



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Raiz de Função Polinomial pelo Método de Newton-Raphson

RENATO DE SOUSA E SILVA

Goiânia
2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Renato de Sousa e Silva

Título do trabalho: Raiz de Função Polinomial pelo Método de Newton-Raphson

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento **SIM** **NÃO**¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Renato de Sousa e Silva
Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 25 / 07 / 2018

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

RENATO DE SOUSA E SILVA

Raiz de Função Polinomial pelo Método de Newton-Raphson

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues

Goiânia
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Renato de Sousa e
Raiz de Função Polinomial pelo Método de Newton-Raphson
[manuscrito] / Renato de Sousa e Silva. - 2018.
73 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2018.

Bibliografia.

Inclui gráfico, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Polinômio. 2. Método de Newton-Raphson. 3. GeoGebra. I. Rodrigues, Paulo Henrique de Azevedo, orient. II. Título.

CDU 512.5



Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br



Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Renato de Sousa e Silva – Aos dez dias do mês de julho do ano de dois mil e dezoito, às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues – Orientador, Prof. Dr. Ronaldo Antônio dos Santos e a Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no LEMAT do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada “**Raiz de função polinomial pelo Método de Newton-Raphson**”, em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Renato de Sousa e Silva, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 18:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Sóstenes Soares Gomes, secretário do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.



Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Presidente – IME/UFG



Prof. Dr. Ronaldo Antônio dos Santos
Membro – IME/UFG



Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro – IFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Renato de Sousa e Silva graduou-se em Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual de Goiás - UEG, Especializou-se em Matemática na Universidade Federal de Goiás - UFG e foi professor de Matemática no Instituto Federal de Goiás - IFG.

Dedico este trabalho a todos os professores, profissionais que dedicam suas carreiras ao ensino, possibilitando educação e cidadania para população. Ser professor é ajudar a aprender, é deixar para cada aluno a esperança e competências de um mundo melhor, é construir seres e vidas, é carregar no peito o orgulho de educar, é cultivar o amor e a amizade, possuidores de potencialidades e incalculáveis sabedorias.

É importante contemplar uma formação escolar em dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.

BRASIL (2006),
Parâmetros Curriculares Nacionais.

Abstract

SILVA, Renato de Sousa. **Polynomial Function Root by Newton-Raphson Method**. Goiânia, 2018. 73p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Determining roots of polynomial functions is a quite frequent content in the subject of Mathematics in Primary and Higher Education. But Galois has shown that it is not possible to develop algebraic formulas to find such roots in polynomials with a degree greater than 4. The present work aims to use Newton-Raphson's Numerical and Iterative Method to find roots of polynomial function. For this, the GeoGebra software is used as a computational and pedagogical tool to illustrate the procedure adopted by the mentioned method through spreadsheets, Geometry and algebraic calculations. Thus, the proposed methodology can help in the understanding of the Newton-Raphson Method and contribute to the process of teaching and learning the content of polynomials for teachers and students of Basic Education.

Keywords

Polynomial, Newton-Raphson Method, GeoGebra.

Resumo

SILVA, Renato de Sousa. **Raiz de Função Polinomial pelo Método de Newton-Raphson**. Goiânia, 2018. 73p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Determinar raízes de funções polinomiais é um conteúdo bastante frequente na disciplina de Matemática do Ensino Básico e Superior. Mas, Galois demonstrou que não é possível desenvolver fórmulas algébricas para encontrar tais raízes em polinômios com grau maior que 4. Então o presente trabalho tem o objetivo de utilizar o Método Numérico e Iterativo de Newton-Raphson para encontrar raízes de função polinomial. Para isto, utiliza-se o *software* GeoGebra como ferramenta computacional e pedagógica para ilustrar o procedimento adotado pelo método citado por meio de planilhas eletrônicas, da Geometria e de cálculos algébricos. Assim, a metodologia proposta pode auxiliar na compreensão do Método de Newton-Raphson e colaborar para o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de polinômios para professores e alunos do Ensino Básico.

Palavras-chave

Polinômio, Método de Newton-Raphson, GeoGebra.

Sumário

Lista de Figuras	11
Lista de Tabelas	12
1 Polinômios	17
1.1 Definição de Polinômio	18
1.2 Propriedades dos Polinômios	19
1.3 Grau de Polinômio	20
1.4 Raiz de Polinômio	21
1.4.1 Fórmula de Bháskara	21
1.4.2 Fórmula para Polinômios de Grau 3 e 4	22
1.4.3 Redução do Grau do Polinômio	24
1.4.4 Teorema do Resto	26
1.4.5 Multiplicidade de Raízes	28
1.4.6 Raízes Racionais	28
1.4.7 Raízes Complexas	29
2 Métodos Numéricos	31
2.1 A Derivada	33
2.2 O Método do Ponto Fixo	35
2.3 O Método de Newton-Raphson	36
2.3.1 Interpretação Geométrica do Método	37
2.3.2 Teoremas para Convergência do Método	39
2.4 O Método da Secante	41
2.5 Critérios de Parada das Iterações	42
2.6 Exemplos	43
3 Planejamento para Aplicação no Ensino Básico	51
3.1 A Tecnologia e o GeoGebra	52
3.2 A Derivada	54
3.3 A Convergência do Método	57
3.4 Os Critérios de Parada	60
3.5 O Método de Newton-Raphson	61
Referências Bibliográficas	71

Lista de Figuras

2.1	Interpretação Geométrica do Método do Ponto Fixo	35
2.2	Interpretação Geométrica do Método de Newton-Raphson	38
2.3	Interpretação Geométrica do Teorema de Bolzano	40
2.4	Interpretação Geométrica do Método da Secante	42
3.1	Interpretação Geométrica da Derivada	54
3.2	Curva $P(x) = x^2/2 - 2x + 1$	56
3.3	Método de Newton-Raphson - GeoGebra	63
3.4	Janela de Planilha do GeoGebra	63
3.5	Método de Newton para $P_1(x) = -10 + 2x$	65
3.6	Método de Newton para $P_2(x) = 2 - 3x + x^2$	67
3.7	Método de Newton para $P_3(x) = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$	68
3.8	Método de Newton para $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$	69

Lista de Tabelas

2.1	Método do Ponto Fixo em $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$	45
2.2	Método de Newton-Raphson em $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$	46
2.3	Método da Secante em $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$	46
2.4	Comparação dos Métodos para $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$	47
2.5	Comparação dos Métodos para $f(x) = e^{-x^2} - \cos(x)$	48
2.6	Comparação dos Métodos para $f(x) = x \log(x) - 1$	48
2.7	Comparação dos Métodos para $P(x) = x^3 - x + 1$	49
2.8	Método de Newton para $P(x) = x^3 - 3,5x^2 + 4x - 1,5$	49
3.1	Coeficientes Angulares	56
3.2	Isolamento da Raiz na Função $P_1(x) = -10 + 2x$	58
3.3	Isolamento da Raiz na Função $P_2(x) = 2 - 3x + x^2$	58
3.4	Isolamento da Raiz na Função $P_3(x) = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$	59
3.5	Isolamento da Raiz na Função $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$	59
3.6	Refinamento do Intervalo da Raiz na Função $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$	61
3.7	Método de Newton para $P_2(x) = 2 - 3x + x^2$	66
3.8	Método de Newton para $P_3(x) = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$	67
3.9	Método de Newton para $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$	68

Introdução

O termo Matemática é derivado do grego e significa ciência ou conhecimento do raciocínio lógico e abstrato [3]. É uma disciplina básica para nortear o estudo de outras ciências. Cabe destacar uma máxima de René Descartes: “A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens”.

O polinômio é um conteúdo da Matemática bastante estudado no Ensino Básico, sendo encontrado em todos os livros do Ensino Médio, logo a sua abordagem é de fundamental importância para o ensino, motivando o desenvolvimento deste trabalho.

Além disso, o conteúdo é importante devido a sua aplicabilidade e interdisciplinaridade com outras áreas, como Física e Engenharia que muitas vezes necessitam das raízes dos polinômios que representam fenômenos da natureza. Assim, tem-se o seguinte problema: Como obter as raízes de polinômios?

Popularmente há a Fórmula de Bháskara para solucionar as raízes de polinômio de grau 2, enquanto a solução para polinômios de grau 1 é imediata por meio de uma equação. Mas o professor pode ser questionado por um aluno se há fórmulas para os demais polinômios. Assim, tem-se como objetivo descrever o conteúdo de polinômios com base na literatura, fornecendo e reunindo informações aos professores de Ensino Básico para responderem adequadamente aos seus alunos.

Galois demonstrou que não há fórmulas para encontrar as raízes de polinômios com grau maior que 4, mas existem fórmulas em radicais para polinômios de grau 3 e 4. Já os demais polinômios necessitam de método numérico iterativo, como o Método de Newton-Raphson que pode ser utilizado para determinar qualquer raiz de polinômio. Portanto, este trabalho utiliza o referido método, pois ele é fácil de ser compreendido por ilustração e colabora no processo de aprendizagem.

Mas, Hernstein [17] desabafa que no Ensino Básico o conteúdo de polinômio era um tédio total devido a fatoração, multiplicação, divisão e simplificação de polinômios e trinômios do segundo grau. E no Ensino Superior, eles eram funções e destinava-se ao cálculo de derivadas, integrais, máximos e mínimos. Essa opinião é comum entre muitos estudantes.

Assim, muitas vezes a Matemática é vista como uma disciplina complexa, difícil

e com altos índices de reprovação. Portanto a eficácia do professor de Matemática é fundamental no processo de ensino [26]. Logo a Ensino da Matemática é um desafio que envolve aspectos como a própria construção dos ambientes, a formação de professores e novas propostas curriculares [29].

Neste contexto, um dos grandes desafios para os professores de Matemática é encontrar maneiras que estimulem seus alunos a conhecerem a aplicabilidade da Matemática. Portanto a tecnologia pode desempenhar a função de aplicar a Matemática abstrata para o contexto real do aluno. Afinal, a tecnologia pode ser utilizada para desempenhar determinada tarefa por meio de ferramentas específicas.

A tecnologia está presente no cotidiano das pessoas e vêm ganhando espaço no âmbito educacional. Logo, pode-se utilizar este recurso para favorecer o processo de ensino e aprendizagem. E por este motivo os recursos tecnológicos são incentivados no ambiente escolar, principalmente em relação à disciplina de Matemática, assim como sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais: “é importante contemplar uma formação escolar, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática” [4].

Portanto, o presente trabalho aborda o conteúdo de Polinômios, o Método Numérico de Newton-Raphson e o *software* educacional GeoGebra com o objetivo de apresentar um meio de determinar raízes de funções polinomiais e favorecer o processo de ensino e aprendizagem em Matemática no Ensino Básico.

Na literatura, encontra-se diversos autores abordando o referido tema, sendo que no PROFMAT as dissertações de Oliveira [23], Cavalcanti [10], Cardoso [7], Roos [27] abordam um tema correlato ao proposto.

Oliveira [23], em 2014, tinha como problema encontrar as raízes de polinomiais de grau n , mas esse problema foi solucionado utilizando o Método de Newton-Raphson e as ilustrações por meio do programa computacional GeoGebra. Assim, ele conclui que o uso da tecnologia possibilita uma visão clara do procedimento do método e que o trabalho dele ser utilizado como apoio ao professor de Ensino Básico caso ele seja questionado sobre raízes de grau maiores ou igual a 5.

Cavalcanti [10], em 2015, abordou o mesmo problema anterior, mas utilizando uma planilha eletrônica. O problema foi solucionado utilizando o *software* Excel e também pelo GeoGebra, o qual também foi usado para desenhar os gráficos. Concluiu-se a eficiência em usar o Método de Newton no Ensino Médio pela teoria e pelos recursos tecnológicos.

Cardoso [7], em 2016, também teve como problema a localização de raízes de polinomiais, mas apenas de grau ímpar. Para isto ele utilizou a teoria, como o Método de Cardano-Tartaglia, Ferrari e Newton-Raphson. Concluiu que os Métodos são instrumentos para auxiliar os professores na tarefa de ensino e aprendizagem na resolução

de equações algébricas e que esses Métodos podem ser utilizados em sala de aula.

Roos [27], em 2017, teve como objetivo realizar uma abordagem geométrica do Método de Newton-Raphson e apresentar o desenvolvimento de alguns exemplos. Além disso, ele utilizou o Método para solucionar um sistema de duas equações não lineares com duas variáveis. Tal objetivo foi atingido e afirmou-se que a resolução numérica iterativa e os gráficos propicia a visualização e facilita o entendimento do conteúdo por parte dos alunos sobre o assunto abordado.

Neste contexto, o presente trabalho também segue a mesma perspectiva dos autores citados, colaborando cronologicamente para o desenvolvimento desta linha de pesquisa no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. E assim, trazer para o Ensino Básico um meio de solucionar raízes de polinômios de qualquer grau por meio de Método Numérico e com o auxílio da tecnologia.

Assim como Oliveira [23], este trabalho pretende determinar as raízes de polinômios de grau n pelo Método de Newton-Raphson e realizar as ilustrações por meio do programa GeoGebra. Mas, deseja-se utilizar planilhas eletrônicas como proposto por Cavalcanti [10] para programar o resultado das iterações, entretanto, complementando o uso do *software* para realizar animações que permita compreender a funcionalidade do Método. Assim, as ilustrações geométricas do Método de Newton-Raphson auxiliam no processo de ensino e aprendizagem como mencionado por Roos [27]. Além disso, objetiva-se comparar os resultados do Método numérico com os algébricos apresentados por Cardoso [7].

O primeiro Capítulo do trabalho é sobre os conceitos preliminares do conteúdo de polinômios que são utilizados no decorrer da dissertação. Apresenta-se um breve histórico, a definição, as propriedades, o grau e as raízes de polinômios, bem como a Fórmula de Bháskara, fórmula para polinômios de grau 3 e 4, redução do grau do polinômio, Teorema do Resto, multiplicidade de raízes, raízes racionais e complexas.

Já na segunda etapa, apresenta-se os conceitos dos métodos numéricos, iniciando pelo conceito e proposições da derivada. O Método de Newton-Raphson é demonstrado algebricamente e geometricamente, além de mencionar um breve histórico do seu surgimento. O referido método é comparado com o Método do Ponto Fixo e com o Método da Secante nos diversos exemplos no final do capítulo. A convergência do método e os critérios de parada das iterações também são mencionados na seção.

Enquanto o terceiro Capítulo é semelhante ao anterior, mas com foco no Ensino Básico, na aplicabilidade e na tecnologia. Apresenta-se a derivada com uma interpretação geométrica mais didática e sem a necessidade do Cálculo Diferencial e Integral. A tecnologia é enaltecida para o ensino da Matemática e o GeoGebra é o *software* utilizado neste processo. A convergência do método iterativo e os critérios de parada são mencionados sem perda de generalidade. Já o Método de Newton-Raphson aplicado na determinação

de raízes de polinômios é o foco principal do trabalho, o qual foi utilizado por meio da interpretação geométrica e com diversos exemplos para polinômios de grau 1, 2, 3 e 4.

Por fim, a conclusão relata a colaboração da utilização do Método de Newton-Raphson para determinar raízes de função polinomial por meio do *software* GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Básico.

Polinômios

O conteúdo de Polinômio está presente em todos os livros renomados de Matemática do Ensino Básico. Portanto, o seu estudo é de fundamental importância devido a sua aplicabilidade e interdisciplinaridade. Os polinômios pertencem a um ramo da Matemática denominado Álgebra, a qual correlaciona o uso de letras, números e operações aritméticas.

Nesse capítulo é apresentado uma breve história sobre a Álgebra, a denominação de polinômio e raízes, bem como as proposições, teoremas, corolários, suas demonstrações e exemplos sobre o conteúdo abordado com base em Domingues [13] e Dante [11].

A história da Matemática é abordada por Boyer [3]. Em relação a polinômios e equações, a história inicia-se por volta de 1800 a.C, na qual os Egípcios possuíam métodos de solução de equação do primeiro grau, enquanto os Babilônios já utilizavam algumas técnicas para a resolução de equações do segundo grau. Já os gregos conseguiam solucionar equação do segundo grau e alguns tipos de equações cúbicas por meio de construção geométrica, segundo Gonçalves [16].

O desenvolvimento algébrico da Matemática teve uma grande colaboração das obras gregas clássicas, principalmente as obras de Euclides (323-285 a.C.), séc. III a.C. Mas, apenas no séc. III d.C. que foi introduzido símbolos para indicar potências e variáveis, por Diofanto (201-285 d.C.). Já a resolução de equações do terceiro e quarto grau só foram possíveis com o desenvolvimento de fórmulas algébricas no séc. XVI. O francês René Descartes (1596-1650) também contribuiu com o desenvolvimento da Álgebra ao utilizar letras para indicar variáveis, constantes ou parâmetros na sua única obra: Geometria.

Para solucionar uma equação do segundo grau, utiliza-se atualmente a Fórmula de Bháskara em homenagem ao matemático indiano Bhaskara Acharya (1114-1185). Essa fórmula é bastante utilizada e conhecida no Ensino Básico. Mas, também há fórmulas para determinar as raízes de uma equação do terceiro e do quarto grau, as quais fogem dos livros de Ensino Básico e são apresentadas posteriormente. Todas essas fórmulas são expressões em radicais.

Assim, vários matemáticos como Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813),

Ruffini (1765-1822) e Abel (1802-1829) tentaram provar a existência ou não da solução para as equações de grau 5 ou superior. Mas foi Galois (1811-1832) que recebeu o mérito por demonstrar que não existe uma fórmula por meio de radicais para polinômio de grau 5 ou superior. Essa afirmação é conhecida como Teorema Fundamental de Galois.

1.1 Definição de Polinômio

A palavra polinômio é derivada de “poli” que significa vários e “monômio” que é uma expressão algébrica determinada por uma variável, por um número real ou pelo produto de um número e uma variável.

Definição 1 *Um polinômio é uma expressão do tipo $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ em que $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são elementos de uma lista ordenada de números e X é um símbolo conhecido como indeterminada. Ou seja, o polinômio é a lista ordenada dos seus coeficientes.*

A definição anterior é enunciada por Elon [20]. Já a definição seguinte para função polinomial é enunciada por Domingues [13].

Definição 2 *Denomina-se função polinomial sobre A , uma função $f : A \rightarrow A$, se existem constantes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ em A , tais que, para todo $x \in A$, tem-se:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1-1)$$

onde n é um número inteiro positivo ou nulo e A pode ser um anel de integridade infinita como $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou um corpo K . A abordagem sobre anel de integridade e corpo podem ser estudadas em [13].

A forma padrão para a função polinomial, ou seja, os coeficientes $a_i, (i = 0, \dots, n)$ com i crescente, é única.

Exemplo 1 *$A(x) = 1, B(x) = 5x + 2$ e $C(x) = x^5 + (1 - i)x + 1$ são funções polinomiais. $D(x) = x^{-2} + x^{-1} + 1, E(x) = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{5x^3}, F(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{7x} - 4$ e $G(x) = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{3}{2}} + 3$ não são funções polinomiais devido ao expoente, n . Em $D(x)$ o expoente não deve ser negativo, em $E(x)$ a variável x não deve estar no denominador, em $F(x)$ a variável x não deve estar em formato de radical e em $G(x)$ o expoente não deve ser fracionário.*

Elon [20] destaca que a cada polinômio $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ faz-se corresponder a função polinomial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Assim, essa correspondência é sobrejetiva devido as definições anteriores, além de tratar-se de uma correspondência biunívoca.

Portanto, assim como Elon, não há necessidade de fazer a distinção entre polinômio P e função polinomial f nos reais. Então, ambos são retratados pelo mesmo símbolo P e mencionados indiferentemente como função polinomial e polinômio, sem abuso de linguagem. Também pode-se utilizar a simbologia $P(x)$ para mencionar o polinômio quando ficar claro que não retrata a imagem da função em um ponto x .

1.2 Propriedades dos Polinômios

Algumas propriedades dos polinômios, tais como adição, multiplicação, o simétrico aditivo e o polinômio identicamente nulo são mencionados a seguir.

A adição de dois polinômios f e g , tais que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$ quaisquer, resulta em um polinômio $(f + g)(x)$ tal que $f(x) + g(x) = (f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$. Esta expressão também é um polinômio sobre A conforme apresentado no Exemplo 2.

Exemplo 2 Seja $f(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^2 - 2$ e $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$.

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= (-2 + 1) + (0 - 4)x + (3 + 1)x^2 + (0 - 2)x^3 + (1 + 5)x^4 + (2 + 0)x^5 \\(f + g)(x) &= 2x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x - 1\end{aligned}$$

O polinômio identicamente nulo é dado por $a_i = 0$, ($i = 0, \dots, k$), onde 0 indica o zero do anel A , logo $P(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \dots$ é um polinômio identicamente nulo.

O simétrico aditivo de um polinômio P é o polinômio $-P$, tal que vale a expressão $(-P)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \dots + (-a_n)x^n$. O Exemplo 3 mostra um caso de simétrico aditivo.

Exemplo 3 Seja $P(x) = 5 + 1x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4$, o seu simétrico aditivo será o polinômio $(-P)(x) = -5 - 1x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4$.

A multiplicação de dois polinômios quaisquer, f e g , resulta em um polinômio $(fg)(x) = f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + (a_na_m)x^{n+m}$, valendo a associatividade e a comutatividade, em que 0 e 1 indicam o zero e a unidade de A , respectivamente. Sendo $f(x) = 1$, o elemento neutro da multiplicação. Assim, todo polinômio $f(x) = a$, $a \in A$, é chamado polinômio constante. Ele é inversível se $a \neq 0$, mas nem todo polinômio é inversível, logo o anel não é corpo.

Exemplo 4 Seja $f(x) = 2 + 2x - x^3$ e $g(x) = -x + 5x^2$.

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= 2 \cdot 0 + [2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0]x + [2 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0]x^2 + \\ &+ [2 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0]x^3 + [0 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1)]x^4 + [(-1) \cdot 5]x^5 \\(fg)(x) &= -2x + 8x^2 + 10x^3 + x^4 - 5x^5\end{aligned}$$

1.3 Grau de Polinômio

Conhecendo os polinômios e algumas propriedades, agora é necessário definir o grau de um polinômio e posteriormente a raiz de um polinômio para discutir se há fórmulas para obter as raízes de qualquer polinômio.

Definição 3 O grau de um polinômio não nulo é o índice de seu coeficiente dominante, expresso pela notação ∂ .

Assim, $\partial(f \cdot g) = \partial(f) + \partial(g)$ e $\partial(f + g) \leq \max\{\partial(f), \partial(g)\}$, onde f e g são polinômios, conforme apresentado nos Exemplos 5 e 6.

Exemplo 5 Seja f e g dois polinômios não nulos com coeficientes dominantes, respectivamente, a_n e b_m , tais que $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$.

Tem-se que $\partial(f) = n$ e $\partial(g) = m$. Além disso, $(fg)(x) = a_0b_0\dots + a_nb_mx^{n+m}$. Como $a_nb_m \neq 0$, pois os fatores são elementos não nulos do anel de integridade, então $\partial(f \cdot g) = n + m = \partial(f) + \partial(g)$.

Exemplo 6 Seja f e g dois polinômios não nulos com coeficientes dominantes, respectivamente, a_n e b_m , tais que $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$.

Se $n = m$, então $(f + g)(x) = a_0b_0 + \dots + (a_n + b_m)x^n$ e $\partial(f + g) = n = m = \partial(f) = \partial(g)$, logo a expressão $\partial(f + g) = \max\{\partial(f), \partial(g)\}$ é verdadeira. Nota-se que $\partial(f + g) < \partial(f)$ apenas quando $a_n + b_m = 0$.

Se $n > m$, então $(f + g)(x) = a_0b_0 + \dots + (a_n + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_nx^n$ e $\partial(f + g) = n = \partial(f) = \max\{\partial(f), \partial(g)\}$.

Se $n < m$, então $(f + g)(x) = a_0b_0 + \dots + (a_n + b_m)x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_mx^m$ e $\partial(f + g) = m = \partial(g) = \max\{\partial(f), \partial(g)\}$.

Em se tratando de divisibilidade de polinômio. Seja $f, g, h \in A[x]$. Então f divide g se existir h , tal que $g = f \cdot h$. Assim, f é divisor de g e g é divisível por f . Usa-se a notação $f|g$ para indicar que f divide g . Em particular, se $f|g$, $g \neq 0$, então $g = f \cdot h$, portanto $\partial(g) = \partial(f) + \partial(h)$, logo $\partial(f) \leq \partial(g)$.

Exemplo 7 Em $\mathbb{R}[x]$ o polinômio dado por $f(x) = x + 1$ divide o polinômio dado por $g(x) = x^2 - 1$, pois $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

Assim, existe um $h(x) = x - 1$, tal que $g = f \cdot h$. Além disso, $\partial(f) = 1$ e $\partial(g) = 2$, comprovando que $\partial(f) \leq \partial(g)$.

1.4 Raiz de Polinômio

Um conceito fundamental para esta dissertação é a definição seguinte.

Definição 4 Um elemento $r \in A$ é chamado de raiz de um polinômio P sobre A , se $P(r) = 0$.

Exemplo 8 Seja $P(x) = -10 + 2x$. Então,

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ -10 + 2x &= 0 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Logo a raiz do polinômio ou a solução da equação de primeiro grau é $x = 5$.

1.4.1 Fórmula de Bháskara

Para um polinômio, P , com $\partial(P) = 1$, a raiz é imediata. Agora suponha $\partial(P) = 2$, tal que $P(x) = ax^2 + bx + c$. A raiz do polinômio é a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$, a qual pode ser obtida completando os quadrados como segue:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] &= 0 \\ a \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] &= 0 \\ a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \right] &= 0 \tag{1-2} \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= -\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

A expressão anterior é a famosa Fórmula de Bháskara, foi desenvolvida pelos Árabes graças a contribuição do matemático hindu, Bháskara, no século XII, apesar da equação quadrática ser manuseada desde os anos 1700 a.C. no Antigo Egito. A fórmula é considerada um dos mais significantes resultados da época.

Exemplo 9 Seja $P(x) = x^2 - 3x + 2$.

Tem-se $a = 1, b = -3$ e $c = 2$. Substituindo na Equação 1-2, tem-se:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Então, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

Note que $P(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ e $P(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 4 = 0$.

Logo, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ são raízes do polinômio $P(x)$.

1.4.2 Fórmula para Polinômios de Grau 3 e 4

Os matemáticos Bolonga, Scípio del Ferro e Niccolo Fontana, desenvolveram um método para determinar a raiz de um polinômio, P com $\partial(P) = 3$ por volta de 1545. Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Substituindo $x = y - \frac{b}{3a}$, dividindo a equação $P(x) = 0$ por a e renomeando os coeficientes, encontra-se: $y^3 + py + q = 0$. Utilizando a substituição de Viète, $y = z - p3z$, encontra-se a equação $z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$, a qual equivale a uma equação quadrática e pode utilizar a Fórmula de Bháskara para obter as suas duas raízes: $z_1^3 = \frac{-q + \sqrt{-D/27}}{2}$ e $z_2^3 = \frac{-q - \sqrt{-D/27}}{2}$, onde $D = -4p^3 - 27q^2$. Extraí-se as raízes cúbicas para isolar z_1 e z_2 . Tendo $w = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \in \mathbb{C}$, então as raízes do polinômio, $n = 3$ é $y_1 = z_1 + z_2, y_2 = wz_1 + w^2z_2$ e $y_3 = w^2z_1 + wz_2$. Depois, obtêm-se $x_{1,2,3} = y_{1,2,3} - \frac{b}{3a}$

Exemplo 10 Seja $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Tem-se $a = 1, b = -6, c = 11$ e $d = -6$. Substituindo $x = y - \frac{b}{3a} = y + 2$ na equação $P(x) = 0$, encontra-se $y^3 - y = 0$, logo $p = -1$ e $q = 0$.

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -4 \cdot (-1)^3 - 27 \cdot 0^2 = 4 \text{ e } w = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_{1,2}^3 = \frac{-q \pm \sqrt{-D/27}}{2} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4/27}}{2} = \pm \frac{i}{\sqrt{27}} \Rightarrow z_1 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{6} \quad e$$

$$z_2 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{6}.$$

$$y_1 = z_1 + z_2 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = wz_1 + w^2z_2 \Rightarrow y_2 = -1 \text{ e } y_3 = w^2z_1 + wz_2 \Rightarrow y_3 = 0.$$

Como $x = y + 2$, então $x_1 = 3, x_2 = 1$ e $x_3 = 2$ são as raízes do polinômio $P(x)$, pois $P(1) = P(2) = P(3) = 0$.

Ferrari (1522-1565) reduziu uma equação de grau 4 para outra de grau 3. Analogamente, substituindo $x = y - \frac{b}{4a}$, reduz-se a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ para $y^4 + py^2 + qy + r = 0$. Assim como na equação cúbica, toma-se y como o somatório de três termos não nulos, $y = u + v + w$. Tem-se $x^2 - (u^2 + v^2 + w^2)x^2 = 2(uv + uw + vw)$, a qual pode ser expandida e comparada com a equação reduzida, obtendo o seguinte

sistema:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2} \\ u^2 v^2 w^2 = \frac{q^2}{64} \\ u^2 v^2 + u^2 w^2 + v^2 w^2 = \frac{p^2 - 4r}{16} \end{cases} \quad (1-3)$$

De fato, u^2, v^2 e w^2 são as raízes da cúbica $y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \left(\frac{p^2 - 4r}{16}\right)y - \frac{q^2}{64} = 0$.

Para resolver o sistema é conveniente utilizar $u^2 = \alpha, v^2 = \beta$ e $z^2 = \gamma$. Ao resolver a equação cúbica como mencionado anteriormente, encontra-se as quatro soluções da equação reduzida:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} \\ y_2 &= \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} \\ y_3 &= -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} \\ y_4 &= -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} \end{aligned} \quad (1-4)$$

Exemplo 11 Seja $P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

Tem-se $a = 1, b = -10, c = 35, d = -50$ e $e = 24$. Substituindo $x = y - \frac{b}{4a} = y + \frac{5}{2}$ na equação $P(x) = 0$, encontra-se $y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{16} = 0$, logo $p = -\frac{5}{2}$, $q = 0$ e $r = \frac{9}{16}$. Portanto, tem-se o seguinte sistema substituindo u, v, w, p, q e r na Equação 1-3:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \frac{5}{4} \\ \alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (1-5)$$

A solução do sistema é $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = 1$. Substituindo na Equação 1-4, tem-se:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} = \sqrt{0} - \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{1} = -\frac{3}{2} \\ y_2 &= -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} = -\sqrt{0} + \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{1} = -\frac{1}{2} \\ y_3 &= -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = -\sqrt{0} - \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{1} = \frac{1}{2} \\ y_4 &= \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = \sqrt{0} + \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Mas, $x = y + \frac{5}{2}$. Então $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ e $x_4 = 4$ são as raízes do polinômio $P(x)$, pois $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$.

Já para $\partial(P) = 5$ ou superior, não há uma expressão para obter as raízes dos polinômios em forma de radicais, como foi demonstrado por Galois e pode ser conferido na obra de Endler [14], dentre outros.

1.4.3 Redução do Grau do Polinômio

Para obter as raízes de polinômios com grau maior ou igual a 5 é necessário aplicar outra técnica. A proposição seguinte auxilia na determinação dessas raízes, pois se for conhecido uma raiz de um polinômio de grau 5, pode-se reduzi-lo para grau 4 e utilizar a fórmula anterior. O mesmo ocorre para um polinômio de grau 6 que pode ser reduzido para grau 5 e assim por diante.

Proposição 1 *Seja r uma raiz de um polinômio não constante $P \in A[x]$. Caso tenha-se $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$, para todo $x \in A$, então $P(x) = (x-r)Q(x)$, para algum polinômio Q com uma forma padrão do tipo $Q(x) = \dots + a_nx^{n-1}$.*

Prova. Seja $x \in A$ e $y \in A$, para qualquer inteiro $n > 0$, tem-se:

$$(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n + x^{n-1}y + \dots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} - (x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} + y^n) = x^n - y^n.$$

Ou seja,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}). \quad (1-6)$$

Agora, seja P um polinômio não constante da forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$ para $n > 0$. Então:

$$P(x) - P(y) = a_1(x-y) + a_2(x^2 - y^2) + \dots + a_n(x^n - y^n).$$

Utilizando a Equação 1-6 em todas as parcelas do segundo membro juntamente com a distributividade da multiplicação e evidenciando o termo $(x-y)$, encontra-se:

$$\begin{aligned} P(x) - P(y) &= \\ (x-y) [a_1 + a_2(x+y) + a_3(x^2 + xy + y^2) + \dots + a_n(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})] &= (x-y) \\ (a_1 + a_2y + \dots + a_ny^{n-1}) + (a_2 + a_3y + \dots + a_ny^{n-2})x + \dots + a_nx^{n-1} &= (x-y)Q(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$P(x) = (x-y)Q(x) + P(y). \quad (1-7)$$

Em que $Q(x)$ é um polinômio de $A[x]$ da forma padrão $Q(x) = \dots + a_nx^{n-1}$ com $a_n \neq 0$. De fato, pela proposição, como r é uma raiz de $P(x)$, então seja $y = r$, logo $P(y) = P(r) = 0$ que ao ser substituído na Equação 1-7 encontra-se: $P(x) = (x-r)Q(x)$. \square

Exemplo 12 Seja $P(x) = x^2 - x$

É evidente que não há um termo independente de x , logo $r = 0$ é raiz de $P(x)$, ou seja, $P(0) = 0$. Conhecendo essa raiz, pode-se reduzir o polinômio.

Evidenciando x , tem-se $P(x) = x(x - 1)$ ou então $P(x) = (x - 0)(x - 1)$. Utilizando a proposição anterior, $Q(x) = x - 1$ e sua raiz é $x = 1$, pois $Q(1) = 0$. Assim, $P(0) = P(1) = 0$ sendo que $x = 0$ e $x = 1$ são as raízes do polinômio $P(x)$.

Generalizando a proposição anterior, temos o seguinte corolário que agiliza a redução do polinômio caso sejam conhecidas mais raízes.

Corolário 1 Seja $P \in A[x]$ definido por $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$. Se r_1, r_2, \dots, r_m são raízes de P , então $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_m)Q_m(x)$.

Prova. Já que r_1 é raiz de P , então a proposição anterior garante que $P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$ para algum $Q_1(x) \in A[x]$ em forma padrão $Q_1(x) = \dots + a_nx^{n-1}$. Entretanto, r_2 também é raiz, então $P(r_2) = (r_2 - r_1)Q_1(r_2) = 0$. Admitindo que $r_1 \neq r_2$, então resta que $Q_1(r_2) = 0$, logo r_2 é raiz de Q_1 . No caso de $r_1 = r_2$, a conclusão de ser raiz de P é imediata. Assim, utilizando a proposição novamente, tem-se $Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x)$ para algum $Q_2(x) \in A[x]$ em forma padrão $Q_2(x) = \dots + a_nx^{n-2}$. Portanto,

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x).$$

Esse procedimento pode ser replicado para r_3, r_4, \dots, r_m , resultando em:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_m)Q_m(x)$$

para algum $Q_m(x) \in A[x]$ em forma padrão $Q_m(x) = \dots + a_nx^{n-m}$ para $x \in A$, como queríamos demonstrar. \square

Exemplo 13 Seja $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ em que $P(0) = P(1) = 0$

Como $r_1 = 0$ e $r_2 = 1$ são raízes de P , então podemos utilizar o corolário e concluir que $P(x) = (x - 0)(x - 1)Q_2(x)$. Utilizando manipulações matemáticas, encontra-se $Q_2(x) = x - 2$ em que $Q_2(2) = 0$, logo $x = 2$ é raiz de Q_2 . Percebe-se que $r_3 = 2$, pois $P(2) = 0$.

No exemplo anterior, vimos que o referido polinômio de grau três têm três raízes. Será que isso é uma coincidência? Vejamos a proposição seguinte.

Proposição 2 Seja $P \in A[x]$ um polinômio definido por $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$. Então, P tem no máximo n raízes em A .

Prova. Se P não tem nenhuma raiz em A , então a proposição é verdadeira, pois $n \geq 0$. Entretanto, se r_1, r_2, \dots, r_m são raízes de P , então pelo corolário anterior, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_m)Q_m(x)$ para algum $Q_m(x) \in A[x]$ em forma padrão $Q_m(x) = \dots + a_n x^{n-m}$. Além disso, se existir outra raiz, então ela também deve ser raiz de Q_m . Se $m = n$, então $Q_m(x) = a_n$ e não há raiz em A devido $a_n \neq 0$. Portanto, este fato mostra que a quantidade de raízes de P não ultrapassa n . \square

Exemplo 14 Seja $P(x) = x^2 + 1$.

Ao utilizar a Fórmula de Bháskara, constata-se que P não tem nenhuma raiz em \mathbb{Z} , nem em \mathbb{Q} e nem em \mathbb{R} , mas tem raízes no corpo \mathbb{C} . Portanto, se $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Q}$ ou $A = \mathbb{R}$, então o polinômio sobre A pode ter uma quantidade de raízes inferior ao seu grau.

1.4.4 Teorema do Resto

Teorema 1 (Teorema do Resto) *Seja f um polinômio sobre A , com $\partial(f) \geq 1$. Se A é um subanel unitário do anel de integridade L e r é um elemento de L , então o resto da divisão de $f(x)$ por $x - r$ é $f(r)$.*

Prova. Pelo algoritmo euclidiano, se o quociente e o resto da divisão de f por $x - r$ em $L[x]$ são, respectivamente, q e l , então $f(x) = (x - r)q(x) + l(x)$ em que $\partial(l) < \partial(x - r) = 1$, caso $l \neq 0$. Logo, $\partial(l) = 0$ e consequentemente l é uma constante.

Substituindo a variável r em $f(x)$, tem-se $f(r) = (r - r)q(r) + l(r) = l(r)$. Mas, l é um polinômio constante, logo $l(x) = l$. Assim, $l = f(r)$ como queríamos demonstrar. \square

Exemplo 15 O resto da divisão de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3$ por $x - 1$ é $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 3$, ou seja, $f(1) = -4$.

Corolário 2 *Seja f um polinômio sobre A , com $\partial(f) \geq 1$. Se A é um subanel unitário do anel de integridade L e r é um elemento de L , então $(x - r)|f(x)$, se e somente se, $f(r) = 0$.*

Prova. Se $(x - r)|f$, então o resto da divisão de f por $(x - r)$ é nulo e este resto pela proposição anterior é $f(r)$. Portanto, $f(r) = 0$, concluindo a condição necessária.

Se $f(r) = 0$ e sabendo que ele é o resto da divisão de f por $(x - r)$, então, por hipótese, $(x - r)|f$, finalizando a condição suficiente. \square

Exemplo 16 Seja $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$, então $(x - 1)|f$, pois $f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 = 0$.

Através do algoritmo euclidiano, do Teorema 1 e do Corolário 2, desenvolveu-se o Algoritmo de Briot-Ruffini para efetuar a divisão de polinômios e pode ser encontrado em [13].

Proposição 3 *Seja P um polinômio sobre A . Se L é um anel integridade do qual A é um subanel unitário e $r_1, r_2, \dots, r_k \in L$ são raízes distintas de f , então existe um polinômio q sobre L , com $\partial(q) = n - k$, tal que $P(x) = (x - r_1)\dots(x - r_k)q(x)$.*

O conceito de anel de integridade e de subanéis podem ser encontrados em Domingues [13].

Prova. Já que r_1 é raiz de P , então utilizando a Equação 1-7 tem-se que $P(x) = (x - r_1)q_1(x)$ para algum $q_1(x) \in A[x]$ em forma padrão $q_1(x) = \dots + a_n x^{n-1}$. Entretanto, r_2 também é raiz, então $P(r_2) = (r_2 - r_1)q_1(r_2) = 0$. Como as raízes são distintas, então $r_1 \neq r_2$, restando que $q_1(r_2) = 0$, logo r_2 é raiz de q_1 . Assim, utilizando a Equação 1-7 novamente, tem-se $q_1(x) = (x - r_2)q_2(x)$ para algum $q_2(x) \in A[x]$ em forma padrão $q_2(x) = \dots + a_n x^{n-2}$. Portanto, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)q_2(x)$.

Esse procedimento pode ser replicado para r_3, r_4, \dots, r_k , resultando em $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_k)q(x)$ para algum $q(x) \in A[x]$ em forma padrão $q(x) = \dots + a_n x^{n-k}$ para $x \in A$, ou seja, $\partial(q) = n - k$, como queríamos demonstrar. \square

Percebe-se que $q(x)$ pode ser uma constante, inclusive unitária. Neste caso, $\partial(q) = 0$ e conseqüentemente $n = k$, ou seja, a quantidade de raízes é igual ao grau do polinômio. Confirmando a proposição de que P tem no máximo n raízes.

Assim, podemos reduzir um polinômio P , de grau n a um polinômio q , de grau $n - k$ ao conhecer k raízes.

Exemplo 17 *Seja $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.*

É nítido que $x = 0$ é raiz do polinômio. Mas também pode-se evidenciar x , obtendo $P(x) = x(x^2 - 3x + 2)$, ou então, $P(x) = (x - 0)(x^2 - 3x + 2) = (x - 0)q(x)$, onde $q(x) = x^2 - 3x + 2$. Logo, reduziu-se um polinômio P , de grau 3 para um polinômio q , de grau 2 ao conhecer a raiz $x = 0$. Obtêm-se as raízes do polinômio q facilmente pela Fórmula de Bháskara, sendo $x = 1$ e $x = 2$ as raízes de q e conseqüentemente de P . Assim, $q(x) = (x - 1)(x - 2)$ e $P(x) = (x - 0)(x - 1)(x - 2)$.

Mas, nem sempre as raízes são distintas. Quanto há raízes iguais, denomina-se raízes múltiplas como a definição seguinte.

1.4.5 Multiplicidade de Raízes

Definição 5 Seja P um polinômio sobre A e r um elemento de A . Se existe um número natural k tal que $P(x) = (x - r)^k q_k(x)$ onde $q_k(x)$ é um polinômio com coeficientes em A e r não é uma raiz de q_k . Então, r é uma raiz de multiplicidade k de P .

Exemplo 18 Seja $P(x) = x^2 - 6x + 9$. Então $r = 3$ é uma raiz de multiplicidade 2, pois $P(x) = (x - 3)^2$.

Proposição 4 Seja P um polinômio sobre A e $r \in A$ uma raiz de P , o qual é raiz múltipla de P , se e somente se, r for uma raiz de $P'(x)$.

Prova. Se r é uma raiz múltipla de P , então essa multiplicidade é de pelo menos 2, logo existe $q_2(x)$, tal que $P(x) = (x - r)^2 q_2(x)$. Realizando a derivação do produto, tem-se $P'(x) = 2(x - r)q_2(x) + (x - r)^2 q_2'(x)$. Assim, $P'(r) = 2(r - r)q_2(r) + (r - r)^2 q_2'(r) = 0$, concluindo a condição necessária.

Suponha por absurdo que r não é uma raiz múltipla de P , ou seja, é uma raiz distinta das outras, então $P(x) = (x - r)q(x)$ no qual $q(x) \neq 0$. Realizando a derivação do produto, tem-se $P'(x) = q(x) + (x - r)q'(x)$. Assim, $P'(r) = q(r) + (r - r)q'(r) = q(r) \neq 0$, o qual é um absurdo, pois por hipótese $P'(r) = 0$, concluindo a condição suficiente. Logo a raiz tem multiplicidade. \square

Exemplo 19 Seja $P(x) = x^2 - 6x + 9$. Então, temos que $r = 3$ é uma raiz de múltipla de P .

Logo, $P(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 0$. Tem-se $P'(x) = 2x - 6$ e $P'(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$, conforme a proposição anterior.

1.4.6 Raízes Racionais

Proposição 5 Seja P um polinômio sobre A tal que $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ e $r = \frac{u}{d}$, uma raiz de P na forma irredutível, $\text{mdc}(u, d) = 1$, então $u|a_0$ e $d|a_n$.

Prova. Como r é raiz, então $f(r) = 0$, logo $a_0 + a_1 \left(\frac{u}{d}\right) + a_2 \left(\frac{u}{d}\right)^2 + \dots + a_n \left(\frac{u}{d}\right)^n = 0$. Multiplicando ambos os membros por d^n , tem-se $a_0d^n + a_1ud^{n-1} + \dots + a_nu^n = 0$. Evidenciando d no primeiro membro, tem-se $d(a_0d^{n-1} + a_1ud^{n-2} + \dots + a_{n-1}u^{n-1}) = -a_nu^n$. Então $d|a_nu^n$, logo $d|a_n$ ou $d|u^n$, mas $\text{mdc}(u, d) = 1$, então $d \nmid u^n$, restando que $d|a_n$.

Agora, ao evidenciar u da expressão $a_0d^n + a_1ud^{n-1} + \dots + a_nu^n = 0$, tem-se $u(a_1d^{n-1} + a_2ud^{n-2} + \dots + a_{n-1}u^{n-2}d + a_nu^{n-1}) = -a_0d^n$. Então $u|a_0d^n$, logo $u|a_0$ ou $u|d^n$, mas $\text{mdc}(u, d) = 1$, então $u \nmid d^n$, restando que $u|a_0$. \square

A recíproca da proposição anterior não é verdadeira conforme o contra-exemplo a seguir.

Exemplo 20 Seja $P(x) = 3x^2 + 1$ e $r = \frac{1}{3}$.

Tem-se $a_0 = 1, a_n = 3, u = 1$ e $d = 3$. Assim, $u|a_0$, pois $1|1$ e $d|a_n$, pois $3|3$. Mas, $r = \frac{1}{3}$ não é raiz de P , pois $P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \neq 0$.

Corolário 3 Se um número inteiro r é raiz de $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ sobre \mathbb{Z} , então r é divisor de a_0 .

Prova. Como $r \in \mathbb{Z}$, então $d = 1$. Logo, $r = \frac{u}{1} = u$. Temos que $u|a_0$, então $r|a_0$, como queríamos demonstrar. \square

Corolário 4 Se $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n \in \mathbb{Z}$, então as eventuais raízes racionais de P são números inteiros divisores de a_0 .

Prova. Note que $a_n = 1$. Pela proposição, tem-se que $d|a_n$, então $d = \pm 1$. Assim, $r = \frac{u}{d} = \pm u$ e pertence a \mathbb{Z} . Pela proposição, $u|a_0$ e o mesmo acontece com $-u$, portanto $r|a_0$, como queríamos demonstrar. \square

Exemplo 21 Seja $P(x) = x^2 + x + 3$, tal que o polinômio $P \in \mathbb{Z}[x]$.

O polinômio P não tem raízes racionais, pois caso contrário elas seriam números inteiros divisores de 3. Mas os divisores ± 1 e ± 3 resultam nas imagens $P(1) = 5$, $P(-1) = 3$, $P(3) = 15$ e $P(-3) = 9$. Então, P não tem raízes reais.

1.4.7 Raízes Complexas

Proposição 6 Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ um polinômio sobre \mathbb{R} . Se o número complexo z é raiz de f , então o complexo \bar{z} também é outra raiz desse polinômio.

Prova. São necessárias as seguintes propriedades:

$$z = w \Leftrightarrow \bar{z} = \bar{w}$$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = z$$

Por hipótese, $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} P(\bar{z}) &= a_0 + a_1\bar{z} + a_2(\bar{z})^2 + \dots + a_n(\bar{z})^n \\ &= \overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n} \\ &= \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

□

Exemplo 22 Seja $P(x) = x^2 + 1$, então para determinar as raízes, $P(x) = 0$, tem-se $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$. Assim, se $z = i$ é raiz de P , então $\bar{z} = -i$ também é raiz de P .

Observa-se que um polinômio de grau ímpar, deve ter pelo menos uma raiz real, pois as raízes complexas são em quantidades pares. Assim, se encontrar uma raiz complexa, é uma consequência imediata que seu conjugado também é raiz.

Métodos Numéricos

Os babilônios, a cerca de 1800 a.C., criaram uma método para encontrar o valor de um número irracional em forma de raiz quadrada não exata, por meio de iterações simples [12]. Por exemplo, $\sqrt{5}$.

A técnica consiste em estimar um valor inicial, x_0 , para $\sqrt{5}$. Assume-se x_0 positivo. Se x_0 assumir o valor exato da raiz, nada deve ser feito. Então, há duas possibilidades, $x_0 < \sqrt{5}$ ou $x_0 > \sqrt{5}$.

$$x_0 < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}x_0 < 5 \Rightarrow \sqrt{5} < \frac{5}{x_0}. \text{ Logo, } x_0 < \sqrt{5} < \frac{5}{x_0}$$

Analogamente,

$$x_0 > \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}x_0 > 5 \Rightarrow \sqrt{5} > \frac{5}{x_0}. \text{ Logo, } x_0 > \sqrt{5} > \frac{5}{x_0}$$

Portanto, se tomando a média de x_0 e $\frac{5}{x_0}$, tem-se:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{5}{x_0} \right)$$

O valor resultante, x_1 , fica no meio de x_0 e $\frac{5}{x_0}$. Assim, o novo valor é uma aproximação melhor para $\sqrt{5}$. Então, utiliza-se esse valor para a próxima estimativa de $\sqrt{5}$. Ao continuar formando as médias sucessivas, encontra-se:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{5}{x_1} \right) \\ x_3 &= \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{5}{x_2} \right) \\ &\dots \\ x_{k+1} &= \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{5}{x_k} \right) \end{aligned} \tag{2-1}$$

Intuitivamente, a sequência de números $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ deve se aproximar de $\sqrt{5}$. Por exemplo, utilizando $x_0 = 1$, encontra-se:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 1 \\
 x_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{1} \right) = 3 \\
 x_2 &= \frac{1}{2} \left(3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{7}{3} = 2,333333... \\
 x_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3} + \frac{15}{7} \right) = \frac{47}{21} = 2,238095... \\
 x_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{47}{21} + \frac{105}{47} \right) = \frac{2207}{987} = 2,236068... \\
 x_5 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2207}{987} + \frac{4935}{2207} \right) = \frac{2435424}{1089155} = 2,236067... \\
 x_6 &= 2,236067...
 \end{aligned} \tag{2-2}$$

O valor de x_6 concorda com o valor exato de $\sqrt{5}$ até a sexta casa decimal.

Para calcular a raiz quadrada de outro valor, basta substituir o “5” pelo valor desejado. Ou seja, para $\sqrt{9}$:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 1 \\
 x_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{1} \right) = 5 \\
 x_2 &= \frac{1}{2} \left(5 + \frac{9}{5} \right) = 3,4... \\
 x_3 &= 3,023529... \\
 x_4 &= 3,000092... \\
 x_5 &= 3,000000...
 \end{aligned}$$

Portanto, o procedimento concorda o valor exato, pois $\sqrt{9} = 3$.

Posteriormente, essa técnica é generalizada e descrita formalmente, conhecida como Método de Newton-Raphson, a qual foi descrito em *Méthod of fluxions* em 1671 por Newton e publicada em 1736, segundo Oliveira [23]. Mas, em 1690, Joseph Raphon havia publicado o mesmo método proposto por Newton, conhecido como *Analysis aequationum universalis*. Portanto, para referenciar ambos, o método é conhecido atualmente como *Método de Newton-Raphson*, apesar da sua origem iniciar milênios antes das publicações citadas.

A Equação 2-1 pode ser reescrita como na Equação 2-3:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \frac{x_k^2 + 5}{2x_k} \\
 &\text{ou} \\
 x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2x_k}.
 \end{aligned} \tag{2-3}$$

Percebe-se na fração da segunda expressão da Equação 2-3, que o denominador é a derivada do numerador. Esse fato não é coincidência. Abordamos a seguir que o Método de Newton-Raphson utiliza a derivada de uma função polinomial.

2.1 A Derivada

No Método de Newton-Raphson tem-se a presença da derivada de uma função, que no caso deste trabalho aborda-se como Polinômio. Mas, o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral não é trabalhado no Ensino Básico. No entanto, Oliveira [23], menciona que discute-se no Brasil a possibilidade de incluir o Cálculo no Ensino Médio devido a sua importância nas mais diferentes áreas do conhecimento e na sua exigência nos anos iniciais de muitos cursos superiores da área de Exatas.

Ávila [1], em 1991, lembra que na década 60 o Cálculo era ensinado na escola secundária e no programa da 3ª série do chamado curso científico, contemplando o ensino de derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros conteúdos como o Polinômio de Taylor.

Neste contexto, Ávila [1] alerta que “descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual”. Logo, incluir o Cálculo no Ensino Básico nada mais é que corrigir um equívoco cometido no passado. Pois, “a idéia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados” [1].

Além disso, Ávila defende que o ensino do Cálculo é útil para encontrar raízes de polinômio através do Método de Newton: “Uma importante aplicação da derivada na própria Matemática, e de muita atualidade nessa época de cálculos numéricos com auxílio de computadores eletrônicos,... trata-se do Método de Newton no Cálculo Numérico, em particular do cálculo de raízes n-ésimas pelo método das aproximações sucessivas” [1].

De toda maneira, para o Método de Newton-Raphson, não é necessário o conhecimento de todo o Cálculo Diferencial e Integral. Sabendo-se que a derivada de um polinômio é também um polinômio e utilizando a estratégia popularmente conhecida como “regra do tombo”, facilmente compreendida/memorizada por alunos no Ensino Médio, é possível contornar a ausência do Cálculo.

Definição 6 *A derivada de uma função P é a função denotada por P' , tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f , se existir o limite, seja dado por:*

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x}. \quad (2-4)$$

A definição anterior é encontrada em Leithold [18] e auxilia na demonstração da seguinte proposição.

Proposição 7 *Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, então a sua derivada no ponto x é $P'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}$.*

Prova. Utilizando a definição de derivada

$$\begin{aligned}
 P'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a_0 + a_1(x+h) + \dots + a_{n-1}(x+h)^{n-1} + a_n(x+h)^n] - [a_0 + \dots + a_n x^n]}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a_1(x+h) - a_1 x] + \dots + [a_{n-1}(x+h)^{n-1} - a_{n-1} x^{n-1}] + [a_n(x+h)^n - a_n x^n]}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_1 [h] + \dots + a_{n-1} \left[\binom{n-1}{0} x^{n-1} h^0 + \dots + h^{n-2} - x^{n-1} \right] + a_n \left[\binom{n}{0} x^n h^0 + \dots + h^{n-1} - x^n \right]}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[a_1 + \dots + a_{n-1} \left(\binom{n-1}{1} x^{n-2} + \dots + h^{n-2} \right) + a_n \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \dots + h^{n-1} \right) \right]}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[a_1 + \dots + ((n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_{n-1} h^{n-2}) + (na_n x^{n-1} + \dots + a_n h^{n-1}) \right] = \\
 &= a_1 + 2a_2 x + \dots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + na_n x^{n-1}.
 \end{aligned} \tag{2-5}$$

Utilizou-se a Fórmula do Binômio de Newton para expandir $(x+h)^n$, tal qual apresentado na Equação 2-6, evidenciou-se h , simplificou-se e resolveu o limite.

$$(x+h)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} h^p \tag{2-6}$$

onde $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$. □

Esta proposição é conhecida como “regra do tombo” e garante que a derivada de um polinômio também é um polinômio.

Uma aplicação bastante mencionada nos livros sobre derivada é a inclinação da reta tangente. Leithold [18], utiliza a seguinte definição.

Definição 7 *Seja f uma função contínua em x_0 . A reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(x_0, f(x_0))$ é a reta que passa por A tendo inclinação $m(x_0)$, dada por $m(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, se o limite existir. Ou, a reta $x = x_0$ se os limites laterais tenderem ao infinito.*

Acoplando a Definição 6 com a Definição 7, tem-se que o coeficiente angular de uma reta tangente no ponto x_0 é dado pela Equação 2-7.

$$m(x_0) = f'(x_0). \tag{2-7}$$

A equação cartesiana da reta definida pelo ponto $A(x_0, y_0)$ e com coeficiente angular m é dada pela Equação 2-8, segundo Reis [25],

$$y = y_0 + m(x - x_0). \quad (2-8)$$

Assim, substituindo a Equação 2-7 na Equação 2-8 e renomeando os termos adequadamente, tem-se a Equação 2-9 para a equação da reta r tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$:

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2-9)$$

2.2 O Método do Ponto Fixo

O Método de Newton-Raphson é uma particularização do Método do Ponto Fixo, o qual consiste em transformar a equação $P(x) = 0$ em uma equação equivalente $f(x) = x$, onde $P(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ que contém pelo menos uma raiz do polinômio P . Assim, por meio de uma aproximação inicial x_0 , gera-se uma sequência $\{x_k\}$ de termos que se aproximam da raiz r , através da relação $x_{k+1} = f(x_k)$. A função f é tal que $P(r) = 0$ se, e somente se, $f(r) = r$, conforme Ruggiero [28]. A Figura 2.1 ilustra esse processo quando há convergência.

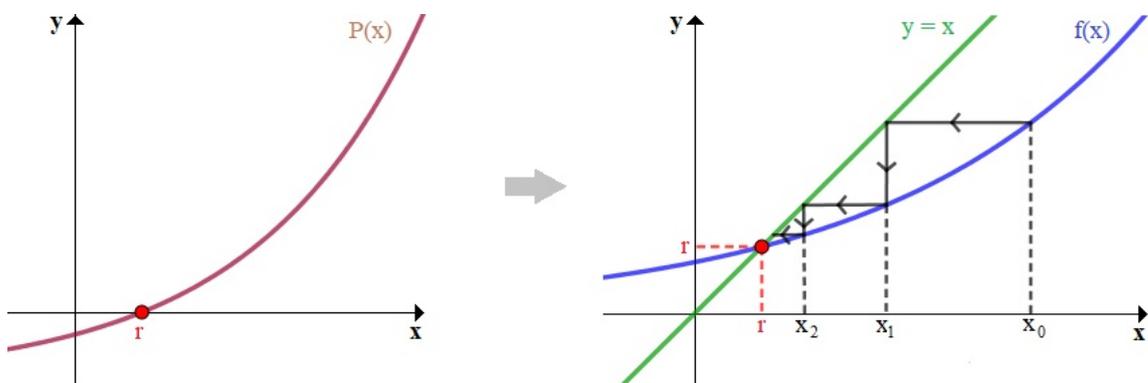


Figura 2.1: Interpretação Geométrica do Método do Ponto Fixo

Logo, transforma-se o problema de determinar a raiz do polinômio P , em um problema de encontrar um ponto fixo, o qual é dado pelo par ordenado (r, r) , sendo encontrado por meio da função de iteração f , que satisfaz as condições anteriores. Essa função tem a forma geral conforme a Equação 2-10, mas, $A(r) \neq 0$ para r ser ponto fixo,

$$f(x) = x + A(x)P(x). \quad (2-10)$$

Portanto, existem diversas funções de iteração f . Além disso, nem sempre $\{x_k\} \rightarrow r$ quando $k \rightarrow \infty$. Logo, o referido método não é muito eficiente. Porém, o teorema seguinte fornece condições para a convergência do método, sendo que sua demonstração pode ser encontrada em [28] ou [12].

Teorema 2 *Seja r uma raiz do polinômio P , isolada num intervalo I centrado em r . Se $f(x)$ e $f'(x)$ são contínuas em I , $|f'(x)| \leq k < 1$ para $\forall x \in I$ e $x_0 \in I$. Então, a sequência $\{x_k\}$ converge para r .*

A função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivável no intervalo I , com $|f'(x)| \leq k < 1$ para $\forall x \in I$ e $x_0 \in I$ é o exemplo mais comum de contração segundo Lima [19], na qual toda contração é uma função uniformemente contínua.

Neste contexto, uma das condições de convergência é que $|f'(x)| < 1$ e que provavelmente a convergência seja mais rápida quando menor for o valor de $|f'(r)|$.

2.3 O Método de Newton-Raphson

O Método de Newton-Raphson utiliza a função de interação f , tal que $f'(r) = 0$, satisfazendo a condição de convergência apresentada no Teorema 2: $|f'(x)| < 1$. Logo, encontra-se $A(x)$ da Equação 2-10 partindo de $f(x)$ com a exigência de $f'(r) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + A(x)P(x) \\ f'(x) &= 1 + A'(x)P(x) + A(x)P'(x) \\ f'(r) &= 1 + A'(r)P(r) + A(r)P'(r) \\ f'(r) &= 1 + A(r)P'(r) \\ 0 &= 1 + A(r)P'(r) \\ A(r) &= -\frac{1}{P'(r)}. \end{aligned}$$

Primeiramente, utilizou-se a Equação 2-10, aplicou-se a derivada em relação a variável x em ambos os membros da equação utilizando a derivada do produto, atribuiu-se o ponto de domínio r . Em seguida, utilizou-se o fato de $P(r) = 0$, já que r é uma raiz de P . Depois, pela exigência do método, utiliza-se $f'(r) = 0$ e isola-se $A(r)$. Assim, a expressão da função A que satisfaz o resultado encontrado, pode ser representada conforme a Equação 2-11:

$$A(x) = -\frac{1}{P'(x)}. \quad (2-11)$$

A referida função é válida para $P'(r) \neq 0$. Substituindo a Equação 2-11 na Equação 2-10, tem-se a função de interação para o Método de Newton, conforme a Equação 2-12:

$$f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}. \quad (2-12)$$

Assim, escolhe-se x_0 adequadamente e determina-se a sequência $\{x_k\}$, para $k = 0, 1, 2, \dots$ por meio da Equação 2-13 que é outra maneira de reescrever a Equação 2-12. Ambas as equações resumem o referido método numérico:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}. \quad (2-13)$$

Exemplo 23 O problema inicial em determinar uma aproximação da $\sqrt{5}$, pode ser reescrito como $x = \sqrt{5}$ ou $x^2 = 5$ ou $P(x) = x^2 - 5$, no qual pretende-se encontrar r em que $P(r) = 0$. Temos que $P'(x) = 2x$, por meio da Equação 2-5 ou Proposição 7. Substituindo $P(x)$ e $P'(x)$ na Equação 2-13, encontramos a Equação 2-14.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2x_k} \\ &= \frac{x_k^2 + 5}{2x_k} \\ &= \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{5}{x_k} \right). \end{aligned} \quad (2-14)$$

Percebe-se que o resultado da Equação 2-14 é o mesmo da Equação 2-1, ou seja, os Babilônios utilizavam implicitamente o Método de Newton-Raphson antes do desenvolvimento do referido método.

Iniciando arbitrariamente com $x_0 = 0$, temos os valores expressos na Equação 2-2. Assim, o valor $x_6 = 2,236067$ corresponde ao valor aproximado de $\sqrt{5}$.

2.3.1 Interpretação Geométrica do Método

A interpretação geométrica para a Fórmula do Método de Newton-Raphson citada por muitos autores, como Lima [19], Ruggiero [28] e Oliveira [23], parte-se de um ponto inicial x_0 do domínio da função polinomial e obtém a equação da reta, $r_0(x)$, tangente à curva do polinômio P no ponto $(x_0, P(x_0))$. Utilizando a Equação 2-9, então a equação da referida reta é dado por Equação 2-15.

$$r_0(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0). \quad (2-15)$$

Seja $(x_1, 0)$ o ponto de interseção do eixo x com a reta r_0 . Para determinar x_1 , basta isolá-lo da expressão $r_0(x_1) = 0$, conforme a Equação 2-16:

$$\begin{aligned} r_0(x_1) &= P(x_0) + P'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \\ x_1 &= x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}, \end{aligned} \quad (2-16)$$

onde $P'(x_0) \neq 0$.

A abscissa x_1 deve se encontrar mais próxima da raiz r do que o ponto inicial x_0 . Logo, repete-se o procedimento obtendo a equação da reta $r_1(x)$, tangente a curva do polinômio P no ponto $(x_1, P(x_1))$, utilizando a Equação 2-9 e encontrando a Equação 2-17:

$$r_1(x) = P(x_1) + P'(x_1)(x - x_1). \quad (2-17)$$

Seja $(x_2, 0)$ o ponto de interseção do eixo x com a reta r_1 . Como $r_1(x_2) = 0$, encontra-se x_2 conforme a Equação 2-18:

$$\begin{aligned} r_1(x_2) = P(x_1) + P'(x_1)(x_2 - x_1) &= 0 \\ x_2 &= x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)}, \end{aligned} \quad (2-18)$$

onde $P'(x_1) \neq 0$.

Analogamente, repete-se o procedimento, conforme ilustrado na Figura 2.2, gerando uma sequência de pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$.

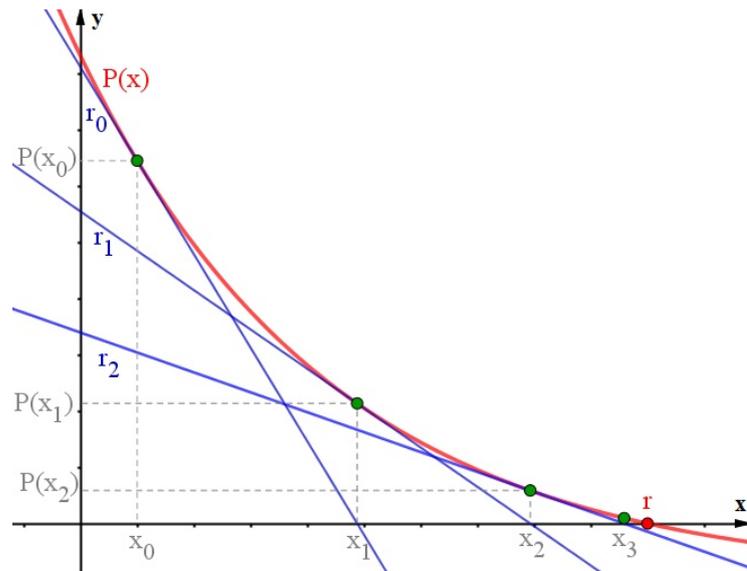


Figura 2.2: Interpretação Geométrica do Método de Newton-Raphson

Para o k -ésimo termo da sequência $\{x_k\}$ de valores aproximados para a raiz do polinômio, tem-se a expressão Equação 2-19, uma generalização intuitiva das Equações 2-16 e 2-18, alterando os índices numéricos para k -ésimo e o seu sucessor:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}, \quad (2-19)$$

onde $P'(x_k) \neq 0$, para todo x_k no domínio da função polinomial.

Percebe-se que a Equação 2-19 é idêntica a Equação 2-13.

2.3.2 Teoremas para Convergência do Método

Nem sempre a Interpretação geométrica é verdadeira, ou seja, o Método de Newton-Raphson pode resultar em uma divergência entre a sequência de aproximações x_k e a raiz r , dependendo das condições do ponto inicial e da função $P(x)$. O teorema seguinte garante a convergência.

Teorema 3 *Sejam $P(x)$, $P'(x)$ e $P''(x)$ contínuas no intervalo I que contém a raiz $x = r$ da equação $P(x) = 0$. Se $P'(r) \neq 0$, então existe um intervalo $I_1 \subset I$, contendo a referida raiz, tal que a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo Método de Newton-Raphson a partir de $x_0 \in I_1$, convergirá para a raiz.*

Prova. Lima [19] enuncia e demonstra que todo polinômio é uma função contínua. Mostramos que a derivada de um polinômio também é um polinômio. Logo, $P(x)$, $P'(x)$ e $P''(x)$ são contínuas neste trabalho em que P sempre é um polinômio.

Como o Método de Newton-Raphson é uma particularização do Método do Ponto Fixo, então para demonstrar a referida convergência, basta verificar as hipóteses do Teorema 2. Ou seja, deve-se mostrar que existe $I_1 \subset I$ centrado em r , tal que: $f(x)$ e $f'(x)$ sejam contínuas em I_1 ; $|f'(x)| \leq k < 1, \forall x \in I_1$. Onde f é a função de iteração.

$$\text{Da Equação 2-19, tem-se } f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)} \text{ e } f'(x) = \frac{P(x)P''(x)}{[P'(x)]^2}.$$

$P'(r) \neq 0$, por hipótese, e como $P(x)$, $P'(x)$ e $P''(x)$ são contínuas, então é possível criar $I_2 \subset I$ tal que $P'(x) \neq 0, \forall x \in I_2$. Logo, no intervalo $I_2 \subset I$, $f(x)$ e $f'(x)$ são contínuas.

Como $f'(x)$ é contínua em I_2 e $f'(r) = 0$, pois $P(r) = 0$, então é possível obter $I_3 \subset I_2$ tal que $|f'(x)| < 1, \forall x \in I_3$. Além disso, I_3 pode ser centrado em r .

Portanto, obtem-se $I_3 \subset I$, centrado em r , tal que $f(x)$ e $f'(x)$ são contínuas neste intervalo e $|f'(x)| < 1, \forall x \in I_3$, concluindo que $I_1 = I_3$. Logo, se $x_0 \in I_1$, a sequência $\{x_k\}$ obtida pelo Método de Newton converge para a raiz r . \square

Assim, o Teorema 3 garante que o Método de Newton-Raphson sempre converge quando o valor inicial x_0 for escolhido suficientemente próximo da raiz desejada.

Portanto, o valor inicial x_0 deve ser escolhido adequadamente. Ruggiero [28] menciona que antes de utilizar um método numérico para o refinamento e melhoramento das sucessivas aproximações para uma raiz por meio de iterações, é necessário realizar a localização ou o isolamento das raízes, consistindo em obter um intervalo que contém a raiz. Os teoremas enunciados a seguir ajudam a realizar o isolamento da raiz desejada.

Teorema 4 (Teorema de Bolzano) *Seja P contínua no intervalo $[a, b]$. Se $P(a)P(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz (quantidade ímpar de raízes reais) r , tal que $r \in (a, b)$.*

O referido teorema é uma consequência imediata do Teorema do Valor Intermediário: Seja $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $P(a) < d < P(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. A sua demonstração pode ser encontrada em Lima [19]. No caso do teorema anterior, adota-se $d = 0$, logo $P(r) = 0$ e r é raiz da equação.

Observa que se $P(a)P(b) < 0$, então as imagens $P(a)$ e $P(b)$ têm valores contrários. Ou seja, se uma é positiva a outra é negativa. Assim, para algum ponto r no intervalo (a, b) , o gráfico $P(x)$ intercepta o eixo das abscissas, logo $P(r) = 0$, o que é facilmente verificado geometricamente como na Figura 2.3.

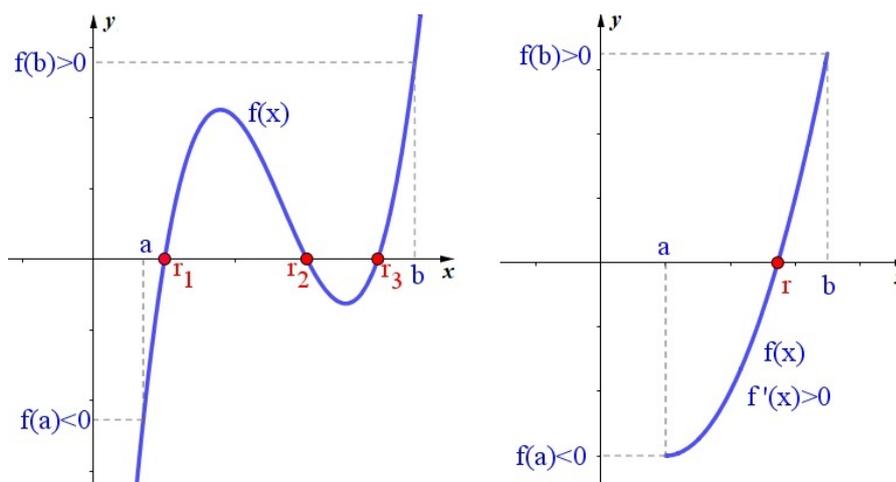


Figura 2.3: Interpretação Geométrica do Teorema de Bolzano

O Teorema de Bolzano garante que há pelo menos uma raiz. Mas, se acrescentar a condição de $P'(x)$ existir e preservar o sinal no intervalo (a, b) , então há apenas uma raiz para equação $P(x) = 0$ no referido intervalo.

Em Lima [19], encontra-se corolários que afirmam que uma função monótona preserva o sinal de suas derivadas. Assim, se $P'(x)$ preserva o sinal em (a, b) , então P é crescente ou decrescente (estritamente) no referido intervalo. Logo, o gráfico $P(x)$ só intercepta o eixo das abscissas uma única vez, como ilustrado no gráfico do lado direito na Figura 2.3.

Exemplo 24 Seja $P(x) = x^2 - 2x - 2$. No intervalo $[1, 4]$ há pelo menos uma raiz, pois $P(1) = -3$ e $P(4) = 6$, logo $P(a)P(b) = -18 < 0$ e o Teorema de Bolzano garante a existência de raízes. Poderia investigar os sinais de outras imagens da função no referido intervalo, refinando-o para identificar a troca de sinais e consequentemente a existência de mais de uma raiz no intervalo. Mas, tem-se $P'(x) = 2x - 2$, sendo que $P'(x) > 0$ quando $x > 1$, logo $P'(x) > 0, \forall x \in (1, 4)$. Assim, a derivada conserva o sinal no intervalo e o corolário garante a existência de apenas uma raiz em $(1, 4)$. O gráfico de $P(x)$ é semelhante a curva do lado direito na Figura 2.3, sendo $a = 1$, $b = 4$ e $f(x) = x^2 - 2x - 2$.

Oliveira [23] e Cavalcanti [10] mencionam um outro teorema englobando os anteriores, pois para Newton bastaria que (a, b) fosse suficientemente pequeno para a

convergência do método, mas Raphson e Fourier concluíram que deveria ter apenas uma raiz no intervalo, estabelecendo algumas condições.

Teorema 5 *Seja $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes derivável, com P'' contínua. Suponha que:*

- i) $P(a)P(b) < 0$;*
- ii) $P'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$;*
- iii) $P''(x)$ preserva o sinal em (a, b) .*

Então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo Método de Newton converge para a única raiz r de P no intervalo, se $x_0 \in [a, b]$ for atribuído adequadamente.

Observa-se que $P''(a)P''(b) > 0$, já que $P''(x)$ preserva o sinal. Assim, o gráfico de P possui apenas uma concavidade no intervalo $[a, b]$ e a interseção da reta tangente com o eixo das abscissa permanece no mesmo sentido.

Caso o valor inicial x_0 for um dos extremos de $[a, b]$, ou seja, $x_0 = a$ ou $x_0 = b$, então $P(x_0)P''(x_0) > 0$ de modo que $P(x_0)$ e $P''(x_0)$ tenham o mesmo sinal.

2.4 O Método da Secante

Para contornar a utilização de derivada, pois não é conteúdo do Ensino Básico, pode-se substituir $P'(x_k)$ da Equação 2-19 por uma aproximação por meio do quociente da diferença de duas aproximações da raiz, x_k e x_{k-1} , conforme a Equação 2-20. O novo método descrito é conhecido como Método da Secante, pois ao invés de utilizar reta tangente a uma curva (derivada), utiliza-se reta secante a uma curva, a qual passa por dois pontos próximos na curva. Isto é,

$$P'(x_k) \approx \frac{P(x_k) - P(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \quad (2-20)$$

Substituindo a Equação 2-20 na Equação 2-19, encontra-se a Equação 2-21:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{\frac{P(x_k) - P(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} = \frac{P(x_k) \cdot x_{k-1} - P(x_{k-1}) \cdot x_k}{P(x_k) - P(x_{k-1})}. \quad (2-21)$$

No Método da Secante são necessários dois pontos iniciais $(x_{k-1}, P(x_{k-1}))$ e $(x_k, P(x_k))$. A equação da reta secante que passa por ambos os pontos é apresentada na Equação 2-22:

$$r_k(x) = P(x_{k-1}) + \frac{P(x_k) - P(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}). \quad (2-22)$$

A interseção da reta r_k com o eixo das abscissas gera a nova aproximação x_{k+1} . Ou seja, atribuindo $r_k(x_{k+1}) = 0$ na Equação 2-22 e isolando x_{k+1} , obtém-se a Equação 2-21 conforme mostrado na Equação 2-23. Veja:

$$P(x_{k-1}) + \frac{P(x_k) - P(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} (x_{k+1} - x_{k-1}) = 0$$

$$x_{k+1} = \frac{P(x_k) \cdot x_{k-1} - P(x_{k-1}) \cdot x_k}{P(x_k) - P(x_{k-1})}. \quad (2-23)$$

Logo, tem-se uma sequência $\{x_k\}$ para as aproximações da raiz. A interpretação geométrica do Método da Secante é ilustrada na Figura 2.4.

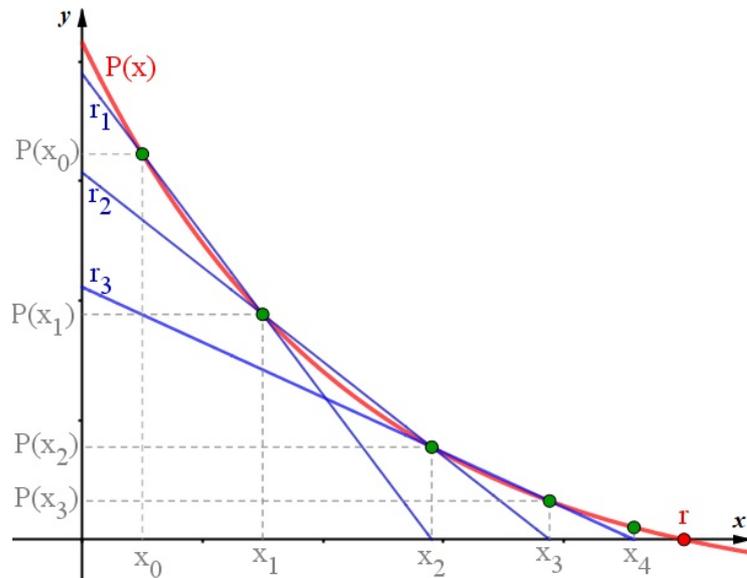


Figura 2.4: Interpretação Geométrica do Método da Secante

Percebe-se na Figura 2.4 que através dos pontos $(x_0, P(x_0))$ e $(x_1, P(x_1))$, encontra-se a reta r_1 e a aproximação x_2 . Depois, através dos pontos $(x_1, P(x_1))$ e $(x_2, P(x_2))$, encontra-se a reta r_2 e a aproximação x_3 . E assim sucessivamente, gerando a sequência $\{x_k\}$. Na ilustração, na qual há convergência, percebe-se que $\{x_k\} \rightarrow r$ e $\{P(x_k)\} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

2.5 Critérios de Parada das Iterações

A convergência e a determinação da raiz podem ocorrer quando $k \rightarrow \infty$, mas os métodos do Ponto Fixo, de Newton-Raphson e da Secante, são iterativos em que x_k depende de x_{k-1} e uma quantidade elevada de iterações k , pode ser trabalhosa e inviável. Além disso, por ser métodos numéricos aproximados, uma quantidade pequena de iterações pode divergir da raiz desejada. Portanto, deve-se estabelecer critérios para utilizar uma quantidade satisfatória de iterações.

Deseja-se que $x_k \approx r$ e/ou $P(x_k) \approx 0$ para uma determinada quantidade de iterações k . Assim, Ruggiero [28] estabelece dois critérios de parada para as iterações conforme as Equações 2-24 e 2-25. Isto é,

$$|x_k - r| < \varepsilon_x, \quad (2-24)$$

$$|P(x_k)| < \varepsilon_y, \quad (2-25)$$

onde ε_x e ε_y são as precisões aceitáveis.

Nem sempre é possível satisfazer os dois critérios simultaneamente. Então, normalmente, interrompe-se o processo iterativo quando atingir uma das precisões desejadas.

O primeiro critério pode ser inviável, já que o valor da raiz exata r , é desconhecido e o objetivo é justamente determiná-lo. Logo, para verificar se o erro nas abscissas é aceitável verifica se a raiz aproximada x_k , pertence a um intervalo pequeno em que se encontra a raiz exata r . Ou seja, $r \in [a, b]$ e $b - a < \varepsilon_x$, então $\forall x_k \in [a, b]$ tem-se $|x_k - r| < \varepsilon_x$. Portanto, se $x_k, r \in [a, b]$, a condição da Equação 2-24 pode ser substituída pela Equação 2-26:

$$b - a < \varepsilon_x. \quad (2-26)$$

2.6 Exemplos

Exemplo 25 Seja $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$.

A função polinomial P é do terceiro grau, pois $\partial(P) = 3$. Logo, há no máximo três raízes para a equação $P(x) = 0$. Para encontrar as raízes, pode-se utilizar a fórmula por radicais como no Exemplo 10, o qual pode ser trabalhoso. Então, utilizamos os métodos numéricos para encontrar uma raiz, depois reduzir o polinômio para outro do segundo grau ao conhecer uma raiz e utilizar a Fórmula de Bháskara para determinar as demais raízes, caso existam.

Tem-se $P(4) = 30$ e $P(7) = -12$. Seja $a = 4$ e $b = 7$, logo $P(a)P(b) = -360 < 0$. Sabe-se que toda função polinomial é contínua, então pelo Teorema de Bolzano tem-se que no intervalo $[4; 7]$ existe pelo menos uma raiz.

$P'(x) = 3x^2 - 32x + 69$. Pode-se utilizar a Fórmula de Bháskara, Equação 1-2, e a fatoração em raízes, Corolário 1, para concluir que $P'(x) = 3(x - 3)\left(x - \frac{23}{3}\right)$. Logo, no intervalo $\left(3; \frac{23}{3}\right)$ tem-se $P'(x) < 0$. Como $3 < 4$ e $\frac{23}{3} = 7,\bar{6} > 7$, então $(4; 7) \subset \left(3; \frac{23}{3}\right)$ e a derivada da função polinomial conserva o sinal no intervalo investigado, $(4; 7)$. Assim, há apenas uma raiz no referido intervalo.

Adotando $x_0 = 5$, em que $x_0 \in [4; 7]$.

Iniciando pelo Método do Ponto Fixo, adotando convenientemente $A(x) = \frac{3}{x^2}$ e substituindo na Equação 2-10, tem-se a Equação 2-27:

$$f(x) = x + \frac{3}{x^2} (x^3 - 16x^2 + 69x - 54). \quad (2-27)$$

Assim, a Equação 2-27 pode ser expandida e generalizada conforme a Equação 2-28:

$$x_{k+1} = \frac{4x_k^3 - 48x_k^2 + 207x_k - 162}{x_k^2}. \quad (2-28)$$

$$\text{Para } k = 0 \text{ e } x_0 = 5, \text{ tem-se } x_1 = \frac{4x_0^3 - 48x_0^2 + 207x_0 - 162}{x_0^2} = 6,92.$$

$$\text{Para } k = 1 \text{ e } x_1 = 6,92, \text{ tem-se } x_2 = \frac{4x_1^3 - 48x_1^2 + 207x_1 - 162}{x_1^2} \cong 6,2103.$$

$$\text{Para } k = 2 \text{ e } x_2 = 6,2103, \text{ tem-se } x_3 = \frac{4x_2^3 - 48x_2^2 + 207x_2 - 162}{x_2^2} \cong 5,9725.$$

$$\text{Para } k = 3 \text{ e } x_3 = 5,9725, \text{ tem-se } x_4 = \frac{4x_3^3 - 48x_3^2 + 207x_3 - 162}{x_3^2} \cong 6,0073.$$

$$\text{Para } k = 4 \text{ e } x_4 = 6,0073, \text{ tem-se } x_5 = \frac{4x_4^3 - 48x_4^2 + 207x_4 - 162}{x_4^2} \cong 5,9982.$$

Percebe-se que com apenas 4 iterações a sequência parece convergir e oscilar para o resultado 6.

Verificando, tem-se $P(6) = 6^3 - 16 \cdot 6^2 + 69 \cdot 6 - 54 = 0$, ou seja, $r_1 = 6$ é raiz da função polinomial P .

Conforme o Corolário 1, o polinômio pode ser escrito: $P(x) = (x - r_1)q_m(x)$. Neste caso, temos $P(x) = (x - 6)(x^2 - 10x + 9)$.

$q_2(x) = x^2 - 10x + 9$ é uma expressão do segundo grau e pode-se utilizar a Fórmula de Bháskara para determinar as outras duas raízes. Tem-se $a = 1, b = -10$ e $c = 9$. $r_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow r_2 = 1$ e $r_3 = 9$.

Logo, o polinômio têm raízes $r_1 = 6, r_2 = 1$ e $r_3 = 9$.

Assim, $P(x) = (x - 1)(x - 6)(x - 9)$.

Conseguiu-se determinar as raízes exatas, mas muitas vezes são encontradas apenas raízes aproximadas pelos métodos numéricos. Assim, surge a necessidade de verificar se as raízes são adequadas por meio das Equações 2-24 e 2-25.

Além disso, para facilitar o procedimento multi-iterativo, tabela-se os dados encontrados, conforme a Tabela 2.1 a qual apresenta as iterações do Método do Ponto Fixo em $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$ para encontrar r_1 .

A primeira coluna representa a numeração da iteração k . A segunda coluna expressa numericamente o resultado do cálculo da aproximação da raiz x_k , do Método do Ponto Fixo por meio da Equação 2-28. A terceira coluna utiliza a Equação 2-24 com $r = 6$ e a quarta coluna utiliza a Equação 2-25.

Tabela 2.1: Método do Ponto Fixo em $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$

k	x_k	$ x_k - r $	$ P(x_k) $
0	5	1	16
1	6,92	0,92	11,32851
2	6,210288	0,210288	3,056584
3	5,972531	0,027469	0,413524
4	6,007309	0,007309	0,109528
5	5,998204	0,001796	0,026948
6	6,000451	0,000451	0,006763
7	5,999887	0,000113	0,001689
8	6,000028	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$
9	5,999993	$7,0 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$
10	6,000002	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-5}$

Percebe-se que quanto maior for a quantidade de iterações k , mais próximo x_k , segunda coluna, está da raiz exata $r_1 = 6$. Assim, o erro em x , terceira coluna, é pequeno, sendo que na décima iteração o erro está presente a partir da sexta casa decimal. Já o erro em y também é pequeno e na 10ª iteração ele está presente a partir da quinta casa decimal.

Logo, através da tabela pode-se afirmar que caso deseje uma raiz aproximada com valor exato apenas nas duas primeiras casas decimais, então oito iterações são suficientes para garantir os dois critérios, mas pode-se exigir apenas um dos critérios de parada.

No Método de Newton-Raphson, substituindo $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$ e $P'(x) = 3x^2 - 32x + 69$ na Equação 2-19, tem-se a Equação 2-29:

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 - 16x_k^2 + 54}{3x_k^2 - 32x_k + 69}. \quad (2-29)$$

$$\text{Para } k = 0 \text{ e } x_0 = 4, \text{ tem-se } x_1 = \frac{2x_0^3 - 16x_0^2 + 54}{3x_0^2 - 32x_0 + 69} \cong 6,7273.$$

$$\text{Para } k = 1 \text{ e } x_1 = 6,7273, \text{ tem-se } x_2 = \frac{2x_1^3 - 16x_1^2 + 54}{3x_1^2 - 32x_1 + 69} \cong 5,8260.$$

$$\text{Para } k = 2 \text{ e } x_2 = 5,8260, \text{ tem-se } x_3 = \frac{2x_2^3 - 16x_2^2 + 54}{3x_2^2 - 32x_2 + 69} \cong 5,9968.$$

$$\text{Para } k = 3 \text{ e } x_3 = 5,9968, \text{ tem-se } x_4 = \frac{2x_3^3 - 16x_3^2 + 54}{3x_3^2 - 32x_3 + 69} \cong 5,9999.$$

Pode-se tabular esses dados juntamente com os erros surgidos de cada iteração, conforme apresentado na Tabela 2.2.

Percebe-se que com poucas iterações encontrou-se erros muito pequenos. Além disso, iniciou-se com $x_0 = 4$, o qual é mais distante da raiz exata do que o valor utilizado

Tabela 2.2: Método de Newton-Raphson em $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$

k	x_k	$ x_k - r $	$ P(x_k) $
0	4	2	30
1	6,727273	0,727273	9,466566
2	5,826050	0,173950	2,664509
3	5,996797	0,003203	0,048073
4	5,999999	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$
5	6,000000	$2,5 \cdot 10^{-13}$	$3,7 \cdot 10^{-12}$

no Método do Ponto Fixo, pois caso utilize $x_0 = 5$, a raiz exata seria encontrada na primeira iteração.

No Método da Secante, substituindo $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$ e sua derivada $P'(x) = 3x^2 - 32x + 69$ na Equação 2-23, tem-se a Equação 2-30:

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 x_{k-1} - 16x_k x_{k-1} + x_k x_{k-1}^2 + 54}{x_k^2 - 16x_k + x_{k-1} x_k - 16x_{k-1} + x_{k-1}^2 + 69}. \quad (2-30)$$

Para $k = 1$, $x_0 = 4$ e $x_1 = 5$, utilizando a Equação 2-30 tem-se $x_2 \cong 6,1429$.

Para $k = 2$, $x_1 = 5$ e $x_2 = 6,1429$, utilizando a Equação 2-30 tem-se $x_3 \cong 6,0103$.

Para $k = 3$, $x_2 = 6,1429$ e $x_3 = 6,0103$, utilizando a Equação 2-30 tem-se $x_4 \cong 5,9998$.

E assim sucessivamente até satisfazer o critério de parada.

Pode-se tabelar esses dados juntamente com os erros surgidos de cada iteração, conforme apresentado na Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Método da Secante em $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$

k	x_k	$ x_k - r $	$ P(x_k) $
0	4	2	30
1	5	1	16
2	6,142857	0,142857	2,099125
3	6,010309	0,010309	0,154426
4	5,999784	0,000216	0,003242
5	6,000000	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$

Pode realizar uma comparação entre os métodos. Segundo Ruggiero [28], a comparação entre os métodos numéricos deve considerar os seguintes critérios: garantia de convergência; esforço computacional; rapidez de convergência.

A garantia da convergência é restrita a cada método, mas desejamos comparar e utilizar os métodos apenas quando a condição de convergência for satisfeita, caso

contrário, busca-se outro método. O Método do Ponto Fixo (MPF) é mais complexo, pois escolhe-se a função $A(x)$ de maneira que o método convirja adequadamente.

O esforço computacional em métodos numéricos cujas iterações são calculadas por meio de recursos computacionais depende da quantidade e da complexidade das operações numéricas realizadas pela máquina. Esses dois critérios, apesar de serem importantes, fogem do contexto deste trabalho.

A rapidez da convergência pode ser constatada através da quantidade de iterações k , efetuadas em cada método até atingir a precisão desejada pelo critério de parada. Esse é o critério utilizado para julgar o método mais adequado, ou seja, procura-se a menor quantidade de iterações que cumpre uma determinada precisão.

A Tabela 2.4 condensa a comparação entre o Método do Ponto Fixo (MPF), Método de Newton-Raphson e o Método da Secante para o exemplo da função polinomial dada pela fórmula $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$ em que se deseja encontrar a raiz exata, $r = 6$.

Tabela 2.4: Comparação dos Métodos para $P(x) = x^3 - 16x^2 + 69x - 54$

	MPF	Newton	Secante
Dados iniciais	$x_0 = 5$	$x_0 = 4$	$x_0 = 4$ e $x_1 = 5$
k	10	5	5
x_k	6,000002	6,000000	6,000000
$ P(x_k) $	$2,6 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot 10^{-12}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$
Erro em x	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-13}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$

A primeira linha apresenta o tipo de método. A segunda linha traz os dados iniciais, ponto de partida para começar a calcular as raízes aproximadas, sendo que o ideal seria o mesmo dado inicial para todos os métodos. A terceira linha da tabela é composta pela a quantidade de iterações k , de cada método. Enquanto a quarta linha apresenta as raízes aproximadas x_k , dada pela iteração informada na linha anterior. Já as últimas linhas informam as precisões atingidas pela iteração da 3ª linha em relação ao erro em y e em x , respectivamente.

Percebe-se na Tabela 2.4 que o Método de Newton-Raphson é o mais eficiente, neste exemplo, pois apresenta uma menor quantidade de iterações e pequenos erros. Caso a precisão desejada seja 10^{-4} , então todos os métodos são adequados e conforme a Tabela 2.2, o Método de Newton necessitaria apenas de 4 iterações.

Exemplo 26 Seja $f(x) = e^{-x^2} - \cos(x)$.

A função exponencial apresentada na Tabela 2.5 e a função logarítmica mostrada na Tabela 2.6 reforçam que não, necessariamente, precisa ser uma função polinomial para

garantir a convergência e a eficiência superior do Método de Newton-Raphson. Ruggiero [28] também realizou um exemplo para uma função senoidal.

Tabela 2.5: Comparação dos Métodos para $f(x) = e^{-x^2} - \cos(x)$

	MPF	Newton	Secante
Dados iniciais	$x_0 = 1,5$	$x_0 = 1,5$	$x_0 = 1$ e $x_1 = 2$
k	6	2	5
x_k	1,44752471	1,44741635	1,44741345
$ f(x_k) $	$7,0 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$5,2 \cdot 10^{-7}$
Erro em x	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$

A Tabela 2.5 mostra que para uma precisão de 10^{-4} em y no intervalo $(1;2)$, o Método de Newton convergiu mais rápido, com apenas duas iterações atingiu a precisão desejada. A função de iteração no MPF é dada por: $f(x) = \cos(x) - e^{-x^2} + x$.

Exemplo 27 Seja $f(x) = x \log(x) - 1$.

Tabela 2.6: Comparação dos Métodos para $f(x) = x \log(x) - 1$

	MPF	Newton	Secante
Dados iniciais	$x_0 = 2,5$	$x_0 = 2,5$	$x_0 = 2,3$ e $x_1 = 2,7$
k	5	2	3
x_k	2,50618417	2,50618415	2,50618418
$ f(x_k) $	$2,0 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-10}$	$2,9 \cdot 10^{-8}$
Erro em x	$3,8 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$	$8,1 \cdot 10^{-5}$

Já a Tabela 2.6 apresenta que para uma precisão de 10^{-5} no intervalo $(2;3)$, o Método de Newton convergiu mais rápido, com apenas duas iterações atingiu a precisão desejada. A função de iteração do Método do Ponto Fixo é utilizada foi dada por: $f(x) = x - 1,3(x \log x - 1)$.

Exemplo 28 Seja $P(x) = x^3 - x + 1$.

Voltando ao tema de polinômios, a Tabela 2.7 apresenta um caso interessante no intervalo $[1,2]$ e cuja precisão desejável seja $\varepsilon = 10^{-5}$. A função de iteração do Método do Ponto Fixo é dado por: $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$.

A comparação na Tabela 2.7 é “injusta” já que o ponto de partida no MPF, $x_0 = 1$, é mais próximo da raiz exata, $r \cong 1,3$, do que o ponto inicial do Método de Newton, $x_0 = 0$. Além disso, o ponto inicial do MPF está dentro do intervalo desejado $[1;2]$, enquanto dos outros métodos não estão.

Tabela 2.7: Comparação dos Métodos para $P(x) = x^3 - x + 1$

	MPF	Newton	Secante
Dados iniciais	$x_0 = 1$	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$ e $x_1 = 0,5$
k	9	21	27
x_k	1,324717	1,324718	1,324718
$ P(x_k) $	$5,2 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$8,9 \cdot 10^{-8}$
Erro em x	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$9,0 \cdot 10^{-6}$

Ruggiero [28], justificou a elevada quantidade de iterações no Método de Newton devido $x_2 = -0,5$, o qual é próximo de um zero da derivada de $P(x)$.

Ou seja, $P'(x) = 3x^2 - 1$, sendo que $P'(x) = 0 \iff x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \cong \pm 0,57735$. Assim, a raiz aproximada em algum momento passa próximo a um destes valores.

Exemplo 29 Seja $P(x) = x^3 - 3,5x^2 + 4x - 1,5$.

$P(x) = x^3 - 3,5x^2 + 4x - 1,5 = (x - 1)^2(x - 1,5)$, logo tem-se $r_1 = 1$ é uma raiz dupla de P e a outra raiz é $r_2 = 1,5$. Além disso, $P'(x) = 3x^2 - 7x + 4$, sendo que $P'(x) = 0 \iff x' = 1$ e $x'' = \frac{4}{3}$. Ou seja, além de $r_1 = 1$ ser raiz, este valor resulta em um zero na derivada, logo pode ocorrer divergência no Método de Newton, já que $P'(x_k) \neq 0$, para todo x_k no domínio da função polinomial, conforme a Equação 2-19.

A Tabela 2.8 apresenta o resultado do Método de Newton-Raphson em três casos para a função cuja fórmula é $P(x) = x^3 - 3,5x^2 + 4x - 1,5$. Deseja-se atingir uma precisão de $\varepsilon = 10^{-7}$, em qualquer um dos dois critérios de parada.

Tabela 2.8: Método de Newton para $P(x) = x^3 - 3,5x^2 + 4x - 1,5$

	Caso A	Caso B	Caso C
x_0	0,5	1,33333	1,33334
k	12	35	27
x_k	0,999778284	0,999708915	1,50000001
$ P(x_k) $	$2,4 \cdot 10^{-8}$	$4,2 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$
Erro em x	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$

O caso A é para $x_0 = 0.5$ e houve a convergência com poucas iterações. O caso B é para $x_0 = 1,33333$, o qual é menor que $\frac{4}{3}$, enquanto o caso C é para $x_0 = 1,33334$, o qual é maior que $\frac{4}{3}$. Sabe-se que no ponto $x = \frac{4}{3}$ a curva de P muda a monotonicidade, pois $P'(\frac{4}{3}) = 0$ (ponto crítico), ou seja, para $x > \frac{4}{3}$ a reta tangente a curva P é uma inclinação positiva e para $x < \frac{4}{3}$ uma inclinação com valor negativo. Como o Método de Newton é

baseado na reta tangente, então houve interferência e diferença nos casos B e C, sendo que no caso B a convergência foi para a raiz $r_1 = 1$ e no caso C para a raiz $r_2 = 1,5$.

Como já era previsto, a quantidade de iterações foi elevada, pois o fato $P'(1) = 0$ é um problema para encontrar $P(1) = 0$. Entretanto, a sequência $\{x_k\}$ convergiu mais rápido que a sequência $\{P'(x_k)\}$ para zero, por isto o método conseguiu encontrar as raízes, o que nem sempre é possível.

Além dos Métodos do Ponto Fixo, Newton e Secante, Ruggiero [28], utiliza o Método da Bissecção e da Posição Falsa. Conclui-se que o Método de Newton utiliza cálculos mais elaborados enquanto o Método da Bissecção necessita de cálculos mais simples, mas a quantidade de iterações pela Bissecção é bem maior, logo não há uma garantia de eficiência sobre o esforço computacional entre os métodos.

Afirma-se que o método ideal deva assegurar a convergência, deva ter operações simples para os cálculos nas iterações e poucas iterações. Assim, como nos exemplos anteriores, o Método de Newton é o mais indicado quando a determinação da derivada for simples, como no caso dos polinômios, mas se o cálculo da derivada for complexo, recomenda-se utilizar o Método da Secante.

Contudo, a escolha adequada do método deve considerar a equação que se deseja resolver, bem como a região da raiz exata, do critério de parada adotado e da complexidade em determinar a derivada da função.

Planejamento para Aplicação no Ensino Básico

O objetivo deste capítulo é fornecer uma sequência de conteúdos para a utilização do Método de Newton-Raphson no Ensino Básico. Como pré-requisito, necessita-se do conhecimento dos conteúdos de polinômios, funções e Geometria Analítica. Primeiramente, discute-se sobre tecnologia e o programa educacional Geogebra que é utilizado no processo de aplicação do método.

Depois, inicia-se o conteúdo com a ideia de derivada, ilustrando o conteúdo e apresentando exemplos em uma aula e se for necessário, uma aula de exercícios. Em seguida, em duas aulas, destaca-se a convergência do método, informando quando ele converge, ilustrando o Teorema de Bolzano e apresentando exemplos para realizar o isolamento e refinamento de um intervalo que contenha uma raiz exata. Posteriormente, mencionar os critérios de parada dos métodos iterativos em uma aula.

Por fim, em uma hora aula, ilustra-se o Método de Newton-Raphson, mostrando a sua interpretação geométrica e relação com a reta tangente. Pode-se programar o método com uma planilha e/ou com algum *software* matemático sendo necessário, também, uma aula. Realiza-se diversos exemplos para fixar o conteúdo. Pode-se comparar os exemplos algébricos com aqueles produzidos pelo método.

Oliveira [23] destaca a importância e utilidade do *software* educacional GeoGebra como ferramenta auxiliadora para utilizar o Método de Newton-Raphson no Ensino Básico. Ele sugere a utilização do programa para professores que já o manuseia em sala de aula, pois a ferramenta é valiosa e enriquecedora. Mas, o recurso computacional não é obrigatório e pode ser dispensado a critério do professor.

Para este trabalho, optou-se em utilizar o referido programa para facilitar a visualização interpretativa do método, para programação do método e utilizá-lo em outros exemplos, e para compreender a sua funcionalidade por meio das animações possíveis graças ao GeoGebra.

O presente planejamento pode ser executado depois de estudar todo o conteúdo de polinômio no Ensino Básico. Dando continuidade ao mesmo para polinômios com grau maiores que 2 e que não tenha uma fórmula para determinar as raízes dos mesmos.

3.1 A Tecnologia e o GeoGebra

Tecnologia, segundo Castro [8] é a ciência dos processos técnicos de determinados ramos de produção industrial, sendo que a técnica é todo conjunto de regras ou procedimentos utilizado para concluir eficazmente uma atividade. A referida definição é semelhante à apresentada por Ferreira [15] em que tecnologia é considerada uma ciência que aplica o conhecimento técnico e científico para fins industriais e comerciais. Já Moreira e Queiroz [21] comentam que tecnologia é uma palavra derivada do grego, a qual *techne* refere-se a artefato e *logos* implica em pensamento ou razão.

Portanto, tecnologia é definida como o conhecimento sistemático manifestado em ferramentas. Enquanto a Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC), é o conjunto de recursos computacionais e tecnológicos utilizados para gerar e manipular informações. Também pode ser compreendido como o conjunto de recursos não humanos destinados ao processamento, armazenamento e comunicação da informação [24]. A sigla TIC abrange as atividades desenvolvidas pelos recursos da informática, nas áreas de Tecnologia da Informação e Comunicação.

Para vários professores, a Matemática é considerada uma ciência sem capacidade de renovação. Porém, o uso da tecnologia da informação no currículo de Matemática, baseada no uso de ferramentas e técnicas (filmes, *softwares*, hipertextos) resulta na comunicação e difusão de conteúdos e conceitos matemáticos.

Neste contexto, o ensino da Matemática por meio da tecnologia apresenta recursos em consonância com o processo de aprendizagem construtivista, ou seja, o princípio básico é que o conhecimento se constrói a partir das ações do sujeito, próprio da Teoria Piagetiana.

Entretanto, o acesso isoladamente à tecnologia de ponta é insuficiente para adquirir conhecimento e aprendizagem crítica do estudante. A escola e o professor devem ter pensamento pedagógico, ideias educacionais com pretensão de colocá-las em prática, diante do uso dos recursos disponíveis. Há que se refletir sobre o uso de toda essa tecnologia, planejando a aula, preparando o ambiente tecnológico, os conhecimentos prévios dos alunos para manusear estes recursos, além dos objetivos propostos para a disciplina [29].

Logo, é preciso ser criterioso e estabelecer um planejamento no processo de mudanças, especialmente em relação ao uso da informática, pois ela isoladamente não garante esta mudança. Além disso, pode-se enganar pelo visual atrativo dos recursos tecnológicos que são oferecidos. Então, cabe ao professor escolher um *software* adequado à aula e acompanhar a manipulação do *software* pelo estudante, oportunizando ao seu aluno o exercício do pensar, argumentar, expressar suas ideias e opiniões [29].

Assim, são fundamentais no aprendizado em Matemática que se encorajam

os estudantes a explorar o ambiente acessível por meio de interfaces envolvendo um modelo de domínio de conhecimento matemático. Essa exploração depende basicamente do sistema e de acordo com Boyer [3], ela possibilita o aprimoramento de estratégias para resolver problemas por parte do estudante e contribui para o conhecimento em Matemática.

Então, a maneira mais adequada de realizar essa escolha é planejar: o que se pretende ensinar, qual é o público alvo, quais os recursos a serem utilizados nas atividades propostas. É necessário conhecer antecipadamente se os recursos estão disponíveis, se o *software* cumpre o objetivo e calcular o tempo que os alunos precisam para se adaptarem ao *software* e seus comandos.

Alguns *softwares* permitem aos alunos modelar, analisar, simular, experimentar, ou seja, são utilizados como recursos didáticos, auxiliando como ferramentas para o ensino e aprendizagem da Matemática. Com estes programas computacionais, os estudantes expressam, confrontam e refinam suas ideias. Estes *softwares* utilizam processos gráficos próximos das técnicas de representação já conhecido pelo aluno, não necessitando do domínio e conhecimento de uma nova sintaxe e morfologia.

Um exemplo deste tipo de *software* é o GeoGebra, o qual é uma ferramenta configurada pelas propriedades matemáticas, constituído com a finalidade de universalização do conhecimento no meio escolar. Ele apresenta contribuições pela dinâmica de sua funcionalidade, extrapolando o plano de visão e imaginário proposto pela educação tradicional, quadro/giz e dos livros textos [30].

O GeoGebra é um *software* livre, gratuito e pode ser adquirido no site <http://www.geogebra.org>. Foi criado por Markus Hohenwarter e desde 2001 vem se desenvolvendo. O seu nome é uma união das palavras Geometria e Álgebra. Logo ele combina a Álgebra com a Geometria, além de realizar derivadas, cálculos, estatística, gráficos, vetores, tabelas, etc. Portanto o GeoGebra é um programa bem completo e ainda utiliza planilhas eletrônicas [9].

O *software* oferece suporte às concretizações e ações mentais do aluno, interagindo com o mesmo. Ou seja, se materializa na representação dos objetos matemáticos na tela do computador e possibilita a manipulação destes objetos via representação gráfica. De acordo com Santarosa [29] estes recursos podem ajudar na superação de obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem da Matemática.

Para o presente trabalho é necessário destinar cerca de duas aulas para apresentar os comandos do programa aos alunos, manipular o mesmo e descobrir as suas funcionalidades por meio da usabilidade, praticando os comandos e explorando a ferramenta.

3.2 A Derivada

Oliveira [23] optou em utilizar animações no GeoGebra e em trabalhar com alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Dividiu a aplicação em três etapas: a ideia de limite de uma função; a derivada de uma função; aplicação do método. Utiliza-se no máximo quatro aulas para cada etapa.

Aqui não preocupamos com o formalismo do conteúdo de derivada, já que o referido conteúdo não é abordado no Ensino Básico. Conforme já discutido no Capítulo 2 na Seção 2.1 é importante adotar o estudo de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Básico. Entretanto, pode-se contornar esse déficit para utilizar o Método de Newton-Raphson. Ou seja, pode-se utilizar a Proposição 7 como um axioma, facilmente compreendida/memorizada por alunos no Ensino Médio.

Por outro lado, antes de iniciar o Método de Newton, recomendamos a apresentação geométrica da derivada em uma aula e outra aula de exercícios para determinar a derivada de polinômios em um ponto utilizando diretamente a Proposição 7 como forma de treino.

A Definição 6 apresenta a escrita matemática para determinar a derivada de um polinômio P , no ponto x_0 . Realizamos geometricamente essa ideia. Para isto, escolhemos dois pontos $(a_1, P(a_1))$ e $(b_1, P(b_1))$, tais que $a_1 < x_0$ e $b_1 > x_0$. A reta r_1 contém ambos os pontos e tem coeficiente angular $m_1 = \frac{P(b_1) - P(a_1)}{b_1 - a_1}$. A Figura 3.1, lado esquerdo, apresenta a referida ilustração da descrição anterior.

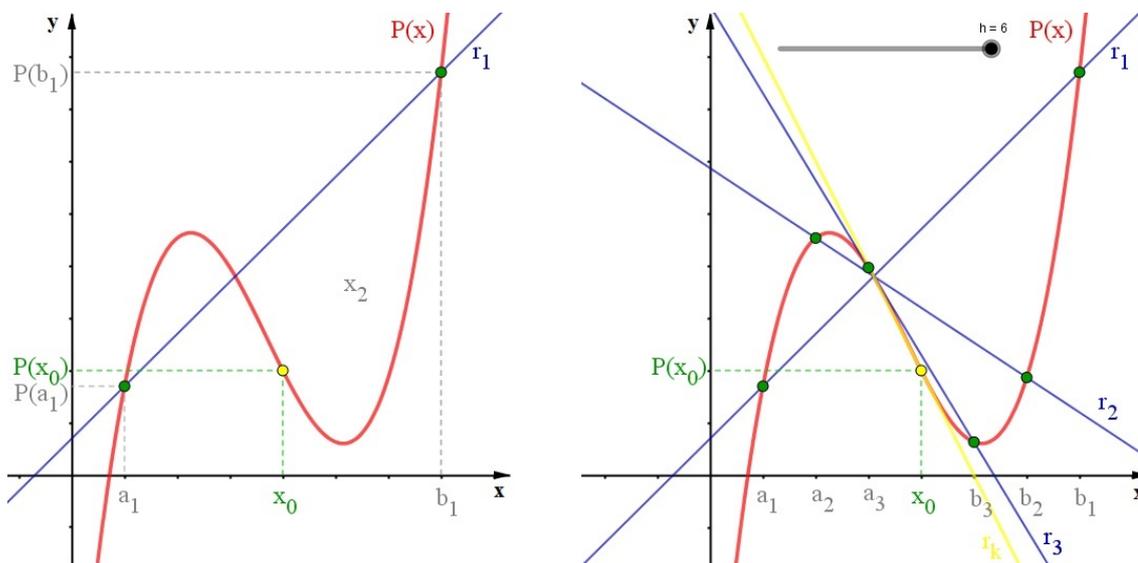


Figura 3.1: Interpretação Geométrica da Derivada

Agora, escolhemos a_2 e b_2 , tais que esses valores estejam mais próximos de x_0 . A reta r_2 contém os pontos $(a_2, P(a_2))$ e $(b_2, P(b_2))$, tendo coeficiente angular $m_2 = \frac{P(b_2) - P(a_2)}{b_2 - a_2}$. Repetimos o procedimento para a_3 e b_3 , tal que a reta r_3 contenha

os pontos $(a_3, P(a_3))$ e $(b_3, P(b_3))$. Realiza-se o procedimento k vezes, $k = 1, 2, 3, \dots$. Percebe-se que o coeficiente angular da reta r_k é m_k dado pela Equação 3-1:

$$m_k = \frac{P(b_k) - P(a_k)}{b_k - a_k}. \quad (3-1)$$

Temos que a_k e b_k são tão próximos de x_0 quanto desejarmos, quando k é muito grande. Ou seja, quando k tende para infinito, a_k tende a x_0 . Assim, em linguagem matemática é escrito: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = x_0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = x_0$.

Percebe-se na Figura 3.1 que os pontos $A = (a_k, P(a_k))$ e $B = (b_k, P(b_k))$ quando $k = 1, 2, 3, \dots$ estão cada vez mais próximos um do outro. Ou seja, isso ocorre quando a distância entre suas abscissas h , tendem a zero. Onde $h = b_k - a_k$.

Como ambos os pontos vão coincidir, então a reta r_k é apenas um ponto em comum com a curva P na proximidade deste ponto, ou seja, a referida reta é tangente à curva no ponto x_0 . Assim, pode-se concluir que o coeficiente angular m_k quando k tende para infinito (h tende para zero) é a representação da derivada da função P , no ponto x_0 conforme a Definição 7.

Portanto, a derivada de uma função em um ponto é a inclinação da reta tangente em relação o gráfico da função naquele ponto.

A Figura 3.1, lado direito, apresenta três retas secantes conforme descrito anteriormente e a reta tangente da curva P no ponto x_0 . A ilustração foi realizada pelo programa GeoGebra, no qual foi realizado uma animação com o parâmetro h . Ou seja, na medida que o valor de h diminui, os pontos se aproximam e a reta se torna a tangente naquele ponto x_0 . Além disso, é possível alterar a função P , o ponto inicial x_0 , os pontos aproximados a_1 e b_1 através do intervalo de h , para verificar o caso geométrico da derivada de outros gráficos.

Assim, acredita-se que o aluno possa compreender a ideia da derivada por meio da animação dos gráficos e da sua relação com a reta tangente no ponto.

Na Figura 3.1, lado esquerdo, os pontos verdes vão “andar” sobre a curva vermelha e se aproximar do ponto amarelo, um pela esquerda e o outro pela direita, conforme a ilustração da direita. Assim, a reta em azul aproxima da amarela. Na animação, padronizou-se a distância entre a_k e x_0 igual a distância entre b_k e x_0 , mas essa simetria não é necessária.

Exemplo 30 Seja $P(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$. Determine $P'(4)$.

Percebe-se que $x_0 = 4$. Para simplificar, suponha $a_k = x_0 = 4$ e $b_k = x_0 + h$, ou seja, $b = 4 + h$, conforme ilustrado na Figura 3.2, onde $h = 2$.

Substituindo $a_k = 4$ e $b_k = 4 + h$ na Equação 3-1, encontra-se a Equação 3-2.

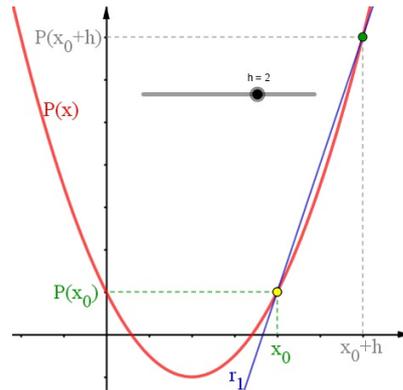


Figura 3.2: Curva $P(x) = x^2/2 - 2x + 1$

$$m_k = \frac{P(b_k) - P(a_k)}{b_k - a_k} = \frac{\frac{(4+h)^2}{2} - 2(4+h) + 1 - \left[\frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 + 1 \right]}{4+h-4} = 2 + \frac{h}{2} \quad (3-2)$$

A Tabela 3.1 apresenta o coeficiente angular m_k , da reta que contém os pontos $(4; P(4))$ e $(4+h; P(4+h))$ para alguns valores de h ao utilizar a Equação 3-2.

Tabela 3.1: Coeficientes Angulares

k	h	m_k
1	2	3
2	1	2,5
3	0,5	2,25
4	0,1	2,05
5	0,01	2,005
6	0	2

Percebe-se na Figura 3.2 que o ponto $(4+h; P(4+h))$ tendem ao ponto $(4; P(4))$ quando h diminui. E na Tabela 3.1, verifica-se, que o coeficiente angular da reta que passa por esses pontos tende a 2, quando h é muito pequeno ou nulo. Portanto, $P'(4) = 2$.

Exemplo 31 Derive as funções dadas:

1. $P_1(x) = -10 + 2x$
2. $P_2(x) = 2 - 3x + x^2$
3. $P_3(x) = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$
4. $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$

1. Observa-se que P_1 representa a equação de uma reta $y = -10 + 2x$ de coeficiente angular $m_1 = 2$. Como a curva é uma reta, então a reta tangente em qualquer ponto

da curva é a própria reta original, ou seja, a reta tangente tem coeficiente angular (derivada) constante e igual a 2. Logo, $P'_1(x) = 2$.

Por outro lado, tem-se $n = \partial(P_1) = 1$, $a_0 = -10$, $a_1 = 2$ e $P_1(x) = a_0 + a_1x^1$.

Utilizando a Proposição 7, tem-se $P'_1(x) = a_1 = 2$.

2. O gráfico de P_2 é uma parábola e pode-se utilizar a Geometria Analítica para encontrar o coeficiente angular da reta tangente de uma parábola em qualquer ponto da mesma.

Por outro lado, tem-se $\partial(P_2) = 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$ e $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, já que $n = 2$. Utilizando a Proposição 7, tem-se $P'_2(x) = a_1 + 2 \cdot a_2x = -3 + 2x$.

Por exemplo, caso deseje encontrar a derivada do polinômio no ponto 0, então $P'_2(0) = -3$.

3. Tem-se $a_0 = -6$, $a_1 = 11$, $a_2 = -6$, $a_3 = 1$ e $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, já que $n = \partial(P_3) = 3$. Pela Proposição 7: $P'_3(x) = a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 = 11 - 12x + 3x^2$.

Por exemplo, caso deseje encontrar a derivada do polinômio no ponto 0, então $P'_3(0) = 11$.

4. Tem-se $n = \partial(P_4) = 4$, $a_0 = 24$, $a_1 = -50$, $a_2 = 35$, $a_3 = -10$ e $a_4 = 1$, então $P_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Utilizando a Proposição 7, encontra-se $P'_4(x) = a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 + 4 \cdot a_4x^3 = -50 + 10x - 30x^2 + 4x^3$.

Por exemplo, caso deseje encontrar a derivada do polinômio no ponto 0, então $P'_3(0) = -50$.

3.3 A Convergência do Método

A discussão no Capítulo 2 na Seção 2.3.2 não precisa ser levada para o Ensino Básico, já que necessita do conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática.

Vimos no Teorema 3 que o Método de Newton sempre converge, desde que exista uma raiz no intervalo de análise da raiz aproximada e que $P'(x_k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. E, preferencialmente, que $P'(r_i) \neq 0$, onde r_i são as raízes exatas. Portanto, quando depararmos com $P'(x_k) = 0$ ou $P'(x_k) \cong 0$, basta mudar o valor inicial x_0 ou alterar o valor aproximado x_k de uma determinada iteração k .

Já para garantir a existência de pelo menos uma raiz, utiliza-se o Teorema 4 (Teorema de Bolzano), o qual é facilmente compreendido geometricamente pela Figura 2.3. Essa etapa pode ser trabalhosa ao optar pela técnica de tentativa, ou seja, atribuir valores aleatórios para a e b até encontrar valores de $P(a)$ e $P(b)$ com sinais opostos. Mas, podemos utilizar algum *software* para traçar o gráfico da função polinomial P , e verificar visualmente o intervalo que contém uma raiz da função.

Exemplo 32 Seja a função $P(x) = x^2 - 2x + 2$. Completando os quadrados, encontra-se $P(x) = (x - 1)^2 + 1$. Percebe-se que todo número real ao quadrado não será negativo, então $(x - 1)^2 \geq 0$, o qual será somado com 1 para resultar na expressão da função P . Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $P(x) > 0$. Assim, sempre temos $P(a) \cdot P(b) > 0$. Portanto, o Teorema de Bolzano garante que não há nenhuma raiz real, pois a curva de $P(x)$ não intercepta o eixo das abscissas. Entretanto, pode existir raízes complexas, as quais fogem da abordagem deste trabalho.

Exemplo 33 Determine os intervalos que contenha pelo menos uma raiz nas funções dadas:

1. $P_1(x) = -10 + 2x$
2. $P_2(x) = 2 - 3x + x^2$
3. $P_3(x) = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$
4. $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$

Os intervalos podem ser determinados por meio do Teorema de Bolzano e por meio de tentativa, ou seja, escolher valores arbitrários, pertencentes ao domínio da função polinomial, até a imagem de dois desses valores terem sinais contrários. Assim, utilizamos uma tabela para cada caso.

1. $n = \partial(P_1) = 1$, então pela Proposição 2, há no máximo uma raiz para a função polinomial P_1 .

Tabela 3.2: Isolamento da Raiz na Função $P_1(x) = -10 + 2x$

x	0	2	4	6
$P(x)$	-10	-6	-2	2

Como $P(4)P(6) = -4 < 0$, então pelo Teorema de Bolzano $r_1 \in [4; 6]$.

2. $n = \partial(P_2) = 2$, então pela Proposição 2, há no máximo duas raízes para a função polinomial P_2 . Então, pretendemos encontrar dois intervalos.

Tabela 3.3: Isolamento da Raiz na Função $P_2(x) = 2 - 3x + x^2$

x	0	0,5	1,5	2,5
$P(x)$	2	0,75	-0,25	0,75

Como $P(0,5)P(1,5) < 0$ e $P(1,5)P(2,5) < 0$, então pelo Teorema de Bolzano $r_1 \in [0,5; 1,5]$ e $r_2 \in [1,5; 2,5]$.

Tabela 3.4: Isolamento da Raiz na Função $P_3(x) = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$

x	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
$P(x)$	-6	-1,875	0,375	-0,375	1,875	13,125

3. $n = \partial(P_3) = 3$, então pela Proposição 2, há no máximo três raízes para a função polinomial P_3 . Então, pretendemos encontrar três intervalos. Como $P(0,5)P(1,5) < 0$, $P(1,5)P(2,5) < 0$ e $P(2,5)P(3,5) < 0$, então pelo Teorema de Bolzano $r_1 \in [0,5; 1,5]$, $r_2 \in [1,5; 2,5]$ e $r_3 \in [2,5; 3,5]$.
4. $n = \partial(P_4) = 4$, então pela Proposição 2, há no máximo quatro raízes para a função polinomial P_4 . Então, pretendemos encontrar quatro intervalos. Como apenas o sinal da imagem que importa, então a tabela a seguir apresenta apenas o símbolo de positivo ou negativo. Além disso, atribuímos mais pontos e não igualmente espaçados para mostrar a aleatoriedade.

Tabela 3.5: Isolamento da Raiz na Função $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$

x	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,8	3,2	3,5	3,8	4,1
$P(x)$	+	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+

Como $P(0,9)P(1,2) < 0$, $P(1,8)P(2,1) < 0$, $P(2,8)P(3,2) < 0$ e $P(3,8)P(4,1) < 0$, então pelo Teorema de Bolzano $r_1 \in [0,9; 1,2]$, $r_2 \in [1,8; 2,1]$, $r_3 \in [2,8; 3,2]$ e $r_4 \in [3,8; 4,1]$.

Assim, devemos escolher x_0 adequadamente no intervalo de cada caso, mas caso a sequência não convirja, então escolhe-se outro valor para x_0 no mesmo intervalo.

Os exemplos a seguir, Exemplo 34 e Exemplo 35 podem ser abordados na próxima seção, após a apresentação do Método de Newton-Raphson.

Exemplo 34 Seja $P(x) = x^3 - 3.5x^2 + 4x - 1.5$ conforme o Exemplo 29. Temos que $r_1 = 1$, $r_2 = 1.5$, $P'(x) = 3x^2 - 7x + 4$ e $P'(1) = 0$. Percebe-se que uma das raízes tem imagem zero na derivada e relatamos que $P'(r_i) \neq 0$, preferencialmente, pois apresenta um ponto de singularidade e o método pode ser trabalhoso. No caso do Exemplo 29, houve convergência para a raiz $r_1 = 1$, mas foi necessário de mais de 25 iterações.

Exemplo 35 Seja $P(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$. Logo as raízes são $r_1 = -1$, $r_2 = 0$ e $r_3 = 1$. Além disso, $P'(x) = 3x^2 - 1$.

Substituindo $P(x)$ e $P'(x)$ na Equação 2-19, tem-se $x_{k+1} = \frac{2x_k^3}{3x_k^2 - 1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Moreira (2006) [22] apresenta quatro casos:

1. Se $x_0 = \frac{1}{2}$, então $x_1 = 1$. Logo, a sequência converge na primeira iteração.
2. Se $x_0 = -\frac{1}{2}$, então $x_1 = -1$. Logo, a sequência converge na primeira iteração.
3. Se $x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, então x_{k+1} oscila entre $\frac{1}{\sqrt{5}}$ e $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Assim, não há convergência, pois a órbita da sequência é periódica de ciclo 2. Este caso foge da proposta do presente trabalho, mas pode ser estudada em Devaney (1992) [12]. Quando isto ocorre, pode-se alterar o valor inicial, x_0 .
4. Se $x_0 = -0,46544\dots$, ou seja, a raiz real da equação $2\sqrt{3}x^3 - 3x^2 + 1 = 0$, então $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Logo, há um ponto singular da derivada, já que $P'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$ que impede o cálculo de x_2 e conseqüentemente de toda a sequência x_k . Assim, a sequência não converge. O mesmo acontece se $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.4 Os Critérios de Parada

O Método de Newton-Rapshon é iterativo e a cada iteração a raiz aproximada fica mais próxima da raiz exata quando existe convergência. Então podemos realizar uma infinidade de iterações, logo necessitamos estabelecer alguns critérios de parada para finalizar o cálculo da raiz aproximada de maneira que essa raiz seja satisfatória.

Seja k a quantidade de iterações, x_k a raiz aproximada na iteração k , $P(x_k)$ a imagem dessa raiz aproximada na função polinomial, r_i uma das raízes exatas, $[a; b]$ o intervalo que contém os valores de r_i e x_k , ϵ_x e ϵ_y as precisões aceitáveis. Então, Ruggiero [28] estabelece os seguintes critérios de parada:

$$\begin{aligned} |x_k - r_i| < \epsilon_x \text{ ou } |b - a| < \epsilon_x \\ |P(x_k)| < \epsilon_y. \end{aligned} \quad (3-3)$$

Como desejamos que x_k seja uma aproximação de r_i , então a diferença entre os valores, $|x_k - r_i|$, deve ser a menor possível dentro de um erro tolerável ϵ_x . Mas, nem sempre conhecemos a raiz exata, então utilizamos a diferença das extremidades do intervalo em que contenha essa raiz, $|b - a|$.

Além disso, ao considerarmos x_k como uma raiz aproximada, então a sua imagem deve ser próxima de zero, já que $P(r_i) = 0$. Assim, desejamos que $P(x_k)$ seja o menor possível dentro de um erro tolerável ϵ_y .

Nem sempre é possível satisfazer os dois critérios simultaneamente. Então, normalmente, interrompe-se o processo iterativo quando atingir uma das precisões desejadas. Além disso, podemos ter $\epsilon_x = \epsilon_y$.

Exemplo 36 Seja $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$. No Exemplo 33, consta-se que $r_1 \in [0,9; 1,2]$. Logo, pelo primeiro critério, poderíamos adotar qualquer valor deste intervalo como raiz caso a precisão aceitável ϵ_x , seja de 0,3, já que $|1,2 - 0,9| = 0,3$.

Mas, se $\epsilon_x = 0,01$, então devemos refinar o intervalo, ou seja, atribuir mais valores na Tabela 3.5 com valores no intervalo $[0,9; 1,2]$ até encontrar um valor a e b de tal forma que $P(a)P(b) < 0$ e $|b - a| < \epsilon_x$.

Tabela 3.6: Refinamento do Intervalo da Raiz na Função $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$

x	0,9	0,909	0,918	0,927	...	0,963	0,972	0,981	0,990	0,999	1,008
$P(x)$	0,716	0,642	0,569	0,499	...	0,237	0,177	0,118	0,061	0,006	-0,047

Percebe-se na Tabela 3.6 que a primeira linha inicia-se de 0,9, uma extremidade do intervalo refinado, e atribui-se um acréscimo de $0,009 < 0,010 = \epsilon_x$. Além disso, paramos em 1,008, pois o sinal da imagem deste valor é negativo ou seja, diferente dos demais. Assim, $[0,999; 1,008]$ é um intervalo refinado em que o erro em x é dado por $|1,008 - 0,999| = 0,009 < \epsilon_x$ e $P(0,999)P(1,008) < 0$. Logo, qualquer valor no referido refinamento cumpre a precisão ϵ_x .

Caso $\epsilon_y = \epsilon_x = 0,01$, então podemos analisar o segundo critério. Analisando a segunda linha da Tabela 3.6, percebe-se que $P(0,999) = 0,006... < 0,01 = \epsilon_y$. Logo, podemos afirmar que $x = 0,999$ é uma raiz aproximada da função polinomial P_4 com exatidão de uma casa decimal para ambas precisões.

3.5 O Método de Newton-Raphson

Os métodos numéricos são utilizados quando não existem ou quando é trabalhoso utilizar uma expressão algébrica para encontrar um resultado, como determinar raízes de funções. Ou seja, eles utilizam uma sequência de instruções adequadas e resolvem uma situação problema numericamente. Logo não utiliza uma fórmula pronta que fornece um resultado ou uma expressão. Eles utilizam cálculos com números e fornecem um resultado numérico para cada caso particular.

Normalmente, eles são métodos iterativos em que a determinação de um novo valor é dependente do valor anterior e se repetem em ciclo, em que cada ciclo é denominado de iteração. Assim, inicialmente é necessário de um “chute” ou ponto de partida para determinar os demais resultados. Logo o resultado não é exato, ou seja, há uma imprecisão embutida que gera um resultado aproximado.

Nem sempre há uma convergência para o resultado esperado ou desejado, sendo necessários critérios para interromper o ciclo iterativo quando o valor determinado já é satisfatório com uma certa precisão aceitável.

Na comparação entre os métodos numéricos apresentado na Seção 2.6 no Capítulo 2, constatou-se que o Método de Newton é o mais eficiente em certas circunstâncias. Sendo assim, decidiu-se adotar neste trabalho o Método de Newton-Raphson para alunos no Ensino Básico devido a facilidade em sua expressão algébrica iterativa, rapidez na convergência e interpretação geométrica.

Em relação aos polinômios, Galois demonstrou que não existe uma fórmula para determinar as raízes de polinômios com grau maiores que 4, então é aconselhável utilizar um método numérico para encontrar as raízes de funções polinomiais de grau 5 ou superior. Além disso, a fórmula para polinômios de grau 3 e 4 apresentadas nos Exemplos 10 e 11 são bem complexas. Recomendamos utilizar os referidos exemplos e compará-los com a solução dos mesmos pelo Método de Newton-Raphson conforme é apresentado nos Exemplos 39 e 40.

Mas antes disso, pode-se abordar a técnica que os Babilônios utilizavam para calcular o valor de um número irracional, conforme apresentado na introdução do Capítulo 2. Já para a descrição do método em si, basta verificar a ideia intuitiva da interpretação geométrica abordada na Subseção 2.3.1 da Seção 2.3 do referido Capítulo.

Utilizamos o programa GeoGebra, pois com ele é possível, simultaneamente, ilustrar o método, verificar como o método funciona, programar o método, determinar uma raiz aproximada para uma determinada função polinomial e utilizá-lo para outros polinômios. O recurso da planilha e da animação facilita a compreensão visual do Método de Newton-Raphson.

Passo a passo para a construção da Figura 3.3:

- Estipule uma função polinomial $P(x)$, qualquer, desenhando-o na cor vermelha;
- Escolha os pontos $A(a, P(a))$ e $B(b, P(b))$ que obedeça o Teorema de Bolzano;
- Atribua um valor inicial x_0 , tal que $x_0 \in [a, b]$, esboçando $P_0(x_0, P(x_0))$;
- Determine $P'(x_0)$ e trace a reta tangente r_0 a curva $P(x)$ no ponto P_0 ;
- A interseção da reta r_0 com o eixo das abscissas é denominado $(x_1, 0)$ e temos $P_1(x_1, P(x_1))$ pertencente a curva $P(x)$;
- Determine $P'(x_1)$ e trace a reta tangente r_1 a curva $P(x)$ no ponto P_1 ;
- A interseção da reta r_1 com o eixo das abscissas é denominado $(x_2, 0)$ e temos $P_2(x_2, P(x_2))$ pertencente a curva $P(x)$;
- Determine $P'(x_2)$ e trace a reta tangente r_2 a curva $P(x)$ no ponto P_2 .

Perceba que os dois últimos itens estão se repetindo, ou seja, é um processo iterativo. Por meio da Figura 3.3, percebe-se no eixo das abscissas que iniciou-se de

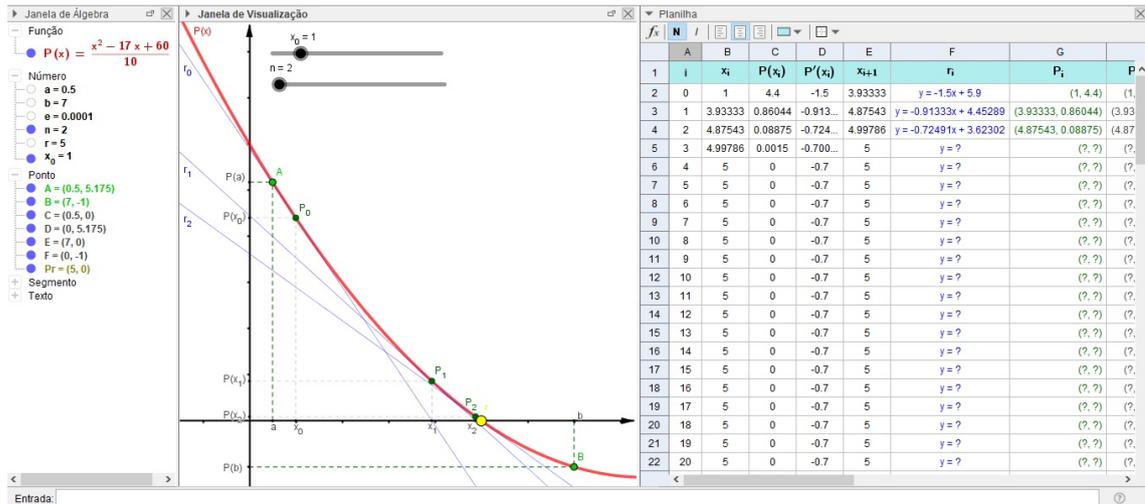


Figura 3.3: Método de Newton-Raphson - GeoGebra

x_0 , encontrou-se x_1 e em seguida x_2 . Essa sequência $x_i, i = 0, 1, 2, \dots$ é conhecida como o Método de Newton-Raphson. Além disso, percebe-se que x_2 está próximo da raiz exata, r (ponto em amarelo). Com apenas duas iterações, $i = 2$, encontrou-se uma boa aproximação para a raiz da função polinomial escolhida.

O procedimento anterior não garante uma forma automática ou a animação do método. Para isto, foi utilizado a planilha conforme a Figura 3.4.

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	i	x_i	$P(x_i)$	$P'(x_i)$	x_{i+1}	r_i	P_i	P_{x_i}	P_{y_i}	vertical	horizontal	a_i	b_i	$ b_i - a_i $	$ x_i - r $	$ P(x_i) $	Parada
2	0	1	4.4	-1.5	3.93333	$y = -1.5x + 5.9$	(1, 4.4)	(1, 0)	(0, 4.4)	4.4	1	0.5	7	6.5	4	4.4	Continua
3	1	3.93333	0.86044	-0.913...	4.87543	$y = -0.91333x + 4.45289$	(3.93333, 0.86044)	(3.93333, 0)	(0, 0.86044)	0.86044	3.93333	1	7	6	1.06667	0.86044	Continua
4	2	4.87543	0.08875	-0.724...	4.99786	$y = -0.72491x + 3.62302$	(4.87543, 0.08875)	(4.87543, 0)	(0, 0.08875)	0.08875	4.87543	3.93333	7	3.06667	0.12457	0.08875	Continua
5	3	4.99786	0.0015	-0.700...	5	$y = -0.70043x + 3.50214$	(4.99786, 0.0015)	(4.99786, 0)	(0, 0.0015)	0.0015	4.99786	4.87543	7	2.12457	0.00214	0.0015	Continua
6	4	5	0	-0.7	5	$y = -0.7x + 3.5$	(5, 0)	(5, 0)	(0, 0)	0	5	4.99786	7	2.00214	0	0	Satisfatório
7	5	5	0	-0.7	5	$y = -0.7x + 3.5$	(5, 0)	(5, 0)	(0, 0)	0	5	5	7	2	0	0	Satisfatório
8	6	5	0	-0.7	5	$y = -0.7x + 3.5$	(5, 0)	(5, 0)	(0, 0)	0	5	5	7	2	0	0	Satisfatório
9	7	5	0	-0.7	5	$y = -0.7x + 3.5$	(5, 0)	(5, 0)	(0, 0)	0	5	5	7	2	0	0	Satisfatório
10	8	5	0	-0.7	5	$y = -0.7x + 3.5$	(5, 0)	(5, 0)	(0, 0)	0	5	5	7	2	0	0	Satisfatório
11	9	5	0	-0.7	5	$y = -0.7x + 3.5$	(5, 0)	(5, 0)	(0, 0)	0	5	5	7	2	0	0	Satisfatório
12	10	5	0	-0.7	5	$y = -0.7x + 3.5$	(5, 0)	(5, 0)	(0, 0)	0	5	5	7	2	0	0	Satisfatório
13	11	5	0	-0.7	5	$y = ?$	(?, ?)	(?, ?)	(?, ?)	?	?	5	7	2	0	0	Satisfatório
14	12	5	0	-0.7	5	$y = ?$	(?, ?)	(?, ?)	(?, ?)	?	?	5	7	2	0	0	Satisfatório
15	13	5	0	-0.7	5	$y = ?$	(?, ?)	(?, ?)	(?, ?)	?	?	5	7	2	0	0	Satisfatório
16	14	5	0	-0.7	5	$y = ?$	(?, ?)	(?, ?)	(?, ?)	?	?	5	7	2	0	0	Satisfatório
17	15	5	0	-0.7	5	$y = ?$	(?, ?)	(?, ?)	(?, ?)	?	?	5	7	2	0	0	Satisfatório

Figura 3.4: Janela de Planilha do GeoGebra

O ponto inicial x_0 , e a quantidade de iterações realizadas n , foram atribuídos como parâmetros variáveis para a realização das animações. Escolhemos uma precisão $e = \epsilon_x = \epsilon_x$ que pode ser alterada manualmente. A função $P(x)$, pontos a e b foram escolhidos convenientemente e também podem ser alterados. Esses são os únicos valores de entrada e caso conheça a raiz exata, pode nomeá-la como r .

A primeira linha da tabela apresentada na Figura 3.4 é destinada para o título de cada coluna, já a segunda linha é determinada com fórmulas da planilha ou com os dados de entrada e as demais linhas são calculadas automaticamente. Programou-se 100 linhas, mas é possível estender esse valor.

A primeira coluna apresenta o índice da iteração, sendo que $i = 0$ representa o caso inicial, com os valores de entrada e o ponto de partida.

A coluna B apresenta a sequência dos valores iterativos do Método de Newton, iniciando (segunda linha) do valor escolhido inicialmente para x_0 e as demais linhas são obtidas pela Equação 2-19.

A terceira e quarta coluna informam os valores, respectivamente, da imagem da função polinomial e da derivada na função polinomial no valor contido na segunda coluna. Essas colunas podem ser embutidas na quinta coluna através da Equação 2-19.

A quinta coluna pode ser suprimida, já que é idêntica a segunda coluna, mas deslocada em uma linha, apresentando o valor sucessor do método numérico em relação a iteração i .

A coluna F apresenta a equação da reta tangente r_i , com coeficiente angular $P(x_i)$ da coluna D e que passa pelo ponto $P_i(x_i, P(x_i))$. Para a equação da reta, utiliza-se a Equação 2-15.

A sétima coluna informa e esboça o ponto $P_i = (x_i, P(x_i))$ cuja abscissa está na coluna B e ordenada na coluna C.

As colunas H, I, J e K não interferem no método e são apenas valores auxiliares para desenhar as coordenadas dos pontos da coluna G, logo elas podem ser ocultadas. A coluna H traz os pontos que estão sobre o eixo x com abscissa idêntica ao ponto P_i . Já a coluna I traz os pontos que estão sobre o eixo y cuja ordenada é a mesma do ponto P_i . A coluna J esboça o segmento de reta vertical e tracejado entre os pontos das colunas G e H. Enquanto a coluna K desenha o segmento de reta tracejado e horizontal entre os pontos das colunas G e I.

As colunas L e M apresentam as extremidades do intervalo que contém a raiz exata e que reduz a cada iteração. Na segunda linha esses valores são apresentados como dados de entrada, valores a e b . A partir da terceira linha utiliza-se o comando “se”. Divide-se o intervalo $[a_i; b_i]$ em $[a_i; x_i]$ e $[x_i; b_i]$, identificando em qual dos dois intervalos está a raiz exata, pelo Teorema de Bolzano. Se a raiz estiver no primeiro intervalo, então $a_{i+1} = a_i$ e $b_{i+1} = x_i$. Mas, se a raiz exata estiver no segundo intervalo, então $a_{i+1} = x_i$ e $b_{i+1} = b_i$. Assim, determinam-se os valores para a linha sucessora.

As colunas N, O e P retratam os critérios de parada apresentados na Equação 3-3. A coluna N traz o valor absoluto da diferença entre os valores nas colunas L e M. Já a coluna O traz o valor absoluto da diferença entre os valores da coluna B e o valor fixo r , o qual representa o valor exato da raiz pesquisada, caso seja conhecido. Enquanto a coluna P informa o valor positivo daquele já calculado na coluna C.

A última coluna analisa as três colunas anteriores por meio do comando “se” e identificada se um dos três valores é menor do que o valor fixo e , escolhido inicialmente como a precisão aceitável para o exemplo. Em caso positivo, apresenta o dado de saída

escrito “satisfatório”, mas em caso negativo, fornece a escrita “continue”. Assim, é possível verificar se a iteração i satisfaz um dos critérios de parada e finalizar o ciclo, adotando a primeira linha cujo resultado é satisfatório. Gravando o valor do i desta linha e manipulando n com este valor.

O valor de n varia automaticamente na animação entre 0 e 100 variando de 1 em 1. Mas, na Figura 3.4 ele estava travado em 10. Assim, só há valores até a linha 12, mas ao clicar em "animar", os valores e desenho surgem automaticamente. Para não poluir a imagem, a Figura 3.3 está com $n = 2$ e só há resultados até a quarta linha da planilha.

O valor de x_0 também pode ser animado entre a e b , variando a cada 0.1. Sendo que o ponto P_0 se desloca sobre a curva vermelha, se aproximando ou se afastando da raiz exata. Na medida em que os pontos se aproximam, a convergência é mais rápida e os pontos P_i tendem a se sobrepor uns aos outros. As retas r_i também se sobrepõem quando n aumenta.

Exemplo 37 Determine as raízes da função polinomial dada por $P_1(x) = -10 + 2x$ através do Método de Newton com precisão $\varepsilon = 10^{-5}$.

Pelo Exemplo 33, P_1 têm no máximo uma raiz ξ_1 em que $\xi_1 \in [4;6]$. Já pelo Exemplo 31, $P_1'(x) = 2$.

Substituindo $P_1(x)$ e $P_1'(x)$ na Equação 2-19, tem-se:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{-10 + 2x_k}{2} = 5. \quad (3-4)$$

Logo, independente do ponto de partida, o método converge na primeira iteração para a raiz $x = 5$. Neste caso é possível encontrar a raiz exata, já que $P_1(5) = 0$, pois a curva de P_1 é uma reta que coincide com a reta tangente do Método de Newton-Raphson. Assim, não há erro e cumpre-se os critérios de parada e a precisão enunciada, pois $|x_k - \xi_1| = 0$ e $P(x_k) = 0$ para $x_k = 5$.

A Figura 3.5 ilustra o Método de Newton para o referido exemplo para $n = 5$ e percebe-se que as retas r_1 até r_5 estão sobrepostas com a curva $P_1(x)$.

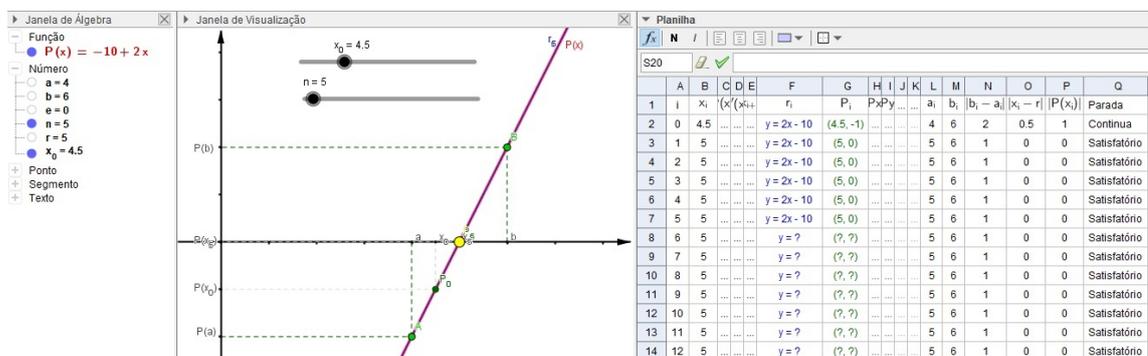


Figura 3.5: Método de Newton para $P_1(x) = -10 + 2x$

Exemplo 38 Determine as raízes da função polinomial dada por $P_2(x) = 2 - 3x + x^2$ através do Método de Newton com precisão $\varepsilon = 10^{-4}$.

Pelo Exemplo 33, P_2 têm no máximo duas raízes ξ_1 e ξ_2 em que $\xi_1 \in [0,5; 1,5]$ e $\xi_2 \in [1,5; 2,5]$. Já pelo Exemplo 31, $P_2'(x) = -3 + 2x$.

Substituindo $P_2(x)$ e $P_2'(x)$ na Equação 2-19, tem-se:

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 - 2}{2x_k - 3}. \quad (3-5)$$

Para a primeira raiz, como $\xi_1 \in [0,5; 1,5]$, adotamos-se $x_0 = 0,6$. Já para a segunda raiz, como $\xi_2 \in [1,5; 2,5]$, adotamos $x_0 = 2,4$. Substituindo esses pontos iniciais na Equação 3-5, podemos preencher duas planilhas, uma para cada caso, conforme apresentado na Tabela 3.7. Para simplificar os cálculos e a apresentação dos resultados, utilizamos apenas o último critério de parada apresentado na Equação 3-3, sendo que os outros critérios ficam a cargo do leitor.

Tabela 3.7: Método de Newton para $P_2(x) = 2 - 3x + x^2$

Caso para raiz ξ_1			Caso para raiz ξ_2		
k	x_k	$ P(x_k) $	k	x_k	$ P(x_k) $
0	0,6	0,56	0	2,4	0,56
1	0,91111	0,09679	1	2,08888	0,09679
2	0,99329	0,00675	2	2,00671	0,00675
3	0,99996	$4,4 \cdot 10^{-5}$	3	2,00004	$4,4 \cdot 10^{-5}$

Percebe-se na Tabela 3.7 que é necessário apenas três iterações em cada caso, pois o último valor na última coluna em ambos os casos é inferior a precisão enunciada de $\varepsilon = 10^{-4}$, satisfazendo o critério de parada adotado. Além disso, a primeira raiz aproximada é 0,9999555899 e tende para 1, já a segunda raiz aproximada é 2,000044409 e tende para 2. Logo é possível constatar que $P_2(1) = P_2(2) = 0$, confirmando que $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = 2$. Assim, pode-se analisar o primeiro critério de parada.

A Figura 3.6 ilustra o Método de Newton do referido exemplo para $n = 3$.

Exemplo 39 Determine as raízes da função dada por $P_3(x) = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$ através do Método de Newton com precisão $\varepsilon = 10^{-4}$.

Pelo Exemplo 33, o polinômio P_3 têm no máximo três raízes: ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 . Em que $\xi_1 \in [0,5; 1,5]$, $\xi_2 \in [1,5; 2,5]$ e $\xi_3 \in [2,5; 3,5]$. Já no Exemplo 31, $P_3'(x) = 11 - 12x + 3x^2$.

Substituindo $P_3(x)$ e $P_3'(x)$ na Equação 2-19, tem-se:

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 - 6x_k^2 + 6}{3x_k^2 - 12x_k + 11}. \quad (3-6)$$

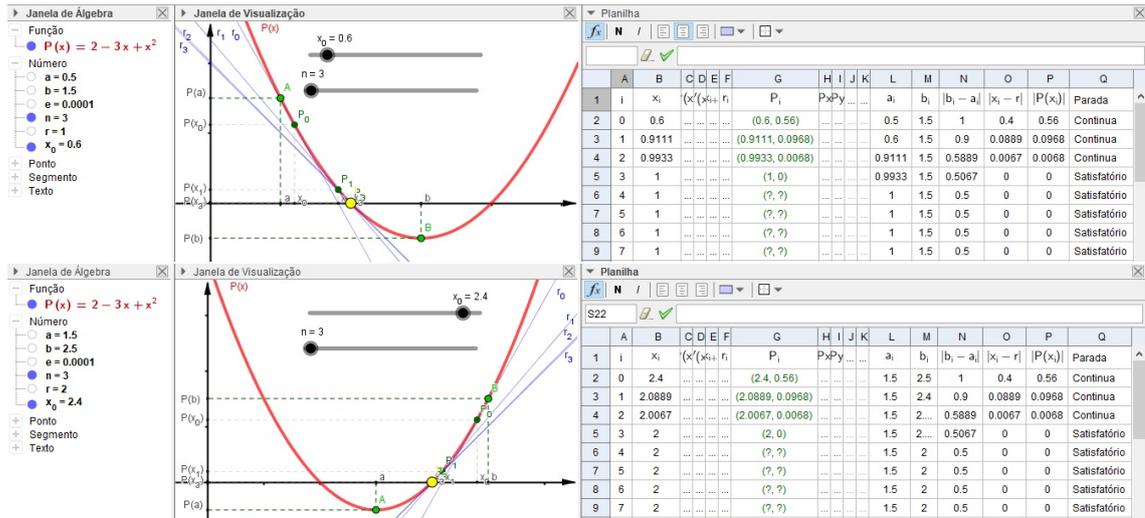


Figura 3.6: Método de Newton para $P_2(x) = 2 - 3x + x^2$

Para a primeira raiz, como $\xi_1 \in [0,5; 1,5]$, adotamos $x_0 = 0,6$. Já para a segunda raiz, como $\xi_2 \in [1,5; 2,5]$, adotamos $x_0 = 1,6$. Enquanto para a terceira raiz, como $\xi_3 \in [2,5; 3,5]$, adota-se $x_0 = 2,8$. Substituindo esses pontos iniciais na Equação 3-6, podemos preencher três planilhas, uma para cada caso, conforme apresentado na Tabela 3.8. Novamente, utilizamos apenas o último critério de parada.

Tabela 3.8: Método de Newton para $P_3(x) = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$

Caso para raiz ξ_1			Caso para raiz ξ_2			Caso para raiz ξ_3		
k	x_k	$ P(x_k) $	k	x_k	$ P(x_k) $	k	x_k	$ P(x_k) $
0	0,6	1,24400	0	1,6	0,33600	0	2,8	0,288
1	0,87541	0,29768	1	2,24615	0,23124	1	3,11304	0,26587
2	0,98195	0,03709	2	1,96354	0,03641	2	3,01517	0,03105
3	0,99953	0,00094	3	2,00009	$9,7 \cdot 10^{-5}$	3	3,00033	0,00067
4	0,99999	$6,6 \cdot 10^{-7}$	4	2,00...	$6,0 \cdot 10^{-9}$	4	3,00...	$3,5 \cdot 10^{-7}$

Percebe-se na Tabela 3.8 que foi necessário quatro iterações para a primeira e terceira raiz e apenas três iterações para a segunda raiz, pois o último valor na última coluna de cada casos é inferior a precisão enunciada de $\epsilon = 10^{-4}$, satisfazendo o critério de parada adotado.

Além disso, as raízes aproximadas determinadas foram: 0,9999996710; 2,000097296; 3,000000174. Então, a primeira raiz tende para 1, a segunda para 2 e a terceira para 3, logo é possível constatar que $P_3(1) = P_3(2) = P_3(3) = 0$, confirmando que $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2$ e $\xi_3 = 3$. Assim, pode-se analisar o primeiro critério de parada.

A Figura 3.7 ilustra o Método de Newton do referido exemplo para $n = 4$.

Exemplo 40 Determine todas as raízes da função polinomial dada pela expressão: $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$ através do Método de Newton com precisão $\epsilon = 10^{-4}$.

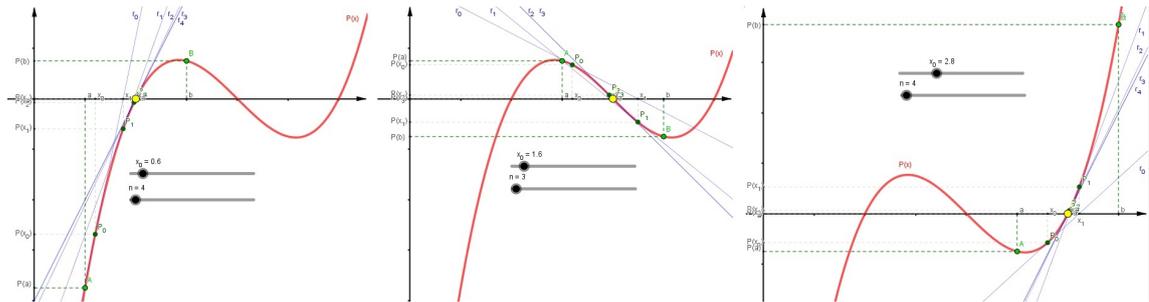


Figura 3.7: Método de Newton para $P_3(x) = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$

Pelo Exemplo 33, P_4 têm no máximo quatro raízes: ξ_1, ξ_2, ξ_3 e ξ_4 . Em que $\xi_1 \in [0, 9; 1, 2]$, $\xi_2 \in [1, 8; 2, 1]$, $\xi_3 \in [2, 8; 3, 2]$ e $\xi_4 \in [3, 8; 4, 1]$. Já pelo Exemplo 31, $P'_4(x) = 50 + 10x - 30x^2 + 4x^3$.

Substituindo $P_4(x)$ e $P'_4(x)$ na Equação 2-19, tem-se:

$$x_{k+1} = \frac{3x_k^4 - 20x_k^3 + 35x_k^2 - 24}{4x_k^3 - 30x_k^2 + 70x_k - 50}. \tag{3-7}$$

Adotamos o ponto inicial, x_0 , de cada caso, como sendo o valor da primeira extremidade de cada um dos intervalos que contêm as raízes ξ_1, ξ_2, ξ_3 e ξ_4 . Substituindo esses pontos iniciais (0, 9; 1, 8; 2, 8 e 3, 8) na Equação 3-7, podemos preencher quatro planilhas, uma para cada caso, conforme apresentado na Tabela 3.9. Novamente, utilizamos apenas o último critério de parada.

Tabela 3.9: Método de Newton para $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$

Caso para raiz ξ_1			Caso para raiz ξ_2		
k	x_k	$ P(x_k) $	k	x_k	$ P(x_k) $
0	0,9	0,7161	0	1,8	0,4224
1	0,98541	0,08988	1	1,99849	0,0030
2	0,99962	0,00226	2	1,99999	$2,3 \cdot 10^{-6}$
3	0,99999	$1,5 \cdot 10^{-6}$			

Caso para raiz ξ_3			Caso para raiz ξ_4		
k	x_k	$ P(x_k) $	k	x_k	$ P(x_k) $
0	2,8	0,3456	0	3,8	0,8064
1	3,04827	0,09865	1	4,15244	1,19213
2	3,00089	0,00179	2	4,03063	0,19429
3	3,00...	$7,4 \cdot 10^{-7}$	3	4,00159	0,00959
			4	4,00...	$2,7 \cdot 10^{-5}$

Percebe-se na Tabela 3.9 que as raízes aproximadas determinadas pelo método iterativo foram: 0,9999997430; 1,999998842; 3,000000370; 4,000004474. Ou seja, os

valores convergem para 1, 2, 3 e 4, respectivamente, logo é possível constatar as imagens $P_4(1) = P_4(2) = P_4(3) = P_4(4) = 0$, confirmando que $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 3$ e $\xi_4 = 4$.

A Figura 3.8 ilustra o Método de Newton do referido exemplo.

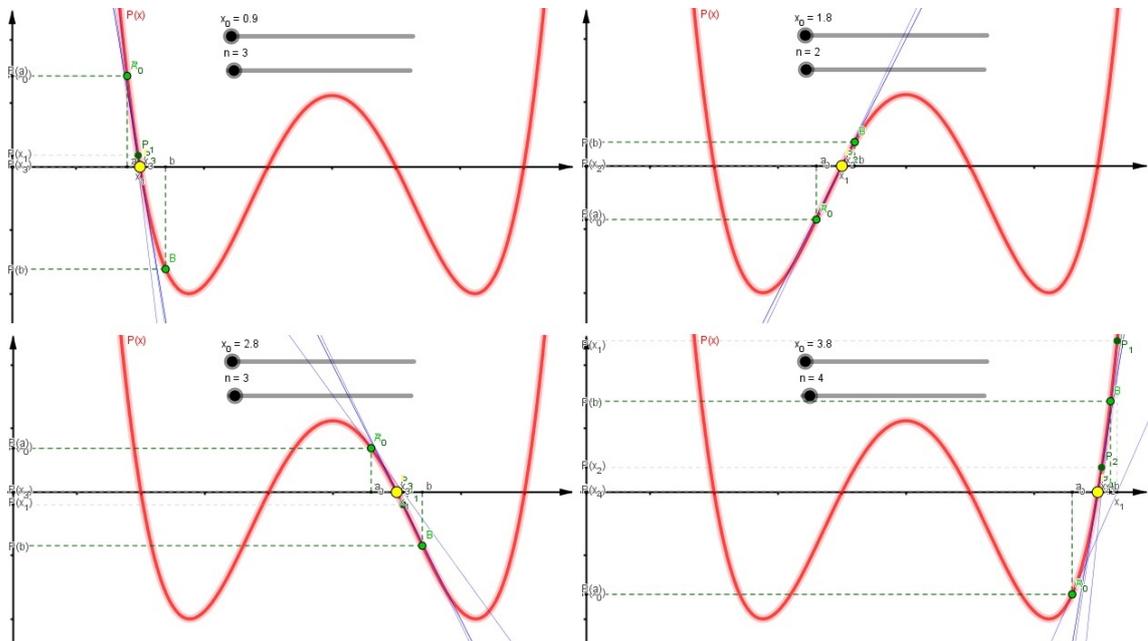


Figura 3.8: Método de Newton para $P_4(x) = 24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$

Então é possível encontrar as raízes aproximadas e exatas dos quatro polinômios apresentados. Percebe-se que o método é eficiente e que normalmente encontra-se uma raiz com no máximo 5 iterações caso o intervalo de isolamento da raiz exata e o ponto de inicial x_0 sejam adequados. Os exemplos são para polinômios de grau 1, 2, 3 e 4, mas podemos estender o procedimento para polinômios de qualquer grau.

Os exemplos 37, 38, 39 e 40 podem ser comparados respectivamente com os exemplos 8, 9, 10 e 11. Para polinômios do primeiro grau, não há a necessidade em utilizar um método numérico, já que a determinação da raiz é direta e exata pelo isolamento da variável x . Para polinômios do segundo grau também não aconselhamos o método iterativo, já que a fórmula de Bháskara é suficiente. Mas, para polinômios com grau maiores que 2, o Método de Newton-Raphson pode ser utilizado com eficácia.

Conclusão

Conclui-se que o conteúdo de polinômios é fundamental no ensino da Matemática e que o Método de Newton-Raphson é uma excelente ferramenta para determinar raízes de polinômios de grau superior a 4, pois não há uma fórmula algébrica para o referido cálculo. Além disso, a expressão algébrica para polinômios de grau 3 e 4 é extensa e trabalhosa, sendo recomendado o método numérico.

O GeoGebra também é uma excelente ferramenta tecnológica e permite a programação e visualização do método numérico, possibilitando a aprendizagem do mesmo. Assim, cumprem-se o primeiro objetivo imposto pela Secretaria de Educação a Distância (SEED) do MEC em relação ao projeto Proinfo instituído pela Portaria nº 552 [6]: melhorar a qualidade do processo de ensino-aprendizagem com o uso da tecnologia [5].

O desenvolvimento da planilha eletrônica apresentada no trabalho e a interpretação geométrica dos Métodos de Newton Raphson, Método da Secante, Método da Bisseção e Método do Ponto Fixo, foram aplicadas para alunos dos cursos de Engenharia Civil, Mecânica, Elétrica, Controle e Automação, Cartográfica e Agrimensura, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG), Câmpus Goiânia, no ano de 2016 e 2017. Verificou-se por meio de observações participativa que o uso de *software* colabora para o ensino-aprendizagem do conteúdo de métodos numéricos, confirmando a hipótese.

A metodologia apresentada no presente trabalho pode ser aplicada em cursos técnicos, para alunos que desejam competir em olimpíadas, por exemplo, e para concurseiros em nível de Ensino Básico. Sendo assim, uma ferramenta a mais para o conhecimento cognitivo do aluno.

Por tudo aqui exposto, percebe-se que o GeoGebra e o Método de Newton podem auxiliar no processo de ensino-aprendizagem, assim como recomendado pelo MEC e pelos PCNs, pois o educador tem a finalidade de promover e incentivar o uso das TICs como ferramenta de enriquecimento pedagógico no Ensino Básico e Público [31].

Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, G. **O Ensino de Cálculo no 2º Grau**. Technical report, Revista do Professor de Matemática, nº 18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.
- [2] BASTOS, G. G. **Resolução de Equações Algébricas por Radicais**. Technical report, II Bienal da SBM, Salvador, 2004.
- [3] BOYER, E. A. **História da matemática**. Technical report, São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [4] BRASIL, M. D. E. C. A. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Technical report, Secretaria de Educação Básica: Brasília, 2006.
- [5] BRASIL, M. D. E. C. A. E. D. D. **Programa Nacional de Informática na Educação: ProInfo: Diretrizes**. Technical report, Secretaria de Educação a Distância, 1997.
- [6] BRASIL, M. D. E. C. A. E. D. D. **Portaria nº 522, de 9 de Abril de 1997**. Technical report, Domínio Público, Brasília, DF, 1997.
- [7] CARDOSO, L. C. S. **Solução por Radicais de Certas Equações Polinomiais de Grau Ímpar e Método de Newton**. Technical report, Três Lagoas: Profmat, 2016.
- [8] CASTRO, R. M. M. **Educação e Mídias**. Technical report, Unidade Universitária de Educação a Distância. Universidade Aberta do Brasil. Universidade Estadual de Goiás, 2012.
- [9] CATANEO, V. I. **O uso do Software GeoGebra como Ferramenta que pode Facilitar o Processo Ensino Aprendizagem na Matemática no Ensino Fundamental Série Finais**. Technical report, Monografia de Especialização. Centro Universitário Barriga Verde - UNIBAVE. Orleans, 2011.
- [10] CAVALCANTI, E. S. **Soluções de Equações Polinomiais via Método de Newton-Raphson com uso de Planilhas Eletrônicas**. Technical report, Belém: Profmat, 2015.

- [11] DANTE, L. R. **Matemática**. Technical report, São Paulo: Ática. ed. 1, 2005.
- [12] DEVANEY, R. L. **A First course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment**. Technical report, Perseus Books Publishing: LLC, 1992.
- [13] DOMINGUES, HYGINO H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. Technical report, São Paulo: Atual. ed. 4, 2003.
- [14] ENDLER, O. **Teoria dos Corpos**. Technical report, Mong. de Matemática, n. 44: IMPA, 1987.
- [15] FERREIRA, A. B. D. H. **Dicionário do Aurélio. Tecnologia**. Technical report, 3. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.
- [16] GONCALVES, A. **Introdução á Álgebra**. Technical report, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [17] HERNSTEIN, I. N. **Tópicos de Álgebra**. Technical report, São Paulo: Polígono, 1970.
- [18] LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Technical report, Ed. 3, Vol. 1, São Paulo: HARBRA, 1994.
- [19] LIMA, E. L. **Análise Real volume 1. Funções de Uma Variável**. Technical report, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [20] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P. W. E. M. A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Technical report, Volume 1, Ed. 9, Rio de Janeiro: IMPA., 2006.
- [21] MOREIRA, D. A.; QUEIROZ, A. C. **Inovação Organizacional e Tecnológica**. Technical report, São Paulo: Thomson Learning, 2007.
- [22] MOREIRA, F. R. **O Método de Newton: Uma Análise de Convergência Local e Semi-Local - o Teorema de Kantorovich**. Technical report, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2006.
- [23] OLIVEIRA, J. C. **Método de Newton-Raphson Aplicado a Localização de Raízes Polinomiais**. Technical report, São Luiz: Profmat., 2014.
- [24] PINTO, M. M. **Tecnologia e Inovação**. Technical report, 2. ed.reimp, Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração / UFSC; [Brasília] : CAPES : UAB, 2012.
- [25] REIS, GENÉRIO L.; SILVA, V. V. **Geometria Analítica**. Technical report, Ed. 2, Rio de Janeiro: LTC, 1984.

- [26] RODRIGUES, S. S. **Eficácia Docente no Ensino de Matemática. Revista Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**. Technical report, Rio de Janeiro, v. 25, n. 94, p. 114-147, 2017.
- [27] ROOS, D. **Abordagem Geométrica do Método de Newton**. Technical report, Sinop: Profmat, 2017.
- [28] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. Technical report, São Paulo: Editora McGraw-Hill, 1988.
- [29] SANTAROSA, L. M.; GRAVINA, M. A. **A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. Technical report, IV Congresso RIBIE. Brasília, 1998.
- [30] SANTOS, A. S.; SILVA, J. J. M. D. A. S. **Tecnologia a Favor da Educação Matemática: GeoGebra e suas Aplicações**. Technical report, Encontro Mineiro de Educação Matemática - EMEM, Universidade Federal de Juiz de fora - UFJF, 2015.
- [31] SILVA, A. C. **Educação e Tecnologia: Entre o Discurso e a Prática**. Technical report, Revista Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação, Rio de Janeiro, v. 19, n. 72, p. 527-554, 2011.