Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

“Aplicações do Princípio de Cavalieri ao Cálculo de Volumes e Áreas”

“Kariton Pereira Lula”

Goiânia

2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Kariton Pereira Lula					
E-mail:	Kariton.lula@ifgoiano.edu.br					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [ ]Sim [x] Não						
Vínculo empregatício do autor		Professor do Ensino Básico Técnico e Tecnológico				
Agência de fomento:		Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior			Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	**00.889.834/0001-08**	
Título:	Aplicações do Princípio de Cavalieri ao Cálculo de Volumes e Áreas					
Palavras-chave:	Princípio de Cavalieri, volumes, áreas					
Título em outra língua:	Applications of the Cavalieri's Principle the Calculation of Volumes and Areas					
Palavras-chave em outra língua:	Cavalieri Principle, volumes, areas					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	28/02/2013					
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional					
Orientador (a):	Rogerio de Queiroz Chaves					
E-mail:	rqchaves@gmail.com					
Co-orientador (a):*	--					
E-mail:	--					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

____ Data: ____ / ____ / _____

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

“Kariton Pereira Lula”

“Aplicações do Princípio de Cavalieri ao Cálculo de Volumes e Áreas”

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

Lula, Kariton Pereira.
L955a Aplicações do princípio de Cavalieri ao cálculo volumes e áreas [manuscrito] / Kariton Pereira Lula. – 2013.
61 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1.Princípio de Cavalieri. 2. Volumes. I. Titulo.

CDU: 517

Kariton Pereira Lula

Aplicações do Princípio de Cavalieri ao Cálculo de Volumes e Áreas

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 28 de fevereiro de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Rogério de Queiroz Chaves
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – Campus Goiânia-GO

Profa. Dra. Rosângela Maria da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Kariton Pereira Lula graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG-Goiânia), obtendo título de Licenciado em Matemática.

Dedico este trabalho a minha esposa Celyce, aos meus filhos Maria Eduarda e João Pedro e aos meus pais.

Agradecimentos

Primeiramante agradeço a toda a minha família que acreditou em mim, que me tornou capaz de realizar tal curso. Agradeço com uma atenção especial às pessoas que mais amo, à minha esposa Celyce e aos meus filhos, Maria Eduarda e João Pedro, que entenderam e apoiaram as minhas decisões.

Agradeço também aos meus pais pela vida, educação e moral que me deram, pois sei que sem estes ensinamentos não conseguiria seguir em frente. O meu muito obrigado ao meu sogro e minha sogra por sempre me apoiarem.

Agradeço o incentivo concedido pela CAPES para a realização deste mestrado e a todos que tiveram a iniciativa de desenvolver o PROFMAT.

Por fim agradeço a todos os meus mestres que me ensinaram matemática, em especial ao meu orientador, Professor Doutor Rogerio de Queiroz Chaves, pois muitos deles foram grandes inspiradores de minha profissão.

O meu muito obrigado a todos.

Resumo

Frequentemente, no ensino básico, conteúdos de matemática são apresentados sem justificativas satisfatórias, as vezes até sem justificativas e sem um desenvolvimento lógico que faça sentido desses conteúdos e ideias num contexto mais amplo. O cálculo de áreas e volumes é um exemplo de conteúdo em que estas deficiências normalmente ocorrem.

Neste trabalho, apresentamos um modelo de desenvolvimento progressivo dos conceitos envolvidos no cálculo de volumes, com uma fundamentação que seja, ao mesmo tempo, satisfatória e acessível ao nível de desenvolvimento do estudante. Para isso, fazemos extensivo uso do Princípio de Cavalieri, que permite não só justificar adequadamente o cálculo do volume de cilindros, cones ou esferas, mas também fazer sentido o cálculo de volume de outros tipos de regiões, como partes da esfera, elipsóides e parabolóides.

Concluímos com uma interessante aplicação do Princípio de Cavalieri ao cálculo da área delimitada por um segmento de parábola e a consequente demonstração do Teorema de Arquimedes a esse respeito.

Palavra-chave: Princípio de Cavalieri, volumes, áreas.

Abstract

In elementary mathematics teaching, it often occurs that some subjects are presented without proper justification or without a coherent logical construction that makes sense of those subjects and ideas in a wider context. The calculation of areas and volumes is an example of a subject in which these shortcomings are usually present.

In this work, we present a model for the gradual development of the ideas involved in the calculation of volumes, in a way that is, at once, well justified and approachable by the average student at this stage. In order to achieve that, we make extensive use of the Cavalieri Principle, which allows not only an adequate justification of the expressions for the volume of cylinders, cones or spheres, but also the calculation of volumes of other shapes, such as parts of the sphere, ellipsoids and paraboloids.

We conclude with an interesting application of the Cavalieri Principle to calculate the area of a parabolic segment and then give a demonstration of Archimedes' theorem.

Keyword: Cavalieri Principle, volumes, areas.

Sumário

Lista de Figuras

Aplicações do Princípio de Cavalieri ao Cálculo de Volumes e Áreas

Kariton Pereira Lula

13 de março de 2013

1 Introdução

É de comum conhecimento que vários estudantes, desde bem cedo, desenvolvem uma certa aversão à Matemática que, cultivada ao longo dos anos escolares, tende a evoluir para um total bloqueio aos conteúdos desta disciplina.

Diante desta constatação, e entendendo que uma das principais causas do problema está na maneira como a matemática é ensinada nas escolas, desenvolvemos este trabalho escolhendo alguns conteúdos em geometria, como exemplo de conceitos matemáticos que são, usualmente, apresentados aos estudantes quase que exclusivamente em termos de fórmulas prontas, sem justificativas satisfatórias e sem um encadeamento lógico que dê um sentido maior aos conceitos desenvolvidos.

Mostramos, então, que estes conteúdos podem receber um tratamento mais adequado e estimulante, utilizando recursos que estão ao alcance do nível de compreensão do estudante e que não só permitem melhor justificar alguns resultados, mas ir além dos conteúdos do currículo básico, dando, ao estudante mais interessado, a oportunidade de explorar outras possibilidades de aplicação dos conceitos desenvolvidos.

A maior parte dos resultados apresentados neste texto é justificada com base no Princípio de Cavalieri, que em boa parte dos livros didáticos não chega a ser mencionado e, no entanto, pode ser introduzido de uma maneira acessível ao nível de desenvolvimento do estudante. Assim, este princípio será abordado na forma de um postulado, mas alguns exemplos de sua aplicação podem ser suficientes para convencer o estudante de sua validade e reduzir possíveis objeções a adotá-lo como um axioma. Este, talvez, seja o caminho mais adequado para justificar de maneira satisfatória vários resultados sobre o cálculo de volumes neste estágio do desenvolvimento do estudante.

Diante disto, é apresentada uma nota histórica sobre alguns matemáticos que contribuiram para o cálculo do volume de sólidos. Em seguida, introduzimos a ideia intuitiva de volume, como quantidade de espaço ocupada por uma região do espaço, apartir de uma unidade de volume fixada. Nesta mesma seção obtemos o volume de um paralelepípedo reto retangular, que será útil nos teoremas que seguem.

Tendo como base o Princípio de Cavalieri e o volume de um paralelepípedo, desenvolvemos as expressões usuais para o cálculo do volume de diversos sólidos, como prismas, cilindros, pirâmides e cones.

Passamos, então, ao cálculo do volume da esfera e de algumas de suas subdivisões, como seções, calotas e cunhas.

Ao final, apresentamos uma variedade de interessantes aplicações adicionais do Princípio de Cavalieri em contextos raramente explorados no nível do ensino médio. Por exemplo, a área de uma elipse, o volume de um elipsóide, de uma calota parabólica e a área de um segmento de parábola. Nesta última aplicação é apresentada uma relação entre a área do segmento de parábola e a do triângulo de área máxima inscrito neste segmento (Teorema de Arquimedes).

2 Nota Histórica

Volumes são tratados por Euclides, por volta de 300 a.c no Livro XII dos Elementos. Euclides sabia calcular os volumes do prisma, do cilindro, do cone e da pirâmide, mas não apresentou uma expressão para o volume da esfera. Arquimedes, em meados de 200 a.C, foi o primeiro a efetuar com rigor e elegância, o cálculo do volume da esfera no livro "Superfície e volume do cilindro e da esfera". No entanto, esses métodos desenvolvidos pelos matemáticos antigos eram extremamente trabalhosos. O método mais eficiente e geral que se usa hoje em dia para obter expressões do volume dos chamados "três corpos redondos" (cilindro, cone e esfera) é o cálculo infinitesimal, com a integração de funções elementares.

O cálculo foi desenvolvido na segunda metade do século XVII, por Newton e Leibniz, a partir de trabalhos iniciais de Fermat e Descartes. Arquimedes, entretanto, já pode ser considerado o precursor dos métodos infinitesimais que conduziram à noção de integral. Muito depois dele, no começo do século XVII, o padre italiano Bonaventura Cavalieri, discípulo de Galileu, deu um passo importante na mesma direção com seu livro "Geometria dos Indivisíveis". Ali está enunciado seu princípio. Cavalieri considerava uma região plana como formada por cordas paralelas e um sólido como constituído de placas planas paralelas. As ideias de Cavalieri exerceram forte influência em Leibniz. Mesmo Newton, o outro criador do Cálculo, embora assumisse publicamente uma atitude crítica em relação aos indivisíveis, em alguns de seus trabalhos usou terminologia introduzida por Cavalieri.

Mais adiante discutiremos um pouco mais sobre Cavalieri, que foi um dos precursores do Cálculo infinitesimal.

3 A Ideia Intuitiva de Volume

Um conceito intuitivo do que vem a ser volume de um sólido é a "quantidade de espaço" por ele ocupado. O objetivo central seria exprimir esta "quantidade de espaço" que chamaremos daqui para frente de volume por um número real positivo. Para encontrarmos este número devemos comparar o espaço ocupado pelo sólido com certa unidade, o resultado desta comparação será o número desejado, a saber, o *volume do sólido.*

Vamos considerar como unidade de volume um cubo de aresta uma unidade de comprimento, o qual será denominado *cubo unitário.* O seu volume, por definição, será 1. Se a aresta do cubo for 1 cm, então o seu volume será 1 cm^3, se a aresta do cubo for 1 m, então o seu volume será 1 m^3.

Uma forma interessante de se pensar nestas ideias intuitivas de volume é o trabalho desenvolvido com um recurso didático conhecido como *Material Dourado.* O Material Dourado é composto de cubos, placas, barras e cubinhos. O cubo é formado por dez placas, a placa é formada por dez barras e a barra é formada por dez cubinhos. Cada cubinho é chamado de cubo unitário e possui volume 1 cm^3 . Se pensarmos na barra, como ela é composta de 10 cubinhos, o seu volume será de 10×1 $cm^3 = 10$ cm^3. A placa é composta por dez barras, logo o volume de uma placa será 10×10 $cm^3 = 100$ cm^3. Por fim, como o cubo é composto de dez placas, o seu volume será dado por 10×100 $cm^3 = 1000$ cm^3 .

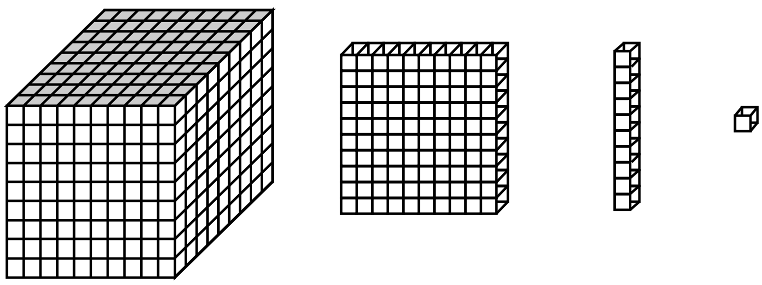

Figura 1: Material Dourado

Portanto, a ideia de calcular o volume de um sólido qualquer seria pensar: quantos cubos unitários eu posso colocar dentro deste sólido? A soma dos volumes desses cubos unitários, ou fração deles, seria o volume do sólido. É claro que, se o sólido tiver um formato irregular, não poderemos pensar somente na quantidade de vezes que um cubo unitário cabe dentro do sólido. Esta ideia é apenas um passo inicial para calcular o volume de alguns sólidos em específico.

3.1 Volume de um Paralelepípedo Retangular

Um paralelepípedo ou bloco retangular é a designação dada a um sólido cujas faces são paralelogramos, quadrilátero cujos lados opostos são iguais e paralelos. Um paralelepípedo tem seis faces que, duas a duas, são idênticas e paralelas entre si. Os paralelepípedos podem ser retos ou oblíquos, dependendo de suas faces laterais serem, ou não, perpendiculares à base. A figura abaixo representa um paralelepípedo reto retângulo, pois todas as suas faces são retângulos.

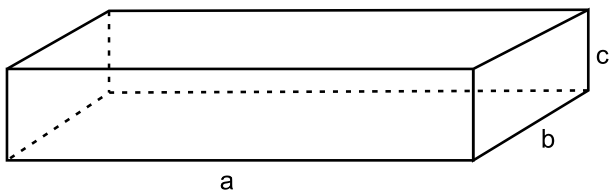

Figura 2: Paralelepípedo

Todo paralelepípedo reto retângulo fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c). Dizemos que os números reais positivos a, b e c são as dimensões do paralelepípedo. Um caso particular de um paralelepípedo reto retângulo é o cubo, este possui todas as dimensões iguais e estas dimensões são as medidas das arestas do cubo.

Teorema 1. *O volume de um cubo de aresta $a \in \mathbb{R}_+^*$ é dado pelo produto das três dimensões, ou seja, $V = a^3$.*

Demonstração:

Vamos considerar, progressivamente, os casos em que a medida da aresta, a, é um número natural, depois racional e, por fim, irracional:

1º caso: Se a é um número natural, o cubo cuja aresta mede a unidades de comprimento pode ser decomposto em a^3 cubos unitários justapostos, logo o volume do cubo é $V = a^3$.

2º caso: Se a é um número racional ele pode ser escrito da forma $a = p/q$, com $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$.

Consideremos um cubo unitário, dividindo suas arestas em um número inteiro q de partes iguais, o cubo unitário fica dividido em q^3 cubos de aresta $1/q$, cujo volume denotaremos por $V_{\frac{1}{q}}$, de forma que

$$V_{\text{cubo}} = 1 \quad \Rightarrow \quad q^3 \cdot V_{\frac{1}{q}} = 1 \quad \Rightarrow \quad V_{\frac{1}{q}} = \frac{1}{q^3} = \left(\frac{1}{q}\right)^3.$$

Então, o volume de um cubo de aresta $1/q$ é $(1/q)^3$.

Pensando agora em um cubo cuja aresta é p/q, podemos decompor cada uma de suas arestas em p partes iguais, cada uma delas com comprimento $1/q$. Deste modo, o cubo ficará dividido em p^3 cubos justapostos, cada um com aresta $1/q$ e, consequentemente, seu volume total é

$$V \ = \ p^3 \cdot V_{\frac{1}{q}} \ = \ p^3 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^3 \ = \ \left(\frac{p}{q}\right)^3.$$

Concluímos, então, que o volume de um cubo cuja aresta é $a = p/q$, com $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, é dado por $V = a^3$.

3º caso: Seja a um número irracional. Para qualquer número $x < a^3$, existe um número racional $r < a$, tão próximo de a quanto se deseje, de tal forma que $x < r^3 < a^3$. Desta maneira, podemos pensar em um cubo V_a de aresta a, que contém um cubo V_r de aresta r e como um cubo contém o outro segue que $V_r < V_a$. Sabemos que o volume de $V_r = r^3$, pois r é racional, concluímos que $x < V_r < V_a$, logo, $x < V_a$.

Por um raciocínio análogo, para qualquer número $y > a^3$, existe um número racional $s > a$, tão próximo de a quanto se deseje, de tal forma que $a^3 < s^3 < y$. Então, um cubo com aresta s, racional, contém um cubo de aresta a e segue que $V_s > V_a$. Como s é racional, o volume de $V_s = s^3$ e concluímos que $V_a < V_s < y$, logo, $V_a < y$.

Assim, para quaisquer números reais x e y tais que $x < a^3 < y$, temos $x < V_a < y$. Portanto, o volume do cubo de aresta irracional a é dado por $V_a = a^3$. $\square$

Teorema 2. *O volume de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões* $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ *é dado pelo produto das dimensões, ou seja,* $V = abc$ *.*

Demonstração:

Inicialmente vamos supor que exista um paralelepípedo cujas dimensões sejam números racionais. Como estes números são racionais podemos sempre exibí-los com um mesmo denominador, ou seja, as dimensões do paralelepípedo serão dadas pelos números racionais x/q, y/q e z/q, com x, y, z e $q \in \mathbb{N}$.

Decompondo as três arestas do paralelepípedo em segmentos de comprimento $1/q$, teremos que as arestas x/q, y/q e z/q, serão divididas em x, y e z partes, respectivamente. Portanto, o paralelepípedo foi decomposto em $x \cdot y \cdot z$ cubos de aresta $1/q$. Sabemos que o volume de um cubo cuja aresta é $1/q$ é dado por $V = (1/q)^3$, como o paralelepípedo foi decomposto em $x \cdot y \cdot z$ cubos, temos

$$V_{\text{par.}} = x \cdot y \cdot z \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^3 = \frac{x}{q} \cdot \frac{y}{q} \cdot \frac{z}{q}$$

Deste modo, o volume de um paralelepípedo cujas dimensões são dadas por números racionais é o produto das dimensões. Assim, dado um paralelepípedo cujas dimensões são $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$, o seu volume é $V = abc$.

Resta mostrar que quando ao menos uma destas dimensões é um número irracional, o teorema também é válido.

Consideremos, então, um paralelepípedo I cujas dimensões são dadas pelos números a, b e c, sendo que ao menos uma das dimensões é um número irracional. Queremos mostrar que $V_I = abc$.

Considere um número x de tal forma que ele seja menor que $a \cdot b \cdot c$. Podemos encontrar números racionais r, s e t tais que $r < a$, $s < b$ e $t < c$, tão próximos de a, b, c, quanto se deseje de tal forma que $x < rst < abc$. Desta maneira, o paralelepípedo I contém um paralelepípedo Q menor, cujas arestas são r, s e t, logo, $x < rst = V_Q < V_I$, ou seja, $x < V_I$.

Por um raciocínio análogo considerando um número $y > abc$, podemos encontrar números racionais u, v e w tais que $u > a$, $v > b$ e $w > c$, tão próximos de a, b e c, quanto se deseje de tal forma que $abc < uvw < y$. Desta maneira, o paralelepípedo I está contido em um paralelepípedo R, maior, cujas arestas são u, v e w, logo, $V_I < uvw = V_R < y$, ou seja, $V_I < y$.

Como $x < abc < y$, segue que $V_I = abc$.

Portanto, o volume de qualquer paralelepípedo reto retângulo é dado pelo produto das três dimensões. □

4 Princípio de Cavalieri

Até este ponto conseguimos estabelecer uma expressão para calcular o volume de um paralelepípedo reto retângulo. Para que possamos calcular o volume de outros sólidos, precisaremos desenvolver métodos mais abrangentes para comparar as "quantidades de espaço" ocupadas por dois sólidos, inclusive lançando mão de recursos adicionais, como o Princípio de Cavalieri. Antes de enunciar e utilizar o Princípio de Cavalieri, pode ser proveitoso conhecer um pouco do contexto de sua origem na importante obra de Cavalieri, "Tratado de Geometria Indivisibilibus", nas palavras do historiador H. Eves:

> *O tratado de Cavalieri é longo demais e pouco claro, sendo difícil até descobrir o que ele entendia por "indivisível". Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado por uma infinidade de secções planas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Um procedimento análogo com os elementos do conjunto das secções planas paralelas de um sólido dado fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original (este último resultado pode ser ilustrado claramente formando-se uma pilha vertical de cartas e depois deformando suas laterais transformando-as em superfícies curvas; o volume evidentemente não se altera com essa deformação). Esses resultados, ligeiramente generalizados, fornecem os chamados Princípios de Cavalieri.*
>
> *(Eves, H., 2008 p. 425 e 426)* - ver [5]

O conceito de indivisível, mencionado por Cavalieri de uma maneira intuitiva e um pouco vaga, só pode ser formalizado com mais rigor em um contexto matemático mais avançado, como a Teoria da Medida, base para a construção formal do Cálculo Integral. Assim, uma demonstração mais rigorosa do Princípio de Cavalieri não seria acessível ao estudante do ensino médio, e, em muitos casos, infelizmente, nem mesmo do professor. Mas alguns exemplos, podem ser suficientes para persuadir o estudante a aceitar o Princípio como um axioma, de uma maneira mais intuitiva. Assim, o Princípio, tal como o utilizaremos neste texto, pode ser sintetizado em dois enunciados equivalentes, um para as regiões do plano e outro para regiões do espaço, como segue.

Princípio de Cavalieri:

1. *Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.*

2. *Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.*

De acordo com o Princípio de Cavalieri se considerarmos dois sólidos quaisquer que possuem a mesma altura e seccionarmos estes sólidos a uma mesma altura qualquer, se as secções possuirem sempre a mesma área, concluímos que o volume destes sólidos são iguais.

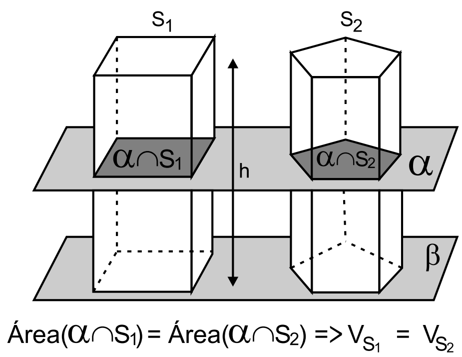

Figura 3: Ilustração do Princípio de Cavalieri

Com o auxílio destes resultados conseguimos mostrar como calcular o volume de outros sólidos.

Definição 1. *Um* ***prisma*** *é todo poliedro formado por uma face superior e uma face inferior paralelas e congruentes (também chamadas de bases) ligadas por arestas paralelas entre si.*

As laterais de um prisma são paralelogramos. A nomenclatura dos prismas é dada de acordo com a forma das bases. Assim, se temos hexágonos nas bases, teremos um prisma hexagonal. O prisma pode ser classificado em reto quando suas arestas laterais são perpendiculares às bases e oblíquo quando não são.

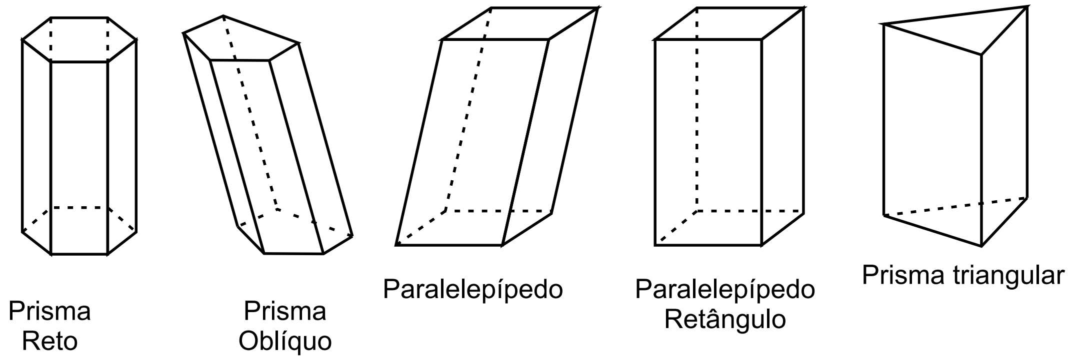

Figura 4: Prismas

Teorema 3. *O volume de um prisma qualquer é dado pelo produto da sua altura pela área da base.*

Demonstração:

Para um prisma, com altura h e área da base A, seja β o plano da base inferior. Consideremos um paralelepípedo reto retângulo com altura h, cuja base inferior, também contida no plano β, tenha área A. Seja α um plano, paralelo a β, e seccionando os sólidos a uma distância h_0 de β, como ilustra a figura 5.

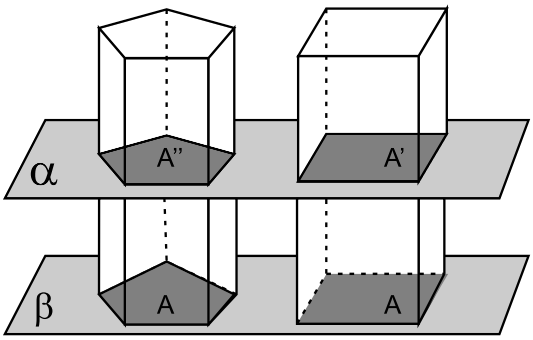

Figura 5: Áreas equivalentes

Os dois sólidos são cortados pelo plano α, produzindo duas secções de áreas $A^{'}$ e $A^{''}$, no paralelepípedo e no prisma, respectivamente. Sabendo que o paralelepípedo também é um prisma e que toda secção feita por um plano paralelo à base de um prisma determina uma figura congruente à base, segue que $A^{'} = A = A^{''}$.

Como os dois prismas possuem a mesma altura h e as secções feitas paralelas à base determinam figuras equivalentes, ou seja, possuem a mesma área, temos, pelo Princípio de Cavalieri, que os volumes destes sólidos são iguais.

Já vimos que o volume do paralelepípedo reto retângulo é dado pelo produto das suas três dimensões, o que, neste caso, equivale a dizer que $V_{\text{paral.}} = Ah$, de onde concluímos que $V_{\text{prisma}} = V_{\text{paral.}} = Ah$. □

Definição 2. *Considere uma figura plana fechada, situada em um plano α, e um segmento de reta PQ, secante a α. Chama-se de **cilindro** à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos da figura plana. O segmento PQ é denominado a geratriz do cilindro e será indicada por g.*

Observações:

- Um cilindro cuja base é um círculo será denominado *cilindro circular.*
- Um cilindro em que a geratriz forma um ângulo reto com o plano que contém a base é chamado de *cilindro reto*, caso contrário o cilindro é dito *cilindro oblíquo.*

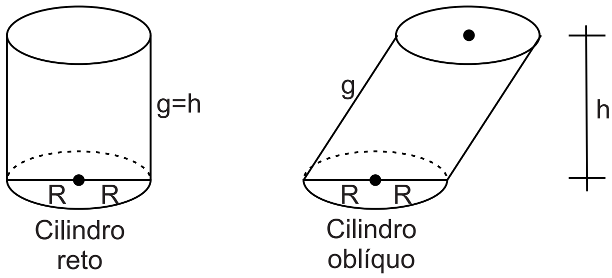

Figura 6: Cilindros

Todo cilindro circular reto cuja geratriz é igual ao diâmetro da base será chamado de *cilindro equilátero.*

Teorema 4. *O volume de um cilindro circular é dado pelo produto da área da base pela altura do cilindro.*

Demonstração:

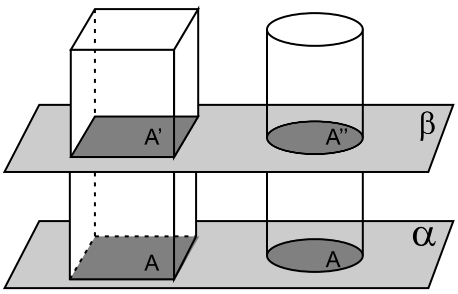

Figura 7: Aplicando o Princípio de Cavalieri

A demonstração deste teorema é análoga a demonstração do teorema 3. Observando a figura 7, dado um cilindro circular cuja base possui área A e altura h, construiremos um paralelepípedo de base A e altura h. Como $A' = A = A''$, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos possuem o mesmo volume e $V_{\text{cilindro}} = A \cdot h$. $\square$

5 O Volume de uma Pirâmide

Definição 3. *Consideremos um polígono convexo* $A_1A_2A_3...A_n$ *situado em um plano* α *e um ponto* V *fora de* α*. Chama-se de* ***pirâmide*** *a reunião dos segmentos com uma extremidade em* V *e as outras nos pontos do polígono.*

Dizemos que V é o vértice da pirâmide e $A_1A_2A_3...A_n$ é a base da pirâmide. Uma pirâmide cuja base é um triângulo será chamada de *pirâmide triangular* ou *tetraedro*, se a base for um quadrilátero será dita *pirâmide quadrangular* e assim por diante.

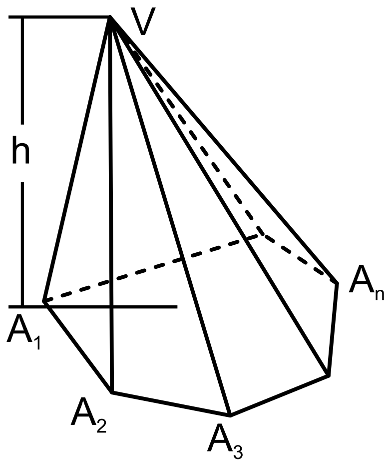

Figura 8: Pirâmide qualquer

Vamos estudar algumas propriedades das pirâmides triangulares, que estendem-se facilmente às demais pirâmides, uma vez que um polígono convexo de n lados pode ser sempre dividido em $n-2$ triângulos.

Primeiramente, vamos encontrar o volume de uma pirâmide triangular, novamente usando o Princípio de Cavalieri. Para isto, verifiquemos o que ocorre quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo a sua base.

Considere uma pirâmide de base triangular ABC, vértice V e altura H. Seccionada por um plano paralelo à base e a uma distância h do vértice V, conforme a figura abaixo:

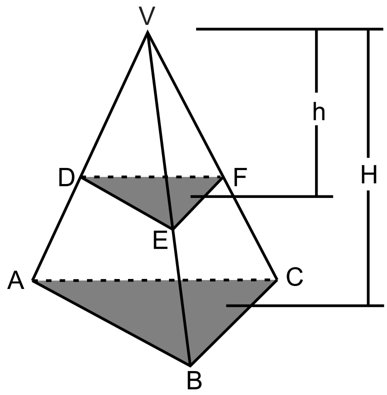

Figura 9: Triângulos Semelhantes

Mostraremos que os triângulos ABC e DEF são semelhantes, sendo a razão de semelhança H/h e, consequentemente, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e DEF é $(H/h)^2$.

Inicialmente, vamos mostrar que ABC e DEF são de fato semelhantes com razão k. Observemos os triângulos VAB e VDE. Como os segmentos AB e DE são paralelos, segue que os triângulos VAB e VDE são semelhantes, pelo Teorema Fundamental [3], então podemos escrever

$$\frac{VA}{VD} = \frac{VB}{VE} = \frac{AB}{DE} = k. \tag{1}$$

Aplicando o mesmo raciocínio temos que VBC e VEF são semelhantes, pois os segmentos BC e EF são paralelos. Então podemos escrever

$$k = \frac{VB}{VE} = \frac{VC}{VF} = \frac{BC}{EF}. \tag{2}$$

Da mesma forma temos que VAC e VDF são semelhantes, pois os segmentos AC e DF são paralelos. Então podemos escrever

$$k = \frac{VC}{VF} = \frac{VA}{VD} = \frac{AC}{DF}. \tag{3}$$

Concluímos, por $(1), (2)$ e (3), que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k,$$

ou seja, os lados da base e da secção são proporcionais e os triângulos ABC e DEF são semelhantes de razão k. Agora nos resta mostrar que esta constante $k = H/h$.

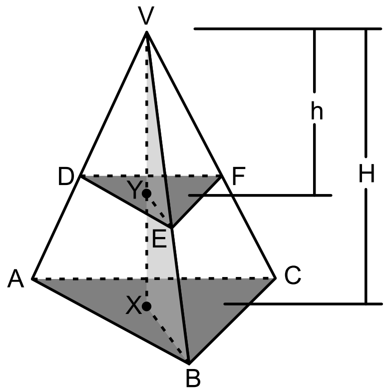

Figura 10: Razão de Semelhança

Para mostrar isto consideremos os pontos Y, na secção, e X, na base, ambos sobre a perpendicular baixada pelo vértice V, como mostra a figura:

Observando os triângulos VXB e VYE, como os segmentos XB e YE são paralelos, segue que os triângulos VXB e VYE são semelhantes, logo podemos escrever

$$\frac{VX}{VY} = \frac{XB}{YE} = \frac{VB}{VE} = k\,.$$

Tendo em vista que os triângulos VXB e VYE são retângulos em X e Y, respectivamente, segue que $VX = H$ e $VY = h$, logo $k = VX/VY = H/h$, portanto os triângulos ABC e DEF são semelhantes e sua constante de proporcionalidade é dada por H/h.

Com base nesta análise podemos agora determinar uma relação entre as áreas da base e da secção. Como os triângulos ABC e DEF são semelhantes, temos que todos os segmentos opostos ao mesmo ângulo destes triângulos são proporcionais e a razão da proporção será dada por H/h. Seja h_1 a altura relativa a base BC do triângulo ABC e h_2 a altura relativa a base EF do triângulo DEF. As áreas de ABC e DEF satisfazem

$$\frac{A_{ABC}}{A_{DEF}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h_1}{\frac{1}{2}\cdot EF\cdot h_2} \quad\Rightarrow\quad \frac{A_{ABC}}{A_{DEF}} = \frac{BC\cdot h_1}{EF\cdot h_2}$$

e sabemos que $BC/EF = h_1/h_2 = H/h$, então,

$$\frac{\mathrm{A}_{\mathrm{ABC}}}{\mathrm{A}_{\mathrm{DEF}}} = \frac{H}{h}\cdot\frac{H}{h} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{ABC}}}{\mathrm{A}_{\mathrm{DEF}}} = \left(\frac{H}{h}\right)^2,$$

como queríamos demonstrar.

Com estes argumentos podemos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 5. *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura possuem o mesmo volume.*

Demonstração:

Consideremos duas pirâmides de mesma base triangular ABC, mesma altura H e vértices V_1 e V_2 (iremos considerar a base triangular para uma simplificação no desenho, pois a razão entre áreas de figuras semelhantes é sempre o quadrado da razão de semelhança).

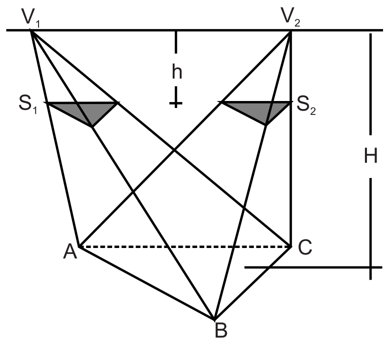

Figura 11: Volumes iguais

As secções S_1 e S_2 são obtidas quando passamos um plano paralelo à base ABC, a uma altura h dos vértices. Observe que estas secções possuem a mesma área, pois

$$\frac{A_{ABC}}{S_1} = \frac{A_{ABC}}{S_2} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Rightarrow S_1 = S_2.$$

Pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que as pirâmides possuem o mesmo volume. $\square$

Com esta análise podemos perceber que o vértice de uma pirâmide pode deslocar-se sobre um plano paralelo à base e seu volume não será alterado.

Teorema 6. *O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto de sua altura pela área da base.*

Demonstração:

Consideremos um prisma triangular de base ABC e a altura h. O volume deste prisma é dado por $V = A_{ABC} \cdot h$.

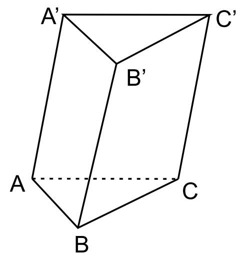

Figura 12: Prisma

Este prisma pode ser dividido em três pirâmides triangulares, conforme a figura abaixo:

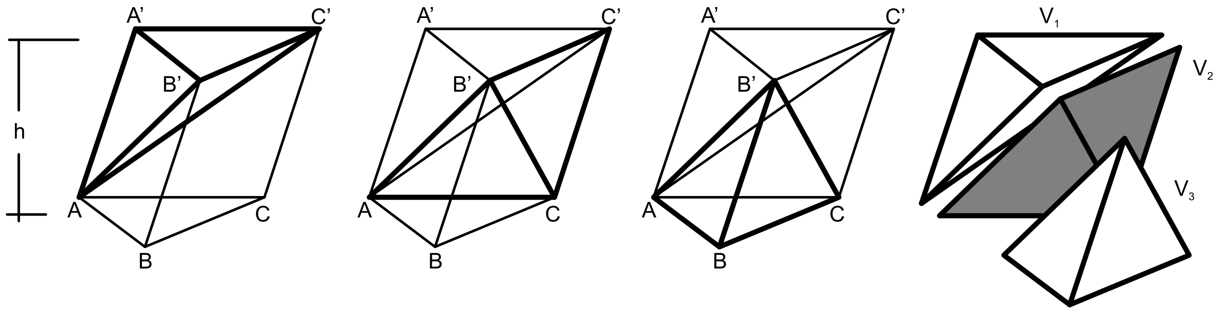

Figura 13: Partição do prisma em pirâmides

Sabemos que em um prisma as bases paralelas possuem a mesma área, logo, $A_{ABC} = A_{A'B'C'}$. É fácil ver que o volume da pirâmide cujo vértice é A e base é $A'B'C'$ é igual ao volume da pirâmide cujo vértice é B' e base é ABC, pois possuem a mesma base e a mesma altura, denotaremos por $A - A'B'C'$ a pirâmide cujo vértice é A e base é $A'B'C'$. Observe que as pirâmides $A' - AB'C'$ e $C - AB'C'$, tem o mesmo volume, pois as suas bases e suas alturas são iguais, mas a pirâmide $A' - AB'C'$ é a mesma pirâmide $A - A'B'C'$, logo o prisma foi dividido em três pirâmides triangulares que possuem o mesmo volume, então:

$$V_{\text{prisma}} = 3 \cdot V_{\text{pirâmide}} = A_{ABC} \cdot h \quad \Rightarrow \quad V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{ABC} \cdot h \qquad \square$$

Teorema 7. *O volume de uma pirâmide qualquer é um terço do produto de sua altura pela da área da base.*

Demonstração:

Basta observar que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Esta divisão é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide, como na figura a seguir.

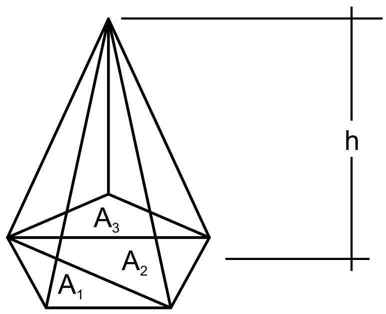

Figura 14: Volume de uma pirâmide qualquer

Suponha que a altura da pirâmide seja h e que sua base, de área A, tenha sido dividida em n triângulos de áreas $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$. O volume da pirâmide original será dado pelo somatório dos volumes das pirâmides triangulares de bases $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$. Logo,

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + ... + \frac{1}{3}A_{\mathrm{n}}h \\ = & \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_{\mathrm{n}})h \\ = & \frac{1}{3}Ah. \end{aligned}$$ □

6 O Volume de um Cone

Definição 4. *Consideremos uma figura plana fechada situada em um plano α e um ponto V fora de α. Chama-se* ***cone*** *à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V, denominado* ***vértice do cone****, e a outra na figura plana, denominada* ***base do cone****.*

Um cone, cuja base é um círculo será denominado *cone circular*, veja a figura 15.

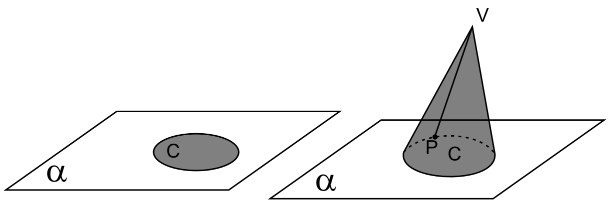

Figura 15: Cone Circular

Os cones podem ser classificados em retos, quando o seu eixo central é perpendicular ao plano que contém a base, ou oblíquos, caso contrário, conforme a figura abaixo:

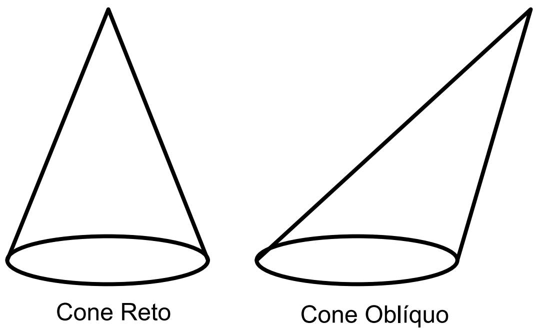

Figura 16: Tipos de cones

Os elementos principais de um cone circular reto são: geratriz (g), altura (h) e o raio da base (r). Quando um cone reto possui a geratriz igual ao diâmetro da base ele será chamado de *cone equilátero*.

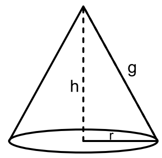

Figura 17: Elementos de um cone

Teorema 8. *O volume de um cone é um terço do produto de sua altura pela área da base.*

Demonstração:

Para demonstrar este fato vamos, novamente, utilizar o Princípio de Cavalieri. Dado um cone com altura H e área da base A, consideremos uma pirâmide qualquer com a mesma altura e mesma área da base. A figura abaixo nos mostra um possível esboço da situação, note que a base da pirâmide e a base do cone estão em um mesmo plano.

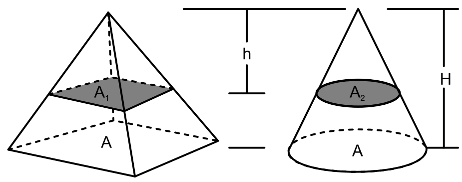

Figura 18: Volume do cone

Se um plano paralelo ao plano que contém as bases intersectar os sólidos a uma altura h dos vértices destes sólidos, obteremos figuras de áreas A_1 e A_2.

As regiões A e A_2 são circunferências de raios R e r, respectivamente, ver figura 19.

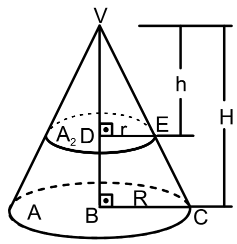

Figura 19: Razões entre as áreas

Traçando a perpendicular VB no cone, obtemos os triângulos VBC e VDE semelhantes, assim, $R/r = H/h$. Então o quociente entre estas áreas é

$$\frac{A}{A_2} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{H}{h}\right)^2.$$

Portanto,

$$\frac{A}{A_1} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \frac{A}{A_2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2.$$

Logo, pelo Princípio de Cavalieri, os volumes dos sólidos são iguais, isto é,
$V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{cone}} = Ah/3$. □

Definição 5. *Considere um cone reto de altura H e raio R e um plano que secciona este cone a uma altura h da base do cone. O plano irá determinar dois sólidos, um cone de altura $(H - h)$ e raio r e o outro sólido será denominado **tronco de cone** de raios R e r e altura h, conforme a figura abaixo.*

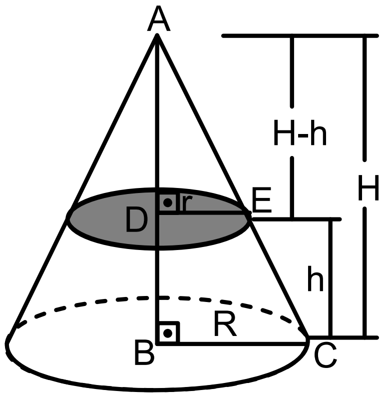

Figura 20: Tronco de cone

Observando a figura acima, temos que os triângulos ABC e ADE são semelhantes, portanto, podemos escrever

$$\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r} \quad \Rightarrow \quad Hr = HR - hR \quad \Rightarrow$$

$$Hr - HR = -hR \quad \Rightarrow \quad H(r - R) = -hR \quad \Rightarrow \quad H = \frac{hR}{R - r}.$$

Portanto, se quisermos determinar o volume de um tronco de cone reto, basta subtrair do cone de raio R e altura H um cone de raio r e altura $H - h$, logo,

$$
\begin{aligned}
V_{\text{tronco}} = & \ V_{\text{cone(R)}} - V_{\text{cone(r)}} \\
= & \ \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h) = \frac{\pi}{3}(R^2 H - r^2 H + r^2 h) \\
= & \ \frac{\pi}{3}[(R^2 - r^2)H + r^2 h] = \frac{\pi}{3}[(R^2 - r^2)\frac{hR}{R-r} + r^2 h] \\
= & \ \frac{\pi}{3}[(R+r)(R-r)\frac{hR}{R-r} + r^2 h] = \frac{\pi}{3}[(R+r)hR + r^2 h] \\
= & \ \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2).
\end{aligned}
$$

O mesmo raciocínio pode ser feito com uma pirâmide reta, para se obter uma expressão que determina o volume do tronco de pirâmide.

7 O Volume de uma Esfera

Definição 6. *Uma* ***esfera*** *é formada pelo conjunto de pontos do espaço que equidistam de um ponto dado, denominado centro da esfera. A distância entre um ponto P da esfera e o* ***centro da esfera*** *é chamada de* ***raio da esfera****.*

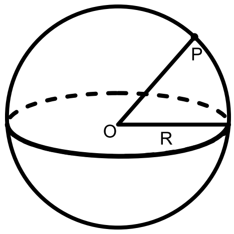

Figura 21: Esfera

Considere um plano qualquer que secciona uma esfera de raio R a uma distância h do seu centro.

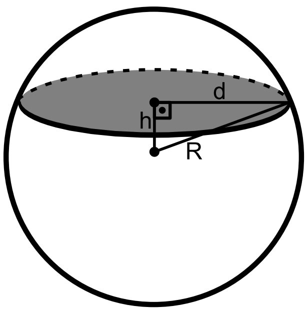

Figura 22: Área da secção

Para determinarmos a área da secção basta conhecermos o raio da circunferência que foi formada. Este raio é facilmente determinado, pois conhecemos o raio R da esfera e a distância h do centro da esfera ao centro da circunferência. Pelo teorema de Pitágoras, temos que

$$R^2 = h^2 + d^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = R^2 - h^2.$$

Então, a área da secção será dada por $A_S = \pi(R^2 - h^2)$.

Teorema 9. *O volume de uma esfera de raio R é $4\pi R^3/3$.*

Demonstração:

Consideremos um cilindro equilátero de raio R, cuja base está contida em um plano α. É possível construir dois cones de raio R e altura R contidos no cilindro equilátero e com bases coincidindo com as bases do cilindro, como indica a figura abaixo. Consideremos, então, uma esfera de raio R, tangente ao plano α.

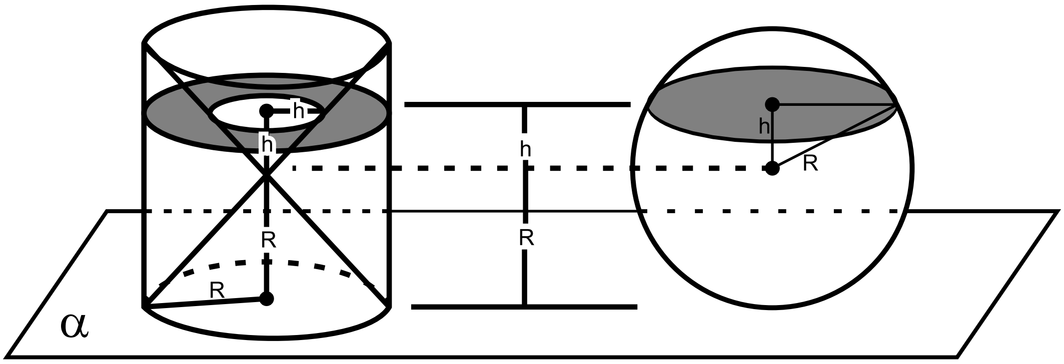

Figura 23: Volume da esfera

Agora, observemos as áreas determinadas por um plano qualquer paralelo ao plano α que intersecta os sólidos a uma altura $R+h$, de acordo com a figura acima. Existe uma relação entre a área da secção determinada na esfera e a área da coroa circular determinada entre o cilindro e o cone. A área da secção da esfera, como vimos, é dada por $A_{\mathrm{S}} = \pi(R^2 - h^2)$. Já a área da coroa circular é fácil de se determinar, pois é a diferença entre um círculo de raio R e um círculo de raio h, pois a geratriz dos cones formam um ângulo de 45º com o plano que contém a base, logo a área da coroa é dada por

$$A_{\text{coroa}} = \pi R^2 - \pi h^2 = \pi(R^2 - h^2).$$

Como o plano paralelo ao plano α determina secções que possuem a mesma área e as alturas dos sólidos são as mesmas, podemos afirmar, pelo Príncipio de Cavalieri, que os volumes dos sólidos são iguais, ou seja,

$$
\begin{aligned}
V_{\text{esfera}} &= V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} \\
&= \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R \\
&= 2\pi R^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi R^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Tendo em vista o volume da esfera, o Princípio de Cavalieri nos permite, ainda, obter expressões para os volumes de algumas partes da esfera, como uma semi-esfera, uma cunha esférica, um segmento esférico ou uma calota esférica.

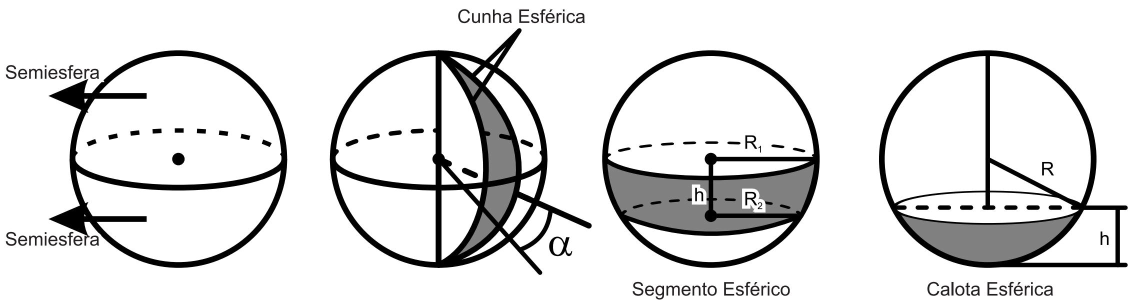

Figura 24: Partes da esfera

7.1 O Volume de Cunha esférica

Se um semicírculo girar em torno do seu diâmetro um ângulo α, onde $0° < \alpha \leq 360°$, ele gera um sólido que é chamado *cunha esférica*. Note que o volume da cunha esférica é proporcional ao ângulo α.

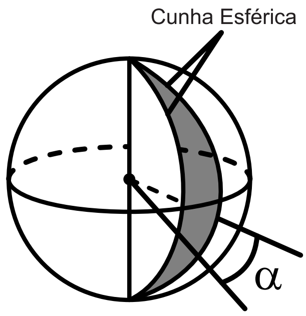

Figura 25: Cunha esférica

Assim,

$$\frac{V_{\text{esfera}}}{V_{\text{cunha}}} = \frac{360^{\text{o}}}{\alpha} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{\alpha\pi R^3}{270^{\circ}}\,.$$

Caso o ângulo α seja dado em radianos o volume da cunha é

$$\frac{V_{\text{esfera}}}{V_{\text{cunha}}} = \frac{2\pi}{\alpha} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{2}{3}R^3\alpha\,.$$

7.2 O Volume de um Segmento Esférico

Definição 7. ***Segmento esférico*** *é a região limitada por dois planos paralelos que seccionam uma esfera, gerando um sólido com duas bases circulares de raios R_1 e R_2.*

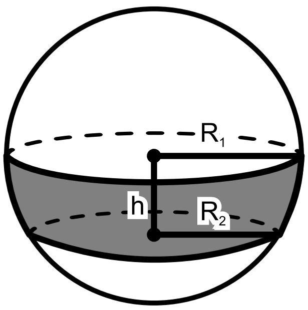

Figura 26: Segmento esférico

Teorema 10. *O volume de um segmento esférico com bases circulares de raios R e r e altura H é dado por $V_{\text{se}} = \dfrac{\pi H}{3}(2R^2 + r^2)$.*

Demonstração:

Para determinar o volume de um segmento esférico, utilizaremos novamente a ideia da demonstração do Teorema 9, ou seja, considere um cilindro reto de altura $2R$ e raio da base R onde inseriremos dois cones retos de altura R, conforme a figura abaixo. Considere também uma esfera de raio R tangente ao plano que contém a base do cilindro.

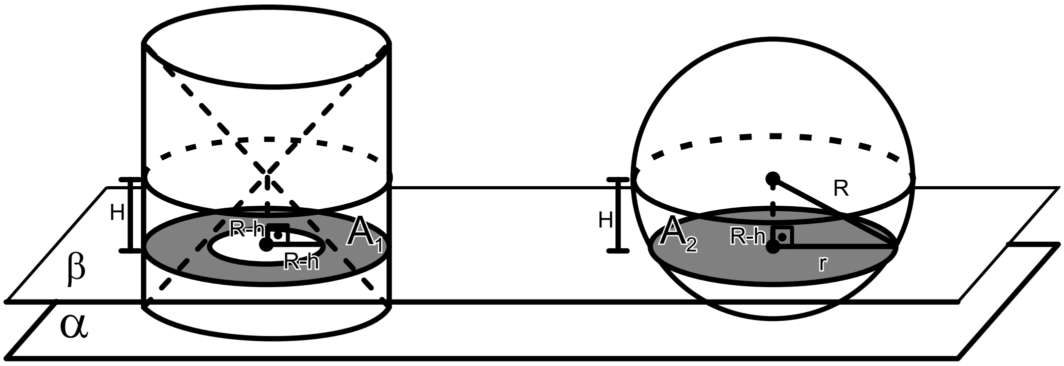

Figura 27: Volume do segmento esférico

Agora, consideremos um plano que seja paralelo ao plano que contém a base do cilindro e que intersecta os dois sólidos a uma altura h, onde $h < R$. Vamos comparar as áreas da secção determinada na esfera e da coroa circular que é determinada no cilindro.

A área da secção é dada por $A_2 = \pi r^2$, como $R^2 = (R-h)^2 + r^2$, temos que

$$\begin{aligned} A_2 = &\ \pi[R^2 - (R-h)^2] \\ = &\ \pi(R^2 - R^2 + 2Rh - h^2) \\ = &\ \pi(2Rh - h^2) \\ = &\ \pi h(2R - h). \end{aligned}$$

A área da coroa circular determinada no cilindro é dada por

$$\begin{aligned} A_1 = &\ \pi R^2 \ - \ \pi(R-h)^2 \\ = &\ \pi R^2 \ - \ \pi R^2 \ + \ 2\pi R h \ - \ \pi h^2 \\ = &\ \pi h(2R-h). \end{aligned}$$

Deste modo, a área da secção A_2 e a área da coroa circular A_1 são iguais, qualquer que seja h. Logo, os volumes dos sólidos também são iguais pelo Princípio de Cavalieri.

Denotaremos o volume do segmento esférico por V_{se}, o volume do cilindro de raio R e altura H por V_{cil} e o volume do cone de raio H e altura H por V_{cone}. Assim, teremos

$$\begin{aligned} V_{\text{se}} = &\ V_{\text{cil}} \ - \ V_{\text{cone}} \\ = &\ \pi R^2 H \ - \ \frac{1}{3}\pi H^2 H \end{aligned}$$

mas, $H = R - h$,

$$\begin{aligned} V_{\text{se}} = &\ \pi R^2(R-h) \ - \ \frac{1}{3}\pi(R-h)^2(R-h) \\ = &\ \frac{1}{3}\pi(R-h)[3R^2 - (R-h)^2] \\ = &\ \frac{1}{3}\pi(R-h)[2R^2 \ + \ R^2 - (R-h)^2]. \end{aligned}$$

Como $R^2 = (R-h)^2 + r^2$ e $H = R - h$ tem-se,

$$V_{\text{se}} = \frac{1}{3}\pi H(2R^2 + r^2). \qquad \square$$

Obemos uma particular verificação desta expressão observando que um segmento esférico em que $r = 0$ e R é o raio da esfera é exatamente uma semi- esfera. Logo, fazendo $r = 0$ e $H = R$ nesta última equação, podemos obter o volume da semi-esfera como:

$$V_{\text{se}} = \frac{1}{3}\pi R(2R^2 + 0^2) = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

que é exatamente metade do volume da esfera, já calculado.

7.3 O Volume da Calota Esférica

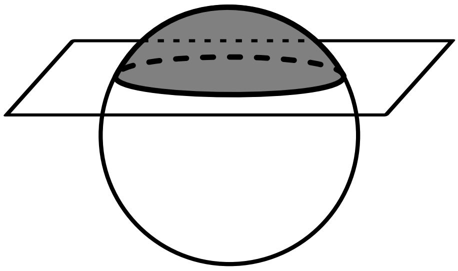

Figura 28: Calota esférica

Definição 8. ***Calota esférica*** *é o sólido gerado a obtido de uma esfera ao ser seccionada por um plano.*

O volume da calota esférica pode ser obtido observando que uma semiesfera pode ser vista como união da calota com um segmento esférico, cujo volume obtivemos na seção anterior.

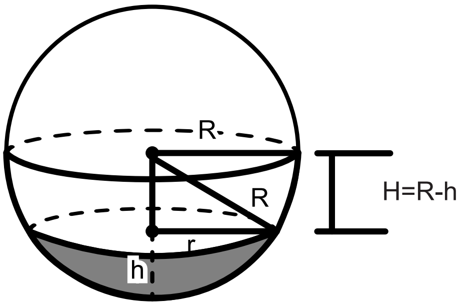

Figura 29: Volume da calota esférica

Assim se, subtrairmos do volume da semi-esfera de raio R o volume do segmento esférico de altura H e bases circulares de raios R e r, obtemos

$$V_{\text{calota}} = V_{\text{semi-esfera}} \; - \; V_{\text{se}}$$
$$V_{\text{calota}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \; - \; \frac{1}{3}\pi H(2R^2 + r^2)$$

. Como $H = R - h$, temos

$$V_{\text{calota}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \; - \; \frac{1}{3}\pi(R-h)(2R^2 + r^2)$$
$$V_{\text{calota}} = \frac{\pi}{3}[2R^2 h - r^2(R-h)].$$

Esta expressão depende do raio da calota e do raio da esfera, além da altura da calota, e pode ser ainda simplificada, para eliminar uma destas variáveis, se observarmos que

$$R^2 = (R-h)^2 + r^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad (2R-h)h = r^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} V_{\text{calota}} = \; & \frac{\pi}{3}[2R^2 h - (2R-h)h(R-h)] \\ = \; & \frac{\pi h}{3}[2R^2 - 2R^2 + 2Rh + Rh - h^2] \\ = \; & \frac{\pi h^2}{3}(3R - h). \end{aligned}$$

Agora, esta expressão fica em função apenas da altura da calota e do raio da esfera. Podemos obter uma expressão em que as variáveis são a altura e o raio da circunferência da calota, da seguinte maneira.

Então, pela expressão que já encontramos,

$$\begin{aligned} V_{\text{calota}} = \; & \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) \\ = \; & \frac{\pi h^2}{6}(6R - 2h) \\ = \; & \frac{\pi h}{6}(6Rh - 2h^2) \\ = \; & \frac{\pi h}{6}(6Rh - 3h^2 + h^2) \\ = \; & \frac{\pi h}{6}[3(2Rh - h^2) + h^2] \\ = \; & \frac{\pi h}{6}[3(R^2 - R^2 + 2Rh - h^2) + h^2] \\ = \; & \frac{\pi h}{6}[3(R^2 - (R-h)^2) + h^2]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$R^2 = (R-h)^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = R^2 - (R-h)^2.$$

Assim,

$$V_{\text{calota}} = \frac{\pi h}{6}[3r^2 + h^2].$$

Escolhemos obter o volume da calota esférica a partir do volume do segmento esférico, mas poderíamos ter feito o caminho oposto. Ou seja, se sabemos calcular o volume de uma calota esférica, podemos calcular, de uma maneira geral, o volume de um segmento esférico de altura $H = R - h_1 - h_2$ e raios R_1 e R_2, onde $R_1 < R_2$. Basta obter a diferença entre o volume de uma calota esférica de altura h_2 e raio R_2 e uma calota esférica de altura h_1 e raio R_1.

Uma outra maneira de encontrar o volume de uma calota esférica de uma forma mais direta, sem necessitar do volume do segmento esférico, é utilizar diretamente o Princípio de Cavalieri com a mesma construção utilizada para o cálculo do volume da esfera, o que envolve a comparação da calota esférica de raio r e altura h, com um tronco de cone de altura h e raios R e $R-h$, como indica a figura a seguir.

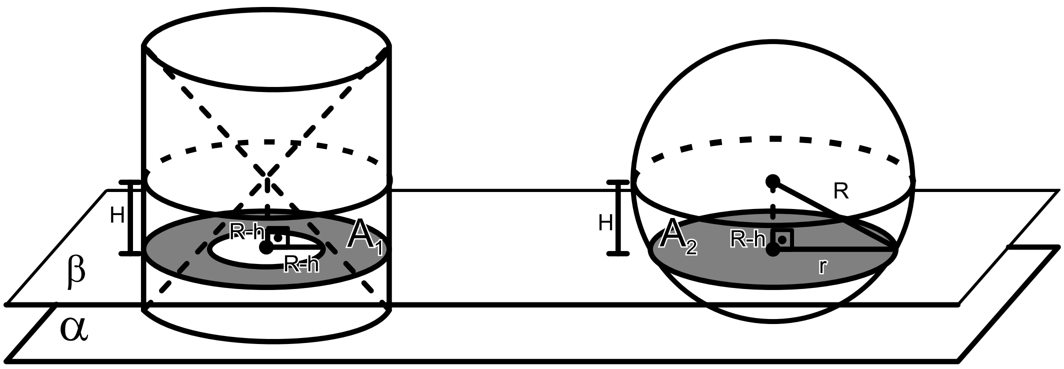

Figura 30: Equivalência entre as áreas

De acordo com a figura acima sabemos que $A_1 = A_2$, como as secções feitas a uma mesma altura proporcionam secções planas de mesma área, pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que o volume da calota esférica é igual ao volume do cilindro de altura h e raio R subtraído do tronco de cone de altura h e raios R e $R-h$.

$$\begin{aligned} V_{\text{calota}} &= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}[R^2 + R(R-h) + (R-h)^2] \\ &= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(3R^2 - 3Rh + h^2) \\ &= \frac{\pi h^2}{3}(3R-h)\,. \end{aligned}$$

8 Outras Aplicações

Nesta seção apresentamos algumas aplicações interessantes do Princípio de Cavalieri, que tornam acessíveis ao estudante do ensino médio alguns resultados usualmente mais associados ao cálculo integral.

As aplicações a seguir assumem um conhecimento das curvas cônicas e suas representações cartesianas.

8.1 Área da elipse

Consideremos uma elipse de semi-eixos a e b, com $a \geq b$. Podemos escolher eixos cartesianos de modo que a equação cartesiana da elipse seja dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ .$$

Utilizando a versão bidimensional do Princípio de Cavalieri, vamos comparar esta elipse com uma circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = a^2$.

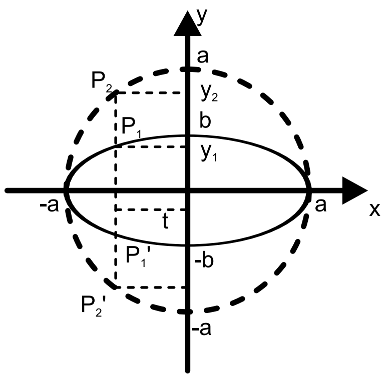

Figura 31: Elipse e Circunferência

De acordo com Cavalieri, *se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.*

Tendo como base o exposto acima traçaremos retas paralelas ao eixo Oy. A reta $x = t$, para cada t fixo em $(-a, a)$, intersecta a circunferência em P_2 e $P_2^{'}$ e intersecta a elipse em P_1 e $P_1^{'}$.

Para obtermos $P_1P_1^{'}$ e $P_2P_2^{'}$ observamos que P_1 e $P_1^{'}$ e P_2 e $P_2^{'}$ são simétricos em relação à reta $y = 0$, logo $P_1P_1^{'} = 2y_1$ e $P_2P_2^{'} = 2y_2$.

Como P_1 pertence à elipse, temos para cada $t \in (-a, a)$,

$$\frac{t^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1^2 = b^2\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right).$$

Como P_2 pertence à circunferência, temos

$$t^2 + y_2^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad y_2^2 = a^2 - t^2.$$

Assim, o quociente entre y_1^2 e y_2^2 é

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{b^2\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)}{a^2 - t^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

onde obtemos

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}.$$

Logo, para qualquer $-a < t < a$, temos

$$\frac{P_1P_1^{'}}{P_2P_2^{'}} = \frac{2y_1}{2y_2} = \frac{b}{a}.$$

Pelo Princípio de Cavalieri, a razão entre as áreas obedece a mesma proporção. Logo,

$$\frac{A_{\mathrm{E}}}{A_{\mathrm{C}}} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{\mathrm{E}}}{\pi a^2} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad A_{\mathrm{E}} = \pi ab,$$

onde A_E e A_C indicam as áreas da elipse e da circunferência, respectivamente.

8.2 Volume do elipsóide

O volume do elipsóide também pode ser obtido atráves do Princípio de Cavalieri.

Consideremos um elipsóide de semi-eixos a, b e c, com $a \geq b \geq c$. Podemos escolher eixos coordenados de maneira que a equação cartesiana do elipsóide seja

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

e a esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Traçaremos planos paralelos ao plano xOz no sistema de eixos $OXYZ$. O plano irá determinar na esfera uma secção que será uma circunferência de raio r e no elipsóide uma elipse de semi-eixos x_1 e z_1, de acordo com a figura abaixo:

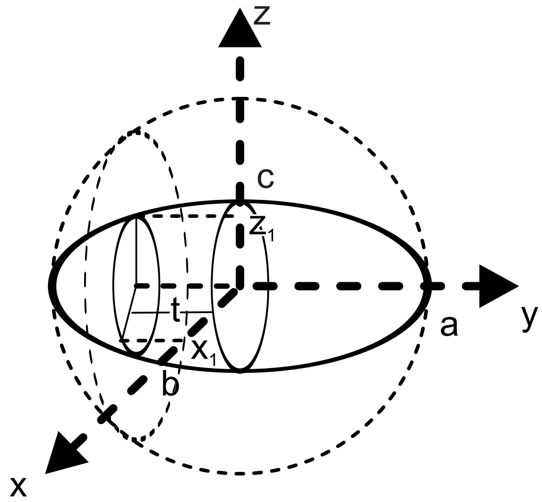

Figura 32: Elipsóide e Esfera

Se $y = t$ e $z = 0$,

$$\frac{x_1^2}{b^2} + \frac{t^2}{a^2} + \frac{0^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1^2}{b^2} = 1 - \frac{t^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)}.$$

Se $y = t$ e $x = 0$

$$\frac{0^2}{b^2} + \frac{t^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1^2}{c^2} = 1 - \frac{t^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad z_1 = \sqrt{c^2\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)}.$$

Como vimos, a área da elipse é

$$A_E = \pi x_1 z_1 \text{ e } A_C = \pi r^2,$$

como $a^2 = r^2 + t^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - t^2 = r^2$. Desta forma

$$A_C = \pi(a^2 - t^2).$$

Assim, o quociente entre as áreas da elipse e da circunferência é

$$\begin{aligned}
\frac{A_E}{A_C} &= \frac{\pi x_1 z_1}{\pi(a^2 - t^2)} \\
&= \frac{1}{(a^2 - t^2)} \cdot \sqrt{b^2\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)} \cdot \sqrt{c^2\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)} \\
&= \frac{1}{(a^2 - t^2)} \cdot \frac{bc(a^2 - t^2)}{a^2} \\
&= \frac{bc}{a^2}.
\end{aligned}$$

Pelo Princípio de Cavalieri temos que a razão entre os volumes do elipsóide e da esfera é esta mesma constante. Logo,

$$\frac{V_{\text{elipsóide}}}{V_{\text{esfera}}} = \frac{A_E}{A_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{\text{elipsóide}}}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{bc}{a^2} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{elipsóide}} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

8.3 Volume de uma calota parabólica

Definição 9. ***Parabolóide de revolução*** *é uma superfície obtida através da rotação de uma parábola ao redor de seu eixo.*

Vamos determinar o volume delimitado por um parabolóide de revolução e por um plano perpendicular ao seu eixo, este sólido será denominado **calota parabólica**. Para isso consideremos, no plano cartesiano, uma parábola simétrica em relação ao eixo y, com vértice na origem e passando pelo ponto (a, b).

Dada uma parábola qualquer, é sempre possível escolher os eixos coordenados, de forma que a parábola seja representada por uma equação da forma $y = kx^2$.

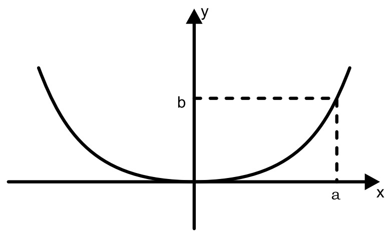

Figura 33: Parábola

Como o ponto (a, b) pertence à parábola, temos

$$b = ka^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{b}{a^2}.$$

Logo a equação da parábola que contém o ponto (a, b) e tem vértice na origem é $y = bx^2/a^2$.

Para calcular o volume da calota parabólica de revolução de raio a e altura b, vamos compará-lo com um prisma triangular de altura $\pi a^2/b$ em que a base é um triângulo retângulo e isósceles de catetos b, como ilustra a figura a seguir.

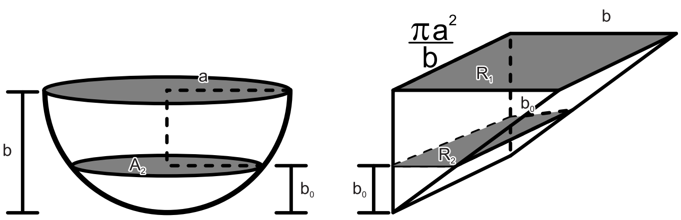

Figura 34: Volume da calota parabólica

Considerando a secção plana do parabolóide e do prisma a uma altura b_0, $0 \leq b_0 \leq b$, temos que o plano irá determinar no parabolóide uma circunferência de raio $a \cdot \sqrt{b_0/b}$, pois, o ponto $\left(a \cdot \sqrt{b_0/b}, b_0\right)$ pertence à parábola e, no prisma, um retângulo de lados $\pi a^2/b$ e b_0. Desta forma, a área da circunferência é $A_2 = \pi a^2 b_0/b$, que coincide com a área do retângulo.

Como as secções tem áreas iguais concluímos, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume da calota parabólica é igual ao volume do prisma triangular, ou seja,

$$V_{\text{parab.}} = V_{\text{prisma}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \frac{\pi a^2}{b} = \frac{\pi a^2 b}{2}. \tag{4}$$

Um exemplo interessante de utilização desse resultado pode ser o seguinte problema encontrado em uma avaliação de Cálculo Diferencial e Integral.

Problema: *Andando pelo quintal, um fazendeiro encontrou uma antena parabólica que tinha sido descartada e resolveu utilizá-la para colocar alguns grãos de café que havia colhido. Para isso, arranjou um suporte de maneira que a grande tigela parabólica ficasse com a boca na posição horizontal e voltada para cima. Seu desafio, agora, é calcular a capacidade desse recepiente , em litros de café (em grão), quando cheio até a boca e passada uma régua para nivelar o café com a boca do recipiente. A antena possui um diâmetro de* $2\,m$ *e a altura do vértice do parabolóide ao plano da boca, é de* $0,5\,m$.

A solução deste problema é uma aplicação imediata da equação (4).

8.4 Área de um segmento parabólico

Nesta seção vamos utilizar o Princípio de Cavalieri para calcular a área delimitada por um segmento de parábola. Como aplicação, demonstraremos um notável teorema de Arquimedes, que relaciona a área de um segmento da parábola à área do maior triângulo inscrito nesse segmento.

Definição 10. *Considere uma parábola e uma reta secante a ela. Definimos como* ***segmento de parábola*** *a região delimitada pela curva e pela reta.*

Para calcular a área do segmento de parábola, consideraremos, sem perda de generalidade, um sistema de coordenadas em que o eixo Ox é tangente à parábola em seu vértice e o eixo Oy coincide com o eixo da parábola, orientado no sentido da concavidade. Além disso, a unidade de comprimento pode ser escolhida de modo que a parábola passe pelo ponto (1, 1), de forma que a parábola é descrita pela equação $y = x^2$ (basta escolher como (1, 1) o ponto, fora da origem, em que a parábola intercepta a bissetriz dos quadrantes ímpares). Entretanto o desenvolvimento a seguir pode ser facilmente estendido para qualquer parábola da forma $y = kx^2$.

Inicialmente calcularemos a área da região que fica entre o eixo Ox e a parábola como descrito a seguir.

Proposição 1. *Seja t um número real qualquer, a área delimitada pelo eixo x e pela reta $x = t$ abaixo da curva $y = x^2$ é dada por* $\left|\dfrac{t^3}{3}\right|$.

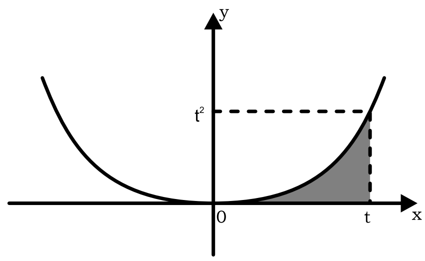

Figura 35: Área abaixo da curva

Demonstração:

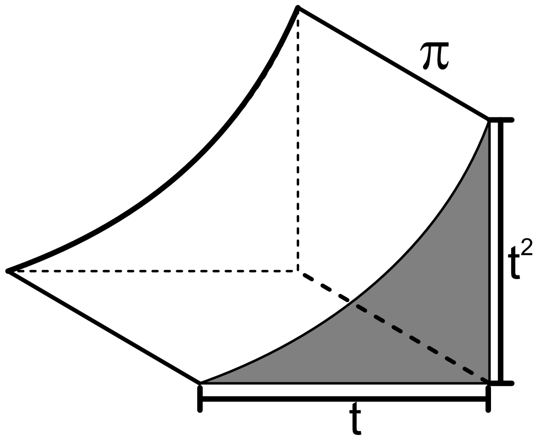

Figura 36: Sólido de altura π

Para calcular a área $A(t)$ abaixo da curva $y = x^2$, vamos construir um sólido com bases paralelas e iguais e distando π uma da outra, de acordo com figura abaixo.

O volume deste sólido é a área da base multiplicada por π, pois suas bases são paralelas e iguais.

Por outro lado, comparando o sólido com um cone de altura t e raio da base t, como na figura a seguir, observamos que quando planos paralelos à base do cone intersectam os sólidos, eles determinam secções que possuem a mesma área. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, estes dois sólidos possuem o mesmo volume. Assim,

$$V = V_{\text{cone}} \quad \Rightarrow \quad A(t) \cdot \pi = \frac{1}{3}\pi t^2 \cdot t \quad \Rightarrow \quad A(t) = \frac{t^3}{3}. \qquad \square$$

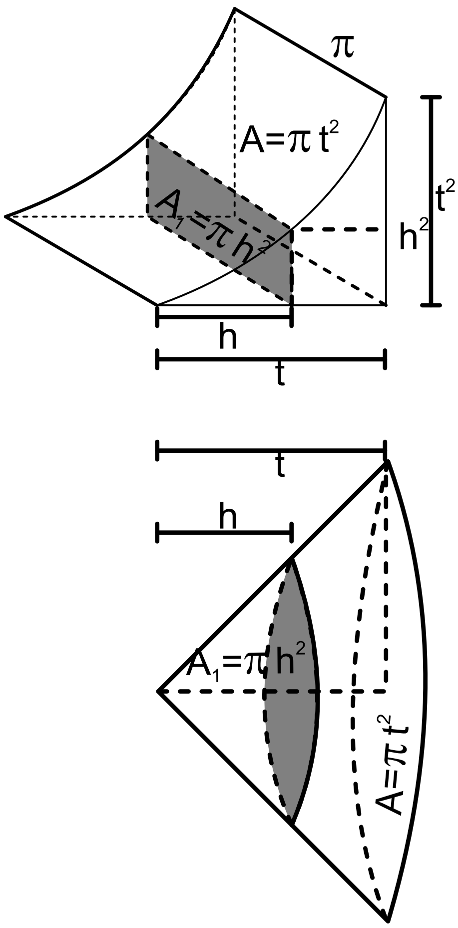

Figura 37: Comparando os sólidos

Uma consequência deste resultado é que a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$, pelo eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, com $a < b$, é dada por $(b^3 - a^3)/3$.

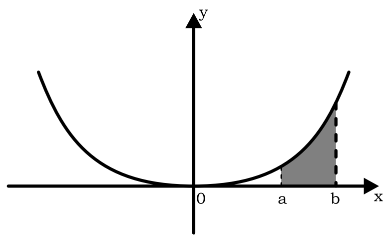

Figura 38: Área abaixo da curva no intervalo $[a, b]$

Note que este resultado continua sendo válido se $a < 0$.

Teorema 11. *A área de um segmento de parábola cujos extremos são os pontos $A(a, a^2)$ e $B(b, b^2)$ é dada por $(b-a)^3/6$.*

Demonstração:

A área do segmento de parábola é dada pela diferença entre a área do trapézio $ABCD$ e a área abaixo da parábola $y = x^2$ e acima do eixo Ox entre as abscissas a e b.

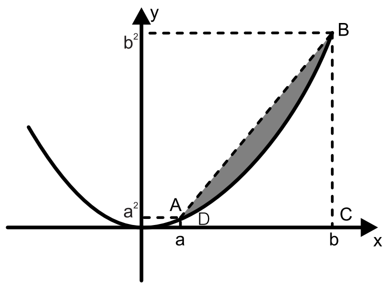

Figura 39: Área do segmento da Parábola

Assim, denotando por A_{ABCD} a área do trapézio $ABCD$, temos

$$\begin{aligned} A = & \quad A_{\text{ABCD}} - \frac{b^3 - a^3}{3} \\ = & \quad \frac{1}{2}(b^2 + a^2)(b - a) - \frac{b^3 - a^3}{3} \\ = & \quad \frac{b^3 - ab^2 + a^2b - a^3}{2} - \frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3} \\ = & \quad \frac{3b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - 3a^3 - 2b^3 + 2a^3}{6} \\ = & \quad \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{6} \\ = & \quad \frac{(b-a)^3}{6}. \end{aligned}$$ $\square$

Para demonstrar o Teorema de Arquimedes utilizaremos ainda o seguinte resultado, a respeito do triângulo de área máxima inscrito em um segmento de parábola.

Proposição 2. *Considere um segmento de parábola cujos pontos extremos são $A(a, a^2)$ e $B(b, b^2)$, com $a < b$. O triângulo de maior área inscrito neste segmento e com dois de seus vértices nos pontos A e B é tal que a abscissa do terceiro vértice, C, é dada pela média aritmética das abscissas dos pontos A e B.*

Demonstração:

Considere os seguintes pontos

$$A(a, a^2); B(b, b^2); C(t, t^2); D(a, 0); E(b, 0) \text{ e } F(t, 0),$$

onde t é um número real que pertence ao intervalo (a, b). Queremos mostrar que o triângulo ABC possui área máxima quando $t = (b + a)/2$. A figura abaixo mostra um possível esboço da situação.

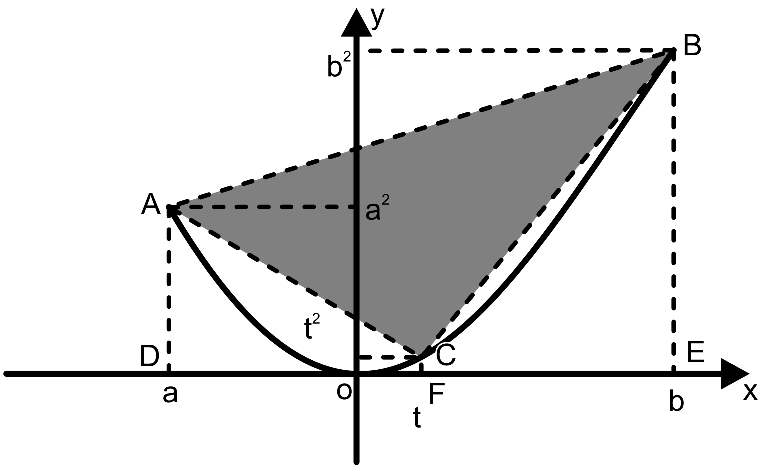

Figura 40: Maior triângulo inscrito

A área do triângulo ABC, que denotaremos por $A(t)$, é dada pela diferença entre a área do trapézio $ABED$ e as áreas dos trapézios $ACFD$ e $BCFE$.

$$
\begin{aligned}
A(t) = \;& A_{\text{ABED}} \; - \; A_{ACFD} \; - \; A_{BCFE} \\
= \;& \frac{1}{2}(a^2+b^2)(b-a) \; - \; \frac{1}{2}(a^2+t^2)(t-a) \; - \; \frac{1}{2}(b^2+t^2)(b-t) \\
= \;& \frac{1}{2}\left[(a^2+b^2)(b-a)-(a^2+t^2)(t-a)-(b^2+t^2)(b-t)\right] \\
= \;& \frac{1}{2}(a^2b-a^3+b^3-ab^2-a^2t+a^3-t^3+at^2-b^3+b^2t-bt^2+t^3) \\
= \;& \frac{1}{2}[a^2b-ab^2+(b^2-a^2)t+(a-b)t^2] \\
= \;& \frac{1}{2}[-(b-a)t^2+(b^2-a^2)t+a^2b-ab^2] \,.
\end{aligned}
$$

Como A(t) é quadrática em t e o coeficiente de t^2 é negativo, a área máxima é atingida quando t é o ponto médio das raízes de $A(t)$, ou seja,

$$
t = \frac{-(b^2-a^2)}{2(a-b)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \,. \qquad \square
$$

Portanto, o triângulo de área máxima inscrito em um segmento de parábola e com dois dos vértices nos extremos do segmento, possui o terceiro vértice no ponto da parábola cuja abscissa é a média das abscissas dos extremos.

Para este valor de t, obtemos a área máxima do triângulo inscrito

$$
\begin{aligned}
A\left(\frac{b+a}{2}\right) = \;& \frac{1}{2}\left[-(b-a)\left(\frac{b+a}{2}\right)^2+(b^2-a^2)\frac{b+a}{2}+a^2b-ab^2\right] \\
= \;& \frac{1}{2}\left[-(b-a)\frac{(b+a)^2}{4}+\frac{2(b-a)(b+a)^2}{4}+\frac{ab(a-b)4}{4}\right] \\
= \;& \frac{1}{2}\frac{(b-a)}{4}\left[-(b+a)^2+2(b+a)^2-4ab\right] \\
= \;& \frac{(b-a)}{8}[(b+a)^2-4ab] \\
= \;& \frac{(b-a)}{8}(b-a)^2 \\
= \;& \frac{(b-a)^3}{8}.
\end{aligned}
$$

Em consequência dos resultados apresentados podemos enunciar o Teorema de Arquimedes.

Teorema de Arquimedes. *A área de um segmento de parábola é igual a* $4/3$ *da área do maior triângulo inscrito neste segmento.*

Demonstração:

Pelo Teorema 11, temos que, para uma particular escolha de eixos coordenados e unidades de comprimento, a área A_{SP}, do segmento de parábola é dada por $(b-a)^3/6$.

De acordo com a Proposição 2 temos que, para a mesma escolha de eixos coordenados e unidades de comprimento, a área A_{T}, do maior triângulo inscrito neste segmento de parábola é dada por $(b-a)^3/8$. Assim, $A_{\mathrm{SP}} = 4A_{\mathrm{T}}/3$. $\square$

9 Conclusão

Acreditamos que, com este enfoque dado à geometria espacial, é possível desenvolver conceitos pouco usuais, mas acessíveis aos estudantes do Ensino Médio.

Uma das motivações para o desenvolvimento desta dissertação, foi a constatação, durante o exercício da docência, do fato de que alguns livros didáticos não explicam de modo satisfatório, por exemplo, o por quê do volume de uma esfera ser calculado usando a expressão $4\pi R^3/3$, ficando a impressão de que a matemática é vista como um conjunto de regras prontas. Diante disto, o estudante atua como um mero expectador, e é estimulado a seguir métodos tradicionais de memorização e repetição, sem associar de forma adequada suas próprias ideias e o que lhe foi apresentado.

Esperamos que as ideias aqui apresentadas possam tornar-se material útil de leitura, que estimule o desenvolvimento de um senso crítico nos estudantes e desperte nos professores um interesse em incorporar os conceitos aqui desenvolvidos em sua prática de ensino, tanto em sala de aula, quanto no direcionamento extra-classe, e estímulo à descoberta, para estudantes mais interessados e curiosos.

Referências

[1] **Boyer, C. B.; Merzbach, U. C.**, *História da Matemática, Tradução da 3º edição americana*, Editora Blucher, 2012.

[2] **Dante, L. R.**, *Matemática, Volume Único*, São Paulo: Ática, 2011.

[3] **Dolce, O; Pompeo, J. N.**, *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9*, 6.ed. São Paulo: Atual, 2005.

[4] **Dolce, O; Pompeo, J. N.**, *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 10*, 6.ed. São Paulo: Atual, 2005.

[5] **Eves, H.** , *Introdução à História da Matemática, tradução Higyno H. Domingues*, Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004.

[6] **Guidorizzi, H. L.**, *Um Curso de Cálculo vol. 1*, 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[7] **Lima, E. L.** , *Medida e Forma em Geometria*, Rio de Janeiro: SBM 1991.

[8] **Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C.**, *A Matemática no Ensino Médio, vol. 2*, 6.ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

[9] **Iezzi, G.; Murakami, C.; Machado, N.**, *Fundamentos de Matemática Elementar, 8: Limites, Derivadas, Noções de Integral*, 6.ed. São Paulo: Atual, 2005.