figuras no plano de Minkowski é uma abordagem de um tema diferente do que se vê no ensino médio, trazendo algumas definições conhecidas de certo modo mas que aqui adquirem uma outra perspectiva.

Estamos diante de uma assunto um tanto diferente do habitual, mas que se origina de conceitos básicos e conhecidos matematicamente. Definições como *diâmetro*, *largura*, *distância entre dois pontos*, *plano*, *círculo* são comuns para qualquer professor de matemática bem como para um estudante do ensino médio. Nesse trabalho, vimos que tais conceitos podem adquirir outras características ou expandir suas aplicações. Ou não seria no mínimo diferente dizer para um aluno do ensino médio que um círculo como originalmente ele conhece pode parecer um “quadrado”?

Para nos deixar passear um pouco por esse mundo interessante em que passamos, dois matemáticos bem ativos em sua época nos deixaram suas contribuições Herman Minkowski e Karol Borsuk. A ideia de divisão de figuras, o diâmetro de uma figura, um círculo de Minkowski, são assuntos diversos do programa escolar, mas que de uma certa forma ao trabalhá-los com os alunos pode despertar o interesse no trabalho desenvolvido e possibilitar o aprendizado em matemática, pois todo contexto matemático envolvido precisa de conceitos básicos outrora estudados, tais como conceito de figuras convexas, formas geométricas, cálculo de distâncias, entre outros.

E para trazer algo tão diferente a sala de aula foi escolhido a realização das oficinas, uma forma de propiciar a interação do aluno, o fazer matemática por si mesmo, que o atrai, o diverte e o possibilita construir sua aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- BARATA, J. C. A.; **Notas para um Curso de Física-Matemática: Espaços Métricos**. São Paulo: USP, 2018. Disponível em: <[http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas de aula/arquivos/nc-cap27.pdf](http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas%20de%20aula/arquivos/nc-cap27.pdf)>. Acesso em: 6 jul. 2018
- BOLTIANSKI, Vladimir; MARTINI, Host; SOLTAN, P. S.; **Excursions into Combinatorial Geometry**. Berlin: Springer, 1997.
- BOLTIANSKI, Vladimir; GOJBERG, I. Ts; **División de Figuras em Partes Menores**. Moscú: Mir, 1973.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Formação de professores do ensino médio, etapa II - Caderno V: Matemática**. Curitiba: UFPR, 2014.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 2012.
- HELLMEISTER, Ana Catarina P. (coord.). **Geometria em Sala de Aula**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática)
- IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 1985.
- JANSSEN, Christina. **Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town (Exploring Conics with a Non-Euclidean Metric)**. Iowa: State University, 2007.
- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Herman Mikowski, School of Mathematics and Statistics**. Scotland: University of St Andrews 2015. Disponível em: <<http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Biographies/Minkowski.html>>. Acesso em: 03 maio 2018.
- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Karol Borsuk**, Scotland: University of St Andrews, 2000. Disponível em: <<http://www-history.mcs.stand.ac.uk/Biographies/Borsuk.html>>. Acesso em: 03 maio 2018.
- SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA: **Ensino Médio: Contribuição da SBM para uma Discussão Sobre Currículo de Matemática** Rio de Janeiro: SBM, 2014. Disponível em: <<https://www.sbm.org.br/wpcontent/uploads/2015/01/Contribuição-da-SBM-Ensino-Meio-FINAL.pdf>>. Acesso em: 03 maio 2018.
- SÁ, Carlos Correia de; ROCHA, Jorge (editores); **Treze Viagens Pelo Mundo da Matemática** 2 ed.: Rio de Janeiro, SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática)
- SOUSA, D. D. DE; **Propostas para o Ensino de Semelhança**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro.
- WAGNER, Eduardo; CARNEIRO, José Paulo Q.; **Construções Geométricas**. 6 ed.: Rio de Janeiro, SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática)