Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Progressões Aritméticas na linha construtivista

Marcelo de Souza Melo

Goiânia

2018

sibi
sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Marcelo de Souza Melo

Título do trabalho: Progressões Aritméticas na Linha Construtivista

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

MARCELO DE SOUZA MELO
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 31 / 10 / 2018

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Marcelo de Souza Melo

Progessões Aritméticas na Linha Construtivista

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

Goiânia

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Melo, Marcelo de Souza
Progressões Aritméticas na Linha Construtivista [manuscrito] / Marcelo de Souza Melo. - 2018.
V, 54 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. José Mário de Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2018.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui fotografias, gráfico, tabelas, lista de figuras.

1. Construtivismo. 2. progressões aritméticas. 3. situação-problema. 4. alunos. I. Souza, José Mário de , orient. II. Título.

CDU 512.5

Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Marcelo de Souza Melo – Aos dez dias do mês de outubro do ano de dois mil e dezoito, às 9:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Mário José de Souza – Orientador, Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias e a Profª. Drª. Eunice Cândida Pereira Rodrigues, para, sob a presidência da primeiro, e em sessão pública realizada na sala do LEMAT do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada **"Progressões Aritméticas na Linha Construtivista",** em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Marcelo de Souza Melo, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela presidente da banca, Prof. Dr. Mário José de Souza, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Sóstenes Soares Gomes, secretário do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em duas vias de igual teor.

Mário José de Souza

Prof. Dr. Mário José de Souza
Presidente – IME/UFG

Prof. Dr. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Membro – IME/UFG

Profª. Drª. Eunice Cândida Pereira Rodrigues
Membro - UFMT

Marcelo de Souza Melo graduou-se em Matemática pelo UniCEUB (Centro de Ensino Universitário de Brasília), tendo concluído em dezembro de 2001 e é Especialista em Metodologia de Ensino da Matemática, pela AVM Faculdade Integrada. Lecionou em escolas particulares de 2001 a 2010 e é professor da Secretaria de Estado de Eduação do Distrito Federal desde junho de 2005 até a presente data.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha amada esposa Karinne e meu querido filho Guilherme, que sempre me deram força e apoio no decorrer deste Mestrado, a meus pais (ambos já levados deste mundo por Deus, mãe em 2009*, pai em* 2017*), que tanto me incentivaram nos estudos e também me ensinaram valores que carrego comigo por toda a vida.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, ao meu orientador, Professor Doutor Mário José de Souza pelo preciosíssimo auxílio, aos meus professores pela dedicação nas aulas, aos meus colegas de curso pela enorme força e incentivo, à diretora Sonara Liana Martins Oliveira e ao professor Vanderlei Gleimar Gomes de Melo, do Centro Médio 2 de Planaltina, pela oportunidade de aplicação da atividade na escola e à CAPES pelo suporte financeiro, uma vez que fui bolsista durante todo o curso.

Resumo

Este trabalho mostra como o conteúdo Progressões Aritméticas pode ser abordado seguindo a linha construtivista de ensino, fazendo com que os alunos tenham participação mais ativa na construção do seu conhecimento. É verificado que utilizando esse modelo, pode-se melhorar a compreensão dos discentes, introduzindo nas aulas iniciais, uma ou mais situações-problema, com o intuito de levantar conhecimentos prévios para a aquisição posterior do novo saber. Existem algumas argumentações de professores/educadores consagrados sobre esse tema e também a aplicação prática de aulas estruturadas na linha construtivista sobre progressões aritméticas, para alunos do segundo ano do ensino médio de uma escola pública do Distrito Federal. As observações sobre este estilo de aula foram feitas não somente pelo professor que aplicou a atividade proposta em sala aula, mas também pelos discentes que responderam questões que permitiam expressar as impressões sobre a atividade.

Palavras-chave Construtivismo, progressões aritméticas, situação-problema, alunos.

Abstract

This work shows how the content Arithmetic Progressions can be approached following the constructivist line of teaching, making the students have more active participation in the construction of their knowledge. It is verified that using this model, one can improve students' understanding by introducing in the initial classes one or more problem situations in order to raise previous knowledge for the later acquisition of new knowledge. There are some arguments of professors / educators on this subject and also the practical application of classes structured in the constructivist line on arithmetic progressions, for students of the second year of high school in a public school in the Federal District. The observations about this style of class were made not only by the teacher who applied the activity proposed in class, but also by the students who answered questions that allowed to express the impressions about the activity.

Keywords Constructivism, arithmetic progressions, problem situation.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução.

Este trabalho tem o objetivo de verificar a eficiência do aproveitamento da aprendizagem de progressões aritméticas de alunos do ensino médio, quando abordada através da concepção construtivista explorando o conceito de levantamento de conhecimentos prévios tais como leitura/interpretação de texto, operações artiméticas, reconhecimento de padrões matemáticos, resolução de problemas algébricos. Ao se depararem com várias situações-problema, os alunos tendem a utilizar os conhecimentos que carregam consigo para solucioná-las sem ainda terem formalizado o conteúdo sobre progressões aritméticas. Com esse procedimento, tornam-se mais capazes de adquirir o conhecimento formal com o rigor matemático no que diz respeito às progressões aritméticas, como pudemos ver durante a aplicação da atividade descrita no Capítulo 4.

Além disso, quando o conhecimento é construído através de situações problema e discustidas entre os alunos, torna-se mais sólido cognitivamente pois os alunos terão utilizado conhecimentos prévios, ou seja, não iniciarão o estudo de Progressões Aritméticas sem aproveitar o que já sabe sobre o assunto mesmo que ainda de maneira intuitiva. Em muitas aulas correspondentes ao tema na concepção não construtivista, é comum vermos professores apenas como transmissores do conhecimento, o aluno como agente passivo, que apenas recebe esse conhecimento sem questionar ou tentar enfrentar alguma questão do tema (situação problema) a ser estudado. Entendemos que é de grande importância que o aluno se sinta sempre desafiado pois assim o processo de ensino aprendizagem tende a não ser enfadonho e maçante. E o professor, ainda com papel importantíssimo, é responsável por uma aula elaborada e direcionada para a construção do conhecimento do aluno (que passa a ser então o agente ativo) na construção de seu conhecimento tendo participação mais determinante nesse processo.

Há neste trabalho toda a teoria do conteúdo matemático referente às progressões aritméticas e relações com algumas funções, polinômios e somatórios. Esta obra conta com uma criteriosa seleção de exercícios, com suas resoluções e diferenciando-os entre contextualizados e não contextualizados, que podem ser utilizados pelo professor durante as aulas para que seja alcançado um aproveitamento satisfatório da aprendizagem de seus alunos. Juntamente à essas questões, é explicada a importância de trabalhar as habilidades e competências, como norteadores dos objetivos a serem alcançados. Em seguida, tem-se uma análise gráfica das impressões das aulas pela turma através do preenchimento de um questionário respondido por eles. Por fim, as considerações finais que trazem uma reflexão sobre a melhoria no processo de ensino-apredizagem através do levantamento de conhecimentos prévios seguindo a linha contrutivista, da atuação do professor como mediador entre o aluno e o novo saber. Isso sem deixar de lado a formalização teórica que todo e qualquer conteúdo matemático exige sempre.

Capítulo 1

Importância das práticas pedagógicas no ensino das Progressões Aritméticas

1.1 O planejamento do conteúdo Progressões Aritméticas

O professor deve ter um papel de mediador entre o conhecimento prévio do aluno e o conteúdo a ser aprendido. Para isso, é preciso um planejamento completo, minucioso e abrangente do tema abordado. É necessário que o aluno entenda a matemática através de seus teoremas, lemas, hipóteses, deduções, propriedades; explorando esses conceitos para a resolução de questões teóricas, que exigem e estimulem o raciocínio dedutivo que a matemática exige.

> ...A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva.[3]

Dar aos alunos condições para que aprendam a matemática considerada pura ou teórica deve vir acompanhada de problemas desafiadores que envolvam aplicação do que foi estudado ou até mesmo, explorando os próprios conceitos aprendidos dentro do conteúdo estudado.

> Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.[3]

1.2 Escolha coerente dos exercícios aplicados

Alguns exercícios são fundamentais para que o aluno se familiarize com o que está sendo estudado. A resolução de problemas práticos e contextualizados, com certeza, é um dos eixos que norteiam o ensino da matemática. Esses problemas devem ser sugeridos pelo professor para que os alunos tentem resolvê-los, e podem tornar-se verdadeiros propulsores para melhor compreensão do que está sendo estudado. O modo como um conteúdo deve ser abordado para um melhor desenvolvimento das habilidades e competências dos alunos deve ser também uma preocupação importante que o professor precisa ter, assim como a escolha dos conteúdos a serem abordados, devido às aulas de curta duração e em quantidade insuficiente.

> "...No que se segue, partimos do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o pensar matematicamente. Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um fazer matemático por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento." [3]

1.3 Progressões Aritméticas e sua contextualização

Os exercícios contextualizados são aqueles que exigem bem mais que simplesmente memorização e aplicação direta de uma fórmula. Esses exercícios desenvolvem o "pensar matemático"nos alunos, principalmente quando correlacionados com outros conteúdos matemáticos, ou de outras componentes curriculares e até mesmo com situações do cotidiano. Como esse trabalho abordará progressões aritméticas podemos aproveitar novamente em [3] outro trecho que trata de uma correlação importante que será abordada com mais detalhes no Capítulo 2.

> ...As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas (determine a soma...,calcule o quinto termo...). [3]

1.4 Metodologia do Ensino na tendência Construtivista

A metodologia do processo de ensino aprendizagem através da concepção construtivista no estudo das progressões aritméticas será o objeto de estudo desta dissertação. Uma melhor estratégia tanto na construção das aulas quanto na escolha de ações que estimulem os saberes dos discentes são fundamentais para que o professor consiga êxito em suas aulas. O professor, deve ser uma espécie de guia para que o aluno alcance o novo conceito a ser assimilado pelos alunos. E quanto a essa metodologia, encontramos novamente uma importante citação no PCNEM-2015 que nos diz como proceder nesse tipo de construção do conhecimento. Porém, existem professores adeptos a uma concepção não contrutivista.

> Sobre o processo de ensino e aprendizagem, uma primeira corrente, historicamente a mais presente nas nossas salas de aula de Matemática, identifica ensino com transmissão de conhecimento, e aprendizagem com mera recepção de conteúdos. Nessa concepção, a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos, e o ensino baseia-se essencialmente na verbalização do conhecimento por parte do professor.[3]

Essa metodologia não construtivista tem o professor como personagem ativo e central no processo de ensino aprendizagem, exigindo dos alunos conformidade para atuarem no papel de meros espectadores durante as aulas e atentos ao que o professor transmite sendo agentes passivos na aquisição do conhecimento.

> Se por um lado essa concepção teórica apresenta a vantagem de se atingir um grande número de alunos ao mesmo tempo, visto que a atividade estaria a cargo do professor, por outro lado demanda alunos bastante motivados e atentos à palavra do professor, o que não parece ser o caso para grande parte de nossos alunos, que estão imersos em uma sociedade que oferece uma gama de outras motivações.[3]

No modelo tradicional de ensino, o professor é quem desempenha o papel ativo no pocesso e o aluno passa a ser um agente passivo no processo de aprendizagem. O professor explica, no caso da matemática, mostra uma série de exemplos e depois exige que seus discentes façam exercícios similares.

> ...a introdução de um novo conceito dar-se-ia pela sua apresentação direta, seguida de certo número de exemplos, que serviriam como padrão, e aos quais os alunos iriam se referir em momentos posteriores; a cadeia seria fechada com a apresentação de um grande número de exercícios, bastante conhecidos como exercícios de fixação.[3]

Já na linha de construtivista, o aluno desempenha papel central na construção do seu conhecimento, enquanto o professor atua como mediador no processo. Essa linha ainda não é muito utilizada pelos professores, uma vez que, muitos deles não a vivenciaram quando na graduação.

> Uma segunda corrente, ainda pouco explorada em nossos sistemas de ensino, transfere para o aluno, em grande parte, a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, na medida em que o coloca como ator principal desse processo. As idéias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas.[3]

As progessões aritméticas serão abordadas nesse trabalho seguindo a linha construtivista e se apoiando em seus pricipais conceitos relacionados a aprendizagem. Teremos aqui, conforme já mencionado anteriormente, o aluno como principal personagem do processo de aprendizagem, cabendo ao professor ser uma espécie de "guia" que o levará até domínio das habilidades referentes às progressões aritméticas.

> ...a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento.[3]

Nesse processo de ensino aprendizagem, normalmente ocorrem nas aulas diferentes métodos na resolução de problemas por parte dos alunos; e esses métodos devem ser valorizados pelo professor e ao mesmo tempo discutidos ou questionados perante a turma se seria o mais eficiente, rápido ou adequado para a resolução em questão. Essas discussões enriquecem a aula, melhoram a socialização dos alunos ao mostrarem suas ideias em sala, e fortalecem a consolidação do objeto de conhecimento que será devidamente formalizado posteriormente pelo professor.

> ...Nessa situação, o professor deve estar preparado para interessantes surpresas: é a variedade de soluções que podem ser dadas para um mesmo problema, indicando que as formas de pensar dos alunos podem ser bem distintas; a detecção da capacidade criativa de seus alunos, ao ser o professor surpreendido com soluções que nem imaginava, quando pensou no problema proposto; o entusiástico engajamento dos alunos nos trabalhos, produzindo discussões e trocas de ideias que revelam uma intensa atividade intelectual.[3]

1.5 O conhecimento prévio do aluno

Os alunos de maneira geral já possuem saberes e conhecimentos que podem ser explorados naquilo que será aprendido por eles. O conhecimento prévio, juntamente com a mediação do professor são as principais ferramentas utilizadas para que o novo conhecimento seja adquirido. Baseado nessas ideias podemos esquemetizar o aprendizado na concepção construtivista da seguinte maneira:

conhecimento prévio → professor→ conhecimento novo

Essa mobilização de conhecimentos anteriores juntamente com a mediação do professor faz com que o aluno adquira um novo conceito de maneira mais eficiente, uma vez que, o mesmo foi um agente ativo no processo.

> Nessa perspectiva, entendemos que a aprendizagem de um novo conteúdo é, em última instância, produto de uma atividade mental construtivista realizada pelo aluno, atividade mediante a qual constrói e incorpora à sua estrutura mental os siginificados e representações relativos ao novo conteúdo.[1]

Muitas vezes pode não ser fácil atribuir conhecimentos prévios referentes ao que será estudado, porém seria de certa forma incoerente afirmar que o conteúdo a ser estudado fosse algo tão inovador que nada tivesse a ver com algo aprendido anteriormente, afinal, o novo conhecimento tende a ser uma expansão do que já foi aprendido, ou pelo menos, tenha relação com algo já assimilado pelo aluno. Contudo, é comum nos depararmos com conteúdos mais ou menos exigentes relativos aos conhecimentos prévios. Boa parte dessa construção do novo conhecimento está centrada no conhecimento anteriormente visto pelo aluno.

> Se nos colocarmos na perspectiva do aluno, na lógica da concepção construtivista, é possível afirmar que sempre podem existir conhecimentos prévios a respeito do novo conteúdo

> a ser aprendido, pois, de outro modo, não seria possível atribuir um significado inicial ao novo conhecimento, não seria possível a sua "leitura"em uma primeira aproximação. Diante de um novo conteúdo de aprendizagem, os alunos podem apresentar conhecimentos prévios mais ou menos elaborados, mais ou menos coerentes, e, sobretudo, mais ou menos pertinentes, mais ou menos adequados ou inadequados em relação a esse conteúdo.[1]

A competência desenvolvida na aprendizagem de progressões aritméticas pode ser definida como:

Construir noções de variação e comportamento de grandezas e sequências numéricas, em especial, as progressões aritméticas para a compreensão de problemas do cotidiano, bem como o mundo em sua volta.

E entre as habilidades exigidas para o conteúdo de progressões aritméticas, podemos destacar:

1. Resolver situação problema que envolva o termo geral de uma progressão aritmética.
2. Determinar o termo geral associado ao problema.
3. Calcular os elementos desconhecidos no problema proposto.
4. Resolver situação problema que envolva a soma dos termos de uma progressão aritmética.
5. Identificar a situação problema com a soma dos termos de uma progressão aritmética.

Na prática, o que será questionado nessa dissertação é a eficácia de apresentar o conteúdo de progressões aritméticas abordando questões contextualizadas e acessíveis aos alunos, levando-os ao novo conhecimento como alternativa de apresentações do conteúdo apenas mostrando as definições, fórmulas, teoremas, propriedades de maneira direta, deixando o aluno como espectador ou agente passivo no processo de ensino aprendizagem.

Capítulo 2

Progressões Aritméticas

2.1 Introdução à Progressões Aritméticas

O domínio dos alunos quanto à definição formal de progressões aritméticas, a fórmula do termo geral, e a soma dos termos de uma $P.A.$ são essenciais para que o processo de ensino-aprendizagem seja alcançado de forma eficaz e satisfatória. Porém, introduzindo na aula uma ou várias situações problema, é possível observar que os alunos conseguem solucionar tais problemas e também, auxiliados pelo professor, começam a utilizar esses conceitos ainda que de maneira informal. Segue abaixo um exemplo de situação problema para a introdução de Progressões Aritméticas.

Situação-problema:

Uma pessoa deseja trabalhar em uma firma que paga seus funcionários de maneira diferente. O pagamento é realizado de maneira diária e todos os dias são pagos com valores diferentes obedecendo o padrão a seguir:

- 2 reais pelo primeiro dia.
- 5 reais pelo segundo dia.
- 8 reais pelo terceiro dia.

E assim sucessivamente até completarem 22 dias de serviço. No 23º dia de serviço, volta-se à sequência citada acima iniciando da mesma maneira. (Se a pessoa faltar algum dia, a sequência continua com base no mesmo padrão em relação ao dia anterior à falta, ou seja, com a falta não há contagem, mas na volta ao trabalho o valor a ser pago é acrescido em relação ao último dia trabalhado.)

A respeito dessa situação, responda:

a) Quanto essa pessoa recebe pelo sexto dia de trabalho? E pelo décimo dia?

b) Escreva a sequência que representa os valores pagos a ele pelos 10 primeiros dias de trabalho.

c) Quando trabalhar 15 dias, qual será o valor pago a ele nesse dia?

d) Quanto o funcionário receberá por 22 dias trabalhados? (Aproximadamente um mês de serviço levando-se em conta que ele não trabalha sábado e domingo.)

Percebe-se que com essas perguntas já há exigência de alguns conhecimentos relacionados a progressões aritméticas, contudo, alunos do ensino médio são capazes de respondê-las com conhecimentos adquiridos anteriormente, mesmo que possivelmente seja gasto um tempo maior do que se tivessem o conhecimento formalizado de progressões aritméticas. No entanto, a ideia principal é que eles sintam-se desafiados e motivados na resolução da situação problema.

A seguir, faremos uma abordagem sobre progressões aritméticas, abordaremos a definição, classificação, fórmula do termo geral, soma dos n primeiros termos e alguns outros temas que enriquecem mais ainda o contéudo; além disto, relacionaremos progressões aritméticas com funções e polinômios. Através de [6] foi alicerçado a maioria dos tópicos desse Capítulo, principalmente no que diz respeito às relações entre progressões aritméticas com funções e séries polinomiais.

A definição de progressões aritméticas ($P.A.$) em diversos livros são muito semelhantes e atendem perfeitamente a exigência necessária do que vem a ser uma $P.A.$.

Contudo, encontra-se presente em [2], uma definição que além de bastante sucinta, expressa de maneira precisa o que é uma progressão aritmética.

Definição 1. *Progressão aritmética (P.A.), é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo. A esse número fixo, damos o nome de razão da progressão aritmética.*

Podemos verificar por meio dos exemplos abaixo, que algumas sequências são $P.A.$ e outras não.Para verificarmos quais são $P.A.$ precisamos verificar se o número adicionado ao termo anterior para que se obtenha o próximo é sempre o mesmo (razão da $P.A.$).

Exemplo 1.

1. $(15, 19, 23, 27)$ *é uma P.A., pois* $19 - 15 = 23 - 19 = 27 - 23 = 4$

2. $(20, 30, 40, 69, 80)$ *não é uma P.A., pois* $30 - 20 = 40 - 30 \neq 69 - 40 \neq 80 - 69$

3. $(11, 11, 11, 11, ...)$ *é uma P.A., pois* $11 - 11 = 11 - 11 = 11 - 11 = 0$

4. $(28, 10, -8, -26)$ *uma P.A., pois* $10 - 28 = -8 - 10 = -26 - (-8) = -18$

5. $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ *é uma P.A., pois* $2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Ou seja, a razão de uma $P.A.$ é obtida pela diferença de um termo pelo seu antecessor.

Uma $P.A.$ pode conter infinitos termos, dizemos então que ela é infinita. Quando uma $P.A.$ contém um número finito de termos, dizemos que ela é finita.

Podemos representar matematicamente uma P.A. utilizando os símbolos a_1 (significa 1° termo), a_2 (significa 2° termo), a_3 (significa 3° termo), e assim sucessivamente até chegar em a_n (significa n-ésimo termo), caso seja finita. Caso não seja, essa $P.A.$ terá termos que estarão além do enésimo termo e indicamos com reticências, denotando que não existe o último termo.

As notações a seguir indicam os casos mencionados.

$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$, representação de uma $P.A.$ finita.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, a_{n+1}, ...), \text{ representação de uma } P.A. \text{ infinita.}$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1} = r, \; \forall n \in \mathbb{N}^*, n > 1$$

2.2 Classificação das Progressões Aritméticas

A classificação de uma $P.A.$ é dada quando observa-se a sua razão. Nos casos abaixo, definiremos como uma $P.A.$ pode ser classificada: Dada uma $P.A.$ qualquer, adotando sua razão como sendo r, temos que:

- Quando $r > 0$, a $P.A.$ é **crescente**.
- Quando $r < 0$, a $P.A.$ é **decrescente**.
- Quando $r = 0$, a $P.A.$ é **constante ou estacionária**.

Observando o exemplo acima, nota-se que as sequências numéricas $1, 3, 4,$ e 5 acima são $P.A.$ e que as mesmas estão assim classificadas. As preogressões aritméticas 1 e 5 são crecentes, a número 3 é uma progressão aritmética constante e a número 4 é uma $P.A.$ decrescente.

2.3 O termo geral de uma Progressão Aritmética

Através da definição de progressões aritméticas, foi observado que para obter o segundo termo de uma $P.A.$ basta adicionar ao primeiro termo a razão da P.A.. Analogamente para o terceiro termo, adicionamos a razão da $P.A.$ ao segundo termo. Esse processo pode ser repetido sempre que quisermos encontrarmos um determinado termo de uma $P.A.$.

Sendo assim, temos em símbolos:

Considere os n primeiros termos de uma $P.A.$ de razão igual a r:

$$(a_1, a_2, a_3, ..a_n)$$

Expressando cada termo em função do termo anterior e da razão r:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$a_5 = a_4 + r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > 1,$$

onde a_n é o n-ésimo termo da $P.A.$, em função de r.

Logo, o termo geral pode ser obtido pela fórmula $a_n = a_{n-1} + r$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, ou seja, para encontrar um termo qualquer de uma $P.A.$, basta adicionar a razão ao termo anterior.

É bastante comum encontrarmos em livros, ou mesmo professores que denotam a fórmula do termo geral da seguinte forma:

$$a_n = a_1 + (n-1)r\,, \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2.1}$$

Uma das maneiras de encontrarmos essa fórmula é através da generalização abaixo, considerando uma $P.A.(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ e r sendo a razão dessa progressão aritmética.

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot r$$

$$a_4 = a_1 + 3 \cdot r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Onde:

a_n é o n-ésimo termo da $P.A.$.

a_1 é o primeiro termo da $P.A.$.

r é a razão da $P.A.$.

Importante ressaltar que com a fórmula 2.1 , podemos encontrar qualquer termo de uma progressão aritmética, desde que sejam conhecidos o primeiro termo e a razão da $P.A.$. A fórmula é amplamente usada como termo geral:

$$a_n = a_{n-1} + r \text{ ou ainda } r = a_n - a_{n-1}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, n > 1$$

Porém, considerando-se a $P.A.(a_1, a_2, a_3, ..., a_m, ..., a_n, ...)$ de razão r temos através da mesma ideia generalizada acima a seguinte fórmula:

$$a_n = a_m + (n-m) \cdot r,\ m \leqslant n \tag{2.2}$$

Analisando a fórmula 2.2 nota-se que é mais genérica e abragente que 2.1, pois, não apresenta dependência do termo a_n em relação ao primeiro termo da $P.A.$, a_1. Em outras palavras, não é preciso conhecer necessariamente o primeiro termo a_1 de uma progressão aritmética se usarmos a fórmula 2.2 para determinar o n-ésimo termo a_n.

2.4 Soma dos termos de uma Progressão Aritmética

Muitos autores quando tratam da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, introduzem o tema contando uma famosa história a respeito deste tema. Encontra-se abaixo uma versão com adaptações. A história conta que um professor, talvez muito estressado com sua turma, decidiu passar a seus alunos um exercício que exigisse muito para que eles chegassem ao resultado correto. Esse professor pediu que eles calculassem o valor resultante da soma $1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100$. O professor porém, não esperava que um de seus alunos: Carl [1] com apenas 10 anos de idade chegasse tão rapidamente ao resultado: 5050.

Encantado pela velocidade da resposta dada por Gauss, seu professor perguntou-lhe como ele chegara ao resultado e ele respondeu:

-Peguei o primeiro e o último número adicionei-os e vi que o resultado era 101. Depois vi que 101 também era resultado do segundo número com o penúltimo. Mesmo número encontrado para a soma do terceiro com o antepenúltimo. Então notei que poderia formar 50 pares de número cujo resultado era sempre 101. Então restou-me apenas multiplicar $50 \cdot 101$ e o valor encontrado foi 5.050.

Tomando esse raciocínio como base, podemos sempre encontrar a soma dos n termos consecutivos de uma $P.A.$.

Teorema 1. *A soma S_n dos n primeiros termos da $P.A.$ $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é dada por:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \tag{2.3}$$

Onde: a_n, a_1 e n são respectivamente, o n-ésimo termo, o primeiro termo e o número de termos da $P.A.$

Demonstração. Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, a soma do n primeiros termos de uma $P.A.$ com razão r. Escrevendo-se S_n porém dessa vez na ordem decrescente dos índices dos termos, obtém-se $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$ ainda com mesmo resultado para a soma pela propriedade comutativa da adição.

Desse modo, adicionando membro a membro as equações acima tem-se:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

[1] Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855 foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica. Alguns se referem a ele "o príncipe da matemática".

Mas como ter certeza que os valores das somas são iguais? A expressão (a_1+a_n) tem o mesmo valor que as demais expressões (a_2+a_{n-1}),(a_3+a_{n-2}),$\cdots$,$(a_{n-2}+a_3)$,$(a_{n-1}+a_2$,(a_n+a_1) pois à medida que uma das parcela dentro dos parênteses aumenta de r(razão da $P.A.$), a outra diminui na mesma quantidade em relação à soma das parcelas (a_1+a_n). Daí vem que:

$$2S_n = (a_1+a_n)\cdot n \Rightarrow \ S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot \ n}{2}$$

$\square$

2.5 Relações entre progressões aritméticas e funções polinomiais

Em uma $P.A.$ temos a fórmula $a_n = a_1+(n-1)r$ sendo dada por um polinômio em n. Se $r \neq 0$, ou seja uma $P.A.$ não constante ou estacionária o polinômio é de grau 1. Caso $r = 0$, esse é de grau menor que 1. Portanto, quando temos uma $P.A.$ crescente ou decrescente dizemos que ela é uma progressão aritmética de primeira ordem.

Reciprocamente, se em uma sequência o termo de ordem n for dado por um polinômio em n de grau menor ou igual a 1, ela será uma progressão aritmética. Com efeito, se $x_n = an+b$, x_n é uma $P.A.$ onde $a = r$ e $b = a_1 - r$, ou seja, $r = a$ e $a_1 = a+b$.

Podemos denotar a fórmula $a_n = a_1+(n-1)r$ como sendo o mesmo que $a_n = a_0+nr$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos números naturais da função afim $a_{(x)} = a_{(0)}+rx$. Portanto, uma progressão aritmética pode ser pensada como uma função que associa cada número n a um valor a_n e com isso, pode-se esboçar um gráfico formado pela sequência de pontos colineares no plano cartesiano. Concluindo, (a_n) é uma $P.A.$ se, e somente se, os pontos no plano que têm coordenadas $(1,a_1)$, $(2,a_2)$, $(3,a_3)$,..., (n,a_n) estão em linha reta conforme Figura 2.1.

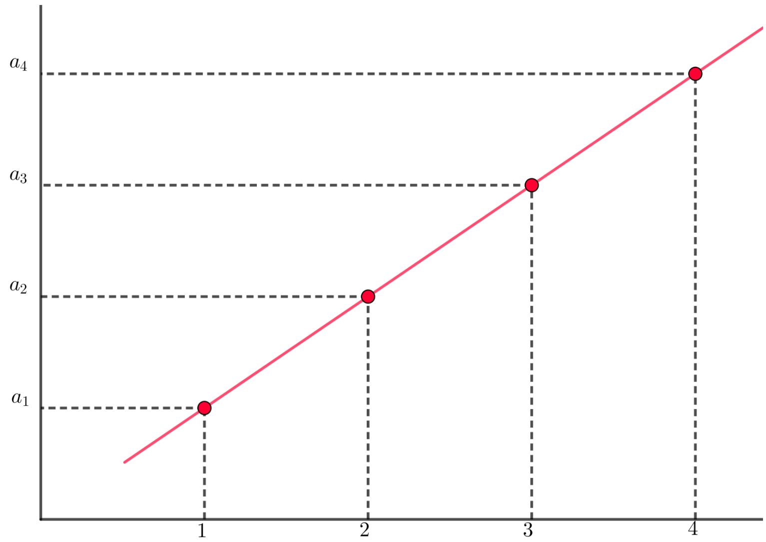


Figura 2.1: Reta contendo termos de a_n.

Já em relação a fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma $P.A.$, o polinômio relacionado a essa fórmula é um polinômio de grau dois em n. Observe abaixo como fica essa relação entre eles:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{([a_1 + a_1 + (n-1)]r) \cdot n}{2} = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) n$$

Caso tenhamos $r \neq 0$ segue-se que S_n é um polinômio do segundo grau em n, com termo independente igual a zero.

Reciprocamente, todo polinômio do segundo grau em n que tenha termo independente igual a zero, é o valor da soma dos n primeiros termos de alguma progressão aritmética. Com efeito $P(n) = an^2 + bn$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética na qual $\frac{r}{2} = a$ e $a_1 - \frac{r}{2} = b$, ou seja, $r = 2a$ e $a_1 = a + b$.

2.6 Progressões Aritméticas de ordem superior

No ensino médio, quando o tema progressões aritméticas é abordado, encontramos em vários livros e nas aulas de alguns professores a ideia intuitiva do conceito de $P.A.$ de segunda ordem. Na grande maioria das vezes, é mencionado que $P.A.$ de segunda ordem é obtida através das diferenças $(a_2 - a_1) = b_1, (a_3 - a_2) = b_2, (a_4 - a_3) = b_3, \cdots, (a_{n+1} - a_n)$, com $n \in \mathbb{N}$ e que geram $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ onde a_n é uma sequência qualquer e que dá origem a sequência b_n, que é uma progressão aritmética. Abaixo, encontramos uma ideia mais formal tanto a respeito de *P.A.* de segunda ordem e também, de ordem superior. Segue a definição e teoremas com suas respectivas demonstrações obtidos através de [6].

Definição 2. *Define-se para sequências o operador diferença* Δ *, por* $\Delta = a_{n+1} - a_n$.

Portanto, da definição segue imediantamente que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante.

A seguir o *Teorema Fundamental da Somação*, que é o análogo discreto do *Teorema Fundamental do Cálculo*, é estabelecido.

Teorema 2. *Mostre que*

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1 \tag{2.4}$$

Demonstração.

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k$$

$$= \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \cdots + \Delta a_{n-1} + \Delta a_n =$$

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

□

De forma análoga ao *Teorema Fundamental do Cálculo*[2], que estabelece que o cálculo de uma integral definida $I = \int_a^b f(x)dx$ pode ser feito obtendo a função F cuja derivada seja f e calculando a diferença *F(b)-F(a)*, *Teorama Fundamental da Somação* torna imediato o cálculo da soma dos termos de uma sequência, desde que se identifique esta sequência como sendo obtida pela aplicação do operador a uma outra sequência.

[2]a respeito desse teorema, recomenda-se para maior detalhamento a leitura em [5], página 344.

Definição 3. *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência* (a_n) *na qual as diferenças* $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$*, entre cada termo e seu antecessor, formam um progressão aritmética não-estacionária.*

De modo mais geral, uma progressão aritmética de ordem $k(k > 2)$ *é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem* $k - 1$*.*

Exemplo 2. *A sequência* $(a_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...)$ *é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a sequência das diferenças entre cada termo e o anterior,* $(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (2, 3, 4, 5, 6...)$ *é uma progressão aritmética não-estacionária.*

Exemplo 3. *Use o teorema fundamental da somação para calcular*

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k$$

.

Resolução:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 3^k(3-1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^{k+1} - 3^k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Delta(3^k),$$

Daí teremos então:

$$\frac{1}{2}[(3^2 - 3^1) + (3^3 - 3^2) + (3^4 - 3^3) + \cdots + (3^{n+1} - 3^n)]$$

.

Simplificando, obtemos: $\frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$*, ou ainda,* $\frac{3}{2}(3^n - 1)$*.*

Teorema 3. *A sequência cujo termo de ordem* n *é a soma de* $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *dos* n *primeiros termos de uma progressão aritmética de ordem* p *é uma progressão aritmética de ordem* $p + 1$*.*

Demonstração. Basta observar que o operador diferença, aplicado a S_n, fornece $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ e define, portanto, uma progressão aritmética de ordem p. $\square$

O teorema a seguir estabelece uma relação fundamental entre progressões aritméticas de ordem p, onde p é um número natural, e polinômios de grau p.

Teorema 4. *Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau p, é uma progressão aritmética de ordem p e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p, então a_n é um polinômio de grau p em n.*

Antes da demonstração geral do Teorema 4, observaremos a validade para progressões aritméticas de segunda ordem (isto é, para $p = 2$) e também, um exemplo de sua aplicação.

Demonstração. Para progessões de segunda ordem

Se $a_n = an^2 + bn + c$, com $a \neq 0$, temos

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c) = 2an + (a+b)$, que é do primeiro grau em n. Pelo que comentamos no Teorema 4, (Δa_n) é uma progressão aritmética não estacionária.

Por outro lado, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética com razão diferente de zero e

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1} =$$
$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1,$$

é um polinômio do segundo grau em n.

Em consequência, a_n também é um polinômio do segundo grau em n. $\square$

Exemplo 4. *Obter uma expressão para a soma:*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)$$

Solução:

Pelo Teorema 4, a sequência definida por $a_n = n(n+2)$, é uma progressão aritmética de ordem 2, já que seu termo geral é um polinômio de grau 2. Logo, a soma S_n de seus n primeiros termos define uma progressão aritmética de ordem $2 + 1 = 3$.

Portanto, usando a recíproca no Teorema 4, temos o termo geral de S_n é dado por um polinômio de grau 3 em n. Isto é, podemos escrever $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Atribuindo a n os valores 1, 2, 3 e 4 obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ 8a + 4b + 2c + d = 11 \\ 27a + 9b + 3c + d = 26 \\ 64a + 16b + 4c + d = 50 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = \dfrac{7}{6}$ e $d = 0$. Então,

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{6}n = \frac{2n^3 + 9n^2 + 7n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

Demonstração. (Recíproca do Teorema 4.)

Vamos proceder por indução sobre p.

Para $p = 1$, o teorema decorre da expressão do termo geral de uma progressão aritmética não estacionária.

Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para todo $p \in 1, 2, \cdots, s$. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira para $p = s + 1$.

Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s+1$,$b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética de ordem s e, pela hipótese de indução, b_n é um polinômio de grau s em n. Então

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1$$

é, pelo corolário 1 do teorema anterior, um polinômio de grau $s+1$ em n. Se (a_n) é um polinômio de grau $s+1$ em n, (Δa_n) é um polinômio de grau s em n, após alguns cálculos. Pela hipótese de indução, (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem s, ou seja, (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s+1$. $\square$

2.7 Somas polinomiais

Para a demonstração do caso geral do Teorema 4 que relaciona polinômios e preogressões aritméticas de ordem superior, vejamos primeiramente somas do tipo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

E, de modo mais geral, do tipo:

$$\sum_{k=1}^{n} P(k),$$

onde $P(k)$ é um polinômio em k.

Exemplo 5. *A soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros e positivos é:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

E pode ser calculada do modo a seguir:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Os dois primeiros somatórios tem várias parcelas comuns, pois:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 \cdots + n^3$$

Simplifcando as parcelas comuns aos dois membros, obtemos:

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Como

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

temos então que

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Observe que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$ *é um polinômio do terceiro grau em* n*.*

De modo geral:

Teorema 5. $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ *é um polinômio de grau* $p+1$ *em* n*.*

Demonstração. Vamos proceder por indução[3] sobre p. Para $p = 1$, o teorema já foi provado anteriormente na Seção 2.5.
Suponhamos agora que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ seja um polinômio de grau $p+1$ em n, $\forall p \in 1, ..., s$.

Mostraremos que essa afirmação é verdadeira $p = s+1$, isto é, mostraremos que $\sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$ é um polinômio de grau $s+2$ em n. Observe que

$$(k+1)^{s+2} = k^{s+2} + (s+2)k^{s+1} + \cdots ,$$

onde os termos que não foram escritos explicitamente formam um polinômio de grau s em k. Temos então,

[3]método da indução tem como ótima abordagem o livro Método de Inducción Matemática. Tradução de Carlos Vega. Moscou: Editorial MIR, 1976.

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{s+2}=\sum_{k=1}^{n}k^{s+2}+(s+2)\sum_{k=1}^{n}k^{s+1}+\sum_{k=1}^{n}F(n),$$

onde $F(n)$ é um polinômio de grau $s+1$ em n, pela hipótese de indução. Simplificando os termos comuns aos dois primeiros somatórios obtemos:

$$(n+1)^{s+2}=1+(s+2)\sum_{k=1}^{n}k^{s+1}+F(n)$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n}k^{s+1}=\frac{(n+1)^{s+2}-1-F(n)}{s+2}$$

que é um polinômio de $s+2$ em n. □

Corolário 1. *Se F é um polinômio de grau p então*

$$\sum_{k=1}^{n}F(k),$$

é um polinômio de grau $p+1$ em n.

Capítulo 3

Sugestões de exercícios de Progressões Aritméticas

3.1 Importância na escolha dos exercícios

Obviamente que exercícios não contextualizados são importantes para uma melhor familiarização dos conceitos e operações envolvidas, fortalecendo toda a teoria já vista sobre progressões aritméticas. Contudo, como este trabalho se refere ao ensino na ótica construtivista faz-se necessária a abordagem de questões contextualizadas. Neste Capítulo, serão mostrados exercícios teóricos sobre $P.A.$; e também questões contextualizadas. No caso das progressões aritméticas, como em qualquer outro conteúdo em matemática, deve-se saber o que os alunos devem aprender. E entre os mais importantes tópicos das habilidades que voltamos a destacar:

1. Resolver situação problema que envolva o termo geral de uma progressão aritmética.
2. Determinar o termo geral associado ao problema.
3. Calcular os elementos desconhecidos no problema proposto.
4. Resolver situação problema que envolva a soma dos termos de uma progressão

aritmética.

5. Identificar a situação problema com a soma dos termos de uma progressão aritmética.

Os exercícios teóricos (também conhecidos como exercícios de fixação) aprimoram as habilidades exigidas em progressões aritméticas. Em exercícios desse tipo os alunos podem trabalhar o raciocínio lógico-dedutivo presente nas fórmulas, tanto do termo geral, quanto na soma dos n termos de uma $P.A.$.

> ...não significa que os exercícios do tipo "calcule...", "resolva..." devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho.[1]

Na hora da escolha dos exercícios, é preciso ter critério na seleção dos mesmos pois o tempo sempre é muito curto, a quantidade de aulas não é suficiente. Então cabe ao professor, eleger as questões mais essenciais que possam dar êxito ao aprendizado dos alunos.

> Não se trata de separar o ensino de conteúdos específicos das competências, pelo contrário, essas são duas dimensões da aprendizagem que devem ocorrer conjuntamente. Nessa perspectiva, não só a seleção de temas e conteúdos, como a forma de tratá-los no ensino são decisivas.[1]

O tipo de questão a ser trabalhada junto aos alunos (contextualizada ou não) nem sempre é um consenso entre os professores de matemática. Contudo, o que vemos na prática é a importância dos dois tipos de questões. Existem professores adeptos da linha construtivista que decidem abordar conteúdos e questões que envolvam somente o cotidiano ou que possa ser contextualizada, o que acaba de certa forma deixando o saber matemático deficitário. Os dois estilos de questões, são complementares entre si, e desenvolvem as habilidades, quanto às competências daquilo que está sendo estudado.

> ...há um falso entendimento de que todo e qualquer conhecimento matemático deve ser trabalhado com base no cotidiano do aluno, levando alguns professores a acreditarem que na impossibilidade de contextualizar, então não pode ser ensinado. Mas a nosso ver, este não é o único modo de contextualizar o conhecimento matemático. Em sendo assim, estaríamos dando ênfase à contextualização que atende à matemática aplicada. Mas e o que dizer da Matemática pura?[8]

3.2 Alguns exercícios de familiarização

Naturalmente esses exercícios de familiarização ou de fixação se fazem necessários para uma melhor compreensão do que foi aprendido, serve para deixar o aluno com melhor domínio das definições, teoremas, lemas, corolários, presentes no conteúdo abordado. São fundamentais para o desenvolvimento das competências e habilidades em progressões aritméticas e fornecem os saberes necessários para a resolução de questões mais complexas. É imprescindível que existam exercícios desse estilo pois privilegiam a matemática dentro de si mesma e não apenas com questões contextualizadas ou interdisciplinares.

> ...outro engano é a ideia de que contextualizar é ensinar apenas a Matemática usada no dia a dia, como a aritmética de uma compra de supermercado. Contudo, somente em momentos de descontextualização é possível construir conhecimentos para que possam ser usados em outras circunstâncias. Questões internas da disciplina, como a propriedade distributiva da multiplicação, não estão explícitas no que se faz diariamente...[7]

Veremos a seguir alguns exercícios não contextualizados importantes para que o aluno possa ter um melhor domínio do conteúdo aprendido. Esses exercícios não precisam ser aplicados em grande quantidade. Contudo, são necessários que os mesmos desenvolvam as habilidades do aluno exigidas no conteúdo progressões aritméticas e, ao mesmo tempo aprimorando sua competência relacionada ao tema.

1. Determine nas sequências abaixo, quais delas são progressões aritméticas, classificando-as em finita ou infinita e determinado o valor de sua razão:

   (a) $(a_n) = (1, 7, 13, 19, ...)$

   (b) $(b_n) = (0, -8, -16, -24)$

   (c) $(x_n) = (40, 50, 80, 90)$

   (d) $(j_n) = (4, 9, 15, 22, 30, ...)$

   (e) $(c_n) = (3, 3, 3)$

   (f) $(w_n) = (-2, -5, -8, ...)$

   (g) $(d_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

2. Em uma progressão aritmética sabe-se que o primeiro termo é igual a 12 e sua razão igual a 6. Determine o vigésimo quinto termo dessa $P.A.$.

3. Qual é a razão de uma progressão aritmética que tem $a_2 = -5$ e $a_{10} = 51$?

4. Quantos termos tem uma progressão aritmética de razão igual a 8, $a_1 = 15$ e $a_{20} = 167$?

5. Qual deve ser o valor de x para que a sequência $(3x - 2, 5x - 7, 5x)$ seja uma progressão aritmética.

6. Numa caixa há 1000 bolinhas de gude. Retiram-se 15 bolinhas na primeira vez, 20 na segunda, 25 na terceira e assim sucessivamente na mesma razão. Após a décima quinta retirada, quantas bolinhas sobrarão na caixa?

7. Deseja-se interpolar 8 números entre 2 e 29 para que seja formada uma P.A. com todos eles. Quais seriam todos os termos dessa progressão aritmética? (Quando organizamos números reais entre dois números já dados, de modo que todos esses números juntos possam formar uma $P.A.$, dizemos que foi feita uma **interpolação aritmética**.)

Resolução

1. (a) É uma $P.A.$, infinita, de razão igual a 6, pois $7 - 1 = 13 - 7 = 19 - 13 = 6$.

   (b) É uma $P.A.$, finita, de razão igual a -8, pois $-8 - (0) = -16 - (-8) = -24 - (-16) = -8$.

   (c) Não é uma $P.A.$, pois $50 - 40 \neq 80 - 50 \neq 90 - 80$.

   (d) Não é uma $P.A.$, pois $9 - 4 \neq 15 - 9 \neq 22 - 15 \neq 30 - 22$.

   (e) É uma $P.A.$, finita, de razão igual 0, pois $3 - 3 = 3 - 3$.

   (f) É uma $P.A.$, infinita, de razão -3, pois $-5 - (-2) = -8 - (-5)$.

   (g) É uma $P.A.$, finita, de razão 1, pois $2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = 5 - 4 = 6 - 5 = 7 - 6$.

2. Temos que $a_1 = 12$ e $r = 6$. Precisamos encontrar o valor de a_{25}:

   $a_{25} = a_1 + 24r = 12 + 24 \cdot 6 = 12 + 144 \Rightarrow a_{25} = 156$

3. Sabe-se que $a_2 = -5$ e $a_{10} = 51$. Daí vem: $a_{10} = a_2 + 8r \Rightarrow 51 = -5 + 8r \Rightarrow 56 = 8r \Rightarrow r = \dfrac{56}{8} \Rightarrow r = 7$, ou seja a razão é igual a 7.

4. Deseja-se saber quantos termos tem a $P.A.$, sendo $a_1 = 15$, $r = 8$ e $a_n = 167$. Com isso, teremos: $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 167 = 15 + (n-1) \cdot 8 \Rightarrow 152 = 8n - 8 \Rightarrow 160 = 8n \Rightarrow n = \dfrac{160}{8} \Rightarrow n = 20$, ou seja, a $P.A.$ tem 20 termos.

5. Para que a sequência $(3x-2, 5x-7, 5x)$ seja uma $P.A.$, devemos ter $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, ou seja: $5x - 7 - (3x - 2) = 5x - (5x - 7) \Rightarrow 5x - 7 - 3x + 2 = 7 \Rightarrow 2x - 5 = 7 \Rightarrow x = 6$ De fato, se $x = 6$ teremos uma $P.A.$ de razão igual 7, veja: $(3 \cdot 6 - 2, 5 \cdot 6 - 7, 5 \cdot 6) = (16, 23, 30)$

6. Para sabermos quantas bolinhas restarão na caixa, devemos somar das 15 retiradas e por fim, subtrair do total de bolinhas antes presente na caixa. Precisamos na $P.A.$ $(15, 20, 25, \cdots)$ determinar o termo a_{15} que corresponde a 15° retirada. Feito isso, faremos a soma dos 15 primeiros termos dessa $P.A.$. Então:

   $a_{15} = a_1 + 14r \Rightarrow a_{15} = 15 + 14 \cdot 5 \Rightarrow a_{15} = 15 + 70 \Rightarrow a_{15} = 85$

   Calculando agora o valor de S_{15}, vem:

   $S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15})}{2} \cdot 15 \Rightarrow S_{15} = \dfrac{(15 + 85)}{2} \cdot 15 \rightarrow S_{15} = \dfrac{100 \cdot 15}{2} \Rightarrow S_{15} = 750.$

   Sendo assim, nas 15 retiradas, foram extraídas 750 bolinhas da caixa, restando ainda $1000 - 750 = 250$ bolinhas.

7. Para formar uma $P.A.$ contendo 8 números entre 2 e 29 significa dizer que essa $P.A.$ deve conter 10 (os extremos 2 e 29 e os 8 a serem inseridos entre eles.) Com isso, temos então $a_1 = 2$ e $a_{10} = 29$. Diante disso, é possível encontrar a razão:

   $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow 29 = 2 + 9r \Rightarrow r = 3$

   Como a $P.A.$ tem $a_1 = 2$ e $r = 3$ podemos encontrar todos os outros termos adicionando 3 ao termo anterior, daí vem: $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29)$.

3.3 Exercícios contextualizados

São questões que exploram o cotidiano do aluno ou algum tipo de situação prática que com os conhecimentos teóricos já adquiridos, dão a ele, as condições necessárias para a correta resolução. Se deparando com questões desse tipo o aluno acaba por desenvolver suas habilidades e competências relacionadas ao estudo das progressões aritméticas, conforme já citadas no Capítulo 1. São imprescindíveis para o desenvolvimento cognitivo, crítico nas relações de propriedades e reconhecimento de padrões; solidificando e unindo a matemática puramente teórica com a praticidade do conhecimento aplicado em um determinado problema.

> Ciente da capacidade dos pequenos de criar hipóteses, é possível elaborar problemas com diferentes enunciados, variando o lugar da incógnita, e propor discussões em grupo e momentos nos quais os estudantes justifiquem a escolha.[7]

3.4 Alguns exercícios contextualizados

Esse estilo de exercícios tão importante para os alunos e também, amplamente abordado em diversos processos seletivos para o ingresso em universidades, centros universitários ou faculdade; ou até mesmo no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) que privilegia questões que exigem do aluno interpretações e coleta de dados, enfim a competência adquirida através do desenvolvimento das habilidades.

> ...ante uma situação-problema ligada ao "mundo real", com sua inerente complexidade, o aluno precisa mobilizar um leque variado de competências: selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado...[4]

A seguir, alguns exemplos de questões que podem servir de parâmetro para uso em sala de aula ou estudo em casa, que aprimoram as habilidades exigidas em progressões aritméticas.

1. Os aprovados em um concurso público foram convocados, ao longo de um ano, para ocupar os respectivos cargos, segundo os termos de uma $P.A.$:

- Em janeiro foram chamadas 18 pessoas.
- Em fevereiro foram chamadas 30 pessoas.
- Em março foram chamadas 42, e assim por diante.

a. Quantas pessoas foram convocadas no mês de agosto?

Resolução: Temos a $P.A.$ $(18, 30, 42, ...)$, onde: $a_1 = 18$ (janeiro), $a_2 = 30$ (fevereiro), $a_3 = 42$ (março) e assim sucessivamente até o mês de dezembro (a_{12}). A razão dessa P.A. é igual a 12 pois $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 12$.
É preciso encontrar quantas pessoas foram chamadas em agosto, ou seja, o 8° termo dessa $P.A.$. Daí, temos que:
$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow a_8 = 18 + 7 \cdot 12 \Rightarrow a_8 = 18 + 84 \Rightarrow a_8 = 102$ pessoas.

b. Quantas pessoas foram chamadas no último trimestre do ano?

Resolução: Para saber quantas pessoas foram chamadas no último trimestre do ano, precisamos encontrar a quantidade de candidatos convocados nos meses de outubro, novembro e dezembro; que correspondem a respectivamente a_{10}, a_{11} e a_{12}. Após encontrar esses valores bastar somarmos os três. Temos que $a_1 = 18$ e $r = 12$.
Daí vem que:
$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 18 + 9 \cdot 12 \Rightarrow a_{10} = 18 + 108 \Rightarrow a_{10} = 126$
$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow a_{11} = 18 + 10 \cdot 12 \Rightarrow a_{11} = 18 + 120 \Rightarrow a_{11} = 138$
$a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow a_{12} = 18 + 11 \cdot 12 \Rightarrow a_{12} = 18 + 132 \Rightarrow a_{12} = 150$
Com isso, o total de candidatos chamados no último trimestre será a soma $a_{10} + a_{11} + a_{12}$, ou seja, $126 + 138 + 150$ que resulta em 414 candidatos.

2. Em um treinamento aeróbico mensal, um estudante de Educação Física corre sempre 3 minutos a mais do que correu no dia anterior. Se no 5° dia o estudante correu 17 minutos quanto tempo correrá no 12° dia?

Resolução: Em questões desse tipo é comum vermos tanto professores quanto alunos acharem necessário encontrar o valor de a_1 que é o tempo corrido pelo estudante no primeiro dia. Porém, não é preciso saber essa informação para chegarmos ao resultado que é o tempo total corrido pelo estudante no quinto dia. Veja:

$a_5 = 17 \Rightarrow$tempo corrido no quinto dia.

$r = 3 \Rightarrow$ razão da $P.A.$.

Daí vem que:

$a_{12} = a_5 + 7r \Rightarrow a_{12} = 17 + 7 \cdot 3 \Rightarrow a_{12} = 17 + 21 \Rightarrow a_{12} = 38$. Concluímos que o estudante correrá 38 minutos no décimo segundo dia.

3. Uma criança organizou seus carrinhos em um quintal enquanto brincava. Ela organizou colocando 5 carrinhos na primeira fila, 9 na segunda, 13 na terceira e assim sucessivamente sempre adicionando 4 carrinhos a cada nova fila formada até chegar em 77 carrinhos na última fila. Quantas filas foram formadas?

   Resolução: O modo como a criança organizou os carrinhos formam uma $P.A.$ de razão igual a 4. Assim temos então: $a_1 = 5$ carrinhos, $a_2 = 9$ carrinhos, $a_3 = 13$ carrinhos, ..., $a_n = 77$ carrinhos.

   Aplicando a fórmula do termo geral:

   $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 77 = 5 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow 77 - 5 = 4n - 4 \Rightarrow 72 + 4 = 4n \Rightarrow n = \dfrac{76}{4} \Rightarrow n = 19$ filas formadas pelos carrinhos.

4. No decorrer de uma viagem que teve a duração de 6 dias, um automóvel percorreu 60km no 1° dia, 80km no 2° dia, 100km no 3° dia e assim sucessivamente, até o 6° dia, ou seja, a cada dia que se passava eram percorridos 20km a mais em relação ao dia anterior. Qual foi o total de quilômetros percorridos por esse automóvel durante os 6 dias dessa viagem?

Resolução: Precisamos encontrar a soma de $a_1 + a_2 + \cdots + a_5 + a_6$, ou seja, determinar a soma S_6 da $P.A.$ que tem $a_1 = 60$ e $r = 30$. Mas antes disso, determinaremos a_6 pois em $S_6 = \dfrac{(a_1 + a_6)}{2} \cdot 6$, a_6 ainda é desconhecido. Para isso, façamos:

$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_6 = 60 + 5 \cdot 20 \Rightarrow a_6 = 60 + 100 \Rightarrow a_6 = 160$. Agora determinaremos a soma S_6 da seguinte maneira:
$S_6 = \dfrac{(a_1 + a_6)}{2} \cdot 6 \Rightarrow S_6 = \dfrac{(60 + 160) \cdot 6}{2} \Rightarrow S_6 = \dfrac{220 \cdot 6}{2} \Rightarrow S_6 = 110 \cdot 6 \Rightarrow S_6 = 660$. Portanto, durante os 6 dias foram percorridos um total de $660km$.

3.5 Exercícios no ENEM e nos Vestibulares

As progressões aritméticas são frequentemente abordadas tanto no ENEM(Exame Nacional do Ensino Médio) quanto em diversos vestibulares espalhados pelo Brasil. A mudança nessas questões se deu pela troca do tipo de questões onde em exames mais antigos era bastante comum encontrar questões puramente teóricas e com enunciados diretos, ou seja, sem nenhuma contextualização ou interdisciplinaridade. Porém, com o passar dos anos isso foi mudando, esses exercícios diretos que primavam apenas a memorização do aluno, deram lugar a questões mais complexas que exigiam a habilidade e competência daquilo que foi estudado. Esse novo jeito de exigir o saber matemático, não se deve apenas ao estudo das progressões aritméticas mas sim na matemática como um todo, conforme é observado em inúmeras questões presentes em vários processos seletivos ano após ano. A seguir uma pequena lista contendo algumas questões de várias instituições.

1. (ENEM-2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir:

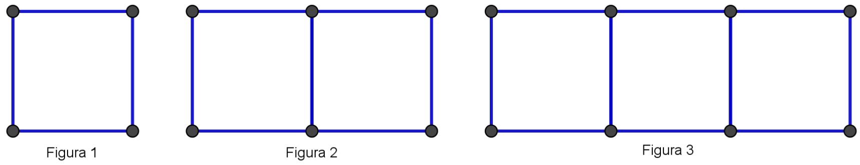


Figura 3.1: Quadrados formados usando canudos.

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

(a) $C = 4Q$.

(b) $C = 3Q + 1$.

(c) $C = 4Q - 1$.

(d) $C = Q + 3$.

(e) $C = 4Q - 2$.

Resolução: Para formar um quadrado, é necessário utilizar quatro canudos. Para formar dois quadrados, sete canudos e, para formar três quadrados, dez canudos. Com isso, temos uma progressão aritmética de razão igual a 3, onde os índices dos termos da $P.A.$ indicam o número de quadrados (Q) construídos em cada passo, enquanto os termos $(a_1, a_2, a_3, ...)$ representam a quantidade de canudos (C) utizada na construção. A P.A. é $(4, 7, 10, ...)$.
Daí teremos: $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow C = 4 + (Q-1) \cdot 3 \Rightarrow C = 4 + 3Q - 3 \Rightarrow C = 3Q + 1$, ou seja, alternativa b como resposta.

Logicamente essa questão poderia ser resolvida utilizando conceitos de funções polinomiais de grau 1, essa relação entre progressões aritméticas e funcões polinomiais já foi comentada na Seção 2.5.

2. (FEI-Modificado) Um trabalho escolar de 150 páginas deverá ser impresso em uma impressora que apresenta os seguintes problemas: nas páginas $6, 12, 18, ...$

(múltiplos de 6) o cartucho de tinta amarela falha e nas páginas $8, 16, 24, ...$ (múltiplos de 8) falha o cartucho de tinta azul. Supondo-se que em todas as páginas do trabalho sejam necessárias as cores amarela e azul, quantas páginas serão impressas sem essas falhas?

Resolução: Sabe-se que o trabalho tem 150 páginas. É necessário que seja calculado o número de todas as folhas que possuem falhas (tanto na cor amarela quanto na cor azul). Então bastará subtrair esse número do total (150) e então será encontrado o número de folhas que não possuem falhas.
Nesse exercício existem duas progressões aritméticas que estão descritas a seguir:
$(6, 12, 18, ..., a_n)$ onde $a_n \leq 150$.
$(8, 16, 24, ..., b_n)$ onde $b_n \leq 150$.

Precisamos determinar a_n e b_n que não necessariamente são iguais como veremos a seguir:

Na primeira situação $a_n = 150$ pois 150 é um múltiplo de 6, contudo, se descobrirmos qual a posição desse termo a_n saberemos quantos múltiplos de há entre 1 e 150. Daí vem: $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 150 = 6 + (n-1) \cdot 6 \Rightarrow 150 = 6 + 6n - 6 \Rightarrow 150 = 6n \Rightarrow n = \dfrac{150}{6} \Rightarrow n = 25$. Portanto, existem 25 múltiplos de 6 entre 1 e 150.
Já na segunda situação, vamos adotar b_n como sendo o múltiplo de 8 entre 1 e 150. Para encontrarmos b_n podemos proceder da seguinte maneira: $150 = 18 \cdot 8 + 6$ (divisão euclidiana), como o resto dessa divisão é 6, basta subtrairmos esse valor de 150 para encontrarmos o múltiplo de 8 mais próximo a ele, sendo assim, $150 - 6 = 144 \Rightarrow b_n = 144$. Agora, calculando a posição que b_n se encontra teremos: $b_n = b_1 + (n-1)r \Rightarrow 144 = 8 + (n-1) \cdot 8 \Rightarrow 144 = 8 + +8n - 8 \Rightarrow 144 = 8n \Rightarrow n = \dfrac{144}{8} \Rightarrow n = 18$. Logo, existem 18 múltiplos de 8 entre 1 e 150.
Um erro bastante comum ocorre nessa etapa da questão. Muitos alunos somam a

quantidade de múltiplos de 6 e de 8 (25 e 18, respectivamente) e depois subtraem esse valor de 150. O erro está no fato de 6 e 8 não serem primos entre si, e com isso, existem múltiplos de 6 e 8 simultaneamente. Para saber quais seriam esses múltiplos basta calcular o m.m.c.$(6, 8)$ que será igual a 24. Precisamos saber quantos múltiplos de 24 existem entre 1 e 150. Sabe-se que $c_1 = 24$, $r = 24$ e $c_n = 144$ (pois 144 é o último múltiplo de 6 e 8 ao mesmo tempo), então: $c_n = c_1 + (n-1)r \Rightarrow 144 = 24 + (n-1) \cdot 24 \Rightarrow 144 = 24 + 24n - 24 \Rightarrow 144 = 24n \Rightarrow n = \dfrac{144}{24} \Rightarrow n = 6$ que é a quantidade de múltiplos de 24 entre 1 e 150.
Aplicando agora a fórmula para o número de elementos de dois conjuntos não disjuntos, temos: $n(M(6) \cup M(8)) = n(M(6)) + n(M(8)) - n((M(6) \cap M(8))$, onde:
$M(6) \Rightarrow$ são os múltiplos de 6 entre 150.
$M(8) \Rightarrow$ são os múltiplos de 8 entre 150.
$(M(6) \cap M(8)) \Rightarrow$ são os múltiplos de 6 e 8 ao mesmo tempo, ou seja, os múltiplos de 24.
Substituindo na fórmula, tem-se que: $n(M(6) \cup M(8)) = 25 + 18 - 6 \Rightarrow n(M(6) \cup M(8)) = 37$.

Finalmente, fazendo a diferença entre 150 e 37 chegaremos a 113, que é o total de folhas que não apresentam nenhuma falha de impressão.

3. (UnB) No projeto urbanístico de uma cidade, o paisagista previu a urbanização do canteiro central de uma das avenidas, com o plantio de 63 mudas de Flamboyant, todas dispostas em linha reta e distantes 5m uma da outra. No dia do plantio, o caminhão descarregou as mudas no início do canteiro central, no local onde seria plantada a primeira muda. Um jardineiro foi designado para executar o serviço. Para isso, partindo do lugar onde as mudas foram colocadas, ele pegou três mudas de cada vez, plantou-as nos locais designados, enfileirando-as uma após a outra. Calcule, em hectômetros, a distância total mínima percorrida pelo

jardineiro após finalizar o trabalho. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

Resolução: A Figura 3.2, mostra como podem estar organizadas as mudas e como será feito o plantio. Como existem 63 mudas e o jardineiro leva sempre 3 mudas de cada vez, será necessária 21 "viagens"para o transporte e plantio.

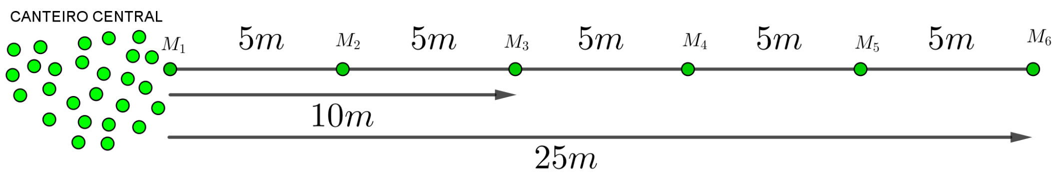


Figura 3.2: Esquema da plantação das mudas.

Pela figura, podemos concluir que:

- Na primeira vez, ele percorre 20m.
- Na segunda vez, percorre 50m
- Na terceira, percorre 80m.

Lembrando que esses valores correspondem a ida para carregar mudas e a volta para pegar as próximas. Porém, na 21° e última ida ele não precisa voltar para pegar mais. Então, para saber a distância mínima percorrida pelo jardineiro devemos fazer a soma das 20 primeiras "viagens"e mais a metade da 21° em relação a $P.A.$ $(15, 30, 45)$. Daí vem:
$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$, calculando primeiramente a_{20}, temos: $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{20} = 10 + 19 \cdot 15 \Rightarrow a_{20} = 10 + 285 \Rightarrow a_{20} = 295$.
Voltando à soma:
$S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = \dfrac{(10 + 295) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 305 \cdot 10 \Rightarrow S_{20} = 3050$.
Multiplicando 3050 por 2 pois o jardineiro ia e voltava teremos 6100 metros. Esse é o valor para os 20 primeiros transportes das mudas, falta agora encontrar a_{21}

que é a última vez que ele irá. Para isso, basta somar ao valor de a_{20}, a razão da $P.A.$, que é igual a 15, ou seja:

$a_{21} = a_{20} + r \Rightarrow a_{21} = 295 + 15 \Rightarrow a_{21} = 310$, agora:

$S_{20} + a_{21} = 6100 + 310 = 6410$, como o resultado foi pedido em hectômetros, basta dividir esse resultado por 100: $\dfrac{6410}{100} = 64,10$. Desprezando a parte fracionária, resulta 64 hectômetros.

4. (UFBA-Adaptado) Um relógio que bate de hora em hora o número de vezes correspondente a cada hora, baterá, de zero às 12 horas x vezes, conforme é observado no esquema abaixo. Calcule o dobro da terça parte de x.

   0 hora $\rightarrow$ 12 batidas.

   1 hora $\rightarrow$ 1 batida.

   2 horas $\rightarrow$ 2 batidas.

   $\vdots$

   11 horas $\rightarrow$ 11 batidas.

   12 horas $\rightarrow$ 12 batidas.

   Resolução: De acordo com os dados da questão, teremos que:

   0 hora: o relógio baterá 12 vezes.

   1 hora: o relógio baterá 1 vez.

   2 horas: o relógio baterá 2 vezes.

   3 horas: o relógio baterá 3 vezes.

   $\vdots$

   12 horas o relógio baterá 12 vezes.

   Logo, teremos a seguinte sequência:

   $(12, \mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ 12})$

   A partir do segundo termo da sequência acima, temos uma $P.A.$ de 12 termos, cujo primeiro termo é igual a 1, a razão também é 1 e o último termo é 12. Portanto, a soma dos termos desta $P.A.$ será: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{12} =$

$$\frac{(1+12)\cdot 12}{2} = 13 \cdot 6 = 78$$

A soma procurada será igual ao resultado anterior mais as 12 batidas da zero hora. Logo, o número x será igual a $x = 78 + 12 = 90$.

Logo, o dobro da terça parte de x será: $2 \cdot \frac{90}{3} = 2 \cdot 30 = 60$, que é a resposta do problema proposto.

5. (ENEM-2013) As projeções para a produção de arroz no período de $2012 - 2021$, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. A Tabela 3.1 apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeto da produção (t)
2012	$50,25$
2013	$51,50$
2014	$52,75$
2015	$54,00$

Tabela 3.1: Projeção anual de arroz (em toneladas).

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

(a) $497,25$.

(b) $500,85$.

(c) $502,87$.

(d) $558,75$.

(e) $563,25$.

Resolução: Podemos observar que a quantidade de arroz de cada ano forma a $P.A.$ $(50,25;\ 51,50;\ 52,75;\ 54,00;\ 55,25; ...)$, cuja razão é igual a $1,25$. O problema pede que encontremos a soma de toda a produção de 2012 a 2021, ou seja, a soma dos 10 primeiros termos dessa $P.A.$. É preciso então determinar primeiro o valor de a_{10}. Então:

$$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 50,25 + 9 \cdot 1,25 \Rightarrow a_{10} = 50,25 + 11,25 \Rightarrow a_{10} = 61,50$$

.
Daí vem que: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{10} = \dfrac{(50,25 + 61,50) \cdot 10}{2} = 111,75 \cdot 5 = 558,75$.

Logo, a soma projetada de arroz de 2012 a 2021, será igual a $558,75$ toneladas. Portanto, alternativa d.

Capítulo 4

Uma aplicação em sala de aula das Progressões Aritméticas seguindo a linha construtivista.

Neste capítulo se apresenta um atividade cujo objetivo é a aplicação prática de aulas estruturadas na linha construtivista sobre progressões aritméticas para alunos do Ensino Médio.

4.1 A escola e os alunos envolvidos

A atividade foi aplicada no Centro de Ensino Médio 02 de Planaltina, Distrito Federal, nos dias 06/08 e 08/08 de 2018, com o intuito de verificar, a eficiência do aproveitamento na aprendizagem de progessões aritméticas seguindo a tendência construtivista que enfatiza o levantamento de conhecimentos prévios em uma turma de sengundo ano do ensino médio. A turma 2CM do turno matutino. As aulas foram gentilmente cedidas pelo professor de matemática da respectiva turma e anteriormente autorizadas pela diretora da escola.

Foram ultilizadas quatro aulas para a execução da atividade que consistiu inicialmente na resolução de uma série de situações problema, com o propósito de fazer um levantamento de conhecimentos prévios dos alunos. Os alunos foram convidados a sentarem-se em grupos para discutirem possíveis soluções para as questões propostas, sabendo que teriam condições de resolvê-las mesmo sem nunca terem aprendido ou visto o conceito de progressões aritméticas.

4.2 A atividade em sala de aula

A atividade foi realizada em grupos e foi composta de duas situações problema. Após a resolução dessas questões, houve a socialização dos métodos encontrados pelos alunos. Esta etapa foi mediada pelo professor que trazia reflexões a respeito dessas soluções encontradas. E por fim, a formalização do conteúdo progressões aritméticas através de definições, fórmulas, teoremas e corolários. O tempo para que pudessem resolver a atividade foi de 30 minutos, porém devido à dificuldade encontrada por alguns dos alunos, foi estendido para 50 minutos. Após esse tempo o professor foi até o quadro para discussão das questões e soluções encontradas juntamente com as estratégias utilizadas pelos grupos.

> Um importante recurso para o desenvolvimento das competências é o trabalho em grupo. Apesar de rejeitado por muitos, sob alegação de que os alunos fazem muito barulho e não sabem trabalhar coletivamente, essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver.[3]

Segue abaixo a atividade dada aos alunos:

Progressões aritméticas ($\boldsymbol{P.A.}$)

Você, aluno(a) é capaz de responder as perguntas a seguir. Basta ler com muita atenção as situações descritas a seguir e discutir com seus colegas em grupos de, no máximo, oito pessoas. Bom estudo.

Situação-problema 1

Um homem decidiu iniciar caminhadas regulares por ordem de seu médico pessoal. Como há muito tempo não fazia nenhuma atividade física, decidiu iniciar gradualmente montando assim um cronograma diário conforme esquema abaixo:
→ 1500 metros no 1º dia.
→ 1700 metros no 2º dia.
→ 1900 metros no 3º dia.

E assim sucessivamente, até chegar o dia em que caminhará 5500 metros, sendo então sua distância a ser percorrida sempre que for exercitar-se. A respeito desse esquema de caminhadas, responda os ítens a seguir:

a) Quantos metros ele caminhará somente no 7º dia?

b) Escreva uma sequência, entre parênteses, das distâncias percorridas nos seis primeiros dias.

c) Em qual dia ele percorrerá 3500 metros?

d) Qual é o valor total, em metros, percorrido por esse homem nos nove primeiros dias de caminhada?

Situação-problema 2

Uma lanchonete será aberta em uma grande cidade e seu proprietário tem metas mensais de clientes consumindos seus produtos. Com base no tamanho dessa cidade, sua meta de clientes foi elaborada da seguinte maneira:
→ 80 clientes no primeiro mês.
→ 120 clientes no segundo mês.
→ 160 clientes no terceiro mês, e assim por diante.

Baseando-se no plano de vendas desse proprietário, responda:

a) Quantos clientes são esperados no sexto mês de funcionamento?

b) Escreva a sequência dos clientes presentes na loja, mês a mês, durante um semestre. (Escreva essa sequência entre parênteses)

c) Qual o total de clientes que passaram na loja durante os oito primeiros meses sabendo que nesse período a quantidade foi igual a meta estipulada?

d) Em que mês a quantidade de clientes será maior ou igual a 360?

4.3 Conhecendo um pouco a turma e os alunos

Nos gráficos a seguir, apresentam-se algumas informações a respeito dos alunos da turma $2CM$ envolvidos nessa atividade aplicada no Centro Médio 02 de Planaltina-DF.

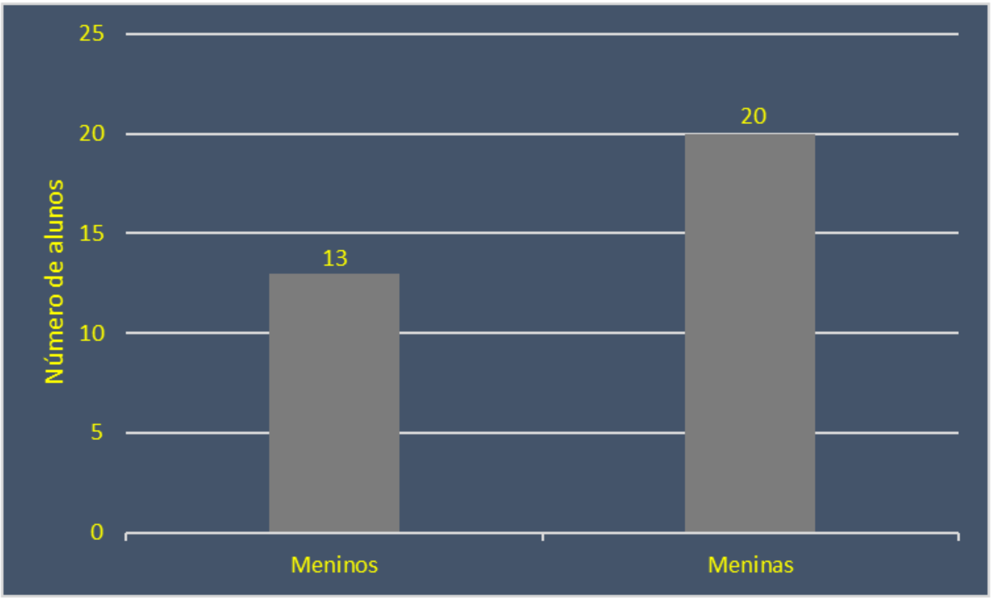


Figura 4.1: Os alunos da turma $2CM$.

No Gráfico 4.1, pode-se observar que os alunos do sexo feminino são maioria nesta turma quando comparados ao número de alunos do sexo masculino.

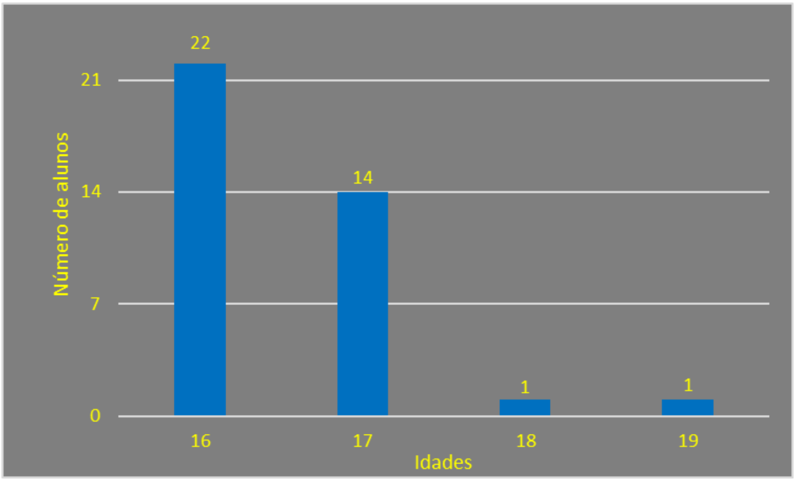


Figura 4.2: As idades dos alunos da turma $2CM$.

Os alunos da turma $2CM$ estão em sua maioria, de acordo com a faixa etária em relação à série que se encontram no momento.

Após as resoluções, discussões e a devida formalização matemática das definições, fórmulas e propriedades envolvidas no estudo de progressões aritméticas no quadro pelo professor, foi pedido aos alunos que respondessem algumas perguntas que tratavam das impressões da aula e também, como eles veem as aulas de matemática de maneira geral. Foi pedido que não colocassem seus nomes para que se sentissem à vontade para respondê-las.

As perguntas e seus respectivos resultados estão presentes a seguir:

1. Você acha que aprendeu satisfatoriamente progressões aritméticas?

   (   ) Sim.

   (   ) Não.

   (   ) Em parte.

2. Você acha que ao iniciar as aulas com questões acessíveis ao seu conhecimento, para que depois fosse vista a parte teórica e forma de progressões aritméticas, facilitou sua compreensão do conteúdo?

   (   ) Muito.

( ) Pouco.

( ) Não fez diferença.

( ) Continuei com dificuldade igual aos outros conteúdos.

3. Como você se considera em relação à dificuldade em matemática?

( ) Tenho muita dificuldade.

( ) Tenho pouca dificuldade.

( ) Não tenho dificuldade.

4. A matemática é sua matéria favorita?

( ) Sim.

( ) Não.

( ) Não gosto de nenhuma matéria.

Após contabilizar e compilar todas as respostas quanto a essas questões, o resultado em linguagem gráfica foi:

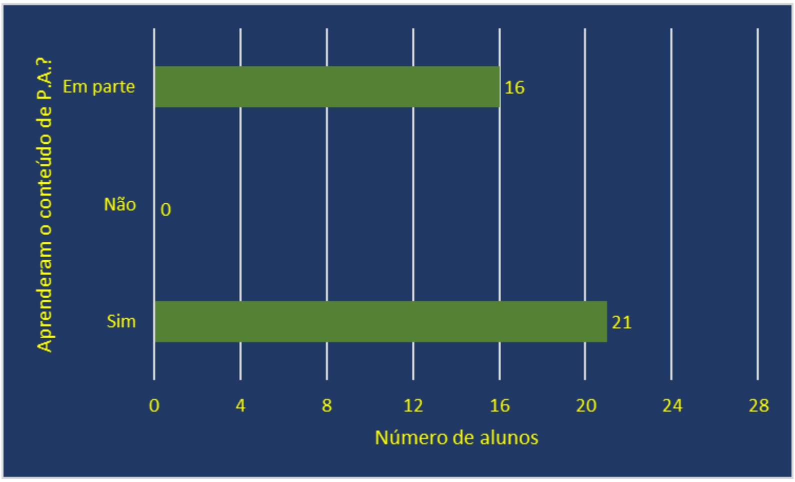


Figura 4.3: Respostas da questão número 1.

Este resultado indicado na Figura 4.3 mostra que embora os alunos tenham tido dificuldade em algumas questões durante as aulas, eles se mostraram confiantes quanto ao aproveitamento do conteúdo em relação à aprendizagem.

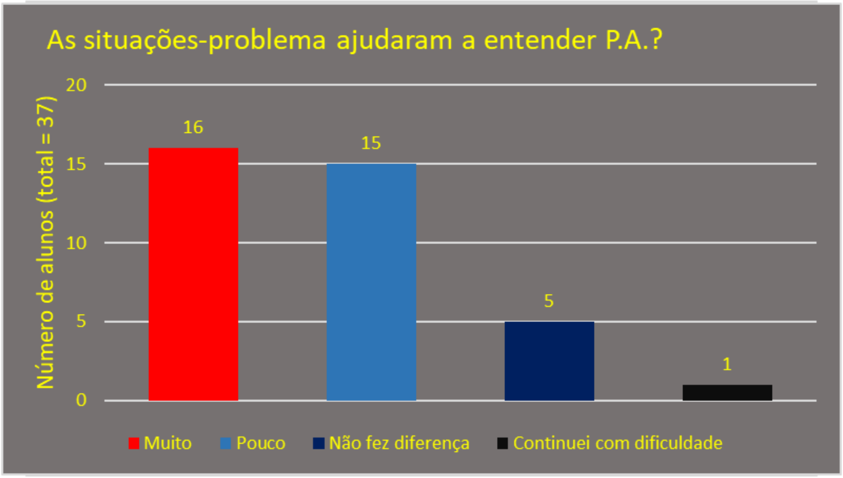


Figura 4.4: Respostas da questão número 2.

O gráfico da Figura 4.4 demonstra que a maioria dos alunos gostou de resolver situações-problema sobre progresões aritméticas e que consideraram uma boa estratégia para aprenderem esse conteúdo. Indica também que o aprendizado em progressões aritméticas utilizando o levantamento de conhecimentos prévios dos alunos é um poderoso aliado do professor em suas aulas, não só nesse conteúdo, como em qualquer outro do ensino médio no que diz respeito à matemática.

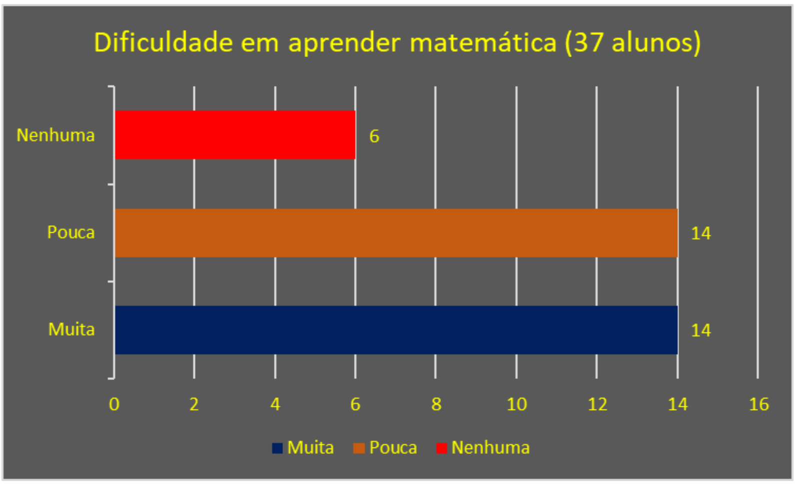


Figura 4.5: Respostas da questão número 3.

Analisando o gráfico da Figura 4.5 nota-se que pouquíssimos alunos declaram ter facilidade em matemática. Em diversas salas de aula no ensino médio verifica-se essa enorme quantidade do corpo discente com algum tipo de dificuldade quando estudam matemática.

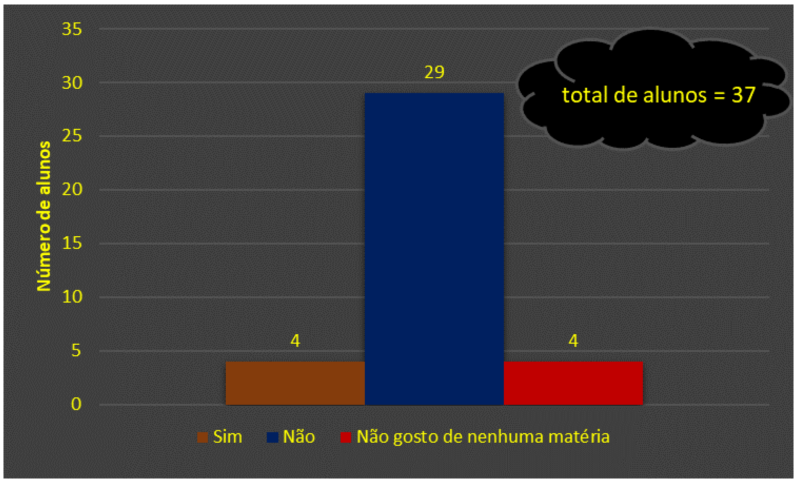
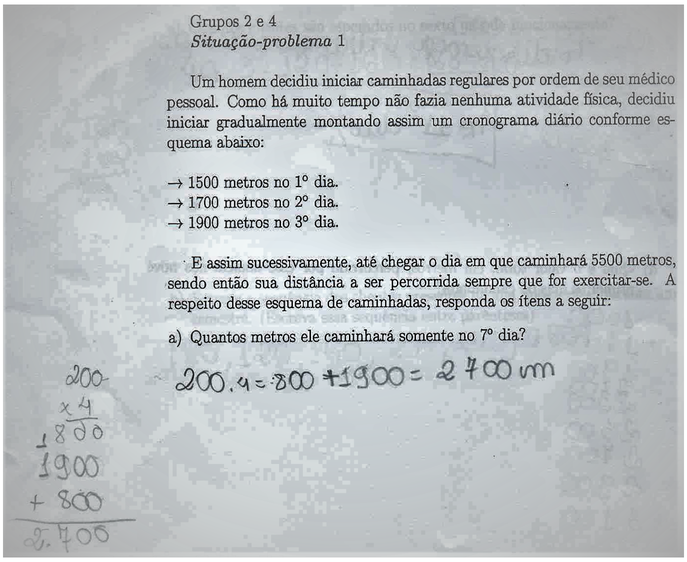


Figura 4.6: Respostas da questão número 4.

Na Figura 4.6, uma triste constatação, pouco mais de 10% do total de alunos elegem a matemática como componente curricular predileta. Os professores do ensino médio têm consciência desse reduzido número, e esse é um quadro difícil de ser revertido, e melhor que eleger culpados ou fatores determinantes para essa realidade, talvez fosse melhor buscar novas estratégias para as aulas e quem sabe, o prazer em estudar matemática possar estar presente em mais alunos.

A seguir, são apresentadas as resoluções realizadas por alguns alunos onde nota-se a capacidade de conseguir resolver as situações problema envolvendo progressões aritméticas, mesmo sem terem visto a teoria relacionada a esse conteúdo. Algumas estratégias utilizadas nessas resoluções foram diferentes e interessantes, veja:


Grupos 2 e 4
Situação-problema 1

Um homem decidiu iniciar caminhadas regulares por ordem de seu médico pessoal. Como há muito tempo não fazia nenhuma atividade física, decidiu iniciar gradualmente montando assim um cronograma diário conforme esquema abaixo:

→ 1500 metros no 1º dia.
→ 1700 metros no 2º dia.
→ 1900 metros no 3º dia.

E assim sucessivamente, até chegar o dia em que caminhará 5500 metros, sendo então sua distância a ser percorrida sempre que for exercitar-se. A respeito desse esquema de caminhadas, responda os ítens a seguir:

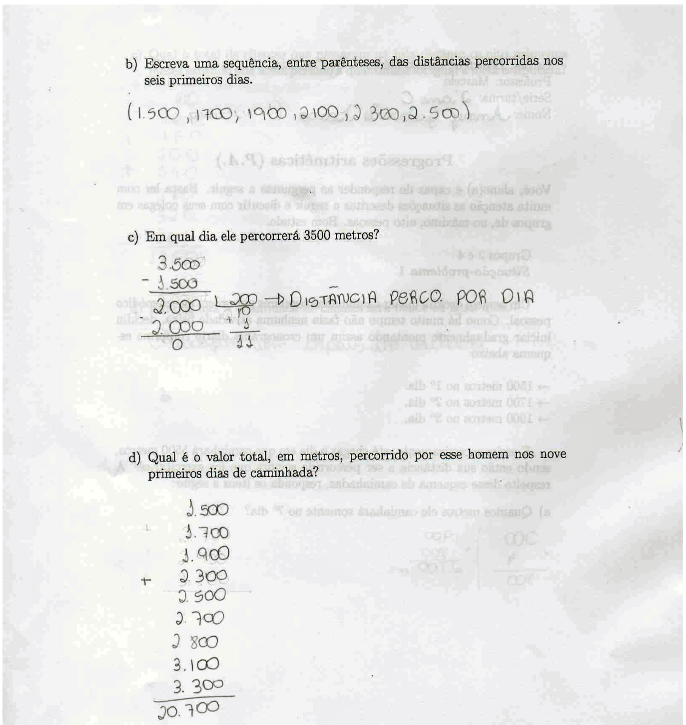
a) Quantos metros ele caminhará somente no 7º dia?

200 . 4 = 800 + 1900 = 2 700 m

200
x 4
800

1900
+ 800
2.700

Figura 4.7: Resolução de um aluno em sala da situação-problema 1.


b) Escreva uma sequência, entre parênteses, das distâncias percorridas nos seis primeiros dias.

(1.500 , 1700, 1900 , 2100 , 2 300 , 2.500)

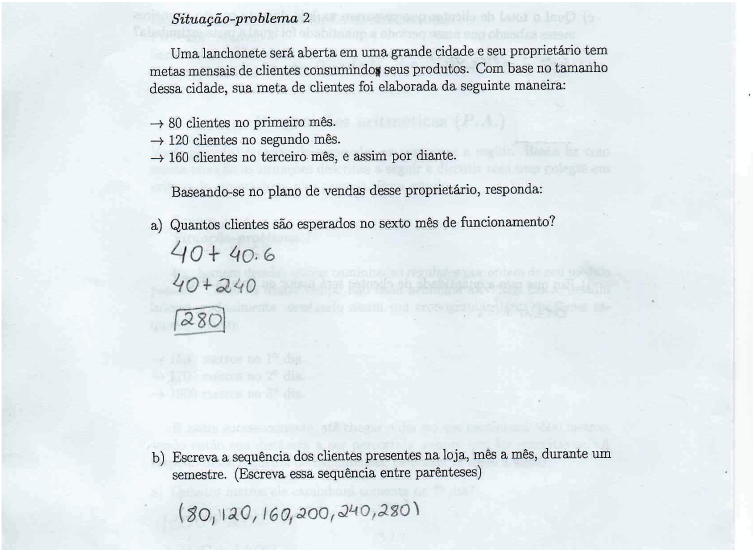
c) Em qual dia ele percorrerá 3500 metros?

3.500
- 1.500
2.000 | 200 → DISTÂNCIA PERCO POR DIA
- 2.000 | 10
0 | + 1
 | 11

d) Qual é o valor total, em metros, percorrido por esse homem nos nove primeiros dias de caminhada?

1.500
1.700
1.900
2.300
2.500
2.700
2 800
3.100
+ 3. 300
20.700

Figura 4.8: Outro aluno continuando em sala a resolução da situação-problema 1.



Situação-problema 2

Uma lanchonete será aberta em uma grande cidade e seu proprietário tem metas mensais de clientes consumindo seus produtos. Com base no tamanho dessa cidade, sua meta de clientes foi elaborada da seguinte maneira:

→ 80 clientes no primeiro mês.
→ 120 clientes no segundo mês.
→ 160 clientes no terceiro mês, e assim por diante.

Baseando-se no plano de vendas desse proprietário, responda:

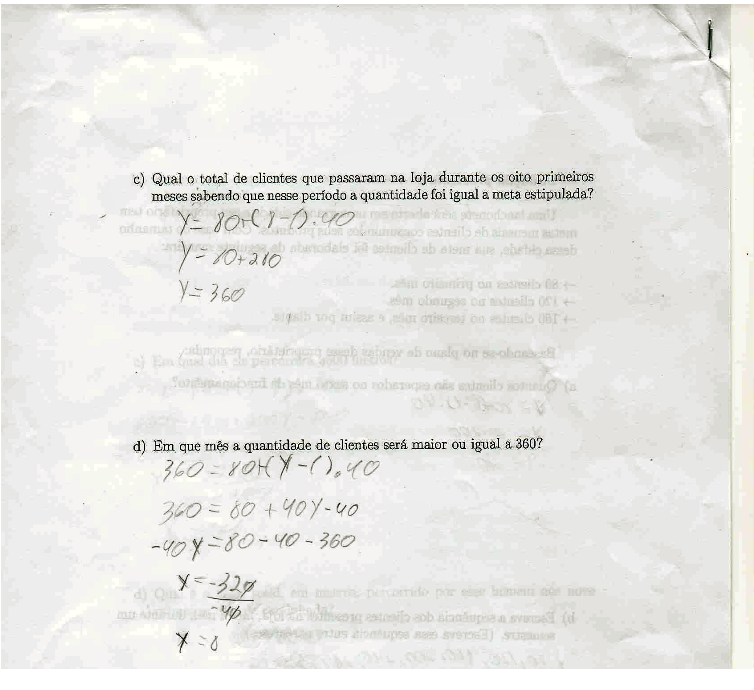
a) Quantos clientes são esperados no sexto mês de funcionamento?

40 + 40.6
40+240
$\boxed{280}$

b) Escreva a sequência dos clientes presentes na loja, mês a mês, durante um semestre. (Escreva essa sequência entre parênteses)

(80, 120, 160, 200, 240, 280)

Figura 4.9: Resolução de um aluno em sala da situação-problema 2.



c) Qual o total de clientes que passaram na loja durante os oito primeiros meses sabendo que nesse período a quantidade foi igual a meta estipulada?

Y= 80+(Y-1).40
Y= 80+280
Y= 360

d) Em que mês a quantidade de clientes será maior ou igual a 360?

360 = 80+(Y-1).40
360 = 80 + 40Y - 40
-40Y = 80 - 40 - 360
Y = $\frac{-320}{-40}$
Y = 8

Figura 4.10: Continuação em sala da resolução da situação-problema 2.

Verificou-se que os alunos, de modo geral, sentiram-se desafiados pelas situações problema, tornando-se agentes ativos no processo de ensino aprendizagem, construíram estruturas lógicas e cognitivas, que consolidam com o professor o conteúdo teórico e formalizado que será visto após seus esforços e tentativas na resolução dos exercícios.

É de fundamental importância que o professor saiba exatamente o que deseja que seus alunos aprendam e para isso, ter domínio das competências exigidas no conteúdo é essencial para que os objetivos das aulas sejam alcançados. As habilidades podem ser trabalhadas em questões contextualizadas com o intuito de aplicar o que já foi estudado.

Considerações finais

Ministrar aulas para adolescentes desde sempre não é uma tarefa fácil, ainda mais considerando uma alta rejeição dos alunos quando se fala em estudar matemática. Ao professor, cabe tentar reverter esse quadro criando estratégias para que as aulas tenham situações desafiadoras e que possuam aumento gradual do nível de exigência ou dificuldade, a criação de situações problema para o início de algo novo a ser ensinado pode ser uma boa maneira de obter um resultado satisfatório quanto ao que se deseja alcançar como objetivo do que será estudado.

Lembrando que somente isso, sem a abordagem teórica do conteúdo, não será suficiente para o desenvolvimento das habilidades do aluno junto ao tema em questão. É preciso que o aluno desenvolva o saber matemático, para resolver os tipos de questões que envolvem interpretação de texto, reconhecimento de padrões, observando o que é preciso para resolver determinado exercício e que informações ele tem à disposição para que chegue ao resultado correto. Uma dificuldade recorrente que o pofessor enfrenta é a falta de pré-requisitos mínimos presente em alguns jovens de sua turma. Uma solução que talvez possa amenizar um pouco essa situção seriam listas complementares que abordem temas anteriores não aprendidos adequadamente. Claro que isso acaba sendo um dificultador para o professor que precisa vencer os conteúdos programáticos extensos e dispõe de poucas aulas para isso.

A experiência vivenciada na atividade serviu para estimular alunos que muito possivelmente, não teriam o mesmo ânimo se o professor simplesmente entrasse em sala e imediatamente colocasse no quadro definições, fórmulas e propriedades; sem mostrar um sentido para o conteúdo a ser visto por eles.

Referências Bibliográficas

[1] COLL, César; MARTÍN Elena; MAURI, Teresa; MIRAS, Mariana; ONRUBIA, Javier; SOLÉ, Isabel; ZABALA, Antoni; São Paulo, Brasil;*O construtivismno em sala de aula*, 6° edição, Editora Ática, 2003.

[2] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; *Matemática, Uma Nova Abordagem, Versão Progrssões*, Editora FTD, 2000.

[3] BRASIL. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* BRASÍLIA: MEC/SEF, 2015.

[4] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Secretaria de Educação Básica, *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2006.

[5] LEITHOLD, Louis; *O cálculo com geometria analítica*,Editora Harbra, 1994

[6] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, Rio de Janeiro, Brasil, *Matemática Discreta*, 2° edição, Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 2015

[7] POLATO, Amanda, *O que ensinar em matemática.* https://novaescola.org.br/conteudo/2653/o-que-ensinar-em-matematica

[8] SANTO, Adilson Oliveira do Espírito; SILVA, Francisco Hermes Santos. *A contextualização: uma questão de contexto.* In: *VII* Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, 2004, Editora Universidade Federal de Alagoas.