

Helena Günther

A FUNÇÃO ZETA, DE EULER A RIEMANN:
UMA INTRODUÇÃO À TEORIA ANALÍTICA
DE NÚMEROS

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Günther, Helena

A função zeta, de Euler a Riemann : uma introdução
à teoria analítica de números / Helena Günther ;
orientador, Eliezer Batista, 2018.
74 p.

Dissertação (mestrado profissional) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós
Graduação em Matemática, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. função zeta. 3. funções
analíticas. 4. teoria analítica de números. 5.
números primos. I. Batista, Eliezer. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Helena Günther

**A FUNÇÃO ZETA, DE EULER A RIEMANN:
UMA INTRODUÇÃO À TEORIA ANALÍTICA
DE NÚMEROS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do título de Mestre em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 27 de setembro de 2018.

Prof. Dr. Celso Melchtiades Doria
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Coordenador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Eliezer Batista
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Orientador

Prof. Dr. Eduardo Tengan
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Giuliano Boava
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof.^a Dra. Marianna Ravara Vago
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e à tia Ione, pelo apoio que me deram durante o mestrado e a confecção deste trabalho, o meu sincero agradecimento.

Aos meus amigos, que pessoalmente ou à distância estiveram presentes nos momentos bons e nos difíceis: me faltam palavras pra descrever o quão grata sou por todo o carinho, o tempo e a paciência.

Ao meu orientador, professor Eliezer, sou muito grata por ter me guiado neste trabalho. Além disso, obrigada por sempre acreditar em mim e me incentivar na minha carreira.

Aos professores Eduardo Tengan, Giuliano Boava e Marianna Ravara Vago, muito obrigada por participarem da banca e pelas valiosas sugestões para o aprimoramento deste trabalho.

Ao PROFMAT e à UFSC, meus agradecimentos por mais esta oportunidade de aprofundar meus conhecimentos na Matemática e me preparar ainda mais para a docência, que é o que eu amo fazer.

Aos meus alunos e aos seus pais, sou grata pela confiança depositada em mim e no meu trabalho.

RESUMO

Este trabalho pretende abordar, de um ponto de vista elementar, as origens e a evolução da teoria analítica de números. Para isto, primeiramente é analisado o surgimento da função zeta (devido a Leonhard Euler), enfatizando principalmente a sua relação com números primos. Em seguida é discutida sua extensão como função analítica em todo o plano complexo (exceto por seu polo em $z = 1$).

Palavras-chave: Função zeta. Funções analíticas. Teoria analítica de números. Números primos.

ABSTRACT

This work intends to present an elementary introduction to the origin and evolution of analytic number theory. To achieve this, the advent of the zeta function (due to Leonhard Euler) is first analyzed, with emphasis on its correlation to prime numbers. Its analytic extension to the complex plane (except for its pole in $z = 1$) is then discussed.

Keywords: Zeta function. Analytic functions. Analytic number theory. Prime numbers.

SUMÁRIO

Introdução	p. 13
1 Introdução à função zeta de Euler	p. 17
1.1 Fórmula do produto de Euler	p. 19
1.2 Soma dos inversos dos primos	p. 26
2 A função zeta de Riemann	p. 31
2.1 A função gama	p. 31
2.2 A função zeta	p. 49
2.3 Mais sobre a função zeta	p. 55
Conclusão	p. 59
Apêndice A – Resultados utilizados no texto	p. 61
A.1 Noções de topologia	p. 61
A.2 Noções de análise real	p. 63
A.3 Noções de análise complexa	p. 64
A.3.1 Transformada de Fourier	p. 66
Referências	p. 71

INTRODUÇÃO

Segundo o Teorema Fundamental da Aritmética, os números primos são os “blocos” com os quais os inteiros são construídos, por meio da multiplicação; por tal razão, eles têm sido estudados desde a Grécia antiga até hoje. Ainda na antiguidade foi obtida a prova da infinitude do conjunto dos números primos (que, assim como a prova do Teorema Fundamental da Aritmética, consta nos Elementos de Euclides) e foi desenvolvido o crivo de Eratóstenes, usado para determinar os primos inferiores a um inteiro dado [Eves 2008] [Prime number 2018].

A forma irregular com que os primos estão distribuídos no conjunto dos inteiros traz algumas dificuldades neste estudo. Apesar de a lista de números primos conhecidos ser hoje bastante extensa, isso se deve não só aos avanços na área, mas também à capacidade computacional que temos atualmente. De fato, não há um método prático para testar se um número grande é primo. E embora muitos matemáticos tenham dedicado suas vidas a este estudo, ainda não se conhece uma fórmula que gere todos os números primos – longe disso. O próprio Euler não acreditava na existência de uma fórmula explícita para o p -ésimo primo p_n , embora acreditasse ser provável encontrar uma fórmula recursiva para p_n em termos de p_1, p_2, \dots, p_{n-1} [Young 1992]. Até hoje, no entanto, nenhuma tal fórmula é conhecida. Não se conhece nem ao menos uma fórmula que gere uma infinidade de números, todos primos.

Um ramo que teve mais progressos, no entanto, foi o estudo da distribuição dos números primos. Euler já havia conjecturado que existem infinitos primos da forma $100k + 1$. Em 1837, Dirichlet demonstrou um resultado ainda mais geral: dados a e b primos entre si, a progressão aritmética

$$a, a + b, a + 2b, \dots, a + n \cdot b, \dots$$

tem uma infinidade de primos. A prova deste teorema consolidou a fundação da Teoria Analítica de Números [Dunham 1999].

Usaremos aqui a função $\pi(x)$, que corresponde ao número de pri-

mos menores ou iguais a x . Um teorema devido a Euler [Young 1992] estabelece que o conjunto dos primos tem densidade zero, ou seja, que

$$\frac{\pi(x)}{x} \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow \infty.$$

Esse resultado indica que conforme avançamos no conjunto dos inteiros os primos ficam cada vez mais esparsos.

Vários matemáticos conjecturaram que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Este resultado, conhecido como Teorema dos Números Primos, é notável por unir duas áreas da Matemática que podem, à primeira vista, parecer disjuntas: a Teoria dos Números (que trata do aspecto discreto dos números inteiros) e a Análise (que trata da continuidade, aqui representada pela função real $\ln x$). O primeiro enunciado publicado deste resultado é devido a Legendre, em 1808. Baseado em evidências empíricas, ele conjecturou que $\pi(x) \rightarrow \frac{x}{\ln x - A}$ quando $x \rightarrow \infty$, com $A \approx 1,08$, embora hoje se saiba que uma melhor aproximação pode ser obtida com $A = 1$ [Young 1992]. Também Gauss conjecturou que $\pi(x)$ poderia ser aproximada pela função

$$\text{Li}(x) = \int_2^{\infty} \frac{dt}{\ln t}.$$

Esta função é uma aproximação melhor do que a de Legendre, que por sua vez é melhor do que a do Teorema dos Números Primos, embora todas sejam assintoticamente equivalentes [Martinez et al. 2010] [Young 1992]. Somente em 1896, depois de quase um século de desenvolvimento da análise, este teorema pôde ser provado (de forma independente) por Hadamard e de la Vallée Poussin [Boyer 1983].

Em 1859, Bernhard Riemann publicou *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (Sobre o número de números primos menores do que uma quantidade dada), seu único trabalho sobre teoria analítica de números [Riemann 1859]. Usando métodos de análise complexa, ele estabeleceu que é possível escrever uma fórmula explícita para o erro entre $\pi(x)$ e $\text{Li}(x)$ em termos dos zeros de $\zeta(s)$ [Baker 2017]. Desta forma, Riemann deixou evidente a relevância da função zeta para a teoria de números.

Este trabalho introduz a função zeta, conforme vista por Euler e Riemann, e demonstra alguns resultados associados. O primeiro capítulo contém, além da definição da função zeta no conjunto dos reais, uma demonstração da fórmula do produto de Euler. O segundo capítulo tem como objetivo dar uma extensão analítica da função zeta no plano complexo (exceto para seu polo, em $s = 1$) e para isso inclui também um estudo da função $\Gamma(s)$. Este texto é destinado a um público amplo, porém foi escrito tendo em mente especialmente os leitores graduandos e graduados em Matemática; assim, objetiva trabalhar os elementos da função zeta de forma acessível e, sempre que possível, autocontida. Para tanto, uma breve exposição dos resultados utilizados no texto – e conceitos associados – pode ser encontrada no Apêndice, que está dividido em três partes, sendo elas: noções de topologia, noções de análise real e noções de análise complexa.

1 INTRODUÇÃO À FUNÇÃO ZETA DE EULER

Primeiramente, queremos definir a função zeta de Euler. Para isso, precisamos mostrar que ela estará bem definida em seu domínio.

Proposição 1.1. *A soma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

converge para $s > 1$ e diverge para $s \leq 1$.

Demonstração. Vamos analisar a convergência da soma acima.

No caso em que $s = 1$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que é a série harmônica.

Temos, pelo teste da integral, conforme enunciado em A.8, que

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^t = \ln x \Big|_1^t = \ln t - \ln 1 = \ln t.$$

Portanto

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty,$$

o que mostra a divergência da série harmônica e, conseqüentemente, da soma em (1.1).

Para $s \neq 1$, pelo teste da integral, temos

$$\int_1^t \frac{1}{x^s} dx = \int_1^t x^{-s} dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \Big|_1^t = \frac{t^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} = \frac{t^{1-s} - 1}{1-s}$$

e

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1-s} - 1}{1-s}.$$

Quando $s > 1$ temos $1 - s < 0$, logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1-s} - 1}{1-s} = \frac{-1}{1-s} = \frac{1}{s-1},$$

e a série é convergente. Quando $s < 1$ temos $1 - s > 0$, logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1-s} - 1}{1-s} = \infty$$

e a série é divergente. Portanto a soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge para $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ e diverge para $s \leq 1$. \square

Podemos agora definir a função zeta de Euler conforme abaixo.

Definição 1.2. *A função zeta de Euler é definida como*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ tal que $s > 1$.

Observação. *Se definirmos a função zeta para $s \in \mathbb{C}$ e $\text{Re}(s) > 1$, podemos mostrar sua convergência usando o mesmo argumento acima, pois se $s \in \mathbb{C}$ temos $s = u + iv$ logo, para todo $n \geq 1$,*

$$n^{-s} = n^{-u-iv} = n^{-u} \cdot n^{-iv}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^u} \cdot e^{\ln n^{-iv}} \\
&= \frac{1}{n^u} \cdot e^{-iv \ln n} \\
&= \frac{1}{n^u} \cdot e^{-i(v \ln n)} \\
\left| \frac{1}{n^s} \right| &= \left| \frac{1}{n^u} \cdot e^{-i(v \ln n)} \right| \\
&= \left| \frac{1}{n^u} \right| \cdot \left| e^{-i(v \ln n)} \right| \\
&= \left| \frac{1}{n^u} \right| \cdot 1 \\
&= \left| \frac{1}{n^u} \right|.
\end{aligned}$$

Assim, temos que ζ está definida para todo o semiplano $\text{Re}(s) > 1$.

1.1 FÓRMULA DO PRODUTO DE EULER

Em 1737, no seu artigo “Variae observationes circa series infinitas” [Euler 1744], Euler demonstrou que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

A sua demonstração no entanto não era rigorosa, especialmente por não fazer diferença entre os valores de s para os quais a soma e o produto acima convergem ou divergem. Em 1876, Kronecker demonstrou este resultado rigorosamente, para $s > 1$ [Dunham 1999].

Teorema 1.3 (Fórmula do produto de Euler). *Para $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, temos que*

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \text{ ou seja,} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.
\end{aligned}$$

Apresentamos a seguir nossa demonstração para este resultado.

Demonstração. Considere os k primeiros primos. Associamos ao i -ésimo primo um natural N_i . Para cada um desses primos, tomamos as somas dos inversos de suas potências de expoente natural até o expoente máximo N_i , ou seja, $\left(1 + \frac{1}{p_i^s} + \dots + \frac{1}{p_i^{N_i s}}\right)$. Consideramos então o produtório $P_{(k; N_1, \dots, N_k)}$ de tais somas, para todos os k primeiros primos:

$$\begin{aligned} P_{(k; N_1, \dots, N_k)} &= \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \dots + \frac{1}{p_1^{N_1 s}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_k^s} + \dots + \frac{1}{p_k^{N_k s}}\right) \\ &= \sum_{r=0}^{N_1} \frac{1}{p_1^{r s}} \cdots \sum_{r=0}^{N_k} \frac{1}{p_k^{r s}} \\ &= \prod_{i=1}^k \left(\sum_{r=0}^{N_i} \frac{1}{p_i^{r s}} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

O resultado do produtório será a soma de todos os naturais que têm em sua decomposição por primos apenas os k primeiros primos (onde cada primo p_i terá expoentes menores ou iguais do que N_i). Por exemplo:

$$\begin{aligned} P_{(2; 1, 2)} &= \left(\frac{1}{2^{0 \cdot s}} + \frac{1}{2^{1 \cdot s}}\right) \cdot \left(\frac{1}{3^{0 \cdot s}} + \frac{1}{3^{1 \cdot s}} + \frac{1}{3^{2 \cdot s}}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^s 3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{2^s 3^{2s}}. \end{aligned}$$

Seja I o conjunto de índices $(k; N_1, \dots, N_k)$ com $k \geq 1$ (ou seja, usando pelo menos um primo) e $N_i \geq 0$ (ou seja, cada uma das somas começa com 1 e pode ou não ter outras parcelas):

$$I = \{(k; N_1, \dots, N_k) \mid k \geq 1, N_i \geq 0\}.$$

Vamos introduzir uma ordem parcial no conjunto I conforme abaixo.

$$(k; N_1, \dots, N_k) \leq (l; M_1, \dots, M_l)$$

se e só se:

$$k \leq l; \text{ e } N_i \leq M_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Esta relação de ordem parcial faz de I um conjunto dirigido pois, apesar de nem todos os pares de elementos de I serem comparáveis, todo par de elementos de I tem uma cota superior.

De fato, se $(k_1; M_1, \dots, M_{k_1})$ e $(k_2; N_1, \dots, N_{k_2})$ pertencem a I , podemos tomar $k = \max\{k_1, k_2\}$ e $P_i = \max\{M_i, N_i\} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$, de forma que

$$\begin{aligned} (k; P_1, \dots, P_k) &\geq (k_1; M_1, \dots, M_{k_1}) \text{ e} \\ (k; P_1, \dots, P_k) &\geq (k_2; N_1, \dots, N_{k_2}). \end{aligned}$$

Exemplos:

i) $(2; 3, 6)$ e $(2; 5, 4)$ têm $(2; 5, 6)$ como cota superior.

ii) $(3; 7, 1, 2)$ e $(4; 1, 0, 3, 5)$ têm $(4; 7, 1, 3, 5)$ como cota superior.

Observação. *O fato de I ser um conjunto dirigido faz de $\{P_{(k; N_1, \dots, N_k)} \mid k \geq 1, N_i \geq 0\}$ uma net (ver definição A.5).*

Consideremos agora as seguintes somas:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{e} \quad S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s},$$

onde $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$.

Afirmção 1.4.

$$P_{(k; N_1, \dots, N_k)} \leq S_M \leq S \tag{1.3}$$

para algum M .

De (1.2), temos

$$P_{(k; N_1, \dots, N_k)} = \left(\sum_{r=0}^{N_1} \frac{1}{p_1^{rs}} \right) \cdots \left(\sum_{r=0}^{N_k} \frac{1}{p_k^{rs}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r_1=0}^{N_1} \sum_{r_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{r_k=0}^{N_k} \left(\frac{1}{p_1^{r_1 s} p_2^{r_2 s} \cdots p_k^{r_k s}} \right) \\
&= \sum_{r_1=0}^{N_1} \sum_{r_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{r_k=0}^{N_k} \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^k p_i^{r_i s}} \right) \\
&= \sum_{r_1=0}^{N_1} \sum_{r_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{r_k=0}^{N_k} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^k p_i^{r_i} \right)^s}
\end{aligned}$$

Como $M = p_1^{N_1} p_2^{N_2} \cdots p_k^{N_k}$ é o maior denominador que aparece na soma, então $S_M = \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{M^s} \geq P_{(k; N_1, \dots, N_k)}$. Isto ocorre porque cada potência aparece uma única vez em $P_{(k; N_1, \dots, N_k)}$, já que a decomposição em produtos de potências de primos é única e S_M contém todos os inversos de produtos de potências de inteiros até M , inclusive (mas talvez não somente) esses.

Como $S_M = \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = S \quad \forall M$, então $P_{(k; N_1, \dots, N_k)} \leq S_M < S$.

Assim, $\{P_i \mid i \in I\}$ é limitado superiormente (por S), e é não-vazio, logo possui um supremo. Seja $P = \sup\{P_i\}$. Como $S \geq P_i \quad \forall i \in I$ (ou seja, S é cota superior de $\{P_i\}$), então

$$P \leq S. \quad (1.4)$$

Observação 1.5. Se $i < j$, então

$$P_i < P_j.$$

De fato, se $i = (k_1; M_1, \dots, M_{k_1})$ e $j = (k_2; N_1, \dots, N_{k_2})$, então teremos $k_1 \leq k_2$ e $M_i \leq N_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k_1\}$, com ao menos um $i \in \{1, \dots, k_1\}$ para o qual $M_i < N_i$, logo

$$\begin{aligned}
P_j &= P_{(k_2; N_1, \dots, N_{k_2})} \\
&= \left(\sum_{r=0}^{N_1} \frac{1}{p_1^{r s}} \right) \cdots \left(\sum_{r=0}^{N_{k_1}} \frac{1}{p_{k_1}^{r s}} \right) \cdots \left(\sum_{r=0}^{N_{k_2}} \frac{1}{p_{k_2}^{r s}} \right) \\
&= \left(\sum_{r=0}^{M_1} \frac{1}{p_1^{r s}} + \sum_{r=M_1}^{N_1} \frac{1}{p_1^{r s}} \right) \cdots \left(\sum_{r=0}^{M_{k_1}} \frac{1}{p_{k_1}^{r s}} + \sum_{r=M_{k_1}}^{N_{k_1}} \frac{1}{p_{k_1}^{r s}} \right) \cdots \left(\sum_{r=0}^{N_{k_2}} \frac{1}{p_{k_2}^{r s}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \left(\sum_{r=0}^{M_1} \frac{1}{p_1^{rs}} \right) \cdots \left(\sum_{r=0}^{M_{k_1}} \frac{1}{p_{k_1}^{rs}} \right) \cdot 1 \cdots 1 \\
&= P_{(k_1; M_1, \dots, M_{k_1})} = P_i
\end{aligned}$$

Observação.

$$P = \lim_{i \in I} P_i$$

De fato, já que $P = \sup\{P_i\}$, o resultado segue da Proposição A.7 do Apêndice A.1.

Afirmção. Para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $i \in I$ tal que

$$S_N \leq P_i \leq P. \quad (1.5)$$

De fato, seja $N \in \mathbb{N}$. Seja $k = \pi(N)$ (ou seja, k é o número de primos menores que ou iguais a N). Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, tome $N_i = \{\max \alpha \mid p_i^\alpha \leq N\}$.

Então $S_N \leq P_{(k; N_1, \dots, N_k)}$. De fato, S_N inclui a soma de todos os inversos de potências de expoente s dos inteiros de 1 até N , enquanto $P_{(k; N_1, \dots, N_k)}$, por considerar todos os primos envolvidos nas decomposições dos inteiros supracitados (e seus respectivos expoentes máximos na decomposição desses inteiros), inclui todos esses inteiros e também possivelmente outros inteiros maiores que N .

Exemplo. Para $N = 3$, temos $k = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $N_1 = 1$ e $N_2 = 1$. Temos então

$$\begin{aligned}
P_{(2; 1, 1)} &= \left(1 + \frac{1}{2^s}\right) \left(1 + \frac{1}{3^s}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^s 3^s} \\
&= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{6^s}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$S_3 = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} < 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{6^s} = P_{(2; 1, 1)}.$$

Como $S_N \leq P_i \leq P$ para todo N , temos que P é cota superior de $\{S_N\}$. Como $S = \sup\{S_N\}$, $S \leq P$.

Como $P \leq S$ (pela equação 1.4), então

$$S = P. \quad (1.6)$$

Vamos agora mostrar que $P = \prod_{p \text{ primo}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right)$.

Seja $P_{(k;\infty)} = \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} \right)$. Temos que

$$\begin{aligned} P_{(k;\infty)} &= \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^k \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(p_i^s)^r} \right) \\ &= \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \cdots \lim_{N_k \rightarrow \infty} P_{(k;N_1, \dots, N_k)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Afirmção 1.6. Para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{(k;\infty)} \leq P. \quad (1.8)$$

De fato. Suponha que $\lim_{N_1 \rightarrow \infty} \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \cdots \lim_{N_k \rightarrow \infty} P_{(k;N_1, \dots, N_k)} = P'$ para algum $P' > P$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $P_{(k;N_1, \dots, N_k)} \in (P' - \varepsilon, P' + \varepsilon)$. Tomando $\varepsilon = P' - P$, temos $P_{(k;N_1, \dots, N_k)} \in (P, 2P' - P)$, logo $P_{(k;N_1, \dots, N_k)} > P$, o que é uma contradição. Segue que $P' \leq P$.

É fácil ver que, se $k < l$, então $P_{(k;\infty)} \leq P_{(l;\infty)} \leq P$, logo existe $P_{(\infty;\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{(k;\infty)}$ e

$$P_{(\infty;\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}} \right) = \prod_{p \text{ primo}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right).$$

Afirmção.

$$P_{(\infty;\infty)} \leq P. \quad (1.9)$$

De fato, como a sequência $(P_{(k;\infty)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ é monótona crescente, então

$$P_{(\infty;\infty)} = \sup\{P_{(k;\infty)}\} \leq P,$$

pois P é cota superior de $\{P_{(k;\infty)}\}$ e $\sup\{P_{(k;\infty)}\}$ é a menor das cotas superiores do conjunto.

$$\text{Concluimos que } \prod_{p \text{ primo}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) \leq P.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_k = \{(k; N_1, N_2, \dots, N_k) \mid N_1, \dots, N_k \in \mathbb{N}\}.$$

Note que $I_k \subset I$ é um conjunto dirigido. Então podemos tomar limites em $\{P_i \mid i \in I_k\}$, que é uma net (ver definição A.6 do apêndice A.1) e o limite (1.7) pode ser visto também como limite de net, ou seja, $P_{(k;\infty)} = \lim_{i \in I_k} P_i$.

Também já mostramos que, em I , se $i < j$, então $P_i < P_j$ (ver observação 1.5), o que se estende para $I_k \subset I$, cuja ordem é induzida pela ordem de I . Isso significa que $\{P_i \mid i \in I_k\}$ é uma net crescente e limitada superiormente (vide afirmação 1.5).

Pela proposição A.7 do apêndice A.1, temos que a net $\{P_i \mid i \in I_k\}$ converge para seu supremo, logo

$$P_{(k;\infty)} = \lim_{i \in I_k} P_i = \sup_{i \in I_k} P_i. \quad (1.10)$$

Como P é cota superior de $P_{(k;\infty)}$ (afirmação 1.6), então $P_{(k;\infty)} = \sup_{i \in I_k} P_i \leq P$, pela definição de supremo.

A sequência dos $P_{(k;\infty)}$ é crescente e limitada superiormente por P , logo converge para seu supremo (propriedade A.1 do apêndice A.1), ou seja,

$$P_{(\infty;\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{(k;\infty)} = \sup\{P_{(k;\infty)}\}. \quad (1.11)$$

Afirmação. $P_{(\infty;\infty)} \geq P$.

Suponha que $P_{(\infty;\infty)} < P$. Como $P = \sup_{i \in I} P_i$, então existe $P_{(k;N_1,\dots,N_k)}$ tal que

$$P_{(\infty;\infty)} < P_{(k;N_1,\dots,N_k)} \leq P. \quad (1.12)$$

Mas, por (1.10), $P_{(k;\infty)} = \sup_{i \in I_k} \{P_i\}$, logo

$$P_{(k;N_1,\dots,N_k)} \leq P_{(k;\infty)} \leq P_{(\infty;\infty)}, \quad (1.13)$$

pois $P_{(\infty;\infty)} = \sup\{P_{(k;\infty)}\}$ (equação 1.11). De 1.12 e 1.13 temos, respectivamente, que $P_{(\infty;\infty)} < P_{(k;N_1,\dots,N_k)}$ e $P_{(\infty;\infty)} \geq P_{(k;N_1,\dots,N_k)}$, o que é uma contradição. Concluímos que $P_{(\infty;\infty)} \geq P$.

Por (1.9), $P_{(\infty;\infty)} \leq P$, de onde segue que $P_{(\infty;\infty)} = P$, isto é,

$$\prod_{p \text{ primo}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right) = P = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

□

1.2 SOMA DOS INVERSOS DOS PRIMOS

Vimos que a série harmônica (que é a soma dos inversos dos números naturais não nulos) diverge (Proposição 1.1). Vimos também na Introdução que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0,$$

ou seja, o conjunto dos primos tem densidade zero. Será então que a soma dos inversos dos primos, sendo uma soma com muito menos termos que a série harmônica, converge? A resposta é não. Demonstramos abaixo este resultado.

Teorema 1.7. *A série*

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

é divergente.

Demonstração. Considere os k primeiros primos, com $k \geq 2$. Definimos

$$\begin{aligned}
 P_k &= \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) \cdots \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) \cdots \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \right) \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \cdots \right) \\
 &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{p_k}. \\
 &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k},
 \end{aligned}$$

já que $p_k > k$ para todo $k \geq 2$. Note que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} > \int_1^k \frac{1}{x} dx. \quad (\text{ver figura 1})$$

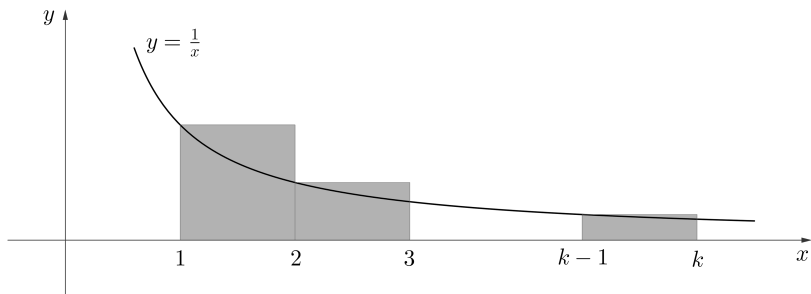


Figura 1: $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} > \int_1^{k-1} \frac{1}{x} dx$

Temos então que

$$P_k > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \ln |k| - \ln |1| = \ln k.$$

Aplicando logaritmo, temos

$$\begin{aligned} \ln(\ln k) &< \ln P_k \\ &< \ln \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) \cdots \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right) \right] \\ &< \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) + \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) + \cdots + \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Seja $f(x) = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) = -\ln(1-x)$.

Temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{1}{1-x} \\ f'(0) &= \frac{1}{1-0} = 1 \\ f''(x) &= (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0, \end{aligned}$$

ou seja, o gráfico de f é côncavo para cima.

Considerando $g(x) = 2x$, temos $g'(x) = 2$. Segue que

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 = \ln 1 = \ln \left(\frac{1}{1-0} \right) = f(0) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = \ln e > \ln 2 = \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = f\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \quad (\text{ver figura 2}) \quad (1.15)$$

De (1.14) e (1.15), temos

$$\begin{aligned} \ln(\ln k) &< \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) + \cdots + \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{p_k}\right) \\ &< g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + g\left(\frac{1}{p_k}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + 2 \cdot \frac{1}{p_k} \\
&= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p_k} \right) \\
\frac{\ln(\ln k)}{2} &< \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p_k}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln k = \infty$ e $\ln(x)$ é contínua, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln(\ln k) = \infty, \tag{1.17}$$

o que implica que o lado esquerdo de (1.16) diverge. Portanto a soma do lado direito da desigualdade também é divergente quando $k \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p_k} \right) = \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \infty. \tag{1.18}$$

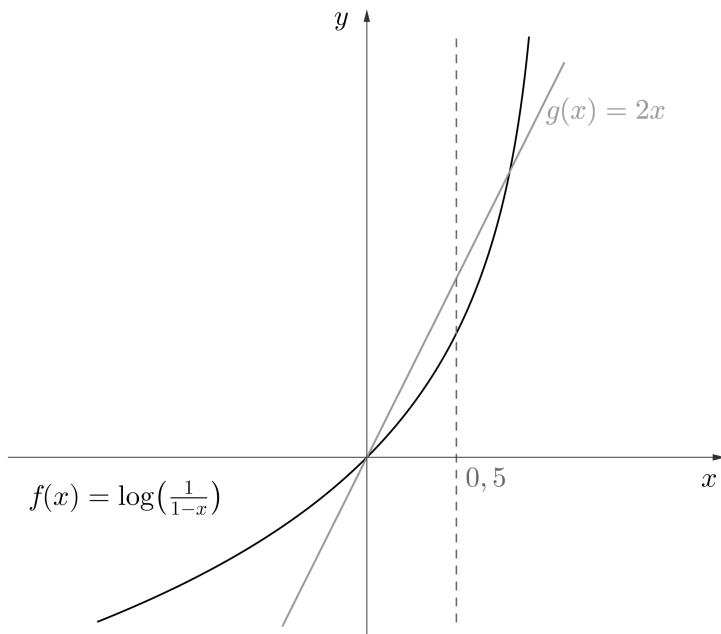


Figura 2: $f(x) < g(x) \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2}]$

□

Sabemos então que, embora os primos fiquem menos numerosos conforme caminhamos no conjunto dos inteiros, eles não ficam tão esparsos a ponto de essa soma ser convergente. Ou seja, embora a ordem de grandeza de p_n seja maior que a de n , ela não pode ser muito maior. De fato, se ela fosse, por exemplo, $\mathcal{O}(n^2)$, ou até $\mathcal{O}(n(\ln n)^2)$, então a série $\sum \frac{1}{p_n}$ seria convergente [Young 1992]. Por outro lado, vimos em (1.17) que o crescimento da série é muito lento, da ordem de $\mathcal{O}(\ln(\ln n))$.

2 A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN

Em seu artigo “Sobre o número de números primos menores do que uma quantidade dada”, Riemann menciona a fórmula do produto de Euler, que acabamos de demonstrar. Ele então define a função zeta como sendo a soma (ou o produto) da fórmula, considerando $s \in \mathbb{C}$. Ele afirma que tanto a soma quanto o produto “convergem somente quando a parte real de s é maior do que 1; ao mesmo tempo, é fácil encontrar uma expressão para a função que é sempre válida” [Riemann 1859, p. 1, tradução nossa] (exceto para o polo em $s = 1$). Nosso objetivo neste capítulo é apresentar a extensão analítica da função zeta para o plano complexo (exceto para o ponto $s = 1$). Para isso, iniciaremos com o estudo da função gama.

2.1 A FUNÇÃO GAMA

A integral

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{x-1} dt$$

foi estudada por Euler entre 1729 e 1730. Em 1809, esta integral recebeu de Adrien-Marie Legendre o nome de função gama (definida para $x > 0$, onde a integral acima converge) e o símbolo Γ que a caracterizam. [Havil 2003]

Alternativamente, é possível escrever

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{x-1} dt = \int_0^1 (\ln 1 - \ln t)^{x-1} dt$$

$$= \int_0^1 (-\ln t)^{x-1} dt.$$

Substituindo $u = -\ln t$, temos $e^{-u} = t$, logo $dt = -e^{-u} du$. Segue que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-\ln t)^{x-1} dt &= \int_{\infty}^0 u^{x-1} (-e^{-u}) du \\ &= \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Podemos então definir a função gama conforme abaixo.

Definição 2.1. *A função gama é definida como*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

para $x \in (0, \infty)$.

Afirmção 2.2. *A função Γ não está definida em 0.*

De fato, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt &= \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &\geq e^{-1} \int_0^1 \frac{dt}{t} + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &\geq e^{-1} \int_0^1 \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

que diverge pois

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{t} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln |1| - \ln |x|) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

o que mostra a afirmação.

Afirmção. $\Gamma(x)$ está definida para $x > 0$.

Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = 0,$$

então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, se $t \geq n$, teremos $\frac{t^{x-1}}{e^{\frac{t}{2}}} < 1$. Já que $t > 0$ implica $e^{-t} < 1$, então

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &< \int_0^n t^{x-1} \cdot 1 dt + \int_n^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Analisando a primeira integral, temos

$$\int_0^n t^{x-1} dt = \left. \frac{t^x}{x} \right|_0^n = \frac{n^x}{x}.$$

A segunda integral também converge, pois

$$\begin{aligned} \int_n^\infty t^{x-1} e^{-t} dt &= \int_n^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{\frac{t}{2}}} e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &\leq \int_n^\infty 1 \cdot e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_n^r e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-2 \cdot \int_{\frac{-n}{2}}^{\frac{-r}{2}} e^u du \right] \\ &= -2 \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} e^u \Big|_{\frac{-n}{2}}^{\frac{-r}{2}} \\ &= -2 \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \left[e^{-\frac{r}{2}} - e^{-\frac{n}{2}} \right] \\ &= -2 \cdot (0 - e^{-\frac{n}{2}}) \\ &= 2e^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Como ambas as integrais convergem, concluímos que $\Gamma(x)$ está definida.

A relação demonstrada a seguir permite calcular $\Gamma(x)$ recursiva-

mente para $x > 0$.

Proposição 2.3. *Se $x > 0$, então $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$.*

Demonstração. Da definição, temos (tomando $u = t^x$ e $dv = e^{-t} dt$ na integração por partes):

$$\begin{aligned}\Gamma(x + 1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= [t^x (-e^{-t})]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot x t^{x-1} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^x e^{-t}) + 0 \cdot e^0 + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= 0 + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \cdot \Gamma(x).\end{aligned}$$

□

Corolário 2.4. *Para $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.*

Demonstração. Temos que

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t} + e^0 = 0 + 1 = 1 = 0!.$$

Da Proposição 2.3, para $x = n - 1 \in \mathbb{N}^*$ temos $\Gamma(n) = (n - 1) \cdot \Gamma(n - 1)$, logo

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3! \\ &\vdots \\ \Gamma(n) &= (n - 1) \cdot \Gamma(n - 1) \\ &= (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \Gamma(n - 2) \\ &= (n - 1) \cdot (n - 2)(n - 3) \cdots 1 \\ &= (n - 1)!\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$, já que $\Gamma(1) = 1 = 0! = (1 - 1)!$.

□

Portanto temos que a função $\Gamma(x+1)$ coincide com a função fatorial $x!$ para todo $x \in \mathbb{N}$, está definida em $(0, \infty)$ e pode ser estendida também para os reais negativos não inteiros. Concluimos então que a função gama é uma extensão da função fatorial para o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Usando a substituição $u = t^{\frac{1}{2}}$, $du = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$ e a igualdade

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

[Weisstein], temos

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Da relação funcional $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ podemos escrever $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, com $x \neq 0$. Esta nova relação nos permite estender a definição de Γ para números reais negativos, por exemplo

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} \\ &= -2\sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

exceto para os números inteiros negativos pois teríamos, por exemplo,

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1}.$$

O fato de $\Gamma(0)$ não estar definida (conforme visto na Afirmação 2.2) implicará, como veremos no Teorema 2.9 que, para todo $k \in \mathbb{Z}_-$, $\Gamma(k)$ não está definida.

Proposição 2.5. *A função gama tem extensão analítica no semiplano*

$\operatorname{Re}(s) > 0$, e sua extensão analítica também é dada pela fórmula integral

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Demonstração. Basta mostrar que a integral define uma função holomorfa em toda faixa $S_{\delta, M} = \{\delta < \operatorname{Re}(s) < M\}$, onde $0 < \delta < M < \infty$. Se s for um complexo da forma $s = \sigma + i\rho$, temos

$$|e^{-t} t^{s-1}| = |e^{-t}| |t^{\sigma-1} t^{i\rho}| = e^{-t} |t^{\sigma-1}| |t^{i\rho}| = e^{-t} t^{\sigma-1}.$$

Observação. Note que

- $|t^{\sigma-1}| = t^{\sigma-1}$, pois $t > 0$
- $|t^{i\rho}| = 1$, pois $t^{i\rho} = e^{\ln(t^{i\rho})} = e^{i\rho \ln t} = e^{i(\rho \ln t)}$, logo $|t^{i\rho}| = |e^{i(\rho \ln t)}| = 1$.

Ou seja, quando $\operatorname{Re}(s) > 0$, temos

$$\int_0^{\infty} |e^{-t} t^{s-1}| dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt,$$

com $\sigma > 0$ real. Como $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt$ converge, então $\int_0^{\infty} |e^{-t} t^{s-1}| dt$ converge para todo $s \in S_{\sigma, M}$.

Note que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt &= \int_0^1 e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t} t^{\sigma-1} dt, \end{aligned}$$

(já que $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$ é imprópria em zero, pois como $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} = 1$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-s} = 0$, temos $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} t^{s-1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-t}}{t^{1-s}} = \infty$).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $F_n(s, t) = \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^{s-1} dt$. Pelo Teorema A.17 do apêndice A.3 (tomando $f(s, t) = e^{-t} t^{s-1}$ no lugar de $F(z, s)$ e $F_n(s)$ no lugar de $f(z)$), temos que F_n é holomorfa na faixa $S_{\delta, M}$, bastando para isso verificar as duas afirmações abaixo.

Afirmção 2.6. Para um $s \in \Omega = S_{\delta, M}$ fixo e $a, b \in \mathbb{R}$, $f(s, t) = e^{-t}t^{s-1}$ é holomorfa em s para todo $t \in [a, b]$.

Demonstração. Temos que $t^{s-1} = e^{\ln t^{s-1}} = e^{(s-1)\ln t} = e^{s-1}e^{\ln t} = t \cdot e^{s-1}$. Como t e e^t são constantes em relação a s e e^{s-1} é holomorfa em s para todo $t \in [a, b]$ e para $s \in S_{\delta, M}$, então $f(s, t) = e^t \cdot t^{s-1}$ é holomorfa em s para todo $t \in [a, b]$ e para $s \in S_{\delta, M}$.

Afirmção 2.7. $f(s, t) = e^{-t}t^{s-1}$ é contínua em $\Omega \times [\frac{1}{n}, n]$.

Demonstração. $f(s, t) = e^{-t}t^{s-1}$ é produto de funções contínuas, logo é contínua para $(s, t) \in S_{\delta, M} \times [\frac{1}{n}, n]$, e é holomorfa para todo $(s, t) \in S_{\delta, M}$, satisfazendo as hipóteses do Teorema A.17, garantindo que as funções F_n são holomorfas.

Se mostrarmos que F_n converge uniformemente para Γ na faixa $S_{\delta, M}$, então para todo compacto $C \subset \{s \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$ existirá uma faixa $S_{\delta, M}$ contendo C . Dessa forma, como F_n é holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$, o Teorema A.19 garante que Γ será holomorfa em $\{s \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$. Temos então

$$\begin{aligned}
 |\Gamma(s) - F_n(s)| &= \left| \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1} dt - \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t}t^{s-1} dt \right| \\
 &= \left| \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{s-1} dt + \int_n^\infty e^{-t}t^{s-1} dt \right| \\
 &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} |e^{-t}t^{s-1}| dt + \int_n^\infty |e^{-t}t^{s-1}| dt \\
 &= \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{\sigma-1} dt + \int_n^\infty e^{-t}t^{\sigma-1} dt. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Analisando a primeira integral de (2.3) temos que, como $t \in [0, \frac{1}{n}]$, então $e^{-t} < e^0 = 1$, logo

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{\sigma-1} dt &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\sigma-1} dt \\
 &= \frac{t^\sigma}{\sigma} \Big|_0^{\frac{1}{n}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{n^\sigma}}{\sigma} - \frac{0}{\sigma} \\
&= \frac{1}{\sigma n^\sigma}.
\end{aligned}$$

Analisando a segunda integral de (2.3) temos que, dado $s \in S_{\sigma, M}$ com $s = \sigma + i\pi$ e $\operatorname{Re}(s) = \sigma < M$, então $\operatorname{Re}(s) - 1 = \sigma - 1 < M - 1 < M$. Como $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^M}{e^{\frac{t}{2}}} = 0$, existe $k \geq 1$ tal que, se $t \geq k$, então $\frac{t^M}{e^{\frac{t}{2}}} < 1$. Dessa forma, temos

$$e^{-t} t^{\sigma-1} \leq e^{-t} t^M = e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{t^M}{e^{\frac{t}{2}}} < e^{-\frac{t}{2}} \cdot 1$$

e

$$\begin{aligned}
\int_n^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt &< \int_n^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt = -2e^{-\frac{t}{2}} \Big|_n^\infty \\
&= -2 \left[\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\frac{r}{2}} - e^{-\frac{n}{2}} \right] = 2e^{-\frac{n}{2}} = 2e^{-\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo, de 2.3, temos

$$\begin{aligned}
|\Gamma(s) - F_n(s)| &= \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt \\
&< \frac{1}{\sigma n^\sigma} - 2e^{-\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} |\Gamma(s) - F_n(s)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sigma n^\sigma} - 2e^{-\frac{n}{2}} \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Concluimos que F_n converge uniformemente para Γ na faixa $S_{\delta, M}$, ou seja, a extensão analítica da função $F(s)$ no semiplano $\operatorname{Re}(s) > 0$ é dada pela fórmula integral, conforme queríamos demonstrar. \square

Lema 2.8. *Se $\operatorname{Re}(s) > 0$, então*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Demonstração. Já demonstramos esta fórmula em na Proposição 2.3 para $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. A demonstração para o caso $\operatorname{Re}(s) > 0$ é análoga.

□

Teorema 2.9. *A função $\Gamma(s)$, definida inicialmente para $\operatorname{Re}(s) > 0$, tem como continuação analítica uma função meromorfa em \mathbb{C} cujas únicas singularidades são polos simples nos inteiros negativos e no zero (ou seja, os pontos $s = 0, -1, -2, \dots$). O resíduo de Γ em $s = -n$ é $\frac{(-1)^n}{n!}$.*

Demonstração. É suficiente estender Γ para cada semiplano $\operatorname{Re}(s) > -m$ com $m \in \mathbb{N}^*$. Para $\operatorname{Re}(s) > -1$ queremos ter a relação do Lema 2.8, ou seja, uma função F_1 tal que $\Gamma(s+1) = s \cdot F_1(s)$.

Para $s \in \{\operatorname{Re}(s) > -1\} \setminus \{0\}$, definimos

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Como $\Gamma(s+1)$ é holomorfa em $\operatorname{Re}(s+1) > 0$, ou seja, em $\operatorname{Re}(s) > -1$, então F_1 é meromorfa nesse semiplano, com polo simples em $s = 0$. Como $\Gamma(1) = 1$ temos, por A.16, que

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s-0)\Gamma(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Gamma(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s+1) = \Gamma(1) = 1,$$

ou seja, $\operatorname{res}_{s=0} \Gamma(s) = 1$. Pelo Lema 2.8, temos então que

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \Gamma(s)$$

para $\operatorname{Re}(s) > 0$, ou seja, F_1 estende Γ para uma função meromorfa no semiplano $\operatorname{Re}(s) > -1$.

De maneira análoga, para cada $m \in \mathbb{N}^*$, definimos no semiplano $\operatorname{Re}(s) > -m$ uma função

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots s}. \quad (2.4)$$

Como $\Gamma(s+m)$ é holomorfa em $\operatorname{Re}(s+m) > 0$, ou seja, em $\operatorname{Re}(s) > -m$, e tem polos simples em $0, -1, -2, \dots, -m+1$, então $F_m(s)$ é meromorfa no semiplano $\operatorname{Re}(s) > -m$. Além disso, para cada polo $-n \in \mathbb{Z}_-$ temos, por (2.4) e pelo Corolário 2.4, o resíduo

$$\operatorname{res}_{s=-n} \Gamma = \lim_{s \rightarrow -n} (s - (-n))F_m(s)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2) \cdots (s+n) \cdots s} \\
&= \lim_{s \rightarrow -n} \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2) \cdots (s+n+1) \cdot (s+n-1) \cdots s} \\
&= \frac{\Gamma(-n+m)}{(-n+m-1)(-n+m-2) \cdots 1 \cdot (-1) \cdots (-n)} \\
&= \frac{(-n+m-1)!}{(-n+m-1)!(-1) \cdots (-n)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Note que, como a equação (2.4) vale para o semiplano $\operatorname{Re}(s) > -m$, então vale também para $\operatorname{Re}(s) > 0$. Neste caso, aplicando m vezes o Lema 2.8, temos que

$$\begin{aligned}
F_m(s) &= \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2) \cdots s} \\
&= \frac{(s+m-1)(s+m-2) \cdots s \cdot \Gamma(s)}{(s+m-1)(s+m-2) \cdots s} \\
&= \Gamma(s),
\end{aligned}$$

isto é, para todo $m \in \mathbb{N}$ a função $F_m(s)$ coincide com $\Gamma(s)$ no semiplano $\operatorname{Re}(s) > 0$. Além disso, temos que $F_m = F_k$ para $1 \leq k \leq m$ no domínio de F_k . Dessa forma, temos uma continuação analítica de $\Gamma(s)$ para $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. \square

Lema 2.10. Para $0 < x < 1$,

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{1+z} dz = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

Demonstração. Considere a função $f(z) = \frac{z^{x-1}}{1-z} = \frac{-g(z)}{z-1}$, onde $g(z) = z^{x-1}$. Sabemos que $z = 1$ é polo simples de f . Dessa forma, por A.16 o resíduo de f será

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_1 f &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{-g(z)}{z-1} \\
&= -g(1)
\end{aligned}$$

$$= -1.$$

Assim, usando o contorno da figura 3, temos

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{res}_1 f &= \int_{\gamma} f(z) dz \\ -2\pi i \cdot 1 &= \int_{\gamma} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz \\ -2\pi i &= \int_{\gamma} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Vamos calcular a integral acima em 3 partes, conforme a imagem abaixo.

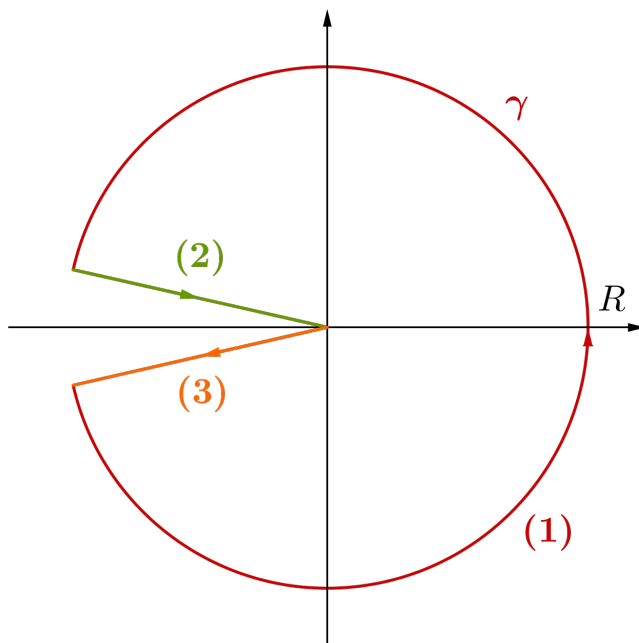


Figura 3: contorno

(1) Fazendo $z = Re^{i\theta}$, com $R > 0$ e $-\pi + \alpha < \theta < \pi + \alpha$, temos

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{(1)} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz \right| &= \left| \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(Re^{i\theta})^{x-1} Rie^{i\theta}}{1-Re^{i\theta}} d\theta \right| \\
 &= \left| \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{R^{x-1} e^{i\theta(x-1)} \cdot R \cdot i \cdot e^{i\theta}}{1-Re^{i\theta}} d\theta \right| \\
 &= \left| \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{R^x e^{i\theta x} \cdot i}{1-Re^{i\theta}} d\theta \right| \\
 &\leq \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{R^{x-1}}{\left| \frac{1}{R} - e^{i\theta} \right|} d\theta \cdot |e^{i\theta x}| \cdot |i|. \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Observe que $0 < x < 1$ implica $-1 < x-1 < 0$, logo $1-x > 0$ e, como $R^{x-1} = \frac{1}{R^{1-x}}$, temos $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{x-1} = 0$ e

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{x-1}}{\left| \frac{1}{R} - e^{i\theta} \right|} = \frac{0}{|0 - e^{i\theta}|} = 0,$$

logo

$$\begin{aligned}
 0 < \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{(1)} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz \right| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{R^{x-1}}{\left| \frac{1}{R} - e^{i\theta} \right|} d\theta \cdot |e^{i\theta x}| \cdot |i| = 0 \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{(1)} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz \right| &= 0.
 \end{aligned}$$

(2) Usando a substituição $z = ue^{i(\pi-\alpha)} = u(e^{i\pi} e^{i\alpha}) = u(-1)e^{i\alpha} = -ue^{i\alpha}$, com $0 < u < R$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{(2)} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^0 \frac{u^{x-1} e^{i(\pi-\alpha)x} \cdot e^{-i(\pi-\alpha)} \cdot e^{i(\pi-\alpha)}}{1-ue^{i(\pi-\alpha)}} du \\
 &= e^{i(\pi-\alpha)x} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^0 \frac{u^{x-1}}{1+ue^{-i\alpha}} du
 \end{aligned}$$

pois $e^{i(\pi-\alpha)} = e^{i\pi} \cdot e^{-i\alpha} = -e^{-i\alpha}$. Concluimos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int \frac{z^{x-1}}{1-z} dz &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[e^{i(\pi-\alpha)x} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^0 \frac{u^{x-1}}{1+ue^{-i\alpha}} du \right] \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{i(\pi-\alpha)x} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^0 \frac{u^{x-1}}{1+ue^{-i\alpha}} du \\
 &= e^{i\pi x} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_R^0 \frac{u^{x-1}}{1+ue^{-i\alpha}} du \\
 &= e^{i\pi x} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^0 \frac{u^{x-1}}{1+u} du \\
 &= e^{i\pi x} \cdot \int_{\infty}^0 \frac{u^{x-1}}{1+u} du.
 \end{aligned}$$

(3) Usando a substituição

$$z = ue^{-i(\pi-\alpha)} = u(e^{-i\pi} e^{-i\alpha}) = u(-1)e^{-i\alpha} = -ue^{-i\alpha}$$

com $0 < u < R$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{z^{x-1}}{1-z} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{u^{x-1} e^{-i(\pi-\alpha)x} \cdot e^{i(\pi-\alpha)} \cdot e^{-i(\pi-\alpha)}}{1-ue^{-i(\pi-\alpha)}} du \\
 &= e^{-i(\pi-\alpha)x} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{u^{x-1}}{1+ue^{i\alpha}} du
 \end{aligned}$$

pois $e^{-i(\pi-\alpha)} = e^{-i\pi} \cdot e^{i\alpha} = -e^{i\alpha}$. Concluimos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int \frac{z^{x-1}}{1-z} dz &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[e^{-i(\pi-\alpha)x} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{u^{x-1}}{1+ue^{i\alpha}} du \right] \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-i(\pi-\alpha)x} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{u^{x-1}}{1+ue^{i\alpha}} du \\
 &= e^{-i\pi x} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^R \frac{u^{x-1}}{1+ue^{i\alpha}} du \\
 &= e^{-i\pi x} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{u^{x-1}}{1+u} du \\
 &= e^{-i\pi x} \cdot \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u} du.
 \end{aligned}$$

Para concluir a integração, somamos os resultados das integrações sobre as partes do contorno, obtendo (por (2.5))

$$\begin{aligned}
 0 + e^{i\pi x} \cdot \int_{\infty}^0 \frac{u^{x-1}}{1+u} du + e^{-i\pi x} \cdot \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u} du &= \oint \frac{z^{x-1}}{1-z} dz \\
 \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u} du (e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}) &= -2\pi i \\
 \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u} du (-2i \operatorname{sen}(\pi x)) &= -2\pi i \\
 \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u} du &= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)},
 \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad e \\
 e^{-i\theta} &= \cos -\theta + i \operatorname{sen} -\theta \\
 &= \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta,
 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
 e^{-i\theta} - e^{i\theta} &= (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) - (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\
 &= -2i \operatorname{sen} \theta,
 \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do resultado.

É possível também demonstrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)}$$

para $s \in \mathbb{C}$ com $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$.

□

Teorema 2.11. Para todo $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s}.$$

Demonstração. Por definição, temos

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{s-1} du.$$

- **Caso 1:** $s \in \mathbb{C}$ com $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$.

Tomando $u = vt$, temos

$$\begin{aligned}\Gamma(1-s) &= \int_0^\infty e^{-u} u^{-s} du \\ &= \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-s} t dv \\ &= t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-s} dv.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \Gamma(1-s) dt \\ &= \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \left(t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-s} dv \right) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} t^s \cdot t^{-s} v^{-s} dv dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{-s} dv dt.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{-s} dv dt &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{m}}^m \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t(1+v)} v^{-s} dv \right) dt \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{m}}^m \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t(1+v)} v^{-s} dv dt\end{aligned}$$

Considere a função $f : [\frac{1}{n}, n] \times [\frac{1}{m}, m]$ tal que

$$f(v, t) = e^{-t(1+v)} v^{-s}.$$

Sabemos que f é integrável em $[\frac{1}{n}, n] \times [\frac{1}{m}, m]$. Assim, pelo Teorema A.11 temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{m}}^m \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t(1+v)} v^{-s} dv dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \int_{\frac{1}{m}}^m e^{-t(1+v)} v^{-s} dt dv \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \int_{\frac{1}{m}}^m e^{-t(1+v)} v^{-s} dt dv \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{m}}^m e^{-t(1+v)} v^{-s} dt dv \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{-s} dt dv. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral interna (com relação a t) usando $l = t(1+v)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^k e^{-t(1+v)} v^{-s} dt &= \int_{t=0}^{t=k} e^{-l} \frac{v^{-s}}{1+v} dl \\
&= -\frac{v^{-s}}{1+v} [e^{-l}]_{t=0}^{t=k} \\
&= -\frac{v^{-s}}{1+v} [e^{-t(1+v)}]_{t=0}^{t=k} \\
&= -\frac{v^{-s}}{1+v} (e^{-k(1+v)} - 1)
\end{aligned}$$

logo

$$\int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{-s} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{v^{-s}}{1+v} (e^{-k(1+v)} - 1) = \frac{v^{-s}}{1+v}.$$

Assim, pelo Lema 2.10, temos, de (2.7):

$$\begin{aligned}
\Gamma(1-s)\Gamma(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{-s} dt dv \\
&= \int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v} dv \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi(1-s))} \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi - \pi s)} \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s},
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\pi - \pi s) &= \operatorname{sen} \pi \cos \pi s - \cos \pi \operatorname{sen} \pi s \\ &= -(-1) \cdot \operatorname{sen} \pi s \\ &= \operatorname{sen} \pi s.\end{aligned}$$

- **Caso 2:** $-m < \operatorname{Re}(s) < -m + 1 \leq 0$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$.

Temos que

$$0 \leq m - 1 < \operatorname{Re}(-s) < m,$$

assim podemos aplicar o Lema 2.8 a $-s$, obtendo

$$\Gamma(1 - s) = (-s)(-s + 1) \cdots (1 - s - m) \cdot \Gamma(1 - s - m).$$

Como $\operatorname{Re}(s) > -m$, pela continuação analítica de Γ obtida no Teorema 2.9, conforme a equação (2.4), temos

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s + m)}{(s + m - 1)(s + m - 2) \cdots s}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1 - s) &= \frac{\Gamma(s + m)}{(s + m - 1) \cdots s} \cdot (-s) \cdots (1 - s - m) \cdot \Gamma(1 - s - m) \\ &= \frac{\Gamma(s + m)}{(s + m - 1) \cdots s} \cdot (-1)^m \cdot (s + m - 1) \cdots s \cdot \Gamma(1 - s - m) \\ &= \Gamma(s + m)\Gamma(1 - s - m) \cdot (-1)^m.\end{aligned}$$

Como $0 < \operatorname{Re}(s + m) < 1$, então o caso 1 é válido, tomando $s + m$ no lugar de s . Assim, temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1 - s) &= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi(s + m))} \cdot (-1)^m \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s \cdot \cos \pi m + \operatorname{sen} \pi m \cos \pi s} \cdot (-1)^m \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s \cdot (-1)^m + 0} \cdot (-1)^m \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s}.\end{aligned}$$

- **Caso 3:** $m < \operatorname{Re}(s) < m + 1$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$.

Temos que

$$\begin{aligned} -m - 1 &< \operatorname{Re}(-s) < -m \leq -1 \\ -m &< \operatorname{Re}(1 - s) < -m + 1 \leq 0, \end{aligned}$$

assim podemos aplicar o Lema 2.8 a s , obtendo

$$\Gamma(s) = (s - 1)(s - 2) \cdots (s - m) \cdot \Gamma(s - m).$$

Como $\operatorname{Re}(1 - s) > -m$, pela continuação analítica de Γ obtida no Teorema 2.9, conforme a equação (2.4), temos

$$\Gamma(1 - s) = \frac{\Gamma(1 - s + m)}{(-s + m)(s + m - 1) \cdots (1 - s)}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(1 - s) &= \frac{\Gamma(1 - s + m)}{(-s + m) \cdots (1 - s)} \cdot (s - 1) \cdots (s - m) \cdot \Gamma(s - m) \\ &= \frac{\Gamma(1 - s + m)}{(-s + m) \cdots (1 - s)} \cdot (-1)^m \cdot (1 - s) \cdots (m - s) \cdot \Gamma(s - m) \\ &= \Gamma(1 - s + m)\Gamma(s - m) \cdot (-1)^m. \end{aligned}$$

Como $0 < \operatorname{Re}(s - m) < 1$, então o caso 1 é válido, tomando $s - m$ no lugar de s . Assim, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(1 - s) &= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi(s - m))} \cdot (-1)^m \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s \cdot \cos \pi m - \operatorname{sen} \pi m \cos \pi s} \cdot (-1)^m \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s \cdot (-1)^m - 0} \cdot (-1)^m \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s}. \end{aligned}$$

□

2.2 A FUNÇÃO ZETA

Proposição 2.12. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge para todo s com $\operatorname{Re}(s) > 1$ e a função $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ é holomorfa nesse semiplano.

Demonstração. Seja $s = \sigma + it$. Temos então

$$\begin{aligned} |n^{-s}| &= \left| e^{\ln n^{-s}} \right| = \left| e^{-s \ln n} \right| = \left| e^{(-\sigma - it) \ln n} \right| = \left| e^{-\sigma \ln n} \right| \left| e^{-it \ln n} \right| = \\ &= \left| e^{-\sigma \ln n} \right| \cdot 1 = e^{-\sigma \ln n} = n^{-\sigma}. \end{aligned}$$

Como consequência, se $\sigma > 1 + \delta > 1$, então $n^\sigma > n^{1+\delta} > n$ e $\frac{1}{n^\sigma} < \frac{1}{n^{1+\delta}} < \frac{1}{n}$. Assim, temos

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

Como para cada σ existe uma família de s para os quais $\operatorname{Re}(s) = \sigma$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ é uniformemente limitada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$, que converge (pois é uma p -série com $p = 1 + \delta > 1$). Portanto, para todo $\delta > 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge uniformemente no semiplano $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma > 1 + \delta > 1$, e por conseguinte define uma função holomorfa em $\operatorname{Re}(s) > 1$. \square

Definição 2.13.

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

Como a transformada de Fourier da função $f(x) = e^{-\pi t(x+a)^2}$ é $\hat{f}(\xi) = e^{2\pi i a \xi} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}}$ (por A.3.1), pela Fórmula de Poisson (A.23) temos

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t(n+a)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}} e^{2\pi i n a}.$$

Fazendo $a = 0$, temos

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}.$$

Como $\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$, temos $\theta(\frac{1}{t}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}$, logo

$$\theta(t) = t^{-\frac{1}{2}} \theta\left(\frac{1}{t}\right). \quad (2.8)$$

Observação 2.14. Embora $f(x) = e^{-\pi t(x+a)^2}$ possa ser definida como uma função holomorfa em uma faixa, aqui usamos variáveis reais para f e sua transformada de Fourier já que, ao aplicar a Fórmula de Poisson, x e ξ serão restritos aos inteiros.

Afirmção 2.15. A função θ satisfaz as seguintes propriedades:

- a) $\theta(t) \leq C_1 t^{-\frac{1}{2}}$ quando $t \rightarrow 0$, para algum $C_1 \geq 1$;
- b) $|\theta(t) - 1| \leq C_2 e^{-\pi t}$ quando $t \geq 1$, para algum $C_2 \geq 2$.

Demonstração. a) Temos que

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}, \quad (2.9)$$

logo como $\theta(t) = t^{-\frac{1}{2}} \theta(\frac{1}{t})$ temos

$$\theta(t) = t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} \right). \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} &= e^{-\frac{\pi}{t}} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} \\ &\leq e^{-\frac{\pi}{t}} + \int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi x^2}{t}} dx \\ &\leq e^{-\frac{\pi}{t}} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi x^2}{t}} dx \\ &= e^{-\frac{\pi}{t}} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi x^2}{t}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{\pi}{t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \\
&= e^{-\frac{\pi}{t}} + \frac{\sqrt{t}}{2},
\end{aligned}$$

usando a integral gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ [Weisstein] com a substituição $u = \frac{\sqrt{\pi}x}{\sqrt{t}}$. Por (2.10), temos então que

$$\begin{aligned}
\theta(t) &\leq t^{-\frac{1}{2}}(1 + 2e^{-\frac{\pi}{t}} + 2\frac{\sqrt{t}}{2}) \\
&= t^{-\frac{1}{2}}(1 + 2e^{-\frac{\pi}{t}} + \sqrt{t}).
\end{aligned}$$

Temos que $t < 1$, logo $\frac{\pi}{t} > \pi$, portanto $-\frac{\pi}{t} < -\pi$ e $e^{-\frac{\pi}{t}} < e^{-\pi}$. Note que

$$\begin{aligned}
1 + 2e^{-\frac{\pi}{t}} + \sqrt{t} &< 1 + 2e^{-\pi} + \sqrt{1} = \\
&= 2 + 2e^{-\pi} = 2(1 + e^{-\pi}) > 1,
\end{aligned}$$

assim

$$\theta(t) \leq t^{-\frac{1}{2}} \cdot C_1,$$

para $C_1 \geq 1$.

b) De (2.9), temos

$$\begin{aligned}
|\theta(t) - 1| &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \\
&\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n t},
\end{aligned}$$

pois a primeira soma é sobre os naturais do tipo n^2 , enquanto a segunda inclui todos os naturais. Usando a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, obtemos

$$\begin{aligned}
|\theta(t) - 1| &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n t} \\
&= 2 \frac{e^{-\pi t}}{(1 - e^{-\pi t})}
\end{aligned}$$

$$< \left(\frac{2}{1 - e^{-\pi}} \right) e^{-\pi t},$$

pois $\frac{1}{1 - e^{-\pi t}} < \frac{1}{1 - e^{-\pi}}$ para $t \geq 1$ (de fato, já que $e^{-\pi t} < e^{-\pi}$, logo $-e^{-\pi t} > -e^{-\pi}$, então $1 - e^{-\pi t} > 1 - e^{-\pi}$).

Como $\frac{2}{1 - e^{-\pi}} \geq 2$ (de fato, já que $e^{-\pi} \geq 0$, então $-e^{-\pi} \leq 0$, $1 - e^{-\pi} \leq 1$ e $\frac{1}{1 - e^{-\pi}} \geq 1$), então

$$|\theta(t) - 1| \leq C_2 e^{-\pi t}$$

para algum $C_2 \geq 2$.

□

Teorema 2.16. *Se $\operatorname{Re}(s) > 1$, então*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} [\theta(u) - 1] du.$$

Demonstração. Temos que $\theta(u) - 1 = 2 \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u}$ *du*, logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} [\theta(u) - 1] du &= \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \cdot 2 \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u} du \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du. \end{aligned} \quad (2.11)$$

(Note que a integral da série acima pode ser avaliada como a soma das integrais (pelo Corolário A.10 do Apêndice A.2), pois a série converge uniformemente na variável u .)

Como $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$, então $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt$. Avaliemos a integral de (2.11) com a substituição $u = \frac{t}{\pi n^2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 u} u^{\frac{s}{2}-1} du &= \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{\pi n^2} \right)^{\frac{s}{2}-1} \cdot \frac{1}{\pi n^2} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} (\pi n^2)^{1-\frac{s}{2}-1} dt \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt \end{aligned}$$

$$= \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

De (2.11) obtemos, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} [\theta(u) - 1] du &= \sum_{n=1}^\infty \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^\infty n^{-s} \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s). \end{aligned}$$

□

Definição 2.17.

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

Teorema 2.18. *A função $\xi(s)$ é holomorfa para $\operatorname{Re}(s) > 1$ e tem continuação analítica em todo plano complexo como uma função meromorfa com polos simples em $s = 0$ e $s = 1$. Além disso,*

$$\xi(s) = \xi(1-s) \quad \text{para todo } s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Demonstração. Definimos $\psi(u) = \frac{\theta(u)-1}{2}$. De (2.8) temos $\theta(u) = u^{-\frac{1}{2}}\theta\left(\frac{1}{u}\right)$, então

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{u^{-\frac{1}{2}}\theta\left(\frac{1}{u}\right) - 1}{2} \\ &= \frac{u^{-\frac{1}{2}}\theta\left(\frac{1}{u}\right) - u^{-\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} \\ &= \frac{u^{-\frac{1}{2}}\left(\theta\left(\frac{1}{u}\right) - 1\right)}{2} + \frac{u^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} \\ &= u^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.16 segue que

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} [\theta(u) - 1] du = \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\ &= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \left[u^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \right] du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\
&= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}}{2} - \frac{u^{\frac{s}{2}-1}}{2} du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\
&= \left(\frac{u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} \right) \Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2} + \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\
&= \left(\frac{1}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{s}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2} + \int_\infty^1 t^{\frac{3}{2}-\frac{s}{2}} \psi(t) \cdot \frac{1}{-t^2} dt + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \psi(t) dt + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty [u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}] \psi(u) du. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Sendo $s = x + iy$, temos

$$\begin{aligned}
u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} &= u^{-\frac{x-1}{2}-i\frac{y}{2}} = u^{-\frac{x-1}{2}} \cdot u^{-i\frac{y}{2}} = \\
&= u^{-\frac{x-1}{2}} \cdot e^{\ln u^{-i\frac{y}{2}}} = u^{-\frac{x-1}{2}} \cdot e^{-i\frac{y}{2} \ln u}.
\end{aligned}$$

Como ψ tem decaimento exponencial e $[u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}]$ tem decaimento polinomial, então a integral em (2.12) converge, resultando em uma função holomorfa em s . Portanto ξ tem continuação analítica em \mathbb{C} com polos em $s = 0$ e $s = 1$.

Além disso, $\xi(s) = \xi(1-s)$. De fato:

$$u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1} = u^{\frac{s}{2}-1} + u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} = u^{-\frac{(1-s)}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{(1-s)}{2}-1}$$

e

$$\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} = \frac{1}{(1-s)-1} - \frac{1}{(1-s)},$$

ou seja, a expressão em (2.12) é a mesma se substituirmos s por $(1-s)$. \square

Teorema 2.19. *A função zeta tem continuação meromorfa em todo o plano complexo, tendo como única singularidade um polo simples em $s = 1$.*

Demonstração. Da definição de ξ temos a continuação meromorfa de

ζ , a saber:

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \frac{\xi(s)}{\Gamma(\frac{s}{2})}.$$

Como $\Gamma(s)$ tem polos simples em $0, -1, -2, \dots$ (pelo Teorema 2.9), então $\Gamma(\frac{s}{2})$ tem polos simples em $0, -2, -4, \dots$ e $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$ tem zeros simples em $0, -2, -4, \dots$ e não tem polos, pois $\Gamma(\frac{s}{2})$ não tem zeros, já que

$$\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1 - \frac{s}{2}) = \frac{\pi}{\text{sen}(\frac{\pi s}{2})} \neq 0.$$

Já que $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$ tem zero simples na origem, podemos representá-la por $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} = s \cdot f(s)$, onde $f(s)$ é uma função que tem zeros simples em $-2, -4, -6, \dots$ e não tem polos. Assim, de (2.12), segue que

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \pi^{\frac{s}{2}} \cdot s \cdot f(s) \cdot \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{\infty} [u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}] \psi(u) \, du \right) \\ &= \pi^{\frac{s}{2}} \cdot f(s) \cdot \left(\frac{s}{s-1} - 1 + s \int_1^{\infty} [u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}] \psi(u) \, du \right). \end{aligned}$$

Note que, como f tem zeros em $\{s = -2n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, então pela expressão acima, ζ também terá zeros nesses pontos. Além disso, ζ tem um único polo simples em $s = 1$.

Observação 2.20. *Os zeros encontrados acima são chamados zeros triviais de zeta.*

Observação 2.21. *Os demais zeros da função $\zeta(s)$ estão na faixa crítica $\{s \mid 0 < \text{Re}(s) < 1\}$ [Edwards 2001].*

□

2.3 MAIS SOBRE A FUNÇÃO ZETA

Em “Sobre o número de números primos menores do que uma quantidade dada”, Riemann parte da fórmula do produto de Euler para obter a extensão analítica de $\zeta(s)$ para o plano complexo (exceto o polo

em $s = 1$). Ele então fixa $s = \frac{1}{2} + ti$ e estuda as raízes de $\xi(t)$. Com isso, chega à conclusão de que a parte imaginária dessas raízes deve estar entre $-\frac{1}{2}i$ e $\frac{1}{2}i$. Com base em evidências empíricas, ele diz:

[...] é muito provável que todas as raízes [de $\xi(t)$] sejam reais. Certamente alguém desejaria uma prova mais rigorosa aqui; por ora, deixei de lado essa busca após algumas breves tentativas frustradas, já que isso parece desnecessário para o próximo objetivo da minha investigação. [Riemann 1859, p. 3, tradução nossa]

Como as raízes de $\xi(s)$ são também raízes de $\zeta(s)$, a afirmação de Riemann é equivalente a dizer que todos os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ (isto é, aqueles que não são inteiros negativos pares) estão na reta vertical $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Esta afirmação recebeu o nome de Hipótese de Riemann.

Desde então muitos matemáticos tentaram provar esta hipótese, até o momento sem sucesso. O problema ganhou ainda mais notoriedade ao ser divulgado como o oitavo problema de Hilbert, no Segundo Congresso Internacional de matemáticos em Paris, em 1900. No ano 2000, o Clay Mathematics Institute ofereceu o prêmio de 1 milhão de dólares para quem encontrasse uma demonstração de um dos “problemas do milênio”, dos quais a Hipótese de Riemann faz parte. A demora e a dificuldade em encontrar uma prova desse resultado fizeram dele um dos problemas em aberto mais importantes da matemática, e certamente quem conseguir demonstrá-lo terá, além do prêmio em dinheiro, um grande prestígio. Por este motivo, tanto matemáticos de diversas universidades do mundo quanto amadores figuram entre os que tentam demonstrar a Hipótese de Riemann, e muitos já alegaram ter conseguido. Um grande problema, no entanto, é que a quantidade de esforço necessária para verificar cada uma destas tentativas de prova é tão grande que poucos se dedicam a isso. Em geral, tais alegações são tratadas com grande ceticismo. Isso se deve em parte porque, dado o histórico das tentativas de se demonstrar esse resultado, muitos acreditam que seja necessário o desenvolvimento de novas ferramentas – ou até mesmo uma nova área da matemática – para que a demonstração seja possível.

A utilidade do estudo dos primos já foi muito questionada. Em 1915, em um relatório da British Association, Hardy afirmou:

A teoria de números foi sempre vista como um dos ramos mais obviamente inúteis da matemática pura. Esta é uma acusação contra a qual não há defesa válida; e ela é ainda mais justificada quando diz respeito às partes da teoria mais diretamente relacionadas com os primos. [Albers et al. 2015, p. 199, tradução nossa]

Esta afirmação se tornou falsa com o tempo. O próprio Hardy admitiu, em seu “A Mathematician’s Apology” [Hardy 1992], que isto poderia vir a acontecer um dia. O problema da fatoração de números primos grandes serve hoje à área da criptografia, em que vários algoritmos se baseiam no fato de que a fatoração por primos de números muito grandes pode levar muito tempo. Uma prática comum é usar um número muito grande que seja semiprimo (ou seja, que é o produto de dois números primos não necessariamente distintos) como chave de encriptação. Para quebrar o código, é necessário conhecer a fatoração por primos desse número. Se ele for grande o suficiente, essa fatoração é muito demorada de encontrar – um computador pode levar de dias até anos ou até séculos para encontrar os fatores. Isso faz o número semiprimo ser considerado uma chave segura.

A importância da Hipótese de Riemann reside no fato de que ela possibilita estimar o erro envolvido no Teorema dos Números Primos. [Prime number theorem 2018] Se (e somente se) ela for verdadeira, o erro pode ser melhorado para

$$\pi(x) - \text{Li}(x) = \mathcal{O}(\sqrt{x} \ln x).$$

Uma demonstração da Hipótese de Riemann não vai necessariamente comprometer a criptografia como a conhecemos hoje, porém as ferramentas matemáticas usadas na sua demonstração talvez possibilitem uma melhoria nos algoritmos existentes de fatoração por primos.

CONCLUSÃO

É um tanto surpreendente que a teoria de números tenha tido que confiar na análise para seu desenvolvimento, assim como surpreende que os números primos, tão fundamentais na aritmética, tenham uma distribuição tão imprevisível e ainda não plenamente compreendida. A busca ainda não concluída por uma demonstração da validade da Hipótese de Riemann é um grande estímulo para o estudo da função zeta.

Ao longo deste trabalho buscamos desenvolver um texto introdutório ao estudo da função zeta e à teoria analítica de números. Os resultados aqui, apesar de já conhecidos, estão compilados de maneira sucinta e direta, tendo como objetivo final determinar a continuação analítica da função.

Buscamos detalhar as demonstrações de forma a facilitar a compreensão do leitor, e com isso acreditamos que este texto possa servir como base para este estudo ou como referência complementar para um olhar mais aprofundado sobre a construção da continuação analítica de zeta.

APÊNDICE A – RESULTADOS UTILIZADOS NO TEXTO

Neste apêndice, introduziremos algumas noções elementares de topologia, análise real e análise complexa utilizadas neste trabalho. Estas noções serão úteis tanto para o leitor que não estiver familiarizado com elas quanto para aquele que conhecer as versões mais gerais de tais definições e resultados.

A.1 NOÇÕES DE TOPOLOGIA

Para os fins deste trabalho, é suficiente definir uma *net* no conjunto dos reais, motivo pelo qual os conceitos aqui apresentados também estão limitados a esse conjunto.

Proposição A.1. *Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência real, monótona crescente (ou seja, $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2$ implica $a_{n_1} < a_{n_2}$) e limitada superiormente (ou seja, $a_n \leq M$ para algum $M \in \mathbb{R}$), então S converge para o seu supremo.*

Definição A.2. *Uma relação binária \leq é dita uma **pré-ordem** em I se ela é*

i) reflexiva: se $i \in I$, então $i \leq i$;

ii) transitiva: para todos $i, j, k \in I$, se $i \leq j$ e $j \leq k$, então $i \leq k$;

Obs.: Também podemos usar $j \geq i$ para representar $i \leq j$.

Definição A.3. *Se uma pré-ordem \leq for também antissimétrica (ou seja, se $i \leq j$ e $j \leq i$, então $i = j$), então \leq é chamada **ordem parcial** em I .*

Definição A.4. *Um conjunto I não vazio munido de uma pré-ordem \leq é dito **dirigido** se para cada par $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$.*

Definição A.5. *Uma **net** em \mathbb{R} é uma função*

$$\begin{aligned} S : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ i &\longmapsto S_i \end{aligned}$$

cujo domínio I é um conjunto dirigido.

Definição A.6. *Uma net $\{S_i\}_{i \in I}$ em \mathbb{R} **converge** para L (ou, alternativamente, o **limite** de $\{S_i\}_{i \in I}$ é L) se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $i_0 \in I$ tal que $i_0 \leq i$ implica que $|S_i - L| < \varepsilon$.*

Notação: $\lim_{i \in I} S_i = L$.

Proposição A.7. *Sejam I um conjunto dirigido e S (definida por $S(i) = S_i$, onde $i \in I$) uma net em \mathbb{R} . Se S é monótona crescente (ou seja, se $i < j$ implica que $S_i < S_j \quad \forall i, j \in I$) e limitada superiormente, então S converge para o seu supremo.*

Demonstração. Considere I e S conforme o enunciado. Como $\{S_i \mid i \in I\} \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente, então existe $s = \sup_{i \in I} \{S_i\}$. Dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $i_0 \in I$ tal que $s - \varepsilon < S_{i_0} \leq s$ (caso contrário, $S_i \leq s - \varepsilon \quad \forall i \in I$ e $s - \varepsilon$ seria uma cota superior menor que s para $\{S_i\}_{i \in I}$, o que é uma contradição com o fato de s ser supremo de $\{S_i\}_{i \in I}$).

Se $i \in I$ é tal que $i > i_0$, temos que $S_i \leq s$ (pois s é supremo) e, como S é crescente, $S_{i_0} < S_i$, logo $s - \varepsilon < S_{i_0} < S_i \leq s < s + \varepsilon$, ou seja, $|S_i - s| < \varepsilon \quad \forall i > i_0$, de onde concluímos que $\lim_{i \in I} S_i = s$. \square

Observação. *A demonstração de A.1 é um caso especial dessa demonstração para $I = \mathbb{N}$.*

A.2 NOÇÕES DE ANÁLISE REAL

Teorema A.8 (Teste da integral). *Sejam $N \in \mathbb{Z}$ e $f : [N, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função contínua, monótona decrescente e não negativa em todo seu domínio. Então a série $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ converge se e só se a integral imprópria $\int_N^{\infty} f(x) dx$ é finita. Além disso, se a soma acima convergir, temos que*

$$\int_N^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n) \leq f(N) + \int_N^{\infty} f(x) dx.$$

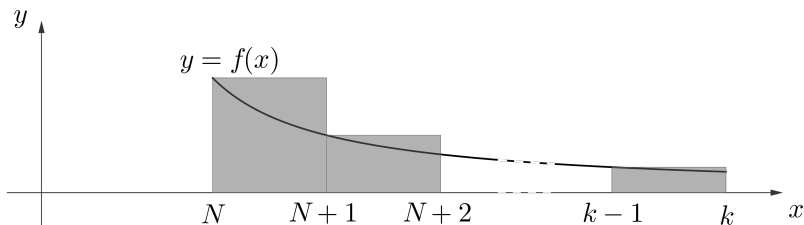


Figura 4: $\int_N^k f(x) dx \leq \sum_{n=N}^{k-1} f(n)$

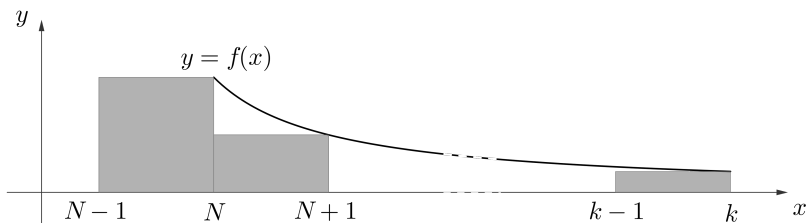


Figura 5: $\sum_{n=N}^k f(n) \leq f(N) + \int_N^k f(x) dx$

Teorema A.9. [Lima 2006] *Se uma seqüência de funções integráveis $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então f é integrável e vale*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Corolário A.10. [Lima 2006] Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série uniformemente convergente de funções integráveis $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Então sua soma é integrável e tem-se

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Em outras palavras: é permitido integrar termo a termo uma série uniformemente convergente.

Teorema A.11 (Teorema da integração repetida). [Lima 2015] Seja $f : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrável no produto dos blocos $A_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $A_2 \subset \mathbb{R}^n$. Para todo $x \in A_1$, seja $f_x : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ e ponhamos

$$\varphi(x) = \int_{A_2} f_x(y) dy, \quad \psi(x) = \int_{A_2} f_x(y) dy.$$

As funções $\varphi, \psi : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, assim definidas, são integráveis, com

$$\int_{A_1} \varphi(x) dx = \int_{A_1} \psi(x) dx = \int_{A_1 \times A_2} f(x, y) dx dy,$$

isto é,

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \times A_2} f(x, y) dx dy &= \int_{A_1} \left(\int_{A_2} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{A_1} \left(\int_{A_2} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

A.3 NOÇÕES DE ANÁLISE COMPLEXA

Definição A.12. Seja f uma função complexa definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dizemos que f é holomorfa em $z_0 \in \Omega$ se o quociente

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

converge quando $h \rightarrow 0$.

Definição A.13. *Seja f uma função complexa definida em uma vizinhança de z_0 da forma*

$$\{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

para algum $r > 0$. Dizemos que f tem um polo em z_0 se a função $\frac{1}{f}$, definida como zero em z_0 , for holomorfa em $\{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ para algum $\varepsilon > 0$.

Teorema A.14. *Se f tem um polo em $z_0 \in \Omega$, então em uma vizinhança deste ponto existem uma função holomorfa h que não se anula em nenhum ponto e um único inteiro positivo n tais que*

$$f(z) = (z - z_0)^{-n}h(z).$$

Observação A.15. *O inteiro n é a ordem do polo, e denota a taxa de crescimento de f em torno de z_0 . Se $n = 1$ dizemos que o polo é simples, e para $n = 2$ temos um polo duplo.*

Teorema A.16. *Suponha que f seja holomorfa em um aberto que contém um disco D , exceto por um polo simples em $z_0 \in D$. Então*

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f,$$

em que

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

Teorema A.17. *Seja $F(z, s)$ definida para $(z, s) \in \Omega \times [a, b]$, em que Ω é um conjunto aberto em \mathbb{C} . Suponha que F satisfaça as seguintes propriedades:*

i) $F(\cdot, s)$ é holomorfa em Ω , para todo s .

ii) F é contínua em $\Omega \times [a, b]$.

Então a função f definida em Ω por

$$f(z) = \int_a^b F(z, s) ds \tag{A.1}$$

é holomorfa.

Definição A.18. Suponha que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ seja uma sequência de funções complexas definidas em $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dizemos que essa sequência converge uniformemente para uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe um natural N tal que, para todos $z \in \Omega$ e $n \geq N$, tivermos que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Teorema A.19. Se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções holomorfas que converge uniformemente para uma função f em todo subconjunto compacto de Ω , então f é holomorfa em Ω .

A.3.1 TRANSFORMADA DE FOURIER

Definição A.20. Para todo $a > 0$, denotamos por \mathfrak{F}_a a classe de todas as funções f que têm decaimento moderado, ou seja, que satisfazem as condições abaixo:

(i) a função f é holomorfa na faixa horizontal

$$S_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < a\};$$

(ii) existe $A > 0$ tal que $|f(x + iy)| \leq \frac{A}{1+x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $|y| < a$.

Denotamos por \mathfrak{F} a classe de todas as funções que pertencem a \mathfrak{F}_a para algum a .

Definição A.21. Se $f \in \mathfrak{F}$, então sua transformada de Fourier é dada por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

e a transformada inversa de f é

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i x \xi} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observação A.22. $f(z) = e^{-z^2}$ pertence a \mathfrak{F}_a para todo a , pois é uma função holomorfa em todo plano e tem decaimento moderado em cada linha horizontal do tipo $\operatorname{Im}(z) = y$ para $|y| < a$. Logo f pertence também a \mathfrak{F} .

De faato, considerando a função real e^{-x^2} , temos que $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ (ver figura 6). Se $z = x + iy$, então temos

$$\begin{aligned} |e^{-(x+iy)^2}| &= |e^{-x^2+y^2-2ixy}| = |e^{-x^2}| |e^{y^2}| |e^{-2ixy}| < \\ &< e^{-x^2} e^{y^2} \cdot 1 \leq \frac{e^{y^2}}{1+x^2} = \frac{A}{1+x^2}. \end{aligned}$$

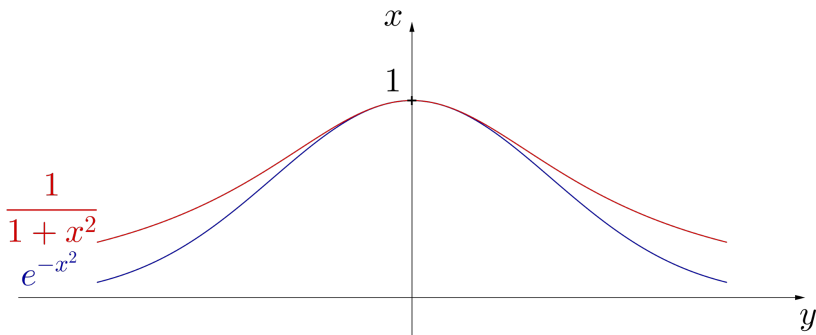


Figura 6: decaimento de e^{-x^2}

Exemplo. A função $e^{-\pi x^2}$ é sua própria transformada de Fourier, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{-\pi \xi^2}.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+2ix\xi)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+2ix\xi-x^2+x^2)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi[(x+i\xi)^2+\xi^2]} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2-\pi\xi^2} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Temos também, por [Weisstein], que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \sqrt{\pi}(x + i\xi)$, $dy = \sqrt{\pi} dx$ temos, de (A.2),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2 - \pi\xi^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot \frac{e^{\pi\xi^2}}{\sqrt{\pi}} dy \\ &= \frac{e^{-\pi\xi^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{e^{-\pi\xi^2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\ &= e^{-\pi\xi^2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo. A transformada de Fourier da função $f(x) = e^{-\pi t(x+a)^2}$ é $\hat{f}(\xi) = e^{2\pi i a \xi} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}}$.

Demonstração. Consideremos $f(x) = e^{-\pi t(x+a)^2}$ e $y = t^{\frac{1}{2}}(x+a)$, de onde temos que $x = t^{-\frac{1}{2}}y - a$ e $dx = t^{-\frac{1}{2}} dy$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(x+a)^2} e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi i(t^{-\frac{1}{2}}y-a)\xi} t^{-\frac{1}{2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi i t^{-\frac{1}{2}}y\xi} dy \cdot (e^{2\pi i a \xi} t^{-\frac{1}{2}}) \\ &= e^{2\pi i a \xi} t^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi[(y+it^{-\frac{1}{2}}\xi)^2 + t^{-1}\xi^2]} dy \\ &= e^{2\pi i a \xi} t^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y+it^{-\frac{1}{2}}\xi)^2} dy \cdot e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}} \\ &= e^{2\pi i a \xi} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}}. \end{aligned}$$

□

Teorema A.23 (Fórmula da soma de Poisson). *Se \hat{f} é a transformada de Fourier de $f(n)$, então*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

REFERÊNCIAS

- [Albers et al. 2015]ALBERS, D. J. et al. (Ed.). *The G.H. Hardy reader*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2015. (Spectrum series). OCLC: ocn929782989. ISBN 9781107135550 9781107594647.
- [Baker 2017]BAKER, R. An Introduction to Riemann's Life, His Mathematics, and His Work on the Zeta Function: 190 years from riemann's birth. In: HUGH, M.; NIKEGHBALI, A.; RASSIAS, M. T. (Ed.). *Exploring the Riemann Zeta function*. New York, NY: Springer, 2017. p. 1–12.
- [Boyer 1983]BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1983.
- [Dunham 1999]DUNHAM, W. *Euler: the master of us all*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1999. (The Dolciani mathematical expositions, no. 22).
- [Dyson 2017]DYSON, F. J. Quasi-Crystals and the Riemann Hypothesis: 190 years from riemann's birth. In: HUGH, M.; NIKEGHBALI, A.; RASSIAS, M. T. (Ed.). *Exploring the Riemann Zeta function*. New York, NY: Springer, 2017. p. v–vi.
- [Edwards 2001]EDWARDS, H. M. *Riemann's zeta function*. Dover ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2001.
- [Euler 1744]EULER, L. Several Remarks on Infinite Series (variae observationes circa series infinitas). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, n. 9, p. 160–188, 1744. Acessado em 20/08/2018.
- [Eves 2008]EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.
- [Hardy 1992]HARDY, G. H. *A mathematician's apology*. Cambridge [England] ; New York: Cambridge University Press, 1992. ISBN 9780521427067.

- [Havil 2003]HAVIL, J. *Gamma: exploring Euler's constant*. Princeton: Princeton University Press, 2003.
- [Karacuba e Voronin 1992]KARACUBA, A. A.; VORONIN, S. M. *The Riemann zeta-function*. Berlin: de Gruyter, 1992. 396 p. (De Gruyter expositions in mathematics, 5).
- [Kelley 1975]KELLEY, J. L. *General topology*. New York: Springer-Verlag, 1975. (Graduate texts in mathematics, 27).
- [Lapidus 2008]LAPIDUS, M. L. *In search of the Riemann zeros: strings, fractal membranes and noncommutative spacetimes*. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2008.
- [Lima 2006]LIMA, E. L. *Curso de análise*. 12^a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. 431 p. (Projeto Euclides, v. 1). ISBN 8524401184.
- [Lima 2015]LIMA, E. L. *Curso de análise*. 11^a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 546 p. (Projeto Euclides, v. 2). ISBN 9788524400490.
- [Martinez et al. 2010]MARTINEZ, F. B. et al. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Rio de Janeiro (RJ): IMPA, 2010.
- [Prime number 2018]PRIME number. ago. 2018. Acessado em 02/06/2018. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Prime_number>.
- [Prime number theorem 2018]PRIME number theorem. jul. 2018. Acessado em 15/08/2018. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Prime number theorem](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Prime_number_theorem)>.
- [Riemann 1859]RIEMANN, B. on the numbers of primes less than a given quantity (Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse). *Monatsberichte der Berliner Akademie*, nov. 1859. Acessado em 02/06/2018. Disponível em: <<http://www.claymath.org/sites/default/files/ezeta.pdf>>.
- [Stein e Shakarchi 2003]STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. *Complex analysis*. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2003. (Princeton lectures in analysis, 2).
- [Weisstein]WEISSTEIN, E. W. *Gaussian Integral*. [S.l.]. Acessado em 02/06/2018. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/GaussianIntegral.html>>.

[Young 1992] YOUNG, R. M. *Excursions in calculus: an interplay of the continuous and the discrete*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1992. (The Dolciani mathematical expositions, no. 13).

