



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Equações Diferenciais Ordinárias na Modelagem e Solução de Problemas de Engenharia

Celso Faria de Souza

Goiânia

2018

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Celso Faria de Souza

Título do trabalho: Equações Diferenciais Ordinárias na modelagem e solução de problemas de Engenharia

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Celso Faria de Souza

Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:

Eulerston R. Vieira

Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 25 / 09 / 18

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

Celso Faria de Souza

**Equações Diferenciais Ordinárias na
modelagem e solução de problemas de
Engenharia**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira

Goiânia

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Souza, Celso
Equações Diferenciais Ordinárias na modelagem e solução de problemas de Engenharia [manuscrito] / Celso Souza. - 2018.
92 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira.
Trabalho de Conclusão de Curso Stricto Sensu (Stricto Sensu) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2018.

Bibliografia. Anexos.
Inclui siglas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Engenharia. 3. Modelagem.
I. Rocha Vieira, Ewerton, orient. II. Título.

CDU 517.9



Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br



Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Celso Faria de Souza – Aos trinta e um dias do mês de agosto do ano de dois mil e dezoito, às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira – Orientador, Prof. Dr. Ole Peter Smith, Prof. Dr. Arnaldo Dal Pino Júnior, para, sob a presidência da primeira, e em sessão pública realizada no auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada **“Equações Diferenciais Ordinárias na Modelagem e Solução de Problemas de Engenharia”**, em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Celso Faria de Souza discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela presidente da banca, Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Sóstenes Soares Gomes, secretário do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira
Presidente – IME/UFG

Prof. Dr. Ole Peter Smith
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Arnaldo Dal Pino Júnior
Membro – ITA

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Celso Faria de Souza graduou-se em Engenharia Mecânica-Aeronáutica em 2000 pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), atuou como professor universitário em diversas universidades, e desenvolveu vários projetos tecnológicos ao longo de sua carreira como engenheiro.

Dedico este trabalho aos meus professores Edson Cereja e Luís Carlos Rossato (in memoriam), que souberam conduzir-me pelas sendas das equações diferenciais, tornando mais suave meu caminhar como engenheiro e professor.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por colocar boas pessoas em meu caminho.

Sou grato à minha esposa Juliana por ter me entendido nas minhas “correrias” para que fosse possível a finalização deste mestrado. Agradeço também pela companhia que ela me fez nos cafés, durante a escrita do trabalho final, e o carinho que sempre me dedicou.

Aos meus pais, por serem modelo para mim em tudo.

Aos meus irmãos, por serem meus companheiros.

Aos colegas de PROFMAT: vocês foram formidáveis! Senti-me honrado em dividir a sala de aula com vocês. Rodolfo, obrigado por não me deixar desistir. Cláudio, metade do meu diploma de mestre é seu. Marcelo, Luciano, Roberto, Bárbara, Ramon, Théo, Claudinei, Iberê, Uyara, Mauro, Mamede, César, Jair, Osmair, Ana, Rogério e Luan, vocês me ensinaram bastante, me fizeram rir e me ajudaram a ter ânimo. Vocês são pérolas que o destino me trouxe.

Ao professor Ewerton Rocha Vieira, meu orientador, por ter me ensinado bastante e ter tido muita paciência comigo.

Ao professor Ole Peter Smith, pelas boas conversas, e por ter me explicado muita coisa que eu, como engenheiro, não era capaz de entender sozinho na matemática.

Finalmente, agradeço ao meu ex-aluno Judas Tadeu dos Santos, por ter sido o causador deste trabalho, através de seus questionamentos enquanto meu aluno de Mecânica dos Materiais Aplicada.

Não desprezes aquilo com o que não concordes, pois é distintivo de inteligências acanhadas.

Impacienta-te com a intolerância, o dogmatismo e com todos os ismos em erupção.

Estejas tão pronto a pegar o escalpelo do anatomista, como a vestir a alma do confessor.

Ouve e examina tudo a qualquer luz que lhe apresente.

Se encontrar algo que escape ao teu saber, meta-o nas contas de alguma lei por descobrir.

Se vês motivo para modificardes as hipóteses da doutrina pré-concebida, ou abirdes mão delas, ainda que lhe doa, não hesites em consumir o sacrifício.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem diferente do ensino tradicional no de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) para engenheiros. Mostramos como apresentar as EDO sem o formalismo característico com que é tratado o assunto nas universidades, mas sem perder o *feeling* necessário para a modelagem de problemas clássicos de física e engenharia. Discutimos uma nova metodologia para a introdução dos conceitos e técnicas de solução para diversos tipos de EDOs, incluindo as soluções do movimento harmônico simples (MHS) para o ensino médio.

Palavras-chave

Equações Diferenciais, Equações Diferenciais Ordinárias, Modelagem de Problemas.

Abstract

In this work, we present an approach different than the traditional approach at Ordinary Differential Equations (ODEs) for engineers. We show how to address ODEs without the characteristic formalism that exists in universities, but maintaining the feeling required to model classic problems in physics and engineering. We discuss a new methodology of introduction to the concepts and techniques used to solve many kinds of ODEs, including solutions of the simple harmonic motion (SHM) for high-school students.

Keywords

Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Problem Modelling.

Lista de Figuras

1.1	Diagrama esquemático da viga de Euler-Bernoulli.	22
1.2	Indicação gráfica da longarina modelada como uma viga de Euler-Bernoulli (NASA).	23
2.1	O diagrama do pêndulo.	25
2.2	Viga (de Euler-Bernoulli) sob carregamento distribuído, $w(x)$	27
3.1	Exemplo do circuito RC, comumente utilizado.	33
3.2	Família de soluções a partir da eq. (3.20).	38
3.3	Família de soluções a partir da Eq. 3.22.	38
3.4	Curva de resfriamento do cadáver.	46
4.1	Sistema massa-mola-amortecedor.	48
4.2	Circuito resistor-indutor-capacitor.	49
4.3	Curva representativa da eq. (4.18).	54
4.4	Curva representativa da eq. (4.41).	57
4.5	Curva representativa da eq. (4.63).	61
4.6	Curva representativa da eq. (4.72).	63
4.7	Curva representativa da eq. (4.81).	65
4.8	Curva representativa da eq. (4.89).	68
4.9	O diagrama do pêndulo com resistência do ar.	69
4.10	Curva representativa da eq. (4.96).	70
4.11	Curva representativa da eq. (4.98).	71
4.12	Curva representativa da eq. (4.100).	71
5.1	Viga sob carregamento genérico.	74
5.2	Curva representativa da eq. (5.14).	78
5.3	Curva representativa da eq. (5.20).	80
5.4	Curva representativa da eq. (5.25).	81

5.5	Viga sob carregamento constante.	81
5.6	Diagrama de corpo livre da viga sob carregamento constante.	82
5.7	Gráfico da função delta de Dirac.	83
5.8	Diagrama de esforço cortante da viga em estudo.	84
5.9	Diagrama de momento fletor da viga em estudo.	84
5.10	Curva representativa da Eq. 5.37.	85
6.1	Relação entre aceleração, velocidade e deslocamento.	88
6.2	Demonstração do MHS.	90

Sumário

Introdução	18
1 Breve Histórico das EDOs	20
2 Conceitos Básicos de EDO	24
2.1 Definição de EDO	24
2.2 Classificação das EDOs	26
2.2.1 Classificação quanto à ordem da EDO	26
2.2.2 Classificação quanto à linearidade da EDO	27
2.2.3 Classificação quanto à homogeneidade da EDO	28
2.2.4 Classificação da EDO com relação aos seus coeficientes	29
2.3 Solução de uma EDO de Ordem n	29
3 EDO de Primeira Ordem	31
3.1 Sistemas físicos descritos por EDO de primeira ordem	31
3.1.1 Aquecimento ou resfriamento de corpos	31
3.1.2 Decaimento radioativo	32
3.1.3 Circuitos elétricos RC	33
3.1.4 Juros compostos	34
3.2 EDOs de primeira ordem lineares de coeficientes constantes	35
3.2.1 EDOs de primeira ordem lineares e homogêneas de coeficientes constantes	35
3.2.2 EDOs de primeira ordem lineares e não-homogêneas de coefici- entes constantes	37
3.2.3 Encontrando o tempo de morte de um cadáver	43
4 EDO de Segunda Ordem	47
4.1 Sistemas físicos descritos por EDOs de segunda ordem	47

4.1.1	Sistema massa-mola-amortecedor	47
4.1.2	Circuitos elétricos RLC em série	48
4.2	EDOs de segunda ordem lineares a coeficientes constantes	50
4.2.1	EDOs de segunda ordem lineares e homogêneas a coeficientes constantes	50
4.2.2	EDOs de segunda ordem lineares e não-homogêneas de coeficien- tes constantes	64
4.3	Modelando um pêndulo simples com resistência do ar	68
5	EDOs de Ordens Superiores	73
5.1	Sistemas físicos descritos por EDOs de ordens superiores	73
5.1.1	Flexão de vigas	74
5.1.2	Funcionamento de sistemas biológicos	75
5.2	Solução de EDOs lineares de ordem superior a dois de coeficientes cons- tantes	75
5.3	Determinando a deflexão de vigas	81
6	Solucionando o problema do Movimento Harmônico Simples (MHS) para o ensino médio	86
6.1	Apresentação do problema das oscilações	87
6.2	Solucionando o problema do MHS	89
7	Considerações Finais	91

Introdução

Em todos os cursos superiores das ciências exatas aplicadas, mais especificamente os cursos de engenharia, os alunos se deparam frequentemente com problemas nas matérias básicas de matemática, como Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais Ordinárias [8, 13].

Optou-se por ser estudado neste trabalho o ensino de equações diferenciais ordinárias (EDOs) por dois motivos básicos:

1. As dificuldades que os alunos encontram nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral já é motivo de estudo há bastante tempo, e possui farto e robusto material publicado, enquanto as dificuldades apresentadas no ensino de EDO não possuem tanto material escrito;
2. O autor possui experiência em ensino de matérias nos cursos de engenharia que são basicamente aplicações de EDOs, e notou em sala, por inúmeras vezes, a dificuldade dos alunos em lidar com este tipo de equação.

Especificamente no estudo do ensino das EDOs, os autores costumam abordar principalmente três aspectos: sequência didática [12], abordagem do professor [7] ou contextualização [18].

Dado o exposto e o que observamos em sala de aula, decidimos pautar este trabalho em um aspecto ainda não abordado nos textos que encontramos até o momento: a apresentação das EDOs como ferramentas poderosas, capazes de modelar os problemas mais complexos de forma simples. Ainda que básico, para a completa compreensão deste trabalho, é necessário o conhecimento de cálculo diferencial e integral. Recomenda-se a leitura de “Um curso de Cálculo”, Vol. 1, por Hamilton Guidorizzi, 5ª Ed. [15].

A sugestão desta abordagem dá-se em razão de que engenheiros, físicos e químicos adentram em seus respectivos cursos ávidos por entender os problemas reais que a

natureza oferece ao homem; logo, faz bastante sentido apresentar ao aluno uma ferramenta que o auxiliará. E esta ferramenta, mesmo passados mais de trezentos anos de sua descoberta, mostra-se cada vez mais moderna e poderosa no campo das ciências aplicadas [9].

Pretende-se ainda suprimir algumas partes desta disciplina que, apesar de extremamente importantes para o matemático, são de pouca serventia para quem possui a teoria de EDO como uma ferramenta. Por exemplo, as demonstrações de existência e unicidade da solução de uma EDO através do método de Picard [17], consomem grande parte de uma aula que poderia ser melhor aproveitada apresentando aplicações e modelando sistemas diversos.

Para tanto, este trabalho será organizado da seguinte forma:

- A. Capítulo 1 – Breve Histórico das EDOs: neste capítulo mostraremos de forma breve como nasceram as equações diferenciais, e como os egressos da Universidade da Basileia trataram de disseminar seu conhecimento, através das diversas aplicações em vários problemas físicos reais que se encontravam ainda sem solução;
- B. Capítulo 2 – Conceitos Básicos das EDOs: introdução ao estudo das EDOs, apresentando os conceitos mais rudimentares e necessários para seu estudo;
- C. Capítulo 3 – EDO de Primeira Ordem: serão apresentadas as EDOs de primeira ordem, suas soluções e exemplos aplicados a problemas reais;
- D. Capítulo 4 – EDO de Segunda Ordem: serão apresentadas as EDOs de segunda ordem, suas soluções e exemplos aplicados a problemas reais;
- E. Capítulo 5 – EDO de Ordem Superior: serão apresentadas as EDOs de ordem superior a dois, suas soluções e exemplos aplicados a problemas reais;
- F. Capítulo 6 – Solucionando o problema do movimento harmônico simples (MHS) para o ensino médio: aplicação de solução de EDO para um problema físico típico;
- G. Capítulo 7 – Considerações finais: faremos uma reflexão final acerca do formato sugerido para o ensino das Equações Diferenciais Ordinárias.

Na medida do possível, em todos os capítulos constarão problemas a serem resolvidos e qual a abordagem que se entende ser a ideal para tratar o assunto em sala de aula.

Capítulo 1

Breve Histórico das EDOs

As equações diferenciais ordinárias nasceram praticamente com o cálculo diferencial e integral. Atribui-se a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) a primeira formulação e solução de EDO, e a Isaac Newton (1643 – 1727) a primeira classificação e início de estudos mais aprofundados [20].

Newton propôs que as equações diferenciais poderiam ser agrupadas em três tipos

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.2}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u(x, y) \tag{1.3}$$

Nota-se claramente que as duas primeiras equações (Eqs. 1.1 e 1.2) fazem referência à EDO, enquanto a última é uma classe de Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Esclarecemos ainda que a notação utilizada nas Eqs. (1.1), (1.2) e (1.3).

Mesmo cabendo a Newton a primazia no estudo das EDOs, coube definitivamente aos matemáticos ligados a Leibniz o desenvolvimento virtuoso das equações diferenciais, alcançando-as ao estrelato como ferramenta matemática.

Leibniz havia se graduado em Leipzig, e já gozava de grande e notória reputação quando era professor na universidade de Hanover e orientou o doutoramento, por correspondência, do jovem Jakob Bernoulli (1654 – 1705), que se tornou o primeiro grande matemático da ilustre família Bernoulli.

Jakob Bernoulli foi o primeiro matemático a aplicar as equações diferenciais em diversos problemas, solucionando-os. Resolveu o problema dos isoperímetros, e resolveu a equação diferencial de Bernoulli (Eq. 1.4)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (1.4)$$

Através de manipulação e substituição algébricas, Jakob Bernoulli linearizou e resolveu a equação acima.

Já como professor titular da universidade da Basileia, Jakob Bernoulli orientou seu irmão mais novo Johann Bernoulli (1667 – 1748) e conduziu-o nos caminhos das equações diferenciais parciais.

Johann resolveu, usando equações diferenciais, dois dos mais famosos problemas da época: o problema da braquistócrona e da catenária. Johann Bernoulli estava, assim, aplicando sistematicamente as EDOs para solucionar problemas físicos reais, presentes no cotidiano de algumas pessoas. Ele também foi o descobridor da técnica de separação de variáveis para solução de equações diferenciais.

Apesar de ter se graduado na universidade da Basileia, Johann não encontrou lá espaço acadêmico, já que seu irmão Jakob ocupava a cátedra de matemática nesta universidade. Porém, com a morte de Jakob em 1705, Johann assume o posto que era de seu irmão, e passa a ser o professor de cálculo e de equações diferenciais desta instituição.

Por volta de 1723, Johann Bernoulli recebe como aluno de doutoramento o jovem Leonhard Euler (1707 – 1783), então com dezesseis anos de idade. Em três anos Euler conclui seu doutorado e inicia seus estudos em praticamente todos os ramos da matemática, física e engenharia.

Estima-se que Euler tenha escrito mais de oitocentos artigos científicos, diversos deles dedicados à solução de problemas de cunho prático. Uma das maiores contribuições de Euler para as engenharias é a dedução da equação da viga elástica, também chamada de *viga de Euler-Bernoulli* (ver Figura 1.1).

Euler deduziu que a equação que governa esta viga é da forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1.5)$$

em que y é a flecha da viga (maior deslocamento vertical da linha neutra da viga forçada), x é o eixo da viga, $M(x) = Fx$ é o momento fletor, E é o módulo de elasticidade do material da viga e I o momento de inércia de área da sua seção transversal.

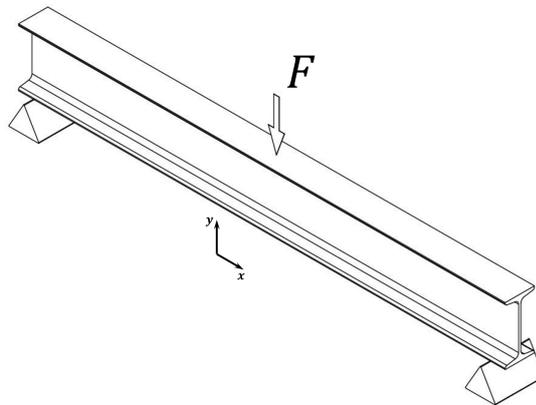


Figura 1.1: Diagrama esquemático da viga de Euler-Bernoulli.

Esta singela equação abriu caminho para o cálculo de praticamente todas as estruturas ligadas às engenharias mecânica, naval, aeronáutica e civil. A Figura 1.2 traz um exemplo da engenharia aeronáutica, no qual a longarina principal da asa de uma aeronave é modelada como a viga previamente citada.

A partir deste momento, as equações diferenciais já estavam com seu lugar garantido nos livros das mais diversas ciências, sendo usadas inclusive para descrever sistemas biológicos, como é o caso das equações de Lotka-Volterra para o estudo ecológico de populações de predadores e presas.

Euler faleceu em 1783, mas deixou discípulos, bem como a família Bernoulli. Estes matemáticos desenvolveram a teoria das EDOs, além de terem apresentado tratados volumosos acerca das soluções de tais equações. Isto abriu o caminho para que a engenharia e a física pudessem andar a passos largos no século XIX, sustentando a revolução industrial com projetos de máquinas, guerras com cálculos balísticos de projéteis de canhão e, marcando, de forma indelével, a sociedade ocidental como a conhecemos hoje.

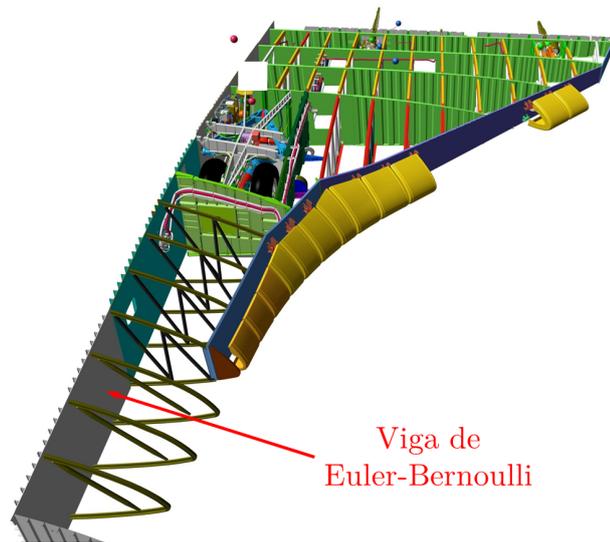


Figura 1.2: Indicação gráfica da longarina modelada como uma viga de Euler-Bernoulli (NASA).

Capítulo 2

Conceitos Básicos de EDO

Para entender as EDOs em sua plenitude, deve-se inicialmente entender os conceitos mais simples a elas relacionados, deixando-os bem definidos e da forma mais clara possível [14, 21].

2.1 Definição de EDO

Um dos conceitos mais importantes é o da equação diferencial ordinária em si.

Apesar de simples e claro, veremos que é abrangente, pois ainda nos suscitará a necessidade de diversas classificações [14, 21].

Definição 2.1. *Seja $y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ uma função que dependa das n variáveis x_i , tal que x_i é a i -ésima variável real independente (para $1 \leq i \leq n$):*

- *Para ser chamada de **equação diferencial**, devemos ter uma equação na qual estejam envolvidas as derivadas de qualquer ordem da função $y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, em relação a quaisquer variáveis x_i .*
- *Para ser chamada de **equação diferencial ordinária (EDO)**, esta equação deve envolver derivadas da função y somente em relação a uma única variável independente.*

Como forma de auxílio na fixação da definição, serão dados alguns exemplos.

Exemplo 2.1. A equação $y^2 + 5y - \sqrt{y} = 0$ não é uma equação diferencial, porque não estão envolvidas derivadas de y em relação a nenhuma variável.

Exemplo 2.2. A equação $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial y}{\partial x_2} + y = 0$ é uma equação diferencial, porque estão envolvidas derivadas de y em relação a alguma variável. Porém, não é uma equação diferencial ordinária, pois esta equação apresenta derivadas com relação às variáveis x e t .

Exemplo 2.3. A equação $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 3x + 2$ é uma equação diferencial ordinária, porque estão envolvidas derivadas de y em relação a uma única variável.

Além dos exemplos acima, podem ser criados diversos outros exemplos com participação efetiva dos alunos.

Um bom exemplo a ser dado, fazendo a devida correlação com o sistema físico em questão, é exemplo do pêndulo, cujo diagrama representativo é mostrado na Figura 2.1 e cuja equação (do pêndulo) é dada pela Eq. (2.1).

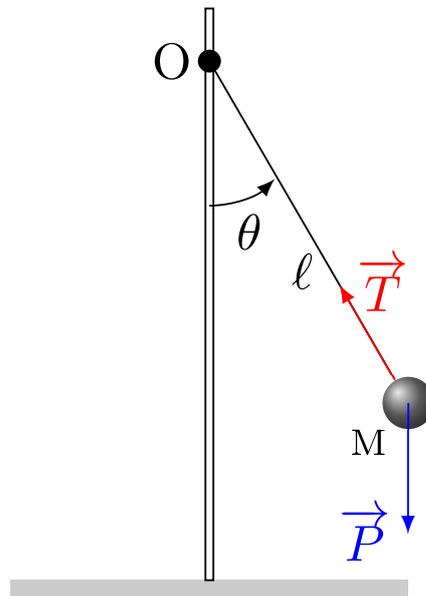


Figura 2.1: O diagrama do pêndulo.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\text{sen}(\theta) = 0 \quad (2.1)$$

Aproveita-se ainda para mostrar que neste caso, como a aceleração da gravidade e o comprimento do pêndulo são constantes, a posição da massa oscilante varia somente com o tempo, eis que é a única variável independente da equação.

2.2 Classificação das EDOs

A simplicidade na definição das EDOs faz com que o espectro de equações incluídas neste conjunto necessite de diversas classificações a fim de ser possível seu estudo mais detalhado.

Assim, as equações serão classificadas quanto a sua:

- a. Ordem;
- b. Linearidade;
- c. Homogeneidade;
- d. Coeficientes.

Em cada uma das classificações, serão detalhados alguns exemplos.

2.2.1 Classificação quanto à ordem da EDO

Uma forma de classificar as EDOs é com relação à ordem das derivadas que a compõe. Assim, tem-se:

Definição 2.2. *Diz-se que uma EDO é de ordem n quando a derivada de maior ordem presente na equação é de ordem n em relação à variável independente.*

Percebe-se claramente com esta classificação que o objetivo, aqui, é o de entender o nível de derivação envolvido na equação e, conseqüentemente, no problema físico que esta equação está modelando. Cabe ao professor, neste momento, explicar que, em linhas gerais, quanto maior a ordem de uma EDO, mais complexa é sua solução.

Exemplo 2.4. *A equação $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x + 2$ é uma EDO de segunda ordem completa, pois possui a derivada de segunda ordem e todas as derivadas de ordens inferiores.*

Exemplo 2.5. A equação $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\text{sen}(\theta) = 0$ é uma EDO de segunda ordem incompleta, pois não possui a derivada de primeira ordem. Neste exemplo, o professor deve ainda explicar que nas modelagens físicas e de engenharia, cada ponto sobre a variável dependente θ significa uma derivação em relação à variável tempo (t). Deve ainda lembrar aos alunos de que esta é a equação do pêndulo simples, já mostrada anteriormente, porém escrita em uma notação mais simplificada.

Exemplo 2.6. A equação $y'''' = \frac{w(x)}{EI}$ é uma EDO de quarta ordem incompleta, pois possui apenas derivada de ordem quatro. Neste exemplo, o professor deve ainda explicar que nas modelagens físicas e de engenharia, cada linha sobre a variável dependente y significa uma derivação em relação à variável independente que não seja o tempo. Deve ainda informar aos alunos que esta é a equação da viga de Euler-Bernoulli, já mostrada anteriormente, porém escrita agora em termos do carregamento $w(x)$, ao invés de estar em termos do momento fletor $M(x)$. Ver representação esquemática na Figura 2.2.

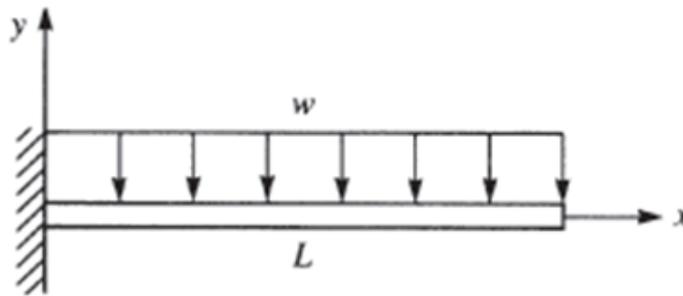


Figura 2.2: Viga (de Euler-Bernoulli) sob carregamento distribuído, $w(x)$.

2.2.2 Classificação quanto à linearidade da EDO

Talvez esta seja a mais importante das classificações relativas às EDOs. Isto se deve, em grande parte, porque a maioria das técnicas conhecidas de resolução de equações aplique-se às equações lineares. Esta classificação, apesar de simples, requer que sejam dados diversos exemplos, pois dúvidas podem surgir pelo uso generalizado da palavra “linear” nos diversos ramos e aplicações da matemática.

Definição 2.3. Diz-se que uma EDO de ordem n é linear caso possa ser escrita na forma:

$$F(x, y, y'', \dots) = g(x)$$

onde F é um operador linear.

Observação: de forma mais simplificada, diremos que uma **EDO** é **linear** quando nela não aparecem produtos entre y e suas derivadas, nem produtos entre suas derivadas e nem mesmo funções não lineares onde y seja argumento.

Caso a EDO não seja linear, ela é chamada de **não-linear**.

A definição de operador linear pode ser encontrado em [2].

Exemplo 2.7. A equação $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x + 2$ é uma EDO linear, pois não há produto entre y e suas derivadas ou entre as derivadas de y .

Exemplo 2.8. A equação $2y'' + \sin(x)y = 0$ é uma EDO linear, pois não há produto entre y e suas derivadas ou entre as derivadas de y . A princípio, pode causar estranheza o fato de aparecer uma função trigonométrica multiplicando y , contudo a função $\sin(x)$ não é função de y ; logo, a EDO é linear.

Exemplo 2.9. A equação $5y'' - y' + \sin(y) = 0$ é uma EDO não-linear, pois apesar de não existir produto entre y e suas derivadas ou entre as derivadas de y , existe na equação um termo não-linear em y , que é o termo $\sin(y)$.

Exemplo 2.10. A equação $y'' - y'y + 2 = 0$ é uma EDO não-linear, pois apresenta produto entre y e suas derivadas.

Exemplo 2.11. A equação $3y - (y')^2 + y = 0$ é uma EDO não-linear, pois apresenta produto entre as derivadas de y no termo $(y')^2$.

2.2.3 Classificação quanto à homogeneidade da EDO

Definição 2.4. Diz-se que uma EDO de ordem n é homogênea caso possa ser escrita na forma:

$$f_n(x, y)\frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x, y)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + f_2(x, y)\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x, y)\frac{dy}{dx} + f_0(x, y)y = 0$$

Ou, de forma mais simplificada, diremos que uma EDO é homogênea quando o termo independente de y é igual a zero.

Exemplo 2.12. A equação $\frac{d^2y}{dx^2} + 6y = -x + 2$ é uma EDO não-homogênea, pois o termo independente de y é diferente de zero e vale $-x + 2$.

Exemplo 2.13. A equação $y'' + \sin(y) = 0$ é uma EDO homogênea, pois o termo independente de y vale zero.

2.2.4 Classificação da EDO com relação aos seus coeficientes

Definição 2.5. Seja uma EDO de ordem n da seguinte forma:

$$f_n(x, y) \frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x, y) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + f_2(x, y) \frac{d^2 y}{dx^2} + f_1(x, y) \frac{dy}{dx} + f_0(x, y)y = g(x, y)$$

Caso as funções $f_i(x, y)$ sejam números ao invés de funções, a equação é chamada de EDO a coeficientes constantes. Caso contrário, a equação é chamada de EDO a coeficientes variáveis.

Exemplo 2.14. A equação $\frac{d^3 y}{dx^3} - 2y = \exp(-x)$ é uma EDO de coeficientes constantes, pois a variável y e suas derivadas estão multiplicadas somente por números.

Exemplo 2.15. A equação $y'' - \cos(x)y = \cosh(x)$ é uma EDO de coeficientes variáveis, pois no termo $-\cos(x)y$, o multiplicador de y não é constante.

2.3 Solução de uma EDO de Ordem n

Ainda que fácil de se entender intuitivamente o que seja a solução de uma EDO de ordem n , é necessário colocar esta definição de forma sistemática e em linguagem matemática adequada.

Definição 2.6. Seja uma EDO de ordem n da seguinte forma:

$$f_n(x, y) \frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x, y) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + f_2(x, y) \frac{d^2 y}{dx^2} + f_1(x, y) \frac{dy}{dx} + f_0(x, y)y = g(x, y)$$

Diz-se que $\Phi : \mathbb{A} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que Φ equivale a $y(x)$ e \mathbb{A} é um intervalo onde existe a solução, é solução da EDO acima caso se verifique:

$$f_n(x, y) \frac{d^n \Phi}{dx^n} + f_{n-1}(x, y) \frac{d^{n-1} \Phi}{dx^{n-1}} + \cdots + f_2(x, y) \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + f_1(x, y) \frac{d\Phi}{dx} + f_0(x, y)\Phi \equiv g(x, y)$$

Exemplo 2.16. A equação $y'' - y = 0$ admite como solução $\Phi(x) = Ae^x + Be^{-x}$, pois tem-se que: $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = Ae^x + Be^{-x}$, e logo tem-se que:

$$\Phi'' - \Phi = Ae^x + Be^{-x} - (Ae^x + Be^{-x}) = 0$$

Logo, Φ é solução da equação dada.

Para uma classe muito especial de EDOs, pode-se demonstrar que as suas soluções existem e são únicas [17].

Como exemplos de EDO de interesse para as engenharias e física, pode-se citar:

1. Equação da viga de Euler-Bernoulli – Seção 5.1.1;
2. Equação do movimento de Newton (2ª Lei de Newton) – Seção 6.1;
3. Equação do decaimento radioativo – Seção 3.1.2;
4. Equação do pêndulo simples – Seção 6.2.

Capítulo 3

EDO de Primeira Ordem

Apesar de o nome sugerir algo extremamente simples, veremos que as EDOs de primeira ordem são capazes de modelar diversos sistemas físicos e fornecer importantes resultados para o entendimento e modelagem destes.

3.1 Sistemas físicos descritos por EDO de primeira ordem

Muitos sistemas são descritos por EDO de primeira ordem. Tais sistemas sugerem que a modelagem necessite apenas de uma quantidade física $\Phi(x)$ e da derivada dessa quantidade em relação à sua variável dependente.

Para tornar o assunto mais palatável, iremos descrever alguns sistemas que podem ser abordados como motivação neste assunto.

3.1.1 Aquecimento ou resfriamento de corpos

No ano de 1701, Isaac Newton publicou na revista *Philosophical Transactions* um artigo intitulado *Scala graduum caloris. Calorum descriptiones & Signa*. Neste artigo, Newton estabelece que um corpo que se encontre a uma temperatura T , e

esteja em um ambiente que se encontre a uma temperatura constante T_0 , diminui sua temperatura de acordo com a seguinte lei

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = -k(T - T_0) \quad (3.1)$$

Nesta equação, k é uma constante que depende de diversos fatores ligados ao sistema físico observado, como por exemplo: geometria dos corpos, material do qual o corpo é composto, etc.

Esta equação, por si só, permite que calculemos, por exemplo, quanto tempo um bolo colocado em um forno irá atingir a temperatura do forno, ou quanto tempo uma garrafa de bebida gastará para resfriar até a temperatura do congelador.

Porém, uma aplicação bastante prática é a determinação de tempo de morte de cadáveres encontrados por peritos criminais em cenas de crimes. Sabemos que o corpo humano possui uma temperatura interna constante de $36,5^\circ C$, e sabemos a temperatura ambiente na qual o cadáver se encontra. Assim, o perito mede a temperatura do cadáver no momento que o encontra e torna a realizar a medida dentro de, digamos, 30 minutos. Apenas com estas duas medidas e o auxílio de uma simples EDO de primeira ordem, o perito é capaz de determinar o horário de morte do cadáver em questão.

3.1.2 Decaimento radioativo

Elementos radioativos emitem espontaneamente partículas ou ondas. Este fenômeno foi observado pela primeira vez em 1896 pelo físico francês Henri Becquerel. Por esta observação e por sua explicação física e matemática do problema, Becquerel e o casal Marie e Pierre Curie foram agraciados com o prêmio Nobel de física do ano de 1903.

A equação que modela como uma determinada massa inicial M_0 de um material radioativo evolui com o tempo foi ditada por Becquerel. Basicamente, Becquerel postulou que a velocidade com que os átomos decaem depende da quantidade de átomos que ainda não decaíram. Matematicamente, tem-se

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M \quad (3.2)$$

Através desta equação, diversos cientistas realizam medidas de idade de objetos, através da chamada *datação por carbono 14*.

3.1.3 Circuitos elétricos RC

Os circuitos elétricos são os entes físicos mais utilizados como exemplos nos casos de modelagem por EDO [19]. Em grande parte, isto se dá pela existência das chamadas *leis de Kirchhoff*, que permitem que um circuito elétrico seja facilmente traduzido em um conjunto de EDO. Porém, valer-se somente destes exemplos torna o curso por demais entediante para quem não é da área de engenharia elétrica.

Como exemplo de circuito elétrico modelado por EDO, usaremos o caso do circuito composto por um resistor R e um capacitor C ligados, como pode-se ver na Figura 3.1, abaixo.

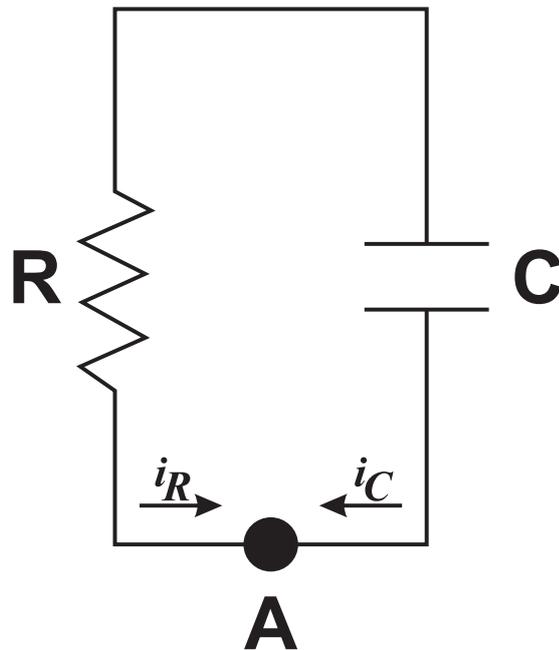


Figura 3.1: Exemplo do circuito RC, comumente utilizado.

Na figura, a somatória das correntes que chegam ao ponto A deve ser zero. Assim

$$i_R + i_C = 0 \quad (3.3)$$

Da lei de Ohm, tem-se que

$$U = Ri_R, \rightarrow i_R = \frac{U}{R} \quad (3.4)$$

onde U é a tensão entre os dois terminais, seja do capacitor ou do resistor, e R é o valor da resistência associada ao resistor em questão.

Já a lei característica para capacitores diz que

$$i_C = C \frac{dU}{dT} \quad (3.5)$$

Na equação característica, C é o valor da capacitância associada ao capacitor.

Das eqs. (3.3), (3.4) e (3.5), tem-se

$$C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} = 0 \quad (3.6)$$

que pode ser escrita na forma

$$\dot{U} + \frac{1}{RC} U = 0 \quad (3.7)$$

Esta equação é a modelagem do circuito RC, e nos diz como variará a tensão entre os terminais dos componentes. Através desta equação poderemos, por exemplo, calcular a potência dissipada por este circuito e também o tempo gasto para que a energia se dissipe.

3.1.4 Juros compostos

Operações financeiras também são usadas por diversas vezes como exemplos de aplicação matemática, desde nossa mais tenra idade.

Neste momento, a modelagem de juros compostos com EDO torna a análise muito mais simples. Basta entender que a variação que temos na quantidade de dinheiro em função do tempo depende somente de quanto de dinheiro tem-se na aplicação [4]. Assim, pode-se escrever

$$\frac{dC}{dt} = \alpha C_0 \quad (3.8)$$

Nesta equação, C é o capital que temos em um instante t , α é a taxa de juros e C_0 é o capital que temos no início da operação.

Cabe ressaltar que exemplos envolvendo operações financeiras, apesar de fáceis de serem entendidos, costumam causar certo aborrecimento em turmas de engenharia e

física, pois estes estão, geralmente, mais interessados em entender fenômenos naturais; e some-se também a isto o fato de que os professores de ensino médio também são usuários destes exemplos. Logo, o aluno costuma chegar à universidade farto de tais exemplos. Recomenda-se parcimônia do uso deste exemplo.

3.2 EDOs de primeira ordem lineares de coeficientes constantes

Após exemplificarmos o uso das EDOs de primeira ordem, iremos apresentar a técnica de resolução das EDOs lineares de coeficientes constantes de primeira ordem.

A fim de simplificar o entendimento, iremos apresentar inicialmente a técnica para EDOs homogêneas, e logo após generalizaremos para EDOs não-homogêneas.

3.2.1 EDOs de primeira ordem lineares e homogêneas de coeficientes constantes

As EDOs de primeira ordem lineares e homogêneas de coeficientes constantes possuem a seguinte forma geral

$$\dot{y} + my = 0 \tag{3.9}$$

Nesta equação, devemos ter que $y(x)$ é de classe C^1 , ou seja, possui a primeira derivada e esta derivada é contínua, e $m \in \mathbb{R}$. Matematicamente, escrevemos

$$\begin{cases} \dot{y} + my = 0 \\ x, m \in \mathbb{R} \\ y(x) \in C^1 \end{cases} \tag{3.10}$$

Analisando a Eq. 3.9, notamos que buscamos por uma função tal que sua derivada multiplicada por um valor real seja igual ao oposto da própria função. Obviamente, esta função é uma exponencial, e podemos então supor que a solução seja do tipo

$$\Phi(x) = Ae^{\alpha x} \quad (3.11)$$

Assim, calculamos a derivada de $\Phi(x)$

$$\Phi'(x) = \alpha Ae^{\alpha x} \quad (3.12)$$

Substituindo as eqs. (3.11) e (3.12) na equação original (3.9), tem-se

$$\alpha Ae^{\alpha x} + mAe^{\alpha x} = 0 \quad (3.13)$$

Colocando a função exponencial em evidência, tem-se

$$(\alpha + m)Ae^{\alpha x} = 0 \quad (3.14)$$

Na eq. (3.14) tem-se o produto de três fatores sendo igual a zero. Logo, um dos fatores deve ser igual a zero.

Caso A seja igual a zero, nossa função será constante e igual a zero, portanto, esta solução, chamada de solução trivial, não nos satisfaz.

A função $e^{\alpha x}$ não se anula para nenhum valor de x .

Resta-nos apenas fazer com que o fator $(\alpha + m)$ seja nula, ou seja, devemos ter que

$$\alpha = -m \quad (3.15)$$

Logo, a solução geral da EDO de primeira ordem linear e homogênea de coeficientes constantes representada pela eq. (3.9) é dada por

$$y(x) = Ae^{-mx} \quad (3.16)$$

Para conhecer completamente a solução da equação, basta-nos encontrar o valor de A , porém, A só pode ser determinado caso nos seja dado um valor da função $y(x)$ em algum ponto x_0 .

Para entendermos melhor o descrito, resolveremos um exemplo.

Exemplo 3.1. *Resolução da EDO $y' + 5y = 0$, sujeita à condição $y(0) = 3$.*

Analisando a EDO proposta, observamos que a mesma é de primeira ordem, homogênea e de coeficientes constantes. Assim, pode-se aplicar o método que vimos neste capítulo.

Supomos que a solução seja da forma

$$y(x) = Ae^{\alpha x} \quad (3.17)$$

Substituindo 3.17 na equação que desejamos resolver (no enunciado deste exemplo), tem-se

$$A\alpha e^{\alpha x} + 5Ae^{\alpha x} = (\alpha + 5)Ae^{\alpha x} = 0 \quad (3.18)$$

Assim, de (3.18), tem-se que

$$\alpha = -5 \quad (3.19)$$

Logo, a solução que satisfaz a equação dada é

$$y(x) = Ae^{-5x} \quad (3.20)$$

Porém, queremos ainda que a solução encontrada na eq. (3.20) satisfaça a condição dada no enunciado de $y(0) = 3$. Assim

$$y(0) = Ae^{-5 \cdot 0} = Ae^0 = A = 3 \quad (3.21)$$

Então para satisfazer a condição dada, a expressão para $y(x)$ será

$$y(x) = 3e^{-5x} \quad (3.22)$$

Note que a solução geral apresentada em (3.20) representa na verdade uma família de soluções em função de A , como podemos ver na Figura 3.2.

Quando introduzimos a condição representada por $y(0) = 3$, ela seleciona somente uma das curvas apresentadas, como podemos ver no gráfico dado na Figura 3.3.

3.2.2 EDOs de primeira ordem lineares e não-homogêneas de coeficientes constantes

As EDOs de primeira ordem lineares e não-homogêneas de coeficientes constantes são as equações que apresentam a seguinte forma geral

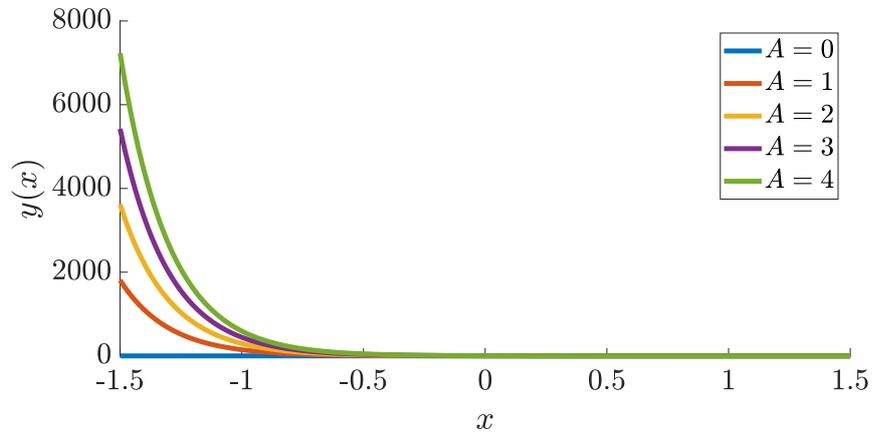


Figura 3.2: Família de soluções a partir da eq. (3.20).

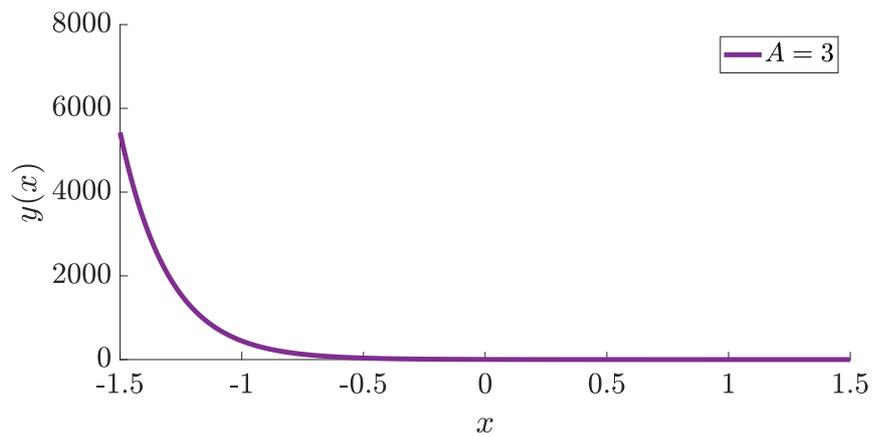


Figura 3.3: Família de soluções a partir da Eq. 3.22.

$$y' + my = f(x) \tag{3.23}$$

Para resolver esta equação, iremos dividir a solução em duas partes:

- a) Equação homogênea associada $y' + my = 0$, que possui $\Phi_H(x)$ como solução;
- b) Equação original $y' + my = f(x)$, que admite $\Phi_P(x)$, como uma solução particular.

A solução geral da equação apresentada na eq. (3.23) será dada através de

$$\Phi_{Geral} = \Phi_H(x) + \Phi_P(x) \tag{3.24}$$

Ou seja, para resolvermos a equação geral, deveremos resolver a homogênea e também a particular.

Como a função $f(x)$ explicitada em (3.23) pode ser tão geral quanto se queira, iremos restringir nossa análise a alguns casos em que conseguimos encontrar soluções.

Iremos solucionar as EDOs em que $f(x)$ assuma os seguintes formatos:

1. $f(x) = Ke^{nx}$ – Chamado de **primeiro caso**;
2. $f(x) = A\sin(nx) + B\cos(nx)$ – Chamado de **segundo caso**;
3. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ – Chamado de **terceiro caso**.

Cabe ressaltar que, se depender de $f(x)$, a equação pode nem mesmo possuir uma solução analítica, sendo necessários métodos numéricos para sua solução.

3.2.2.1 Primeiro caso

Neste primeiro caso queremos resolver a seguinte EDO

$$y' + my = Ke^{nx} \quad (3.25)$$

Como já explicado em (3.24), sabe-se que a solução geral é a solução da homogênea, $\Phi_H(x)$, somada à solução particular, $\Phi_P(x)$.

De acordo com a eq. (3.16), sabemos que a solução para a equação homogênea associada à eq. (3.25) é

$$y_H(x) = Ae^{-mx} \quad (3.26)$$

Logo, resta-nos saber somente qual é a solução particular associada à eq. (3.25).

Para estes casos, iremos supor que a solução esperada para (3.25) seja algo da forma

$$\Phi(x) = Be^{nx} \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.25), colocando os termos em evidência e simplificando, tem-se

$$B = \frac{K}{n + m} \quad (3.28)$$

Como K , n e m são constantes, pode-se simplesmente declarar que B é também uma constante. Logo, tem-se que a solução particular é da seguinte forma

$$y_P = Be^{nx} \quad (3.29)$$

Assim, aplicando as eqs. (3.30) e (3.29) em (3.24), tem-se

$$y_{Geral} = Ae^{-mx} + Be^{nx} \quad (3.30)$$

É importante destacar que diferente da solução da equação homogênea, devemos agora, a fim de encontrar os valores de A e B , conhecer o valor da função $y(x)$ em dois pontos diferentes.

Neste ponto é importante também discutir com os alunos as soluções exponenciais, colocando a seguinte distinção:

1. Os termos com exponencial negativa tendem a desaparecer com o tempo, e portanto são chamados de ***solução transiente***;
2. Os termos de exponencial positiva são muito diminutos para valores de x próximos de zero, porém com o avanço de x , evoluem rapidamente para valores muito altos. São termos que, em sistemas físicos reais, só possuem sentido quando limitamos os valores de x a um dado intervalo. Não raro são chamados de ***termos dominantes*** ou ainda de ***termos de instabilidade***;
3. Caso o argumento da exponencial seja nulo, a Eq. 3.29 se reduz a um valor constante. Esta solução é chamada de ***solução de regime permanente*** ou ainda de ***estado estável***;
4. Geralmente, os sistemas físicos modelados por EDOs apresentam como solução um termo transiente somado a uma constante. Este tipo de sistema tende, com o passar do tempo, a se estabilizar próximo de uma solução constante e estável.

3.2.2.2 Segundo caso

Neste segundo caso queremos resolver a seguinte EDO

$$y' + my = A \sin(nx) + B \cos(nx) \quad (3.31)$$

Como já explicado na eq. (3.24), sabe-se que a solução geral é a solução da homogênea somada à solução particular.

De acordo com a eq. (3.16), sabemos que a solução para a equação homogênea associada à eq. (3.25) é

$$y_H(x) = Ae^{-mx} \quad (3.32)$$

Logo, resta-nos saber somente qual é a solução particular associada à eq. (3.31).

Para estes casos, iremos supor que a solução esperada para (3.31) seja algo da forma

$$\Phi(x) = P\text{sen}(nx) + Q\text{cos}(nx) \quad (3.33)$$

Substituindo (3.33) em (3.31), colocando os termos em evidência e simplificando, tem-se

$$(P - nQ)\text{sen}(nx) + (Q + nP)\text{cos}(nx) \equiv A\text{sen}(nx) + B\text{cos}(nx) \quad (3.34)$$

Para que se tenha uma identidade, os coeficientes das funções homólogas devem ser iguais. Logo, tem-se o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} P - nQ = A \\ Q + nP = B \end{cases} \quad (3.35)$$

Resolvendo 3.35 para encontrar P e Q , tem-se

$$P = \frac{A + nB}{1 + n^2} \quad (3.36)$$

$$Q = \frac{B - nA}{1 + n^2} \quad (3.37)$$

Como n , A e B são constantes, P e Q também serão. Assim, aplicando as eqs. (3.36), (3.37) e (3.32) em (3.24), tem-se

$$y_{\text{Geral}} = Ae^{-mx} + P\text{sen}(nx) + Q\text{cos}(nx) \quad (3.38)$$

Neste caso, a fim de encontrar os valores de A , P e Q , devemos conhecer o valor da função $y(x)$ em três pontos diferentes.

3.2.2.3 Terceiro caso

Neste terceiro caso queremos resolver a seguinte EDO

$$y' + my = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.39)$$

Como já explicado em (3.24), sabe-se que a solução geral é a solução da homogênea somada à solução particular.

De acordo com a eq. (3.16), sabemos que a solução para a equação homogênea associada à eq. (3.39) é

$$y_H(x) = Ae^{-mx} \quad (3.40)$$

Logo, resta-nos saber somente qual é a solução particular associada a (3.39).

Para estes casos, iremos supor que a solução esperada para esta situação seja dada por

$$\Phi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n \quad (3.41)$$

Assim, a derivada de (3.41) é

$$\Phi'(x) = b_1 + 2b_2x + \dots + nb_nx^{n-1} \quad (3.42)$$

Da substituição de (3.41) e (3.42) em (3.39), tem-se após o agrupamento dos termos

$$(mb_0 + b_1 - a_0) + (mb_1 + 2b_2 - a_1)x + (mb_2 + 3b_3 - a_2)x^2 + \dots + (mb_n - a_n)x^n \equiv 0 \quad (3.43)$$

Para que a identidade (3.43) se preserve, devemos ter que todos os coeficientes sejam nulos. Ou seja

$$(mb_0 + b_1 - a_0) = (mb_1 + 2b_2 - a_1) = \dots = (mb_n - a_n) = 0 \quad (3.44)$$

Colocando (3.44) em forma de sistema, tem-se

$$\begin{bmatrix} m & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

A equação matricial (3.45) admite solução única caso o determinante da matriz quadrada seja diferente de zero. Esta matriz, como todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, possui como determinante o produto de seus elementos de diagonal principal, ver em [1]. Logo, o determinante da matriz é igual a m^{n+1} , e o sistema em questão é possível e determinado, ou seja, os valores de b_i são constantes definidas a partir de a_i . Assim, a solução geral torna-se

$$y_{Geral} = Ae^{-mx} + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \quad (3.46)$$

3.2.3 Encontrando o tempo de morte de um cadáver

Para finalizar este capítulo, iremos mostrar uma aplicação da teoria aqui apresentada, mostrando como profissionais da criminalística podem determinar o horário de morte de um indivíduo através da medida da temperatura de seu cadáver e da temperatura ambiente.

Os dados experimentais aqui utilizados são os coletados por Luís Renato da Silveira Costa em sua dissertação de mestrado, em 1998 [5].

Neste trabalho, Costa trabalhou em um hospital de atendimento de emergência de abril a outubro de 1998, onde sistematicamente analisou 42 mortes em que observou o horário exato do óbito, e realizou medidas de temperatura retal do cadáver a cada hora a fim de verificar a validade da lei do resfriamento. Costa cita ainda que, em geral, a temperatura retal é $1,0^\circ\text{C}$ acima da temperatura medida na pele. Assim, a temperatura retal que se espera de um ser humano saudável é de $37,5^\circ\text{C}$.

Tomaremos aqui, como exemplo, um dos indivíduos estudados, em que a temperatura retal medida às 13h20min era de $36,3^\circ\text{C}$ e a temperatura medida às 14h20min era de $35,4^\circ\text{C}$. Sabendo que a temperatura ambiente era de $26,0^\circ\text{C}$, queremos determinar

a quanto tempo o óbito ocorreu.

Inicialmente, devemos ter um modelo para o resfriamento, que já sabemos que é a eq. (3.1). Inicialmente, devemos colocar tal equação em um dos formatos que desenvolvemos neste capítulo. Assim, tem-se

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_0) \quad (3.47)$$

Que ao ser devidamente manipulada se apresenta da seguinte forma

$$\dot{T} + kT = kT_0 \quad (3.48)$$

Analisando a eq. (3.48), observamos que a mesma é uma EDO de primeira ordem, a coeficientes constantes, compatível com o terceiro caso que apresentamos aqui. Porém, como o nosso polinômio apresenta somente o termo independente, nossa solução geral terá o seguinte formato

$$T(t) = Ae^{-kt} + b_0 \quad (3.49)$$

Agora iremos inserir os dados experimentais em nossa solução. Chamaremos o tempo 13h20min de t_0 . Logo, no tempo t_0 , a temperatura do cadáver era de $36,3^\circ\text{C}$. Logo

$$36,3 = Ae^{-kt_0} + b_0 \quad (3.50)$$

Já às 14h20min, ou seja, em $t_0 + 1$, a temperatura já era de $35,4^\circ\text{C}$. Assim

$$35,4 = Ae^{-k(t_0+1)} + b_0 \quad (3.51)$$

Sabemos ainda que para um tempo excessivamente longo, a temperatura do corpo se igualará à temperatura ambiente, que neste caso é de $26,0^\circ\text{C}$. Interpretando este tempo excessivamente longo como sendo um limite tendendo ao infinito, pode-se escrever

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (Ae^{-kt} + b_0) = b_0 = 26,0 \quad (3.52)$$

Substituindo-se b_0 por $26,0$ em (3.50) e (3.51), tem-se

$$Ae^{-kt_0} = 9,4 \quad (3.53)$$

$$Ae^{-k \cdot (t_0+1)} = 8,1 \quad (3.54)$$

Dividindo-se (3.53) por (3.54), tem-se

$$e^k \approx 1,095745 \quad (3.55)$$

Aplicando-se o logaritmo em (3.55), encontramos

$$k \approx 0,091434 \quad (3.56)$$

Lembrando que t_0 corresponde a 13h20min, e transformando em horas, tem-se

$$t_0 \approx 13,33333 \quad (3.57)$$

Substituindo (3.56) e (3.57) em (3.53), e calculando-se A, tem-se

$$A \approx 34,8573 \quad (3.58)$$

Assim, levando-se (3.52), (3.56) e (3.58) em (refe:dead1), temos a equação do resfriamento do cadáver

$$T(t) \approx 34,8573e^{-0,091434t} + 26 \quad (3.59)$$

Esta função relaciona a temperatura do cadáver a cada instante passado de sua morte. Assim, para sabermos o horário da morte, basta encontrarmos o valor de tempo t_M para o qual a temperatura retal é a de um ser humano vivo, ou seja, $37,5^\circ\text{C}$. Logo

$$T(t_M) = 37,5 \approx 34,8573e^{-0,091434t_M} + 26 \quad (3.60)$$

Resolvendo (3.60) encontramos

$$t_M = 11,613h = 11h37min \quad (3.61)$$

Segue a Figura 3.4 com a curva de resfriamento do cadáver analisado como exemplo prático, dada pela eq. (3.59).

Para este caso em especial, o horário real da morte foi às 11h25min. Este erro de 12 minutos representa um erro de 10,4% no lapso de tempo estimado de 1h55min do horário da morte.

Ressaltamos que, em [5], o autor chegou a um erro muito menor, da ordem de 1,5%, porém foram utilizados 3 pontos de temperatura para encontrar a curva que melhor se ajustava aos dados experimentais.

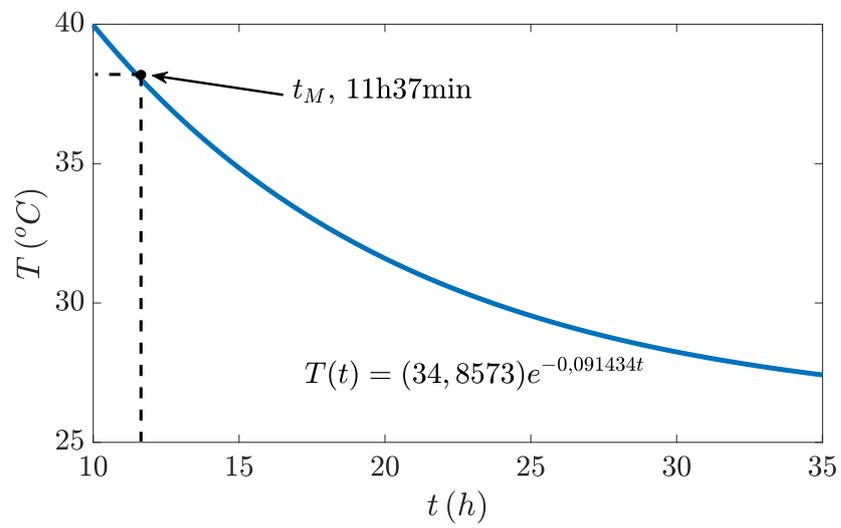


Figura 3.4: Curva de resfriamento do cadáver.

Capítulo 4

EDO de Segunda Ordem

Diferentemente das EDOs de primeira ordem, que admitem uma gama relativamente pequena de soluções, as EDOs de segunda ordem apresentam maior possibilidades de aplicações.

Devido a este fato, iremos promover um maior detalhamento destas EDOs neste capítulo, com um número maior de exemplos resolvidos.

4.1 Sistemas físicos descritos por EDOs de segunda ordem

Diversos sistemas podem ser descritos por EDOs de segunda ordem. Tais sistemas apresentam a característica de que a modelagem necessite não apenas de uma quantidade física $\Phi(x)$ e da derivada dessa quantidade em relação à sua variável dependente, como também seja necessária a presença de sua segunda derivada.

Citaremos alguns exemplos de EDOs de segunda ordem.

4.1.1 Sistema massa-mola-amortecedor

O sistema massa-mola-amortecedor possui estes três entes acoplados como segue na Figura 4.1.

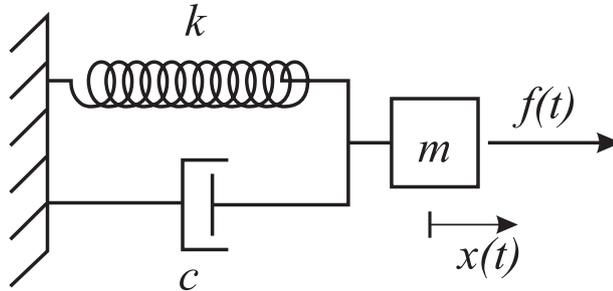


Figura 4.1: Sistema massa-mola-amortecedor.

Analisando tais elementos através da segunda lei de Newton, encontramos que a EDO que descreve tal sistema é a seguinte

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (4.1)$$

Nesta equação, m é a massa do sistema, c é a constante de amortecimento e k é a constante elástica da mola.

Tal EDO permite descrever como a posição do corpo de massa m evolui com o tempo.

Apesar de parecer um sistema extremamente simples, o sistema massa-mola-amortecedor está no cerne de diversas teorias de engenharia e de física moderna. Este sistema é a base para o estudo de vibrações em engenharias e também foi, por exemplo, utilizado por Einstein em seu modelo termodinâmico para sólidos, denominado *sólido de Einstein*.

4.1.2 Circuitos elétricos RLC em série

Circuitos RLC (Resistor-Indutor-Capacitor) são os circuitos mais gerais que são estudados na eletricidade básica. Tais circuitos são representados de acordo com a Figura 4.2.

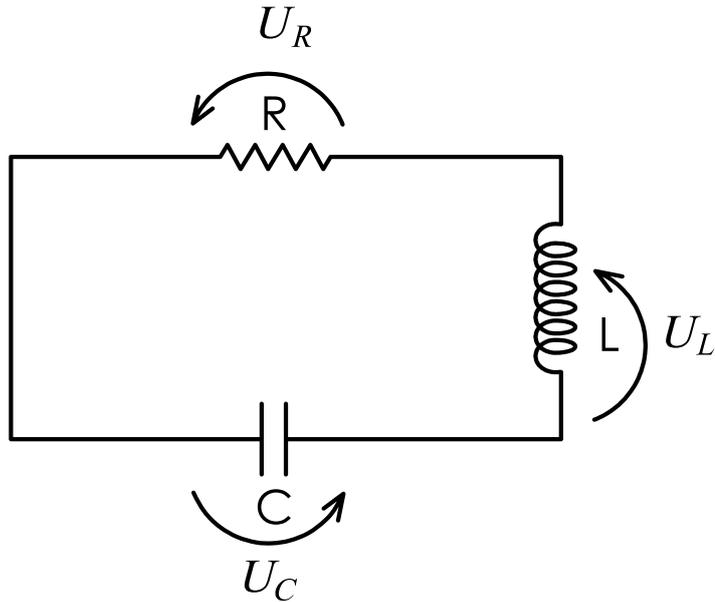


Figura 4.2: Circuito resistor-indutor-capacitor.

Para a modelagem de tal sistema, basta utilizar a lei das malhas de *Kirchhoff*, que diz que a soma das tensões em uma malha qualquer é nula. Assim

$$U_R + U_L + U_C = 0 \quad (4.2)$$

Das definições de tensão nos elementos básicos de eletricidade, tem-se

$$Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau)d\tau = 0 \quad (4.3)$$

Derivando a eq. (4.3) em relação a t e reagrupando os termos, tem-se

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \quad (4.4)$$

Ao analisarmos a eq. (4.4), notamos que a mesma é muito parecida com a equação do sistema massa-mola-amortecedor. Este tipo de análise evoluiu para a ***Teoria da Analogia***, criada por Floyd Alburn Firestone no ano de 1933. Em seu artigo seminal ***A new analogy between mechanical and electrical systems***, publicado na revista ***The Journal of the Acoustic Society of America***, volume IV de 1933 [11], Firestone mostra que sistemas que possuam as mesmas equações descrevendo-os, irão apresentar a mesma resposta. Com isto, foi possível simular, por exemplo, sistemas de suspensão de veículos com simples circuitos elétricos.

4.2 EDOs de segunda ordem lineares a coeficientes constantes

Apresentaremos agora a técnica de solução para as EDOs lineares a coeficientes constantes de segunda ordem.

Assim como foi feito com as equações de primeira ordem, para simplificar o entendimento, iremos apresentar inicialmente a técnica para EDOs homogêneas, e logo após generalizaremos para EDOs não-homogêneas.

4.2.1 EDOs de segunda ordem lineares e homogêneas a coeficientes constantes

Já de início as equações de segunda ordem apresentam mais classes do que as de primeira ordem. Enquanto para as de primeira ordem possuímos apenas um tipo de equação homogênea, para as de segunda ordem serão cinco tipos:

1. $y'' = 0$;
2. $y'' + ky' = 0$;
3. $y'' - m^2y = 0$;
4. $y'' + m^2y = 0$;
5. $y'' + ky' + my = 0$.

As EDOs de segunda ordem lineares e homogêneas de coeficientes constantes do tipo 1 não serão estudadas aqui, pois são passíveis de solução por integração direta.

As EDOs de segunda ordem lineares e homogêneas de coeficientes constantes do tipo 2 não serão estudadas aqui, pois são passíveis de solução através de uma mudança de variável, que a transforma em uma equação de primeira ordem, fazendo $z = y'$ reduzimos a equação a $z' + kz = 0$.

As EDOs de tipos 3 e 4 receberão tratamentos à parte, e as EDOs de tipo 5 serão resolvidas por método semelhante.

4.2.1.1 EDOs de primeira ordem lineares e homogêneas a coeficientes constantes – tipo 3

As equações do tipo 3 são escritas da seguinte forma

$$y'' - m^2y = 0 \quad (4.5)$$

Nesta equação, devemos ter que $y(x)$ é de classe C^2 , ou seja, possui a primeira e a segunda derivadas e estas derivadas são contínuas, e $m \in \mathbb{R}$. Escrevemos

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - m^2y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ m \in \mathbb{R} \\ y(x) \in C^2 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Analisando a eq. (4.5), notamos que buscamos por uma função tal que sua derivada segunda multiplicada por um valor real seja igual ao oposto da própria função. Obviamente, esta função é uma exponencial, e podemos então supor que a solução seja do tipo

$$\Phi(x) = Ae^{\alpha x}, A \neq 0 \quad (4.7)$$

Assim, calculamos as duas primeiras derivadas de $\Phi(x)$

$$\Phi'(x) = \alpha Ae^{\alpha x} \quad (4.8)$$

$$\Phi''(x) = \alpha^2 Ae^{\alpha x} \quad (4.9)$$

Substituindo as eqs. (4.7) e (4.9) na equação original (4.5), e separando-a em fatores, tem-se

$$(\alpha + m)(\alpha - m)Ae^{\alpha x} = 0 \quad (4.10)$$

Na equação (4.10) tem-se o produto de quatro fatores sendo igual a zero. Logo, um dos fatores deve ser igual a zero.

Caso A seja igual a zero, nossa função será constante e igual a zero, portanto, esta solução, chamada de solução trivial, não nos satisfaz.

A função $e^{\alpha x}$ não se anula para nenhum valor de x .

Resta-nos apenas fazer com que o fator $(\alpha + m)$ ou o fator $(\alpha - m)$ sejam nulos, ou seja, devemos ter que

$$\alpha = -m \quad (4.11)$$

$$\alpha = +m \quad (4.12)$$

Logo, a solução geral da EDO de segunda ordem linear e homogênea a coeficientes constantes representada em (4.6) é dada por

$$y(x) = A_1 e^{-mx} + A_2 e^{mx} \quad (4.13)$$

Para conhecer completamente a solução da equação, basta-nos encontrar os valores de A_1 e de A_2 , porém, tais valores só podem ser determinados caso nos sejam dados pelo menos dois valores da função $y(x)$ nos pontos x_0 e x_1 .

Para entendermos melhor o descrito, resolveremos um exemplo.

Exemplo 4.1. *Resolução da EDO $y'' - 4y = 0$, sujeita às condições $y(0) = 1$ e $y(1) = 5$.*

Analisando a EDO proposta, observamos que a mesma é de segunda ordem, homogênea e de coeficientes constantes. Assim, pode-se aplicar o método que vimos neste capítulo.

Supomos que a solução seja da forma

$$y(x) = Ae^{\alpha x} \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) na equação que desejamos resolver, tem-se

$$A\alpha^2 e^{\alpha x} - 4Ae^{\alpha x} = (\alpha^2 - 4)Ae^{\alpha x} = 0 \quad (4.15)$$

Assim, de (4.15), tem-se que

$$\alpha_1 = 2 \quad (4.16)$$

ou,

$$\alpha_2 = -2 \quad (4.17)$$

Logo, a solução que satisfaz a equação dada é

$$y(x) = A_1 e^{-2x} + A_2 e^{2x} \quad (4.18)$$

Porém, queremos ainda que a solução encontrada em (4.18) satisfaça as condições dadas no enunciado de $y(0) = 1$ e $y(1) = 5$. Assim

$$y(0) = A_1 e^{-2 \cdot 0} + A_2 e^{2 \cdot 0} = A_1 + A_2 = 1 \quad (4.19)$$

e,

$$y(1) = A_1 e^{-2} + A_2 e^2 = 5 \quad (4.20)$$

Resolvendo (4.19) e (4.20) vem que

$$A_1 = \frac{-4}{e^2 - e^{-2}} \quad (4.21)$$

e,

$$A_2 = \frac{4 + e^2 - e^{-2}}{e^2 - e^{-2}} \quad (4.22)$$

Assim, a solução da equação $y'' - 4y = 0$, sujeita às condições $y(0) = 1$ e $y(1) = 5$ é

$$y(x) = \frac{-4}{e^2 - e^{-2}} e^{-2x} + \frac{4 + e^2 - e^{-2}}{e^2 - e^{-2}} e^{2x} \quad (4.23)$$

Note que a solução geral apresentada em (4.18) representa na verdade uma família de soluções em função de A_1 e A_2 . Diferentemente das EDOs de primeira ordem, não conseguimos esboçar esta família de curvas, pois agora dependemos de dois parâmetros. Sugere-se, por exemplo, que o professor se valha do software Geogebra para mostrar em sala como tais curvas podem mudar drasticamente conforme se alterem A_1 e A_2 .

Quando introduzimos as condições representadas por $y(0) = 1$ e $y(1) = 5$, garantimos a seleção de somente uma das curvas, que é representada no gráfico da Figura 4.3.

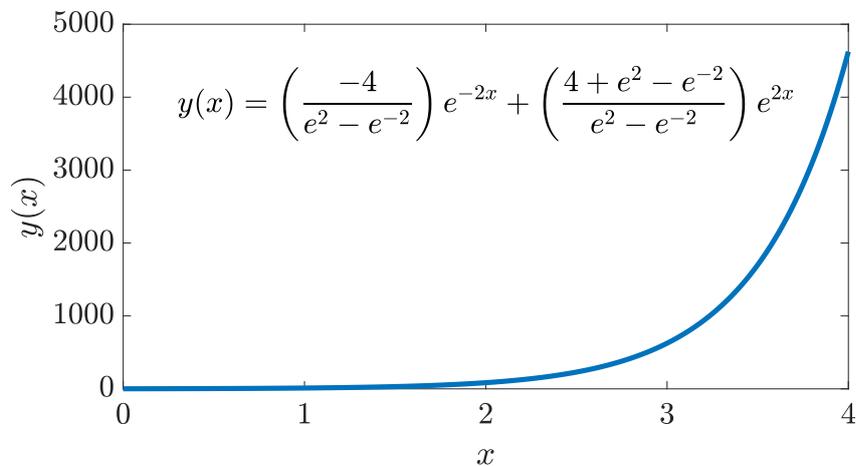


Figura 4.3: Curva representativa da eq. (4.18).

4.2.1.2 EDOs de segunda ordem lineares e homogêneas de coeficientes constantes – tipo 4

As equações do tipo 4 são escritas da seguinte forma

$$y'' + m^2y = 0 \tag{4.24}$$

Nesta equação, devemos ter que $y(x)$ é de classe C^2 , ou seja, possui a primeira e a segunda derivadas e estas derivadas são contínuas, e $m \in \mathbb{R}$. Escrevemos

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + m^2y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ m \in \mathbb{R} \\ y(x) \in C^2 \end{array} \right. \tag{4.25}$$

Analisando a eq. (4.24), notamos que buscamos por uma função tal que sua derivada segunda multiplicada por um valor real seja igual à própria função. Mais uma vez, podemos buscar por uma função exponencial, e podemos então supor que a solução seja do tipo

$$\Phi(x) = Ae^{\alpha x} \quad (4.26)$$

Assim, calculamos as duas primeiras derivadas de $\Phi(x)$

$$\Phi'(x) = \alpha Ae^{\alpha x} \quad (4.27)$$

$$\Phi''(x) = \alpha^2 Ae^{\alpha x} \quad (4.28)$$

Substituindo as eqs. (4.26) e (4.28) na equação original (4.24), e separando-a em fatores, tem-se

$$(\alpha + im)(\alpha - im)Ae^{\alpha x} = 0 \quad (4.29)$$

Na equação (4.29) temos o produto de quatro fatores sendo igual a zero. Logo, um dos fatores deve ser igual a zero.

Caso A seja igual a zero, nossa função será constante e igual a zero, portanto, esta solução, chamada de solução trivial, não nos satisfaz.

A função $e^{\alpha x}$ não se anula para nenhum valor de x .

Resta-nos apenas fazer com que o fator $(\alpha + im)$ ou o fator $(\alpha - im)$ sejam nulos, ou seja, devemos ter que

$$\alpha = -im \quad (4.30)$$

$$\alpha = +im \quad (4.31)$$

Logo, a solução geral da EDO de segunda ordem linear e homogênea a coeficientes constantes representada em (4.24) é dada por

$$y(x) = A_1 e^{-imx} + A_2 e^{imx} \quad (4.32)$$

Introduzindo em (4.32) a relação de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ [10], e simplificando os termos, tem-se

$$y(x) = B_1 \cos(mx) + B_2 \sin(mx) \quad (4.33)$$

Mais uma vez, para conhecermos definitivamente a solução, devemos determinar os valores de B_1 e de B_2 , e para tanto, necessitaremos que sejam dados, no mínimo, dois pontos pelos quais passa a função descrita em (4.33).

Passemos, agora, a um exemplo resolvido.

Exemplo 4.2. Resolução da EDO $y'' + 4y = 0$, sujeita às condições $y(0) = -1$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Analisando a EDO proposta, observamos que a mesma é de segunda ordem, homogênea e de coeficientes constantes. Assim, pode-se aplicar o método que vimos neste capítulo.

Supomos que a solução seja da forma

$$y(x) = Ae^{\alpha x} \quad (4.34)$$

Substituindo (refe:434) na equação que desejamos resolver, tem-se

$$A\alpha^2 e^{\alpha x} + 4Ae^{\alpha x} = (\alpha^2 + 4)Ae^{\alpha x} = 0 \quad (4.35)$$

Assim, de (4.35), tem-se que

$$\alpha_1 = 2i \quad (4.36)$$

ou,

$$\alpha_2 = -2i \quad (4.37)$$

Logo, a solução que satisfaz a equação dada é

$$y(x) = B_1 \text{sen}(2x) + B_2 \cos(2x) \quad (4.38)$$

Porém, queremos ainda que a solução encontrada em (4.38) satisfaça as condições dadas no enunciado de $y(0) = -1$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Assim

$$y(0) = B_1 \text{sen}(0) + B_2 \cos(0) = B_2 = -1 \quad (4.39)$$

e,

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = B_1 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + B_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = B_1 = 2 \quad (4.40)$$

Assim, a solução da equação $y'' + 4y = 0$, sujeita às condições $y(0) = -1$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ é

$$y(x) = -\text{sen}(2x) + 2 \cos(2x) \quad (4.41)$$

Note que a solução geral apresentada em (4.38) representa na verdade uma família de soluções em função de B_1 e B_2 . Diferentemente das EDOs de primeira ordem, ao traçarmos as famílias de curvas, estas tomarão o plano todo, não nos fornecendo informação visual útil. Sugere-se, por exemplo, que o professor se valha do software Geogebra para mostrar em sala como tais curvas podem mudar drasticamente conforme se alterem B_1 e B_2 .

Quando introduzimos as condições representadas por $y(0) = -1$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, garantimos a seleção de somente uma das curvas, que é representada no gráfico na Figura 4.4

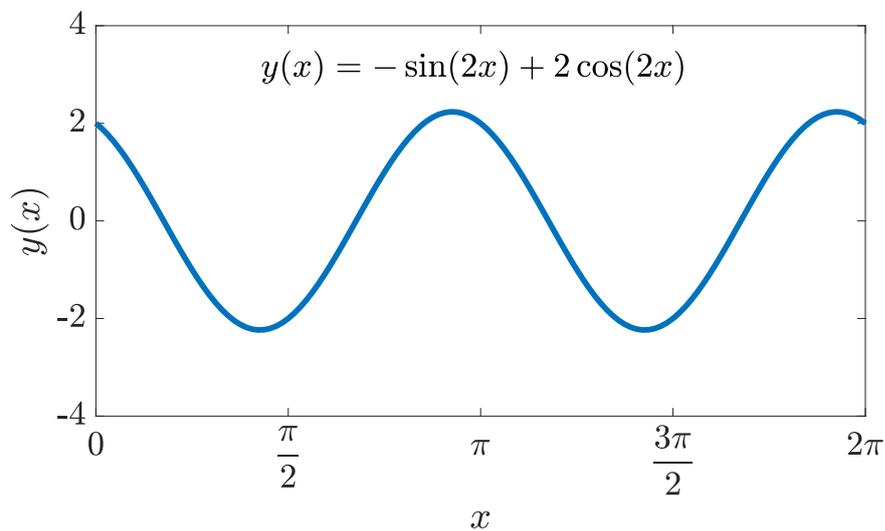


Figura 4.4: Curva representativa da eq. (4.41).

4.2.1.3 EDOs de segunda ordem lineares e homogêneas de coeficientes constantes – tipo 5

As equações do tipo 5 são escritas da seguinte forma

$$y'' + ky' + my = 0 \quad (4.42)$$

Nesta equação, devemos ter que $y(x)$ é de classe C^2 , ou seja, possui a primeira e a segunda derivadas e estas derivadas são contínuas, e $m \in \mathbb{R}$. Escrevemos

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + ky' + my = 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ m, k \in \mathbb{R} \\ y(x) \in C^2 \end{array} \right. \quad (4.43)$$

Analisando a eq. (4.42), notamos que as análises mais simples que realizamos anteriormente não podem ser utilizadas aqui. Porém, como já vimos que as soluções do tipo exponencial são poderosas, iremos usá-las para tentar encontrar a solução para a eq. (4.43). Logo, buscamos uma solução do tipo

$$\Phi(x) = Ae^{\alpha x} \quad (4.44)$$

Assim, calculamos as duas primeiras derivadas de $\Phi(x)$

$$\Phi'(x) = \alpha Ae^{\alpha x} \quad (4.45)$$

$$\Phi''(x) = \alpha^2 Ae^{\alpha x} \quad (4.46)$$

Substituindo as eqs. (4.44), (4.45) e (4.46) na equação original (4.42), e separando-a em fatores, tem-se

$$(\alpha^2 + \alpha k + m) Ae^{\alpha x} = 0 \quad (4.47)$$

Na equação (4.47) temos o produto de quatro fatores sendo igual a zero. Logo, um dos fatores deve ser igual a zero.

Caso A seja igual a zero, nossa função será constante e igual a zero, portanto, esta solução, chamada de solução trivial, não nos satisfaz.

A função $e^{\alpha x}$ não se anula para nenhum valor de x .

Resta-nos apenas fazer com que o fator $(\alpha^2 + \alpha k + m)$ seja nulo, ou seja, devemos ter que

$$\alpha_1 = -k + \frac{\sqrt{k^2 - 4m}}{2} \quad (4.48)$$

ou então

$$\alpha_2 = -k - \frac{\sqrt{k^2 - 4m}}{2} \quad (4.49)$$

Logo, a solução geral da EDO dependerá das eqs. (4.48) e (4.49).

Caso α_1 e α_2 sejam reais e diferentes, a solução da EDO (4.43) será uma soma de exponenciais, da seguinte forma

$$y(x) = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} \quad (4.50)$$

Porém, caso α_1 e α_2 sejam reais e iguais, a solução da EDO (4.43) será uma soma de exponenciais, da seguinte forma

$$y(x) = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 x e^{\alpha_2 x} \quad (4.51)$$

Já no caso de α_1 e α_2 serem complexos, analisando (4.48) e (4.49), vemos que serão complexos conjugados. Logo, α_1 e α_2 serão da forma

$$\alpha_1 = a + bi \quad (4.52)$$

e,

$$\alpha_2 = a - bi \quad (4.53)$$

Logo, a solução será da forma:

$$\begin{aligned} y(x) &= A_1 e^{(a+bi)x} + A_2 e^{(a-bi)x} \\ &= e^{ax} (A_1 e^{bix} + A_2 e^{-bix}) \\ &= e^{ax} [B_1 \text{sen}(bx) + B_2 \text{cos}(bx)] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Note que nas eqs. (4.50), (4.51) e (4.54), devemos determinar o valor de duas constantes. Logo, necessitamos conhecer dois pontos por onde as curvas-soluções ou suas derivadas passam.

Passemos agora aos exemplos resolvidos.

Exemplo 4.3. Resolução da EDO $y'' - 4y' + 3y = 0$, sujeita a $y(0) = 2$ e $y'(0) = 4$.

Analisando a EDO proposta, observamos que a mesma apresenta a forma exposta em (4.43). Assim, pode-se aplicar o método que vimos neste capítulo.

Supomos que a solução seja da forma

$$y(x) = Ae^{\alpha x} \quad (4.55)$$

Substituindo (4.55) na equação que desejamos resolver, tem-se

$$\alpha^2 Ae^{\alpha x} - 4\alpha Ae^{\alpha x} + 3Ae^{\alpha x} = (\alpha^2 - 4\alpha + 3)Ae^{\alpha x} = 0 \quad (4.56)$$

Assim, de 4.56, tem-se que

$$\alpha_1 = 1 \quad (4.57)$$

ou,

$$\alpha_2 = 3 \quad (4.58)$$

Logo, a solução que satisfaz a equação dada é

$$y(x) = A_1 e^x + A_2 e^{3x} \quad (4.59)$$

Porém, queremos ainda que a solução encontrada em (4.59) satisfaça as condições dadas no enunciado de $y(0) = 2$ e $y'(0) = 4$. Assim

$$y(0) = A_1 + A_2 = 2 \quad (4.60)$$

e,

$$y'(0) = A_1 + 3A_2 = 4 \quad (4.61)$$

De (4.60) e (4.61) tem-se que

$$A_1 = A_2 = 1 \quad (4.62)$$

Assim, a solução da equação $y'' - 4y' + 3y = 0$, sujeita às condições $y(0) = 2$ e $y'(0) = 4$ é

$$y(x) = e^x + e^{3x} \quad (4.63)$$

Note que a solução geral apresentada em (4.59) representa na verdade uma família de soluções em função de A_1 e A_2 . Diferentemente das EDOs de primeira ordem, não conseguimos esboçar esta família de curvas, pois agora dependemos de dois parâmetros.

Sugere-se, por exemplo, que o professor se valha do software Geogebra para mostrar em sala como tais curvas podem mudar drasticamente conforme se alterem A_1 e A_2 .

Quando introduzimos as condições representadas por $y(0) = 2$ e $y'(0) = 4$, garantimos a seleção de somente uma das curvas, que é representada no gráfico da Figura 4.5.

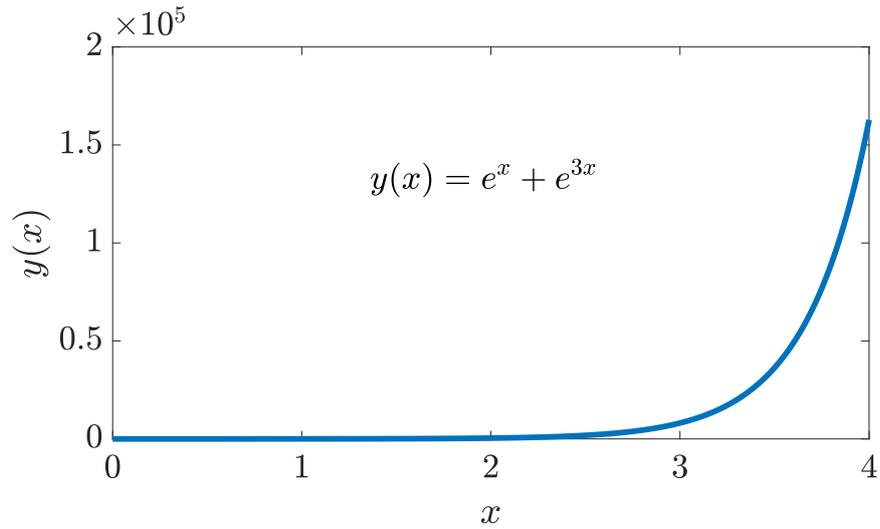


Figura 4.5: Curva representativa da eq. (4.63).

Exemplo 4.4. Resolução da EDO $y'' - 4y' + 4y = 0$, sujeita a $y(0) = 3$ e $y(1) = 4e^2$.

Analisando a EDO proposta, observamos que a mesma apresenta a forma exposta em (4.43). Assim, pode-se aplicar o método que vimos neste capítulo.

Supomos que a solução seja da forma

$$y(x) = Ae^{\alpha x} \quad (4.64)$$

Substituindo (4.64) na equação que desejamos resolver, após simplificações, tem-se

$$(\alpha^2 - 4\alpha + 4)Ae^{\alpha x} = 0 \quad (4.65)$$

Assim, de (4.65), tem-se que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2 \quad (4.66)$$

Logo, a solução que satisfaz a equação dada é

$$y(x) = A_1 e^{2x} + A_2 x e^{2x} \quad (4.67)$$

Porém, queremos ainda que a solução encontrada em (4.67) satisfaça as condições dadas no enunciado de $y(0) = 3$ e $y(1) = 4e^2$. Assim

$$y(0) = A_1 = 3 \quad (4.68)$$

e,

$$y(1) = A_1 e^2 + A_2 e^2 = 4e^2 \quad (4.69)$$

De (4.68) e (4.69) tem-se que

$$A_1 = 3 \quad (4.70)$$

e,

$$A_2 = 1 \quad (4.71)$$

Assim, a solução da equação $y'' - 4y' + 4y = 0$, sujeita às condições $y(0) = 3$ e $y(1) = 4e^2$ é

$$y(x) = 3e^{2x} + xe^{2x} \quad (4.72)$$

Note que a solução geral apresentada em (4.67) representa na verdade uma família de soluções em função de A_1 e A_2 . Diferentemente das EDOs de primeira ordem, não conseguimos esboçar esta família de curvas, pois agora dependemos de dois parâmetros. Sugere-se, por exemplo, que o professor se valha do software Geogebra para mostrar em sala como tais curvas podem mudar drasticamente conforme se alterem A_1 e A_2 .

Quando introduzimos as condições representadas por $y(0) = 3$ e $y(1) = 4e^2$, garantimos a seleção de somente uma das curvas, que é representada no gráfico da Figura 4.6.

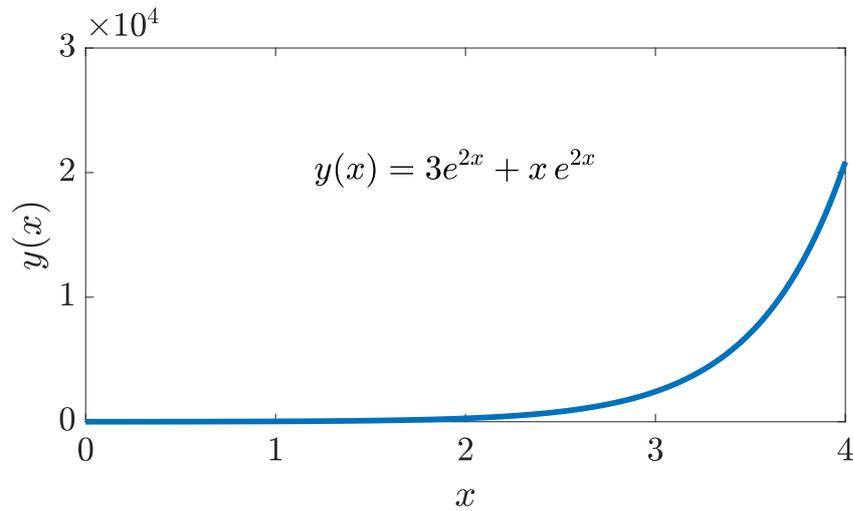


Figura 4.6: Curva representativa da eq. (4.72).

Exemplo 4.5. Resolução da EDO $y'' + 4y' + 5y = 0$, sujeita a $y(0) = 1$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^\pi$.

Analisando a EDO proposta, observamos que a mesma apresenta a forma exposta em (4.43). Assim, pode-se aplicar o método que vimos neste capítulo.

Supomos que a solução seja da forma

$$y(x) = Ae^{\alpha x} \quad (4.73)$$

Substituindo (4.73) na equação que desejamos resolver, após simplificações, tem-se

$$(\alpha^2 + 4\alpha + 5)Ae^{\alpha x} = 0 \quad (4.74)$$

Assim, de (4.74), tem-se que

$$\alpha_1 = a + bi = 2 + i \quad (4.75)$$

e,

$$\alpha_2 = a - bi = 2 - i \quad (4.76)$$

Logo, levando os valores de (4.75) e (4.76) em (4.54), tem-se

$$y(x) = e^{2x} [B_1 \sin(x) + B_2 \cos(x)] \quad (4.77)$$

Porém, queremos ainda que a solução encontrada em (4.77) satisfaça as condições dadas no enunciado de $y(0) = 1$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^\pi$. Assim

$$y(0) = B_2 = 1 \quad (4.78)$$

e,

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^\pi B_1 = 2e^\pi \quad (4.79)$$

De (4.79) tem-se que

$$B_1 = 2 \quad (4.80)$$

Assim, a solução da equação $y'' + 4y' + 5y = 0$, sujeita às condições $y(0) = 1$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^\pi$, é dada por

$$y(x) = e^{2x} [2\text{sen}(x) + \cos(x)] \quad (4.81)$$

Note que a solução geral apresentada em (4.77) representa na verdade uma família de soluções em função de B_1 e B_2 . Diferentemente das EDOs de primeira ordem, não conseguimos esboçar esta família de curvas, pois agora dependemos de dois parâmetros. Sugere-se, por exemplo, que o professor se valha do software Geogebra para mostrar em sala como tais curvas podem mudar drasticamente conforme se alterem B_1 e B_2 .

Quando introduzimos as condições representadas por $y(0) = 1$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^\pi$, garantimos a seleção de somente uma das curvas, que é representada no gráfico da Figura 4.7.

4.2.2 EDOs de segunda ordem lineares e não-homogêneas de coeficientes constantes

As EDOs de segunda ordem lineares e não-homogêneas de coeficientes constantes são as equações que apresentam a seguinte forma geral

$$y'' + ky' + my = f(x) \quad (4.82)$$

Assim como foi visto no Capítulo 3, a solução geral da EDO (4.82) será a soma das soluções da EDO homogênea associada com a solução particular da EDO, ou seja

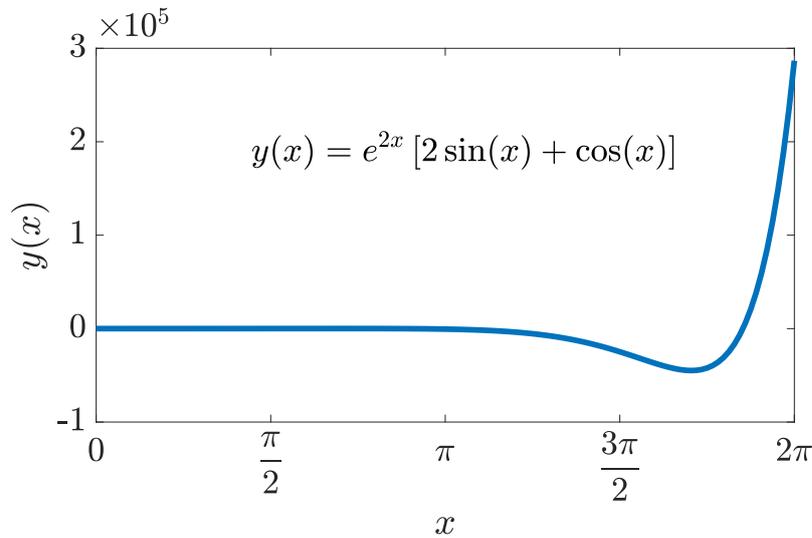


Figura 4.7: Curva representativa da eq. (4.81).

$$\Phi_{Geral} = \Phi_H(x) + \Phi_P(x) \quad (4.83)$$

Ou seja, para resolvermos a equação geral, deveremos resolver a homogênea e também a particular.

A solução da EDO homogênea associada já foi amplamente discutida e exemplificada na seção anterior. Assim, resta-nos entender como encontrar a solução particular.

No Capítulo 3, dividimos as EDOs com relação às suas soluções particulares em três casos, a depender de $f(x)$. Notamos ainda que cada $f(x)$ implicava em um formato diferente de solução particular que buscávamos. Por entender que o aluno já esteja, neste ponto, familiarizado com esta técnica de solução, apresentaremos na Tabela 4.1 seguinte as soluções particulares associadas a cada tipo de função $f(x)$.

Assim, podemos ter em mente que sempre que tivermos uma EDO de segunda ordem, linear, de coeficientes constantes e não-homogênea, e que $f(x)$ seja alguma das existentes na Tabela 4.1, a solução será dada através da eq. (4.83), sendo que $\Phi_H(x)$ é dada na seção anterior, e $\Phi_P(x)$ na Tabela 4.1.

A fim de exemplificar o método descrito, resolveremos um problema como exemplo.

Exemplo 4.6. Resolução da EDO $y'' - 3y' + 2y = 3x - 1$, sujeita a $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$, $y''(0) = 6$ e $y'''(0) = 10$.

Analisando a EDO proposta, observamos que a mesma apresenta a forma exposta

Tabela 4.1: Relação de soluções particulares associadas a cada $f(x)$.

$f(x)$	Φ_P associada
1. Qualquer valor constante	B
2. $\mathbb{P}_n(x)$, um polinômio de grau n em x	$\mathbb{Q}_n(x)$, um polinômio de grau n em x
3. $A_1 \text{sen}(\alpha x) + A_2 \text{cos}(\alpha x)$	$B_1 \text{sen}(\alpha x) + B_2 \text{cos}(\alpha x)$
4. $Ae^{\beta x}$	$Be^{\beta x}$
5. $\mathbb{P}_n(x)e^{\beta x}$	$\mathbb{Q}_n(x)e^{\beta x}$
6. $e^{\beta x} [A_1 \text{sen}(\alpha x) + A_2 \text{cos}(\alpha x)]$	$e^{\beta x} [B_1 \text{sen}(\alpha x) + B_2 \text{cos}(\alpha x)]$
7. $\mathbb{P}_n(x) [A_1 \text{sen}(\alpha x) + A_2 \text{cos}(\alpha x)]$	$\mathbb{Q}_n(x) \text{sen}(\alpha x) + \mathbb{T}_n(x) \text{cos}(\alpha x)$
8. $\mathbb{P}_n(x)e^{\beta x} [A_1 \text{sen}(\alpha x) + A_2 \text{cos}(\alpha x)]$	$e^{\beta x} [\mathbb{Q}_n(x) \text{sen}(\alpha x) + \mathbb{T}_n(x) \text{cos}(\alpha x)]$

na eq. (4.82) e $f(x)$ é um caso particular da segunda linha da Tabela 4.1. Assim, pode-se aplicar o método que vimos neste capítulo.

Encontrando a solução da EDO homogênea associada, conforme descrito na seção 4.2.1.3, tem-se

$$\Phi_H(x) = A_1 e^x + A_2 e^{2x} \quad (4.84)$$

Da Tabela 4.1 tem-se

$$\Phi_P(x) = B_1 x + B_2 \quad (4.85)$$

Assim, substituindo as eqs. (4.84) e (4.85) em (4.83), tem-se que

$$y(x) = A_1 e^x + A_2 e^{2x} + B_1 x + B_2 \quad (4.86)$$

Porém, queremos ainda que a solução encontrada em (4.86) satisfaça as condições dadas no enunciado de $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$, $y''(0) = 6$ e $y'''(0) = 10$. Assim, aplicando-se tais condições, tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + B_2 = 5 \\ A_1 + 2A_2 + B_1 = 7 \\ A_1 + 4A_2 = 6 \\ A_1 + 8A_2 = 10 \end{cases} \quad (4.87)$$

Solucionando (4.87), tem-se

$$\begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = 1 \\ B_1 = 3 \\ B_2 = 2 \end{cases} \quad (4.88)$$

Levando (4.88) a (4.86), tem-se que

$$y(x) = 2e^x + e^{2x} + 3x + 2 \quad (4.89)$$

Quando introduzimos as condições representadas por $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$, $y''(0) = 6$ e $y'''(0) = 10$, garantimos a seleção de somente uma única solução, que é representada no gráfico da Figura 4.8.

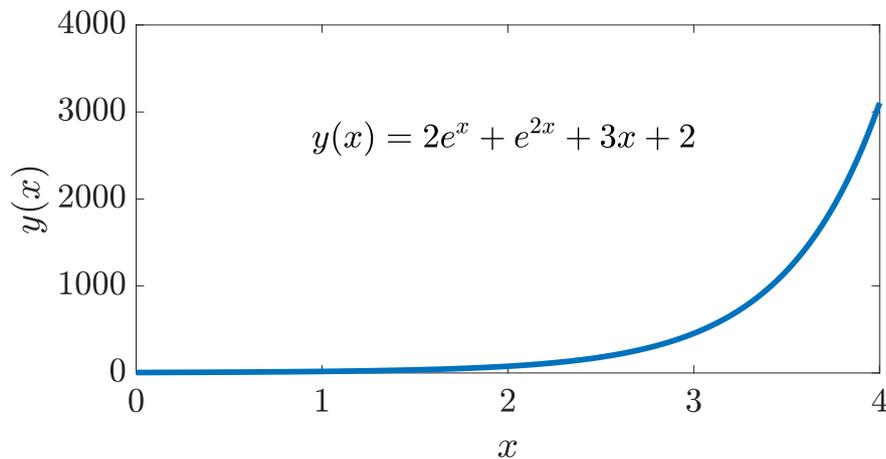


Figura 4.8: Curva representativa da eq. (4.89).

4.3 Modelando um pêndulo simples com resistência do ar

Finalizando o capítulo, mostraremos uma aplicação da teoria estudada, modelando o pêndulo simples com atrito viscoso do ar.

Assim, o sistema a ser modelado é bastante semelhante fisicamente ao pêndulo da Figura 2.1, com a diferença que neste momento não iremos desprezar o atrito da massa pendular com o ar.

Assim, para o sistema aqui proposto, temos a Figura 4.9.

Para modelar este sistema utilizaremos a segunda lei de Newton

$$F_R = m\ddot{x} \tag{4.90}$$

Assim, inserindo-se as forças de restituição e de atrito viscoso, tem-se

$$m\ell\ddot{\theta} + c\ell\dot{\theta} + mg\text{sen}(\theta) = 0 \tag{4.91}$$

Em (4.91), temos que m é o valor da massa suspensa, c é o coeficiente de atrito viscoso e k é o coeficiente elástico da mola. Todos estes valores são reais positivos.

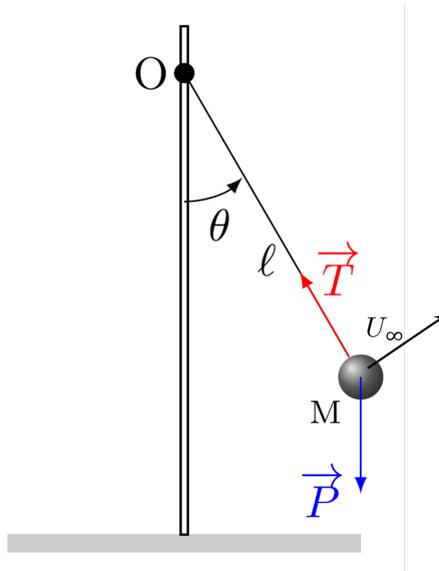


Figura 4.9: O diagrama do pêndulo com resistência do ar.

Dividindo (4.91) por $m\ell$, e fazendo a aproximação para pequenos ângulos, onde $\text{sen}(\theta) \approx \theta$, tem-se

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \quad (4.92)$$

A eq. (4.92) é semelhante à eq. (4.43), logo, tem-se que podemos propor uma solução do tipo exponencial. Assim

$$\theta(t) = Ae^{\alpha t} \quad (4.93)$$

Levando (4.93) em (4.92), tem-se

$$Ae^{\alpha t} \left(\alpha^2 + \frac{c}{m}\alpha + \frac{g}{\ell} \right) = 0 \quad (4.94)$$

Resolvendo (4.94) encontramos três possibilidades:

- 1) Caso o sistema possua duas raízes diferentes complexas conjugadas: o sistema é chamado de sub-amortecido;
- 2) Caso o sistema possua duas raízes reais iguais: o sistema é chamado de criticamente amortecido;
- 3) Caso o sistema possua duas raízes reais distintas: o sistema é chamado de sobre-amortecido.

Assim, temos:

- Para o sistema sub-amortecido

$$\theta(t) = e^{\frac{-c}{2m}t} \left[A_1 \operatorname{sen} \left(t \sqrt{\frac{4g}{\ell} - \frac{c^2}{m^2}} \right) + A_2 \cos \left(t \sqrt{\frac{4g}{\ell} - \frac{c^2}{m^2}} \right) \right] \quad (4.95)$$

um exemplo do qual é dado pela equação (4.96) como

$$\theta(t) = 2 e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen}(3t) \quad (4.96)$$

cujo gráfico característico é o da Figura 4.10.

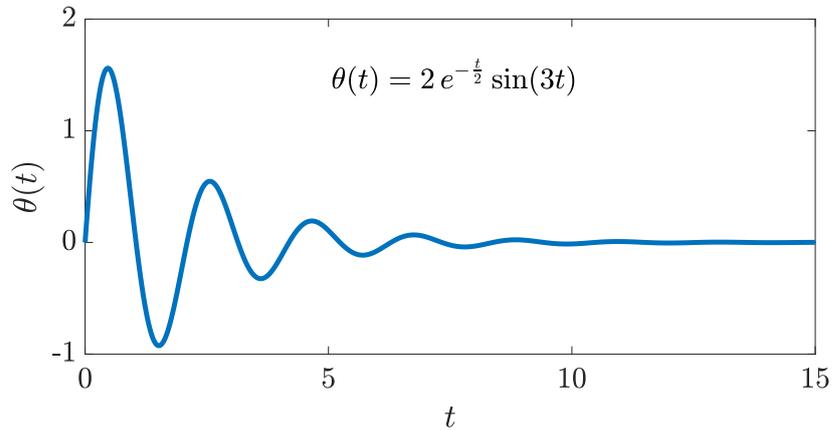


Figura 4.10: Curva representativa da eq. (4.96).

- Para o sistema criticamente amortecido

$$\theta(t) = A_1 e^{-\frac{c}{2m}t} + A_2 t e^{-\frac{c}{2m}t} \quad (4.97)$$

um exemplo do qual é dado pela equação (4.98) como

$$\theta(t) = e^{-t} + 2t e^{-t} \quad (4.98)$$

cujo gráfico característico é o da Figura 4.11.

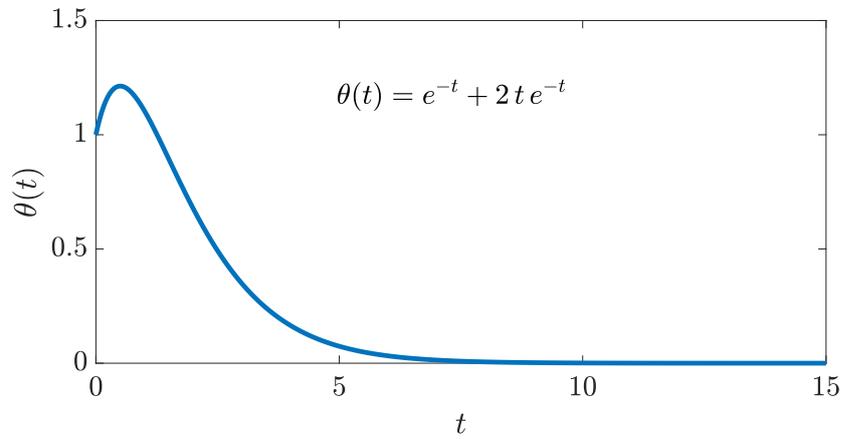


Figura 4.11: Curva representativa da eq. (4.98).

- Finalmente, para o sistema sobre-amortecido

$$\theta(t) = A_1 e^{\left(\frac{-c}{m} + \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{4g}{\ell}}\right)t} + A_2 e^{\left(\frac{-c}{m} - \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{4g}{\ell}}\right)t} \quad (4.99)$$

um exemplo do qual é dado pela equação (4.100) como

$$\theta(t) = 2e^{-3t} + e^{-2t} \quad (4.100)$$

cujos gráficos característicos são os da Figura 4.12.

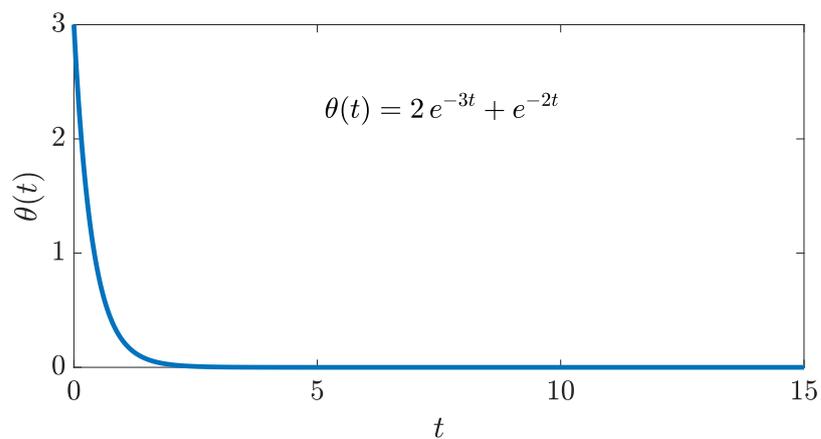


Figura 4.12: Curva representativa da eq. (4.100).

Estes exemplos, apesar de simples na descrição e complexos na escrita, são a base para a modelagem de quase todos os sistemas amortecidos no tempo, sejam eles mecânicos, elétricos ou fluidos. As suspensões de veículos, por exemplo, são modeladas com tais exemplos.

Capítulo 5

EDOs de Ordens Superiores

Nos capítulos anteriores, notamos que as EDOs de primeira e segunda ordem podem ser resolvidas assumindo uma solução do tipo

$$\Phi(x) = Ae^{\alpha x} \quad (5.1)$$

Explicamos detalhadamente como encontrar a solução das equações de primeira e segunda ordens de coeficientes constantes, por serem estas equações as que mais aparecem nas modelagens dos sistemas mais comuns.

Porém, as EDOs lineares de coeficientes constantes podem ser resolvidas com o emprego da solução dada na eq. (5.1) para quaisquer casos. Neste capítulo, mostraremos como aplicar este método para EDO para quaisquer EDOs lineares de coeficientes constantes [16].

5.1 Sistemas físicos descritos por EDOs de ordens superiores

Diversos sistemas são modelados por EDOs lineares de coeficientes constantes e ordem superior a dois [16]. Porém, dada a limitação da resolução de equações algébricas de ordens superiores a dois, os livros tradicionais ou geralmente adotados costumam tratar somente até as EDOs de segunda ordem.

Traremos aqui alguns exemplos de EDOs de ordem superiores a dois.

5.1.1 Flexão de vigas

Como já citado, as vigas, como a exposta na Figura 5.1, têm sua equação de deslocamento dada por

$$y'''' = \frac{w(x)}{EI} \quad (5.2)$$

Nesta equação, E é chamado de *módulo de Young* e I é chamado de *momento de inércia da seção transversal*.

Note que $w(x)$, que representa o carregamento aplicado à viga, pode ser tanto arbitrário quanto se queira, então a equação (5.2) já carrega em si uma complexidade inerente à esta função, além de ser uma equação de quarta ordem.

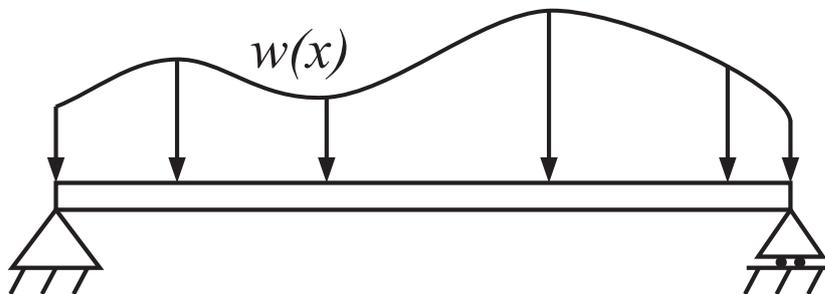


Figura 5.1: Viga sob carregamento genérico.

Através de (5.2), sabendo o material da viga, sua geometria e o carregamento, conseguimos determinar qual a deflexão de cada ponto da viga.

As aplicações práticas são geralmente de estruturas prediais em engenharia civil, e pórticos para levantamento de carga na engenharia mecânica. Porém, um exemplo

prático que pode ser dado em sala é o cálculo de um trampolim de piscina ou ainda o projeto de uma balança de precisão que meça a carga através da relação direta com sua deflexão.

5.1.2 Funcionamento de sistemas biológicos

Geralmente, quando não se possui modelagem consagrada de um sistema complexo, como é por exemplo o corpo humano e sistemas biológicos em geral, propõe-se uma EDO de primeira ordem e, a fim de abarcar os pontos experimentais, vai-se gradualmente aumentando a ordem desta EDO até que os pontos estejam em conformidade com o modelo.

Um exemplo deste tipo de equação é o modelo de mecanismo de homeostase de tireoide hipófise, descrito através de uma EDO de terceira ordem em 1956 por Danziger e Elmergreen [6]. A equação é do tipo

$$\ddot{\theta} + a_1\dot{\theta} + a_2\theta + a_3\theta = a_4 \quad (5.3)$$

Na referência [16], pode-se encontrar diversos sistemas descritos por EDOs de terceira ordem.

5.2 Solução de EDOs lineares de ordem superior a dois de coeficientes constantes

Como entendemos nos capítulos anteriores que a equação (5.1) pode ser utilizada para encontrar soluções de EDO, iremos então apresentar aqui um método geral para soluções de EDOs lineares de coeficientes constantes.

Uma EDO linear de coeficientes constantes e ordem superior a 2 é representada da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \\ a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n. \\ n \geq 3, n \in \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Assim como nos outros capítulos, teremos que a solução de (5.4) será dada por

$$\Phi_{Geral} = \Phi_H(x) + \Phi_P(x) \quad (5.5)$$

A equação homogênea associada a (5.4) é dada por

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad (5.6)$$

A solução da equação homogênea será buscada assumindo-se (5.1) como possível solução. Logo, substituindo-se (5.1) em (5.6) e colocando-se em evidência os termos comuns, tem-se

$$Ae^{\alpha x} (a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0) = 0 \quad (5.7)$$

Em (5.7), chamaremos a equação seguinte de equação característica

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad (5.8)$$

Logo, através do teorema fundamental da álgebra, sabe-se que (5.8) possuirá n raízes, e como os coeficientes a_i foram declarados reais, se um determinado número complexo $a + bi$ for raiz de (5.8), então seu conjugado $a - bi$ também será raiz de (5.8). Logo, denotando por r_i as raízes de (5.8), temos que a solução de (5.6) é dada por

$$\Phi_H = \sum_{i=1}^n A_i e^{r_i x} \quad (5.9)$$

Lembrando que no caso, por exemplo de equação característica de terceiro grau, que corresponde a uma EDO de terceira ordem, temos as seguintes possibilidades:

1. Três raízes reais iguais, então tem-se: $\Phi_H = A_1 e^{\alpha x} + A_2 x e^{\alpha x} + A_3 x^2 e^{\alpha x}$;
2. Três raízes reais, com duas iguais, então tem-se: $\Phi_H = A_1 e^{\alpha x} + A_2 x e^{\alpha x} + A_3 e^{\beta x}$;

3. Três raízes reais distintas, então tem-se: $\Phi_H = A_1e^{\alpha x} + A_2e^{\beta x} + A_3e^{\gamma x}$;
4. Uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas $a \pm bi$, então tem-se: $\Phi_H = A_1e^{\alpha x} + e^{ax} [B_1 \cos(bx) + B_2 \text{sen}(bx)]$.

Já a solução particular, Φ_P , deve ser buscada através da Tabela 4.1 em função de $f(x)$.

Para melhor compreensão do método, apresentaremos alguns exemplos resolvidos, onde tentaremos incluir todas as possibilidades de raízes.

Exemplo 5.1. *Resolução da EDO $y''' - 3y'' - y' + y = 0$, sujeita às condições $y(0) = 5$, $y'(0) = 3$ e $y''(0) = 13$.*

Analisando a EDO proposta, observamos que a mesma é de terceira ordem, homogênea e de coeficientes constantes. Assim, pode-se aplicar o método que vimos neste capítulo.

Supomos que a solução seja da forma

$$y(x) = Ae^{\alpha x} \tag{5.10}$$

Substituindo (5.10) na equação que desejamos resolver, tem-se

$$(\alpha^3 - 3\alpha^2 - \alpha + 1) Ae^{\alpha x} = 0 \tag{5.11}$$

Assim, de (5.11) tem-se que

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases} \tag{5.12}$$

Logo, a solução que satisfaz a equação dada é

$$y(x) = A_1e^{-x} + A_2e^x + A_3e^{3x} \tag{5.13}$$

Porém, queremos ainda que a solução encontrada em (5.13) satisfaça as condições dadas no enunciado de $y(0) = 5$, $y'(0) = 3$ e $y''(0) = 13$. Assim, tem-se a seguinte solução

$$y(x) = 2e^{-x} + 2e^x + e^{3x} \quad (5.14)$$

representada na Figura 5.2.

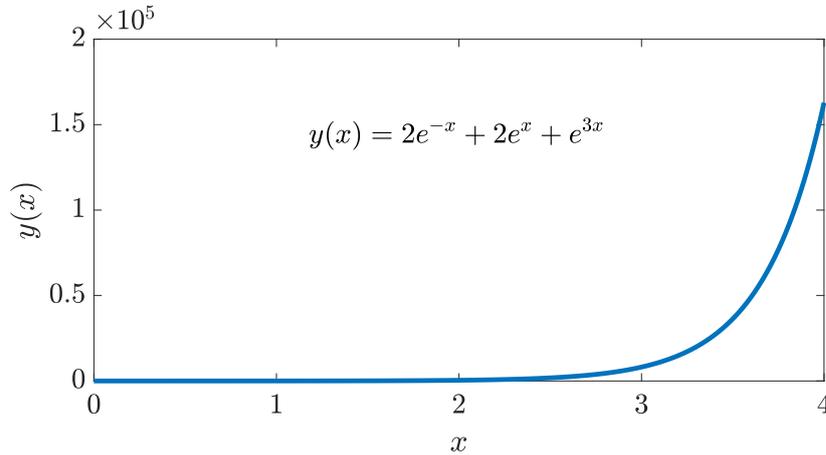


Figura 5.2: Curva representativa da eq. (5.14).

Exemplo 5.2. Resolução da EDO $y''' - 3y'' - y' + y = \text{sen}(x)$, sujeita às condições $y(0) = 5$, $y'(0) = 11$, $y''(0) = 29$, $y'''(0) = 79$ e $y''''(0) = 245$.

Analisando a EDO proposta, observamos que a mesma apresenta a forma exposta na eq. (5.4) e $f(x)$ é um caso particular da terceira linha da Tabela 4.1. Assim, pode-se aplicar o método que vimos neste capítulo.

A solução da EDO homogênea associada à equação que desejamos resolver aqui foi encontrada no Exemplo 5.1, e esta será retomada como

$$\Phi_H(x) = A_1e^{-x} + A_2e^x + A_3e^{3x} \quad (5.15)$$

Da Tabela 4.1, tem-se

$$\Phi_P = B_1\text{sen}(x) + B_2\cos(x) \quad (5.16)$$

Assim, substituindo as eqs. (5.15) e (5.16) em (5.5), tem-se que

$$y(x) = A_1e^{-x} + A_2e^x + A_3e^{3x} + B_1\text{sen}(x) + B_2\cos(x) \quad (5.17)$$

Porém, queremos ainda que a solução encontrada em (5.17) satisfaça as condições dadas no enunciado de $y(0) = 5$, $y'(0) = 11$, $y''(0) = 29$, $y'''(0) = 79$ e $y''''(0) = 245$. Assim, aplicando-se tais condições, tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + B_2 = 5 \\ -A_1 + A_2 + 3A_3 + B_1 = 11 \\ A_1 + A_2 + 9A_3 - B_2 = 29 \\ -A_1 + A_2 + 27A_3 - B_1 = 79 \\ A_1 + A_2 + 91A_3 + B_2 = 245 \end{cases} \quad (5.18)$$

Solucionando (5.18), tem-se

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 1 \\ A_3 = 3 \\ B_1 = 2 \\ B_2 = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

Levando (5.19) a (5.17), tem-se que

$$y(x) = e^{-x} + e^x + 3e^{3x} + 2\text{sen}(x) \quad (5.20)$$

Quando introduzimos as condições representadas por $y(0) = 5$, $y'(0) = 11$, $y''(0) = 29$, $y'''(0) = 79$ e $y''''(0) = 245$, garantimos a seleção de somente uma única solução, que é representada no gráfico da Figura 5.3.

Exemplo 5.3. Resolução da EDO $y''' + y'' - 7y' - 15y = 0$, sujeita às condições $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$ e $y''(0) = 32$.

Supomos que a solução seja da forma

$$y(x) = Ae^{\alpha x} \quad (5.21)$$

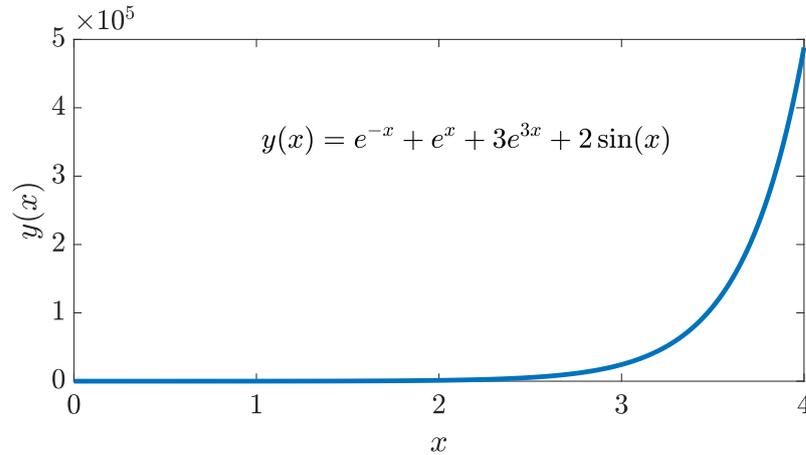


Figura 5.3: Curva representativa da eq. (5.20).

Substituindo (5.21) na equação que desejamos resolver, tem-se

$$(\alpha^3 + \alpha^2 - 7\alpha - 15) Ae^{\alpha x} = 0 \quad (5.22)$$

Assim, de (5.22) tem-se que

$$\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2 + i \\ \alpha_3 = -2 - i \end{cases} \quad (5.23)$$

Logo, a solução que satisfaz a equação dada é

$$y(x) = A_1 e^{3x} + e^{-2x} [B_1 \sin(x) + B_2 \cos(x)] \quad (5.24)$$

Porém, queremos ainda que a solução encontrada em (5.13) satisfaça as condições dadas no enunciado de $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$ e $y''(0) = 32$. Assim, tem-se a seguinte solução

$$y(x) = 4e^{3x} + e^{-2x} [2\sin(x) + \cos(x)] \quad (5.25)$$

representada na Figura 5.4.

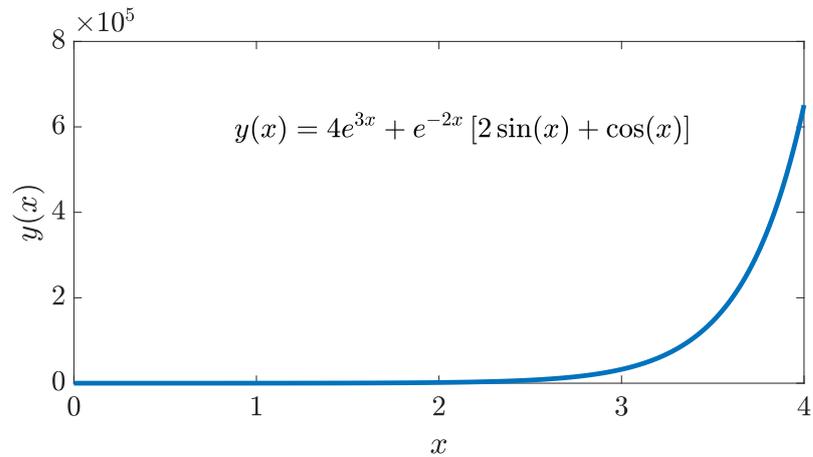


Figura 5.4: Curva representativa da eq. (5.25).

5.3 Determinando a deflexão de vigas

Para os engenheiros mecânicos, a equação de ordem superior mais comum é a equação da deflexão de vigas, muito utilizada em resistência dos materiais.

Suponha uma viga bi-apoiada, de comprimento $L = 1m$ submetida a um carregamento constante $w(x) = 200N/m$, como na Figura 5.5.

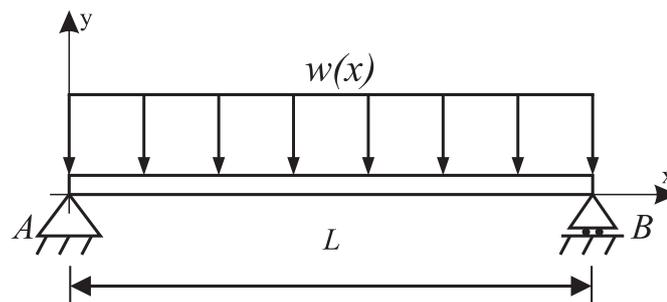


Figura 5.5: Viga sob carregamento constante.

A equação que descreve a deflexão desta viga é chamada de *equação da linha*

elástica, e é dada por [3]

$$y''''(x) = \frac{q(x)}{EI} \quad (5.26)$$

na qual $q(x)$ é o carregamento total sob o qual a viga está submetida. Para determinar $q(x)$, fazemos o diagrama de corpo livre da viga, destacando todos os esforços externos à viga. Assim, o diagrama de corpo livre da viga fica tal como na Figura 5.10.

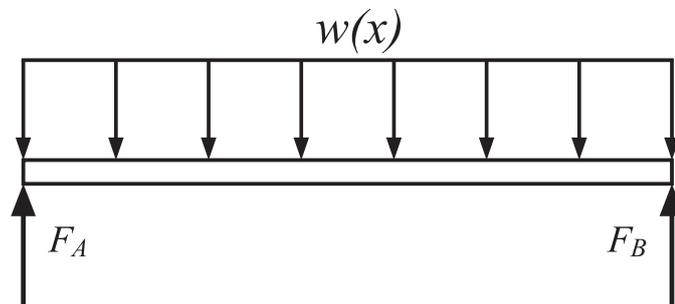


Figura 5.6: Diagrama de corpo livre da viga sob carregamento constante.

No referido diagrama, por simetria, as reações nos pontos A e B valem, respectivamente, $F_A(x) = 100 \delta(x)$ e $F_B(x) = 100 \delta(x - L)$, nas quais $\delta(x - x_0)$ é a **função delta de Dirac** (Eq. 5.27), representada graficamente na Figura 5.7 e que tem a propriedade integral dada na Eq. 5.28.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a) \quad (5.28)$$

Assim, para o intervalo $0 \leq x < L$, escrevemos o carregamento total $q(x)$ como

$$q(x) = F_A(x) - w(x) \quad (5.29)$$

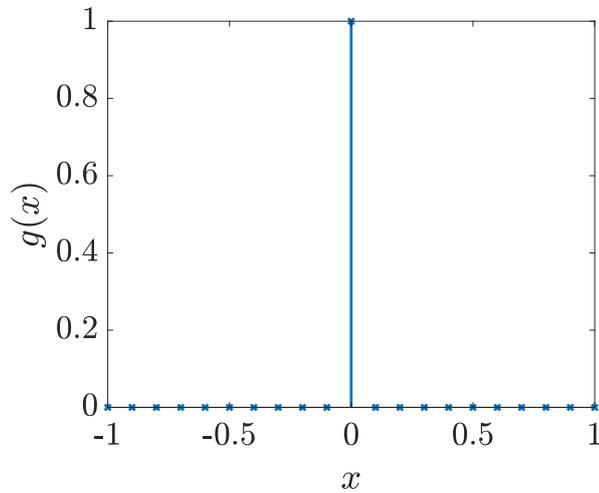


Figura 5.7: Gráfico da função delta de Dirac.

ou,

$$q(x) = 100 \delta(x) - 200 \quad (5.30)$$

Substituindo (5.30) em (5.26) e integrando de 0 a x , tem-se

$$y'''(x) = \frac{V(x)}{EI} \quad (5.31)$$

na qual

$$V(x) = \int_0^x q(x)dx = 100 - 200x \quad (5.32)$$

é a função que descreve o esforço cortante da viga em questão, representado graficamente na Figura 5.8.

Integrando, agora, a equação (5.31) novamente de 0 a x , obtemos

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad (5.33)$$

e recaímos na equação da linha elástica, na qual

$$M(x) = \int_0^x V(x)dx = 100x - 100x^2 \quad (5.34)$$

é a função do momento fletor da viga, a qual é graficamente representada como na Figura 5.9.

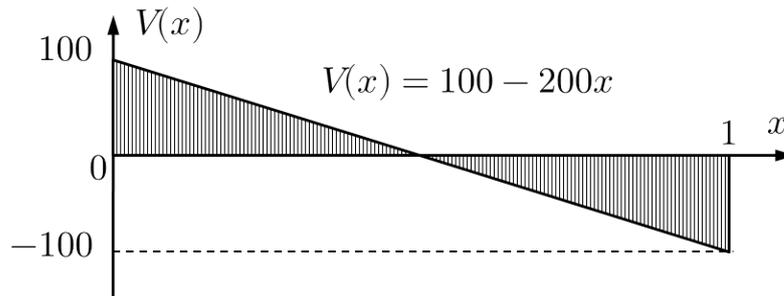


Figura 5.8: Diagrama de esforço cortante da viga em estudo.

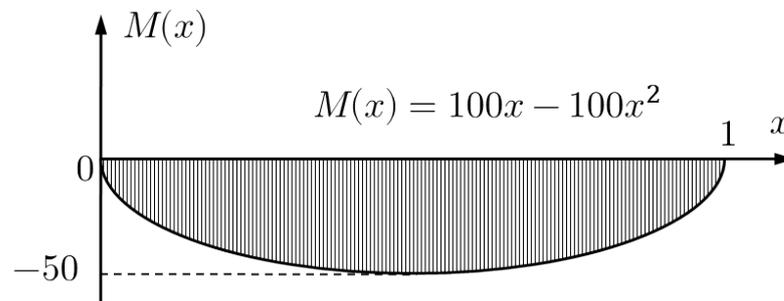


Figura 5.9: Diagrama de momento fletor da viga em estudo.

Integrando (5.33) novamente entre 0 e x , obtemos a equação que descreve o ângulo feito entre a referência horizontal com a viga analisada, dada por

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \int_0^x M(x)dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{-100x^3 + 150x^2}{3} + K \right) \quad (5.35)$$

em que a constante K pode ser determinada aplicando-se a condição de contorno de simetria, $\theta(\frac{L}{2}) = 0$, e vale $K = -\frac{25}{3}$, tal que

$$\theta(x) = \frac{-100x^3 + 150x^2 - 25}{3} \quad (5.36)$$

Por fim, de modo a obter a equação do deslocamento vertical da viga estudada, integramos (5.36) uma última vez, também entre 0 e x , e obtemos

$$y(x) = \frac{-25x^4 + 50x^3 - 25x}{3EI} \quad (5.37)$$

representada graficamente como na Figura 5.10, considerando $E = 210GPa$ e I o momento de inércia de uma seção transversal quadrada de $l = 10mm$ de lado.

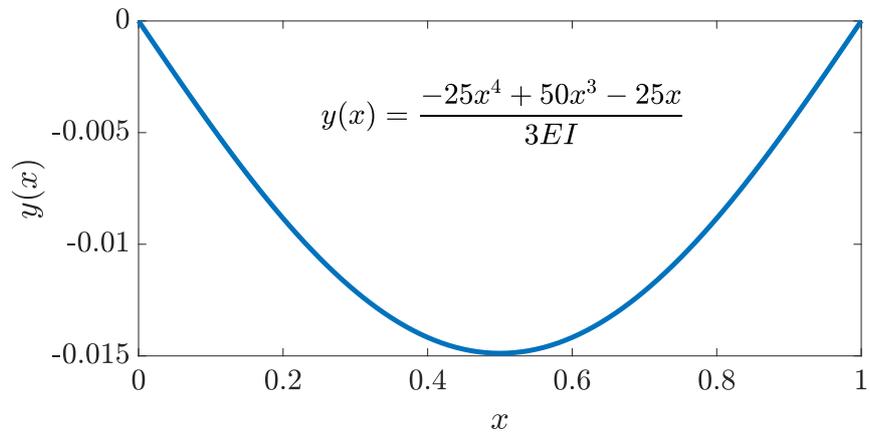


Figura 5.10: Curva representativa da Eq. 5.37.

Capítulo 6

Solucionando o problema do Movimento Harmônico Simples (MHS) para o ensino médio

Em todo este trabalho, discutiu-se como resolver as EDOs, especialmente, como resolvê-las com vistas aos sistemas físicos e de engenharia que tais equações representam.

Neste capítulo, apresentaremos como solucionar o problema do MHS em uma sala de aula do ensino médio. Não se espera que o professor introduza conceitos de cálculo ou EDO para tanto, mas sim, que tenha em mente os conceitos aqui explanados, a fim de que possa dar explicações mais convincentes e também para que possua uma bagagem mais ampla, possibilitando diversas conexões do assunto com fatos do cotidiano.

O problema do MHS não foi escolhido por acaso. Além de ser um sistema simples de se entender o funcionamento físico, está na base das teorias das vibrações mecânicas em helicópteros, por exemplo, ou ainda na solução de circuitos elétricos equivalentes, sendo largamente utilizado para explicar o fenômeno de ressonância.

6.1 Apresentação do problema das oscilações

Idealmente, devemos partir do sistema mais complexo, e depois caminhar para o mais simples. Atualmente, no ensino médio, se faz o oposto, inicia-se com o mais simples e depois parte-se para o mais complexo.

Ao sugerirmos esta inversão, o fazemos por um motivo muito simples: o MHS padrão, explicado nas escolas, não existe no mundo real. Assim, diversos alunos têm dificuldades para entender como algo pode oscilar eternamente. Logo, entendemos que o professor deve iniciar dando exemplos práticos de sistemas que oscilam e são amortecidos até parar.

São bons exemplos para este momento da aula:

1. Um sistema massa-mola com um atrito viscoso (piso com óleo);
2. Uma suspensão veicular;
3. Uma porta de duas folhas, com molas, utilizada em restaurante;
4. Uma árvore que balança com a brisa;
5. Pontes sujeitas a ventos.

Em todos os casos enumerados acima, sugere-se que se mostrem vídeos, por exemplo o vídeo encontrado em: https://youtu.be/0IaKcqRw_Ts. No caso da ponte, existe o clássico filme da ponte de Tacoma, que permite ainda que o professor discorra sobre a elasticidade dos sólidos, pois geralmente entendemos os sólidos como “infinitamente rígidos”, principalmente o concreto.

Após o vídeo, o professor deve explicar que basicamente tem-se, nos casos acima, duas forças agindo sobre a massa em questão: uma força elástica e uma força dissipativa. Em cada um dos casos, o professor deve estar apto a discorrer sobre cada uma delas.

Após explicar os casos um a um, deve-se dizer que todos os exemplos podem ser modelados através da segunda lei de Newton

$$F_R = ma \tag{6.1}$$

Assim, pode-se ainda explicitar que as forças resultantes são as forças dissipativa somada à força elástica. Logo, a equação 6.1 pode ser escrita como

$$F_R = -F_{At} - F_{El} = ma \quad (6.2)$$

Deve-se deixar muito claro que em (6.2) o sinal negativo das forças de atrito (dissipativa) e da força de restituição elástica deve-se ao fato de que ambas são sempre contrárias ao movimento.

Aproveitando a oportunidade, o professor explicará ainda que o atrito viscoso é diferente do atrito de contato devido à rugosidade (atrito coulombiano), e que o atrito viscoso, devido ao movimento de um corpo em um fluido, é proporcional à velocidade deste corpo. Da mesma forma, explicará que a força de restituição elástica é aquela que tenta trazer o corpo de volta à posição de equilíbrio, e é proporcional ao deslocamento.

Um excelente e simples experimento, é o de uma régua posta a oscilar. Ao fazer o experimento, o professor deve explicar quais forças estão envolvidas.

Assim, deve-se escrever

$$ma + F_{At} + F_{El} = 0 \quad (6.3)$$

Levando-se em conta as formulações de atrito viscoso e de força de restituição elástica, escreve-se

$$ma + cv + kx = 0 \quad (6.4)$$

Neste ponto, o professor deve chamar a atenção da sala para as unidades de x , v e a , montando o esquema da Figura 6.1 no quadro:

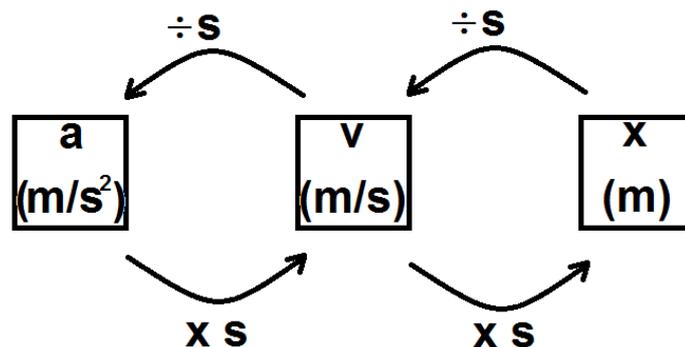


Figura 6.1: Relação entre aceleração, velocidade e deslocamento.

O professor deve explicar que aceleração, velocidade e deslocamento estão intimamente ligados, como já deverá tê-lo feito antes. Assim, explicará que em cursos supe-

riores, será dito e melhor estudado, que a velocidade é a derivada do deslocamento, e a aceleração é a derivada da velocidade (e conseqüentemente, a derivada segunda do deslocamento), e que podemos representar as derivadas temporais através de um ponto colocado sobre a grandeza deslocamento. Logo

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (6.5)$$

Deve ainda dizer que a equação (6.5) é chamada de equação diferencial, e que sua solução não é das mais simples, mas que com o auxílio de um *software*, pode-se encontrar o gráfico do valor da posição, e até mesmo a expressão de como a posição varia com o tempo.

Recomenda-se que o professor, neste momento, tenha modelado o sistema massa-mola-amortecedor no software Geogebra (<https://www.geogebra.org>) ou Matlab (<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>), e que tenha botões deslizantes para que os alunos possam visualizar como o gráfico se altera com a mudança dos valores de m , c e k .

Após mostrar diversos comportamentos diferentes variando os parâmetros, o professor deverá mostrar o que ocorre quando toma $c = 0$, ou seja, quando se remove o atrito viscoso. Neste ponto, deve dizer que este sistema é chamado de sistema massa-mola, pois o amortecedor não exerce nenhum efeito, e que o movimento resultante desta condição é chamado de Movimento Harmônico Simples (MHS), e será melhor explicado matematicamente, por ser de extrema importância para a solução de diversos problemas físicos.

6.2 Solucionando o problema do MHS

A demonstração da parte matemática do movimento será realizada mostrando que a projeção horizontal da posição de um corpo em movimento circular uniforme é um MHS.

Recomenda-se, mais uma vez, o uso de vídeos para que o aluno possa efetivamente ver o movimento circular e uniforme gerando um movimento harmônico simples. Após, deve-se desenhar a clássica figura de demonstração do MHS, mostrada na Figura 6.2:

Da relação trigonométrica no triângulo OPP' , tem-se

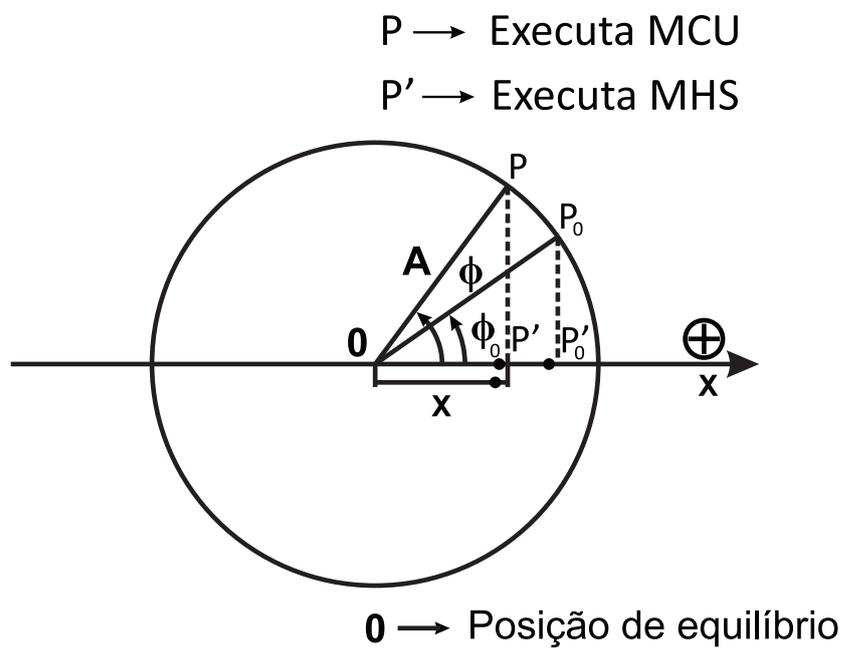


Figura 6.2: Demonstração do MHS.

$$x = A \text{sen}(\phi) \tag{6.6}$$

Como P executa um movimento circular uniforme (MCU), pode-se escrever

$$x = A \text{sen}(\omega t + \phi_0) \tag{6.7}$$

Assim, o professor terá mostrado ao aluno como se deduzir a equação do movimento para o MHS, fazendo-o entender ainda que este sistema está intimamente relacionado a diversos sistemas físicos reais.

Capítulo 7

Considerações Finais

O objetivo principal deste trabalho foi o de apresentar uma forma de se entender as equações diferenciais através de exemplos reais de engenharia, inclusive com dados experimentais quando possível.

Ao invés de focar nossos esforços em demonstrações de convergências, existência, unicidade e outros conceitos matemáticos mais profundos, entendemos a matemática como uma ferramenta, e tentamos colocar a técnica de modelagem à frente do restante, mostrando como solucionar as equações.

Ao desenvolver as EDOs de coeficientes constantes e seus exemplos reais, entendemos que auxiliamos os alunos de engenharias, física e química a prosperar no campo das modelagens, tornando menos árduo o aprendizado das EDOs, e sobrando um pouco mais de tempo para que se dedique à compreensão dos fenômenos que se deseja entender e modelar. Já para os que seguem na carreira do magistério, a compreensão das EDOs faz com que se aumente o conhecimento sobre os sistemas modelados, e que conseqüentemente se aumente a segurança do professor em sala de aula, além de fornecer ao mesmo ferramentas para que possa entender sistemas que anteriormente poderiam se mostrar inacessíveis.

Por fim, acredita-se que tenhamos caminhado no sentido de se remover o estigma de complexidade que paira sobre o assunto tratado nesta dissertação, tornando o estudo de sistemas e sua modelagem mais simples e prazeroso.

Referências Bibliográficas

- [1] ANTON, H., AND RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*, vol. 8. Bookman Porto Alegre, 2001.
- [2] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I., FIGUEREDO, V., AND WETZLER, H. G. *Álgebra linear*. Harper & Row, 1980.
- [3] BORESI, A. P., SCHMIDT, R. J., AND SIDEBOTTOM, O. M. *Advanced mechanics of materials*, vol. 6. Wiley New York et al., 1985.
- [4] BOYCE, W. E., AND DIPRIMA, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Binder Ready Version*. John Wiley & Sons, 2012.
- [5] COSTA, L. R. D. S., ET AL. Estimativa do tempo decorrido de morte através da análise do esfriamento corporal.
- [6] DANZIGER, L., AND ELMERGREEN, G. L. The thyroid-pituitary homeostatic mechanism. *The bulletin of mathematical biophysics* 18, 1 (1956), 1–13.
- [7] DOMINGOS, J. R., AND BORDEIRA, J. A. S. Novas abordagens para o ensino de equações diferenciais em cursos básicos de engenharia. *CEP 25651* (2001), 070.
- [8] DULLIUS, M. M., VEIT, E. A., AND ARAUJO, I. S. Dificuldades dos alunos na aprendizagem de equações diferenciais ordinárias. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia* 6, 2 (2013), 207–228.
- [9] ELLAHI, R., FETECAU, C., AND SHEIKHOESLAMI, M. Recent advances in the application of differential equations in mechanical engineering problems. *Mathematical Problems in Engineering 2018* (2018).

- [10] EULER, L. De quantitibus transcendentibus ex circulo ortis. *Introductio in Analysyn Infinitorum, Capitulum 8* (1748).
- [11] FIRESTONE, F. A. A new analogy between mechanical and electrical systems. *The Journal of the Acoustical Society of America* 4, 3 (1933), 249–267.
- [12] FLEMMING, D. M., LUZ, E. F., AND WAGNER, R. Equações diferenciais na engenharia civil: Uma proposta didática.
- [13] GASPARIN, P. P., WEBER, P. E., HELLMANN, L., SANDMANN, A., DONEL, M., AND DE ALMEIDA, S. V. O impacto do cálculo diferencial e integral nos alunos ingressantes dos cursos de engenharia. *ENGENHARIA: múltiplos saberes e atuações. Juiz de Fora: Cobenge* (2014).
- [14] GOODWINE, B. *Engineering Differential Equations: Theory and Applications*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [15] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo-volume 1. *Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição* (2001).
- [16] PADHI, S., AND PATI, S. *Theory of third-order differential equations*. Springer, 2014.
- [17] PICARD, É. *Traité d’analyse*, t. ii, 3a. ed. *Gauthier-Villars, Paris, Julliet* (1925).
- [18] PINTO, R. L., AND DE LIMA, G. L. Ensino de equações diferenciais ordinárias em cursos de engenharia mecânica. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática. ISSN 2238-8044* 6, 2 (2017).
- [19] RESNICK, R., HALLIDAY, D., AND WALKER, J. Fundamentos de física 3: eletromagnetismo. *LTC–Livros Técnicos e Científicos Editora SA* (1996), 163–164.
- [20] SASSER, J. E. History of ordinary differential equations: The first hundred years. *Proceedings of the Midwest Mathematics History Society* (1992).
- [21] SIMMONS, G. F. *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. CRC Press, 2016.