CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

REGINALDO RIBEIRO DOS SANTOS

QUEBRA-CABEÇAS PITAGÓRICOS

Maringá
2018

REGINALDO RIBEIRO DOS SANTOS

QUEBRA-CABEÇAS PITAGÓRICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves

Maringá
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Santos, Reginaldo Ribeiro dos
S237q Quebra-cabeças pitagóricos / Reginaldo Ribeiro dos Santos. -- Maringá, 2018.
vii, 54 f. : il., color.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2018.

1. Geometria plana. 2. Teorema de Pitágoras. 3. Quebra-cabeças. 4. Metodologia de Ensino aprendizagem. I. Neves, Eduardo de Amorim, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 516.22
Edilson Damasio CRB9-1.123

REGINALDO RIBEIRO DOS SANTOS

QUEBRA-CABEÇAS PITAGÓRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Valter Soares de Camargo
Universidade Estadual do Paraná - Paranavaí

Prof. Dr. João Roberto Gerônimo
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 26 de outubro de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à DEUS, à minha FAMÍLIA, em especial minha MÃE, minha ESPOSA e meus FILHOS, pelo apoio, paciência e incentivo no decorrer do curso.

Aos colegas de curso pela colaboração na elucidação das dúvidas, companheirismo.

Aos PROFESSORES, em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves, pela imensa ajuda e escolha no tema deste trabalho .

Agradeço também, aos órgãos públicos responsáveis que disponibilizaram e financiram este Programa de Mestrado, que em muito favoreceu o meu crescimento pessoal e profissional. Em particular, à LÚCIA responsável pela secretaria do departamento de pós graduação, onde sempre nos deu todo amparo necessário com muita competência.

Resumo

Esta dissertação foi elaborada com intuito de mostrar uma forma alternativa de apresentação e demonstração do Teorema de Pitágoras, utilizando para isso, quebra-cabeças. De modo mais geral, esse trabalho apresenta uma proposta de abordar de forma lúdica diversos conceitos da geometria plana através da construção e manipulação desses quebra-cabeças.

Palavras Chaves: Teorema de Pitágoras, Quebra-cabeças, Metodologia de Ensino-aprendizagem.

Abstract

This dissertation has been elaborated in order to show an alternative manner of presenting and demonstrating Pythagoras? Theorem, using jigsaw puzzles for this. In general, this project presents a proposal to apply playfully the several concepts of flat geometry by building and handling these jigsaw puzzles.

Key words: Pythagorean Theorem; Jigsaw Puzzles; Teaching-Learning Methodology.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Teorema de Pitágoras se faz presente na vida de todos alunos durante o ciclo escolar desde o ensino fundamental II. Além disso, esse teorema deva ser um dos resultados matemáticos mais famosos da história, a ponto de que se perguntássemos para uma pessoa que tenha completado o ensino médio, qual é a fórmula do Teorema de Pitágoras, ouviríamos:

"*O quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos seus catetos.*"

Mas se questionássemos, onde se aplica? Por que essa fórmula é válida? ou quais são as hipóteses do teorema? Há uma grande chance de que essa pessoa não responderia de forma correta. Isto talvez, se deva ao fato, de que a maneira com que a maioria dos professores de matemática abordam esse conteúdo, seja exclusivamente através de aplicação da fórmula, via exercícios de fixação. Questões teóricas que possibilitam ao aluno adquirir a habilidade de argumentação, abstração e raciocínio acabam sendo deixadas de lado.

Mas será que a culpa dessa concepção básica de aplicação de fórmulas é somente dos professores? Ou os livros didáticos e apostilas também colaboram com essa visão, através de excessivos exercícios de fixação?

Nesse sentido, nos propusemos a elaborar um trabalho que sirva como material de apoio ao professor, de modo que ele possa abordar o Teorema de Pitágoras de forma lúdica, investigativa, divertida e que ajude-o a promover atividades que favoreçam o desenvolvimento das habilidades citadas acima.

Na busca por maneiras de se abordar o Teorema de Pitágoras, encontramos em uma exposição de matemática promovida pelo projeto de extensão *MATEMATIVA* coordenado pelo Prof. Dr. João Roberto Gerônimo da Universidade estadual de Maringá, a seguinte peça

"MATEMATIVA: Exposição interativa de Matemática"
Fonte: http://www.dma.uem.br/matemativa

Essa peça tem como um dos seus objetivos, observar que a área do maior quadrado é igual a soma das áreas dos dois quadrados menores, através da transposição das peças dos quadrados menores para o quadrado maior, verificando assim o teorema de Pitágoras. Mais ainda, esse quebra-cabeça evidência um outro significado geométrico do teorema, relacionado a áreas, e possibilitando a levar o aluno a entrar em contato com questões mais complexas, como o problema da quadratura de *lunas de Hipócrates.*

Sejam três semi-círculos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Então a soma das áreas dos dois semi-círculos menores é igual a área do semi-círculo maior.

Uma outra questão interessante que surge ao observar esse quebra-cabeça é: Como fazer a construção das peças desse puzzle, de modo que o quebra-cabeça tenha solução? Já que não é qualquer decomposição feita nos quadrados menores, que se encaixarão no quadrado maior, isto é, a solução do quebra-cabeça exige uma justificativa. De modo mais geral, este problema é conhecido como Teorema de *Bolyai-Gerwien* da equidecomponibilidade e equicomplementabilidade, mais precisamente o Teorema diz que:

Dois polígonos quaisquer são equidecomponíveis se, e somente se, possuem a mesma área e se, e somente se, são equicomplementáveis.

Dentre os quebra-cabeças do acervo do *Matemativa* que explora o Teorema de Pitágoras, a peça 077, que relaciona a área do hexágono regular construído sobre a hipotenusa, com as áreas dos dois hexágonos regulares construídos sobre os catetos, não havia um material teórico que justificasse que tal decomposição possuísse solução, nem mesmo na obra de *Flisha Scott Loomis, autor do livro "The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series*", onde constam 340 diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Figura 1: peça 077

Despertando assim o desejo de realizar um trabalho neste sentido, baseado em fundamentos teóricos de construção geométrica com régua e compasso e utilizando os conceitos da Geometria euclidiana plana.

Uma das vertentes resultantes na realização e construção da parte teórica desta obra, é tornar mais evidente as diversas formas de apresentar o Teorema de Pitágoras aos alunos do ensino fundamental, bem como dos ensinos médio e superior.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

O primeiro capítulo discorreremos sobre a importante história do grandioso Pitágoras e algumas de suas descobertas.

O segundo capítulo apresentaremos brevemente os alguns conceitos básicos da geometria plana, necessários para o entendimento das justificativas da construção dos quebra-cabeças.

O capítulo 3 dedicaremos as construções e justificativas das soluções de quatro quebra-cabeças Pitagóricos.

No último capítulo faremos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 1

TEOREMA DE PITÁGORAS

Dedicaremos esse primeiro capítulo a biografia e ao Teorema de Pitágoras.

1.1 História

Pitágoras foi o grande pai da numerologia, ele nos deixou este legado maravilhoso de entendimento da vida e dos números de uma forma diferente.

Pitágoras nasceu aproximadamente a 582 a.C. e viveu também aproximadamente até 507 a.C. , datas estas que divergem entre os historiadores, mas dentro das divergências podemos afirmar que sua história se passou entre 600 a.C. a 500 a.C.

Ele tinha desde antes do seu nascimento uma história diferente, ainda na barriga da mãe, onde naquela época, quando se queria fazer algum esclarecimento, existia uma peregrinação até o templo de Apolo, e esse templo era o templo das Pytonizas, pois antigamente na história, se contava que era o templo de Pyton (uma grande serpente dos mundos interiores), e esse templo mudou de nome porque segundo a história (mitologia), Apolo que era um deus grego, venceu Pyton em uma batalha, feito isso, o templo passou a ser denominado templo de Apolo, mas ainda com identificações de Pyton por conta da presença das Pytonizas.

As Pytonizas eram sacerdotisas que inspiravam vapores que as traziam estados alterados de consciência e a partir desse momento elas faziam previsões, então as pessoas iam até o templo de Apolo para encontrar respostas, e assim fez a mãe de Pitágoras, que teve uma surpresa muito grande, pois quando chegou ao templo de

Apolo, as Pytonizas fizeram uma previsão que ela estaria gerando um ser muito especial, muito iluminado e que ele seria filho de Apolo (protegido pela entidade deus Apolo).

No entanto, naquela época, esse tipo de condição era um status social, uma pessoa que tinha um deus como protetor, tinha uma condição especial dentro da sociedade, então em seu nascimento recebeu o nome de Pytagoras de Samos, Pytagoras que diz ser originário do templo de Pyton que passou a ser templo de Apolo, caracterizando assim, filho de Apolo, o que curiosamente se confirmou ainda mais através de uma marca de nascença na coxa que era o símbolo de Apolo, o que deu mais validade as provisões das Pytonizas, de Samos porque era o nome de uma ilha no mar Egeu na costa as Ásia onde nasceu, assim Pitágoras era considerado um semideus, por coincidência ou não, ao longo de sua história existem relatos que Pitágoras era capaz de realizar coisas ditas? impossíveis?, como lembrar de vidas passadas; movimentar energias da natureza e muito de sua sabedoria é utilizado até os dias de hoje.

Seu pai biológico era um respeitado mercador, Pitágoras em sua infância durante as viagens com o pai em contato com o comercio nas navegações foi aprendendo línguas e compartilhando conhecimentos. Aos seus dezoito anos aproximadamente, conheceu um sábio chamado Tales de Mileto, Tales aconselhou Pitágoras à desenvolver sua inteligência nas universidades do Egito, onde aos vinte anos aproximadamente Pitágoras foi estudar nas indicadas universidades.

Naquela época as universidades do Egito, eram diferentes do que se tem nos dia de hoje, tinham uma conotação espiritual, astrologia, medicina, religião, filosofia, tudo era estudado ao mesmo tempo, as universidades eram como mosteiros, funcionavam como uma escola templo, onde Pitágoras estudou em uma dessas universidades aproximadamente por dez anos, até que ocorreu a invasão dos árabes no Egito e Pitágoras foi preso e mandado para Creta, como ainda não havia terminado seus estudos, continuou a sua busca por conhecimento viajando para muitos lugares durante aproximadamente mais dez anos.

Sua história, brilhantemente passou pela Crotona, hoje atual Itália, onde deu origem a uma escola filosófica com as características e costumes das universidades do Egito, era uma escola comunitária porém secreta.

Para ingressar na escola pitagórica era necessário fazer juramentos e seguir as regras da casa, tais como, voto de silêncio por cinco anos dentro e fora da escola, comiam carne apenas de animais sacrificados num ritual como uma espécie de purificação daquela carne, pois Pitágoras acreditava em reencarnação, que naquela época era chamada de *Transmigração*, onde acreditava-se em voltar a vida como animal, planta ou qualquer ser vivo, logo se não houvesse a purificação correriam o risco de estarem comento um ancestral.

Lá todos tinham direito aos conhecimentos matemáticos, filosóficos e com muitas fundamentações religiosas, mas também praticavam exercícios para cuidarem do corpo e da mente, existiam também as salas de banho onde os discípulos se encontravam e ali eram feitos muitos negócios, ou seja, a escola pitagórica além de ser um locar de compartilhamento de conhecimentos também era um locar de comercializações.

A escola pitagórica também influenciava a política, onde existia uma fidelidade entre seus membros, passou a ser uma escola modelo que foi reproduzida em outros lugares e outras épocas futuras.

No entanto Pitágoras em seus estudos e conhecimentos adquiridos ao longo de suas peregrinações e observações filosóficas e comprovadas através da matemática, desenvolveu todo um conhecimento dos números representados utilizando letras do alfabeto, tais como, A (uma unidade), B (duas unidades) e assim sucessivamente, pois os números representados nos dias de hoje, são os algarismos arábicos, que surgiram a aproximadamente 700 anos depois de Pitágoras.

Outras descobertas de Pitágoras:
Númeors figurados
Os pitagóricos estudaram e demonstraram várias propriedades dos números figurados. Entre estes o mais importante era o número triangular 10, chamado pelos pitagóricos de tetraktys, tétrada em português.
Este número era visto como um número místico uma vez que continha os quatro elementos fogo, água, ar e terra: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, e servia de representação para a completude do todo.
Números perfeitos
A soma dos divisores de determinado número com exceção dele mesmo, é o próprio número.
Exemplos: Os divisores de 6 são: $1, 2, 3$ e 6.
Então, $1 + 2 + 3 = 6$.
Os divisores de 28 são: $1, 2, 4, 7, 14$ e 28.
Então, $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.
Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Pit

Os costumes da escola pitagórica eram parecidos com os que hoje conhecemos como Maçonaria, a escola aplicava um regime com muitas regras e protegiam seus segredos através do já citado sigilo absoluto.

Os membros da escola eram muito leais ao regime, porém ainda ajudavam a comunidade externa.

Pitágoras, era para aqueles que o permeavam, uma espécie de profeta, onde nas reuniões tudo girava em torno da matemática, e se discutiam conhecimentos sobre aritmética, geometria, astronomia, música e justiça, também se falava sobre vida após a morte.

Na escola pitagórica acreditava-se que "tudo é número", para eles tudo que vinha da natureza tinham relações com a matemática, adotaram um emblema que era um pentágono estrelado ou pentagrama, com os estudos aprofundados em cima desta filosofia, conseguiram deixar vários legados, onde um deles foi e sempre será fundamental para a matemática, o Teorema de Pitágoras.

Este famoso Teorema de Pitágoras nos dá que a área do quadrado cujo o lado é determinado pela hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual a soma das áreas dos quadrados que tem seus lados determinados pelos catetos. Segundo relatos, os babilônios no tempo do *código de Humurabi** tinhas registros da demonstração deste Teorema, porém não se pode negar que foi Pitágoras que a levou para os quatro cantos do mundo.

> *"Código de Humurabi, representa o conjunto de leis escritas, sendo um dos exemplos mais bem preservados desse tipo de texto oriundo da Mesopotâmia. Acredita-se que foi escrito pelo rei Hamurábi, aproximadamente em 1772 a.C.. Foi encontrado por uma expedição francesa em 1901 na região da antiga Mesopotâmia, correspondente à cidade de Susa, no sudoeste do Irã."

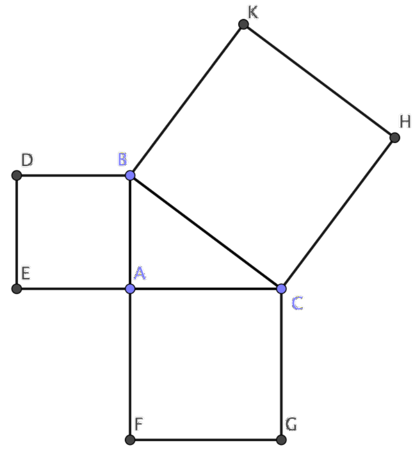
Durante o período onde se passaram estes relatos, Pitágoras adquiriu muitos inimígos políticos e religiosos, onde estes destruiram sua escola bem como todo o seu acervo, vindo ainda a o expulsar de Crotona. Em relação ao seu principal Teorema, os estudos realizados na escola Pitagórica, em especial estudavam sequências numéricas de três números a, b, c inteiros positivos chamada de Ternas Pitagóricas, que matematicamente satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$.

1.2 Demonstrações do Teorema de Pitágoras

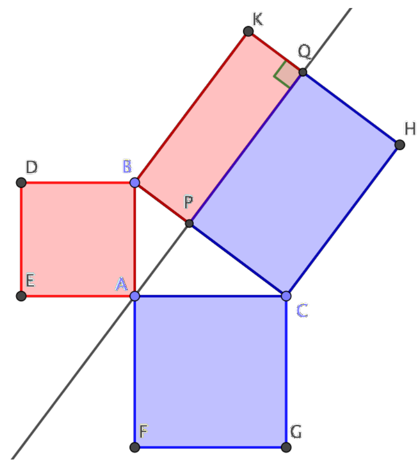
Vamos apresentar duas demonstrações do Teorema de Pitágoras, a primeira contida no livro "Elementos" de Euclides proposição 47 do livro I [5] e a segunda contida na maioria dos livros didáticos.

Teorema 1.1. *(de Pitágoras) Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

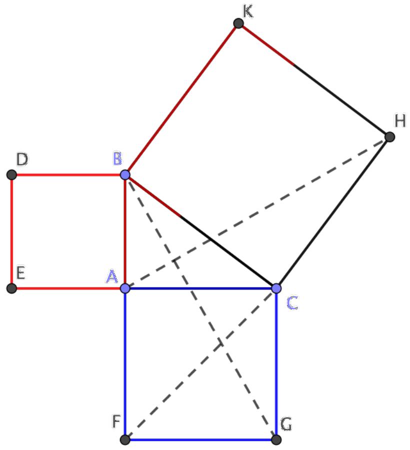
Demonstração: Seja ΔABC o triângulo retângulo com ângulo reto em A, catetos $a = \overline{AB}, b = \overline{AC}$ e hipotenusa $c = \overline{BC}$. Construa quadrados sobre os lados desse triângulo.



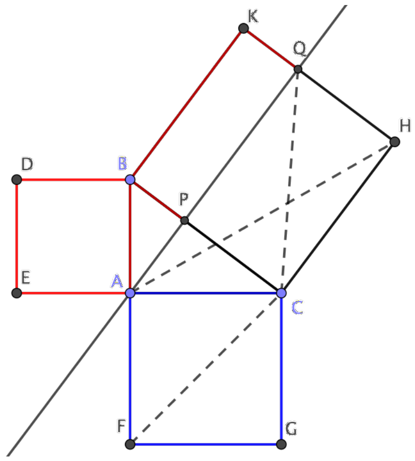
Agora trace uma reta perpendicular a hipotenusa passando pelo vértice A, na qual intercepta a hipotenusa em P e o lado do quadrado $BCHK$ em Q. Vamos mostrar que a área do quadrado $AFGC$ é igual à área do retângulo $CHQP$ e que a área do quadrado $ABDE$ é igual a área do retângulo $BPQK$.



De fato, observe que o triângulo ΔGCF possui a mesma área do triângulo ΔGCB, pois ambos possuem a mesma base GC e a mesma altura, pois os segmentos GC e FB são paralelos. E note que pelo caso lado-ângulo-lado $\Delta GCB \equiv \Delta ACH$, logo possuem a mesma área.



Por fim, os triângulos ΔACH e ΔQCH possuem também a mesma área, pois tem a mesma base CH e altura.



Portanto, temos que $A(AFGC) = 2 \cdot A(\Delta GCF) = 2 \cdot A(\Delta QCH) = A(CHQP)$.

De forma análoga tem-se $A(ABDE) = A(BPQK)$.

Donde segue que

$$A(BCHK) = A(CHQP) + A(BPQk) = A(AFGC) + A(ABDE)$$

$\square$

O próximo resultado mostra que a recíproca do teorema de Pitágoras também é verdadeira.

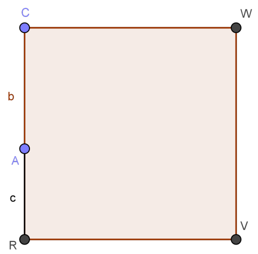
Teorema 1.2. *Se o quadrado da medida de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo, com ângulo oposto ao maior lado.*

Demonstração: Seja T_1 um triângulo qualquer de lados a, b e x tal que

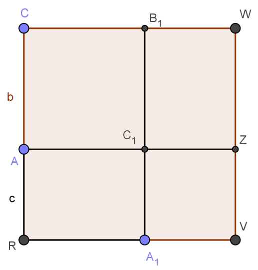
$$x^2 = a^2 + b^2.$$

Agora seja T_2um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c. Pelo Teorema de Pitágoras temos que $c^2 = a^2 + b^2$, logo $c^2 = x^2$ como $x, c \in \mathbb{N}$ segue que $x = c$. Assim pelo caso de LLL de congruência de triângulos tem-se que esses dois triângulos são congruentes, logo o T_1 é um triângulo retângulo. $\square$

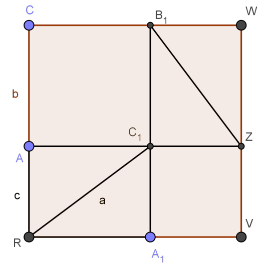
Agora iremos apresentar uma outra clássica demonstração deste Teorema de Pitágoras. Dado um triângulo retângulo de lados a, b, c. Primeiramente construa um quadrado de lado $b + c$.



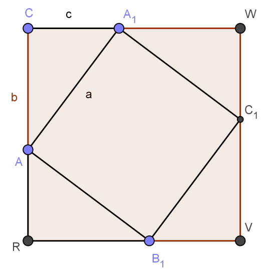
1. Vamos traçar dois segmentos na região interna do quadrado de lado $b + c$, de forma a determinar dois quadrados, um de lado b e outro de lado c e dois retângulos congruêntes de lados consecutivos b e c.



2. Traçaremos uma diagonal em cada um dos retângulos e chamaremos de a o comprimento de cada uma das diagonais. Ao excluirmos os quatro triângulos retângulos de lados a, b, c, a área restante será $b^2 + c^2$;



3. Agora vamos apresentar o mesmo quadrado de lados $b+c$, colocando os quatro triângulos retângulos de lados a, b, c em outras posições dentro do quadrado.

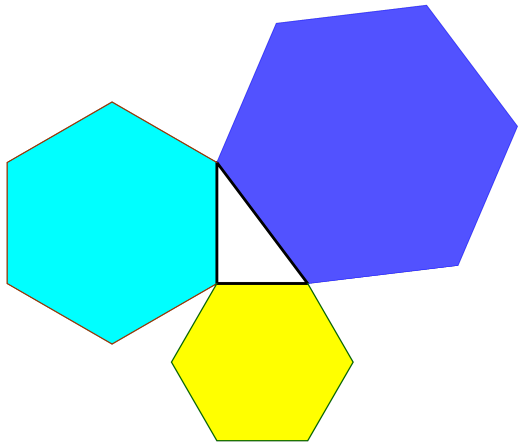


4. Ao excluirmos novamente os quatro triângulos retângulos, a área restante é a área do quadrado de lado a.

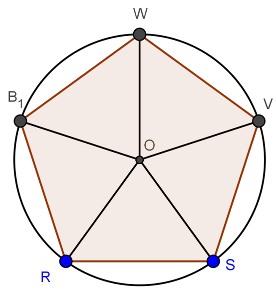
   Com isso, pelo ítem 2, já podemos concluir que $a^2 = b^2 + c^2$.

De modo mais geral, podemos construir qualquer polígono regular convexo de n lados, sob os lados do triângulo retângulo, de modo a querer mostrar a validade do Teorema de Pitágoras através das áreas desse polígonos.

De fato, considere um triângulo retângulo de lados a, b e c, e construa polígonos regulares de n lados sob os lados desse triângulo,



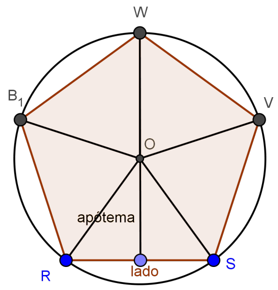
Suponha que a soma da área dos dois polígonos menores seja igual a área do polígonos maior. Como os polígonos regulares convexos de n lados podem ser subdivididos em n triângulos isósceles congruentes entre sí, como podemos observar o pentágono na figura a seguir.



E que em consequência disso, a área deste polígono regular pode ser obtida por n vezes a área de um desses triângulos isósceles, ou seja;

$$A = \frac{n \cdot (base \cdot altura)}{2}$$

$$A = \frac{n \cdot (lado \cdot apotema)}{2}$$



Como já podemos observar que o ângulo $R\widehat{O}S$ é ângulo central e o chamaremos de θ todo ângulo central cuja medida será $\theta = \dfrac{360^o}{n}$, com isso, temos que

$$tg(\frac{\theta}{2}) = \frac{\frac{lado}{2}}{apotema}$$

$$Apotema = \frac{lado}{2tg(\frac{\theta}{2})}$$

Agora já poderemos determinar a área de qualquer polígono regular de n lados.

$$A = \frac{n \cdot (lado \cdot apotema)}{2}$$

$$A = \frac{n \cdot (lado)^2}{4tg(\frac{\theta}{2})}$$

Como por hipótese a área do polígono de lado c e igual a soma das áreas dos polígonos de lados a e b, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (c)^2}{4tg(\frac{\theta}{2})} &= \frac{n \cdot (a)^2}{4tg(\frac{\theta}{2})} + \frac{n \cdot (b)^2}{4tg(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{n \cdot (a^2 + b^2)}{4tg(\frac{\theta}{2})} \end{aligned}$$

Portanto

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Por outro lado, se vale a terna pitagórica, pode-se concluir de forma análoga que a área área do polígono de lado c e igual a soma das áreas dos polígonos de lados a e b.

Utilizando estas informações, serão elaborados quebra-cabeças pitagóricos com hexágonos regulares determinados pelos lados do triângulo retângulo de lados $3u, 4u$ e $5u$ com $u \in \mathbb{N}$. A especificidade dessa terna pitagórica, é por causa que a peça do acervo do *MATEMATIVA* está nessa proporção.

CAPÍTULO 2

NOÇÕES DA GEOMETRIA PLANA

Abordaremos nesse capítulo, alguns conceitos básicos relacionado a área de região poligonal necessário para o entendimento do problema de equidecomponibilidade e equicomplementabilidade. Nesse sentido o texto não é autocontido, por essa razão é importante que o leitor tenha um conhecimento prévio de geometria plana nos níveis dos livros referências, [5], [6] e [8].

2.1 Áreas de figuras planas

Para o que se segue, denominaremos por *figuras* subconjuntos do plano.

Noções Primitivas: Região plana, Interior de região plana e fronteira de região plana.

Axioma 2.1. *Toda região plana R corresponde um único número real positivo.*

Definição 2.2. *A área de uma região plana R, denotada por $A(R)$ (lê-se área de R) é o número real dado pelo Axioma 2.1.*

Agora vamos restringir as regiões do plano nos quais iremos calcular as áreas. Nesse sentido iremos definir os seguintes objetos

Definição 2.3. *Dois segmentos são ditos consecutivos se possuirem exatamente um extremo em comum.*

Definição 2.4. *Dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, um polígono de n-lados é uma figura formada por uma sequência de n pontos $A_1, \cdots, A_n$ e pelos segmentos consecutivos*

$A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $A_1 = A_n$;

b) Os pontos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são dois a dois distintos.

c) Os lados não consecutivos não se interceptam;

d) Dois lados consecutivos não são colineares.

Os segmentos A_iA_{i+1} $(i = 1, \cdots, n-2)$ e $A_{n-1}A_1$ são denominados lados e, os pontos $A_1, \cdots, A_n$ são denominados vértices. Os segmentos determinados pelos vértices que não são lados do polígono são chamados diagonais do polígono.

Definição 2.5. *Dado um triângulo, a região triangular é a região plana determinada pelo triângulo e pelo conjunto dos pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados do triângulo.*

Proposição 2.6. *Todo polígono com n lados determina $n-2$ triângulos tais que dois quaisquer desses triângulos não possuem pontos interiores em comum e seus vértices são os vértices do polígono.*

Definição 2.7. *Dado um polígono, a região poligonal é a região plana determinada pela união das regiões triangulares.*

Definição 2.8. *Um polígono é dito convexo se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos está totalmente contido na sua região poligonal.*

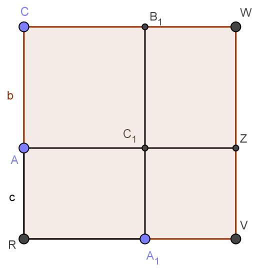
Axioma 2.9. *A área de um quadrado é o quadrado do comprimento do seu lado.*

Axioma 2.10. *Se dois triângulos são congruentes, então as regiões triangulares determinadas por eles têm a mesma área.*

Diante do exposto, estamos em condição de deduzir as fórmulas das áreas de diversos polígonos específicos.

Teorema 2.11. *A área de um retângulo de lados a e b é o produto $a \cdot b$.*

Demonstração: Seja R um retângulo de lados a e b. Construa um quadrado S de lado $(a+b)$ e observe que tal quadrado pode ser dividido em dois quadrados S_1 e S_2 de lados a e b respectivamente, e dois retângulos R de lado a e b.



Assim

$$A(S) = A(S_1) + 2 \cdot A(R) + A(S_2)$$

Ou seja

$$A(R) = \frac{A(S) - A(S_1) - A(S_2)}{2}$$

$$A(R) = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} = a \cdot b$$

□

Teorema 2.12. *A área de um triângulo retângulo é a metade do produto da medida de seus catetos*

Demonstração: Considere um triângulo retângulo ABC, no qual $\widehat{B}$ é o ângulo retângulo, trace por C uma reta r paralela ao lado AB e trace por A uma reta s paralela ao lado BC. Seja D a interseção de r e s. Assim $ABCD$ é um retângulo cuja área é dada por $A(ABCD) = \overline{BC} \cdot \overline{AB}$. Como os triângulos $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ segue que as áreas desses triângulos são iguais, além disso, por construção a região plana $ABCD$ é a união das regiões ABC e ADC que não possuem pontos interiores em comum logo

$$A(ABCD) = A(ABC) + A(ADC) = 2 \cdot A(ABC)$$

Portanto

$$A(ABC) = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{2}.$$

□

Teorema 2.13. *A área de um paralelogramo é o produto de qualquer base pela altura correspondente.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um paralelogramo de lados a e b com altura h. Seja E o pé da perpendicular ao lado BC passando por A e F o pé da perpendicular ao lado AD passando por C. Assim os triângulos $ABE \equiv DCF$ pelo critério LL$A_{\boxdot}$, logo $BE \equiv DF$ e como consequência $\overline{AF} = \overline{CE}$. Assim o paralelogramo é a união de duas regiões triangulares e uma região retangular, logo

$$A(ABCD) = A(ABE) + A(AECF) + A(DCF) = 2 \cdot A(ABE) + A(AECF)$$

$$A(ABCD) = \overline{BE} \cdot h + \overline{EC} \cdot h = (\overline{BE} + \overline{EC}) \cdot h = \overline{BC} \cdot h = b \cdot h$$

□

Teorema 2.14. *A área de qualquer triângulo é a metade do produto da medida de qualquer lado pela medida da altura correspondente.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer, trace por C uma reta paralela r ao lado AB e por A uma reta s paralela ao lado BC, seja D o ponto de interseção dessas retas r e s. Assim o quadrilátero $ABCD$ é por construção um paralelogramo cuja altura h é também a altura referente ao lado BC do triângulo ABC. Como $ABC \equiv CDA$ temos que $A(ABC) = A(DCA)$ logo

$$\overline{BC} \cdot h = A(ABCD) = A(ABC) + A(CDA) = 2 \cdot (ABC)$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot h.$$

□

Teorema 2.15. *A área do trapézio é a metade do produto da medida da altura pela soma das medidas das bases.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um trapézio cujos lados paralelos, isto é as bases sejam BC e AD. Seja h a medida da altura desse trapézio. Note que

$$A(ABCD) = A(ABC) + A(ACD) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot h + \frac{1}{2}\overline{AD} \cdot h = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD}) \cdot h$$

□

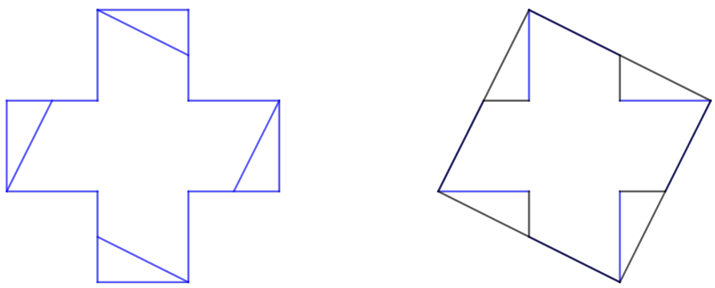
2.2 Equidecomponibilidade e Equicomplementabilidade

Para o que se segue utilizamos as referências [2] e [3].

Definição 2.16. *Duas regiões planas F_1 e F_2 são ditas congruentes, se existir uma função $\phi : F_1 \to F_2$ biunívoca entre os seus pontos que preserva medidas de segmentos, isto é,* $\overline{AB} = \overline{\phi(A)\phi(B)}$, *para todo* $A, B \in F_1$.

Em outras palavras, podemos dizer que duas figuras são congruentes se for possível sobrepor ambas através de translações, rotações e reflexões no plano.

Definição 2.17. *Dois polígonos são equidecomponíveis (ou equicompostas) se é possível decompor um desses polígonos em um número finito de partes de modo que por meio de um rearranjo das mesmas, compor o outro polígono.*



A definição acima necessita de algumas considerações. Primeiramente, no nosso contexto, a palavra "rearranjo" quer dizer matematicamente que as peças dada pela partição do polígono, sofrem apenas movimentos rígidos no plano isto é, translações, rotações e reflexões. Em segundo lugar, "decompor o polígono" significa fazer uma partição desse polígono, de modo que cada parte (peça) dessa partição seja um polígono. Por fim, o número finito de peças, implica que o processo de "desmontar" e esse polígono e "montar" outro, seja um processo finito.

Lema 2.18.

a) Todo triângulo é equidecomponível a um paralelogramo de mesma área.

b) Todo paralelogramo é equidecomponível a um retângulo de mesma área.

c) Todo retângulo é equidecomponível a um quadrado de mesma área.

Demonstração: Ver [2]. □

Como consequência desses resultados, temos o Teorema de Pitágoras no contexto de equidecomponibilidade.

Corolário 2.19. *Dois quadrados dados são equidecomponíveis com um outro quadrado cuja área é igual a soma das áreas dos dois quadrado.*

Teorema 2.20. *Sobre equidecomponibilidade.*

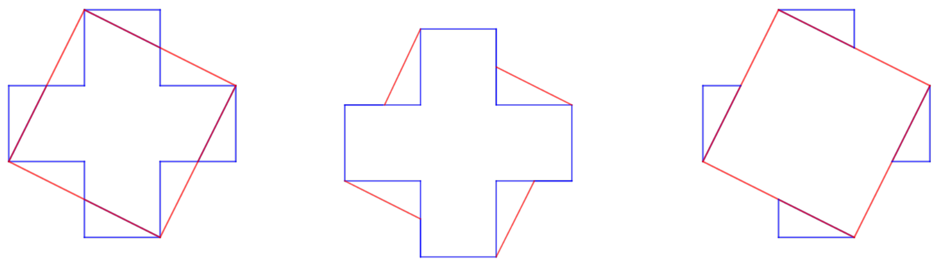
a) A relação de equidecomponibilidade é uma relação de equivalência.

b) Se duas figuras são equidecomponíveis, então elas possuem a mesma área.

Demonstração: Ver [2]. □

Definição 2.21. *Duas figuras são equicomplementáveis (ou equiadicionais) se for possível justapor a ambas um mesmo conjunto de figuras congruentes de modo as duas composições sejam figuras congruentes.*

Na figura abaixo, a primeira mostra os dois polígonos, a cruz e o quadrado. A segunda e terceira figura mostram ambas sobrepostas.



Teorema 2.22. *Sobre equidecomplementabilidade.*

a) A relação de equidecomplementáveis é uma relação de equivalência.

b) Se duas figuras são equicomplementáveis, então elas possuem a mesma área.

Demonstração: Ver [2]. □

Teorema 2.23. *(Bolayi-Gerwien) Dois polígonos de mesma área são equidecomponíveis*

Demonstração: Vamos mostrar que qualquer polígono de área A é equidecomponível com um quadrado de área A, assim o resultado segue por transitividade. Seja F_1 um polígono arbitrário de área A e Q um quadrado de área A. Pela proposição 2.6, temos que todo polígono possue uma triangulação, assim pelo item a) do lema 2.18 cada um desses triângulos podem ser transformados em paralelogramos. Agora pelo item b) do mesmo lema, cada um desses paralelogramos podem ser transformados em retângulos, por fim, o item c) garante que podemos transformar cada retângulo em quadrados. Mas pela versão de equidecomponibilidade do Teorema de Pitágoras, pode-se juntar esses quadrados dois a dois de modo a obter um outro quadrado cuja área é a soma das áreas dos dois primeiros quadrados. Desta maneira, obteremos ao final desse processo que é finito, um quadrado cuja área é igual ao polígono original.

□

Corolário 2.24. *Dois polígonos de mesma área são equicomplementáveis*

Demonstração: Seja P_1 e P_2 dois polígonos de mesma área. Tome dois quadrados congruentes Q_1 e Q_2 suficientemente grandes de modo que o polígono P_1 e P_2 fiquem respectivamente no interior desses quadrados. Agora retirando P_1 e P_2 do interior de seus respectivos quadrados teremos duas figuras F_1 e F_2 de mesma área, na qual se ligarmos os vértices do quadrado a vértices do polígono, essa figura se torna um polígono, assim pelo Teorema de Bolayi-Gerwien essas figuras são equidecomponíveis, portanto podemos encontrar uma quantidade finita de peças justapostas, aos polígonos iniciais, resultam em quadrados congruentes, logo P_1 e P_2 são equicomplementáveis. □

Por fim, obtemos a seguinte caracterização de equidecomponibilidade e equicompletabilidade.

Corolário 2.25. *Dois polígonos são equidecomponíveis, se, e somente se, são equicomplementáveis.*

CAPÍTULO 3

QUEBRA-CABEÇAS PITAGÓRICOS

Neste capítulo vamos mostrar a construção de quatro quebra-cabeça que conduz a demonstração do Teorema de Pitágoras.

3.1 Quebra-cabeça 1

Na primeira seção será dado os passos para a construção com régua e compasso do quebra-cabeça e na segunda seção apresentaremos as justificativas da construção e a solução do quebra-cabeça.

3.1.1 Construção do quebra-cabeça 1

a) Considere inicialmente o triângulo retângulo ΔABC, com catetos $\overline{AC} = 3$ e $\overline{AB} = 4$ e hipotenusa $\overline{BC} = 5$.

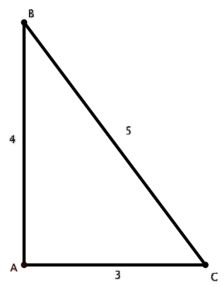


Figura 3.1: Triângulo Retângulo

b) Construa hexágonos regulares sobre os lados deste triângulo, conforme a figura abaixo. Denotaremos por H_3, H_4 e H_5 os hexágonos regulares de lados $3, 4$ e 5 respectivamente. Formando a assim a base do quebra-cabeça.

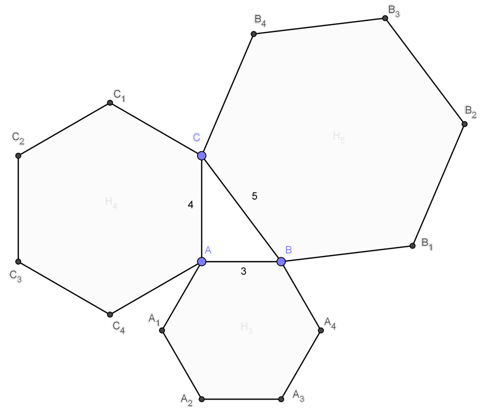
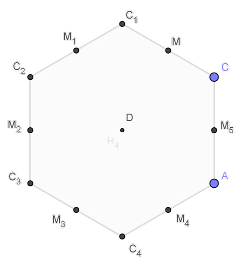
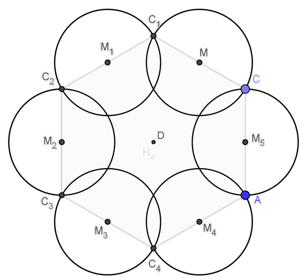


Figura 3.2: Base do quebra-cabeça

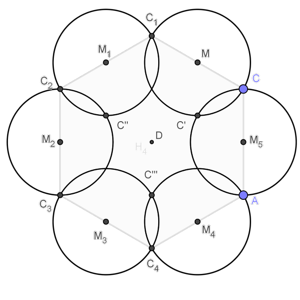
Agora vamos construir as peças do quebra-cabeça. Iniciaremos com as peças que estarão sobre o hexágono H_4, formada por três losângos e três pentágonos regulares.

c) Marque o ponto médio em cada lado de H_4 e construa circunferências de centro nesses pontos médios e raio 2.

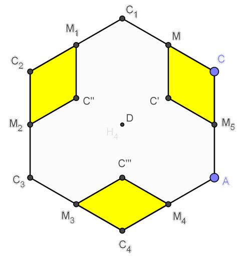




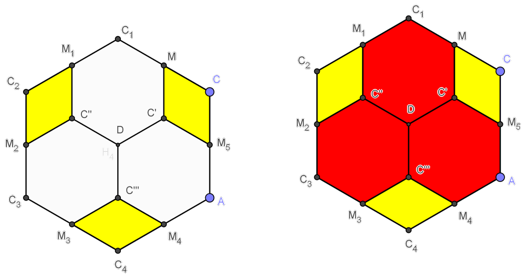
d) Denote por C', C'' e C''', os pontos da região interna de H_4, determinados respectivamente pelas interseções das circunferências de centro M e M_5, M_1 e M_2, e M_3 e M_4.



e) Trace os segmentos $MC', M_5C', M_4C''', M_3C'''$, M_2C'' e M_1C'' obtendo assim três losângos.

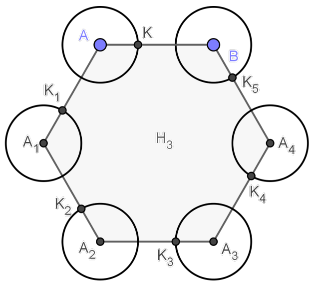


f) Construa os segmentos $C'D$, $C''D$ e $C'''D$, de modo a obter três pentágonos relugares.

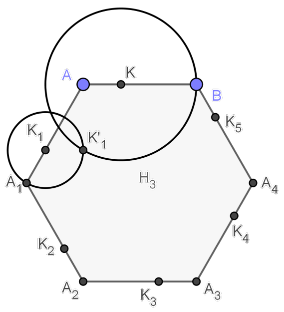


Assim finalizamos a construção das peças do quebra-cabeça sobre a base hexagonal H_4. Passaremos agora a construção das peças do quebra-cabeça, sobre a base hexagonal H_3, formada por seis paralelogramos e três hexágonos não-regular.

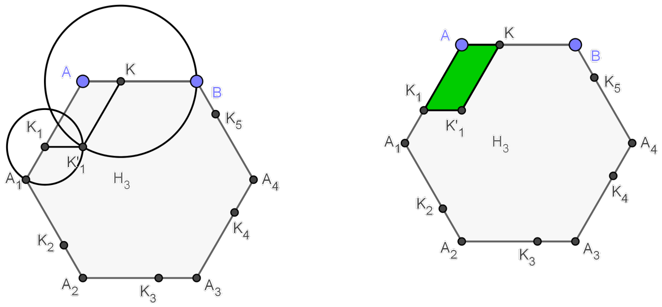
a) Construa uma circunferência de centro em cada vértice do hexágono e que tenha raio 1, obtendo pontos K, K_1, K_2, K_3, K_4 e K_5 como mostra a figura ao lado.



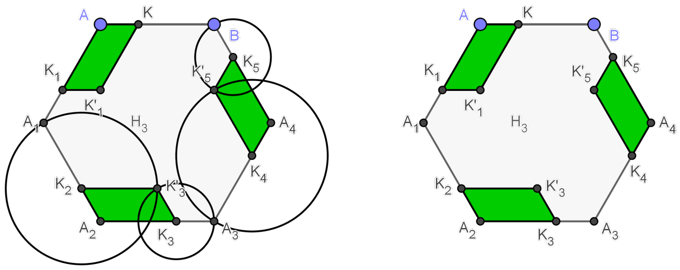
b) Trace a circunferêrncia de raio 1 e centro K_1, e a circunferência de centro K e raio 2. Denominaremos por K_1', a interseção entre essas circunferências situada na região interior de H_3.



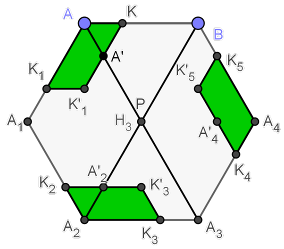
c) Agora, ao determinarmos os segmentos AK, KK_1', $K_1'K_1$ e K_1A, obtemos a primeira peça do quebra-cabeça, que é o paralelogramo $AKK_1'K_1$.



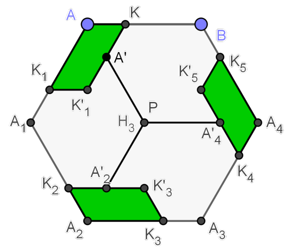
d) De forma análoga, construa circunferências com centro em K_3 e K_5, ambas de raio 1 e outras duas de centro em K_2 e K_4, ambas de raio 2, assim determinaremos os pontos K_3' e K_5'. Desta forma, obtem-se os outros dois paralelogramos $A_2K_2K_3'K_3$ e $A_4K_4K_5'K_5$.



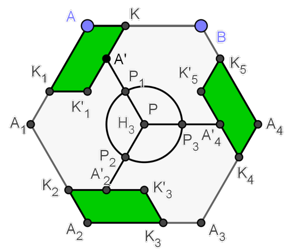
e) Trace as diagonais AA_3 e BA_2 para determinar o centro P do hexágono



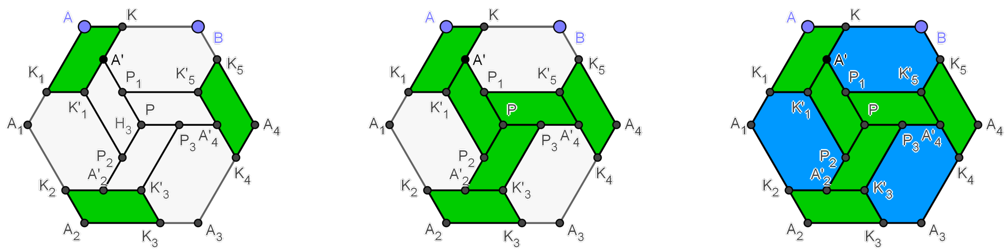
f) Marque os pontos médios dos segmentos KK_1' K_2K_3' e K_4K_5', na qual denotaremos por A', A_2' e A_4'. E trace os segmentos PA', PA_2 e PA_4.



g) Construa a circunferência de centro P e raio 1, determinando assim nas interseções desta circunferência com os segmentos PA', PA_2' e PA_4', respectivamente os pontos P_1, P_2 e P_3.



i) Assim ao determinarmos os segmentos $K_1'P_2$, $K_3'P_3$ e $K_5'P_5$, podemos determinar os paralelogramos $PA'K_1'P_2$, $PA_2'K_3'P_3$ e $PA_4'K_5'P_1$ e determinar os hexágonos $KA'P_1K_5'K_5B$, $K_2A_2'P_2K_1'K_1A_1$ e $K_4A_4'P_3K_3'A_3$.

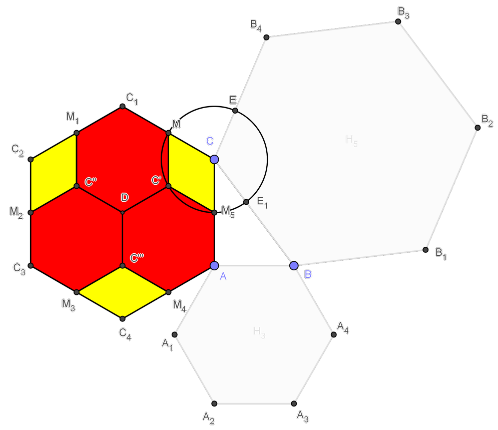


3.1.2 Solução do quebra-cabeça 1

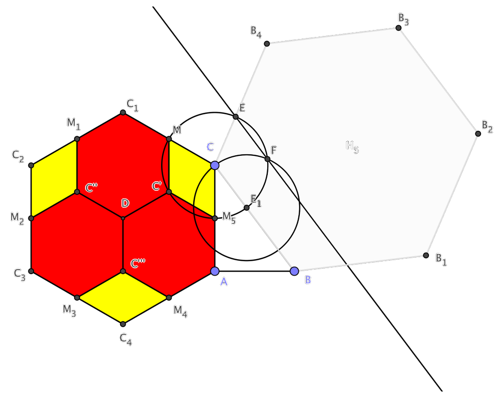
Para mostrarmos a solução, vamos construir os mesmos polígonos construídos em H_3 e H_4 em H_5, de forma a não deixar espaço vazio no hexágono de lado 5.

Iniciaremos com as peças do hexágono H_4.

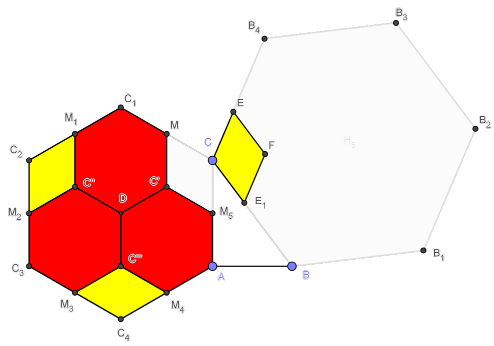
a) Ponta seca do compasso sobre o ponto C e com abertura até o ponto M construa a circunferência, neste caso ela terá raio 2, pois M é ponto médio do segmento CC_1 e este tem medida 4. As interseções entre essa circunferência e os segmentos CB_4 e CB, respectivamente denominados E e E_1, nos dão os segmentos de medidas $\overline{EC}$=$\overline{CE_1}$= 2.



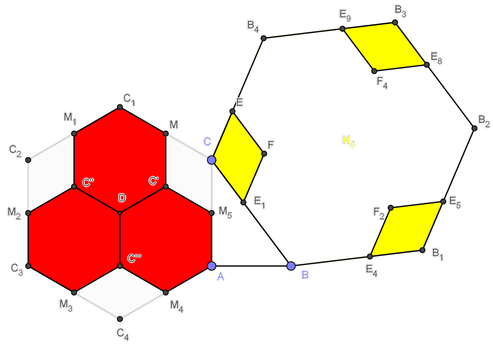
b) Sobre o ponto E trace a reta paralela ao segmento BC. E faça a circunferência de centro em E_1 e raio $\overline{EC}$ marque o ponto F na interseção dessa circunferência com a reta paralela construida anteriormente.



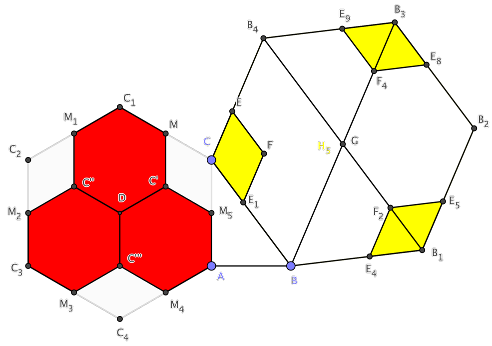
c) Observe que por construção EF é paralelo a CE_1 e o mesmo ocorre para os segmentos E_1F e CE. Assim obtemos o losângo $CEFE_1$, congruente ao losângo $CMC'M_5$.



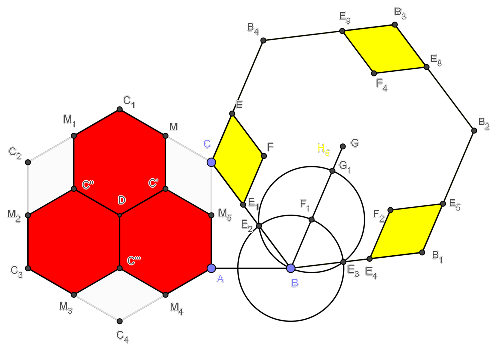
d) De forma análoga, construiremos os outros dois losângos com vértices sobre B_1 e B_3, determinando assim respectivamente os losângos $B_1E_5F_2E_4$ e $B_3E_9F_4E_8$.



e) Construiremos os segmentos BB_3 e B_1B_4, de forma que a interseção entre estes segmentos nos dará o ponto G que é o centro do polígono regular H_5 pois os triângulos B_3B_4G e B_1BG são congruentes pelo caso ALA.

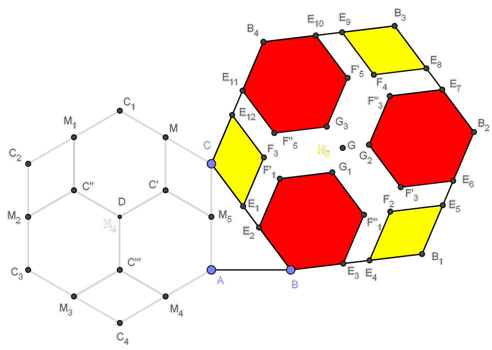


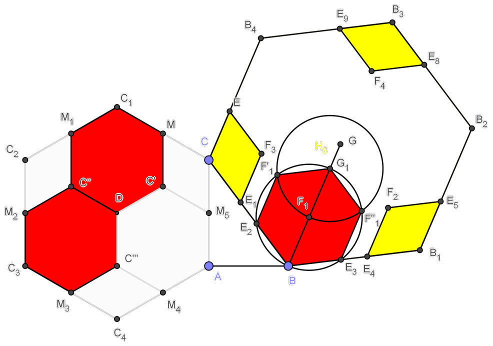
f) Construa a circunferência de centro B e raio 2, onde as intersecções desta circunferência com os segmentos BC, BB_3 e BB_1, determinarão respectivamente os pontos E_2, E_3 e F_1. Trace a circunferência de centro F_1 e raio 2. Denote por G_1 a interseção dessa circunferência com o segmento GB.

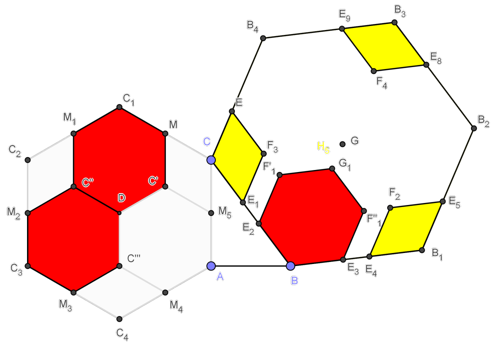


g) Denote por F_1' e F_1'', a interseção da circunferência de centro G_1 e raio 2 com a circunferência de centro em F_1 e raio 2. Assim, construímos o hexágono regular $BE_3F_1''G_1F_1'E_2$.

h) De forma análoga, partindo dos vértices B_2 e B_4, construiremos respectivamente os outros dois hexágonos regulares congruentes ao anterior, que denominaremos hexágonos $B_2E_7F_3''G_2F_3E_6$ e $B_4E_{11}F_5''G_3F_5'E_{10}$.

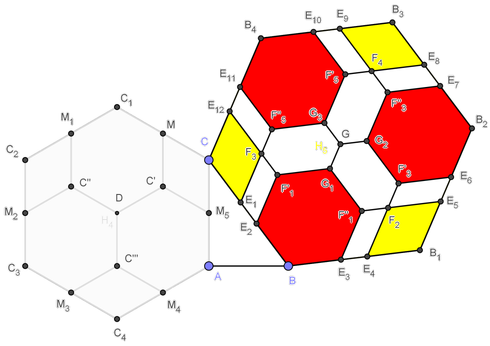




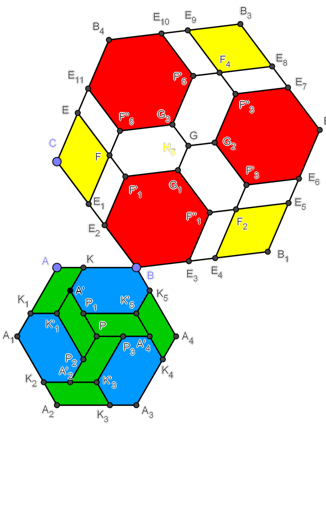


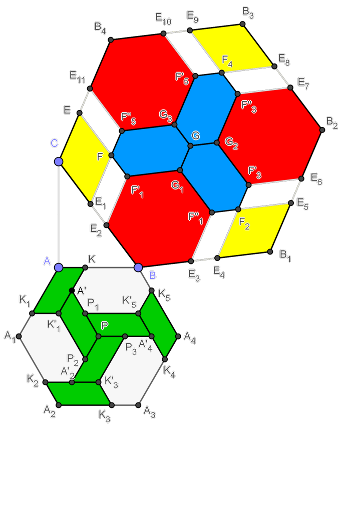
Agora vamos completar o hexágono H_5 com as peças do hexágono H_3.

i) Note que ao construirmos os segmentos FF_1', $F_1''F_2$, F_2F_3', $F_3''F_4$, F_4F_5', $F_5''F$, GG_1, GG_2 e GG_3, obteremos os paralelogramos $FF_1'E_2E_1$, $F_1''F_2E_4E_3$, $F_2F_3'E_6E_5$, $F_3''F_4E_8E_7$, $F_4F_5'E_{10}E_9$ e $F_5''FEE_{11}$ e também os hexágonos $FF_1'G_1GG_3F_5''$, $F_2F_3'G_2GG_1F_1''$ e $F_4F_5'G_3GG_2F_3''$.

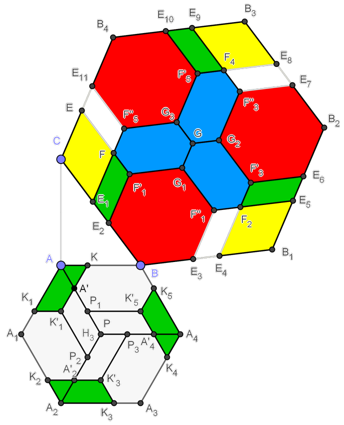


j) Note que os hexágonos $KA'P_1K_5'K_5B$, $K_2A_2'P_2K_1'K_1A_1$ e $K_4A_4'P_3K_3'A_3$ construidos em H_3, são congruentes aos hexágonos $FF_1'G_1GG_3F''_5$, $F_2F_3'G_2GG_1F''_1$ e $F_4F_5'G_3GG_2F''_3$ construidos em H_5.

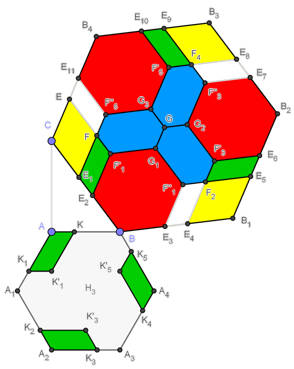


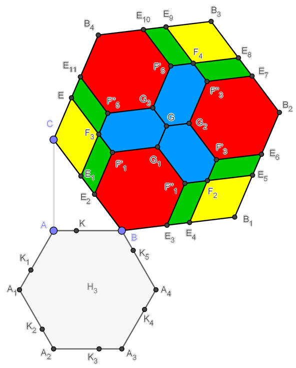


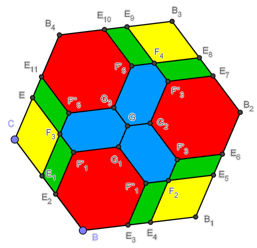
k) Note que os paralelogramos $PA'K_1'P_2$, $PA_2'K_3'P_3$ e $PA_4'K_5'P_1$ em H_3, são congruentes aos paralelogramos $F_3F_1'E_2E_1$, $F_2F_3'E_6E_5$, e $F_4F_5'E_{10}E_9$ em H_5.



l) De forma análoga, podemos observar que os paralelogramos $AKK_1'K_1$, $A_2K_2K_3'K_3$ e $A_4K_4K_5'K_5$ contidos em H_3, são congruentes aos paralelogramos $EE_{11}F_5''F$, $E_4E_3F_1''F_2$ e $E_8E_7F_3''F_4$ de H_5 presentes em H_5.







O que mostra a solução do quebra-cabeça.

3.2 Quebra-cabeça 2

A construção do quebra-cabeça 2, terá início identico ao quebra-cabeça 1, partiremos de um triângulo retângulo ABC de lados $3, 4$ e 5, e construiremos hexágonos regulares H_3, H_4 e H_5, adjacente aos lados desse triângulo.

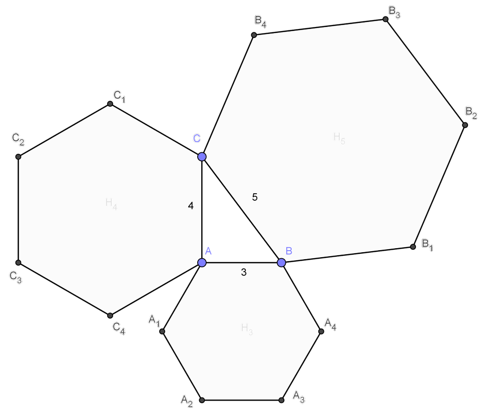
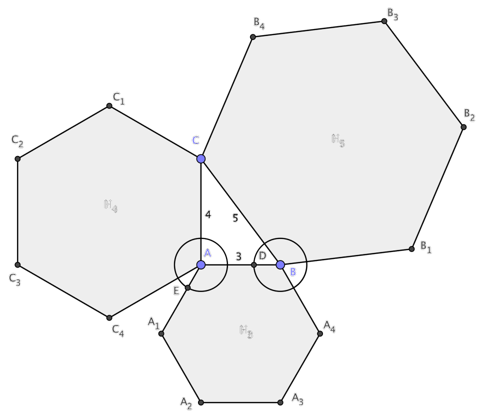


Figura 3.3: Base do quebra-cabeça

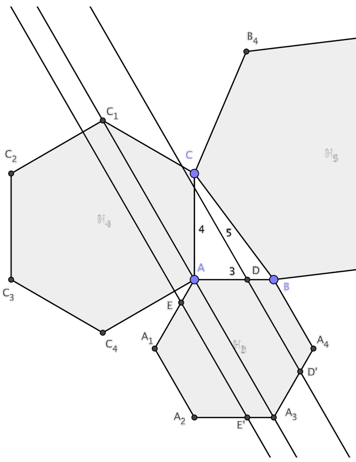
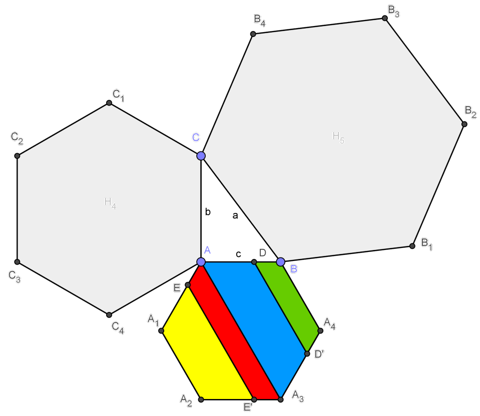
3.2.1 Construção do quebra-cabeça 2

Vamos iniciar a construção das peças do quebra-cabeça sobre a base hexagonal H_3, formada por quatros trapézios isósceles.

a) Faça uma circunferência de centro em B e raio 1, e marque o ponto D determinado pela interseção dessa circunferência e o lado AB. De modo análogo marque o ponto E sobre o lado AA_1.

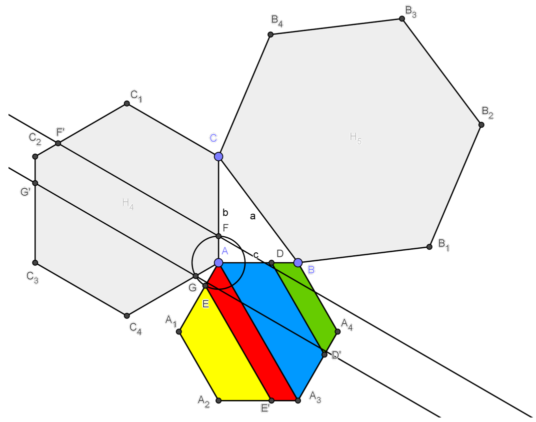


b) Trace retas paralelas ao lado BA_4 passando pelos pontos D, E e A. Assim, obteremos as quatro peças do hexágono H_3.

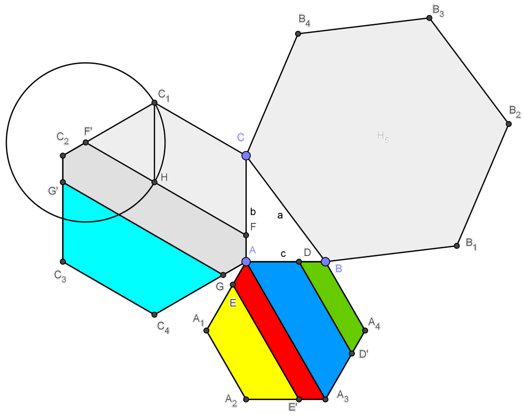



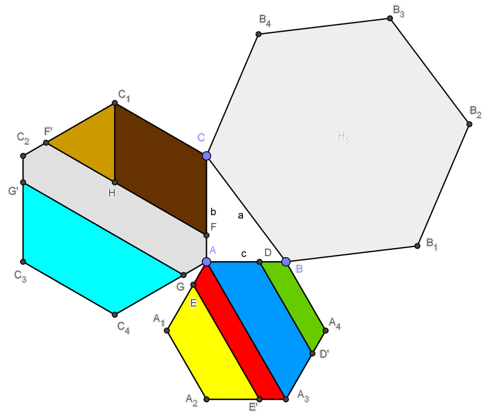
Na base hexagonal H_4, construiremos quatro peças, um triângulo equilátero, um paralelogramo, um hexágono e um trapézio isósceles. Para tal construção procederemos da seguinte maneira:

a) Construa uma circunferência de centro em A e raio 1 e marque os pontos F e G determinado pela interseção da circunferência com os segmentos AC e AC_4 respectivamente. Agora trace retas paralelas ao lado CC_1 passando por F e G e marque os pontos F' e G' que intercepta respectivamente os lados C_1C_2 e C_2C_3.



b) Com centro em F' e raio 3, faça uma circunferência e denote por H a interseção do segmento FF' com a circunferência. Por fim, trace o segmento C_1H.





3.2.2 Justificativa da Construção

Dados os hexágonos regulares H_3, H_4 e H_5, respectivamente de lados medindo $3, 4$ e 5, onde as referidas medidas são lados de um triângulo retângulo de lados $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$ e $\overline{BC} = 5$.

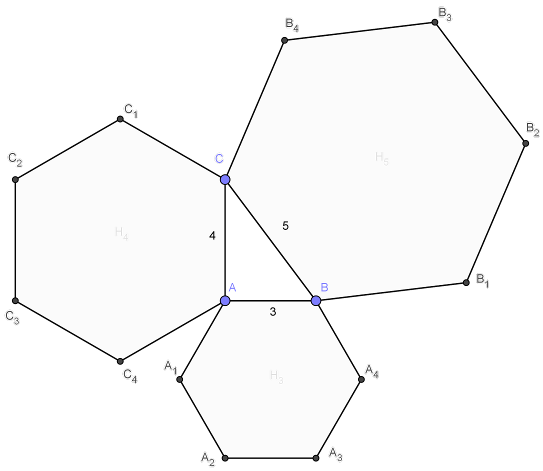
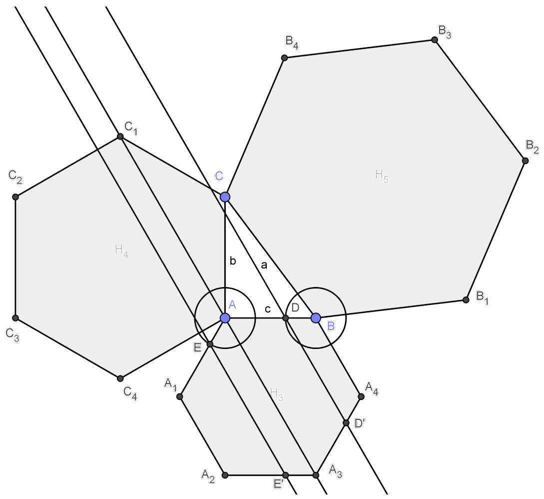


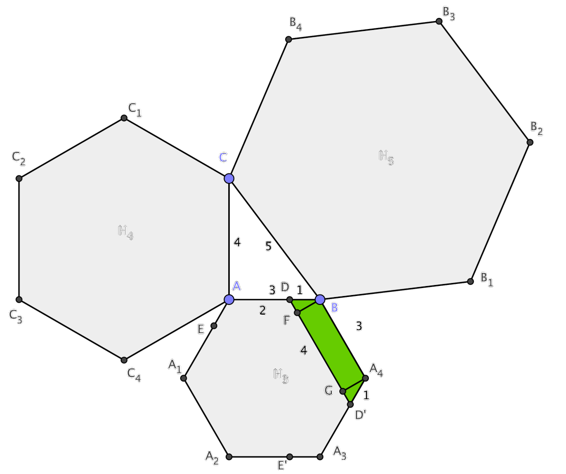
Figura 3.4: Base do quebra-cabeça

a) Construa uma circunferência de centro B e raio 1, e uma circunferência de centro A e raio 1. A interseção da primeira circunferências com o segmento AB nos dará o ponto D, assim obteremos os segmentos AD e DB, cujas medidas são respectivamente $\overline{AD} = 2$ e $\overline{DB} = 1$, pois o segmento AB tem medida 3. Já a interseção da segunda circunferência com o segmento AA_1 nós dará o ponto E. Agora trace retas paralelas ao segmento BA_4 passando pelos pontos D, A e E, de forma à determinar respectivamente os segmentos DD', AA_3 e EE', todos paralelos entri sí por construção.

Observe ainda que os segmentos $\overline{AE} = 1$ e $\overline{EA_1} = 2$, pois o hexágono é regular de lado 3.



b) Com isso já podemos determinar a subdivisão de H_3 em 4 trapézios isósceles, todos com ângulos internos agúdos medindo $60°$ e ângulos internos obtusos medindo $120°$. De fato, primeiramente note que o quadrilátero $BA_4D'D$ tem os lados BD_4 e DD' paralelos por construção, assim podemos concluir que $BA_4D'D$ é um trapézio, mais ainda trapézio é isósceles pois os lados não paralelos tem novamente por construção as mesmas medidas $\overline{DB} = \overline{D'A_4} = 1$. Logo os ângulos da base DD' são congruentes e como os ângulos da base BA_4 medem $120°$, pois são ângulos dos lados do hexágono, segue que os ângulos da base DD' devem medir $60°$, já que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero mede $360°$. Agora, traçando a altura desse trapézio por B e A_4, obteremos $\overline{FG} = 3$ e como os triângulos $BDF \equiv A_4D'G$ pelo caso $(LAAo)$ ou $(LLA_{\square})$, tem-se que $\overline{CF} = \overline{D'G} = \cos(60°) = \dfrac{1}{2}$. Portanto o a base $\overline{DD'} = 4$.

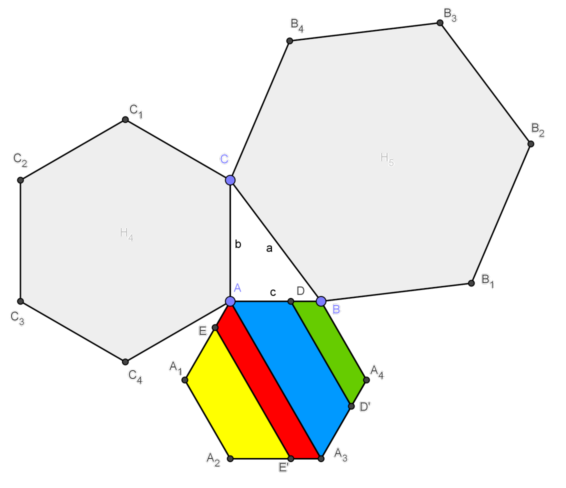


c) De modo análogo prova-se que:

1. $DD'A_3A$ é um trapézio isósceles com bases $\overline{DD'} = 4$ e $\overline{AA_3} = 6$ e lados não paralelos $\overline{AD} = \overline{A_3D'} = 2$;

2. $E'EAA_3$ é um trapézio isóscelescom bases $\overline{AA_3} = 6$ e $\overline{E'E} = 5$ e lados não paralelos $\overline{A_3E'} = \overline{EA} = 1$;

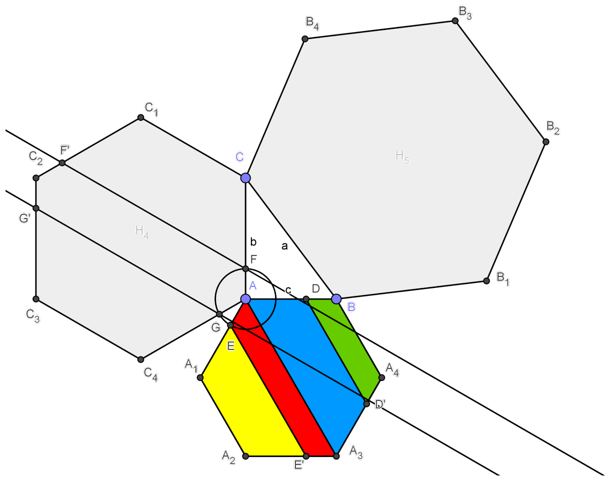
3. A_2A_1EE' é um trapézio isósceles com bases $\overline{EE'} = 5$ e $\overline{A_1A_2}) = 3$ e lados não paralelos $\overline{E'A_2} = \overline{A_1E} = 2$.

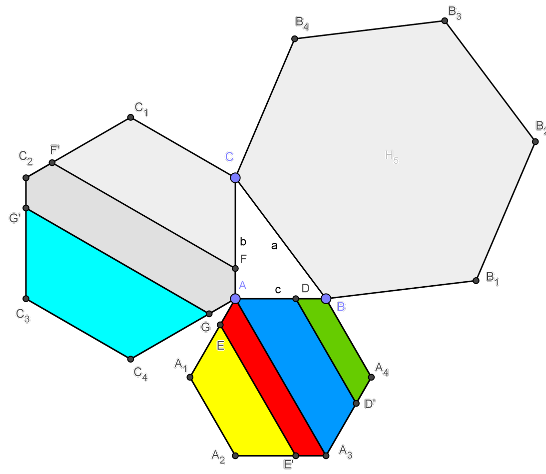


Passemos agora a justificativa das peças do hexágono H_4.

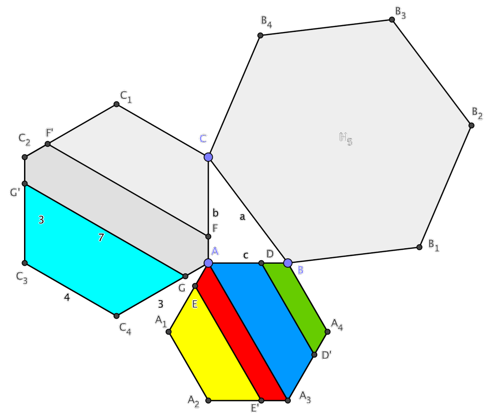
a) Com abertura do compasso medindo 1 e ponta seca sobre o ponto A, construiremos a circunferência de centro A e raio 1, onde as interseções desta circunferência com os segmentos AC e AC_4 respectivamente, determinarão os pontos

F e G. Traçaremos por F e por G retas paralelas ao segmento CC_1, retas estas que suas respectivas interseções com os segmentos C_1C_2 e C_2C_3 determinarão os pontos F' e G', determinando assim os segmentos FF' e GG' e consequentemente o hexágono não regular $AFF'C_2G'G$ e o quadrilátero $GG'C_3C_4$.



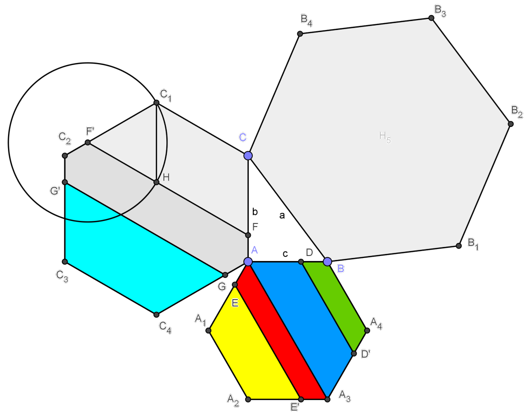


b) De modo análogo ao feito nos trapézios de H_3 prova-se que quadrilátero $GG'C_3C_4$ é por construção um trapézio isósceles, com lados não paralelos medindo $\overline{GC_4} = \overline{G'C_3} = 3$ e bases medindo $\overline{C_3C_4} = 4$ e $\overline{GG'} = 7$. E ângulos internos agúdos medindo 60° e ângulos internos obtusos medindo 120°.

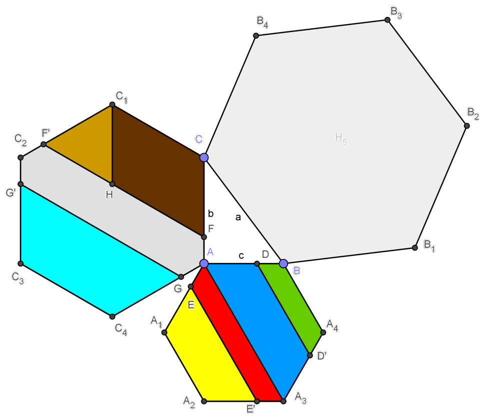


c) Com consequência do item anterior teremos que o hexágono $AFF'C_2G'G$ terá por construção lados $\overline{AF} = \overline{AG} = \overline{C_2F'} = \overline{C_2G'} = 1$ e lados $\overline{FF'} = \overline{GG'} = 7$ e ângulos internos medindo 120°.

d) Agora com a ponta seca do compasso sobre o ponto F' e abertura em C_1, construiremos a circunferência de centro F' e raio 3, de modo que a interseção desta circunferência com o segmento FF' determinará o ponto H de forma que $\overline{F'H} = \overline{F'C_1} = 3$. Agora como o ângulo $C_1\widehat{F'}H$ é suplementar ao ângulo $C_2F'H = 120°$, segue que $C_1\widehat{F'}H = 60°$, logo podemos afirmar que o triângulo $HF'C_1$ é equilátero, assim $\overline{HC_1} = 3$.



d) Note que o quadrilátero $HFCC_1$ é um paralelogramo, pois os lados $CC_1 \parallel FH$ e ambos tem medidas $\overline{HF} = \overline{CC_1} = 4$. Além disso, os lados $\overline{CF} = \overline{C_1H} = 3$ e os ângulos internos agúdos medem 60° e ângulos internos obtusos medem 120°.

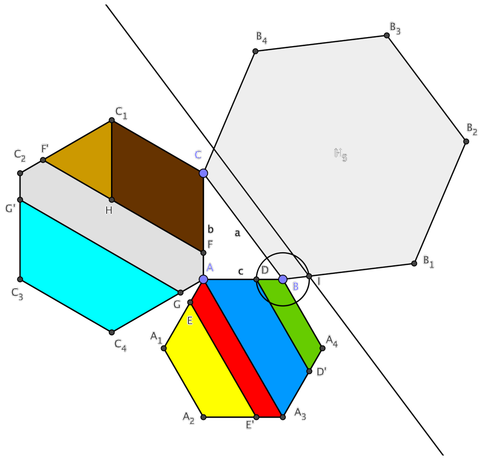


3.2.3 Solução do quebra-cabeça 2

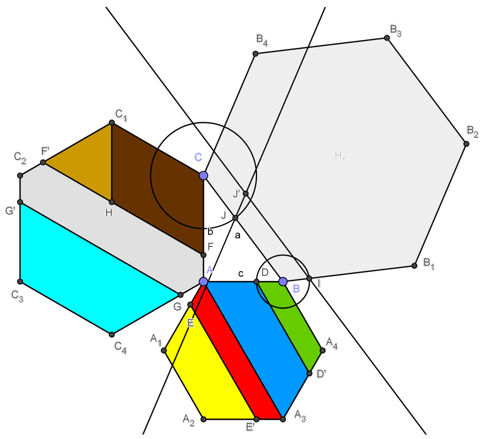
Para solucionarmos o quebra-cabeça 2, primeiramente, vamos posicionar os trapézios contidos em H_3 na região interior de H_5 e depois vamos completar á área vazia da região interior de H_5 com os polígonos construidos em H_4.

Para mostrar que tal solução é possível, iremos primeiramente construir em H_5, quatro trapézios congruentes aos trapézios construidos em H_3.

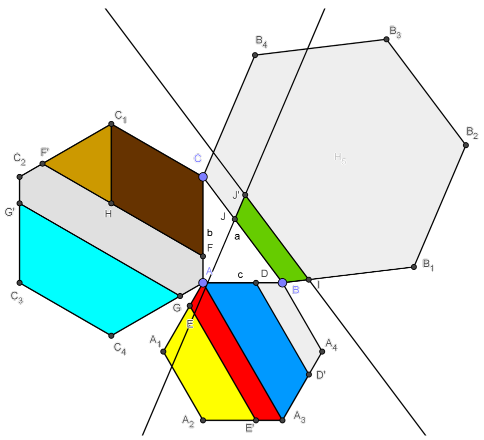
a) Com a ponta seca do compasso sobre o ponto B e abertura sobre o ponto D, obtemos a circunferência de centro B e raio 1, onde a interseção desta circunferência com o segmento BB_1, determinará o ponto I, que consequentemente determinará o segmento $\overline{BI} = 1$. Pelo ponto I traçaremos uma reta paralela ao segmento BC.



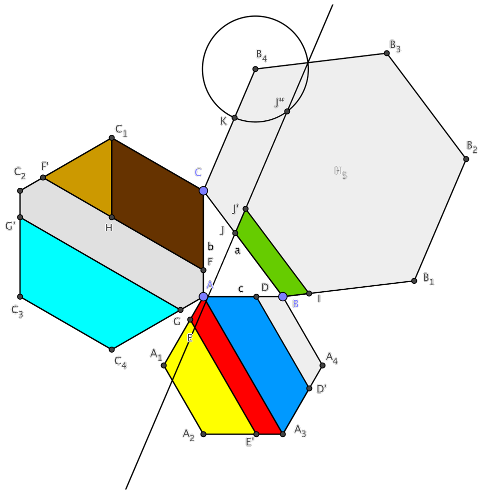
b) Agora com a ponta seca do compasso sobre o ponto C e abertura do compasso medindo 2, construiremos a circunferência de centro C e raio 2, onde a interseção desta circunferência com o segmento CB determinará o ponto J e consequentemente os segmentos $\overline{CJ} = 2$ e $\overline{JD} = 3$. Pelo ponto J traçaremos uma reta paralela ao segmento CB_4 de forma que a interseção desta reta que passa pelo ponto J com a reta que passa pelo ponto I e é paralela ao segmento CD, determinam o ponto J' e formam entre si um ângulo agudo de 60°.



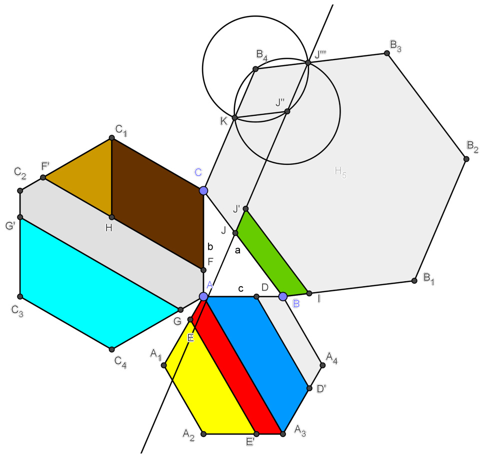
c) Com isso já podemos determinar o trapézio $BJJ'I$ com lados medindo $\overline{BJ} = 3$, $\overline{BI} = \overline{JJ'} = 1$ e $\overline{IJ'} = 4$



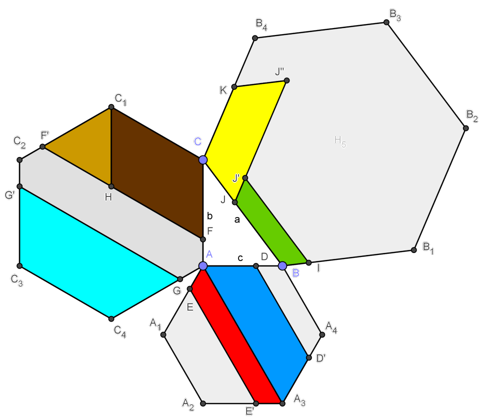
d) Construa a circunferência de centro B_4 e raio 2, onde a interseção desta circunferência com o segmento CB_4 e com a reta que passa pelo ponto J e é paralela ao segmento CB_4, determinará respectivamente os pontos K e J'', consequentemente a determinação dos segmentos $\overline{CK} = 3$ e $\overline{KB_4} = 2$.



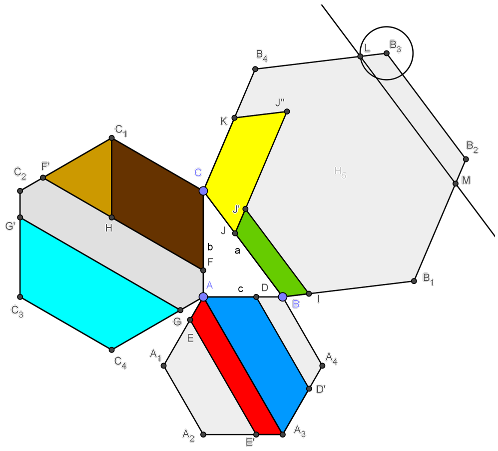
e) Com a ponta seca do compasso sobre o ponto J'' e abertura em B_4, obteremos a circunferência de centro J'' e raio 2, pois o segmento B_4J'' é raio da circunferência de centro B_4 e raio 2, determinaremos o ponto J''' na interseção da circunferência de centro J'' e raio 2 com o segmento B_4B_3, de forma que já que já podemos determinar os segmentos $\overline{J''K} = \overline{J''J'''} = 2$.



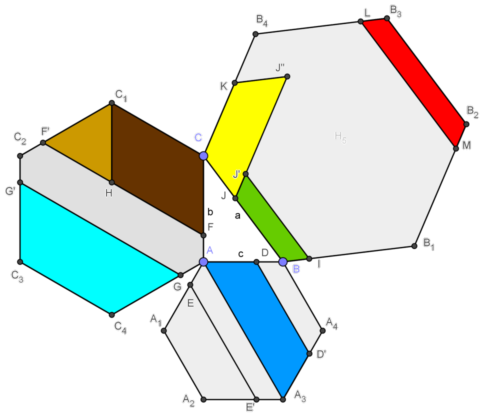
f) Observe que acabamos de construir um trapézio isósceles determinado pelos pontos JCB_4J''', onde a base menor $\overline{CB_4} = 5$, ângulos agudos medindo 60°, lados congruentes $\overline{CJ} = \overline{B_4J'''} = 2$ e base maior $\overline{JJ'''} = 7$. Com isso o segmento $\overline{JJ''} = 5$, assim também determinaremos o trapézio isósceles $JCKJ''$ de lados $\overline{JC} = \overline{KJ''} = 2$, $\overline{CK} = 3$ e $\overline{JJ''} = 5$, com ângulos agudos de 60° e obtusos medindo 120°, congruente ao trapézio $E'A_2A_1G$ contido em H_3.



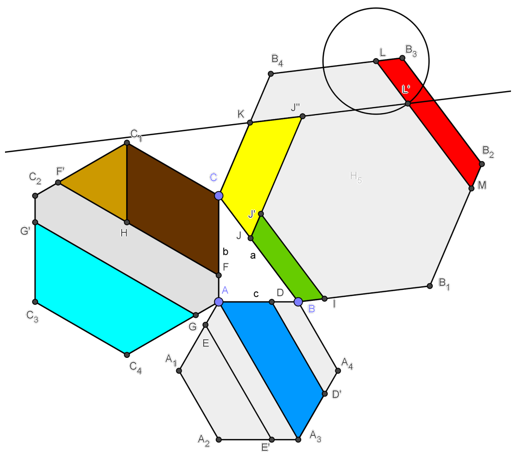
g) Com a ponta seca do compasso sobre o ponto B_3 e abertura medindo 1, construiremos a circunferência de centro B_3 e raio 1, na intersecção desta circunferência com o segmento B_3B_4, determinaremos o ponto L, por onde traçaremos uma reta paralela ao segmento B_3B_2, onde na intersecção desta reta com o segmento B_2B_1 determinaremos o ponto M.



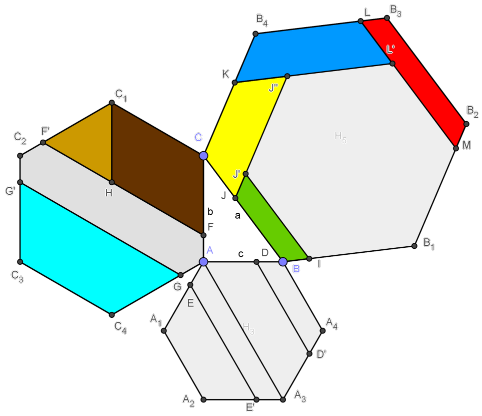
h) Assim acabamos de construir o trapézio isósceles LB_3B_2M de lados $\overline{LB_3} = \overline{MB_2} = 1$, $\overline{B_3B_2} = 5$ e $\overline{LM} = 6$, congruente ao trapézio $A_3E'EA$, contido em H_3.



i) Construa a circunferência de centro L e raio 2, onde na interseção desta com o segmento LM, determina o ponto L', assim os segmentos $\overline{LL'} = 2$ e $\overline{L'M} = 4$. Traçando uma reta paralela ao segmento B_4B_3 passando pelo ponto L', repare que esta reta contém os pontos K e J'', assim o quadrilátero KB_4LL' é um trapézio isósceles com lados $\overline{KB_4} = \overline{L'L} = 2$, com base menor $\overline{B_4L} = 4$, ângulos internos agudos de 60° e ângulos internos obtusos de 120°,

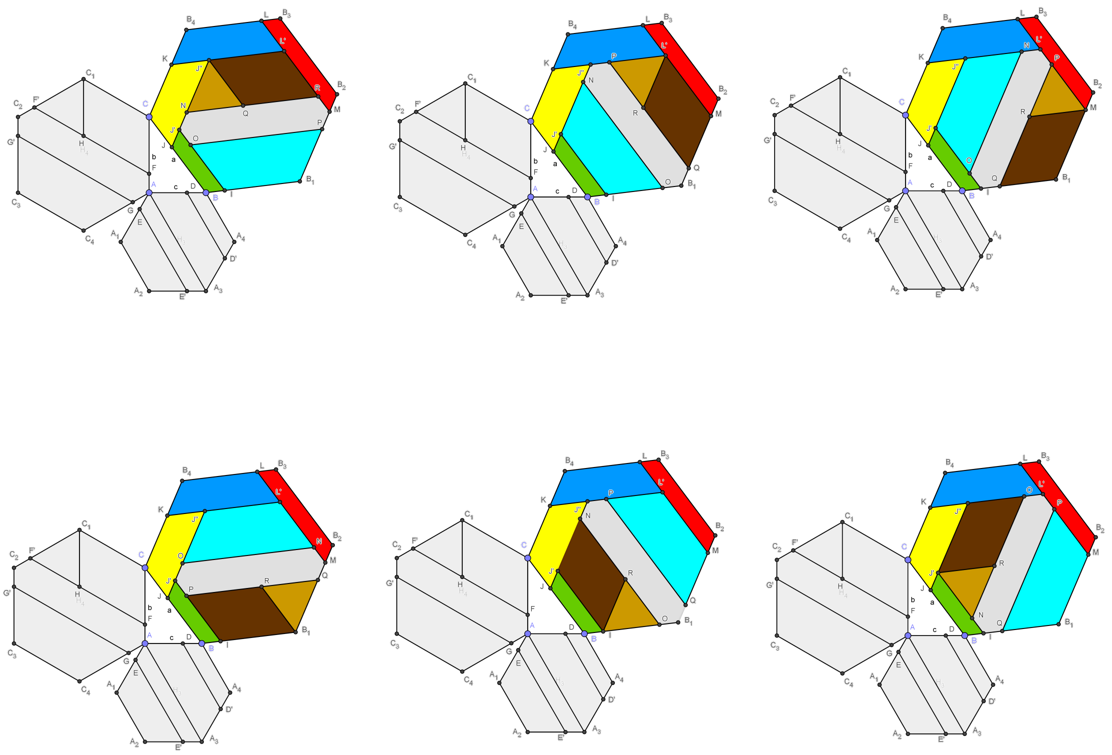


j) Logo já podemos afirmar a congruência do trapézio KB_4LL' com o trapézio $ADD'A_3$ contido em H_3.



Agora vamos construir em H_5 os polígonos contidos e construidos em H_4.

a) Note que o espaço vazio em H_5 é um hexágono regular de lado 4, com isso, podemos solucionar o quebra-cabeça simplesmente transferindo as peças de H_4 para H_5 de modo a mante-las com a mesma disposição. Todavia podemos obter seis formas de resoluções diferentes deste quebra-cabeça, rotacionando a construção de H_3 sobre o trapézio $B_1IJ'J''L'M$ em H_5.



3.3 Quebra-cabeça 3

3.3.1 Construção do quebra-cabeça 3

Considere um triângulo retângulo ABC de lados $3, 4$ e 5, e construa hexágonos regulares H_3, H_4 e H_5, adjacente aos lados desse triângulo.

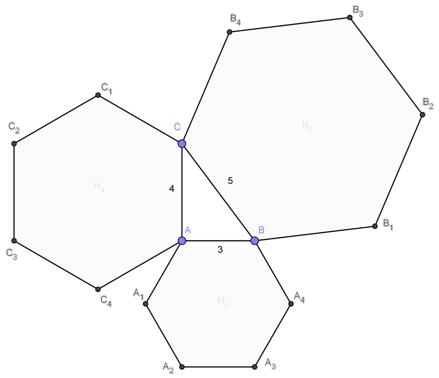
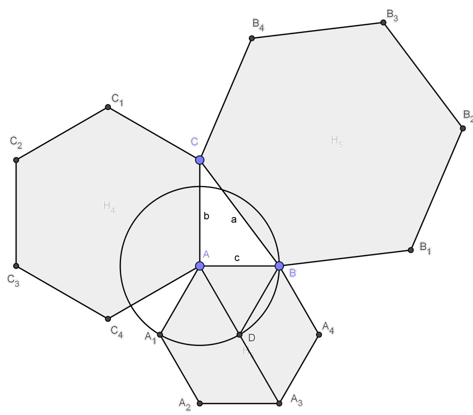
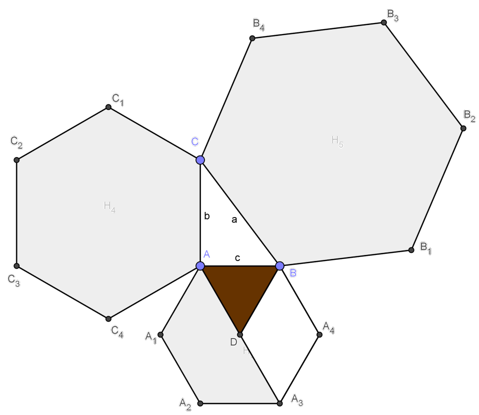


Figura 3.5: Base do quebra-cabeça

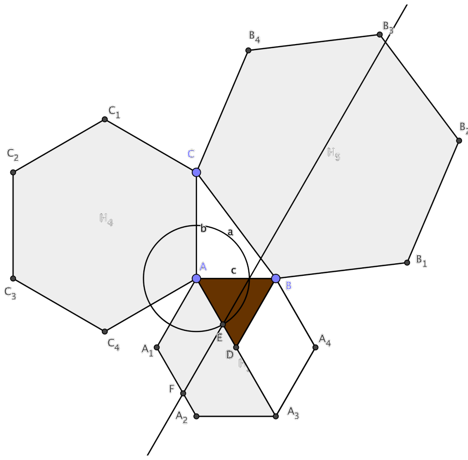
Iremos subdividir o hexágono regular H_3 em quatro peças da seguinte forma: um triângulo equilátero, um losango, um paralelogramo e um trapézio isósceles.

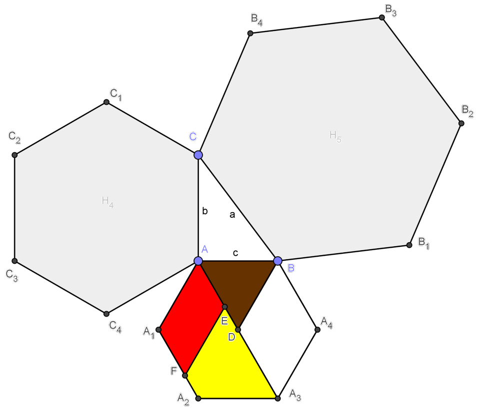
a) Construa primeiramente o segmento AA_3 e a circunferência de centro A e raio $\overline{AB} = 3$. Marque o ponto D obtido pela interseção desta circunferência com o segmento AA_3.





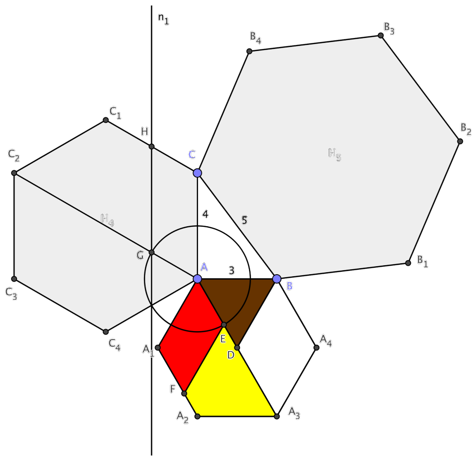
b) Trace a circunferência de centro A e raio 2, assim a interseção desta circunferência com o segmento AA_3 determinará o ponto E. Agora trace a reta paralela ao segmento AA_1 passando por E, obtendo assim o segmento EF.



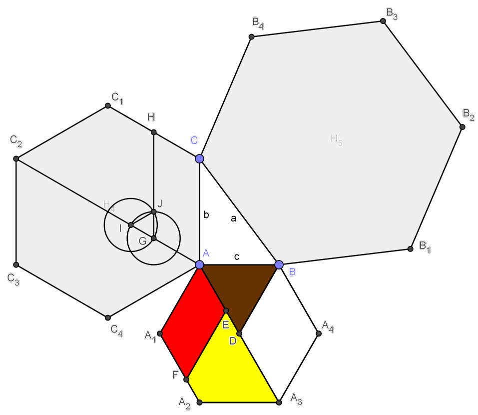


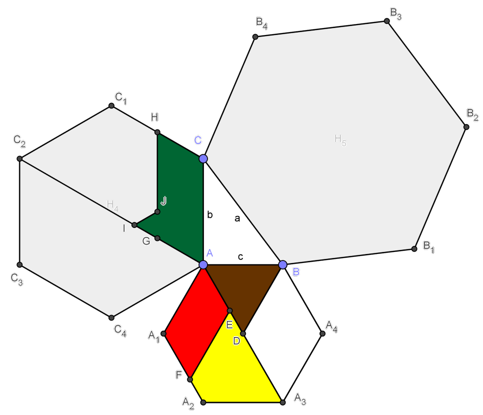
Agora iremos efetuar a subdivisão do hexágono regular H_4, na qual será composta por quatro pentágono não regular.

a) Trace o segmento AC_2 e a circunferência de centro A e raio 2, obtendo assim o ponto G. Agora trace a reta paralela ao segmento AC passando por G, obtendo assim o segmento GH.

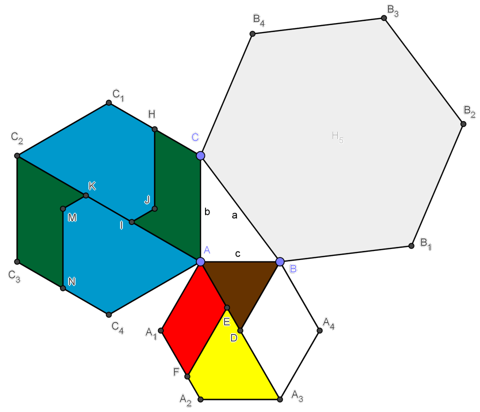


b) Faça uma circunferência de centro G e raio 1, obtendo o ponto I sobre o segmento AC_2 de lado oposto a A com relação a G e o ponto J sobre o segmento GH.





c) De forma análoga construa os mesmos polígonos na outra metade de H_4, sendo o pentágono não regular e não convexo KC_2C_3NM, e o pentágono não regular e convexo KAC_4NM.



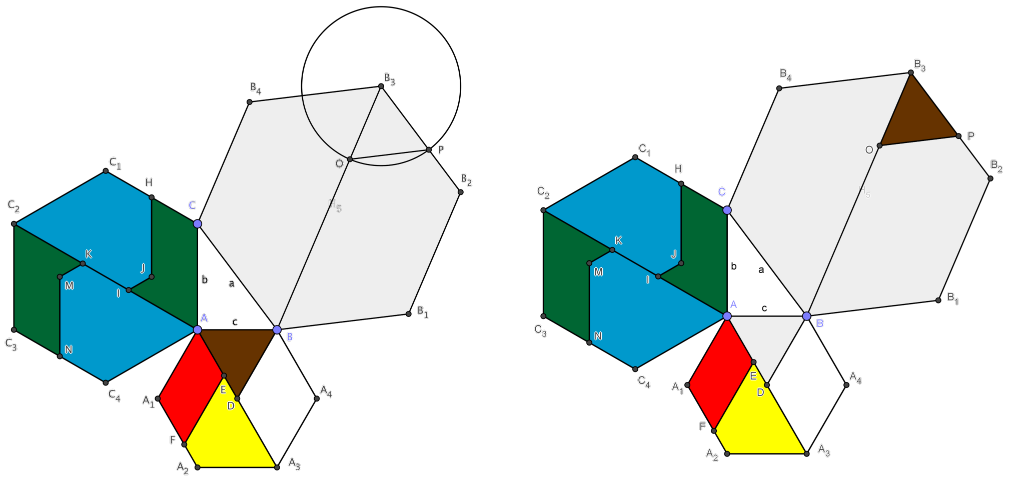
3.3.2 Solução do quebra-cabeça 3

Agora iremos construir as peças das bases hexagonais de H_3 e H_4 em H_5, de modo a mostrar que há solução o quebra-cabeça.

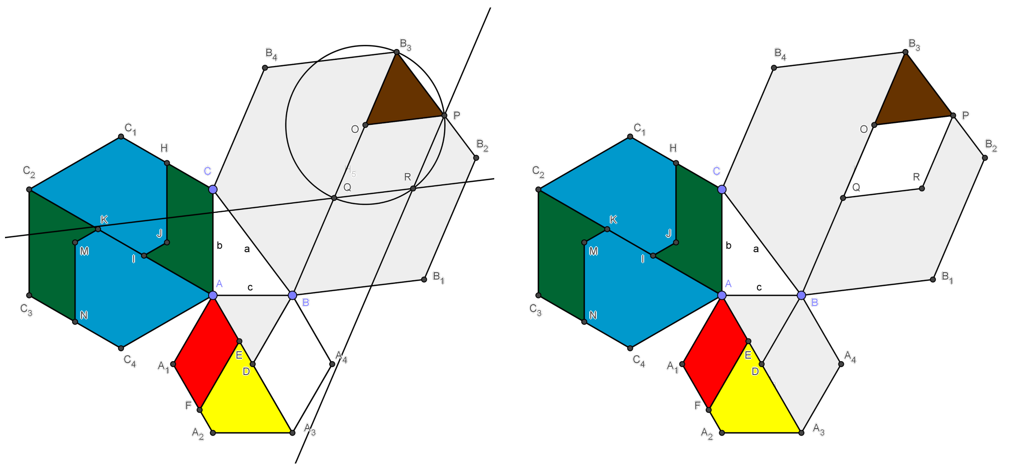
Primeiramente vamos construir as peças de H_3 em H_5.

a) Trace o segmento BB_3 e a circunferência de centro B_3 e raio 3, obtendo os pontos O e P. Assim tem-se que o triângulo B_3OP é isósceles, agora como

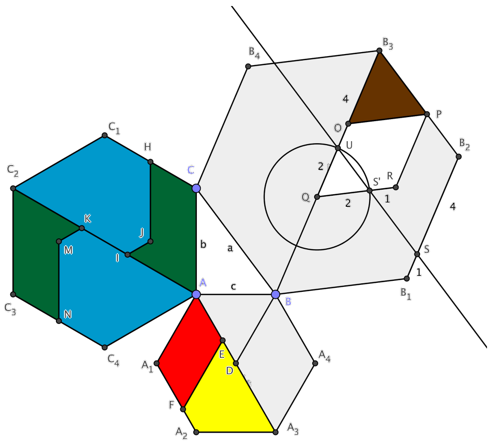
$m(O\widehat{B_3}P) = 60°$ segue que os ângulos da base OP do triângulo são também $60°$, logo triângulo é equilátero de lado 3 e de vértices B_3, O e P, congruente ao de vértices A, D e B contido em H_3.



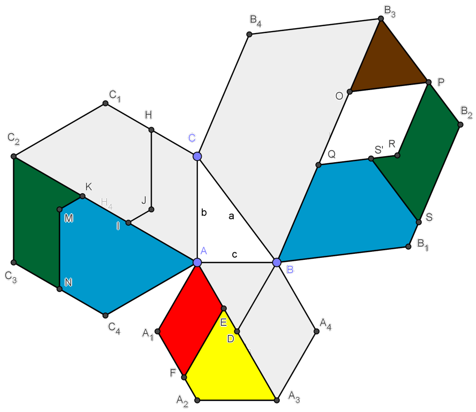
b) Utilizando ainda a circunferência de centro O e raio 3, determinaremos o ponto Q a interseção desta circunferência com o segmento OB, onde $\overline{OQ} = 3$. Traçaremos por Q uma reta paralela ao segmento OP e de forma análoga, traçaremos por P uma reta paralela ao segmento OQ, onde a interseção destas duas retas determinará o ponto R. Notemos que por construção o quadrilátero $POQR$ é um paralelogramo, e como $\overline{OQ} = \overline{OP} = 3$, tem-se que é $POQR$ um losângo de lados medindo 3, com ângulos internos agudos medindo $60°$ e obtusos de $120°$, o que prova a congruência com o losângo BDA_3A_4 contido em H_3.



c) Construa a circunferência de centro Q e raio 2, onde na interseção desta circunferência com o segmento QR, determina o ponto S' e o ponto U no segmento QB_2, assim o triângulo QUS' é isósceles por construção, e como $m(U\widehat{Q}S') = 60°$ pois é o ângulo agudo do losango $QRPO$, segue que os outros dois ângulos desse triângulo também são de 60°, logo a reta determinada por U e S é paralela ao lado B_2B_3. Portanto o quadrilátero B_3B_2SU é um paralelogramo, com medidas de lados $\overline{B_2S} = \overline{B_3U} = 4$ e $\overline{US} = \overline{B_2B_3} = 5$.

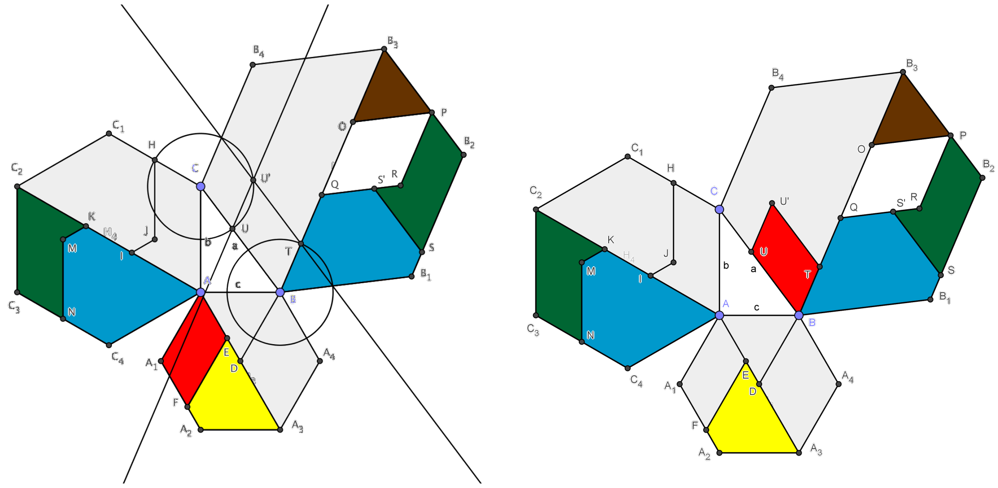


Com isso acabamos de construir o pentágono não regular e não convexo $SS'RPB_2$ congruente ao pentágono $AIJHC$ e o pentágono Convexo e não regular $B_1BQS'S$ congruente ao pentágono IC_2C_1HJ contidos em H_4.

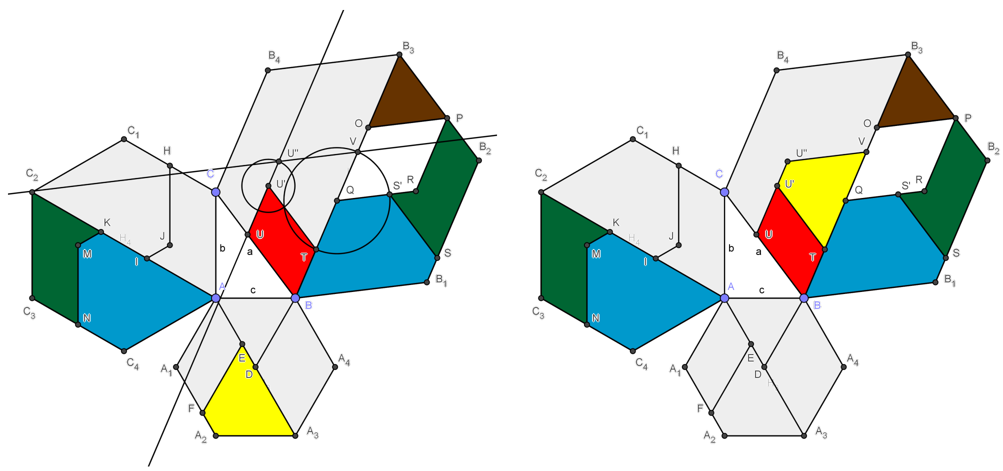


d) Faça duas circunferência de raio 2, uma com centro em B obtendo o ponto T em BQ e outra com centro em C obtendo o ponto U em BC. Pelo ponto

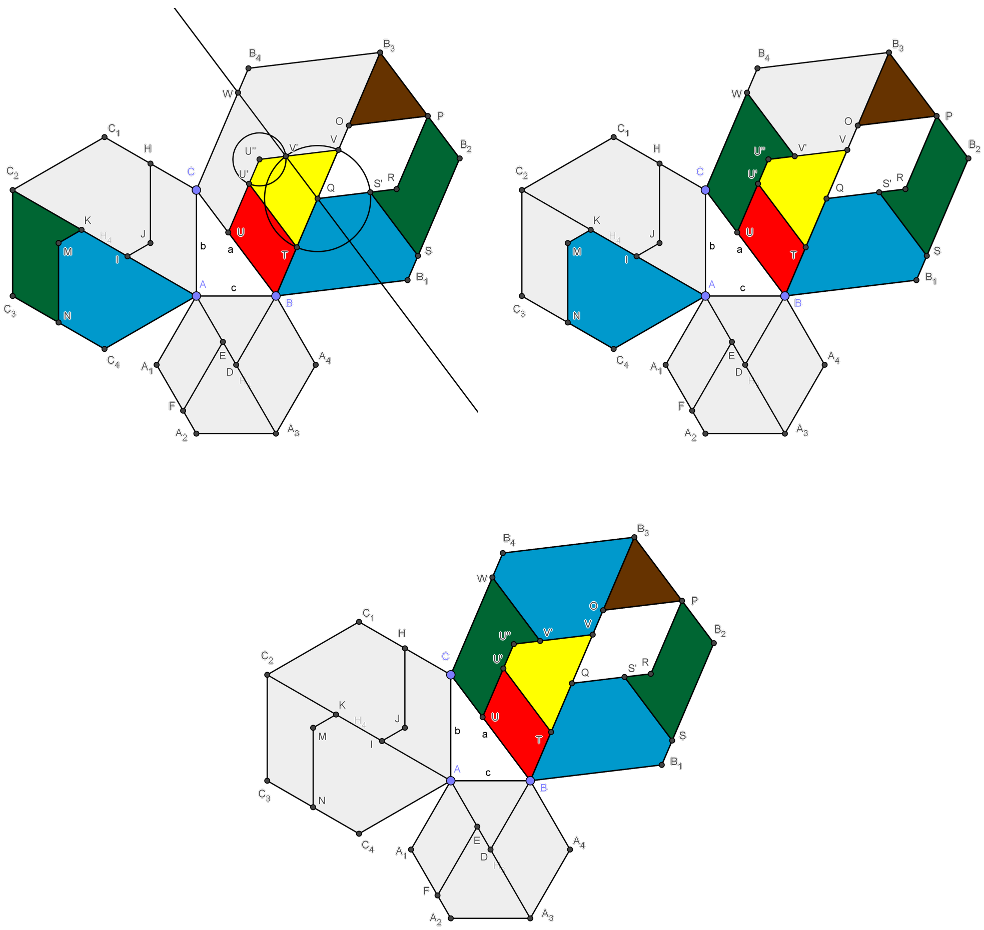
T trace uma reta paralela ao segmento BC e pelo ponto U trace uma reta paralela a BQ. Desta forma, podemos determina-se o paralelogramo $BUU'T$, congruente ao paralelogramo FA_1AE contido em H_3.



e) Trace a reta paralela a CB_4 passando por U, e construa uma circunferência de centro U' e raio 1. Denote por U'' o ponto determinando pela interseção deste dois objetos e de lado oposto a U com relação a U'. Pelo ponto Q faça uma circunferência de raio 2, obtendo assim um ponto V sobre o lado QO. Com isso acabamos de construir o trapézio isósceles $TU'U"V$ congruente ao trapézio isósceles A_3A_2FE em H_3.



f) Traçaremos pelo ponto Q uma reta paralela ao segmento BC, onde nas interseções desta reta com os segmento $U'V$ e CB_4, determinaremos respectivamente os pontos V' e W, ainda preservando a abertura do compasso medindo 1, colocaremos a ponta seca sobre o ponto U” e construiremos a circunferência de centro U” e raio 1, onde a interseção desta circunferência com o segmento $U'V$, coincide com o ponto V' que também é a interseção com a circunferência construida anteriormente de centro Q e raio 2, assim podemos afirmar que o segmento $V'W$ mede 3 construido em H_4, em consequência a construção do pentágono não regular e não convexo $WV'U$”UC congruente ao pentágono C_2KMNC_3 e a construção do pentágono convexo não regular $B_4B_3VV'W$ também construido em H_4.



O que nos dá a solução do quebra-cabeça 3.

3.4 Quebra-cabeça 4

Na primeira seção será dado os passos para a construção com régua e compasso do quebra-cabeça e na segunda seção apresentaremos as justificativas da construção e a solução do quebra-cabeça.

3.4.1 Construção do quebra-cabeça 4

a) Considere inicialmente o triângulo retângulo ΔABC, com catetos $\overline{AC} = 3$ e $\overline{AB} = 4$ e hipotenusa $\overline{BC} = 5$.

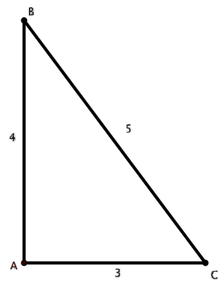


Figura 3.6: Triângulo Retângulo

b) Construa hexágonos regulares sobre os lados deste triângulo, conforme a figura abaixo. Denotaremos por H_1, H_2 e H_3 os hexágonos regulares de lados $3, 4$ e 5 respectivamente. Formando a assim a base do quebra-cabeça.

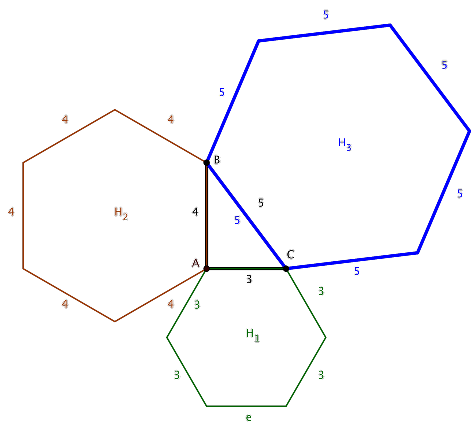
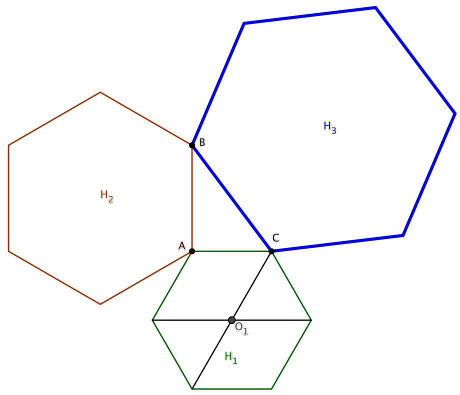
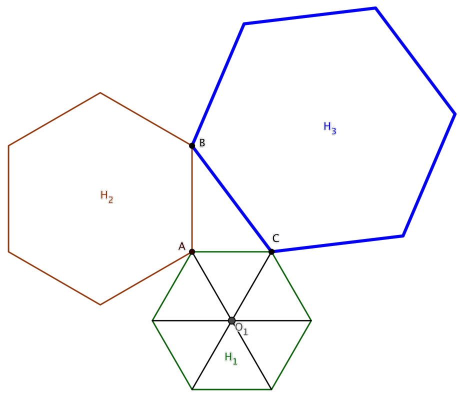


Figura 3.7: Base do quebra-cabeça

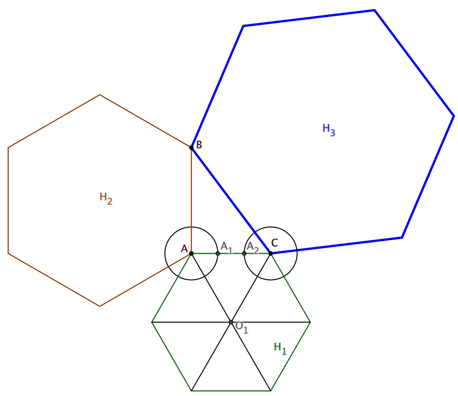
c) Agora iremos construir as peças do quebra-cabeça. Esse primeiro quebra-cabeça terá somente um tipo de peça, que são triângulos equiláteros de lado medindo 1. No hexágono H_1, trace duas diagonais obtendo assim o centro O_1 do hexágono.



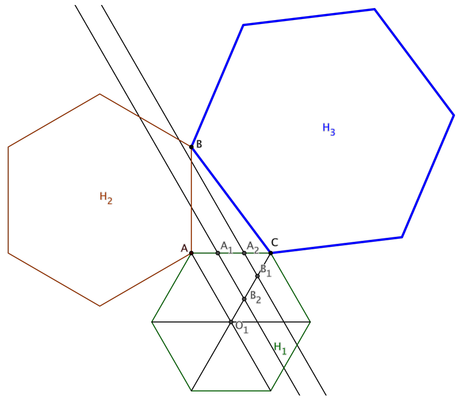
d) Traçando a última diagonal do hexágono H_1, obteremos 6 triângulos equiláteros de lado 3.



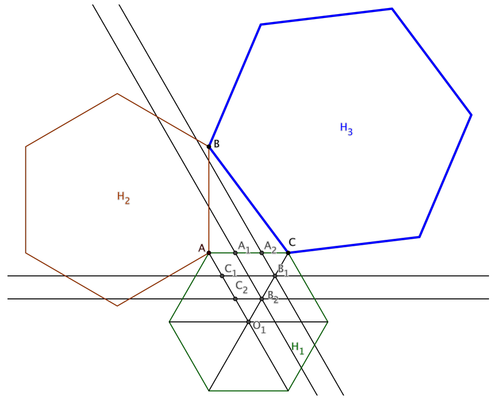
e) Agora vamos subdividir o triângulo ΔAO_1C, em triângulos equiláteros de lados medindo 1. Para isso trace uma circunferências de centro em A e raio $r = 1$ e uma circunferência de centro em C e raio $r = 1$.



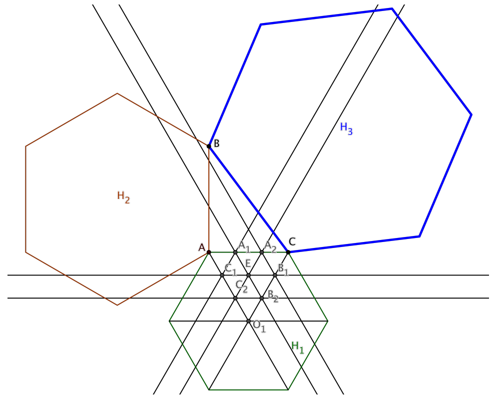
f) Construa retas paralelas ao segmento AO_1 passando por A_1 e A_2, obtendo os pontos B_1 e B_2



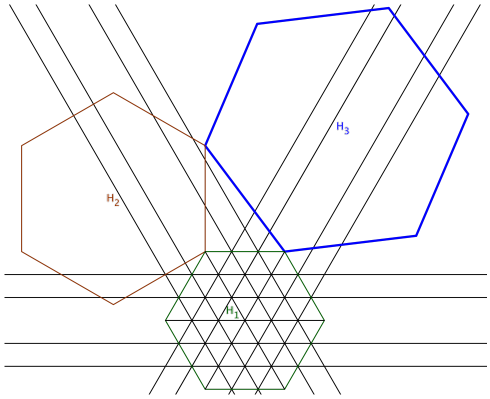
g) Construa retas paralelas ao segmento AC passando por B_1 e B_2, obtendo os pontos C_1 e C_2

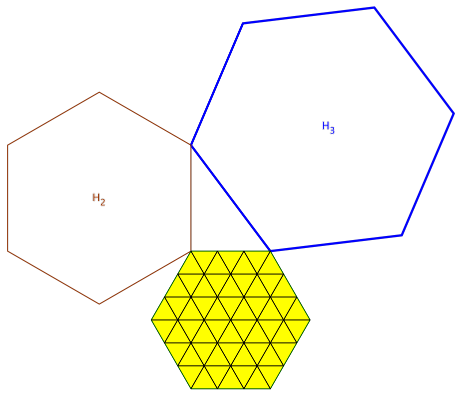


h) Por fim, construa retas paralelas ao segmento CO_1 passando por A_1 e A_2, desta forma obteremos 9 triângulos equiláteros de lado 1.

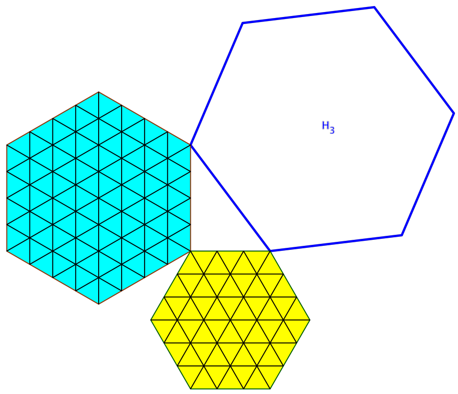


i) De forma análoga, podemos subdividir os demais triângulo equilátero de lado 3 em 9 triângulos equiláteros de lado 1. Desta forma o hexágono regular H_1 pode ser dividido em 54 triângulos equiláteros congruentes de lado 1.





j) Realizando procedimento análogo para o hexágonos H_2, obteremos 96 triângulos equiláteros de lado 1. E com isso finalizamos a construção de todas as peças do quebra-cabeça.

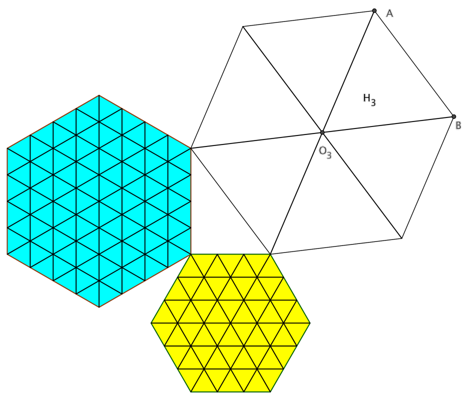


3.4.2 Solução do quebra-cabeça 4

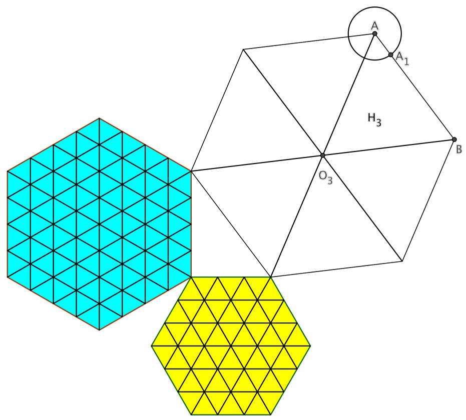
Para mostrarmos que podemos transportar todos esses 150 triângulos equiláteros dos hexágonos H_1 e H_2 para o hexágono H_3, basta mostrarmos como particionar H_3 em 150 triângulos equiláteros de lado 1, pois todas as peças do quebra-cabeça são congruentes.

Vamos utilizar o mesmo procedimento da construção das peças que fizemos nos hexágonos H_1 e H_3.

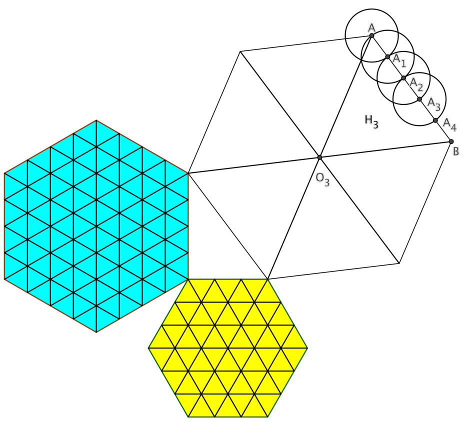
a) Traçando as diagonais do hexágono H_3, obteremos 6 triângulos equiláteros de lado 5.

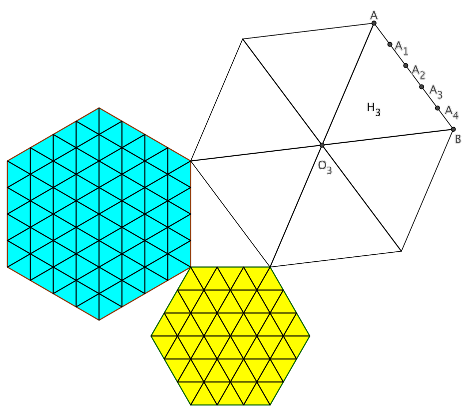


b) Agora vamos subdividir o triângulo ΔAO_3B, em triângulos equiláteros de lados medindo 1. Para isso trace uma circunferência de centro em A e raio $r = 1$ obtendo um ponto A_1 no lado AB.

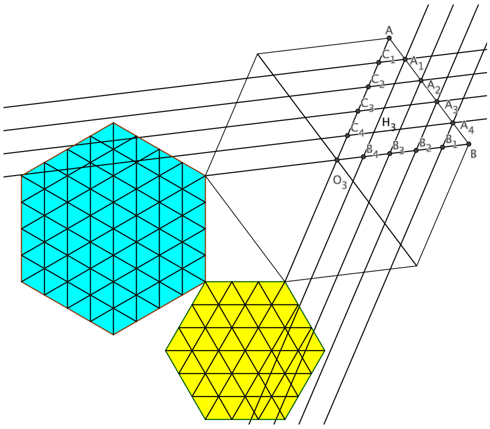


c) Agora trace uma circunferência de centro em A_1 e raio $r = 1$ obtendo um ponto A_2 no lado AB. Repetindo essa construção mas agora no ponto A_2, obteremos um ponto A_3, e depois no ponto A_3 obtendo um ponto A_4. Assim o lado AB será dividido em 5 partes com medida 1.

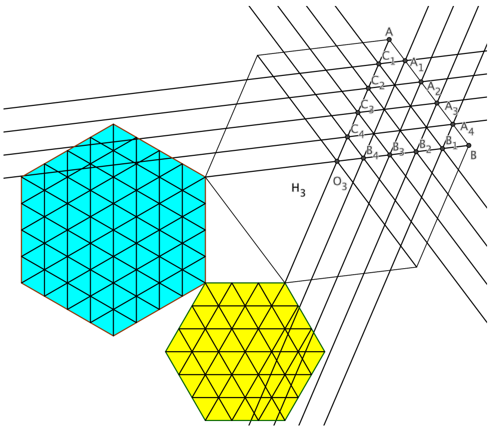




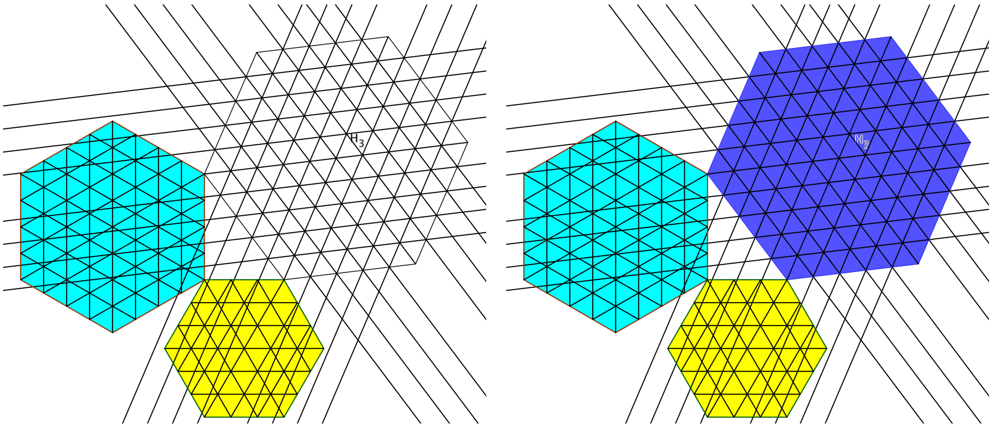
c) Construa retas paralelas ao lado AO_3 passando por A_1, A_2, A_3, A_4, obtendo os pontos B_1, B_2, B_3, B_4, e retas paralelas ao lado BO_3 passando por A_1, A_2, A_3, A_4 obtendo os pontos C_1, C_2, C_3, C_4



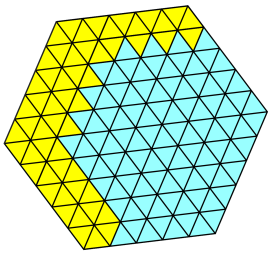
d) Construa retas paralelas ao lado AB passando por B_1, B_2, B_3, B_4. desta forma obteremos 25 triângulos equiláteros de lado 1.



e) De forma análoga, podemos subdividir os demais triângulo equilátero de lado 5 em 25 triângulos equiláteros de lado 1. Desta forma o hexágono regular H_3 pode ser dividido em 14 triângulos equiláteros congruentes de lado 1.



f) Uma possível solução seria



CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho objetivamos inicialmente uma diferente e lúdica metodologia da apresentação do Teorema de Pitágoras através das elaborações de quebra-cabeças.

Nossas investigações, a priori foram baseadas nas possibilidades de um aluno a nível fundamental II e ensino médio, que ao ter seus primeiros contados com a definição e demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras, tentar visualizar geometricamente, de que forma os quadrados de áreas b^2 e c^2 caberiam no interior do quadrado de área a^2? É possível em suas formas originais? É possível se fracioná-los? Só há uma possibilidade?

Durante nossas pesquisas investigativas, conseguimos observar que o Teorema de Pitágoras além da aplicação relacionada as áreas de quadrados determinados pelos lados de um triângulo retângulo, também é válida para as áreas de quaisquer polígonos convexos regulares de n lados, cujas medidas dos lados também são determinadas pelos lados de um triângulo retângulo qualquer, viabilizando assim as construções de quebra-cabeças utilizando hexágonos regulares.

Os estudos aplicados neste trabalho, nos permitiu observar o quão grande universo da geometria plana pode ser permeado durante as construções, tais como, noções primitivas da geometria plana, posições relativas entre retas, semelhança entre polígonos, teorema de tales, trigonometria, áreas, perímetro, polígonos regulares, não regulares, convexos, não convexos, etc.

Desta maneira, o nosso objetivo de trabalhar com o lúdico utilizando quebra-cabeças, foi além da aplicação e demonstração do Teorema de Pitágoras, nos possibilitou à apresentar inúmeros conteúdos relacionados a geometria utilizando os diversos caminhos apresentado em nosso trabalho.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barros, R.M.O; Gerônimo, J.R.; Franco, V.S. Geometria Plana e Espacial: um estudo com software Geogebra, 1º edição, Maringá, Eduem, 2009.

[2] Batista, Eliezer. Áreas, Volumes e Equidecomponibilidade, UFSC, 2014.

[3] Boltianski, V.G. Figuras Equivalentes e Equicompostas, Atual-Mir, 1996.

[4] Carvalho, J.B.P.; Roque, T. Tópicos de História da Matemática, Rio de Janeiro, Coleção PROFMAT, SBM, 2012.

[5] Euclid: The Thirteen Books of Euclid's Elements, Transl. Sir. Thomas L. Heath, Dover. 1956.

[6] Gerônimo, J.R.; Franco, V.S. Geometria Plana e Espacial: um estudo axiomático, 2º edição, Maringá, Eduem, 2010.

[7] Loomis, E.S. The Pythagorean Proposition, Washington, D.C, Classics in Mathematics Education Series, 1968.

[8] Neto A.C.M. Geometria, Rio de Janeiro, Coleção PROFMAT, SBM, 2013.