Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Recursos didáticos para o ensino de matemática nos anos finais do ensino fundamental: algumas possibilidades

José Eustáquio Ferreira

Brasília – DF

2018

José Eustáquio Ferreira

Recursos didáticos para o ensino de matemática nos anos finais do ensino fundamental: algumas possibilidades

Dissertação de Mestrado profissional em Matemática, apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, desenvolvida sob a orientação do Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

FJ83r

Ferreira, José Eustáquio
Recursos didáticos para o ensino de matemática nos anos finais do ensino fundamental: algumas possibilidades / José Eustáquio Ferreira; orientador Cleyton Hércules Gontijo. -- Brasília, 2018.
86 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. recursos didáticos. 2. ensino e aprendizagem de matemática. 3. anos finais do ensino fundamental. I. Gontijo, Cleyton Hércules, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Recursos didáticos para o ensino de matemática nos anos finais do ensino fundamental: algumas possibilidades

por

José Eustáquio Ferreira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 22 de novembro de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Cleyton Hércules Gontijo – FUP/UnB (Orientador)

Regina da Silva Pina Neves

Profª. Drª. Regina da Silva Pina Neves - MAT/UnB

Profª. Drª. Mônica Menezes de Souza – SEE/DF

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, mesmo sabendo que grandes matemáticos não esboçaram uma prova de sua existência, e muito menos eu, na minha pequenez do conhecimento matemático, serei o autor de tal demonstração. Só sei dizer que sempre busco sentir Sua presença e isso me basta.

Como matemático, esboçarei meus agradecimentos, na ordem cronológica, às pessoas que contribuíram na minha vida desde meu nascimento. Sendo assim, agradeço a meus pais, Lázaro e Lucélia, que, desde a minha infância, dedicaram-se para a formação do meu caráter e de minha responsabilidade com os estudos; também agradeço as minhas irmãs, também professoras de matemática, Paula e Fernanda, pelo bom convívio que tivemos em nossas infâncias, adolescências. Esse carinho perdura até hoje e, através deste, agradeço a todos os meus familiares maternos e paternos e, em particular, a minha tia Áurea e a meu tio, já falecido, Milton que me acolheram, em sua casa, no tempo em que fiz minha graduação em matemática na Universidade Federal de Uberlândia.

Dedico esse parágrafo para agradecer a minha querida esposa, Mônica, por me apoiar nos momentos de angústia. Ela, mais do que ninguém, soube das dificuldades que tive para concluir essa dissertação e, com certeza, me levantou quando estive por desistir. Agradeço aos familiares de minha esposa, que me adotaram como parte da família e, em particular, a Odazir, a Marcus Winicius e a José Charles que contribuíram na confecção dos materiais que serão tema dessa dissertação. Também agradeço a minhas queridas e lindas filhas Beatriz e Lara, que, sem dúvida nenhuma, são o combustível que me move hoje em busca de um mundo melhor.

Agradeço a todos os meus professores, desde os anos iniciais do ensino fundamental até a conclusão desse mestrado e, em particular, a meu orientador Cleyton, que muito me ajudou para defender minha dissertação e, em especial, a todos os amigos que estiveram comigo nessa caminhada de mestrado.

Não poderia deixar de agradecera todos os colegas de trabalho das diversas escolas pelas quais passei, à Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal, que permitiu meu afastamento das funções de professor para fazer esse mestrado e,

não poderia esquecer jamais, de agradecer àqueles que são a motivação por me fazer buscar qualificação para exercer minha função de educador, meus alunos.

E, por fim, porém não menos importante, agradecer a CAPES, pelo suporte financeiro que me permitiu concluir esse projeto tão importante para mim como professor e cidadão.

RESUMO

Recursos didáticos compreendem uma vasta relação de materiais que podem ser utilizados para se trabalhar os conteúdos escolares com alunos em diferentes etapas de escolarização. Esses materiais são ferramentas pedagógicas que, se utilizados de forma planejada e sistemática, funcionam como motivadores do ensino e da aprendizagem. Este trabalho tem como objetivo apresentar alguns recursos didáticos como sugestão para trabalhar conceitos matemáticos abordados especialmente com alunos do 6° e 7° anos do ensino fundamental. Esses recursos podem servir tanto como ferramenta ilustrativa, utilizada pelos professores para demonstrar os conteúdos, quanto como ferramenta manipulativa utilizada pelos estudantes no processo de construção de conceitos matemáticos. Espera-se, a partir do uso destes recursos, que o aluno possa abstrair e ampliar os conceitos matemáticos. Destaca-se que não se trata de proposta de validação desses recursos junto ao público-alvo desse material, mas de mostrar as potencialidades dos mesmos no processo de ensino-aprendizagem. Trata-se de um trabalho de natureza bibliográfica, desenvolvido a partir de publicações sobre recursos didáticos para o ensino de matemática, apoiada na experiência docente do pesquisador e de suas produções para organizar o trabalho pedagógico com os estudantes dos anos finais do ensino fundamental. O trabalho está divido em três capítulos. O primeiro apresenta a introdução do trabalho, destacando os objetivos que conduziram à sua realização. O segundo traz uma breve revisão acerca da educação e dos desafios presentes na construção da aprendizagem. O terceiro capítulo trata da metodologia da pesquisa. O quarto apresenta a utilização dos materiais para o ensino de alguns conteúdos do 6° e 7° anos do ensino fundamental. Por fim serão apresentadas as considerações finais. Como conclusão, mostra-se que esses recursos podem ser produzidos a baixo custo e que os mesmos apresentam potencial para motivar os estudantes e professores no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Palavras chave: recursos didáticos; ensino e aprendizagem de matemática; anos finais do ensino fundamental.

ABSTRACT

Didactic resourses includes a wide range of materials that can be used to as a a tool to explain school contentes with students at diferente stages os schooling. These materials are pedagogical tools that, if used in a planned and systematic way, works as motivators of teaching and learning. This paper aims to presente some didactic resources as a suggestion to work on mathematical concepts addressed especially to students in 6th and 7th grade of elementary school. These resources can suit both as an illustrative tool, used by teachers to demonstrate content, and as a manipulative tool used by students in the process of constructing mathematical concepts. It is hoped, from the use of these resources, that the student can abstract and extend mathematical concepts. It should b estresses that this is not a proposal to validate theses these resources with the audience of this pape, but rather to show their potentialities in the teaching-learning process. It is a work of a bibliographic nature, developed from publications on didactic resources for teaching mathematics, supported by the researcher's teaching experience and his productions to organize the pedagogical work with the students of the final years of elementary school. The work is divided into three chapters. The first presents the introduction of this paper, highlighting the objectives that led to its accomplishment. The second brings a brief review about education and the challenges in the construction of learning. The third chapter deals with the research methodology. The fourth presents the use of materials for the teaching of some contents of the 6th and 7th years of elementary education. Finally, the final considerations will be presented. As a conclusion, it is shown that these resources can be produced at low cost and that they have the potential to motivate students and teachers in the process of teaching and learning mathematics.

Keywords: didactic resourses; teaching and learning math; years of elementary school.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo 01

Introdução

O presente trabalho trata do uso de recursos didáticos como uma importante ferramenta para favorecer a aprendizagem dos alunos. A utilização desses recursos pode se converter em um importante auxílio no processo de ensino e aprendizagem, especialmente se considerarmos a realidade dos estudantes no que diz respeito aos resultados dos testes aplicados pelo governo e por organismos internacionais.

Os resultados obtidos por nossos alunos na Prova Brasil, que é um dos instrumentos utilizados para o cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) é calculado com base no desempenho dos alunos em português e matemática (Prova Brasil) e no fluxo escolar (taxa de aprovação e evasão escolar) de cada unidade escolar. Os resultados da Prova Brasil são importantes para o questionamento do trabalho desenvolvido nas escolas, pois, queremos uma escola que ensina e estudantes que aprendam.

A figura 1 mostra a evolução do IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica - Brasil em matemática para o 9º ano do ensino fundamental entre 2005 e 2017.

Figura 1: Evolução do IDEB Brasil observado e metas em Matemática para o 9º ano do ensino fundamental entre 2005 e 2017

Fonte: MEC/Inep

Observando o gráfico, vemos um crescimento lento do IDEB desde a sua criação em 2005. Nas primeiras edições do IDEB, as metas estavam sendo alcançadas, todavia, possivelmente por falta de investimentos, as metas deixaram de ser alcançadas com o passar dos anos.

A situação é ainda pior quando analisamos o desempenho dos estudantes brasileiros no *Programme for International Student Assessment* – Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes). No ano de 2015, entre um total de 70 países participantes dessa avaliação, os estudantes brasileiros ocuparam a 63º posição em ciências, 59º em leitura e 66º em matemática.

A figura 2 indica a evolução dos estudantes brasileiros de 15 anos em matemática na prova do PISA.

Figura 2: Evolução dos estudantes brasileiros na prova do PISA

Fonte: OCDE/PISA (2015)

Observa-se no gráfico acima que a evolução dos estudantes brasileiros estava em uma ascendência até 2012 e, em 2015, houve uma queda, voltando quase aos patamares de 2006.

Vale salientar ainda que, comparando a proficiência alcançada pelo Brasil em 2015, 377 pontos, com a média dos países da OCDE, 490 pontos, será necessário muito investimento com eficiência na área de educação para nos posicionarmos em um lugar de destaque na educação mundial.

Para constatar que não houve muita melhora na situação do ensino, recentemente foram divulgados os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que mostrou resultados preocupantes, principalmente em relação aos alunos do ensino médio. O INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – disponibiliza, em sua página na WEB, um documento que resume os resultados do SAEB 2017. Primeiramente, são gritantes as desigualdades educacionais entre as regiões do Brasil, onde Norte e Nordeste apresentam um nível de proficiência mais baixo. De modo geral, alunos do 5° ano do ensino fundamental apresentam proficiência 4 (224 pontos), numa escala que vai até 10, sendo capazes de, entre outras coisas, segundo (Presskit SAEB 2017):

Identificar

- os retângulos em meio a outros quadriláteros;
- a planificação de uma pirâmide dentre um conjunto de planificações;
- o maior valor em uma tabela cujos dados possuem até oito ordens;
- o princípio do valor posicional do Sistema de Numeração Decimal;
- uma fração como representação da relação parte-todo, com o apoio de um conjunto de até cinco figuras.

Determinar

- o total de uma quantia a partir da quantidade de moedas de 25 e/ou 50 centavos que a compõe, ou vice-versa.
- a duração de um evento cujos horários inicial e final acontecem em minutos diferentes de uma mesma hora dada.
- o resultado da multiplicação de números naturais por valores do sistema monetário nacional, expressos em números de até duas ordens e posterior adição.
- os termos desconhecidos em uma sequência numérica de múltiplos de cinco.
- a adição, com reserva, de até três números naturais com até quatro ordens.

• a subtração de números naturais usando a noção de completar.

• a multiplicação de um número natural de até três ordens por cinco, com reserva.

• a divisão exata por números de um algarismo.

Em comparação aos dados de 2015, todos os estados brasileiros apresentam evolução, porém não é algo a ser comemorado, pois o nível de aprendizagem médio do país, para os alunos do 5° ano em matemática, ainda se situa no limite inferior do nível básico (nível 4 de 10 da Escala de Proficiência). E mais alarmante ainda é perceber que essa melhora, nos anos iniciais, mesmo que sutil, se perde ao longo das séries seguintes, pois a proficiência em matemática para os alunos do 9° ano do ensino fundamental e do 3° ano do ensino médio é desanimadora; na verdade, insuficiente entrando em nível 3 e 2, respectivamente.

O objetivo deste trabalho, diante deste cenário em que se figura nosso país, nas avaliações da Prova Brasil e do PISA, é apresentar alguns recursos didáticos como sugestão para trabalhar conceitos matemáticos abordados especialmente com alunos do 6° e 7° anos do ensino fundamental. Esses materiais apresentam, de forma lúdica, os conteúdos escolares de modo que, a partir da manipulação e visualização, o aluno possa abstrair situações que favoreçam a aprendizagem dos conceitos matemáticos que se deseja ensinar. Tais materiais também funcionam como atrativo visual, possibilitando-se sair do convencional quadro e giz.

Os recursos pedagógicos que serão utilizados iniciará privilegiando o cálculo mental com a utilização, por exemplo, do dardo magnético e o tabuleiro das multiplicações; os sistemas de numeração e operações com números naturais, com a utilização do material dourado e o ábaco; as frações, com os discos e barras de frações e a balança de pratos iguais; os números inteiros, com o termômetro de metal e placas de EVA representando unidades positivas e negativas e, por fim, a balança de pratos iguais para compreensão dos processos aditivos e multiplicativos de resolução de uma equação do 1º grau. Essa sequência privilegia, portanto, alguns conteúdos de 6º e 7º anos, fazendo a transição com os números até as primeiras noções de álgebra, com destaque para a resolução de equação do 1º grau.

Na sequência dessa dissertação, será apresentado, no Capítulo 1, a introdução, o capítulo 2, o embasamento teórico, na utilização de recursos didáticos no ensino da matemática; em seguida, o capítulo 3 constituirá, na metodologia de pesquisa, no capítulo 4, a descrição de alguns materiais concretos, apresentando o material, suas finalidades, os conteúdos que podem ser explorados e as formas de uso com exemplos e, por último, no capítulo 5, as considerações finais acerca do uso desses recursos no ensino de matemática.

Capítulo 02

Fundamentação Teórica

Nas últimas décadas, as orientações curriculares oficiais tiveram forte disseminação em todo o país. A disponibilização dessas orientações, em meios eletrônicos, também favoreceu a sua disseminação junto aos professores das diferentes etapas de escolarização. Destacamos o importante papel desempenhado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, 1998, 1999), publicados no final dos anos de 1990 e, recentemente, a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) para o ensino fundamental e médio. Esses documentos expõem não apenas conteúdos escolares para serem ensinados, mas apresentam orientações que visam explicitar os objetivos que cada componente curricular tem no processo de aprendizagem dos estudantes brasileiros.

A fim de assegurar os direitos de aprendizagem e desenvolvimento, tem-se a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de caráter normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo de sua passagem pela Educação Básica. No que diz respeito à Matemática, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 263) destaca que

> o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.

Isso implica que o trabalho pedagógico com esta disciplina deve, ao mesmo tempo, favorecer aos estudantes compreender e agir sobre o mundo em que vivem e avançar na produção de conhecimentos para resolver os problemas (sociais, científicos, tecnológicos etc.) que marcam o atual momento da história da humanidade.

Além da já mencionada importância da matemática para formação de cidadãos críticos, os conceitos matemáticos estão diretamente relacionados à aprendizagem de outras disciplinas, como química e física. Porém é notório que, mesmo diante da sua importância, a matemática é uma das disciplinas mais temidas por alunos, desde as séries iniciais. A maioria dos alunos apresenta grande dificuldade em aprendê-la. Quando passam a ter contato com as operações de multiplicação e divisão, essa dificuldade vê-se aumentada, o que gerará dificuldade em aprender os conteúdos seguintes e até mesmo o aprendizado em outras disciplinas.

Diversos motivos podem explicar tais dificuldades, entre eles, pouca ou nenhuma contextualização, falta de recursos para tornar o aprendizado estimulante, que forneça ao aluno formas de perceber que a matemática está a sua volta, ausência de estratégias que aproximem o conteúdo do cotidiano dos alunos ou desmotivação tanto de alunos quanto de professores (PIRES et. al, 2013).

Essa dificuldade pode ser devida à falta do “letramento matemático”, que, no BNCC, é definido como:

> (...) competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula investigação e pode ser prazeroso (fruição).” (BRASIL, 2017, p. 264)

Também é ressaltado no BNCC a importância dos “processos matemáticos”:

> “(...) desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática. Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e

> para o desenvolvimento do pensamento computacional." (BRASIL, 2017, p. 264)

Ao ressaltar a importância da contextualização no processo de aprendizagem, outro conceito também aparece e se mostra fundamental: a interdisciplinaridade. Segundo os PCN, interdisciplinaridade significa*:* *"planejamento e desenvolvimento de um currículo de forma orgânica, superando a organização por disciplinas estanques e revigorando a integração e articulação dos conhecimentos..."* e que no contexto educacional,

> a interdisciplinaridade não tem a pretensão de criar novas disciplinas ou saberes, mas utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver o problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista. Em suma, a interdisciplinaridade tem função instrumental. Trata-se de recorrer a um saber diretamente útil e utilizável para responder às questões e aos problemas sociais contemporâneos. (BRASIL, 1997, p. 21).

Ou seja, com a interdisciplinaridade, pretende-se conquistar uma interação entre as diversas áreas do conhecimento. Percebe-se, assim, uma íntima relação entre os conceitos de contextualização e interdisciplinaridade. A interdisciplinaridade faz com que os alunos desenvolvam seu conhecimento com uma visão mais crítica e ampla. O conhecimento tecno-científico, contextualizado à realidade da comunidade onde o aluno está inserido, faz com que ele encare o saber de forma mais prazerosa e útil.

Uma forma de tornar a matemática interdisciplinar e interessante é trabalhar em conjunto com outras disciplinas, por exemplo, associar atividades de língua portuguesa, como a interpretação de textos, com o trabalho artístico, na confecção de jogos, para estudar conceitos matemáticos e desenvolver habilidades como cálculos mentais ou resolução de problemas de forma intuitiva. Diante do desinteresse ou dificuldade apresentada pelos estudantes, estratégias que aproximem a matemática dos alunos, tornando-a mais acessível são fundamentais para reverter este quadro. No portal do Ministério da Educação, há o exemplo do Colégio Marista Maria Imaculada, Rio Grande do Sul, onde, desde 2005, são trabalhados "Jogos Matemáticos" como ferramentas para estimular o aluno a aprender brincando. Segundo uma das coordenadoras do projeto:

> O objetivo é proporcionar aos alunos um contato mais prático com o componente curricular, desenvolver o raciocínio lógico, a habilidade de cálculo mental e possibilitar a compreensão de conteúdos matemáticos de uma maneira lúdica e atraente.

Ainda, segundo as responsáveis pelo projeto, diversos tipos de jogos, tais como varetas, tabuleiros, baralhos, entre outros, podem ser utilizados para desenvolver os conteúdos em sala de aula. O cálculo mental, por exemplo, pode ser estimulado com alunos do 6° ano por meio de jogos de baralho e de adivinhação. Elas destacam a melhora no desempenho dos alunos, pois eles se tornaram participantes do próprio aprendizado, aprendizado este que vem de forma lúdica e divertida. O aluno é agente ativo na apropriação do próprio conhecimento, o que vai ao encontro de Maccarini (2011, p. 10), que diz que atualmente a educação matemática deve estar "voltada para a construção e apropriação do conhecimento com compreensão e com significado, percebendo a sua trajetória histórica e a sua relevância social e cultural".

Muniz (2016) destaca a necessidade de jogos nas aulas de matemática. Segundo o autor, os jogos e as brincadeiras são

> uma forma de panaceia para o resgate do prazer na realização de atividades e aprendizagens matemáticas escolares. A carência de uma discussão aprofundada e fundamentada dos múltiplos e diversos significados das relações teóricas e práticas entre a brincadeira e a aprendizagem matemática faz com que corramos o risco de limitar periférica e marginalmente as possibilidades de articulação entre o lúdico e matemática. Essa limitação implicaria conceber dois momentos possíveis de utilização do jogo na aula de matemática: primeiro o desenvolvimento e a oferta de atividades lúdicas no momento de preparação para a aprendizagem e mobilização de motivações extrínsecas; e, segundo, o jogo posterior à realização da aprendizagem, como forma de sistematizar, exercitar, adestrar, praticar aprendizagens realizadas antes e fora o jogo. (MUNIZ, 2016, Cap. 1, sem página).

Muniz ainda destaca que a marginalização do jogo, antes ou após a realização, "*não levaria a conceber a aprendizagem matemática como parte essencial do próprio jogo realizado pelo sujeito, uma vez que o jogo ficaria como protoaprendizagem ou pós-aprendizagem, tornando difícil a relação essencial aprendizagem-jogo*" (2016, sem página), pois a atividade lúdica não participa da gênese da constituição da aprendizagem. Fornecendo elementos motivacionais, a aprendizagem será garantida pela proposta pedagógica. Além disso, como destaca Lorenzato (2009), uma simples realização de atividade manipulativa ou visual não vai garantir aprendizagem, devendo haver, por parte dos alunos, atividade mental.

Dentre as definições de materiais manipuláveis, destaca-se a utilizada por Rocco e Flores (2007, p. 1), que definem materiais manipuláveis como: “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia”. O uso de materiais manipuláveis, explorando os seus recursos visuais e táteis, desde os primeiros anos do ensino fundamental, pode auxiliar os alunos no desenvolvimento de conceitos abstratos, no raciocínio lógico, na coordenação motora, nas percepções diferenciadas para idenficiar e resolver problemas. Além disso, pode favorecer a redução dos seus graus de dificuldades na aprendizagem e, por outro lado, auxiliar gradativamente na elevação da complexidade das tarefas a serem executadas, lembrando sempre da importância do professor, como um mediador, e da estratégia pedagógica para que o aluno consiga essa evolução, pois os jogos e materiais manipuláveis por si somente não são capazes de fazer com que o aluno compreenda os conceitos.

Quanto ao que pode ser usado como materiais e contribuições na aprendizagem, Passos (2006), apresenta importantes observações:

> Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma a ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam (PASSOS, 2006, p. 81).

Diante de toda revisão apresentada, o uso de materiais manipuláveis na construção da aprendizagem só terá sua eficácia alcançada sob duas condições: primeira, o aluno tem que ser ativo e participante na construção do próprio aprendizado, sendo capaz de questionar, problematizar, desenvolver o raciocínio lógico, compreender o conceito por trás do material utilizado e; segunda, o professor deve ter objetivos bem estabelecidos ao apresentar os materiais concretos aos alunos, saber construir uma sequência didática no uso dos materiais que conduza o aluno a refletir sobre o que está sendo apresentado, pois, como expôs Lorenzato (2006):

> É muito difícil, ou provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. Para as pessoas que já conceituaram esses objetos, quando ouvem o nome do objeto, flui em suas mentes a ideia correspondente ao objeto, sem precisarem dos apoios iniciais que tiveram dos atributos tamanho, cor, movimento, forma e peso. Os conceitos evoluem com o processo de abstração; a abstração ocorre pela separação (LORENZATO, 2006, p.22).

Ou seja, a simples apresentação de um material, ou jogo, ou qualquer outro recurso didático que vise facilitar o aprendizado de conceitos será inútil se o professor não pensar em uma estratégia que conduza o aluno a abstrair conceitos relacionados ao que deseja ensinar. Segundo Silva et. al,

> o professor não pode "caminhar" à frente de seus alunos, indicando caminhos e resultados prontos, mas deve oferecer às crianças, atividades interessantes, partindo do real e de preferência do manipulável e dos conhecimentos que elas já dominam, facilitando a descoberta, favorecendo a própria construção do saber (SILVA; CUNHA; SILVA; HAISASHIDA, s/d, p. 3)

De acordo com Rego e Rego (2006, p.54), é necessário que o professor tenha cuidados básicos na utilizaçao de quaisquer recursos didáticos:

> I) Dar tempo para que os alunos conheçam o material (iniciamente é importante que os alunos o explorem livremente;
> II) Incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
> III) Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades por meio de perguntas ou de indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
> IV) Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
> V) Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo, e
> *VI)* Sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material.

Ressaltamos que resultados da pesquisa de Gontijo (2007), Tobias (2004) e de Livne e Milgram (2006) sinalizam que estratégias para estimular os estudantes, motivando-os em relação à matemática, e estratégias para o desenvolvimento da criatividade podem favorecer a superação da ansiedade envolvida na aprendizagem dessa disciplina, além de quebrar barreiras que impedem o sucesso nessa área.

Brousseau (1996), por meio da Teoria das Situações Didáticas, buscou destacar a necessidade de modelar as situações de ensino-aprendizagem de matemática de modo a torná-las adequadas para que a ação do aluno viabilize a construção do conhecimento. Nesse sentido, analisa a relação entre aluno-professor-saber por meio de um conjunto de situações que fazem a mediação entre o sujeito e o saber. Acreditamos que os recursos lúdicos e os materiais concretos podem ser importantes aliados no processo de mediação do conhecimento, favorecendo a interação entre alunos-professores-saberes matemáticos.

Capítulo 03

Metodologia

O presente trabalho foi produzido sob a perspectiva da pesquisa bibliográfica. Para Gil (2002, p. 44), a pesquisa bibliográfica "é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos". Cervo e Bervian (1983, p. 55) dizem que a pesquisa bibliográfica "explica um problema a partir de referenciais teóricos publicados em documentos".

A escolha da pesquisa bibliográfica foi motivada pelo desejo de conhecer recursos didáticos para o ensino de matemática nos anos finais do ensino, particularmente materiais que pudessem ser utilizados com estudantes do 6º e 7º ano. Todavia, buscou-se estabelecer alguns critérios para a busca desses recursos: o primeiro critério é que os recursos deveriam contribuir para a construção de conceitos que favorecessem uma transição entre o universo da aritmética e o universo da álgebra escolar. Um segundo critério diz respeito à natureza dos materiais utilizados na produção desses recursos. No que diz respeito a este elemento, destaca-se a necessidade de divulgar recursos didáticos que podem ser reproduzidos e/ou adaptados facilmente pelos docentes que se encontram imersos no espaço da sala de aula e, ao mesmo tempo, que possam ser fabricados com materiais de baixo custo. Um terceiro critério utilizado foi a familiaridade do pesquisador com os recursos que serão descritos nessa dissertação. Optou-se por descrever, a partir da pesquisa bibliográfica, os recursos cuja funcionalidade e eficácia já tivessem sido testadas pelo pesquisador em sua prática pedagógica. Acreditamos que este último elemento é essencial, pois se trata de descrever recursos que apresentam potencial para favorecer as aprendizagens.

Em relação ao primeiro critério utilizado na pesquisa bibliográfica para selecionar os recursos didáticos que serão descritos nessa dissertação, destacamos as conclusões que Bezerra, Ignácio e Dias (2015) chegaram após uma análise histórica, indicando que

> a gênese da álgebra ocorre por meio do estudo de problemas que eram resolvidos de forma aritmética, mesmo utilizando uma simbologia, que servia apenas de ferramenta para facilitar a escrita do problema. Após vários séculos chegou-se a resolução de problemas utilizando plenamente a simbologia e introduzindo também as operações (BEZERRA; IGNÁCIO; DIAS, 2015, p. 3).

A preocupação em descrever recursos didáticos para orientar a transição entre os conteúdos do campo aritmético para o campo algébrico decorre, além da própria prática do pesquisador, de resultados de investigações que apontam

> que tanto os estudantes do 5º ano do ensino fundamental como os do 1º e 2º ano do ensino médio não recorrem à álgebra para resolver as tarefas e ambos utilizam aritmética e as técnicas de contagem e tentativa, sem explicitar o trabalho realizado, pois apresentam apenas uma série de desenhos ou cálculos. Certamente, essa forma de funcionar é adequada para os estudantes do 5º ano, mas coloca em evidência a dificuldade dos estudantes do ensino médio para utilizar a álgebra enquanto ferramenta para o desenvolvimento de outros conceitos e noções que é o objetivo do trabalho com a álgebra nessa nova etapa escolar (BEZERRA; IGNÁCIO; DIAS, 2015, p. 12).

Assim, com o objetivo de apresentar alguns recursos didáticos como sugestão para trabalhar conceitos matemáticos abordados especialmente com alunos do 6° e 7° anos do ensino fundamental, favorecendo a transição entre o universo da aritmética e o universo da álgebra escolar, selecionamos na pesquisa bibliográfica, entre outros, materiais que enfatizam o cálculo mental e a operação de multiplicação; recursos didáticos para o ensino de sistemas de numeração; material dourado; recursos didáticos para o auxílio do ensino de frações; recursos didáticos para o ensino dos números inteiros e recursos didáticos para o ensino de equações do 1º Grau.

Capítulo 04

Descrição e uso dos Materiais

Neste capítulo serão descritos materiais concretos que poderão ser utilizados com estudantes dos anos finais do ensino fundamental em atividades que envolvem a matemática. Alguns desses materiais foram desenvolvidos pelo autor dessa dissertação e/ou foram adaptados a partir de materiais comercializados. Vários deles tiveram o seu uso testado em sala de aula, revelando-se apropriados para trabalhar os conceitos matemáticos. Um exemplo de adaptação foi a utilização de quadro metálico para fixação do material dourado imantado.

Os materiais que serão descritos são: tabuleiro de tabuada com peças de encaixe, placa de metal para colocar objetos imantados, folhas A4 imantadas, símbolos de algarismos romanos feitos de EVA imantados, material dourado imantado, ábaco, cubos e placas de madeira, jogo de dardo magnético, termômetro de metal, unidades positivas e negativas feitas de EVA imantadas e a balança de pratos iguais seguindo o modelo de Roberval com a utilização de caixinhas de acrílicos para representar unidades e quantidades desconhecidas e potes opacos e transparentes para serem colocadas bolinhas de gude.

1 Cálculo Mental e a Operação de Multiplicação

Um dos desafios de um professor de matemática, nos anos finais do Ensino Fundamental, é sanar as dificuldades e a falta de interesse dos alunos em realizar cálculos mentais. Parte desse desafio decorre do fato dos estudantes não terem desenvolvido estratégias para encontrar, de forma rápida, os resultados das operações aritméticas básicas. Um exemplo é a não compreensão da utilidade de saber os resultados das operações expressas na “clássica tabuada”. É comum vermos nossos alunos contando nos dedos ou fazendo riscos para encontrar somas ou multiplicações. Apesar de essas estratégias serem válidas e levarem os estudantes aos resultados desejados, cabe salientar que demandam muito tempo para efetuar os cálculos e que são viáveis apenas para operações com numerais pequenos. Isso evidencia que, em sua maioria, os alunos apenas decoram a “clássica tabuada”, não compreendem como as multiplicações são construídas. Tal fato passa a ser um problema a partir do momento em que esses alunos chegam ao Ensino Médio sem dominar as operações básicas de multiplicação e divisão, o que gera uma propagação do problema, pois essa defasagem no aprendizado de matemática irá gerar dificuldades no aprendizado de outras disciplinas da área das ciências da natureza, como física e química, disciplinas que exigem considerável conhecimento matemático.

Para a construção de conhecimento matemático, cálculos mentais são fundamentais. Baricatti (2010), define:

> Cálculo mental compreende-se a utilização de diversos invariantes lógico-matemáticos também presentes no uso de algarismos escritos, como as propriedades associativa, distributiva e comutativa, no momento de evocação de uma resposta (Correa, 2004). Assim, longe de ser sinônimo de memorização mecânica de fatos numéricos, o cálculo mental destaca-se pela articulação de procedimentos para a obtenção de resultados exatos ou aproximados. Parra e Saiz (1996) diferenciam o cálculo automático ou mecânico (uso de um algoritmo ou de um material) e o cálculo pensado ou refletido e, dessa forma, o define” (p. 61).

A BNCC também destaca a importância da utilização de diversas estratégias de cálculo. Conforme consta no texto,

> No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e **cálculo mental**, além de algoritmos e uso de calculadoras (BRASIL, 2017, p. 266) (destaque nosso).

Em diversas partes do texto, a BNCC destaca o uso do cálculo mental. Ressaltamos que a expressão “cálculo mental” aparece no texto 21 vezes. Citamos algumas delas:

> (EF02MA05) Construir fatos básicos da adição e subtração e utilizá-los no cálculo mental ou escrito (p. 281);

> (EF03MA05) Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração com números naturais (p. 285);
>
> (EF04MA03) Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração, utilizando estratégias diversas, como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado (p. 289);
>
> (EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (p. 293).

Os alunos, certamente vivenciam situações que envolvem dinheiro ao ir à padaria, ao supermercado, às feiras e a outros estabelecimentos, ou outras situações como saber quantas figurinhas tem a mais ou a menos que o colega. Por isso, em sala, deve-se trazer essas vivências cotidianas para usar o conhecimento prévio do aluno. Por exemplo, se, em um supermercado, o aluno, que possui R$40,00, deseja comprar três salgadinhos que custam R$8,50 cada, dois refrigerantes de R$4,50 cada, espera-se que ele seja capaz de saber se seu dinheiro é suficiente para pagar a despesa.

Para trabalhar o cálculo mental, pode-se utilizar notas de dinheiro de brinquedo que encontramos facilmente nessas lojas de R$1,99, para, na hora das operações, o aluno perceber que uma das estratégias facilitadoras, para juntar, por exemplo, 23 reais (duas notas de 10 reais e três de 1 real) com36 reais (três notas de 10 reais com seis notas de 1 real),é juntar as notas de 10 reais (20+30 = 50 reais) e as notas de 1 real (3+6 = 9) e depois somar 50 mais 9, que é igual a 59. Também, na subtração, orientá-los a entregar um troco corretamente para seu colega é um bom estímulo. Por exemplo, uma determinada compra ficou 24 reais e lhe foi entregue 50 reais. Para que ele possa completar os 30 reais, nesse caso, seriam necessários 6 reais e, agora, para completar os 50 reais, faltariam 20 reais e, portanto, 50 –24 = 6 + 20 = 26 reais. Na multiplicação, supõe-se que cinco colegas tenham18 reais; com o dinheiro em mãos, o aluno pode perceber que é mais fácil fazer: 5x18 = 5x10 + 5x8 = 50 +40 = 90.

Outra estratégia é usar panfletos de supermercados ou montar um mercadinho na própria sala. Com isso, é possível estimular, através de cálculos mentais por aproximação, a realização de operações com produtos que estão no panfleto ou no mercadinho e depois utilizar a calculadora para ver se as estimativas foram boas.

Deve-se, também, incentivar o uso de calculadoras em supermercados, em farmácias e em outros estabelecimentos comerciais, pois, hoje em dia, tem-se os mesmos produtos em quantidades diferentes por embalagens e, por isso, o aluno pode ser estimulado a fazer a divisão de um determinado produto pela quantidade em uma das embalagens e depois usar a ideia de proporcionalidade para verificar o preço desses produtos em embalagens com quantidades diferentes e, assim, comparar os preços. É claro que, se uma embalagem é o dobro, ou o triplo de outra, o cálculo poderá ser feito mentalmente sem uso de calculadora.

Um outro material, o jogo de dardo magnético, poderá estimular o aluno a fazer cálculo mental no momento do jogo. Por exemplo, um aluno terá três dardos para acertar o alvo; caso não acerte, será dada a chance de jogar novamente até que confirme o posicionamento dos três dardos no alvo. Assim, no exemplo da figura abaixo, se um determinado aluno acertar os três dardos nas posições, marcando 60, 30 e 40 pontos deverá fazer o cálculo mental para encontrar a resposta.

Figura 3: Jogo de dardo magnético para estimular o cálculo mental

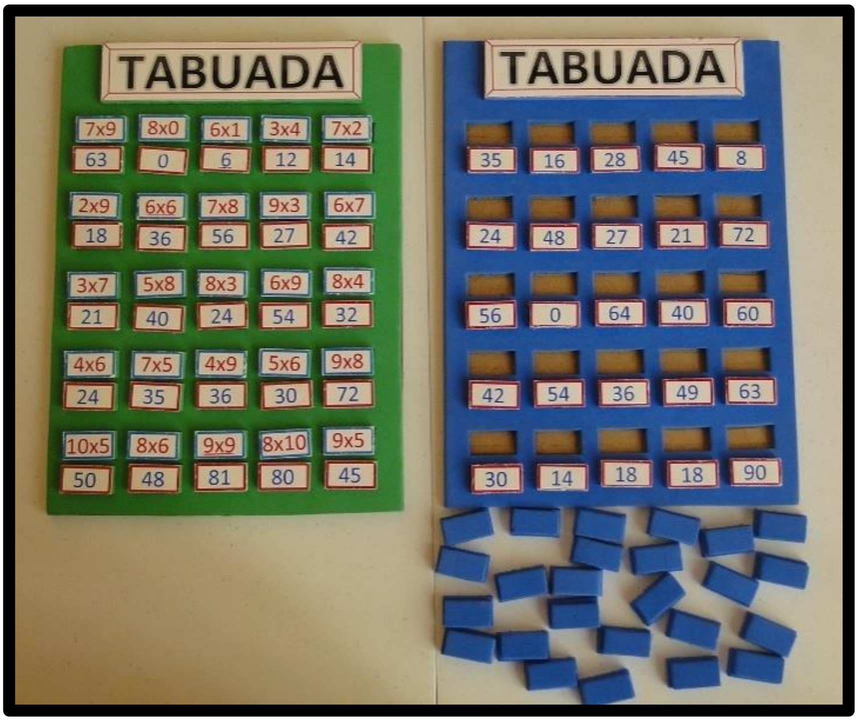
Fonte: Elaboração própria

Durante o jogo, é interessante o professor avaliar as estratégias utilizadas por cada aluno no cálculo mental. Também poderá fazer alguns questionamentos quanto ao número mínimo e máximo de pontos que poderão ser alcançados nesse jogo, além de saber quais possibilidades, por exemplo, para obter 40 e 100 pontos.

A fim de estimular o cálculo mental e a rapidez, na realização das operações aritméticas, foi formalizada uma forma de estudo das multiplicações por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10que visa facilitar sua aprendizagem, que tem como ápice um jogo concreto que envolve tempo e estimula a competição na busca de um melhor desempenho.

Para facilitar esse aprendizado, foi desenvolvido um jogo pelo autor dessa dissertação, figura 4. Este consiste basicamente em um tabuleiro com cinco fileiras duplas com multiplicações e seus resultados. As peças são removíveis e, portanto, é possível deixar as multiplicações ou os resultados. Assim, são retiradas as multiplicações deixando-as viradas para baixo e embaralhadas para começar o jogo, que termina quando se coloca a última peça no tabuleiro. Veja a seguir algumas fotos desse tabuleiro.

Figura 4: Jogo da Multiplicação



Fonte: Elaboração própria

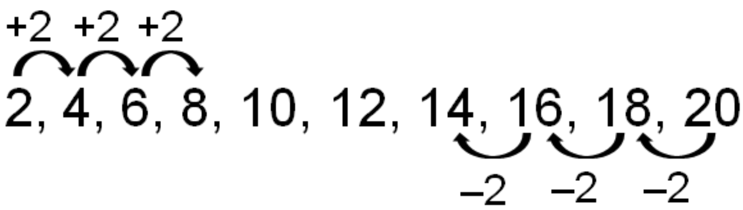
Nesse jogo são retiradas, embaralhadas e viradas as peças referentes às multiplicações. O aluno deve escolher aleatoriamente uma dessas peças, virar, ver a multiplicação e determinar no tabuleiro a qual resultado é referente. Ganha quem encaixar todas as peças no menor tempo possível. A cada resultado errado, acrescenta-se um tempo de penalidade. Esse jogo é trabalhado de forma individual.

Estudando as Multiplicações

Primeiramente, é importante mostrar que a operação de multiplicação pode ser interpretada como sucessivas operações de adição ou subtração. Essa forma de interpretar pode ser mais simples de ser compreendida pelos estudantes. A seguir, são mostrados exemplos desta afirmação.

1º) Multiplicação do 2 ao 5.

- <u>Multiplicação por 2</u>: São os números pares.



O aluno deve ser estimulado a perceber que o valor da operação seguinte será o anterior somado a 2.

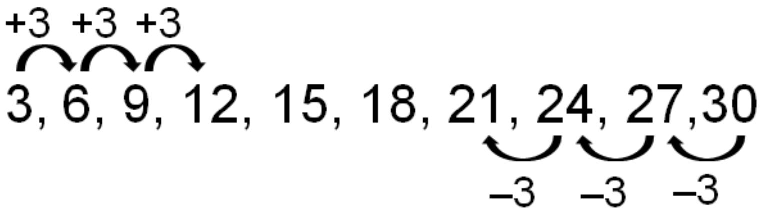
2× 2 = (2 × 1) + 2; 2× 3 = (2×2) + 2,

ou que:

2×9 = (2×10) – 2; 2×8 = (2×9) – 2,

ou seja, diminui 2 do valor.

- <u>Multiplicação por 3</u>: São os múltiplos de 3.



Do mesmo modo como ocorre na multiplicação por 2, o aluno deve ser estimulado a perceber que o valor da operação seguinte será o anterior somado a 3; estimule o aluno a perceber que

3 × 2 = (3 × 1) + 3; 3 × 3 = (3 ×2) + 3, e assim sucessivamente,

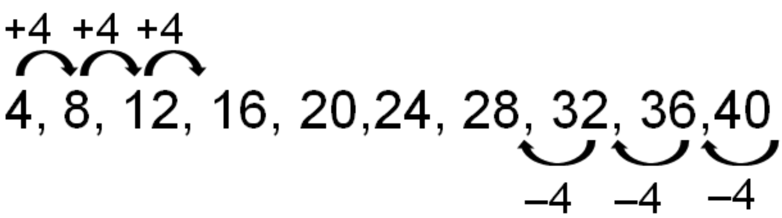
ou que:

$3 \times 9 = 3 \times 10 - 3$

- <u>Multiplicação por 4</u>: Depois de aprendida a multiplicação por2, mostrar ao aluno que a multiplicação por 4 será o dobro da multiplicação por 2, ou seja, basta multiplicar por 2 duas vezes, por exemplo:

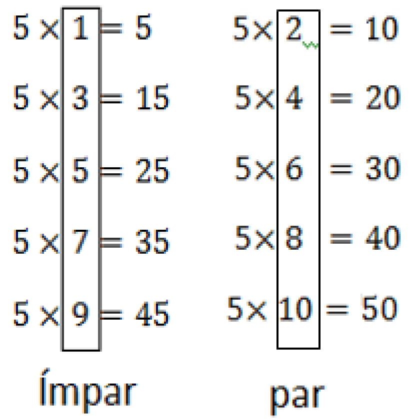
$$4 \times 6 = 2 \times (2 \times 6) = 2 \times 12 = 24$$

Neste caso, o resultado também pode ser obtido por sucessivas operações de soma e subtração, como foi na tabuada de 2 e de 3;

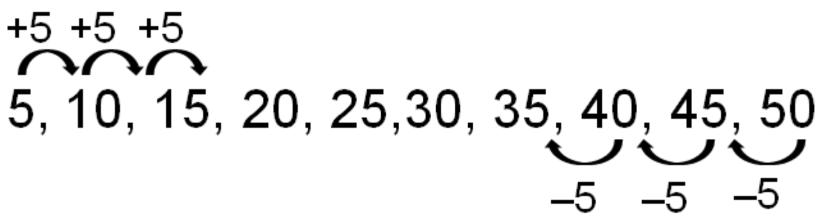


Estimule o aluno a perceber que $4 \times 9 = 4 \times 10 - 4$.

- <u>Multiplicação por 5</u>: A multiplicação por 5 tem um aspecto que facilita aprendê-la, todo número multiplicado por 5 vai terminar em 0 ou 5, números ímpares terminarão em 5 e os números pares terminarão em 0.



Também é possível chegar aos resultados fazendo operações de subtração ou adição.



Estimule o aluno a perceber que $5 \times 9 = 5 \times 10 - 5$.

2º) Compreendida a multiplicação do 2 ao 5, você saberá metade da multiplicação do 6 ao 9. Veja:

$6 \times 1 = 1 \times 6 = 6$	$7 \times 1 = 1 \times 7 = 7$
$6 \times 2 = 2 \times 6 = 12$	$7 \times 2 = 2 \times 7 = 14$
$6 \times 3 = 3 \times 6 = 18$	$7 \times 3 = 3 \times 7 = 21$
$6 \times 4 = 4 \times 6 = 24$	$7 \times 4 = 4 \times 7 = 28$
$6 \times 5 = 5 \times 6 = 30$	$7 \times 5 = 5 \times 7 = 35$
$8 \times 1 = 1 \times 8 = 8$	$9 \times 1 = 1 \times 9 = 9$
$8 \times 2 = 2 \times 8 = 16$	$9 \times 2 = 2 \times 9 = 18$
$8 \times 3 = 3 \times 8 = 24$	$9 \times 3 = 3 \times 9 = 27$
$8 \times 4 = 4 \times 8 = 32$	$9 \times 4 = 4 \times 9 = 36$
$8 \times 5 = 5 \times 8 = 40$	$9 \times 5 = 5 \times 9 = 45$

3º) Memorize as multiplicações de um número por ele mesmo, chamados números quadrados perfeitos.

$1 \times 1 = 1$	$6 \times 6 = 36$
$2 \times 2 = 4$	$7 \times 7 = 49$
$3 \times 3 = 9$	$8 \times 8 = 64$
$4 \times 4 = 16$	$9 \times 9 = 81$
$5 \times 5 = 25$	$10 \times 10 = 100$

4º) Agora, explore a parte mais difícil das multiplicações, que é a outra metade das multiplicações do 6 ao 9. Veja:

$6 \times 6 = 36$	$7 \times 6 = 6 \times 7 = 42$
$\mathbf{6 \times 7 = 42}$	$7 \times 7 = 49$
$\mathbf{6 \times 8 = 48}$	$\mathbf{7 \times 8 = 56}$
$\mathbf{6 \times 9 = 54}$	$\mathbf{7 \times 9 = 63}$
$6 \times 10 = 60$	$7 \times 10 = 60$
$8 \times 6 = 6 \times 8 = 48$	$9 \times 6 = 6 \times 9 = 54$
$8 \times 7 = 7 \times 8 = 56$	$9 \times 7 = 7 \times 9 = 63$
$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 8 \times 9 = 72$
$\mathbf{8 \times 9 = 72}$	$9 \times 9 = 81$
$8 \times 10 = 80$	$9 \times 10 = 90$

A parte destacada em vermelho representa as multiplicações mais difíceis, sendo as não destacadas a parte já estudada em multiplicações anteriores, as multiplicações de um número por ele mesmo e as multiplicações por 10.

No estudo da parte mais difícil das multiplicações, será apresentado um processo interessante utilizando as mãos, que não foi possível encontrar o autor de tais regras, considerando-as, portanto, de domínio público, veja:

Figura 5: Processo de multiplicação com as mãos

$$8 \times 7$$

Conte cinco com os dedos esticados e comece a abaixar até contar 8, ficando três dedos abaixados e dois dedos esticados.

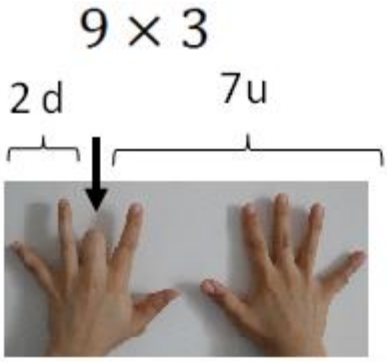
Conte cinco com os dedos esticados e comece a abaixar até contar 7, ficando dois dedos abaixados e três dedos esticados.

Cada dedo abaixado representa uma dezena e, nas duas mãos, some os dedos abaixados, nesse exemplo são cinco e, portanto, ficando 5 dezenas ou $\boxed{50}$ unidades. Agora, com os dedos esticados, você multiplica as duas quantidades em cada mão, ficando $2 \times 3 \boxed{= 6}$. Por fim, some os dois resultados obtidos, ou seja, $50 + 6 = 56$

Fonte: Elaboração própria

Na multiplicação por 9, você poderá usar outro processo com as mãos, veja:

Figura 6: Processo de multiplicação do 9 com as mãos



Com as mãos viradas ou não para você e todos os dez dedos esticados, dobre o 3º dedo, que é o número a ser multiplicado, contando da esquerda para direita. A quantidade de dedos a esquerda do dedo dobrado representa as dezenas e os da direita as unidades. Neste exemplo temos 2 dezenas e 7 unidades, ou seja, $9 \times 3 = 27$

Fonte: Elaboração própria

Também, na 9, o professor poderá construí-la usando o processo de colocar, de cima para baixo, os números de 0 a 9, representando as dezenas e depois colocando, de baixo para cima, os números de 0 a 9, representando as unidades, veja:

$$9 \times 1 = 09$$

$$9 \times 2 = 18$$

$$9 \times 3 = 27$$

$$9 \times 4 = 36$$

$$9 \times 5 = 45$$

$$9 \times 6 = 54$$

$$9 \times 7 = 63$$

$$9 \times 8 = 72$$

$$9 \times 9 = 81$$

$$9 \times 10 = 90$$

5º) Por último, na multiplicação por 10, basta colocar um zero na frente do número que está sendo multiplicado.

$$10 \times 1 = 10$$

$$10 \times 2 = 20$$

$$10 \times 3 = 30$$

$$10 \times 4 = 40$$

$$10 \times 5 = 50$$

$$10 \times 6 = 60$$

$$10 \times 7 = 70$$

$$10 \times 8 = 80$$

$$10 \times 9 = 90$$

$$10 \times 10 = 100$$

2 Materiais Concretos no Ensino de Sistemas de Numeração

A necessidade de registrar e controlar bens e objetos fez com que o homem desenvolvesse uma forma para contar e expressar essa contagem por meio da linguagem, com símbolos (números) e palavras. O trabalho com a contagem faz parte da vida dos estudantes muito antes de ingressarem na escola, pois está impregnado em nossas vidas a partir dos processos de socialização na infância.

Nos anos iniciais do ensino fundamental, esse processo tem por finalidade a construção do conceito de número e a aprendizagem do funcionamento do sistema de numeração decimal e a sua utilização na realização das operações matemáticas com números naturais. Entretanto, muitos estudantes chegam ao 6º Ano do Ensino Fundamental apresentando dificuldades na compreensão do Sistema de Numeração Decimal. Para favorecer que essas dificuldades sejam sanadas, é importante abordar os sistemas de numerações desenvolvidos por algumas civilizações antigas e depois dar ênfase no Sistema Romano e, principalmente no Sistema de Numeração Decimal e, a partir desse último, apresentar o Sistema Binário de Numeração, linguagem usada pelos computadores.

Destacamos, segundo a BNCC (2017), que, nos anos iniciais do ensino fundamental, espera-se dos estudantes

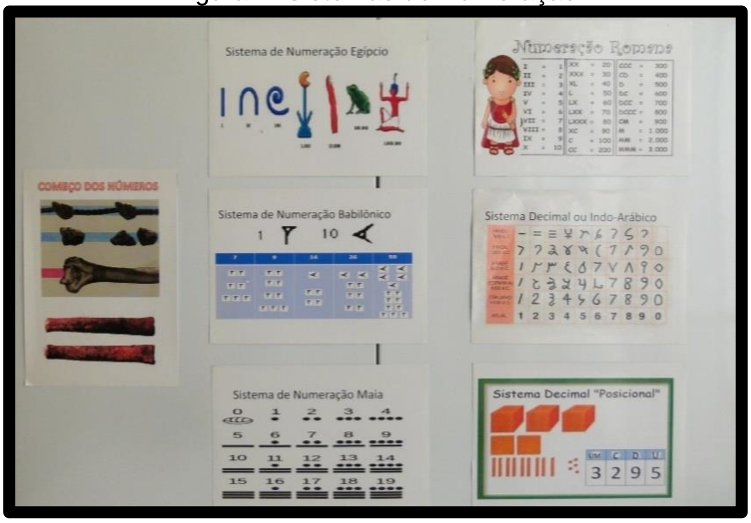
> o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais por meio da identificação e de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos (p. 266-267).

A BNCC estabelece várias habilidades que os estudantes devem desenvolver, ao longo do ensino fundamental, relacionadas ao Sistema de Numeração Decimal, entre elas:

> (EF02MA01) comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero) (p. 281);
>
> (EF03MA02) identificar características do sistema de numeração decimal, utilizando a composição e a decomposição de número natural de até quatro ordens (p. 285);
>
> (EF04MA02) mostrar, por decomposição e composição, que todo número natural pode ser escrito por meio de adições e multiplicações por potências de dez, para compreender o sistema de numeração decimal e desenvolver estratégias de cálculo (p. 289);
>
> (EF05MA01) ler, escrever e ordenar números naturais até a ordem das centenas de milhar com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal (p, 293);
>
> (EF06MA02) reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal (p. 299).

Para explorar esses sistemas de numeração, foram produzidos alguns materiais imantados para fixação em um painel de metal para serem apresentados aos alunos, mostrando que o conhecimento matemático evolui ao longo da história. A figura 5 mostra alguns desses materiais.

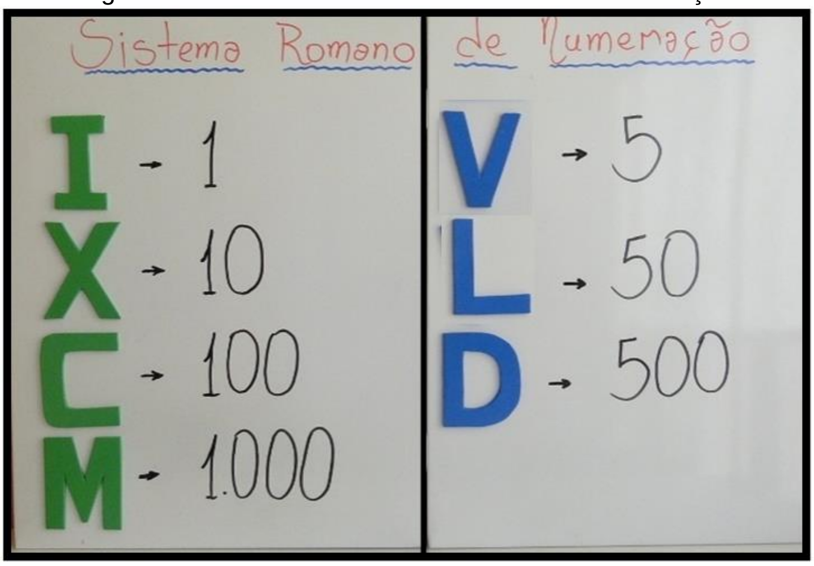
Figura 7: Sistemas de Numeração



Fonte: Elaboração própria

O material concreto para os símbolos do Sistema de Numeração Romano foi feito de EVA e, nesses símbolos, foi colada uma folha adesiva imantada para que eles pudessem ser fixados no painel de metal. Para melhorar a visualização e a aprendizagem, os símbolos I, X, C e M foram feitos com EVA de cor azul, enquanto que os símbolos V, L e D foram feitos com EVA de cor verde, como pode ser visto na figura 6. Veja a seguir os símbolos no painel de metal. Com o painel e os símbolos imantados, pode-se explicar as regras do Sistema Romano de Numeração, facilitando a aprendizagem. Veja a seguir uma sequência de fotos desse material.

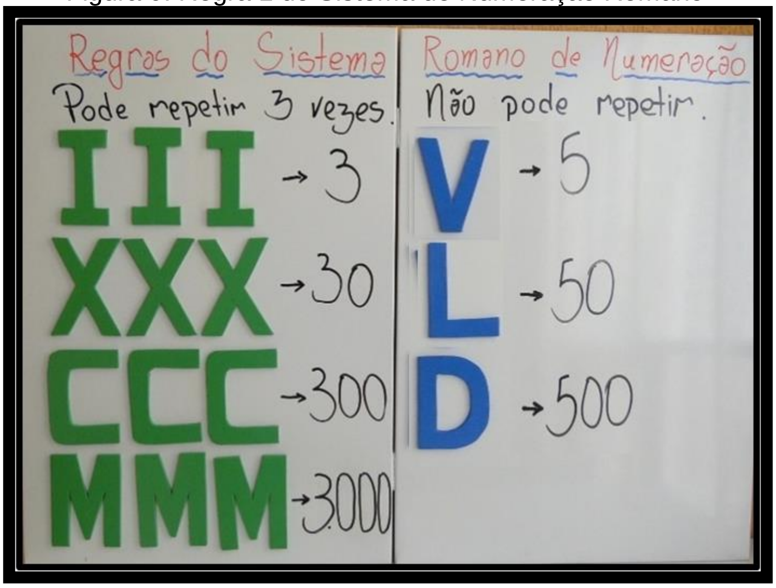
Figura 8: Símbolos do Sistema Romano de Numeração



Fonte: Elaboração própria

Para construção dos numerais a partir dos algarismos romanos, frisar que I, X, C e M podem ser repetidos por até três vezes, enquanto V, L e D não podem ser repetidos, conforme mostra a figura 7:

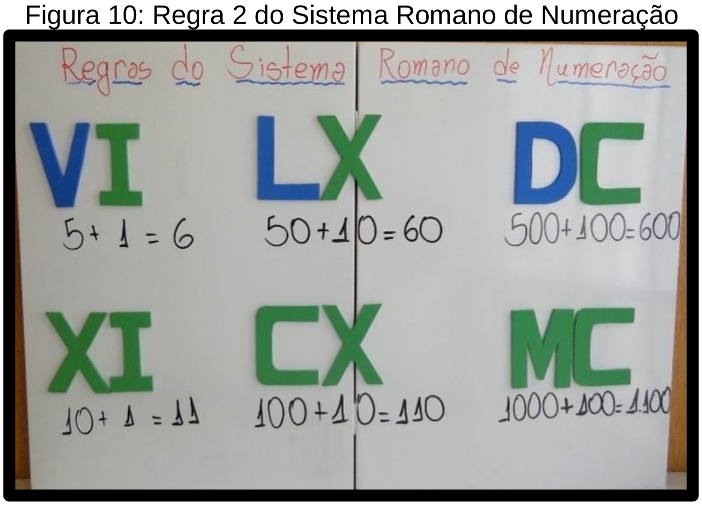
Figura 9: Regra 1 do Sistema de Numeração Romano



Fonte: Elaboração própria

Se os símbolos romanos estão em ordem decrescente, ou seja, do maior para o menor, deve-se somar seus valores conforme a figura 8.

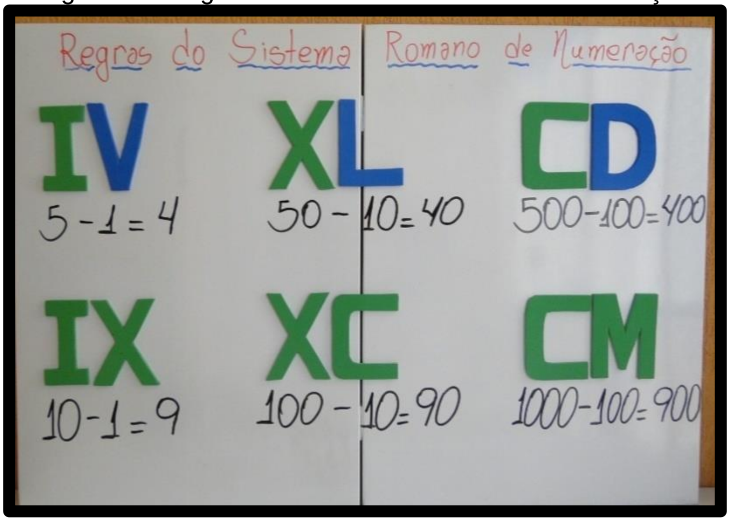
Figura 10: Regra 2 do Sistema Romano de Numeração



Fonte: Elaboração própria

Para escrever em algarismo romanos os números 4 e 9, deve-se colocar o símbolo I antes do V e do X; o 40 e o 90, deve-se colocar o X antes do L e C e os números 400 e 900, deve-se colocar o C antes do D e M e, nestes casos, subtrai os valores dos símbolos, conforme mostra a figura 9:

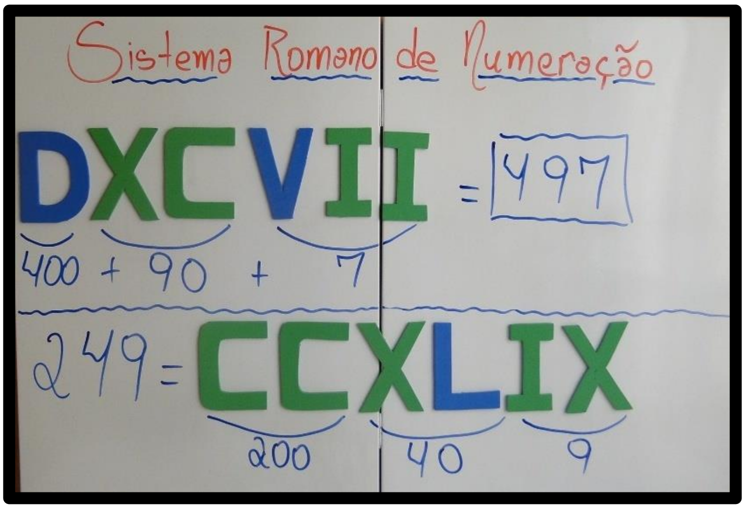
Figura 11: Regra 3 do Sistema Romano de Numeração



Fonte: Elaboração própria

A figura 10 mostra um exemplo de como são construídos números grandes utilizando sistema romano de numeração:

Figura 12: Utilização do sistema romano de numeração para escrever números grandes



Fonte: Elaboração própria

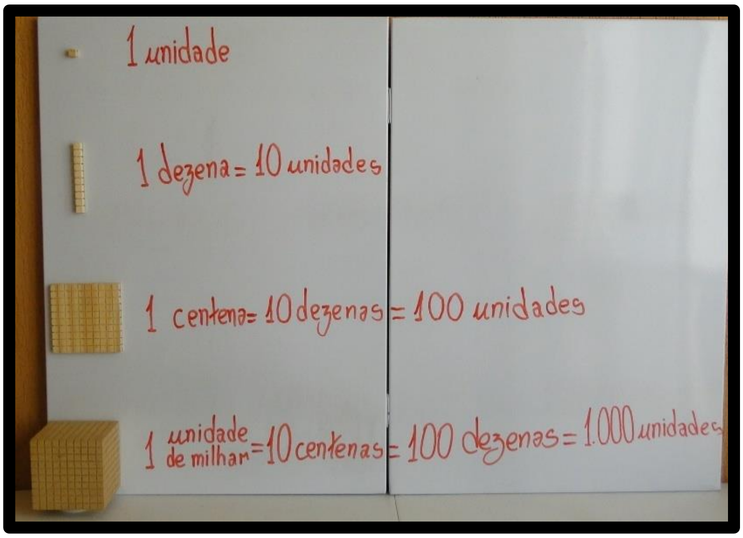
O próprio aluno pode confeccionar esse material. É uma forma lúdica de construir a própria aprendizagem. Neste caso, a aprendizagem utiliza diferentes sentidos do aluno, como a visão, o tato, estimulando, assim, o raciocínio lógico.

Agora, para ensinar o Sistema de Numeração Decimal, pode-se utilizar um importante material concreto, o Material Dourado, material manipulativo que foi criado por Maria Montessori (1.870-1.952), uma médica italiana. Uma de suas atribuições era ensinar crianças com deficiência (Portal Educação). Este material foi construído com o intuito de auxiliar em atividades que tornavam mais atraentes o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional e, consequentemente, em métodos para efetuar as operações fundamentais, Santos e Pereira (2016). Esse material é muito importante na compreensão desse sistema, pois concretiza os agrupamentos melhorando o entendimento do aluno.

O sistema decimal utiliza apenas 10 símbolos para representar qualquer quantidade; são eles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Nesse sistema, são feitos agrupamentos de 10 em 10 para facilitar a contagem e, por isso, também podemos dizer sistema de base 10. Além disso, a posição do algarismo no número influenciará no seu valor e, portanto, cada algarismo assumirá um valor posicional dependendo da posição que ocupa. Foi esse valor posicional que revolucionou o processo de contagem, pois os outros sistemas de numeração eram aditivos, ou seja, somam os valores dos símbolos, apesar de o Sistema Babilônico de Numeração ser aditivo até o número 60 e, a partir daí, se torna um sistema de base 60 que não convém explicar para os alunos de 6º Ano, exceto pelo valor cultural.

Então, como pode ser visto na figura 11, no sistema decimal, sabe-se que, a cada 10 unidades, formamos 1 dezena, 10 dezenas, formamos 1 centena, 10 centenas, formamos 1 unidade de milhar e podemos continuar esse processo indefinidamente e, para facilitar o entendimento desses agrupamentos, o material dourado foi imantado para melhorar a visualização pelos alunos na sala de aula. Veja a seguir essa imagem.

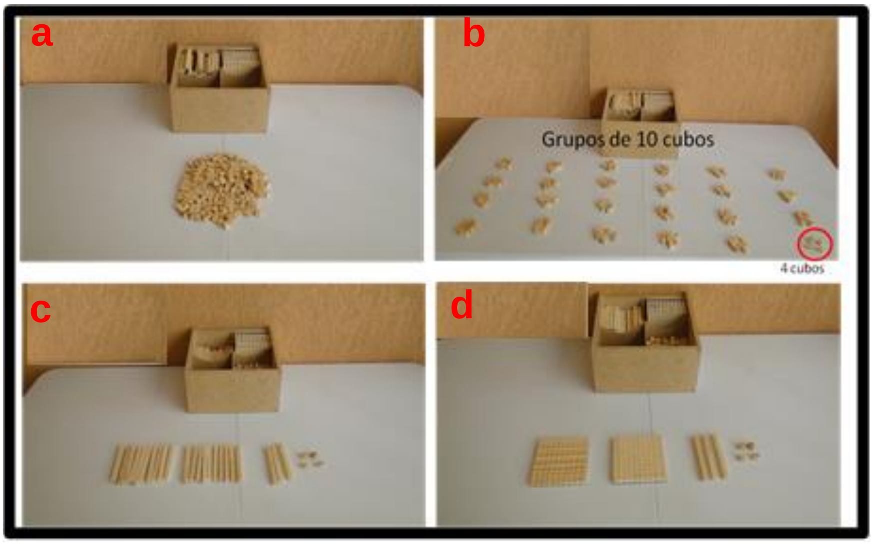
Figura 13: Material dourado



Fonte: Elaboração própria

Agora, para fixar a ideia dos agrupamentos, podem ser formados grupos de 4 ou 5 alunos e entregue a eles uma quantidade de cubinhos para que eles próprios formem os agrupamentos e façam as trocas, conforme a figura 12:

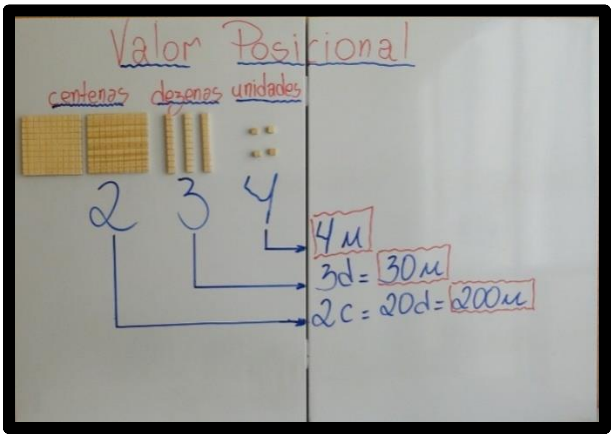
Figura 14: Organização dos cubos em grupos



Fonte: Elaboração própria

Pela figura acima, observa-se que, primeiramente, separa-se uma quantidade aleatória de cubinhos (a), depois organiza-se em grupos de 10 cubinhos (b). Posteriormente, são trocados os grupos de 10 unidades por 1 dezena e, em seguida, formam-se grupos de dez dezenas (c), e, por fim, trocam-se as 10 dezenas por 1 centena (d). Como, para escrever o número, utilizam-se os algarismos indo-arábicos, deve-se escolher uma ordem para representar o valor posicional desse algarismo. Assim, da direita para a esquerda, teremos as unidades, as dezenas, as centenas, as unidades de milhar e esse processo continua indefinidamente formando as próximas ordens. Em um número, a cada três ordens, forma-se uma classe para facilitar a leitura. A figura 13 mostra o valor posicional desses cubos, utilizando-se cubos imantados e quadro metálico.

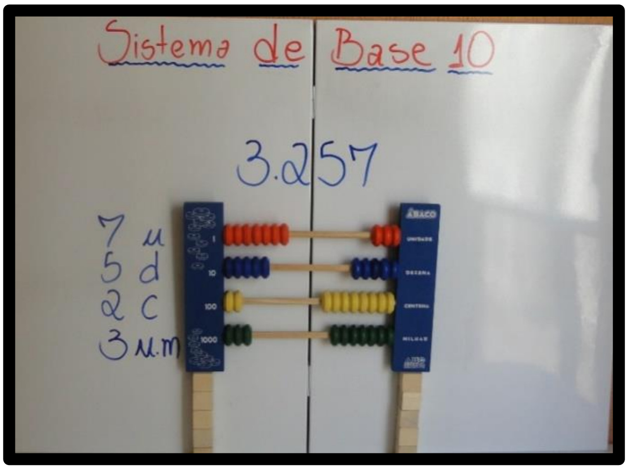
Figura 15: Valor posicional



Fonte: Elaboração própria

Por fim, utilizando um ábaco, pode-se mostrar aos alunos que nosso sistema decimal é feito com agrupamentos de 10 em 10, provavelmente por termos 10 dedos nas mãos, mas poderia também ser de 8 em 8, 5 em 5. Os babilônicos, por exemplo, utilizavam, a partir do número 60, um sistema de base 60. Os aparelhos que utilizam circuitos digitais para processar e executar informações, como os computadores, *smartphones* e que revolucionaram o nosso mundo utilizam um sistema binário, isto é, de base 2, ou seja, os agrupamentos são feitos de 2 em 2. As figuras de 14 a 17 mostram a utilização do ábaco na construção desses sistemas numéricos:

Figura 16: Ábaco Sistema Decimal ou de Base 10



Fonte: Elaboração própria

Figura 17: Ábaco Sistema de Base 8

Fonte: Elaboração própria

Figura 18: Ábaco Sistema de Base 8

Fonte: Elaboração própria

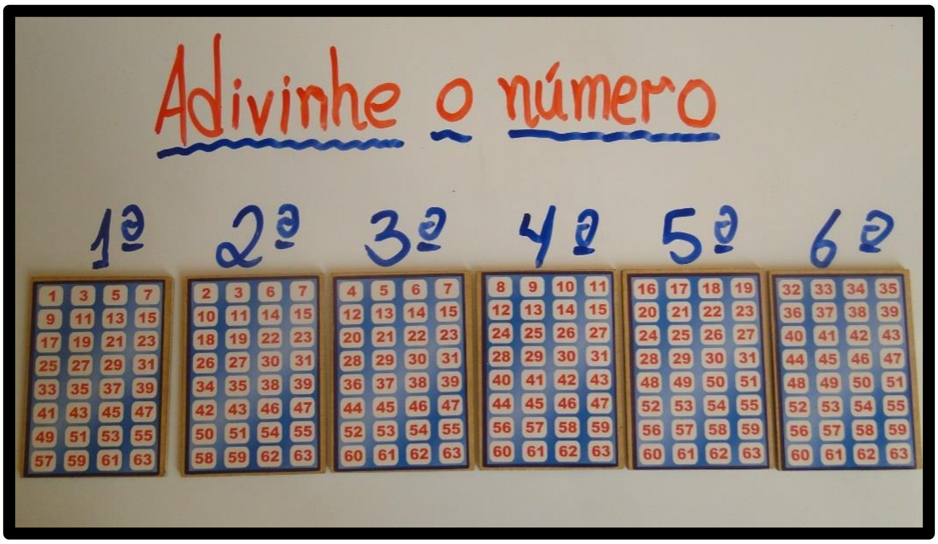
Figura 19: Ábaco Sistema de Binário ou de Base 2

Fonte: Elaboração própria

Pode-se utilizar ábacos abertos para que os próprios alunos possam escrever números em outras bases fazendo a correspondência entre cada uma delas.

Após abordar o Sistema Binário, pode-se utilizar um truque de adivinhar o número que tem por trás a ideia da base 2 de numeração, que é a mesma ideia de circuito aberto e fechado utilizado pelos computadores, ou seja, o número está ou não na plaquinha. Esse jogo é encontrado em bancas de jogos e normalmente as plaquinhas vão de 1 a 63. Observe que o primeiro número de cada plaquinha é uma potência de base 2. Veja, na figura 18, a foto desse jogo.

Figura 20: Plaquinhas de adivinhe o número



Fonte: Elaboração própria

Assim, por exemplo, se aluno pensar no número 23, o mesmo estará na 1ª, na 2ª, na 3ª e na 5ª plaquinha, que, na base binária, ficaria $1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (10111)_2$. Portanto, basta somar o primeiro número de cada plaquinha que se encontra o número 23, ou seja, 1 + 2 + 4 + 16 = 23. Obviamente essa explicação não é necessária fazer para os alunos de 6º Ano; na verdade, um bom mágico não revela seu truque, todavia, vale a pena estimular os estudantes a descobrirem o segredo, ainda que se utilizem de recursos da internet.

3 Material Dourado e as Quatro Operações

As quatro operações são essenciais para lidar com diversas situações do cotidiano e abaixo são mostradas as ideias associadas a cada uma delas.

- Adição: juntar e acrescentar;
- Subtração: tirar, comparar e completar;
- Multiplicação: adicionar parcelas iguais, organização retangular, ideia de proporcionalidade e combinações;
- Divisão: dividir uma quantidade em partes iguais e saber quantas vezes uma quantidade cabe em outra.

Em relação à adição e subtração, a BNCC (BRASIL, 2017) destaca que, desde o 2º ano do ensino fundamental, as ideias associadas a essas operações já devem fazer parte do trabalho pedagógico. Nesse sentido, a BNCC indica a seguinte habilidade esperada dos estudantes desse ano de escolarização:

> (EF02MA06) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até três ordens, com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, utilizando estratégias pessoais ou convencionais (BRASIL, 2017, p. 281).

No que diz respeito à multiplicação e à divisão, a BNCC indica as seguintes habilidades esperadas de estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental:

> (EF03MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros.

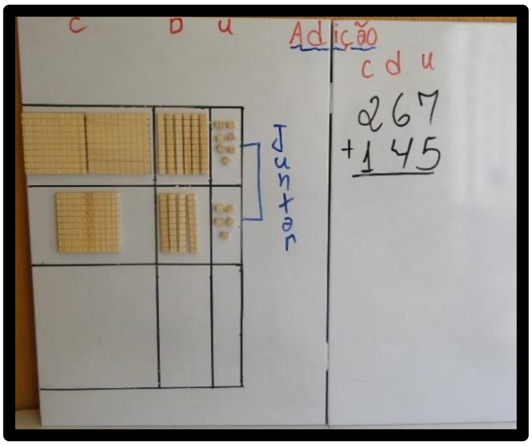
> (EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais (BRASIL, 2017, p. 285).

As relações abstratas dos algoritmos das operações se tornam concretas coma utilização do material dourado e, com esse material imantado, podemos confrontar as duas formas, concreta e algorítmica, o que facilita a compreensão por parte dos alunos. A intenção nas imagens a seguir é apenas mostrar o entendimento das operações e, por isso, não será contextualizado, mas, em sala de aula, é de suma importância o contexto com problemas envolvendo cada ideia das operações para fazer sentido o estudo da matemática.

Antes de confrontar o material dourado e os algoritmos das operações, é importante deixar que os alunos manuseiem o material dourado e que façam as operações tentando chegar ao resultado, principalmente nos anos iniciais do ensino fundamental. O material dourado por si só não evidencia a característica posicional do sistema decimal, pois, em qualquer ordem que colocarmos o cubinho (representa a unidade), a barra (representa a dezena), a placa (representa a centena) e o cubo maior (representa a unidade de milhar), saberemos o valor que cada um representa, mas, na utilização dos símbolos indo-arábicos, para caracterizar o valor posicional, deve-se escolher uma ordem para representar o número. Assim, da direita para a esquerda, teremos as unidades (1ª ordem), dezenas (2ª ordem), centenas (3ª ordem), unidades de milhar (4ª ordem) e esse processo continua indefinidamente.

Adição

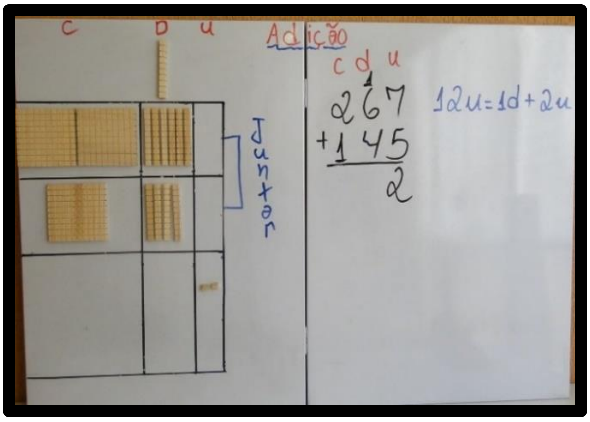
Figura 21: Armando a adição



Fonte: Elaboração própria

Na adição, se trabalha com o conceito de agrupamento. Pode-se observar, na figura 19, que a primeira posição à direita corresponde às unidades, a segunda, às dezenas e a terceira, às centenas. Ao somar 7 unidades mais 5 unidades, resulta-se em 12 unidades, que corresponde a uma dezena e duas unidades, assim sendo, a dezena passa para a posição das dezenas e as duas unidades ficam na terceira linha como primeira parte do resultado, como mostra a figura 20.

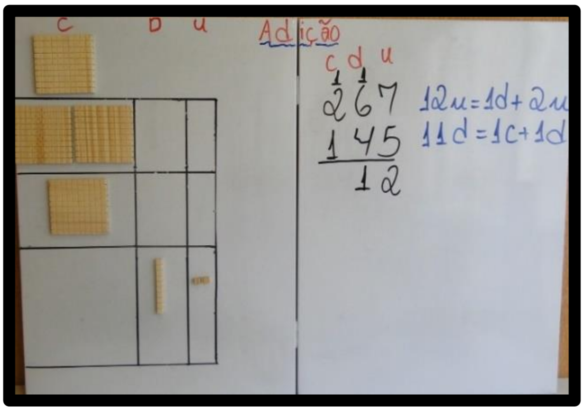
Figura 22:Somando as unidades



Fonte: Elaboração própria

A soma seguinte resultará em 11 dezenas, ou seja, uma centena e uma dezena. Desse modo, uma centena será somada à posição das centenas; a dezena ficará na terceira linha na posição correspondente às dezenas ao lado das duas unidades do passo anterior, como pode ser visto na figura 21.

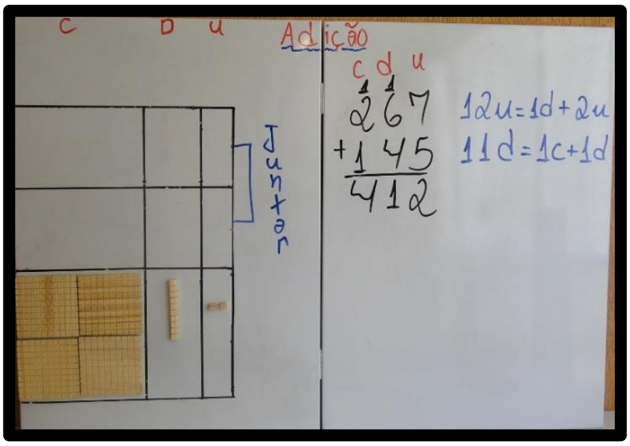
Figura 23: Somando as dezenas



Fonte: Elaboração própria

Por fim, temos 4 placas (1 + 2 +1 = 4) correspondentes a centenas, que devem ser inseridas na linha 3, ao lado das dezenas e das unidades dos passos anteriores, conforme a figura 22.

Figura 24:Somando as centenas



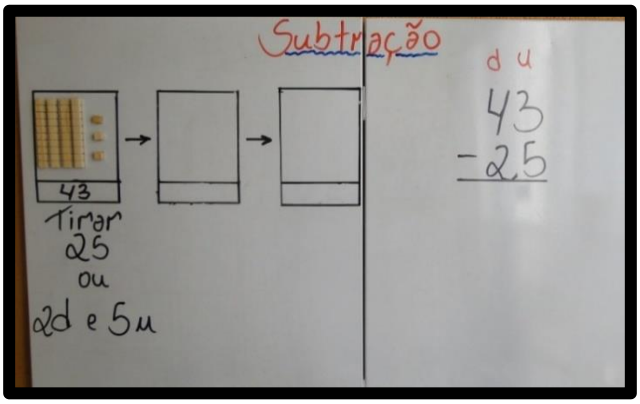
Fonte: Elaboração própria

Desse modo, chega-se ao resultado em que temos 4 centenas, 1 dezena e 2 unidades, o que resulta em 412.

A seguir, nas figuras23 a 25, serão mostrados os passos para se realizar uma operação de subtração (43 – 25). Inicialmente, deseja-se subtrair duas dezenas e cinco unidades de 43.

Subtração

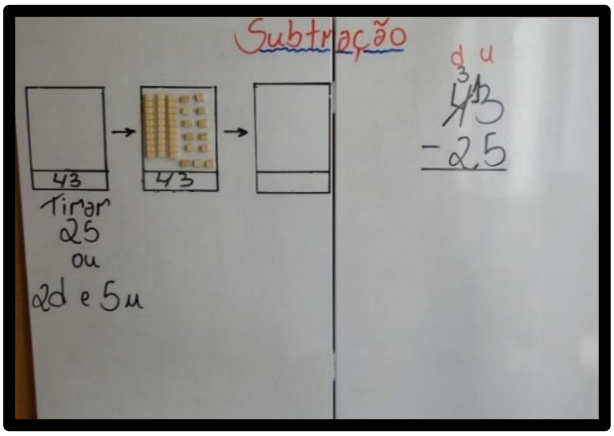
Figura 25:Armando a subtração



Fonte: Elaboração própria

A primeira observação é de que não é possível subtrair5 unidades de 3. Desse modo, tomamos 1 dezena das 4 que temos e transformamos em 3 dezenas e 10 unidades e, assim, juntando as 10 unidades com as 3, ficamos com 13 unidades, conforme mostra a figura 24.

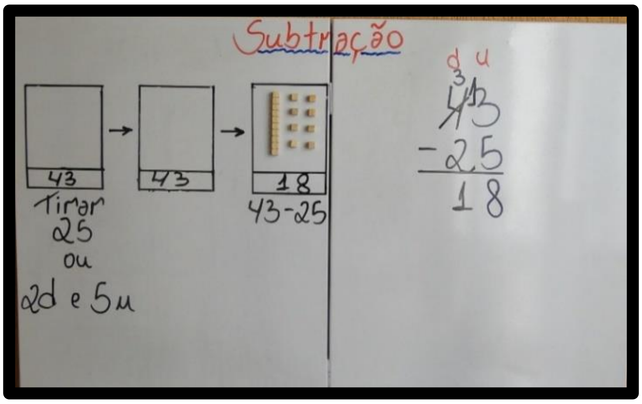
Figura 26:Transformando a dezena em 10 unidades



Fonte: Elaboração própria

Subtraindo cinco unidades de treze, restam 8 unidades. E subtraindo 2 dezenas de três, resta uma dezena, figura 25.

Figura 27: Efetuando a subtração



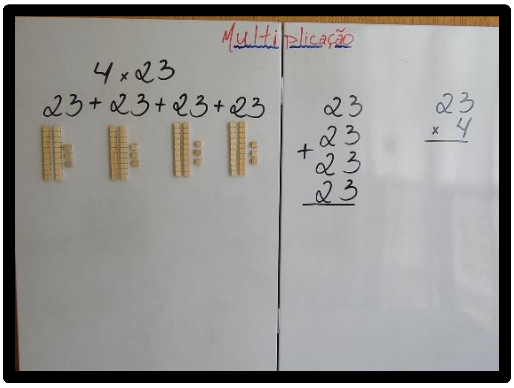
Fonte: Elaboração própria

Como resultado, tem-se 18 (uma dezena mais oito unidades), ou seja, 43 – 25 = 18.

A seguir, a partir da figura 26 até a 28, serão mostrados os passos para se realizar uma operação de multiplicação (4 x 23). A figura 26 mostra a utilização do Material Dourado frente a dois algoritmos para encontrar o resultado; um com a soma de 4 parcelas e o outro o próprio algoritmo da multiplicação.

<u>Multiplicação</u>

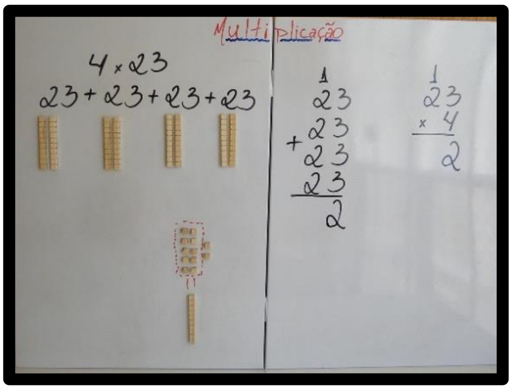
Figura 28:Armando a multiplicação



Fonte: Elaboração própria

Na multiplicação de 4 por 3 unidades, resulta em 12 unidades, ou seja, 1 dezena e 2 unidades. Assim, nos dois algoritmos, ficam 2 unidades no resultado e uma dezena subirá na posição das dezenas para depois se juntar ao produto de 4 por 2 dezenas, conforme figura 27.

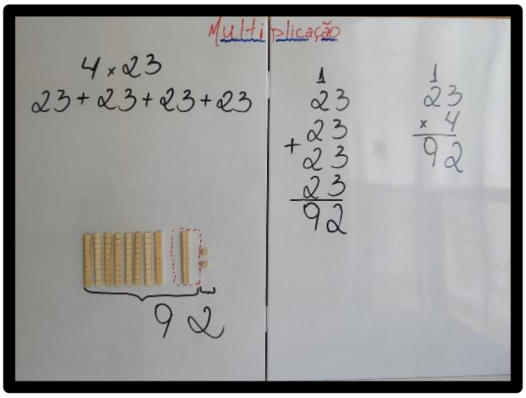
Figura 29: Multiplicando as unidades



Fonte: Elaboração própria

Finalmente, o produto de 4 por 2 dezenas resulta em 8 dezenas e, somando a uma dezena que subiu, resulta em 9 dezenas e, portanto, o resultado é 92, encontrado tanto, com o material dourado, quanto, nos dois algoritmos, conforme a figura 28.

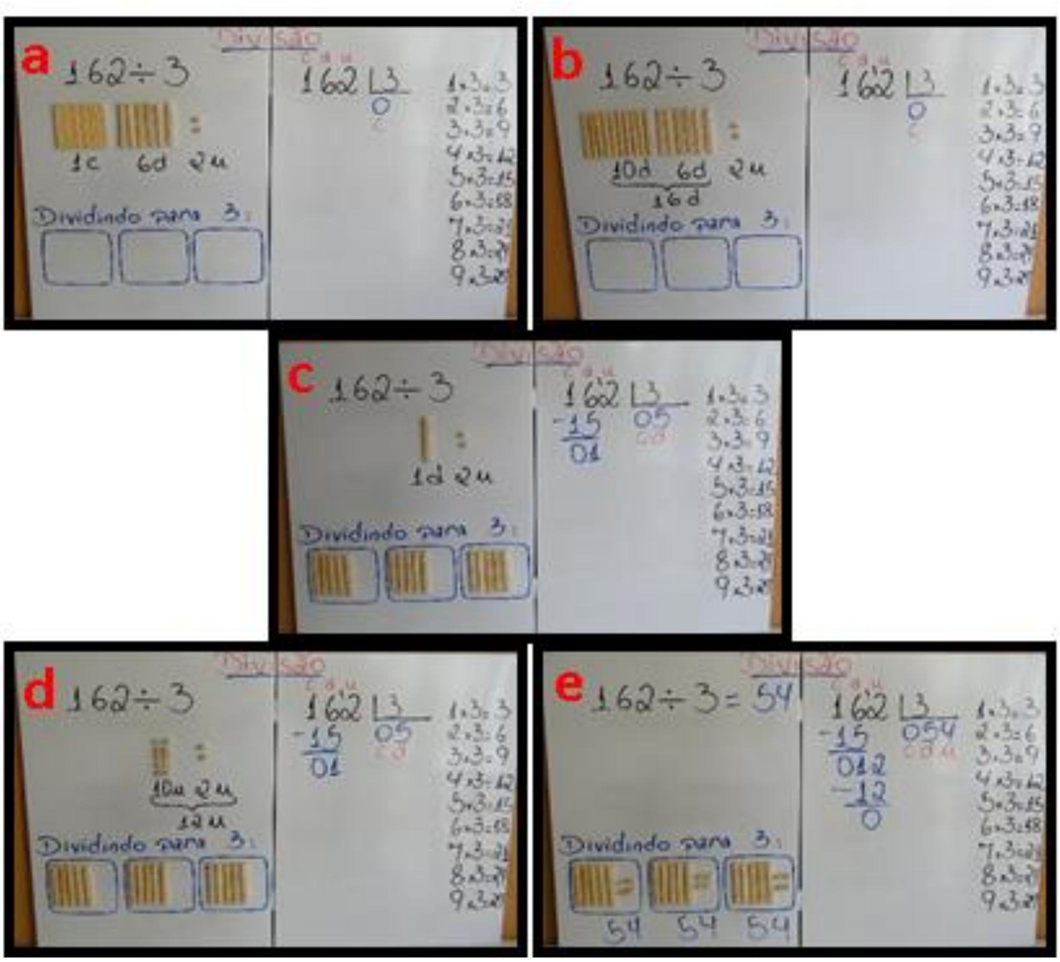
Figura 30: Resultado final da multiplicação



Fonte: Elaboração própria

DIVISÃO

Figura 31: Divisão passo a passo



Fonte: Elaboração própria

A figura anterior, figura 29, foram mostrados os passos para se realizar uma operação de divisão (162 ÷3), tanto, utilizando o material dourado, quanto, o algoritmo da divisão. Ao lado desse algoritmo, foi colocada a tabuada do 3.

Pela figura 29, observa-se que não é possível dividir 1 centena (representada pela placa) para 3, então 1 centena dividida por 3 é igual a 0 centenas(Figura 29a), depois, desagrupa-se a centena em dezenas, ficando 10 dezenas e, juntando com as 6 dezenas, resulta-se em 16 dezenas para dividir para 3 (Figura 29b).Agora, dividindo 16 dezenas para 3, obtém-se 5 dezenas e sobra 1 dezena (Figura 29c). Como não é possível dividir 1 dezena (representada pela barra) para 3, desagrupa-se a dezena em unidades, ficando 10 unidades e, juntando com 2 unidades, resulta-se em 12 unidades (Figura 29d). Finalmente, dividindo as 12 unidades para 3, obtém-se 4 unidades, terminando assim a divisão e o resultado da divisão de 162 por 3 é igual a 5 dezenas e 4 unidades, ou seja, 54 unidades (Figura 29e).

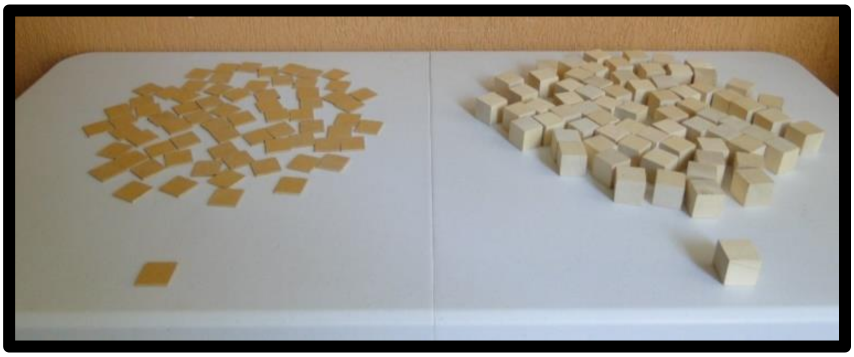
4 Cubinhos e placas de madeira

Os cubos foram feitos de madeira com arestas medindo 3 cm para facilitar a visualização e o manuseio em sala de aula pelos próprios alunos. O cubo é uma forma geométrica muito presente no cotidiano deles, pois, é muito difícil encontrar um aluno que não conheça o fascinante jogo do cubo mágico. Além disso, é, a partir de cubos, que medimos volumes, por exemplo, quantos metros cúbicos cabem naquela piscina e que 1 L é igual a 1 dm^3.

A placa quadrada de madeira também foi feita com o lado igual a 3 cm para representar a face do cubo e que também tem bastante relevância no uso cotidiano, pois, é através de quadrados, que medimos áreas. Veja, na figura 30, esses materiais.

A finalidade do uso desses materiais é, a partir de seu manuseio, facilitar o entendimento da contagem retangular e o cálculo de área e volumes.

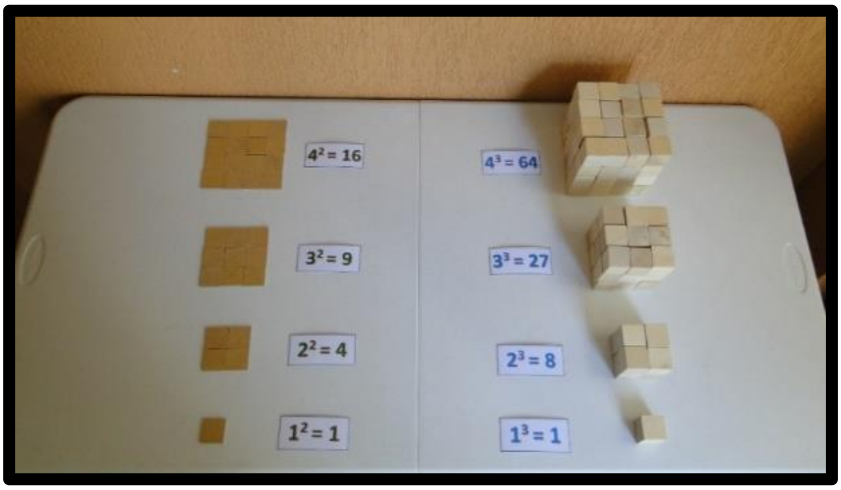
Figura 32: Cubos e placas



Fonte: Elaboração própria

Um outro uso desse material poderá ser feito no estudo de potência para justificar a leitura das potências de expoentes 2 e 3, que dizemos respectivamente “elevado ao quadrado” e “elevado ao cubo”. Por isso, podemos propor aos alunos a construção de quadrados e cubos com esses materiais e, assim, chegarem a conclusão de que podemos construir quadrados com 1, 4, 9, 16, ... quadradinhos e que podemos formar cubos com 1, 8, 27, 64, ... cubinhos. A figura 31 ilustra essas construções.

Figura 33: Organização em quadrados e cubos

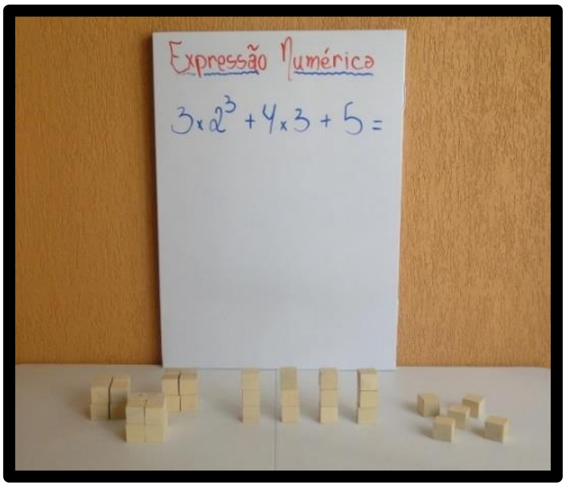


Fonte: Elaboração própria

Outro uso desse material é no convencimento dos alunos quanto à ordem de resolução de uma expressão numérica com relação às operações de adição, multiplicação e potência. Para isso, construímos, por exemplo, 3 cubos de dimensão

2x2x2, uma placa retangular com dimensões 3x4 ou 4 barras com 3 cubinhos e 5 cubinhos soltos. A figura 32, a seguir, ilustra essa situação.

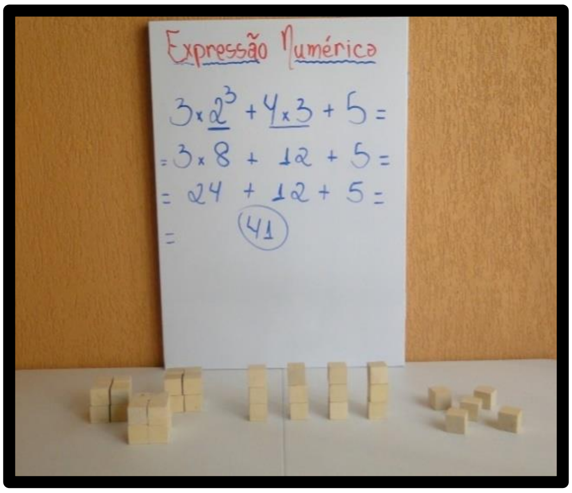
Figura 34: Expressão formada a partir dos cubos



Fonte: Elaboração própria

Fazendo a resolução da expressão, respeitando a ordem correta de resolução, ou seja, primeiro resolve-se as potências, depois as multiplicações e, por último, as adições, chegamos ao seguinte resultado, conforme a figura33.

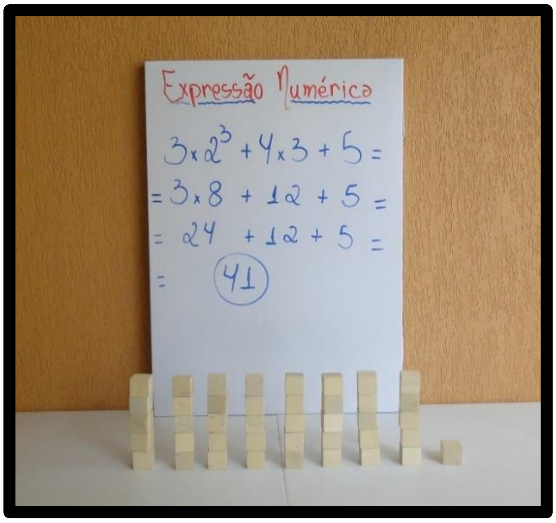
Figura 35: Expressão resolvida



Fonte: Elaboração própria

Depois de resolvida a expressão, reorganizamos os cubos, por exemplo, em grupos de 5, para confirmar o resultado 41, pois teremos 8 grupos de 5 e 1 cubinho, conforme a figura34.

Figura 36: Verificação do resultado da expressão



Fonte: Elaboração própria

Por fim, como a subtração é inversa da adição, a divisão é inversa da multiplicação e a raiz quadrada é inversa da potência, segue a ordem de resolução de uma expressão numérica. Em primeiro lugar, as potências e as raízes, depois as multiplicações e as divisões e, por fim, as adições e as subtrações.

5 Materiais concretos no auxílio do ensino de frações

A tradição nos conta que as frações nasceram com a necessidade de medir. As evidências dessa necessidade foram encontradas no Egito Antigo, para demarcar as terras que ficavam às margens do Rio Nilo. Todos os anos, quando ocorriam as enchentes no período chuvoso, os povos da época tinham que remarcar seus terrenos e, com isso, não existia uma unidade de corda que coubesse um número exato de vezes nas medições e, por isso, surgiu a necessidade de dividir essa corda.

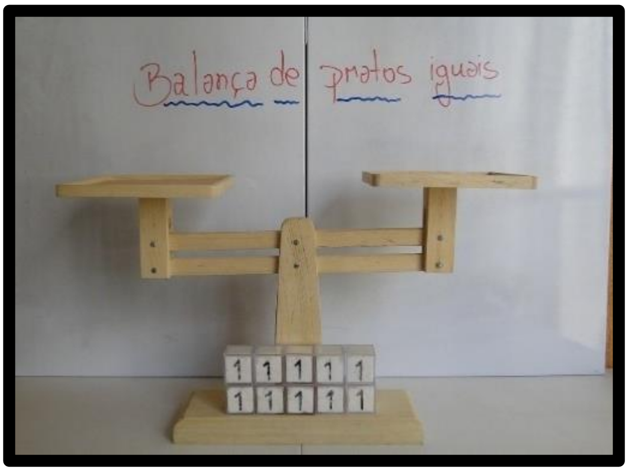
A BNCC destaca várias habilidades envolvendo o trabalho com frações em diferentes etapas do ensino fundamental. Essas habilidades são:

> (EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
>
> (EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
>
> (EF05MA04) Identificar frações equivalentes.
>
> (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.

Para favorecer o desenvolvimento dessas habilidades, pode-se iniciar um trabalho com o uso de um pedaço de barbante, desenhando um retângulo representando um terreno que, em um dos seus lados, caiba um número exato de vezes, por exemplo, 3 unidades de barbante e, no outro lado, 2 vezes e meia, ou seja, não é 2 e nem 3 e, portanto, existe um número entre 2 e 3. Ao pedir aos alunos que meçam o comprimento da mesa usando o palmo da mão, com certeza, a maioria, ou todos perceberão que não caberá um número exato de palmos da mão na mesa. Com esses exemplos, o aluno compreenderá a necessidade de dividir o todo em partes iguais.

Outra forma de tornar significativo e favorecer o entendimento da necessidade das frações é a utilização de uma balança de pratos iguais, conhecida como Balança de Roberval, uma unidade criada para representar a massa que está junto à balança, representada na figura 35, a seguir.

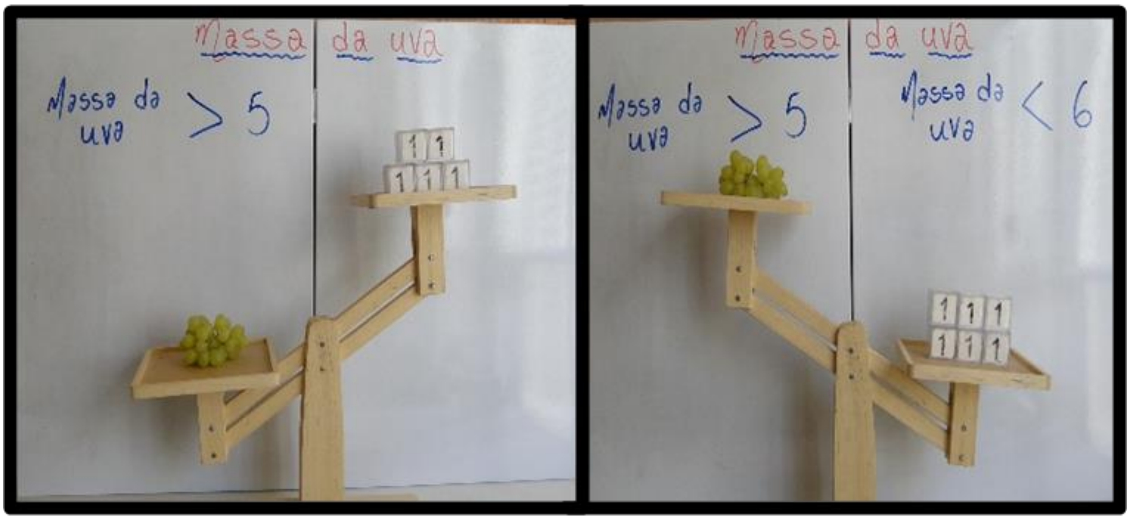
Figura 37: Balança de pratos iguais e unidades



Fonte: Elaboração própria

O uso desse material poderá ser feito, por exemplo, para mostrar que a massa de um cacho de uva é maior que 5 unidades e menor que 6 unidades, mostrando assim que existe um número que está entre 5 e 6 unidades e, para alunos de 6º e 7º Anos, esses números serão representados por frações e posteriormente será mostrado a forma decimal. Veja a figura 36 em que é mostrada essa situação:

Figura 38: Massa da uva entre 5 e 6 unidades na balança



Fonte: Elaboração própria

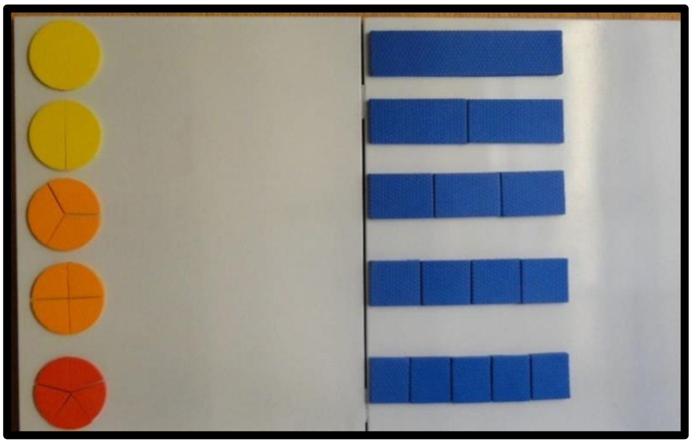
Também, pode-se utilizar outra unidade de medida bastante conhecida pelos alunos que é a unidade de capacidade litro. Por exemplo, pode-se utilizar um copo com medidas em litros e uma outra vasilha qualquer que não tenha medida exata e, assim, despejar a água da vasilha no copo com medidas em litros e essa caber, por exemplo, 2 vezes e meia, ou seja, passa de 2, mas não chega a 3 litros.

Agora, para estabelecer o conceito de frações, podem ser utilizados discos de frações e barras feitas de EVA imantadas para representar algumas frações.

Também poderá ser produzido discos e barras de frações pelos alunos, com papéis coloridos, para que os mesmos tenham seu próprio material para trabalhar as frações como partes de um todo.

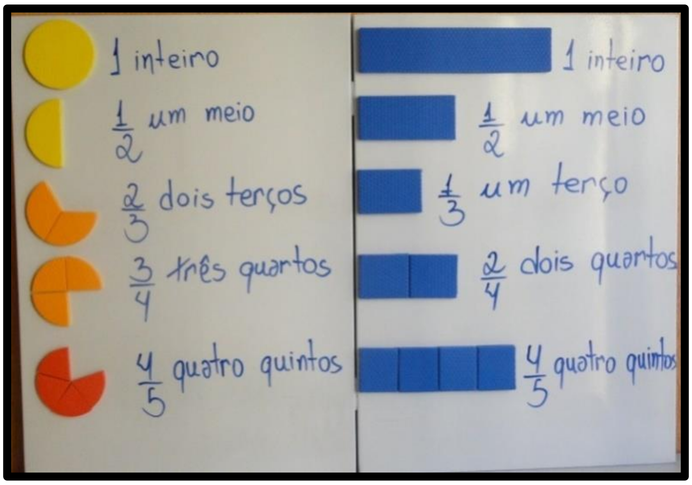
Veja, a seguir, as figuras 37 e 38, os discos e barras de frações imantadas.

Figura 39:Discos e barras divididas



Fonte: Elaboração própria

Figura 40: Representação de frações com discos e barras



Fonte: Elaboração própria

Com esse material imantado, pode-se mostrar os tipos de frações próprias, impróprias, aparentes e fração mista. Também podem ser mostradas frações equivalentes como nas frações representadas na figura acima com as barras de frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$.

Nas operações de adição e subtração, pode-se utilizar esse material para justificar as regras com o mesmo denominador, pois se conserva o denominador e soma os numeradores e, para denominadores diferentes, como as partes têm tamanhos diferentes, não se pode somá-las e, por isso, substituem-se as frações por frações equivalentes com mesmo denominador e depois fazemos a operação.

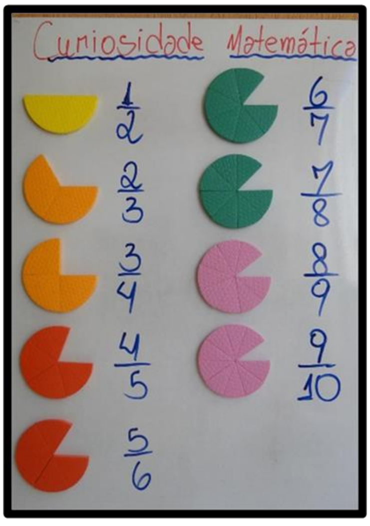
Nas operações de multiplicação e divisão, também, é possível utilizar esse material. No caso da multiplicação, o dobro de um terço são dois terços $\left(2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\right)$, a metade de quatro quintos são dois quintos $\left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}\right)$ e, assim, justificamos que, na multiplicação de frações, multiplicamos os numeradores e os denominadores. Na divisão, também, podemos utilizar o material, usando a ideia de quantas vezes uma unidade cabe em outra, por exemplo, um meio cabe duas vezes em um inteiro $\left(1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 2\right)$, ou seja, na divisão de números inteiros, multiplicamos o primeiro pelo inverso do segundo.

Abaixo, uma curiosidade matemática em que o denominador de uma fração excede em uma unidade o seu numerador. Veja a sequência dessas frações.

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \frac{9}{10},\ \ldots,\ \frac{98}{99},\ \frac{99}{100},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1}$$

Tem-se que a fração à esquerda é sempre menor que a fração que está a sua direita, por exemplo, $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$. Além disso, o aluno já começa a ver a importância das letras para representar padrões. Nesse caso, o padrão identificado é $\frac{n}{n+1}$, em que *n* representa um número natural e esse fato pode ser observado utilizando os discos de frações conforme a figura 39:

Figura 41: Frações da forma n/(n+1)



Fonte: Elaboração própria

Estimular curiosidades matemáticas aguça o interesse dos alunos, facilitando, dessa forma, a aprendizagem. Portanto, antes de fazer as representações dessas frações com discos de frações, é importante questionar e instigar os alunos sobre quem é maior ou menor e, depois dos questionamentos, montar os discos de frações na placa de metal. O aluno também poderá fazer o uso de calculadora para testar frações com numeradores maiores, por exemplo, $\frac{98}{99}$ e $\frac{99}{100}$.

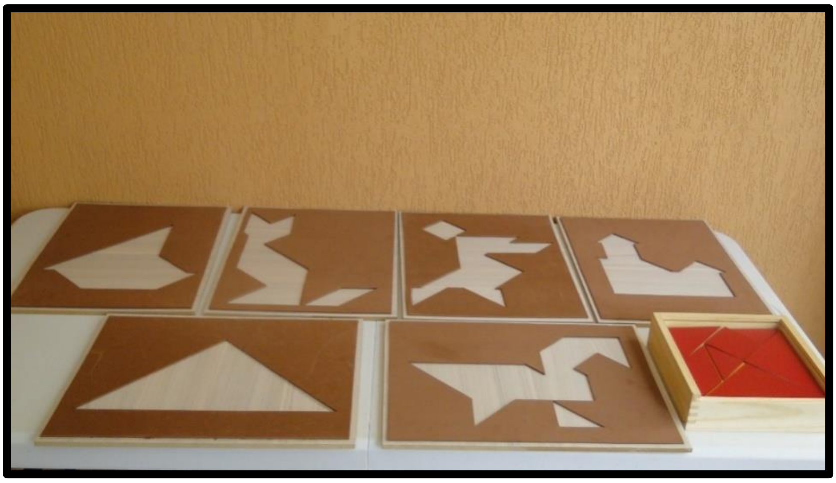
O Tangram, figura 39, é um jogo de quebra-cabeças chinês com 7 peças geométricas, sendo 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Com essas peças, podemos formar muitas figuras.

Figura 42: Tangram

Fonte: Elaboração própria

Um material foi confeccionado com o fundo de madeira e, EVA, com a forma de algumas figuras, foi colada na madeira dando aspecto de relevo. Esses objetos também poderão ser usados por alunos com deficiência visual. As figuras 40 e 41 trazem a ilustração desse material.

Figura 43: Tangram para montar



Fonte: Elaboração própria

Figura 44: Tangram montado

Fonte: Elaboração própria

Depois de estudar o conceito de fração, pode-se propor uma atividade explorando o Tangram.

Atividade com Tangram:

1º) Quantos triângulos pequenos cabem em cada peça do Tangram?

- Triângulo menor: 1
- Triângulo médio: 2
- Triângulo maior: 4
- Quadrado: 2
- Paralelogramo: 2

2º) Que fração o menor triângulo representa de cada uma das peças do Tangram?

- Triângulo menor: 1 inteiro
- Triângulo médio: $\frac{1}{2}$
- Triângulo maior: $\frac{1}{4}$
- Quadrado: $\frac{1}{2}$
- Paralelogramo: $\frac{1}{2}$

3º) Que fração cada peça representa do Tangram todo?

- Triângulo menor: $\frac{1}{16}$

- Triângulo médio: $\frac{1}{8}$
- Triângulo maior: $\frac{1}{4}$
- Quadrado: $\frac{1}{8}$
- Paralelogramo: $\frac{1}{8}$

4º) Formar quadrados com duas, três, quatro, cinco e sete peças do Tangram. (Não é possível formar um quadrado com seis peças)

5º) Entregar o material de montar do Tangram para os alunos.

6 Materiais Concretos no Ensino dos Números Inteiros

É fato histórico que o número negativo levou muito tempo para ser aceito como número e, por isso, não é de se estranhar que os alunos vejam esse conteúdo, pela primeira vez, no 7º ano do Ensino Fundamental, apesar de que, no cotidiano deles, aparecem com frequência em algumas situações, como em temperaturas, saldo de gols e jogos eletrônicos.

Segundo a BNCC, para o ensino de números inteiros, destacam-se as seguintes habilidades:

> **(EF07MA03)** Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.
>
> **(EF07MA04)** Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

O aluno pode ser estimulado a compreender esse conjunto de números, por exemplo, em duas rodadas batendo figurinhas. Dois alunos registram seus ganhos e perdas, conforme o quadro a seguir:

Aluno	1ª rodada	2ª rodada	Saldo
Carlos	Ganhou 5	Perdeu 2	?
Pedro	Perdeu 7	Ganhou 4	?

Qual é a situação dos dois alunos nas duas rodadas?

É certo que os alunos chegarão à resposta de que Carlos ganhou 3 e Pedro perdeu 3 e, portanto, as situações dos dois são diferentes e, assim,houve a necessidade de se criar um novo conjunto, os números inteiros. O “ganho” seria o sinal positivo e a “perda” seria o sinal negativo; assim, Carlos ficou com +3 e Pedro ficou com –3.

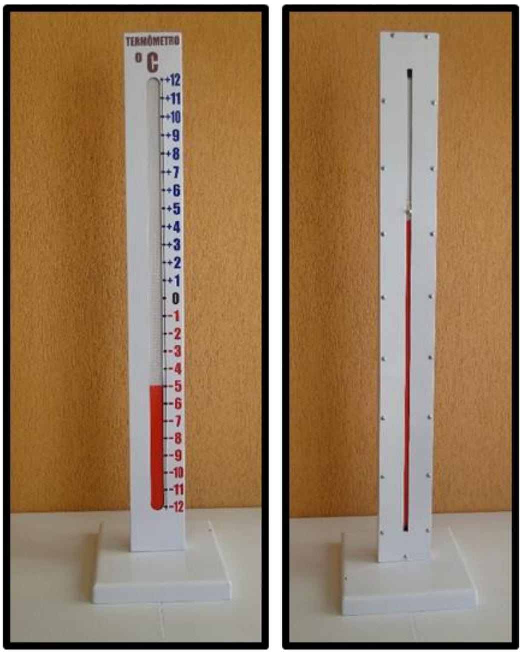
Para dar mais sentido ao estudo dos números negativos, foram impressas, em folha A4, algumas situações mais comuns do cotidiano dos alunos e outra não comum, que é o caso da cambagem. Essas folhas foram imantadas para serem fixadas no painel de metal. Perguntar-se-á aos alunos se eles sabem de situações que envolvam números negativos e, na medida em que as folhas imantadas forem fixadas, estimular-se-á o aluno a pensar no sentido positivo e negativo de cada situação: saldo do campeonato brasileiro, altitude, temperatura, extrato bancário, painel de elevador e cambagem. Veja a seguir, na figura 43.

Figura 45: Situações que encontramos números inteiros

Fonte: Elaboração própria

Outro material, o termômetro, foi construído para favorecer o entendimento dos números negativos. Ele foi feito em material metálico, com 1,20 m de altura e, no seu interior, tem uma fita metade vermelha, que representa o material sensível à mudança de temperatura, e metade branca entrelaçada em duas roldanas, dando a possibilidade de movimento, através de um pino que fica atrás do termômetro e, assim, podemos variar a temperatura. Veja, na figura 44, a foto desse termômetro.

Figura 46: Frente (esquerda) e atrás (direita) do termômetro



Fonte: Elaboração própria

Esse material pode favorecer a construção desse conjunto, dando a percepção que o mesmo cresce indefinidamente nos dois sentidos da reta numérica inteira, a comparação de números inteiros, a exploração dos conceitos de módulo e números opostos ou simétricos e a operação de adição e subtração, mas, para a adição, será utilizado outro material que será detalhado antes de falar dessa operação.

Apesar de o termômetro estar na posição vertical, é mais comum construirmos a reta numérica inteira na horizontal, com o zero dividindo a parte negativa da parte positiva, ficando a parte positiva à direita do zero e a negativa à esquerda.

Utilizando o termômetro, na comparação de números inteiros, pode-se estimular os alunos a perceberem que:

- Os números positivos -quanto mais longe do zero, maior é o número.
- Os números positivos são sempre maiores que o zero.
- Os números negativos - quanto mais perto do zero, maior é o número.
- Os números negativos são sempre menores que zero.
- Um número positivo é sempre maior que qualquer número negativo.

Em relação ao conceito de módulo de um número inteiro, que é a distância que tal número se encontra do zero, pode-se, por exemplo, sair de +5 ºC e caminhar até o zero no termômetro, constatando-se que essa distância percorrida é 5 unidades e, se sair do –7, a distância percorrida é 7 unidades. Em notação matemática, tem-se$|+5| = 5$ e $|-7| = 7$.

Os números inteiros opostos ou simétricos são aqueles que estão a uma mesma distância do zero, mas em lados opostos. Assim, no termômetro, é fácil visualizar, por exemplo, que o –5 é o oposto de +5.

Para trabalhar a operação de adição, será utilizado o material que foi feito de EVA com 0,5 cm de espessura e as peças cortadas com 4 cm de largura e 5 cm de comprimento, ficando uma face com 4cmx5cm em que, em uma dessas faces, foi colado um adesivo imantado e, em outra, foram coladas unidades positivas com o fundo azul e negativas com o fundo vermelho. Veja a seguir quatro situações envolvendo adição de números inteiros:

1ª Situação: Carlos ganhou 2 figurinhas, depois ganhou 3 figurinhas. Quantas figurinhas Carlos ganhou?

2ª Situação: Paulo perdeu 2 quilos e depois perdeu 3? Quantos quilos ele perdeu?

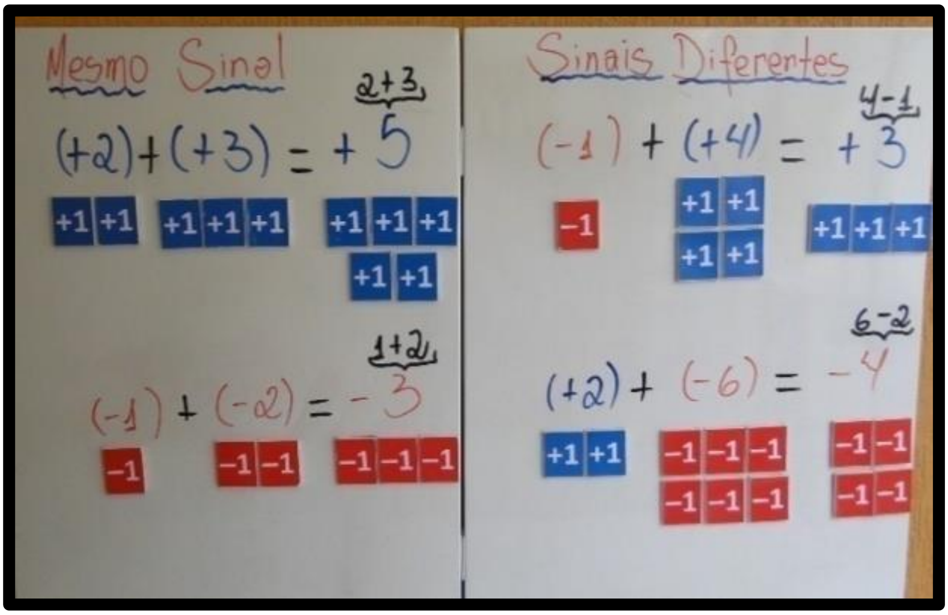
3ª Situação: A temperatura de uma cidade estava 1 ºC abaixo de zero e depois aumentou 4 graus. Para quantos graus foi a temperatura dessa cidade?

4ª Situação: Pedro deu 2 passos para frente e depois 6 passos para trás. A quantos passos ele ficou da posição inicial em que ele estava?

No estudo de números inteiros, o aluno já sabe que ganhar, lucrar, aumentar, subir e andar para frente representam unidades positivas, enquanto que perder, ter prejuízo, diminuir, descer e andar para trás representam unidades negativas.

Agora, veja, na figura45, a foto; utilizando-se o material feito de EVA, para resolver as quatro situações.

Figura 47: Material utilizado para adição de números inteiros



Fonte: Elaboração própria

Assim, diante das repostas, o aluno será estimulado a perceber que, na adição de números inteiros de mesmo sinal, somamos os módulos e conservamos o sinal e que, nas adições com sinais diferentes, subtraímos os módulos e conservamos o sinal do número de maior módulo. O aluno também poderá utilizar tampinhas de caixinhas de suco ou de leite de duas cores diferentes para representar unidades positivas e negativas e trabalhar essa operação.

Voltando ao termômetro com os números inteiros, pode-se resolver a subtração do tipo $3-5$. Sabemos que nos naturais essa subtração não existe e, para isso, cobre-se a parte negativa do termômetro e percebe-se que pode tirar no máximo 3 unidades. Veja a figura 46, a seguir:

Figura 48: Impossibilidade da operação 3 – 5 com números naturais

Fonte: Elaboração própria

Agora, retirando a parte coberta e voltando ao termômetro com números inteiros, vê-se que é possível fazer 3 – 5, ou seja, 3 – 5 = (+3) – (+5) = – 2. Veja a figura 47:

Figura 49: É possível 3 – 5 nos inteiros

Fonte: Elaboração própria

Nem sempre a ideia de tirar uma dívida na subtração de inteiros é possível, por exemplo, (+5) – (–3), ou seja, quero tirar –3 de +5. Como é possível tirar uma dívida que não existe; por isso, a subtração "dá um nó" na cabeça do aluno.

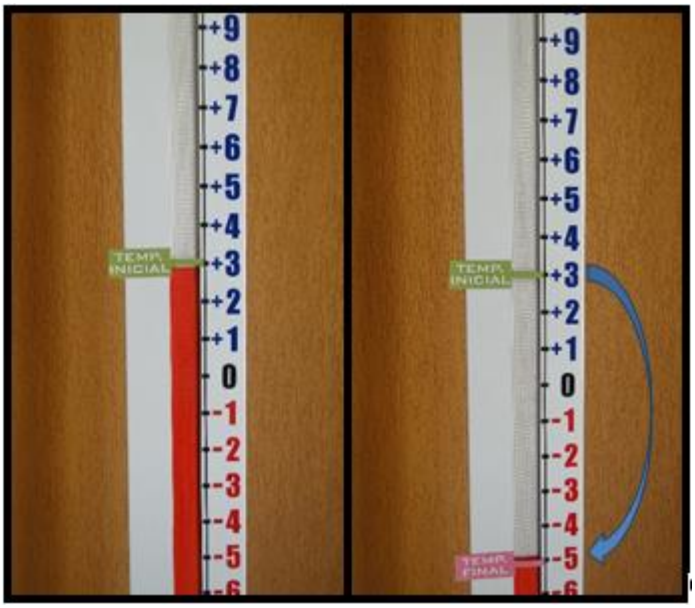
Para facilitar a aprendizagem, pode-se partir de outra ideia de subtração, que é a de comparação. Veja alguns exemplos:

- Saldo de gols = Gols Marcados – Gols Sofridos
- Comparação de Saldos Bancários = Saldo Final – Saldo Inicial
- Amplitude Térmica = Temperatura Máxima – Temperatura Mínima
- Variação de temperatura = Temperatura Final – Temperatura Inicial

Existem vários outros exemplos, em diversas áreas de conhecimento, que se comparam números, sendo o resultado positivo como ganho e negativo como perda.

Usando o termômetro, podemos obter a variação de temperatura, em um intervalo de tempo, sabendo que o resultado positivo nos diz que a temperatura aumentou e o negativo que a temperatura diminuiu. Por exemplo, se a temperatura inicial é igual a +3 e a final é –5, é possível ver no termômetro que a temperatura diminuiu 8 ºC. Veja a figura 48:

Figura 50: Variação de temperatura no termômetro



Fonte: Elaboração própria

Variação de temperatura = Temperatura Final – Temperatura Inicial

= (–5) – (+3)

= – 8 (Diminuiu 8 ºC)

Como tirar um crédito é o mesmo que adicionar uma dívida, que é o caso da subtração acima, e tirar uma dívida é o mesmo que adicionar um crédito. Pode-se chegar ao resultado de uma subtração de números inteiros adicionando o minuendo ao oposto do subtraendo, assim, toda subtração pode ser escrita em forma de adição, veja:

$$(-5) - (+3) = (-5) + (-3) = -8$$

E, fazendo a operação inversa, comprova-se a veracidade dessa resposta, veja:

$$(-8) + (+3) = -5$$

Usando o termômetro, é possível fazer outros exemplos de variação de temperatura comprovando assim, de forma concreta, a resposta da subtração de números inteiros.

Um jogo de dardo magnético poderá ser adaptado para trabalhar conceitos de adição de várias parcelas, subtração e comparação de números inteiros, figura 49:

Figura 51: Jogo de dardo imantado

Fonte: http://gepettobrinquedos.com.br

Regra do jogo:

1º) Os ângulos referentes às cores vermelha e cinza corresponderão aos números negativos (–3, –2, –10, –13, –18, –20, –12, –14, –8 e –7), que significa perda de pontos; os de cores verde e preto, aos números positivos (+17, +15, +6, +4, +1, +5, +9, +11, +16 e +19),que significa ganho de pontos. Acertando o centro, pegando mais a parte preta, ganha-se +22 pontos. Pegando mais a parte vermelha, ganha-se +25 pontos.

2º) A sala será dividida em grupos de 6 alunos e, assim, cada grupo se posicionará para acertar o alvo; cada aluno terá até três chances. Caso não acerte o alvo, ficará com zero ponto. O professor será o juiz e marcará no quadro a adição correspondente às seis parcelas. Cada integrante do grupo deverá fazer o cálculo dessa adição e entregar para o professor. A cada acerto, acrescenta-se +5 pontos ao resultado e, a cada erro, acrescenta-se –5.

No final do jogo, terá no quadro a pontuação de cada grupo, que poderá ser negativa ou positiva; assim, dessa forma, o professor poderá explorar, com a colocação dos grupos nesse jogo, a comparação de números inteiros e saber quanto um grupo fez a mais ou a menos que o outro, explorando a operação de subtração.

7 Materiais Concretos no Ensino de Equações do 1º Grau

A álgebra é uma importante ferramenta para resolver diversos problemas em várias áreas do conhecimento, pois, através da álgebra, pode-se usar fórmulas, equacionar problemas, que será o caso do estudo deste item, usar funções para representar duas ou mais variáveis, fazer generalizações de padrões entre outros. Mas, ao introduzir o assunto, deve-se ter muito cuidado para não assustar o aluno, pois alguns acham difícil lidar com letras na matemática e, por isso, é de suma importância que o professor crie estratégias para facilitar o entendimento desse conteúdo.

De acordo com a BNCC, as habilidades pertinentes ao ensino da álgebra são:

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

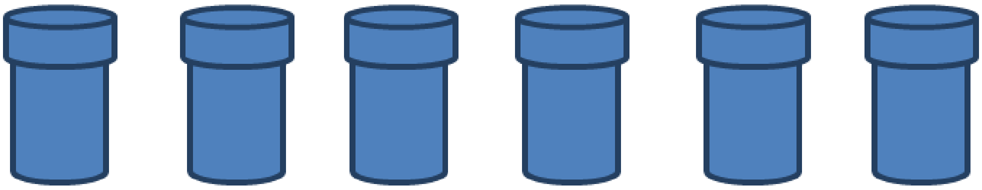
(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Para dar início ao estudo da álgebra, foi pensado um material concreto que pudesse dar significado ao uso de letras para representar variáveis. Esse material é composto por 6 potes não transparentes com uma mesma quantidade de balas em cada um, conforme figura 50:

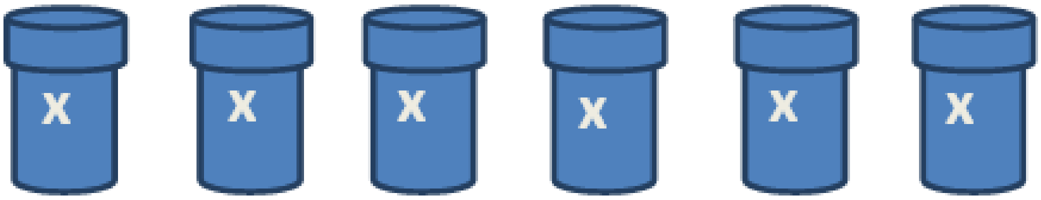
Figura 52: Potes com mesma quantidade de balas



Fonte: Elaboração própria

Pergunta-se aos alunos sobre a quantidade de balas que tem no pote então, como eles não sabem, devem chamar por uma variável e é isso que pesquisadores e trabalhadores de diversas áreas fazem quando não sabem o valor de um determinado problema. Nesse caso dos potes, é muito simples e, por isso, escolha-se uma letra para representar tal quantidade, por exemplo, a letra “x”. Veja figura 51:

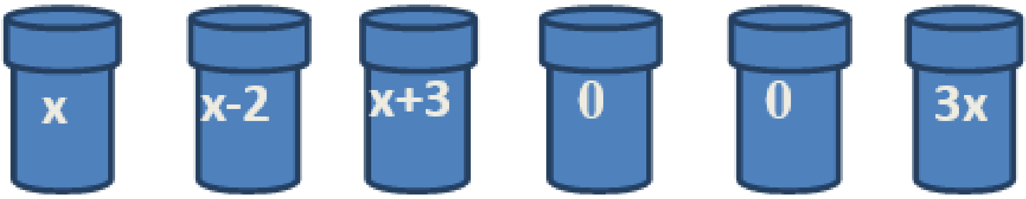
Figura 53: Potes com quantidade “x” de balas



Fonte: Elaboração própria

Agora, retiram-se 2 balas do segundo pote, adicionam-se 3 balas no terceiro; despejam-se as balas que estão no quarto pote no quinto, ficando o quarto pote com zero bala e o quinto com o dobro de “x”, ou seja, “2x”; em seguida, despeja-se o quinto pote, que está com quantidade “2x”, no sexto pote, ficando este com “3x”, conforme figura 52.

Figura 54: Potes com quantidades adicionada ou retiradas



Fonte: Elaboração própria

Finalmente abre-se o primeiro pote e contam-se as balas, por exemplo; se tiverem 5 balas, é possível saber a quantidade de balas dos outros potes sem abri-los. Para isso, deve-se pedir aos alunos para determinar a quantidade de balas do segundo, do terceiro e do sexto potes; depois, contando as balas; confirmam-se os valores 3, 8 e 15 respectivamente.

Dando continuidade no estudo da álgebra no 7º Ano do Ensino fundamental, chega-se ao estudo de equações que são sentenças abertas expressas por uma igualdade e que contenha uma ou mais letras que representam números desconhecidos chamados de incógnitas. Por exemplo, o perímetro de um terreno retangular é igual a 144 metros quadrados e pode ser escrito na forma de uma equação, veja figura 53:

Figura 55: Equação de um terreno retangular com perímetro 144

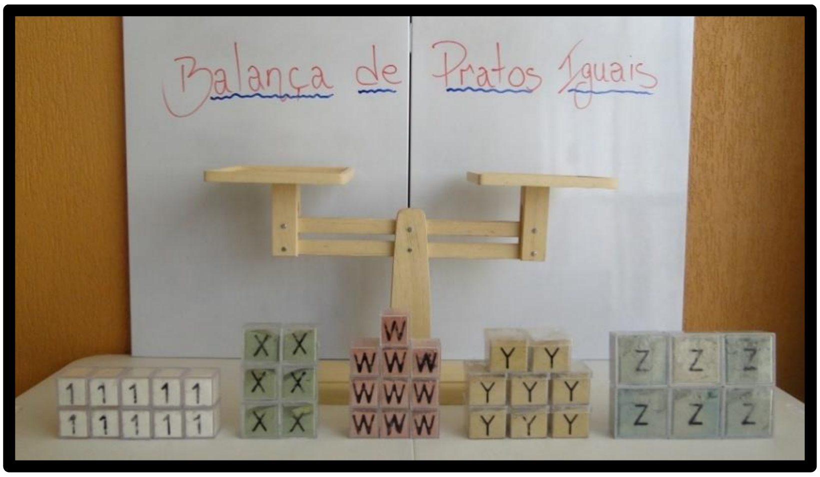
Fonte: Elaboração própria

Tem-se que $2x, 2y$ e 144 são termos dessa equação e, quando uma equação apresenta uma única incógnita, é chamada de Equação do 1º Grau com uma Incógnita.

Um importante material concreto para explorar esse conteúdo é a utilização de uma balança de pratos iguais, balança essa construída de madeira seguindo o modelo da balança de Roberval.

Será explanado nessa seção apenas o estudo do uso da balança para ensinar equações do 1º grau com uma incógnita e o objetivo é esclarecer os princípios aditivo, em que pode adicionar o mesmo termo nos dois lados da equação, e o princípio multiplicativo, que pode multiplicar os dois membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, princípios esses justificados pelo equilíbrio da balança. A figura 54 contém a balança e os objetos de acrílico em que foram colocados areia e algodão coloridos para representar a unidade e os valores desconhecidos x, y, z e w com massas diferentes.

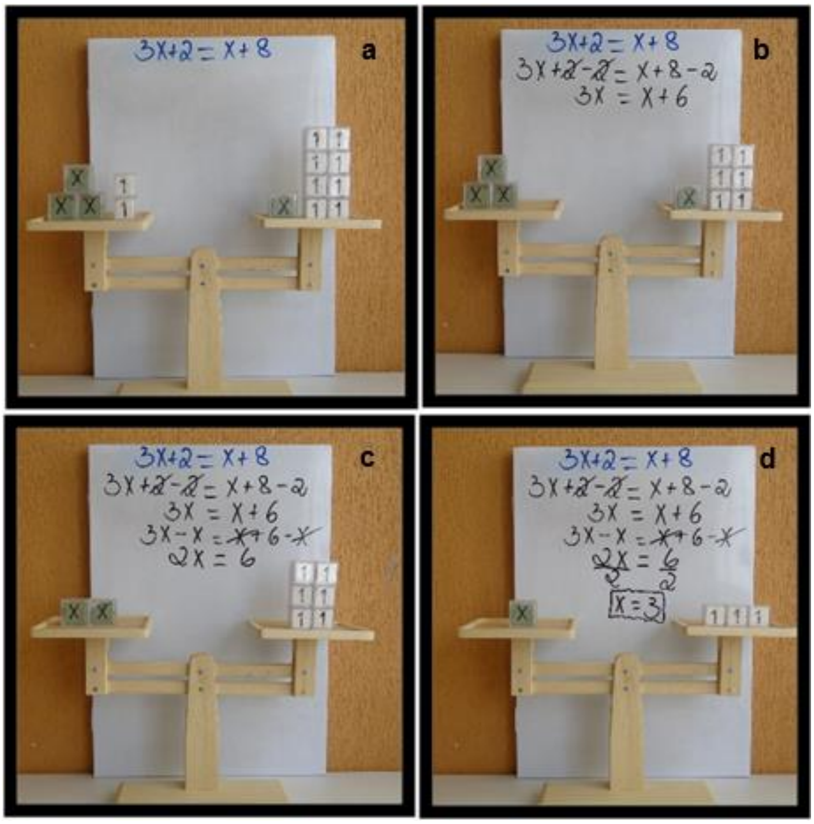
Figura 56: A balança, a unidade e os objetos de massas diferentes



Fonte: Elaboração própria

A figura 55 representa 4 etapas na resolução de uma equação do 1º grau com uma incógnita utilizando a balança para justificar os princípios aditivos e multiplicativos para manter o equilíbrio. Diante de cada etapa, o aluno deve ser estimulado a pensar maneiras para manter o equilíbrio para encontrar o valor de x.

Figura 57: Resolução da equação usando a balança

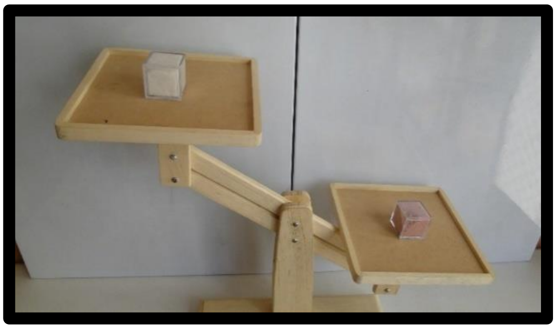


Fonte: Elaboração própria

Pela figura 55acima, observa-se que foi estabelecido o equilíbrio quando foram colocados $3x + 2$ no primeiro prato da balança e $x + 8$ no segundo prato. Esse equilíbrio é representado pela equação $3x + 2 = x + 8$**(a)**; depois adiciona-se –2 nos dois membros da equação, que é representado na balança com a retirada de 2 unidades de cada prato chegando em uma equação equivalente a primeira, mas escrita como $3x = x + 6$**(b)**; agora, adiciona-se$-x$ nos dois membros da equação, ou seja, retira-se, de cada prato da balança, um objeto representado com a massa desconhecida x. A nova equação equivalente ficará $2x = 6$**(c)** e, por fim, como sobraram apenas dois objetos de massa x no primeiro prato e 6 unidades no segundo, pode-se verificar o desiquilíbrio da balança retirando-se 1 unidade e 1 objeto de massa x e, na verdade, para chegar ao resultado final, deve-se usar o princípio multiplicativo na resolução desta equação, multiplicando os dois membros por $1/_2$, ou seja, tirando a metade de objetos de cada prato da balança chegando no resultado $x = 3$**(d)**.

Aproveitando o uso da balança, o professor pode questionar sobre corpos com mesmo volume. Será que os mesmos sempre terão a mesma massa? Sabe-se que a resposta poderá ser negativa e, no estudo de densidade, que é massa dividida pelo volume, tem-se que, mantendo o volume e aumentando a massa, teremos corpos, cada vez mais, densos e isso pode ser confirmado utilizando a balança de dois pratos e dois cubos de acrílico de mesmo volume, nos quais foram colocados algodão em um cubo e areia em outro; veja a figura 56:

Figura 58: Mesmo volume e massas diferentes



Fonte: Elaboração própria

Um outro exemplo seria comparar a massa de dois líquidos à água e ao óleo de cozinha. Colocando os líquidos em copos idênticos, percebe-se que a água tem mais massa que o óleo e, portanto, mais denso, conforme figura 57:

Figura 59: Comparando a massa de um copo de óleo e de água

Fonte: Elaboração própria

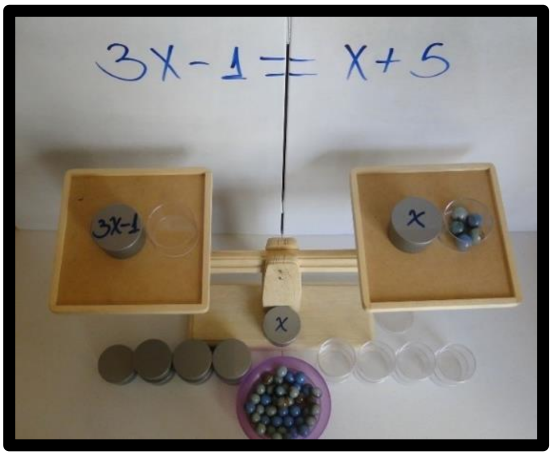
Uma atividade, usando a balança, para ser desenvolvida com os alunos, é utilizar bolinhas de gude e recipientes opacos, nos quais não se enxergam as bolinhas, e recipientes transparentes, em que é possível enxergar e contar as bolinhas. Veja a figura 58 com tais materiais:

Figura 60: Balança, recipientes e bolinhas de gude

Fonte: Elaboração própria

A ideia é dividir a sala em grupos de quatro ou cinco alunos para que os próprios criem suas equações, através do equilíbrio da balança, para que os outros grupos descubram a quantidade de bolinhas que estarão no recipiente opaco. Veja a seguir a figura 59 exemplificando uma possibilidade que eles possam produzir:

Figura 61: Possibilidade de equação produzida pelos alunos água



Fonte: Elaboração própria

Pela figura acima, separou-se uma certa quantidade representando o valor desconhecido x que ficará de fora dos pratos da balança em um recipiente opaco. Nessa foto, foi colocada no pé da balança para, após a resolução da equação, poder verificar a veracidade da resposta. Nesse exemplo, foi colocado, no primeiro prato da balança, dentro do pote opaco, o triplo de bolinhas menos 1 unidade do pote que foi separado representando a quantidade x e, no segundo prato, foi colocado um pote opaco com quantidade x e um transparente contendo cinco bolinhas, ficando a equação $3x - 1 = x + 5$. Observe que, no primeiro prato, foi necessário colocar um recipiente transparente vazio pelo fato desses recipientes terem massa, pois, no segundo prato, tem um recipiente transparente com bolinhas e, desta forma, não interferir no resultado e no equilíbrio da balança. Essa equação tem como resultado x igual a 3, que será verificado ao abrir o pote, conforme figura 60:

Figura 62: Resultado da equação 3x – 1 = x + 5

Fonte: Elaboração própria

O aluno poderá deixar a mesma quantidade no copo opaco, dobrar, triplicar e adicionar ou retirar bolinhas em cada situação. Também, quando possível, tirar a metade, a terça parte, a quarta parte e adicionar ou retirar bolinhas; assim, nos potes transparentes, vai-se colocando as bolinhas até acontecer o equilíbrio e finalmente escrever a equação para que os outros grupos possam resolvê-la.

Assim, com o estudo de equações utilizando a balança de pratos iguais, fecha-se esse capítulo, lembrando que iniciou-se a descrição com Cálculo Mental, com o uso de panfletos, dinheiro de brinquedo, o dardo magnético e o tabuleiro das multiplicações; os Sistemas de Numeração, com o uso de folhas A4 imantadas com os principais sistemas de numerações, os símbolos romanos também imantados, o material dourado, o ábaco e as plaquinhas de adivinhe o número que utiliza o sistema binário; as Operações com Números Naturais, utilizando o material dourado; os Cubinhos e Placas de Madeira, para representar volume e áreas, contagem retangular, representar potências de expoente 2 (elevado ao quadrado) e 3 (elevado ao cubo) com as construções de quadrados e cubos e na resolução de uma expressão numérica justificando a ordem de resolução quanto as operações; Frações, com a necessidade de representar partes de um todo em partes iguais utilizando barbantes, a balança e o litro para justificar a necessidade de medir, o uso de discos e barras imantadas divididas em partes iguais, também foi sugerida a construção desse material pelos alunos para que os mesmos tenham seu próprio material e uma atividade utilizando o Tangram para o estudo de frações; os Números Inteiros, com o uso das folhas de tamanho A4 imantadas representado situações que envolvem números inteiros, o termômetro de metal, as plaquinhas de EVA imantadas com unidades positivas e negativas e a utilização de tampinhas com cores diferentes para representar as unidades positivas e negativas e, por fim, o estudo de equações, com o uso da balança de pratos iguais, o uso de potes de acrílico para representar a unidade e valores desconhecidos, para justificar os princípios aditivos e multiplicativos na resolução de uma equação e uma atividade para ser desenvolvida com os alunos utilizando potes opacos e transparentes para colocar bolinhas de gude pelos alunos, que foram divididos em grupos, para que um grupo descubra a quantidade de bolinhas do outro fazendo a resolução de uma equação de 1º grau.

Capítulo 3

Considerações Finais

É fato que muitas coisas precisam ser melhoradas na educação brasileira; entre elas oferecer escola integral para todos os alunos com atividades variadas e reforço, em horário contrário, para os mesmos. Sabemos também que muitos dos estudantes das escolas públicas têm pais sem formação e, por esse motivo, não conseguem acompanhar seus filhos na vida escolar e boa parte desses alunos vive em situações precárias, sem um teto digno para morar e até mesmo sem acesso a uma alimentação de qualidade. Desse modo, qual o estímulo desse aluno adentrar em uma sala de aula? Também vale ressaltar que muitos vivem apenas com a mãe e com muitos irmãos. Ainda existem casos de alunos que vivem com os avós. Esses são relatos que ouvimos diariamente de nossos alunos; e há ainda o problema das drogas que bate à porta deles, a todo momento, dentro até mesmo da própria escola e, para fechar, o mal uso das tecnologias, principalmente o acesso à pornografia, à criminalidade virtual, aos insultos em redes sociais, entre outros.

Uma escola integral com boa estrutura com orientadores educacionais e psicólogos para dar assistência aos alunos e familiares, capacitação contínua e valorização do professor é o que todos esperamos de nossos governantes, mas, diante de tanta corrupção, vemos, cada vez mais longe, uma educação de qualidade.

Esse trabalho mostrou que, mesmo diante de tantas dificuldades, podemos, através dos materiais manipuláveis, tornar as aulas mais atraentes e trazer o aluno a atuar como protagonista de seu próprio aprendizado e, que cada material produzido está de acordo com a BNCC, por exemplo, o uso do termômetro e a balança de pratos iguais.

Obviamente, é válido ressaltar que os materiais manipuláveis abordados nesse trabalho representam uma parte pequena do universo que oferece esse tema; podemos destacar vários materiais, como, por exemplo, blocos lógicos, geoplanos, geoespaço, material de cuisenaire, sólidos geométricos, construção de sólidos geométricos a partir de planificações desses sólidos em papel ou cartolina ou usando varetas e canudos, tabuleiros de diversos jogos, quebra cabeças que estimulem o raciocínio, utilização de laser e transferidor para trabalhar trigonometria e materiais que possam ser produzidos pelos próprios alunos até mesmo com material reciclável, por exemplo, usando tampinhas, palitos e canudinhos para algumas atividades entre muitos outros. Na internet, é possível ver diversos trabalhos, inclusive este, disponíveis no site do PROFMAT[1] - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, que é um programa, nas redes federais, para a formação de professores de matemática, o qual já tem diversos trabalhos publicados, sem falar em artigos que são publicados diariamente com diversos temas educacionais.

Vale a pena destacar que o uso de materiais concretos não são os únicos recursos a serem considerados em sala de aula. O professor deve usar a história da matemática, a resolução de problemas, as tecnologias e incentivar os estudantes para o estudo, como as olimpíadas de matemática; no site da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, tem um vasto material das olimpíadas anteriores com acesso às provas, à solução das mesmas e vídeos-aulas com professores explicando cada questão, além de simulados para que os alunos possam se preparar e sem falar das premiações para os estudantes.

Com a construção desse trabalho, pretendo continuar estimulando os alunos, quando possível, na construção de novos materiais e também pretendo retomar o trabalho de um material concreto que produzi na época de minha graduação em matemática na Universidade Federal de Uberlândia, a máquina de construir gráficos de funções, buscando agora maior rigor no seu desenvolvimento, além da busca por parcerias com as engenharias para tornar o material eficaz, podendo até mesmo detectar ponto de inflexão de uma função, conteúdo visto no ensino superior de matemática.

Visto a quantidade de materiais concretos que podem ser produzidos, espero estimular professores na construção de um laboratório de matemática nas escolas públicas, um espaço para construção do saber matemático, para produção de materiais e também ter um lugar para guardá-los.

[1] www.profmat-sbm.org.br

Um dos fatos mais importantes e consolidados nesse mestrado foi que o protagonismo, na sala de aula, não é do professor e, sim, dos alunos e, que os professores são mediadores ao acesso à educação tentando, através dos recursos didáticos, aproximar os conteúdos ao cotidiano do aluno sempre que possível, tornando a aprendizagem significativa.

Referências Bibliográficas

BARICCATTI, Karen Hyelmager Gongora. *As relações entre as estratégias de resolução de cálculos mentais e escritos e os níveis de construção das operações aritméticas.* 2010. Pág.10. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Campinas (UNICAMP), Campinas.

BEZERRA, Valdir; IGNÁCIO, Renato; DIAS, Marlene Alves. Álgebra na educação básica brasileira e a transição entre as diferentes etapas escolares. In: Anais da XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, Jean (Org.). *Didática das matemáticas* (p. 35-113). Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CERVO, Amado Luiz; BERVIAN. Pedro Alcino. *Metodologia científica*: para uso dos estudantes universitários. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

GIL, Antônio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*, 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GONTIJO, Cleyton Hércules. *Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio*. 2007. XXf. Tese (Doutorado em Psicologia) – Universidade de Brasília, Instituto de Psicologia.

https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/pedagogia/maria-montessori-uma-breve-biografia/58460. Acessado em agosto de 2018.

INEP. *IDEB - Resultados e Metas*. Disponível em http://ideb.inep.gov.br/resultado/ - acessado em 14 de setembro de 2018.

LORENZATO, Sérgio. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.* São Paulo: Autores Associados, 2009.

MACCARINI, Justina Motter; *Fundamentos e metodologia do ensino de matemática nas séries iniciais.* Curitiba: Editora Fael, 2011.

MEC. Jogos tornam matemática atrativa para alunos em escola do interior gaucho. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/14219- acessado em junho de 2018.

MUNIZ, Cristiano Alberto. Educação matemática lúdica. In: SILVA, Américo Junior Nunes; TEIXEIRA, Heurisgleides Sousa. *Ludicidade, formação de professores e educação matemática em diálogo* (Cap. 1) Curitiba: Editora Apris, 2016.

OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. Brasil no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros. São Paulo: Fundação Santillana, 2016.

PASSOS, Carmen Lucia Brancaglion. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores* (p. 77–92). Campinas: Autores Associados, 2006.

PIRES, Maria José da Silva; ABRANTES, Nyedja Nara Furtado; BORBA, Valéria Maria de Lima. Matemática e multiplicação: dificuldades e novos olhares em torno deste ensino. *Revista Principia*, João Pessoa, n. 23, p. 87-94, 2013.

Presskit SAEB 2017, Disponível em: http://provabrasil.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb, Acessado em setembro de 2018.

RÊGO, Rômulo Marinho, RÊGO, Rogéria Gaudencio. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores* (p. 39-56). Campinas: Autores Associados, 2006.

ROCO, Cristiani Maria Kusma; FLORES, Cláudia Regina. O Ensino de geometria: problematizando o uso de materiais manipuláveis. In: Anais do XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática EBRAPEM. *Educação Matemática: Possibilidades de interlocução.* Rio Claro, Unesp, 2008.

SANTOS, Lijecson Souza dos; PEREIRA,Pedro Eduardo Duarte.; O Uso do Material Dourado como Recurso No Ensino de Matemática: Adição e Subtração em Foco. IX Encontro Paraibano de Educação matemática, 2016. Ed. Realize. Disponível em: https://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO_EV065_MD1_SA3_ID370_30102016210025.pdf – Acessado em julho de 2018

SILVA, Francisca Marlene da; Cunha, Déborah Almeida; Silva, Aline Araújo da; Haisashida, Keila Andrade. *O Uso Do Material Concreto no Ensino da Matemática.* Disponível em: http://www.editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/Trabalho_Comunicacao_oral_idinscrito_947_7fc2304382477fcd9bed7819c1fb39e8.pdf. Acessado em junho de 2018