UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO LEIRIVÂNIO DE SOUSA

O ENSINO DE GEOMETRIA NUMA ESCOLA PÚBLICA DE ENSINO MÉDIO DE FORTALEZA - CE: UM ESTUDO DE CASO

QUIXADÁ – CEARÁ
2018

FRANCISCO LEIRIVÂNIO DE SOUSA

O ENSINO DE GEOMETRIA NUMA ESCOLA PÚBLICA DE ENSINO MÉDIO DE FORTALEZA - CE: UM ESTUDO DE CASO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Pro. Dr. João Luzeilton de Oliveira

QUIXADÁ – CEARÁ

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Sousa, Francisco Leirivânio de .
O ensino de geometria numa escola pública De ensino médio de fortaleza - ce: um estudo de caso [recurso eletrônico] / Francisco Leirivânio de Sousa. - 2018 .
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 97 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Quixadá, 2018 .
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional..
Orientação: Prof. Dr. João Luzeilton de Oliveira.

1. Historia da Matemática. 2. Educação Matemática. 3. Geometria. I. Título.

FRANCISCO LEIRIVÂNIO DE SOUSA

O ENSINO DE GEOMETRIA NUMA ESCOLA PÚBLICA
DE ENSINO MÉDIO DE FORTALEZA - CE: UM ESTUDO DE CASO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática em Rede Nacional.

Aprovada em: 05/10/2018

BANCA EXAMINADORA

Dr. João Luzeilton de Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Dr. Rodrigo Lacerda Carvalho
Universidade Federal do Cariri - UFCA

Dr. Francisco Edisom Eugenio de Sousa
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Dedico aos meus pais
Francisco Ferreira de Sousa (*in memoriam*) e
Leni Rosa de Sousa,
minha esposa Cleidiane Silva Bento de Sousa,
e ao grande Professor e matemático,
Prof. Dr. Elon Lages Lima (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela vida e por sempre está comigo nos momentos mais difíceis dando força e coragem para continuar lutando e acreditando que Nele somos mais que vencedores.

Aos meus pais que sempre incentivaram e torceram por mim dando sempre dentro de suas condições e às vezes até o que estava além para que eu continuasse com meus estudos, meus irmãos em quem sempre nos apoiamos e nos ajudamos para conquistar nossos objetivos.

À minha esposa, Cleidiane Silva Bento de Sousa, companheira em todos os momentos sempre apoiando, incentivando e cobrando quando foi necessário.

Ao professor e orientador desta dissertação: prof. Dr. João Luzeilton bem como demais professores do PROFMAT na FECLESC/UECE, Ulisses Parente, Jobson Oliveira e Tony Melo que também contribuíram muito na minha formação durante o curso de Pós-graduação.

Meus colegas de turma onde cultivamos amizades sinceras todos se ajudando nas dificuldades de estudar para provas e incentivando uns aos outros quando apareciam problemas na vida pessoal.

A todos os amigos e colegas de trabalho pelo apoio, incentivo e ajuda quando se precisa. Fosse na parte com materiais para estudo como nas cobranças e coberturas para a escrita desse trabalho.

Aos meus alunos(filhos e filhas) os quais mesmo sem saber foram fonte de inspiração para o aprimoramento do meu trabalho como professor os quais me permitiram fazer parte de suas vidas não apenas como professor, mas como um amigo e pai.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pela iniciativa do Projeto de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT e ao Professor Dr. Elon Lages Lima, falecido no dia 07.05.2017, que desempenhou um papel muito importante na formação de professores de todo o Brasil e certamente contribuiu muito além de nossas fronteiras territoriais.

A CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de estudos.

"Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência."

(Irene de Albuquerque)

RESUMO

A História da Matemática é inspiradora e contextualiza todo o conhecimento matemático que temos hoje, por isso ela deve ser usada no ensino dessa disciplina. Nesse trabalho temos como foco o ensino de Geometria mostrando como povos desenvolveram esse conhecimento através dos tempos. O conhecimento geométrico começou de modo empírico o qual solucionava problemas particulares de determinada época, depois se desenvolveu uma geometria mais abstrata em que a argumentação lógica era a base, a partir de determinados censos comuns se geravam novos conhecimentos que durante muito tempo foi privilegio de poucos, mas as revoluções sociais sempre lutaram para que todos tivessem direito a educação. Os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades na aprendizagem de Matemática e uma deficiência nos conceitos geométricos. Assim começamos esse trabalho com uma retrospectiva histórica sobre o ensino médio no Brasil, bem como o ensino de Matemática. Para a avaliação sobre esse ensino foram usadas algumas avaliações como PISA, Saeb e SPAECE essas avaliações mostram o perfil dos alunos em Matemática em nível nacional, estadual ou municipal, assim para verificar o nível dos alunos em Geometria de uma determinada escola de Fortaleza-CE a qual sou professor a oito anos, foi realizada uma pesquisa por amostragem com os alunos que se voluntariaram para mostrar o nível desses com relação aos seus conhecimentos geométricos, assim identificar suas dificuldades e depois procurar soluções para tentar melhorar seu aprendizado.

Palavras-chave: Historia da Matemática. Educação Matemática. Geometria.

ABSTRACT

The History of Mathematics is inspiring and contextualizes all the mathematical knowledge we have today, so it must be used in teaching this discipline. In this work we focus on the teaching of Geometry showing how people have developed this knowledge through time. The geometric knowledge began in an empirical way which solved particular problems of a given epoch, then developed a more abstract geometry in which the logical argument was the base, from certain common censuses were generated new knowledge that for a long time was the privilege of few , but social revolutions always fought for everyone to have the right to education. High school students present difficulties in learning mathematics and a deficiency in geometric concepts. Thus we began this work with a historical retrospective about high school in Brazil, as well as the teaching of Mathematics. Some evaluations such as PISA, Saeb and SPAECE were used to evaluate this teaching. These evaluations show the profile of the students in Mathematics at national, state or municipal level, thus to verify the level of the students in Geometry of a certain school in Fortaleza-CE which I teach for eight years, a sample survey was carried out with the students who volunteered to show their level in relation to their geometric knowledge, thus identifying their difficulties and then looking for solutions to try to improve their learning.

Keywords: History of Mathematics. Mathematical Education. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde tempos antigos a humanidade admira as formas e as usa para expressar seu cotidiano e seus pensamentos, utilizando assim, elementos da Geometria como: triângulos, quadriláteros, circunferências, arcos entre outros, mesmo sem entendê-las profundamente. Na idade da pedra, a maior preocupação era a sobrevivência, e mesmo com o pouco desenvolvimento social e tecnológico, já usavam armas talhadas em pedras e o fogo para cozer e se aquecer. Com mudanças constantes para obter água e comida, não houve um desenvolvimento científico considerável. (BOYER; MERZBACH, 2012)

Após o desenvolvimento da agricultura, a domesticação de alguns animais, a fundição do metal e organização social. Alguns povos começaram a desenvolver conhecimentos matemáticos, no qual o primeiro deles foi a contagem, seja de alimentos ou animais, como mostram alguns artefatos de ossos e madeiras com entalhes que representariam, segundo historiadores, as primeiras formas de contagem feita pelo homem.

Depois de algum tempo, povos antigos dos quais destacaremos os Babilônios e os Egípcios que possuíam uma sociedade organizada, desenvolveram conhecimentos matemáticos como um sistema de numeração próprio, sendo o sistema babilônico sexagesimal e posicional, enquanto o sistema egípcio era decimal. Eles também desenvolveram uma geometria que obteve esse nome devido a sua utilização prática que era justamente demarcar terras ao longo do rio Nilo, resolviam assim os problemas diários, mas não havia demonstrações. Temos também a Grécia, berço do conhecimento, em que trabalharemos período pré-euclidiano onde tivemos Tales, Pitágoras entre outros e o período euclidiano destacaremos Euclides e sua principal obra *Os elementos*, focando nas partes referentes a geometria plana, durante esse período o conhecimento matemático aumentou bastante principalmente o conhecimento geométrico.(AABOE, 2013)

Mas como todo esse conhecimento é trabalhado no ensino médio? Os livros didáticos norteados pelo Programa Nacional do Livro de Didático (PNLD) trazem em seus conteúdos a geometria plana, espacial e analítica. Porém, o modelo de repasse desse conteúdo não parece está fazendo o aluno analisar, pensar e desenvolver de uma maneira logica a resolução de problemas, como mostram os indicadores das avaliações como o Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE), o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e o Programme for International Student Assessment (Pisa) – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, que apesar de avaliar alunos que ainda estão no ensino fundamental já mostram uma grande deficiência nos conhecimentos matemáticos.

Questionamento sobre o nível do meu aluno no Ensino Médio principalmente com relação ao conhecimento geométrico foi realizada uma pesquisa em uma escola púbica de Fortaleza-CE, a qual faço parte do quadro de professores a oito anos, os alunos em sua maioria pensam em cursar uma faculdade, desses muitos dizem não entender matemática porque os assuntos não fazem parte do seu quotidiano, por ser muito abstrato, além de ter muitas formulas para decorar e não sabem para que esses conhecimentos foram criados. Estas perguntas são feitas constantemente ao professor de Matemática e uma maneira de responder esses questionamentos parece ser a contextualização histórica, o surgimento de tais assuntos em seus períodos de tempo, pois sabemos que cada conhecimento matemático desenvolvido foi e é marcante já que resolvia e resolve problemas existentes na vida desenvolvendo assim mais tecnologia e outros ramos do conhecimento tais como, a Física, a Computação, a Economia...

Esse trabalho está dividido em 4 seções. A primeira traz uma retrospectiva sobre o Ensino Médio no Brasil e suas transformações, bem como o Ensino de Matemática, a análise de alguns exames como PISA, Saeb e SPAECE. Na segunda, temos uma retrospectiva histórica sobre a construção do conhecimento matemático, destacando alguns povos como os babilônios e egípcios, com foco na Geometria. Na terceira, trabalhamos a Matemática grega também com foco na Geometria, destacando Tales, Pitágoras e Euclides, com sua obra: *Os Elementos*, mostrando que esses conhecimentos ainda podem e devem ser usados no ensino moderno. A quarta apresenta os dados de uma pesquisa realizada em uma escola pública de Fortaleza, com 317 alunos, verificando o nível de conhecimento desses alunos em geometria.

2 O ENSINO MÉDIO NO BRASIL

Nessa seção, faremos um relato histórico do Ensino no Brasil e as várias transformações sofridas deste a época dos jesuítas até os anos atuais (2018), para que assim possamos entender como o Ensino Médio se estruturou através do tempo, mostrando também a história do ensino em Matemática através de alguns indicadores como os resultados nas provas do PISA, Saeb e SPAECE.

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Nos primórdios da colonização brasileira, século XVI, é sabido que a educação brasileira era privilégio apenas das famílias aristocráticas, em que os responsáveis pelo ensino secundário eram os jesuítas com os cursos de Letras, Filosofia e Ciência. Não havia muitos estabelecimentos de ensino, e dos poucos que existiam muitos foram fechados com a expulsão dos jesuítas em 1759, pois já não atendiam mais aos interesses da coroa. Em substituição, instituíram as aulas régias, que eram ministradas por professores indicados pela coroa portuguesa, porém era um número insuficiente, deixando muitos dos filhos das classes dominantes sem a devida instrução. O cenário se modificou com a chegada da corte portuguesa em 1808, que se preocupou com a formação das elites. Criando, inclusive, a primeira instituição de nível superior do Brasil, a Escola de Cirurgia da Bahia. (SANTOS, 2010)

Após a proclamação da independência, em 7 de setembro de 1822, foram criados meios para a regulamentação dos estabelecimentos de ensino. Em 1824, a Constituição Imperial estabelece a instrução primária gratuita como direito de todos os cidadãos, criando novos colégios e cursos superiores, como as Faculdades de Direito em São Paulo e Olinda, em 1827, o colégio Ateneu, no Rio Grande do Norte, em 1835, e os Liceus da Bahia e Paraíba, em 1836. Em 1837 foi criado o Colégio Dom Pedro II, no Rio de Janeiro, primeiro com estrutura seriada e que dava direito a ingressar no nível superior, sem a necessidade de exames, idade mínima e o exame parcelado, foi o inicio da organização do ensino secundário.

Mesmo após a proclamação da república, em 1889, não houve mudanças significativas em relação a maior parte da população, pois não havia preocupação com o desenvolvimento social, como a educação, por exemplo. Durante esse período (1889 – 1930), chamado República Velha, o ensino secundário passou por cinco reformas:

1. Benjamim Constant (1890)

   Tinha como objetivo as instruções secundária e fundamental. O curso tinha duração de 7 anos e o estudante saía apto a cursar o nível superior, bem como o acesso aos seus direitos de cidadão

2. Epitácio Pessoa (1901)

   Tinha como objetivo proporcionar a cultura intelectual e o ingresso no ensino superior, com duração de 6 anos.

3. Rivadávia Correia (1911)

   Tinha como objetivo uma cultura geral prática e aplicável a todas as demandas da vida, e tinha duração de 6 anos, no modo externato, ou 4 anos, no modo internato.

4. Carlos Maximiliano (1915)

   Tinha como objetivo, preparar os estudantes de maneira que estivessem aptos a prestar qualquer exame de vestibular, com uma duração de 5 anos.

5. João Luiz Alves (1925)

   Tinha como objetivos ministrar as bases do ensino superior e fornecer uma cultura média e geral ao país, e o curso tinha duração de 6 anos.

A partir de 1930, começou uma nova estruturação para o sistema educacional. Foi criado o Ministério dos Negócios da Educação e Saúde Publica, em 1932, sendo posta em prática uma nova reforma proposta pelo ministro Francisco Campos, através do Decreto 19.890 de 18 de Abril de 1931, onde o ensino secundário é organizado em 5 anos, com 2 anos de curso complementar para os alunos que ingressariam no ensino superior. Em 1942, com a reforma de Gustavo Capanema através do Decreto-Lei n^{o} 4.244, em 9 de Abril de 1942, o ensino secundário foi dividido em dois ciclos: o 1^{o} ciclo com 4 anos, chamado ginasial, e o 2^{o} ciclo, com 3 anos, que poderia ser o clássico, voltado para as letras e humanidades, ou o científico, voltado para Matemática e as Ciências. Por influência da segunda guerra mundial também foi adicionado ao currículo, para os alunos do sexo masculino, a educação militar, sendo recomendado que as mulheres fossem educadas em instituições distintas . (SANTOS, 2010)

O ensino técnico-profissionalizante era desprezado pelas classes médias e altas, apesar de sua grande demanda, pois queriam o nível superior, ficando assim, para os mais carentes que buscavam oportunidades de trabalho, por falta de escolha. Colocando fim, na possibilidade de tal nível, pois quem fazia o técnico-profissionalizante não poderia cursar o secundário regular. Porém, devido a crises e ao surto industrial ocorreu uma grande evasão do ensino secundário, em 1945, menos de 10% chegava ao nível superior. Em 1946 uma nova constituição estabelece a necessidade de uma Lei de Diretrizes e Bases, que só foi aprovada em 1961, a qual chama de educação de grau médio o curso secundário, técnico e os pedagógicos (chamados normais).

No período da ditadura militar (1964 – 1985), a educação era vista como instrumentalização para o trabalho, além de controle sobre as ideologias, pois proibia a liberdade de impressa e o pensamento livre, qualquer um que fosse contra o sistema era torturado, exilado ou morto. Em 1971, com a aprovação da lei 5.652 foram fixadas as diretrizes e bases para a educação que a dividia em duas partes: o 1º grau, que tinha a duração de 8 anos, e o 2º grau, que tinha uma duração de 3 anos, com o ensino profissional obrigatório. Em 1982, com a aprovação da lei

7.44 cai a obrigatoriedade do ensino profissional devido a grande migração para as instituições particulares e proliferação de cursinhos pré-vestibulares.

Em 1988 é eleita a Assembleia Nacional Constituinte e criada a Constituição Federal, promulgada em outubro de 1988, que no seu artigo 205 diz:

> A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (BRASíLIA (Estado).Supremo Tribunal Federal, Secretaria de Documentação, 2018, p. 160)

Em 1996, após quase 10 anos de discursões no Congresso é aprovada a nova Lei de Diretrizes e Base (LDB), que dividiu a educação em ensino básico (Ensino Fundamental, antigo 1º grau, e Ensino Médio, antigo 2º grau), profissionalizante e superior. Fica também definido que a união ficara responsável pelo ensino superior, os estados pelo ensino médio e os municípios pelo ensino fundamental, mas com regime de coparticipação. Com relação ao Ensino Médio, na LDB está escrito:

> Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV – a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASíLIA (Estado).Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017, p. 24)

Nos anos 2000, começa uma intensa discursão sobre o papel do ensino médio e sua dualidade - preparar o aluno para uma vida de trabalho, exercendo seus direitos e deveres como cidadão, ou prepará-lo para a vida acadêmica, buscando o conhecimento e níveis mais altos. Algumas transformações já foram feitas, com a PEC 53, que substituía o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e de Valorização do Magistério (FUNDEF) pelo Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (FUNDEB).T trazendo assim mais recursos para o ensino médio, tendo como uma das consequências, a universalização do livro didático, programa que iniciou em 2004 com apenas os livros de Português e Matemática (depois para todas as disciplinas) e a merenda escolar também no nível médio. Brasília (Estado). Senado Federal (2006)

Em 2017, é sancionada a lei da reforma do ensino médio e criada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).A reforma prevê a flexibilização do conteúdo e dá novo peso ao ensino técnico, com mais escolas profissionalizantes e incentiva a ampliação de escolas com tempo integral. As escolas não são obrigadas a oferecer as cinco áreas do conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais aplicadas e Técnico-profissional), mas deverão oferecer pelo menos um dos itinerários formativos e fica obrigatório o Ensino de Matemática e Português nos três anos do ciclo. Segundo o Ministério da Educação (MEC), essa reforma já começou com a criação e ampliação das escolas de tempo integral para o ensino Médio e o lançamento da BNCC, e todo o todo processo de transição deverá está concluído.

Na próxima seção trataremos da Educação Matemática em nosso país e dos resultados em avaliações internacionais e nacionais, os quais se verificam o nível e qualidade do ensino.

2.2 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL

A Matemática sempre teve seu valor reconhecido como conhecimento essencial em todas as sociedades, um conhecimento que era passado para poucos. Talvez por isso tenha se criado tantos estigmas, como muitos chegam a afirmar, que é a matéria mais difícil, e só os muito inteligentes conseguem aprendê-la. Apesar disso massagear os egos de alguns, não é verdade, segundo (LIMA, 2009, p. 2) "qualquer criança cuja capacidade mental lhe permita ler e escrever é também capaz de aprender Matemática."

Mas como já vimos não era só o conhecimento matemático que era dado a poucos e, sim, o conhecimento em geral. De acordo com SILVA (2003) uma das primeiras instituições criadas para o desenvolvimento matemático foi a Academia Real Militar, em 1811, na qual seus alunos estudavam Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria, Cálculo Diferencial e Integral entre outros, o que impulsionou o desenvolvimento matemático em nosso país com a primeira geração de engenheiros-matemáticos.

Em 1960, se desenvolveu o Movimento da Matemática Moderna (MMM) que baseava-se na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra, esse movimento deve grande força na década de 60, mas nas décadas seguintes perdeu força, pois os alunos decoravam as propriedades sem saber utiliza-las em problemas reais. Desde a década de 90 vem se trabalhando um novo conceito que é o ensino pelo problematização e a utilização da historia da Matemática para a contextualização.

O Ensino de Matemática sempre esteve presente no currículo educacional do Brasil, disciplina obrigatória em toda vida escolar. O Ensino Médio tem como finalidade, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), desenvolver habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação, assim como a contextualização sociocultural. Assim os PCNEM têm como critério central a contextualização e a interdisciplinaridade, por isso os conteúdos de todas as disciplinas devem ser escolhidos de modo que se relacionem.

O Ensino de Matemática não deve ser dado de modo enciclopédico, mas deve ser mostrado como um conhecimento social e historicamente construído, mostrando sua importância no desenvolvimento cientifico e tecnológico. Os conteúdos de Matemática, nos PCNEM, estão divididos em quatro blocos: números e operações; funções; geometria; análise de dados e probabilidade, porém devem ser ministrados de modo a se articularem entre si. Assim, ao final do Ensino Médio o aluno deve ser capaz de:

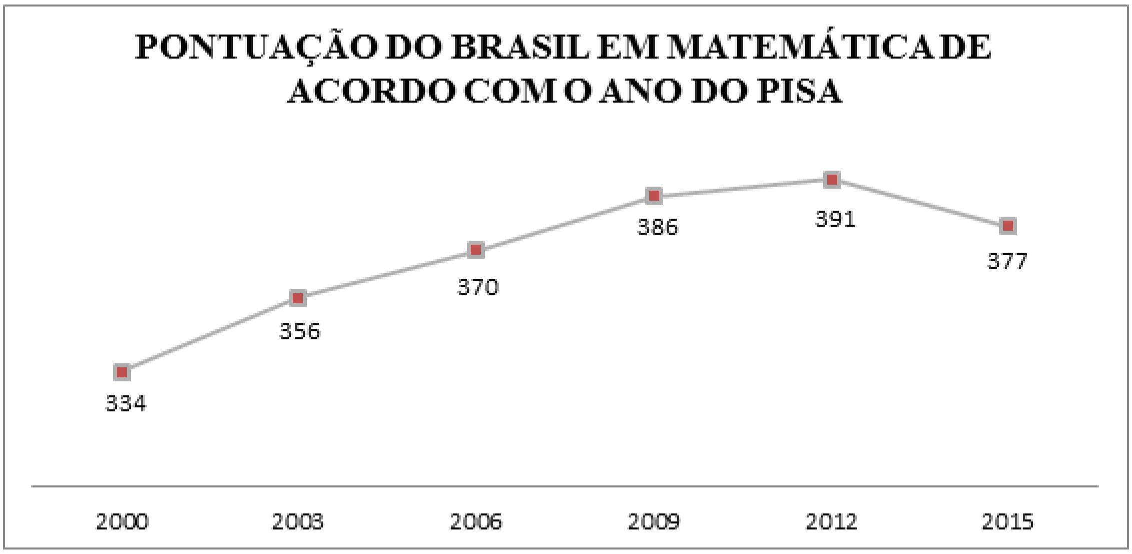
> I – compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam seus estudos posteriores e uma formação cientifica geral;
> II – aplicar os conhecimentos matemáticos em situações diversas, tanto na interpretação cientifica como em atividades cotidianas;
> III – resolver problemas usando raciocínio lógico-dedutivo com espírito crítico e criativo;
> IV – expressar-se de maneira oral, escrita ou gráfica em situações matemáticas, valorizando a escrita matemática;
> V – estabelecer conexões entre os diferentes temas matemáticos e as outras áreas de conhecimento. (MEC, 2000, p. 42)

Mas será que isso está realmente acontecendo? Vários estudos sobre a educação mostram a baixa apredizagem dos alunos no Brasil, entre esses destacaremos três: *O Programme for International Students Assesment* (PISA) Programa Internacional de avaliação de estudantes, tem como objetivo produzir indicadores para a discursão da qualidade da educação; é uma avaliação que ocorre a cada três anos nas áreas de Leitura, Matemática e Ciências, com foco em uma área a cada edição. Sua primeira edição, no ano 2000, coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), avalia alunos na faixa etária de 15 anos de idade, que pressupõe-se o término do Ensino Fundamental na maioria dos países. A avaliação consiste de questões objetivas e discursivas além de questionário socioeconômico para alunos e professores.

O Brasil participou de todas as edições do PISA, porém nunca conseguiu resultados muito satisfatórios. No ano 2000, de 32 países participantes, o Brasil ficou em 32º; em 2003, de 41 países participantes, ficou em 40º; em 2006, de 57 países participantes, ficou em 52º; em 2009, de 61 países participantes, ficou em 50º; em 2012, de 65 países participantes, ficou em

57º; e em 2015, de 70 países ficou em 63º. A pontuação do Brasil em Matemática nas últimas edições do PISA não foi satisfatoria (Figura 1). Os alunos são avaliados em uma escala de 6 níveis a média dos nossos estudantes alcançou o nível 1 (358 a 420 pontos). Apesar de pouco, temos conseguido melhorar.

Figura 1 – Pontuação em Matemática do Brasil nas últimas edições do PISA



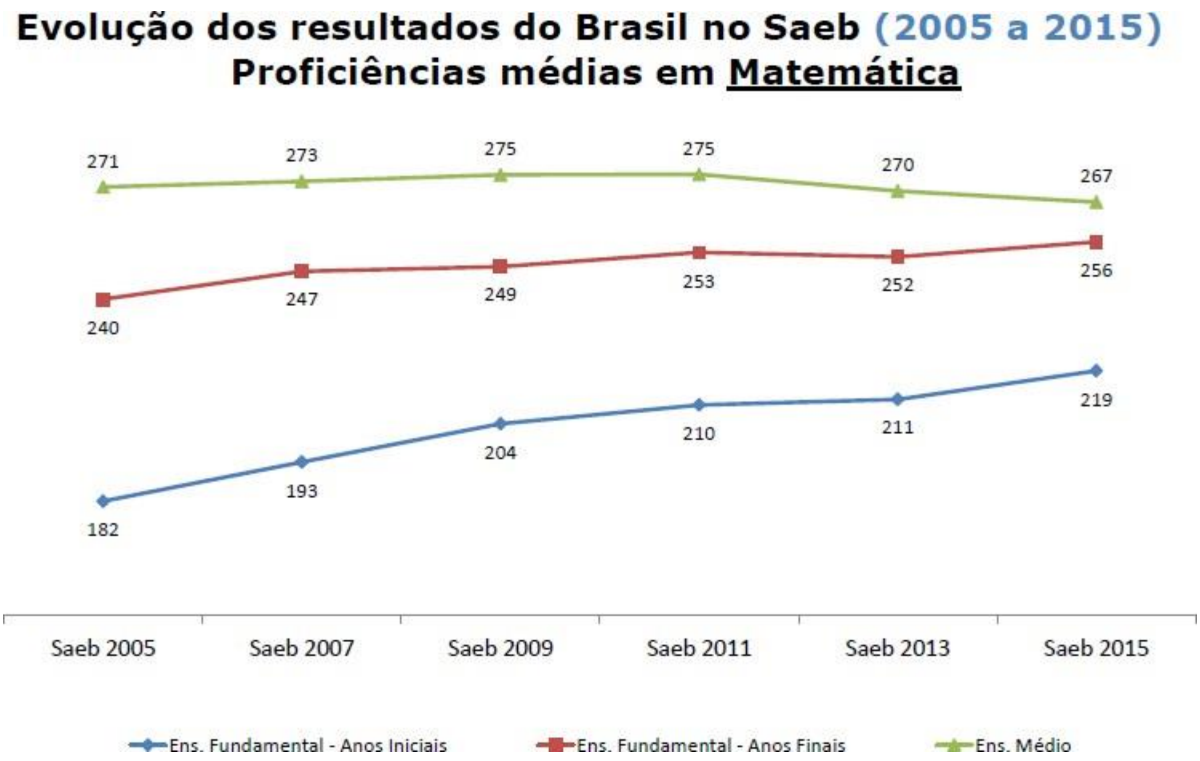
Fonte: http//portal.inep.gov.br/pisa.2018

Outro instrumento de avaliação é o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), uma avaliação que acontece a cada dois anos para as séries finais de cada ciclo: 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio. Tem como objetivo avaliar o nível dos alunos em relação a Português e Matemática. O gráfico abaixo (Figura 2) mostra a proficiência média dos alunos em Matemática, de 2005 a 2015.

Os relatórios mostram que, de certa maneira, conseguimos alguma melhora no Ensino Fundamental, porém no médio houve uma queda, mas de modo geral o sistema de educação do país precisa melhorar bastante, e essas mudanças não podem ser feitas apenas na escola.

Por último, temos o Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE), uma avaliação anual para os alunos de 9º ano e todas as séries do Ensino Médio que também avalia os alunos em Português e Matemática.

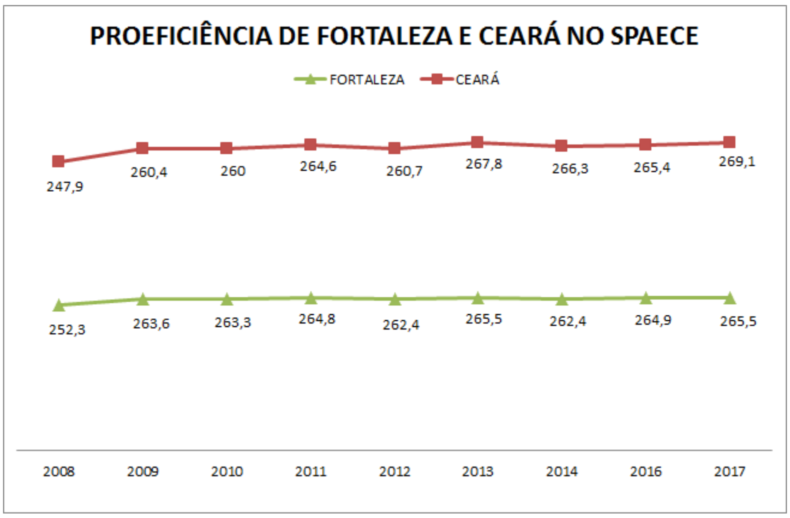
Figura 2 – Pontuação em Matemática do Brasil nas últimas edições do Saeb



Fonte: Diretoria de Avaliação da Educação Básica - DAEB/INEP

Para efeito de comparação, apresentaremos os resultados do 3º ano do Ensino Médio, na (Figura 3) mostraremos o nível de proficiência em Matemática, dos anos de 2008 a 2017, porém no ano de 2015 não houve SPAECE para o 3º do ensino Médio.

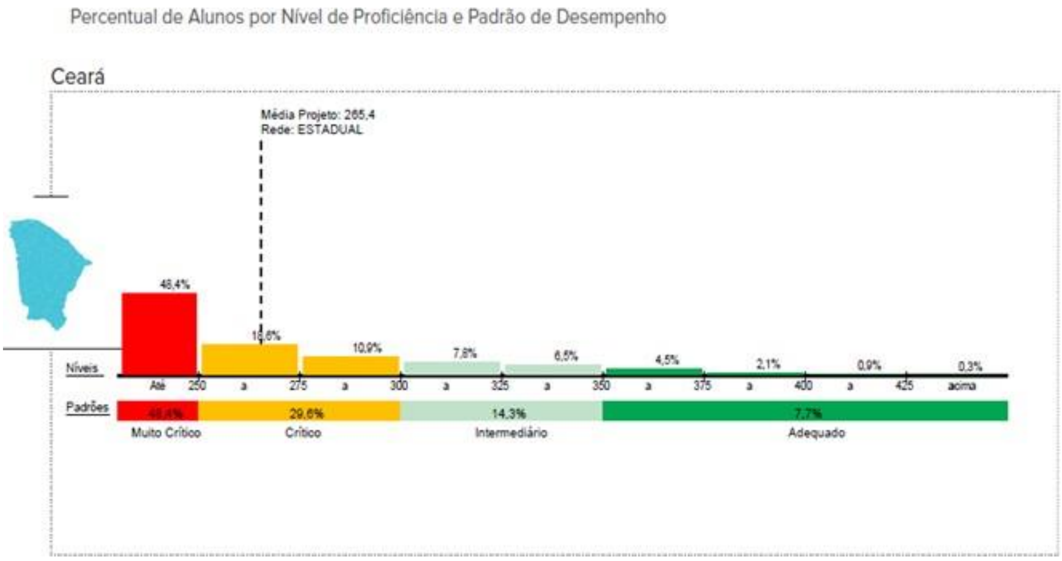
Figura 3 – Pontuação em Matemática do Ceará e Fortaleza nas últimas edições do SPAECE



Fonte: http//spaece.caedufjf.net/resultados-por-escola. 2018

A avaliação do SPAECE usa a escala da Figura 4 para dizer o nível do(s) aluno(s) segundo suas notas; a escala abaixo representa o nível do Ceará em 2017.

Figura 4 – Escala de Poeficiência do SPAECE



Fonte: http//spaece.caedufjf.net/resultados-por-escola. 2018

Analisando todos os dados, podemos ver que nossos alunos encontra-se em estado crítico em relação ao conhecimento que deveria ter adquirido durante sua vida escolar. Assim, podemos perceber que o nosso sistema de ensino, nas esferas municipal, estadual e federal, não está conseguindo fazer o que se propõe. O artigo 206 da Constituição Federal diz que:

> Art. 206. O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios:
> I - igualdade de condições para o acesso e permanência na escola;
> II - liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar o pensamento, a arte e o saber;
> III - pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas, e coexistência de instituições públicas e privadas de ensino;
> IV - gratuidade do ensino público em estabelecimentos oficiais;
> V - valorização dos profissionais da educação escolar, garantidos, na forma da lei, planos de carreira, com ingresso exclusivamente por concurso público de provas e títulos, aos das redes públicas; VI - gestão democrática do ensino público, na forma da lei;
> VII - garantia de padrão de qualidade;
> VIII - piso salarial profissional nacional para os profissionais da educação escolar pública, nos termos de lei federal. (BRASíLIA (Estado).Supremo Tribunal Federal, Secretaria de Documentação, 2018, p. 160)

A gratuidade está garantida, mas a garantia de padrão de qualidade? Dessa maneira, começamos a nos questionar sobre as razões de tanta falta de conhecimento dos alunos. Segundo

LIMA (2009) professores pouco motivados, desigualdade social, professores mal remunerados e a falta de reconhecimento social sobre a responsabilidade de todos na educação.

O conhecimento matemático, assim como todo conhecimento humano, desenvolveu-se bastante durante toda sua historia, gerando muitos conteúdos e formas de repassar esse conhecimento. Temos, então, um questionamento: o que é realmente necessário que se ensine para os alunos? Na tentativa de responder a esse anseio da sociedade, foi feita a reforma do Ensino Médio e criada a BNCC, na qual o aluno terá uma maior liberdade para escolher o que estudam. Mas será que nossos alunos estão preparados para fazer essa escolha?

No Brasil, um país de dimensões continentais e tantas contradições em 2018 ocorreram mais uma. Um país com resultados baixos na proficiência de Matemática entra para o seleto grupo que reúne as nações mais desenvolvidas em Matemática, e hoje é responsável por 2,5% da produção matemática mundial, um trabalho que vem sendo desenvolvido pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Em entrevista ao jornal nacional no dia 25 de Janeiro de 2018, Marcelo Viana, diretor geral do IMPA, disse:

> Temos desenvolvido um esforço muito grande para comunicar a matemática para a sociedade e para começar a desconstruir a imagem do bicho-papão, que não tem razão de ser. A matemática é muito importante para o desenvolvimento do país, é importantíssima para a formação do cidadão e nós estamos empenhados em ajudar a melhorar essa situação.

Na tentativa de solucionar, ou pelo menos amenizar esse problema, o IMPA e a SBM junto com o Ministério da Educação (MEC), vêm executando programas para desenvolver a matemática de maneira mais acessível e interessante, tais como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Publica (OBMEP), OBMEP na escola, Clube de Matemática e, para o aprimoramento de professores de Matemática, temos o Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM) e o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), programas desenvolvidos para melhorar o nível de alunos e professores de Matemática do Brasil.

Fizemos acima um panorama sobre a Matemática no Brasil: seus problemas e possíveis soluções, pois queremos minimizar esses problemas, quando nos referirmos à Geometria.

Em particular, a Geometria é um dos blocos dos PCNEM e da BNCC e começa a ser ensinada na Educação infantil com o reconhecimento de formas, e depois, no Ensino Fundamental os alunos aprendem medições, classificações, propriedades e teoremas. Assim, durante o fundamental eles já viram todo o programa de Geometria Plana. No 1º ano do Ensino

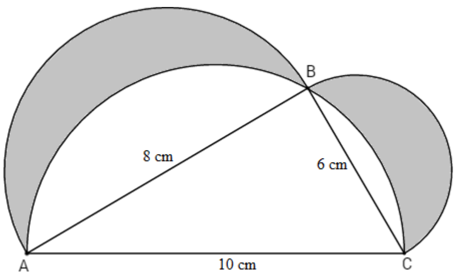
Médio, alguns conteúdos são relembrados e aprofundados como os teoremas de Tales e Pitágoras, estudo dos triângulos e o cálculo de áreas.

Porém, não é o que acontece, nós professores percebemos no dia a dia e através de avaliações internas e externas que muitos dos alunos lembram apenas do nome das figuras, com relação aos teoremas sabem apenas a forma algébrica, mas não conseguem dar o conceito ou uma aplicação. Talvez um dos problemas no Ensino da Geometria seja a utilização exagerada da álgebra, pois não podemos deixar de abordar as definições, propriedades e elementos próprios de cada figura. Outro motivo apontado pelos alunos com relação à dificuldade de aprender Geometria é a quantidade exagerada de fórmulas para decorar.

Vejamos, como exemplo, o seguinte problema[1]:

"Calcule a área sombreada da figura abaixo, onde os lados do triangulo *ABC* reto em *B* são os diâmetros das semicircunferência."

Figura 5 – Lúnula de Hipócrates

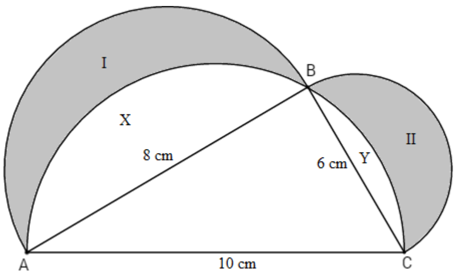


Fonte: Elaborado pelo autor

Usaremos, na sua solução, as duas abordagens: algébrica e geométrica.

SOLUÇÃO (Algébrica). Chamemos as áreas sombreadas de *I* e *II*, as áreas internas ao semicírculo maior e externas ao triangulo de *x* e *y*. Assim,

Figura 6 – Resolução da lúnula



Fonte: Elaborado pelo autor

[1] Aconselho ao professor, antes de resolvê-lo, contar um pouco da história desse problema. Essa história será apresentada na seção 4.1.

Devemos calcular $I + II$.

Vejamos que

$$I + X = \frac{\pi.4^2}{2} = \frac{\pi.16}{2} \tag{2.1}$$

e

$$II + Y = \frac{\pi.3^2}{2} = \frac{\pi.9}{2} \tag{2.2}$$

Somando (2.1) e (2.2) temos que:

$$I + II + X + Y = \frac{\pi.(16+9)}{2} = \frac{\pi.25}{2}$$

$$I + II = \frac{25\pi}{2} - (X + Y) \tag{2.3}$$

No semicírculo que passa por ABC temos que:

$$A_t + X + Y = \frac{\pi.5^2}{2} = 24 + X + Y$$

Logo,

$$X + Y = \frac{25\pi}{2} - 24 \tag{2.4}$$

Substituindo (2.4) em (2.3), temos:

$$I + II = \frac{25\pi}{2} - \frac{25\pi}{2} + 24$$

Portanto, a área sombreada é $24\,cm^2$.

OUTRA SOLUÇÃO (Geométrica)

Mantendo a nomenclatura acima e lembrando apenas da generalização do teorema de Pitágoras e de que todos os círculos são semelhantes, temos que os semicírculos também são. Sabemos que o semicírculo construído sobre a hipotenusa tem área igual a soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos. Assim, temos que

$$I + X + II + Y = A_t + X + Y,$$

logo,

$$I + II = A_t. \tag{2.5}$$

como, $A_t = 24$, temos que $I + II = 24$.

Portanto, a área sombreada é $24\,cm^2$

Vejam que é uma solução mais rápida e prática, mas que exige um pouco mais de conhecimento sobre os conceitos envolvidos no problema. Assim se o aluno tiver os conceitos bem consolidados em sua mente, ele poderá encontrar meios mais rápidos para resolver um problema.

Um dos conhecimentos gerados pela evolução do homem entre os vários que foram desenvolvidos é o conhecimento matemático. Na seção seguinte, faremos uma exposição de alguns fatos históricos, destacando-se, em especial, o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos de alguns povos, como os babilônios e egípcios.

3 GEOMETRIA NA BABILÔNIA E EGITO

Nessa seção faremos uma retrospectiva histórica de dois povos, que apresentaram um desenvolvimento do conhecimento matemático avançado para a época, criando seu próprio jeito de contar, tabelas de multiplicações e resolvendo vários problemas geométricos.

3.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Não se sabe de fato, quando se deu o desenvolvimento da Matemática. Quando começamos na vida escolar a primeira história que escutamos sobre Matemática é aquela sobre os pastores e suas ovelhinhas, que para cada ovelha que saia do curral, o pastor colocava uma pedra em sua bolsa, percebendo depois que poderia apenas fazer marcações em seu cajado para saber a quantidade de ovelhas. Porém, esta versão não é segura, pois as fontes para o estudo das civilizações muito antigas são escassas e fragmentadas.

Os registros mais antigos relacionados com contagens, e que ainda deixam os historiadores divididos são ossos que foram encontrados na África como mostram as (Figuras 7 e 8).

Figura 7 – Osso de Lebombo 35000 a.C.

Fonte: aulasdeyoruba.blogspot.com/2015/10 /negros$_1$4.*html*

Figura 8 – Osso de Ishango 20000 a.C.

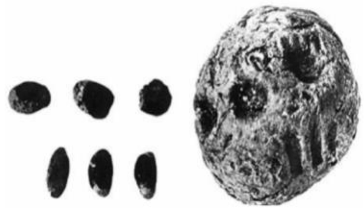
Fonte: matematicaefa-cil.com.br/2016/07 /matematica-continente-africano-osso-ishango.html.

Os primeiros vestígios reais do que pode ser chamado de escrita datam de 500 a.C., e são provenientes da antiga Mesopotâmia, onde atualmente se situa o Iraque, conhecida como escrita cuneiforme (forma de cunha). Essa escrita está intimamente relacionada com o registro de quantidades de animais e cereais e, também, com as necessidades relacionadas à administração, devido ao crescimento populacional considerável.

Escavações feitas na região de Uruk, cidade situada a leste do Eufrates, a cerca de 225 quilômetros de Bagdá, nos anos 30, foram encontrados centenas de tabletes arcaicos, mostrando que na fase inicial da escrita, diversos deles traziam marcas para representar contagens, como de ovelhas, que era representada por um círculo com uma cruz. Com novas escavações vieram à tona tabletes ainda mais enigmáticos, com uma escrita que consistia de figuras como cunhas, círculos, ovais e triângulos impressos na argila (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Nos anos 90, Denise Schmandt propôs a tese inovadora de que a mais antiga forma de escrita originou-se de um processo de contagem. Observando que as escavações traziam de maneira regular objetos em argila (tokens) de diversos formatos: cone, esfera, discos, cilindros, etc. Estes objetos serviam às necessidades da economia, tanto na fase rural como urbana. Porém, na fase urbana teve-se que aperfeiçoar o método para armazenar estes tokens, sendo que se marcava o invólucro com os tokens e estes eram guardados dentro como mostra a (Figura 9).

Figura 9 – Tokens no invólocro



Fonte: https://books.google.com.br/books?id=tokens+no+invólucro.2018

Um certo tempo depois percebeu-se que no lugar de guardar os tokens, era mais prático apenas marcar a argila, e assim começou-se apenas a marcar os tabletes de argilas com os tokens. Observou-se, ainda, que poderia se usar o mesmo símbolo para determinar coisas diferentes, e assim foi criado o primeiro sistema de numeração conhecido, o sistema de numeração sexagesimal que é um sistema que trabalha com a base 60[1].

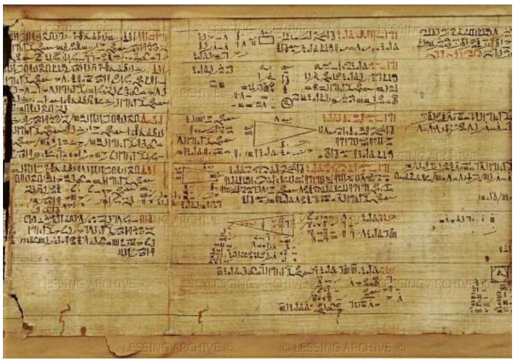
Devemos sempre nos lembrar de que quando trabalhamos a Matemática antiga, temos que ter o cuidado de olhar não nos moldes atuais, pois na antiguidade não havia essa

1 Para mais estudos sobre esse assunto consultar AABOE (2013)

divisão de conhecimentos que temos atualmente, ou seja, não havia uma diferenciação entre Álgebra, Geometria e Trigonometria, pois todo conhecimento era desenvolvido para manutenção e administração sociais.

Tanto os babilônios, quanto os egípcios realizavam uma espécie de cálculo com grandezas, ou seja, utilizavam medidas diferentes das atuais. Há menos registros sobre os egípcios do que sobre os babilônios, pois o que conhecemos da Matemática egípcia vem por meio de um número limitado de papiros, dois dos quais citamos aqui. O papiro de Rhind, nome do escocês Alexander Henry Rhind, que o comprou por volta de 1850, em Luxor, no Egito, que também era chamado papiro de Ahmes, devido ao escriba egípcio Ahmes (Figura 10).

Figura 10 – Papiro de Rhind ou Ahmes



Fonte: www.matematicaefacil.com.br/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html.2018

Temos, também, o papiro de Moscou, que foi comprado por Abraão V.S. Golenischev, egiptólogo e colecionador russo, por volta de 1890, no Egito, depois comprado pelo Museu de Belas Artes de Moscou, em 1917 (Figura 11).

Figura 11 – Papiro de Moscou

Fonte: www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-da-matematica-egipcia-papiro-moscou.html.2018

Ainda, sobre os egípcios, sabemos que eles também desenvolveram seu próprio sistema de numeração, que era decimal, mas não posicional. Por ser decimal, para cada símbolo, havia outro que representava 10 vezes aquele símbolo.

Veremos a seguir como se deu o desenvolvimento da Matemático na Babilônia, sempre focando na sua Geométrica.

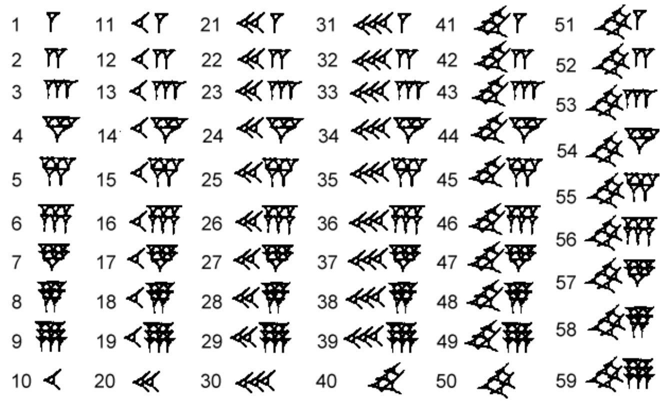
3.2 GEOMETRIA NA BABILÔNIA

Quando nos referimos à Babilônia, estamos nos referindo à região da Mesopotâmia, que está situada no Oriente Médio, no vale dos rios Eufrates e Tigre, o que hoje é o Iraque. Os registros que temos desse povo vieram através de tabletes de argila cozidos ao sol que eram marcados com uma espécie de estilete - símbolos em forma de cunhas - por isso o nome escrita de cuneiforme, que foram encontrados em escavações nas colinas da Mesopotâmia, no fim do século XIX.

As escavações forneceram milhares de tabletes, poucos inteiros, mas foi reconhecido bem cedo que alguns deles tratavam de números. Depois de uma apreciação profunda da Matemática babilônia, há hoje uns 400 tabletes ou fragmentos de conteúdos matemáticos, que foram cuidadosamente copiados, transcritos, traduzidos e explicados em volumes abrangentes. Os tabletes originais estão espalhados por museus de muitos países. (ROQUE; CARVALHO, 2012)

Antes de tratarmos do que chamaríamos de Geometria babilônia, devemos nos familiarizarmos com o sistema de numeração babilônio. A Figura 12 mostra uma representação dos números que eram utilizados.

Figura 12 – Símbolos do sistema sexagesimal



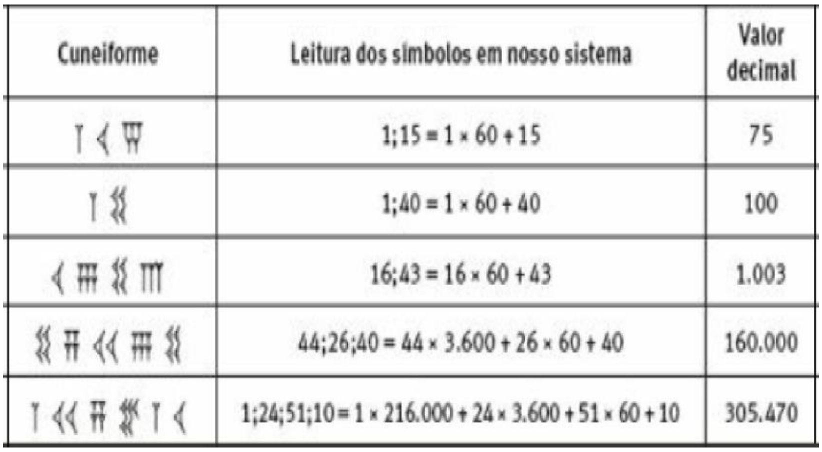
Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm.2018

Como podemos observar, havia um símbolo para a unidade, que era cumulativa até o número 9, e um outro símbolo para o numero 10, que era cumulativo para representar os números 10, 20, 30, 40, 50. Na verdade, eles usavam uma combinação de símbolos como podemos observar para escrever os números de 1 a 59. Já para o número 60, o símbolo é o mesmo do número 1, e por isso, dizemos que o sistema babilônio é um sistema posicional de base 60, o que era muito útil pois facilitava quando fossem escrever os números grandes.

Já o nosso sistema de numeração, que é decimal, é também posicional, assim como outros, por exemplo,o caso do sistema binário usado pelos computadores.

Para a tradução em nossa linguagem, usaremos ponto e vírgula para separar as classes, e vírgula, para separar a parte inteira da fracionaria. Vejamos na figura 13, alguns exemplos.

Figura 13 – Símbolos traduzidos no sistema decimal



Cuneiforme	Leitura dos símbolos em nosso sistema	Valor decimal
	1;15 = 1 × 60 + 15	75
	1;40 = 1 × 60 + 40	100
	16;43 = 16 × 60 + 43	1.003
	44;26;40 = 44 × 3.600 + 26 × 60 + 40	160.000
	1;24;51;10 = 1 × 216.000 + 24 × 3.600 + 51 × 60 + 10	305.470

Fonte: https://th3m4th.files.wordpress.com/2016/01/historia-da-matematica-tatiana-roque.pdf.2018

Talvez, a primeira vista, esse sistema possa causar ambiguidade, pois como ter certeza qual número está sendo dito em determinado relato? Mas não causava, pois o contexto deixava claro o número que estava sendo trabalhado, pois em alguns tabletes até houve algumas diferenciações de tamanho no símbolo para se representar 1 ou 60, o que não era regra[2].

Agora, vamos trazer um pouco das ideias da Geometria entre os babilônios, e como esse povo tratava as suas questões práticas.

A Geometria babilônia estava intimamente relacionada com a mensuração prática, em que eles conheciam as regras gerais para o cálculo de áreas de retângulos, triângulos retângulos e isósceles, a área do trapézio retângulo. Desenvolveram também um modo de calcular a área de

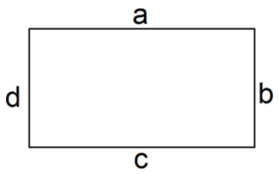
[2] Para maiores esclarecimentos sobre essas ambiguidades consultar ROQUE (2012)

um quadrilátero qualquer, mas incorreta, pois funciona apenas para os retângulos, que era dado pelo produto da soma dos lados opostos dividido por quatro, (EVES, 1994), ou seja,

$$A = \frac{(a+c)\cdot(b+d)}{4} \tag{3.1}$$

Se compararmos com a nossa fórmula atual, podemos ver que para retângulos, realmente funciona. Vejamos a Figura 14, por exemplo.

Figura 14 – Retângulo de lados a, b, c, d



Fonte: Elaborado pelo autor

Usando a fórmula 3.1 para calcular a área do retângulo da Figura 14, como $a = c$ e $b = d$, temos que

$$A = \frac{(a+a).(b+b)}{4} = \frac{2a.2b}{4} = \frac{4ab}{4} = \text{a.b} \tag{3.2}$$

Agora, observemos que a medida da circunferência de um círculo era tomada como sendo o triplo do seu diâmetro, e a área como $\frac{1}{12}$ da área do quadrado construído sobre um lado de comprimento igual ao comprimento da circunferência desse circulo. Em ambos os casos, podemos notar que eles usavam uma aproximação 3 para o que chamamos hoje de π.

Sendo C e D, respectivamente, o comprimento e o diâmetro desse círculo, na linguagem algébrica atual, temos que $C = 3D$, com $C = 2\cdot\pi\cdot r$ ou $C = \pi\cdot D$.
Para a área temos,

$$A = \frac{1}{12}.\,(3D)^2 = \frac{1}{12}\,.\,3.3.\text{D}^2 \tag{3.3}$$

e como $D = 2r$, tem-se,

$$A = \frac{1}{12}\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot r^2 = 3\cdot r^2 \tag{3.4}$$

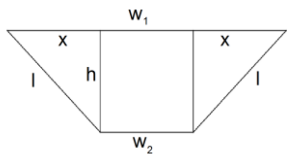
o que é consistente com a definição atual de área do circulo, $A = \pi\cdot r^2$. Então, por comparação, observamos que eles utilizavam uma aproximação até boa para π, conseguindo assim, calcular o volume de um cilindro circular reto, fazendo o produto da área da base pela altura.

Outro problema de Geometria bem interessante encontra-se no tablete VAT 7848, e que mostra como calculavam a área de um trapézio isósceles, é o seguinte:

"Em um trapézio, 30 é o comprimento, 30 é o segundo comprimento, 50 é a largura superior, e 14 é a largura inferior. 30 vezes 30 é 15;0. Subtraia 14 de 50 e o resto é 36. Metade disso é 18. 18 vezes 18 é 5;24. Subtraia 5;24 de 15;0 e o resultado é 9;36. O que devemos multiplicar por si mesmo para que o resultado seja 9;36? 24 vezes 24 é 9;36. 24 é a reta divisora. Adicione 50 e 24 e o resultado é 1;4. Metade disso é 32. Multiplique 24, a reta divisora, por 32, e o resultado é 12;48."

Comparando-o com o método utilizado por nós, hoje, e observando a Figura 15, temos a figura

Figura 15 – Trapézio isósceles



Fonte: Elaborado pelo autor

Temos assim que: $l = 30, w_1 = 50 \; e \; w_2 = 14$. Encontraremos primeiramente o valor de x

$$x = \frac{w_1 - w_2}{2} = \frac{50 - 14}{2} = 18 \tag{3.5}$$

Agora, a altura h, que é a reta divisora, usando o teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{900 - 324} = \sqrt{576} = 24 \tag{3.6}$$

Calculando a área, segundo a formula:

$$A = \frac{h.(w_1 + w_2)}{2} \tag{3.7}$$

Temos que:

$$A = \frac{24.(50+14)}{2} = 24.32 = 768 \tag{3.8}$$

que na numeração sexagesimal é igual a 12;48.

Assim, podemos observar que os babilônios, de algum modo, tinham um conhecimento sobre cálculos com o que hoje conhecemos como teorema de Pitágoras.

Outro problema, também interessante, se encontra no tablete BM 13901, que teve durante muito tempo uma tradução algébrica, mas depois foi proposta uma nova tradução com um formato geométrico. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 22)

"Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?"

Procedimentos:

1. tome 1
2. fracione 1 tomando a metade (0,30)
3. multiplique 0,30 por 0,30 (0,15)
4. some 0,15 a 0,45 (1)
5. 1 é a raiz quadrada de 1
6. subtraia os 0,30 de 1
7. 0,30 é o lado do quadrado.

Usando o conhecimento de álgebra atual, podemos ver que esses procedimentos são os da resolução de uma equação quadrática do tipo $Ax^2 + Bx = C$, onde $A = B = 1$ e $C = 0,45$. Vejamos! Tome 1 (é o B); fracione 1 $\left(\frac{B}{2}\right)$; multiplique 0,30 por 0,30 $\left(\frac{B}{2}\right)^2$; some 0,15 com 0,45 $\left(\left(\frac{B}{2}\right)^2 + c\right)$; 1 é a raiz de 1 $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + c}\right)$; subtraia 0,30 de 1 $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + c} - \left(\frac{B}{2}\right)\right)$.

Porém, Jens Høyrup[3] propôs uma nova tradução, com algumas simplificações feitas para o português, mostra uma abordagem mais geométrica. Vejamos!

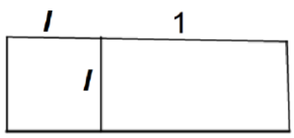
" A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive 0,45"

Procedimentos:

1. 1 é a projeção
2. quebre 1 na metade (0,30) e retenha 0,30, obtendo 0,15
3. agregue 0,15 a 0,45
4. 1 é o lado igual
5. retire do interior de 1 os 0,30
6. 0,30 é a confrontação

Então, havia um quadrado de lado *l* e foi feito um prolongamento desse lado, obtendo-se um retângulo de lados *l* e 1, como mostra a figura 16.

Figura 16 – Projeção do quadrado de lado l



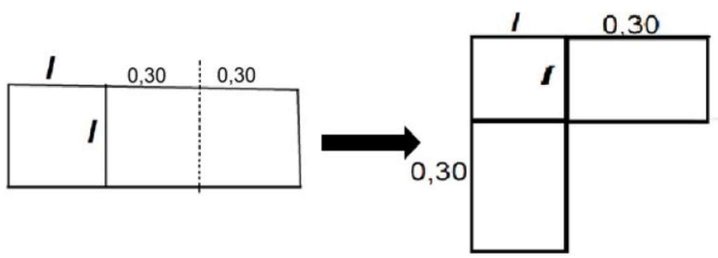
Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 17 ilustra o passo 2 do procedimento acima. Quebre 1 na metade (0,30);

[3] Historiador da matemática cujos trabalhos mudaram a forma como vemos a matemática antiga.

rearrumando os retângulos, obtemos uma nova figura com área igual a anterior (0,45).

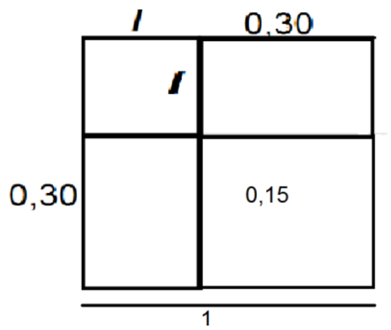
Figura 17 – Reorganização dos retângulos



Fonte: Elaborado pelo autor

A figura 18 ilustra os passos 3 e 4. Agregue 0,15 a 0,45 e complete a figura 16 com um quadrado de lado 0,30, obtendo-se uma área de 0,15, conseguindo assim um quadrado de área 1, que tem como lado também 1, tirando os 0,30 de 1 obtemos o valor de l que é a confrontação de valor 0,30.

Figura 18 – Reorganização dos retângulos



Fonte: Elaborado pelo autor

Segundo ROQUE e CARVALHO (2012), não podemos afirmar se eles conheciam a Geometria ou a Álgebra, pois tudo foi traduzido segundo a nossa concepção de Matemática. Por isso, devemos ter muito cuidado com as afirmações feitas, mas o que não podemos negar é que eles desenvolveram um pensamento matemático fantástico, mesmo sem as generalizações algébricas e geométricas que temos hoje.

Assim, como os babilônios, os egípcios tiveram a sua Álgebra e a sua Geometria. Como chegaram aos nossos dias? É o que veremos na próxima seção.

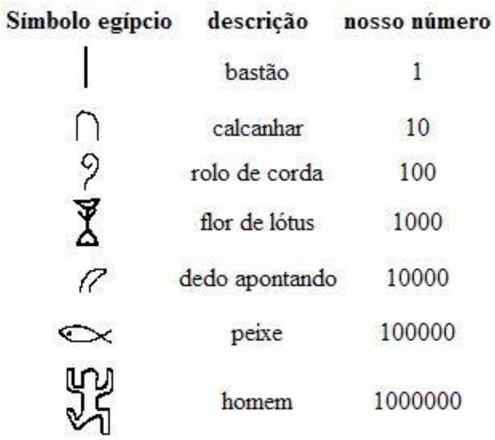
3.3 GEOMETRIA NO EGITO

Um dos artefatos que contribuíram para a compreensão e tradução dos textos egípcios segundo BOYER e MERZBACH (2012), foi a pedra de roseta, encontrada por Pierre-François Bouchard, soldado francês, integrante da expedição francesa ao Egito em 1799. Essa pedra tem atualmente 114,4cm de altura (em seu ponto mais alto), 72,3cm de largura e 27,9cm de espessura. Pesa aproximadamente 760Kg e encontra-se no museu britânico de Londres. Essa pedra possui uma mensagem repetida em hieróglifos, caracteres demóticos e em grego, que foi a chave para que o pesquisador francês Jean François Champollion (1790 – 1832) decifrasse essa escrita (egípcia).

Esses textos não possuíam material puramente matemático, somente com os papiros de Ahmes (Figura 6) e Moscou (Figura 7) foi possível sabermos as construções matemáticas feitas pelos egípcios.

Os egípcios possuíam um sistema de numeração decimal (Figura 19), onde havia um símbolo para cada conjunto de 10 símbolos.

Figura 19 – Sistema de numeração Egípcio



Símbolo egípcio	descrição	nosso número
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo apontando	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

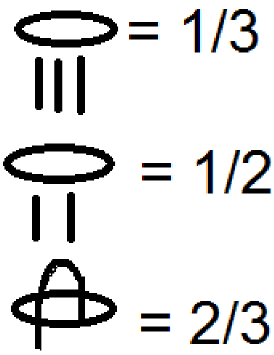
Fonte: mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-egipcios.htm.2018

O sistema era cumulativo, por exemplo, vamos escrever o número 23.453 na representação egípcia (Figura 20). Como o seu sistema não era posicional, algumas vezes símbolos que representam valores menores se encontravam à esquerda de símbolos de valores maiores, mas isso não interveria na interpretação. Também possuíam representação para frações, usando sempre a representação de frações unitárias e a fração $\frac{2}{3}$, e não se sabe dizer o porque dessa preferência. Na Figura 21, temos alguns exemplos

Figura 20 – Representação do número 23.453

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 21 – Representação de algumas frações



Fonte: http://profinesreynaud.blogspot.com/2010/08/os-egipcios-e-as-fracoes.html

Também realizavam operações de multiplicação e divisão, cujas divisões eram transformadas em multiplicações, com o processo de duplicação. Vejamos, por exemplo, como "Multiplicar usando o método egípcio 9 por 28", usando o método egípcio. A solução era feita da seguinte maneira: os egípcios faziam duplicações até conseguir o número desejado, assim

*1 $\rightarrow$ 28

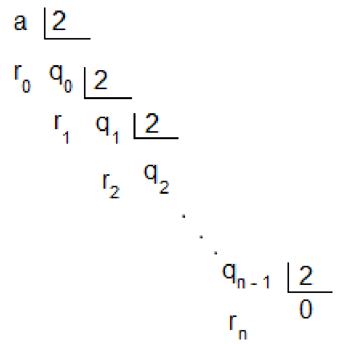
2 $\rightarrow$ 56

4 $\rightarrow$ 112

*8 $\rightarrow$ 224

tomando os números marcados, vemos que $8 + 1 = 9$ e, portanto, o resultado será a soma de $28 + 224 = 252$, que podemos interpretar como $1 \cdot 28 + 8 \cdot 28 = (1 + 8).28 = 9 \cdot 28 = 252$. É impressionante perceber que os egípcios, de algum modo, conseguiram enxergar essa característica de que podemos escrever todo numero natural como potencias de 2, ou seja, podem ser escritos na base 2.

Sendo $a \in \mathbb{N}$, dividindo a por 2, obtemos quociente q_0 e resto r_0 ($r_0 = 0$ ou $r_0 = 1$). Dividindo q_0 por 2, obtemos um quociente q_1 e resto r_1 ($r_1 = 0$ ou $r_1 = 1$), e assim sucessivamente, até chegarmos a um quociente $q_{n-1} = 1$ e resto $r_n = 1$. Logo, podemos escrever $a = r_0 + 2q_0$, com $q_0 = r_1 + 2q_1$, até $q_{n-1} = r_n + 0q_n$. Assim,



Temos que $a = r_0 + 2(r_1 + 2q_1) = r_0 + 2r_1 + 2^2 q_1$, com $q_1 = r_2 + 2q_2$; $a = r_0 + 2r_1 + 2^2 r_2 + 2^3 q_2$, com $q_2 = r_2 + 2q_3$. Fazendo isso para q, q_1, ..., $q_{n-1} = 1$, obtemos

$$a = r_0 + r_1.2 + r_2.2^2 + r_3.2^3 + \cdots + r_{n-1}.2^{n-1} + r_n.2^n.$$

As divisões também eram feitas transformando-as em multiplicações. Por exemplo, para dividir 540 por 12, devemos encontrar quantos 12 precisamos para chegar a 540.

*1 $\longrightarrow$ 12

2 $\longrightarrow$ 24

*4 $\longrightarrow$ 48

*8 $\longrightarrow$ 96

16 $\longrightarrow$ 192

*32 $\longrightarrow$ 384

Vejamos que, pegando o maior número, 384, não podemos somá-lo com 192, pois passa de 540; então, pegamos 96, e assim, $384 + 96 = 480$, o que ainda falta. Logo, pegamos 48, e assim, $480 + 48 = 528$, o que ainda falta. Mas, não podemos pegar 24, pois passa e, então, nos restam 12. Daí, $384 + 96 + 48 + 12 = 540$, que é o valor procurado, bastando agora somar os números $1 + 4 + 8 + 32 = 45$. Portanto 540/12 é igual a 45.

Muitos historiadores defendem a tese que a Geometria começou de fato no Egito antigo e, entre esses, está o historiador Heródoto, do século V a.C., em que relata sobre a agrimensura, prática do antigo Egito, entre os primórdios da Geometria como ciência, onde observa-se que, de fato, a palavra Geometria significa medida de terra.

Embora, não se tenha certeza de sua origem, parece seguro assumir que ela brotou de necessidades práticas ligadas à agricultura e à engenharia. Os egípcios sabiam calcular áreas de retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles e trapézios isósceles.

O modo como calculavam a área de um retângulo é a mesma que utilizamos atualmente EVES (2004). Vejamos o problema 6, do papiro de Moscou.

“se lhe é dito, um retângulo de área 12, $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ do comprimento. Para o comprimento calcule $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ para obter 12. Resultado $1\frac{1}{3}$. Calcule com estes 12,$1\frac{1}{3}$ vezes. Resultado 16. “Calcule sua raiz quadrada”. Resultado 4 para comprimento. $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ é 3 para largura"

Escrevendo esse procedimento em nossa linguagem, como

$$A = c \cdot l \tag{3.9}$$

e

$$l = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot c. \tag{3.10}$$

Substituindo-se 3.10 em 3.9, temos

$$\frac{3}{4} \cdot c \cdot c = 12, \tag{3.11}$$

ou seja,

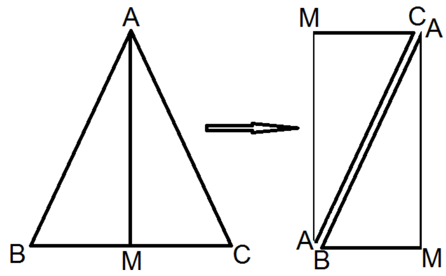
$$c \cdot c = 12 \cdot \frac{4}{3}, \tag{3.12}$$

e assim, $c^2 = 16$; logo, $c = 4$. Substituindo-se o valor de c em 3.10, temos que a altura é igual a 3. Portanto, o retângulo tem medidas 4 de comprimento e 3 de altura.

No papiro de Ahmes, o problema 51 mostra como obter a área de um triângulo isósceles, multiplicando a metade do que chamaríamos de base pela sua altura. Esse método é justificado pensando o triângulo isósceles como dois triângulos retângulos, o qual podemos deslocar um dos triângulos e encaixá-los um no outro, de modo a formar um retângulo, em que BM é a metade do segmento AC Figura 22.

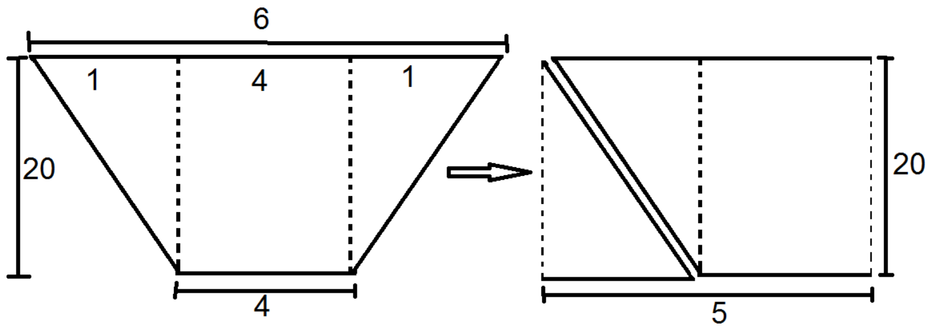
Para o trapézio isósceles, o pensamento é o mesmo: transformá-lo em um retângulo, no problema 52 do papiro de Ahmes, em que a base maior é 6, a menor é 4 e a distancia entre elas é 20. Tomando a metade da soma entre as bases, de modo a fazer um retângulo, depois multiplica-se o resultado por 20 para achar a área. A Figura 23 mostra uma ilustração:

Figura 22 – Área do triângulo isósceles



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 23 – Área do trapézio isósceles



Fonte: Elaborado pelo autor

Os egípcios também tinham cálculos com círculos, calculavam áreas de círculos e volumes de cilindros, com uma boa aproximação comparada com os cálculos de hoje. No problema 50, do papiro de Ahmes, ele assume que a área de um círculo de diâmetro 9 unidades é igual a área de um quadrado de lado igual a 8.

Essa mesma operação aparece em outro problema, em que se deseja construir um celeiro redondo (um cilindro), de 9 por 10.

Procedimento, subtraia $\frac{1}{9}$ de 9 de 9: resultado 1. Resta 8. Multiplique 8 por 8; obtemos 64. Multiplique 64 por 10. Resultado é 640.

Assim, observamos que a área do círculo da base é calculado do seguinte modo, usando-se nossa linguagem algébrica,

$$A_c = \left(D - \frac{1}{9} . D\right)^2 = \left(\frac{8D}{9}\right)^2, \tag{3.13}$$

com $D = 2r$. Comparando com a nossa fórmula atual,

$$A_c = \pi \cdot r^2, \tag{3.14}$$

temos que:

$$\pi \cdot r^2 = \frac{64 \cdot 4 \cdot r^2}{81}, \tag{3.15}$$

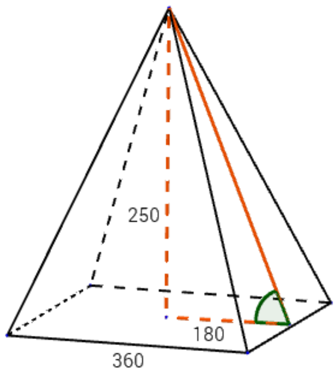
Ou seja, $\pi = \frac{64.4}{81} = \frac{256}{81} \cong 3{,}16$

Não se sabe o porquê dessa subtração de $\frac{1}{9}$ do diâmetro e não podemos dizer que eles tinham uma aproximação para π, mas sempre que era preciso calcular a área de um circulo, subtraia-se do diâmetro $\frac{1}{9}$, assim esse $\frac{1}{9}$ era uma constante multiplicativa do diâmetro.

Em relação às pirâmides, os egípcios sabiam calcular a inclinação dos seus lados. Já para se calcular a inclinação constante das faces da pirâmide, eles usavam um conceito equivalente ao de cotangente, em que se calculava a razão de afastamento horizontal pelo vertical, essa chamada de *seqt*. As medidas eram calculadas na vertical, em cúbitos (aproximadamente 0,5 m) e, na horizontal, em "mãos", das quais haviam sete em um cúbito.

No problema 56, do papiro de Ahmes, pede-se o *seqt* de uma pirâmide que tem 250 cúbitos de altura e uma base quadrada de lado 360 cúbitos Figura 24.

Figura 24 – Pirâmide



Fonte: Elaborado pelo autor

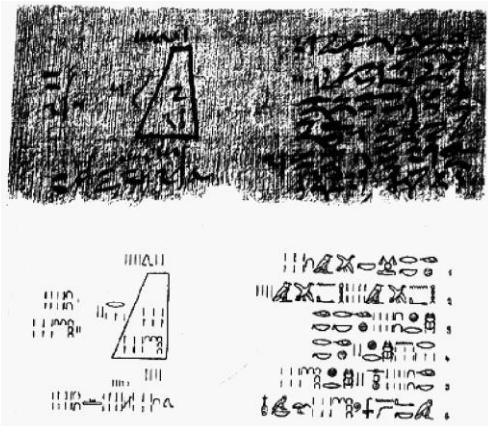
Procedimento: Divide-se 360 por 2, o resultado é 180, divide o resultado por 250, obtendo $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$. Multiplica-se o resultado por 7, deu o resultado $5\frac{1}{25}$ em mãos por cúbito.

Em outro problema, desse mesmo papiro, há medidas parecidas com as medidas da grande Pirâmide de Quéops, uma das sete maravilhas do mundo, com lado da base igual a 440 cúbitos e altura 280 cúbitos, o seqt sendo $5\frac{1}{2}$ mãos por cúbito:

$$seqt = \frac{220}{280} = \frac{11}{14}.7 = 5.\frac{1}{2} \tag{3.16}$$

Outro problema muito interessante é do cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada (problema 14 do papiro de Moscou). Há uma figura que parece com um trapézio, mas é um tronco de pirâmide (Figura 25).

Figura 25 – Tronco de Pirâmide



Fonte: http://jonasportal.blogspot.com/2010/02/o-papiro-de-moscou-ou-papiro-golonishev.html

Acreditava-se que era um problema de trapézio, mas percebeu-se, com interpretação desse, que se tratava do cálculo do volume de um tronco de pirâmide de bases quadradas, com base superior de aresta 2, base inferior de aresta 4, e altura igual a 6.

Procedimento: multiplica-se 2 por 2, multiplica-se 4 por 4, soma os resultados 4 e 16 mais o o produto de 2 por 4, o resultado é 28. Esse então é multiplicado por um terço de seis, veja é 56. Observemos que o volume foi calculado segundo a nossa fórmula moderna

$$V = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3},$$

onde h é a altura, a e b são as arestas das bases. Eles calculavam o volume da pirâmide, assim: "um terço da área da base vezes a altura", presume-se que foi conseguida de forma empírica.

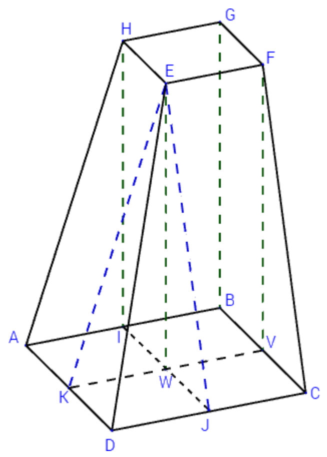
Não se sabe como os egípcios chegaram a essa concepção correta para o volume do tronco uma teoria, mas uma provável teoria segundo (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 34), "é que eles tenham procedido da mesma forma que para os triângulos isósceles e trapézios, ou seja, decomposto o tronco em paralelepípedos e agrupando-os de forma a levá-los à forma correta".

Uma decomposição sugerida é a da Figura 26, em que EFGHIWVB é um prisma de volume $V_1 = b^2 \cdot h$. Juntando os sólidos AKWIHE e JCVWEF, temos um prisma de dimensões $(a-b)$, b e h, cujo volume é $V_2 = (a-b) \cdot b \cdot h$, e a pirâmide KDJWE, que pode ser pensada como um prisma de dimensões $(a-b)$, $(a-b)$ e $h/3$, cujo volume é V3 = (a − b)² .h/3

Assim, temos que o volume do tronco será dado por

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3.$$

Figura 26 – Tronco de Pirâmide



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim,

$$V_t = b^2.h + a.b.h - b^2.h + \frac{a^2.h - 2.a.b.h + b^2.h}{3}$$

Ou seja,

$$V_t = a.b.h + \frac{a^2.h - 2.a.b.h + b^2.h}{3}$$

Ou ainda,

$$V_t = \frac{3a.b.h + a^2.h - 2.a.b.h + b^2.h}{3}$$

Dai,

$$V_t = \frac{h(\,a^2 + a.b + b^2)}{3}.$$

O fato de o conhecimento matemático dos egípcios ser construído de forma empírica, no qual se desenvolveu procedimentos para diversos tipos de cálculos, é realmente impressionante, ou seja, apesar de não se construírem demonstrações e fórmulas matemáticas seus procedimentos resolviam bem seus problemas, claro, que com algumas restrições.

Com certeza, um dos povos que mais desenvolveram a Matemática e o pensamento, foram os Gregos. Na próxima seção, veremos quais contribuições os gregos nos deixaram para a geometria e para o desenvolvimento da Matemática em geral.

4 GEOMETRIA PLANA GREGA

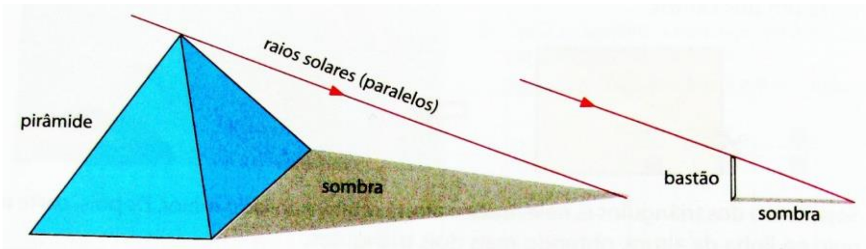
Neste capítulo, trataremos do legado de um povo que impactou toda a humanidade com a sua forma de pensar e é a base de boa parte do conhecimento da sociedade moderna. Apresentaremos os princípios da Geometria plana através de grandes matemáticos, como Tales, Pitágoras e Euclides. Deste destacamos sua grande obra *Os Elementos*.

4.1 GEOMETRIA PRÉ- EUCLIDIANA

Grécia, berço da filosofia, do raciocínio lógico e da razão, e que nos deu grandes nomes. Um deles foi Tales de Mileto, matemático e filosofo do século VII a. C. Tales, considerado o primeiro matemático e filosofo grego, visitou o Egito e a Babilônia, que acreditam ter tido contato com Matemática e a Astronomia.

Nessas viagens surgiram algumas histórias, como a dele ter previsto um eclipse durante sua passagem pela Babilônia. Outra história que se conta, é que em uma de suas viagens foi chamado pelo Faraó do Egito para determinar a altura da pirâmide de Quéops, cálculos esses feitos com o uso de uma vara colocada verticalmente no solo (Figura 27).

Figura 27 – Cálculo da altura de uma Pirâmide por Tales



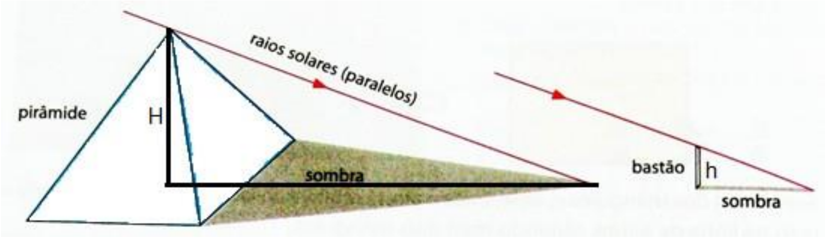
Fonte: http://semelhancadetriangulos.blogspot.com/2012/02/historia-da-semelhanca-de-triangulos.html.2018

Ele esperou que a sombra da vara tivesse a mesma medida que a vara, e quando isso ocorreu pediu para que medissem a sombra da pirâmide, pois essa seria sua altura. Porém, havia um equívoco nessa afirmação, pois ele deveria também mandar somar a metade da medida da aresta da base. Hoje, usamos esse método que consiste no uso de semelhança de triângulos.

Na Figura 28, temos que

$$\frac{H}{S_p} = \frac{h}{S_v}$$

Figura 28 – Cálculo da altura por semelhança



Fonte: http://semelhancadetriangulos.blogspot.com/2012/02/historia-da-semelhanca-de-triangulos.html.2018

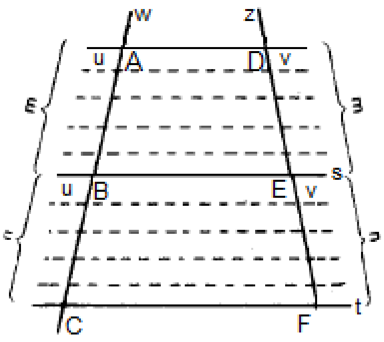
em que H é a altura da pirâmide, S_p a sombra da pirâmide, h altura da vara e S_V a sombra da vara.

Alguns teoremas e suas demonstrações são atribuídos a Tales, o qual o mais conhecido é o Teorema de Tales, que será visto na subseção a seguir.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Tales) *Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas ou mais transversais, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma reta é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra reta.*

Sejam r, s e t retas paralelas entre si, cortadas por retas transversais w e z, como na Figura 29. Considerando que existe um segmento de medida u que cabe m vezes no segmento $\overline{AB}$ e n vezes no segmento $\overline{BC}$, como todas as retas são paralelas, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ sobre a reta z, são os correspondentes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, sobre a reta w, temos que existe um segmento v que cabe m vezes no segmento $\overline{DE}$ e n vezes no segmento $\overline{EF}$.

Figura 29 – Feixe de retas paralelas cortadas por transversais



Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando as razões $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$ e $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{m \cdot v}{n \cdot v} = \frac{m}{n}$, temos que

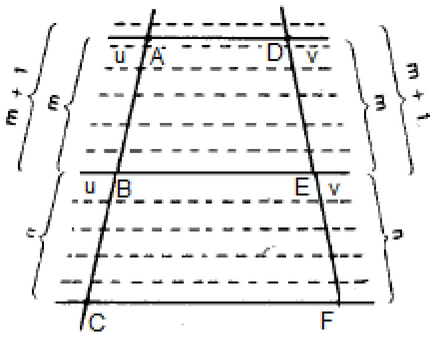
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}.$$

Isto mostra que para segmentos comensuráveis o teorema é valido, que era o que se conhecia na época.

Mas será que todos os segmentos são comensuráveis? A resposta é não. Mostraremos que existem segmentos que são não comensuráveis, ou seja, incomesuráveis e que, para esses segmentos, o teorema de Tales continua valendo.

Suponhamos, então, que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis, ou seja, que não exista segmento que messa ambos. Tomemos, assim, um segmento *u* que caiba *n* vezes em $\overline{BC}$, marcando *u* sucessivamente em $\overline{AB}$, temos como mostra a Figura 30, que:

Figura 30 – Feixe de retas paralelas cortadas por transversais



Fonte: Elaborado pelo autor

$$\overline{BC} = n \cdot u \tag{4.1}$$

e

$$m \cdot u < \overline{AB} < (m+1) \cdot u. \tag{4.2}$$

Calculando a razão entre 4.2 e 4.1, temos que

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{m+1}{n}. \tag{4.3}$$

Por outro lado, como as retas que traçamos são paralelas as retas *r*, *s* e *t*, também temos

$$\overline{EF} = n \cdot v \tag{4.4}$$

e

$$m \cdot v < \overline{DE} < (m+1) \cdot v. \tag{4.5}$$

Agora, calculando a razão entre (4.5) e (4.4), vem:

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} < \frac{m+1}{n} \tag{4.6}$$

Como u é segmento que mede BC, podemos fazê-lo variar dividindo-o, fazendo assim n aumentar. Nessas condições, $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, dado por 4.3, e $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$, dado por 4.6. Como esse número real é único, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}, \tag{4.7}$$

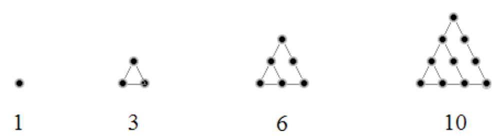
como queríamos demonstrar.

Outro matemático que marca a história e que faz a transição entre Tales e Euclides, é Pitágoras de Samos (580 - 500 a.C. aproximadamente). EVES (2004) Pitágoras, também era filosofo e foi o criador de um grupo que ficou conhecido como os "pitagóricos". As descobertas desse contribuíram bastante para o desenvolvimento da Matemática através de seus estudos sobre os números.

Para Pitágoras, tudo era número; os números eram figurados por um elemento, que hoje chamamos de ponto, e que de acordo com suas disposições, apresentavam características distintas.

Dependendo das configurações, esses números ficaram conhecidos como números triangulares (Figura 31), números quadrados (Figura 32), e números pentagonais (Figura 33), ou seja, números poligonais.

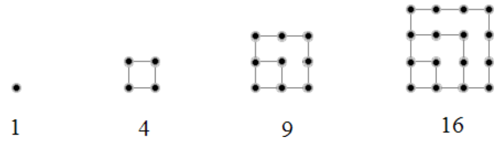
Figura 31 – Números triangulares



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/17107880

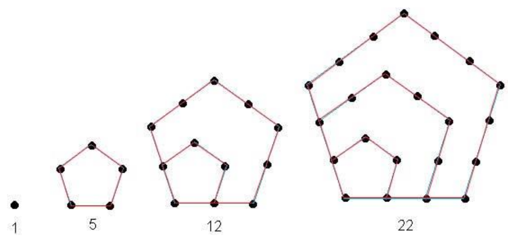
Cada uma dessas sequências apresentam características bem interessantes. Por exemplo, os números triangulares, que conforme a Figura 31, são os números 1, 3, 6, 10, $\cdots$, podem ser dados como a soma dos números $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$, assim $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, ...

Figura 32 – Números quadrados



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/17107880

Figura 33 – Números pentagonais



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/17107880

Se considerarmos o “ponto” como na Figura 31, temos exatamente todos os números triangulares, em que a quantidade de pontos de cada triângulo nessa figura, representa um número triangular.

Usando nossa álgebra moderna, podemos escrever, o $n-$ ésimo número triangular, como

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}. \tag{4.8}$$

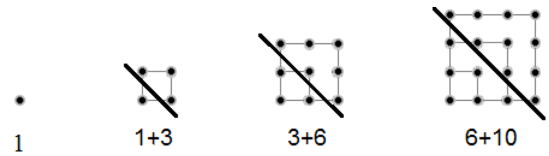
Na Figura 32, temos o que chamamos de números quadrados, ou seja, os números $1, 4, 9, 16, \cdots$. Relacionando-os com suas posições $1^{a}, 2^{a}, 3, 4^{a}, \cdots$, podemos observar que um número quadrado é o quadrado da sua posição. Observe, também, que cada número quadrado é dado pela soma dos termos da sequência de números impares $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$. Assim, o $n-$ésimo número quadrado, é dado por:

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^{2}. \tag{4.9}$$

Outra conclusão sobre os números quadrados, é que eles sempre são a soma de dois números triangulares consecutivos, isto é, se $\frac{(n-1)n}{2}$ e $\frac{n(n+}{2}$ são dois números triangulares consecutivos, então:

$$\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2} = n^{2}.$$

Figura 34 – Números quadrados como a soma de dois números triangulares consecutivos



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/17107880

Temos, também, os números pentagonais. Cada número pentagonal é um termo da sequência $1, 5, 12, 22, \cdots$. Observe que o $n-$ésimo número pentagonal é dado pela soma dos termos da sequência $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \cdots,\ 3n-2$, ou seja, cada número pentagonal, é dado por

$$1+4+7+10+\cdots+(3n-2)=\frac{3n^2-n}{2}. \tag{4.10}$$

Observando essas sequências, podemos notar que os números poligonais sempre são dados pela soma dos termos de uma P.A. de razão $m-2$, $m \geq 3$, em que m representa o número de lados do polígono, com o primeiro termo sempre igual a 1 e termo geral dado por $a_n = 1+(n-1).(m-2) = m.n-2n-m+3$, no qual n representa a posição do número procurado, ou seja, o $n-$ésimo número poligonal. Assim, se $a_1 = 1$, e representando o $n-$ésimo número poligonal por S_n, então da fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2},$$

vem

$$S_n = \frac{(1+m.n-2n-m+3).n}{2},$$

ou seja,

$$S_n = \frac{n^2\cdot(m-2)+n\cdot(4-m)}{2}. \tag{4.11}$$

Apesar do mais famoso teorema que leva seu nome, Teorema de Pitágoras, para os pitagóricos esse resultado era mais aritmético e filosófico do que geométrico. Os pitagóricos trabalhavam com números e segmentos e, talvez, por essa razão, os historiadores acreditem que seus estudos eram com as triplas pitagóricas que tinham uma característica muito peculiar, eram números quadrados que somados resultavam em outro número quadrado.

A primeira tripla pitagórica foi 3, 4 e 5, a da famosa soma $9+16 = 25$, em que se interpretava o 3 como sendo o macho, o 4 como a fêmea, e o 5, como o casamento. Assim, toda tripla de números da forma $3n$, $4n$ e $5n$, com $n \in \mathbb{N}$, forma uma tripla pitagórica.

Nessa tentativa de achar tais números, foram desenvolvidas duas fórmulas. Uma por Pitágoras, que para o menor lado toma-se um número ímpar e, para o outro, adjacente ao ângulo reto, eleva-se esse número ao quadrado e subtrai a unidade, e o resultado divide por dois. O maior lado será esse resultado adicionado da unidade. Assim, sendo n ímpar, a tripla pitagórica será $n, \frac{n^2-1}{2}$ e $\frac{n^2+1}{2}$, tal que:

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 \tag{4.12}$$

Já Platão, dizia: pega-se um número par para um dos lados adjacentes ao ângulo reto, o outro lado será dado pelo quadrado da metade desse número, e do resultado subtraímos a unidade, e o lado maior será o quadrado da metade do nosso primeiro lado adicionado da unidade. Assim, sendo $n \in \mathbb{N}$, a tripla pitagórica será $2n$, $n^2 - 1$ e $n^2 + 1$, de modo que:

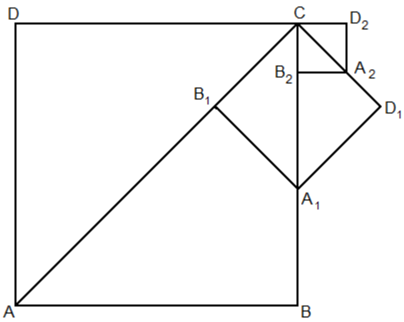
$$(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2. \tag{4.13}$$

Durante esse período no estudo de segmentos começaram a se questionar se todo segmento era realmente comensurável, com isso surgiram varias lendas [1], em que dizem ter abalado à estrutura matemática grega com conspirações e assassinados, mas muitas dessas historias, segundo os historiadores são exagero, mas o descobrimento de segmentos incomensuráveis foi algo fantástico, que se deu ao estudar a relação entre o lado do quadrado e sua diagonal, em que esse estudo é atribuído a matemáticos como Teodoro e Teeteto, será que existia um segmento que mensurasse o lado e a diagonal de um quadrado?

Para esse estudo foi utilizada uma técnica chamada de *antifaireise* (subtrações sucessivas) Para mostrar a existência de segmentos incomensuráveis, suponhamos que no quadrado Figura 35 o lado AB e a diagonal AC sejam comensuráveis, então existe um segmento de comprimento $\boldsymbol{u}$ que cabe um número inteiro de vezes em AB e AC. Construiremos outro quadrado $A_1B_1CD_1$, de modo que o lado do novo quadrado esteja sobre a diagonal AC e a diagonal do novo quadrado esteja sobre o lado BC, com o seguinte procedimento traçamos um arco de circunferência de centro A e raio AB até encontrar AC, onde esse ponto de intersecção chamaremos B_1, por B_1 traçamos uma perpendicular até interceptar AC, esse ponto chamaremos de A_1, agora construímos duas paralelas uma paralela a B_1A_1 e outra paralela a AC, gerando assim o ponto D1, para mostrar que essa construção é um quadrado: Observe que o ângulo $\widehat{CB_1A_1}$ é reto por construção, $\widehat{ACB} = \widehat{B1CB}$ é meio reto logo, B_1A_1C também é meio reto, assim temos que o triângulo CB_1A_1 é isósceles com $CB_1 = B_1A_1$, de modo análogo podemos concluir que $CD_1 = A_1D_1$, com $\widehat{A_1CD_1} = \widehat{CA_1D_1}$ sendo meio reto e $\widehat{CD_1A_1}$ sendo reto, portanto $A_1B_1CD_1$ é um quadrado.

[1] Para um estudo mais detalhado sobre essas lendas ver (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 74)

Figura 35 – Segmentos incomensuráveis



Fonte: Elaborado pelo autor

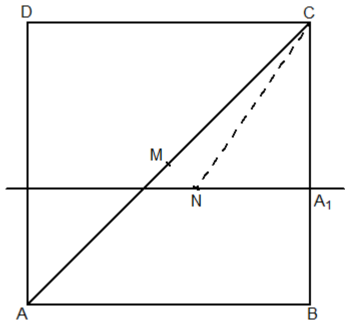
Agora escrevemos CB_1 e CA_1 em função de AC e AB, pois se existe um segmento de comprimento ***u*** que mede tais segmentos também medira CB_1 e CA_1, nosso objetivo é mostrar que se esse procedimento continua indefinidamente, existirá um segmento menor que o segmento dado que mede o lado e a diagonal dos quadrados o que é um absurdo. Escrevendo CB_1 e CA_1 em termos de AC e AB. $CB_1 = AC - AB_1$, mas por construção $AB_1 = AB$, logo, $CB_1 = AC - AB$ $CA_1 = AB - A_1B$, porém $A_1B = CB_1$, observemos que traçando o segmento B_1B, temos o triângulo AB_1B, que é isósceles por construção, assim $\widehat{B_1BA_1} = \widehat{A_1B_1B}$, pois são complementos de ângulos retos, assim o triângulo A_1BB_1 também é isósceles com $A_1B = CB_1$, assim temos, $CA_1 = AB - CB_1$. Portanto, $CA_1 = AB - AC + AB = 2AB - AC$. Assim podemos construir infinitos quadrados, mas para provar que em algum momento existira uma segmento menor que o segmento dado utilizaremos um lema que já era conhecido, mas ficou conhecido como lema de Euclides.

Proposição 4.1.2 *Dados dois segmentos desiguais, se do maior tomarmos um segmento maior que a metade, do que é deixado tomar um segmento maior que a metade e assim aconteça sempre, algum segmento será deixado, no qual será menor que qualquer segmento dado.*

Assim devemos mostrar que $CB_1 < \frac{CB}{2}$, de fato temos que, $CB_1 < CA_1$, já que CB_1 é o lado de um quadrado enquanto que CA_1 é a diagonal desse mesmo quadrado, logo podemos escrever $CB_1 + CB_1 < CA_1 + CB_1$, mas sabemos que $CB_1 = A_1B_1 = A_1B$, assim temos que $CB_1 + CB_1 < CA_1 + A_1B \Rightarrow 2CB_1 < CB \Rightarrow CB_1 < \frac{CB}{2}$.

Também devemos mostrar que $CA_1 < \frac{AC}{2}$, para isso usaremos a Figura 36, onde por A_1 traçamos uma perpendicular a CB, traçamos uma circunferência de centro em C e raio CM, em que M é o ponto médio de AC, assim conseguimos N que é o ponto de intersecção com a reta que passa por A_1, assim por construção $CM = CN$. Temos que $CA_1 < CN$, pois CN é a hipotenusa do triangulo retângulo CA_1N, reto em A_1, mas por construção $CN = CM$ e $CM = \frac{CA}{2}$,

Figura 36 – Segmentos incomensuráveis

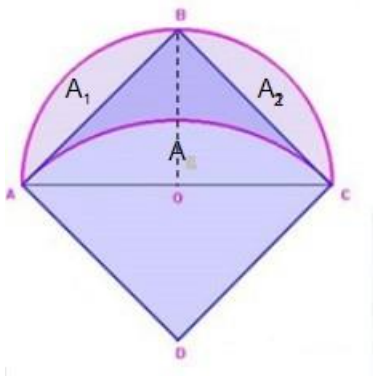


Fonte: Elaborado pelo autor

logo, $CA_1 < \frac{CA}{2}$. Ou seja, se continuarmos com esse processo, segundo o lema de Euclides, teremos um segmento menor que o segmento de comprimento ***u*** dado no inicio o que é absurdo, pois era o menor segmento que media o lado e a diagonal do quadrado, portanto a diagonal e lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis um em relação ao outro.

Um dos matemáticos que realmente começou a trabalhar e a desenvolver a geometria foi Hipócrates de Quios (século V a.C.) que forneceu os primeiros exemplos de figuras limitadas por curvas, essas conhecidas como as lúnulas de Hipócrates, BOYER e MERZBACH (2012) lúnulas são regiões limitadas por dois arcos de circunferências, Figura 37 e Figura 38.

Figura 37 – Lúnula de Hipócrates



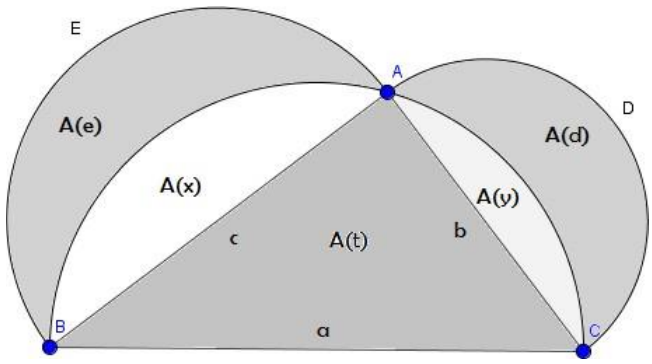
Fonte: slideplayer.com.br/slide
/5033298

Vamos mostrar que a lúnula Figura 37 formada pelos arcos AC e ABC tem área igual ao triangulo isósceles ABC, reto em B, assim como Hipócrates partiremos do princípio que segmentos de círculos semelhantes possuem a mesma razão que o quadrado descritos sobre suas bases, assim temos que os segmentos A,A_1 e A_2 são semelhantes, pois estão todos sob ângulos reto, como o triangulo é retângulo temos, $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$, assim podemos concluir que

$A = A_1 + A_2$, podemos notar que a lúnula pode ser obtida retirando-se do triangulo ABC, A e acrescentando-se A_1 e A_2, como o que retiramos é igual ao que foi acrescentado, concluímos que a lúnula tem área igual ao triangulo.

Na Figura 38 temos que mostrar que a soma das áreas das lúnulas D e E é igual a área do triângulo ABC, reto em A, do mesmo modo, que na figura anterior temos que os

Figura 38 – Lúnula de Hipócrates



Fonte: slideplayer.com.br/slide/5033299

segmentos de círculos são semelhantes pois estão sob o mesmo ângulo (dois retos), assim como o triângulo é retângulo temos que, $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$, logo, $A(t) + A(x) + A(y) = A(e) + A(x) + A(d) + A(y)$. Assim temos que $A(t) = A(e) + A(d)$,como queríamos demostrar.

4.2 EUCLIDES E OS ELEMENTOS

Euclides é uma figura misteriosa da história, pois não há muitas informações, não se sabe onde nasceu ou morreu, alguns dizem até que ele nem existiu, foi apenas um pseudônimo criado por uma sociedade como os pitagóricos para assinar seus trabalhos, mas isso não é verdade! Euclides existiu e foi um dos matemáticos mais brilhantes por volta de 300 a.C, tudo que sabemos sobre ele deve-se a uma obra sumário de Eudemo que preservado por Proclus nos deu indícios de quem foi Euclides, sabemos que ele escreveu algumas obras como *Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos, Óptica* e a sua obra mais famosa *Os elementos*. AABOE (2013)

Os elementos de Euclides é uma obra com 13 livros que de maneira resumida se divide da seguinte forma;

Livro I: Construções elementares, teoremas de congruência, área de polígonos, teorema de Pitágoras;

Livro II: Álgebra geométrica;

Livro III: Geometria do círculo;

Livro IV: Construção de certos polígonos regulares;

Livro V: A teoria das proporções de Eudoxo;

Livro VI: Figuras semelhantes;

Livro VII-IX: Teoria dos números;

Livro X: Classificação de certos irracionais;

Livro XI: Geometria no espaço, volumes simples:

Livro XII: Área e volumes;

Livro XIII: Construção dos cinco sólidos regulares.

Nessa obra ele adota o método lógico dedutivo, no qual se baseia em fatos aceitos como evidentes, chamados de axiomas, postulados e definições, atualmente não há mais distinção entre axioma e postulado. Nesse trabalho queremos ressaltar a importância de como esse modo de fazer geometria é importante, explicando aos nossos alunos como esse modo de pensar surgiu, em um curso de geometria plana que envolva a historia, onde serão focados não apenas os cálculos, mas as definições e as propriedades das figuras, utilizando como principal apoio *Os elementos*. Nosso foco de estudo será o teorema de Pitágoras, as áreas semelhantes e a quadratura dos polígonos. Iniciaremos com os postulados de Euclides (2009).

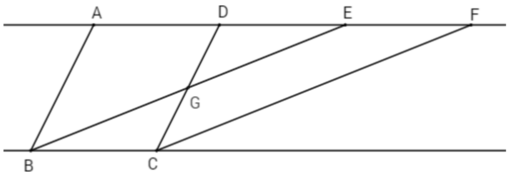
1. Fique postulado traçar uma reta traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto;
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo;
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos;
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois ângulos retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

O teorema de Pitágoras é um dos teoremas mais conhecidos entre os alunos do ensino básico, existem várias demonstrações para esse teorema, mostraremos a primeira demonstração formal, essa realizada por Euclides que é o ponto central do livro I. Para isso ele fez várias proposições e construções antes, das quais vamos precisar dos casos de congruência entre triângulos e a proposição I.37. Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si. Demonstraremos primeiro a proposição I.35

Proposição 4.2.1 *(I.35) Paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas retas paralelas são iguais entre si.*

Sejam os paralelogramos ABCD e EBCF ambos com base sobre BC Figura 39.

Figura 39 – Paralelogramos sobre a mesma base



Fonte: Elaborado pelo autor

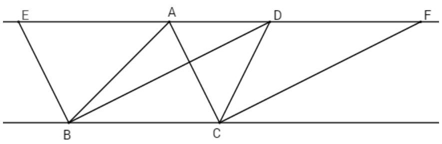
Como ABCD e EBCF são paralelogramos temos AD é igual a BC que é igual a EF, logo AD é igual a EF, adicionando DE a ambos temos que AE é igual a DF, também temos que AB é igual a DC e BE é igual a CF, assim temos que os triângulos ABE é igual ao triângulo DCF, pelo caso L.L.L, logo subtraindo o triângulo DGE e adicionando o triângulo GBC, temos que os paralelogramos ABCD e EBCF são iguais, pois se de coisas iguais retiro ou coloco partes iguais o que sobra é igual.

Portanto, paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais, como queríamos mostrar.

Proposição 4.2.2 *(I.37) Triângulos que estão sobre uma mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si.*

Sejam os triângulos ABC e DBC ambos sobre a base BC Figura 40,

Figura 40 – Triângulos sobre a mesma base



Fonte: Elaborado pelo autor

traçamos uma paralela a AC passando por B e marcamos o ponto E, interseção entre as retas, e traçamos uma paralela a AB passando por C e marcamos o ponto F, logo temos dois paralelogramos EBCA e DBCF, que pela preposição anterior são iguais, pois estão sobre a *mesma base e nas mesmas paralelas, então o triângulo ABC é metade do paralelogramo EBCA é igual ao triângulo DBC é a metade do paralelogramo DBCF, pois metade de coisas iguais são iguais.*

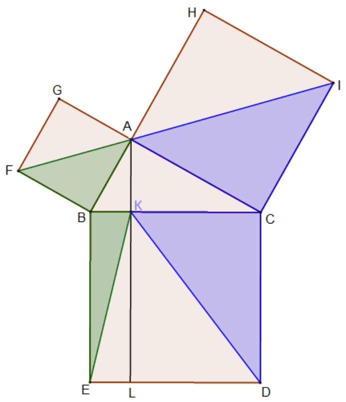
Portanto, triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si, como queriamos mostrar.

Agora com essas ferramentas em mãos podemos demostrar o teorema de Pitágoras segundo Euclides.

Teorema 4.2.3 *Nos triângulos retângulos, o quadrado construído sobre a hipotenusa tem área igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.*

Seja o triângulo ABC, reto em A, e os quadrados BCDE, ABFG e ACIH Figura 41, traçamos uma perpendicular a BC passando por A.

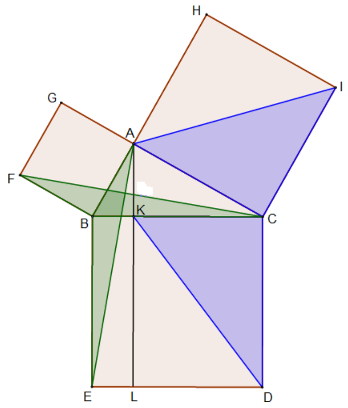
Figura 41 – Quadrados construídos sobre a hipotenusa e os catetos



Fonte: Elaborado pelo autor

Mostraremos que o quadrado ABFG tem área igual a área do retângulo BKLE e o quadrado ACIH tem área igual a área do retângulo KLDC, traçamos a diagonal AF do quadrado ABFG, como as retas que passam por GC é paralela a reta que passa por FB os triângulos ABF e CFB são iguais Figura 42,pois possuem mesma base e estão sobre as mesmas paralelas, traçando o segmento AE temos o triângulo ABE que é congruente ao triângulo CFB, pois AB é igual a BF, BC é igual a BE e os ângulos $\widehat{FBC}$ *e* $\widehat{ABE}$ *são iguais, pois são a soma de um ângulo reto com o ângulo* $\widehat{ABC}$*, logo são congruentes pelo caso lado-ângulo-lado(L.A.L).*

Figura 42 – Quadrados construídos sobre a hipotenusa e os catetos

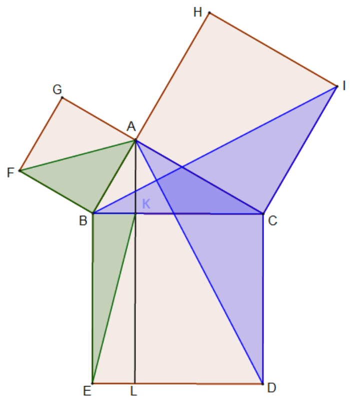


Fonte: Elaborado pelo autor

Observemos que as retas que passam por BE e AL são paralelas assim os triângulos KBE e ABE possuem áreas iguais, pois estão sobre a mesma base e sob as mesmas retas paralelas. Como as metades são iguais o todo também será.

De modo análogo o triângulo ACI será igual ao triângulo KCD Figura 43,

Figura 43 – Quadrados construídos sobre a hipotenusa e os catetos



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, como queríamos demonstrar.

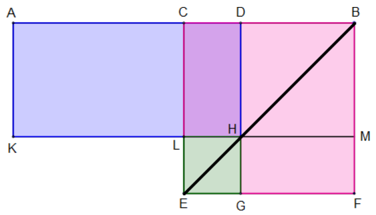
Os elementos de Euclides é um livro fantástico, apesar de não ser um livro muito didático para nossos alunos devido a complexidade de algumas demonstrações é um excelente material para professores pesquisar e preparar suas aulas trazendo um contexto histórico e modo de pensar diferente do que estamos acostumados.

Outro tópico muito interessante é sua abordagem sobre as áreas das figuras poligonais que de modo muito inteligente consegue resolver esse problema, não há uso de fórmulas tudo que ele faz é construir um quadrado que tenha a mesma área da figura dada, a chamada quadratura das figuras, isso é feito no livro II em que destacaremos a preposição 5 e a construção 14.

Proposição 4.2.4 *Caso uma linha reta seja cortada em iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais da reta toda, com o quadrado sobre a entre as seções, é igual ao quadrado sobre a metade.*

Seja a linha AB, C é o ponto que a divide em partes iguais (ponto médio), D é um ponto qualquer que divide em partes desiguais, construímos sobre CB o quadrado CEFB, traçamos uma perpendicular a AB passando por D e marcamos dois pontos G, interseção da reta com EF, e H de modo que DH seja igual a DB, agora traçamos uma KM passando por H, paralela a AB, construindo o retângulo ABMK Figura 44.

Figura 44 – Divisão de um segmento em partes iguais e desiguais



Fonte: Elaborado pelo autor

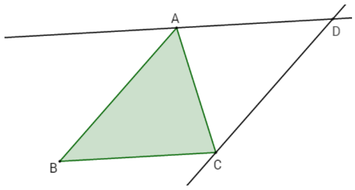
Assim temos que CDHL é igual a HGFM, pois os triângulos BEF e BCE são congruentes assim como os triângulos HEG e HEL e os triângulos BDH e BDM todos pelo caso (L.L.L), e se de coisas iguais retirarmos partes iguais o que resta é igual, também temos que ACLK é igual a CBML, assim temos que o polígono CBFGHL é igual ao retângulo ADHK. Portanto o retângulo contido nos lados desiguais com o quadrado entre as seções é igual ao quadrado sobre a metade.

Agora podemos fazer a quadratura de regiões poligonais para isso dividiremos a região em triângulos faremos a quadratura dos triângulos e somamos os triângulos dois a dois usando o teorema de Pitágoras, em que esses triângulos são colocados nos catetos e o quadrado construído na hipotenusa será a soma, até conseguirmos o quadrado referente a região dada.

Proposição 4.2.5 *Dado o triângulo ABC, construir um quadrado de área igual a do triângulo.*

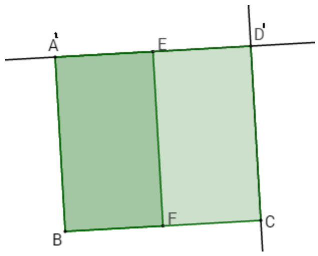
Seja o triângulo ABC, traçamos uma reta paralela a AB passando por C e outra paralela a BC passando por A formando o paralelogramo ABCD Figura 45, transformamos o paralelogramo ABCD em um retângulo A'BCD', tomamos a metade da sua área para ficar igual a área do triângulo Figura 46.

Figura 45 – Transformando Triângulo em paralelogramo



Fonte: Elaborado pelo autor

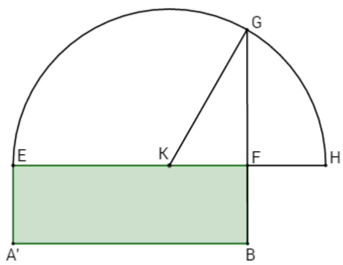
Figura 46 – Transformando paralelogramo em retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Tomamos o retângulo A'EFB, se A'E for igual a EF já temos um quadrado e não há mais o que fazer, mas se A'E for diferente de EF, consideremos EF maior que A'E prolonguemos o lado EF até um ponto H de modo que FB seja igual a FH, tomemos o ponto médio K do segmento EH e tracemos a semicircunferência de raio EK e centro em K, prolongamos o lado BF até encontrar a semicircunferência em G figura 47

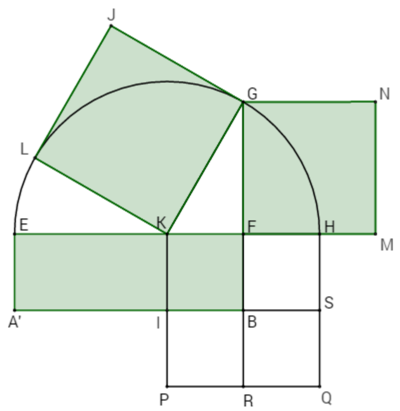
Figura 47 – Construção do quadrado com área igual ao triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Temos que o segmento EH está dividido em partes iguais por K e em partes desiguais por F, assim pela preposição anterior o retângulo A'EFB com o quadrado de lado KF é igual ao quadrado KHQP, por outro lado o triângulo KGF, retângulo em F, pelo teorema de Pitágoras o quadrado sobre KG é igual a soma dos quadrados sobre KF e FG Figura 48..

Figura 48 – Construção do quadrado com área igual ao triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Observemos que os quadrados KGJL e KPQH são iguais, pois HK é igual a GK, assim temos que o retângulo A'EFB é igual ao quadrado FGNM, já que ambos são obtidos da retirada do quadrado de lado KF dos quadrados KGJL e KPQH que são iguais e se de coisas iguais forem partes iguais o que resta será igual. Portanto, o retângulo A'EFB é igual quadrado FGNM, como o retângulo tem a mesma área do triângulo, podemos afirmar que o triângulo e o quadrado tem áreas iguais, como queríamos.

Assim conseguimos quadrar qualquer polígono, um bom exercício é fazer o cálculo da área de polígonos regulares fazendo sua divisão em triângulos e mostrar que um cálculo que eles fazem de maneira simplesmente algébrica tem uma beleza geométrica, talvez assim eles consigam entender o que o cálculo de uma área que é na verdade uma comparação da região dada com um quadrado padrão dado, depois mostrar que quanto mais lados o polígono regular inscrito em uma circunferência, mais sua área se aproxima da área do círculo, para isso podemos usar programas como Excel ou geogebra.

Segundo LIMA (2012) a demonstração é necessária em qualquer nível, mas o professor deve saber como expor essa "demonstração", pois não obrigatoriamente ele deve ter todas as formalidades, mas deve conter os princípios do pensamento matemático, dedução e raciocínio lógico, para que assim o aluno entenda que Matemática não é uma questão de fé, em que o professor diz que é assim e todos os alunos devem acreditar sem questionar.

Durante muito tempo, *Os elementos,* foi objeto de estudos por vários matemáticos que queriam criar uma lista de axiomas mais simples e também tentar demonstrar o quinto axioma que não convenceu muitos matemáticos. Durante essas inúmeras tentativas, surgiram outras geometrias, chamadas geometrias não euclidianas, a geometria elíptica e hiperbólica, nesses estudos sobre os elementos um grande matemático alemão David Hilbert, em 1899, em seu livro *Fundamentos da Geometria* lança um conjunto com 20 axiomas, originalmente 21, porém em 1902 Eliakim Hastings Moore, matemático americano, publicou um artigo na *Transactions of the American Mathematical Society*. Momstrando que o 21º axioma era redundante. Com esse breve relato, podemos ver como a História da Matemática é interessante e importante para o apredizado e entendimento dessa disciplina, assim devemos cobrar que os livros didáticos tragam essa ferramenta, bem como exercícios mais contextualizados, pois a maioria dos exercícios dos livros são apenas manipulação direta da fórmula dada que tem sua importância, mas os exercícios que exigem do aluno o raciocínio a mais também os são.

No capítulo seguinte, apresentamos alguns dados da pesquisa feita com alunos de uma escola pública de Fortaleza-CE, na qual sou professor a oito anos, nessa pesquisa são testados seus conhecimentos em Geometria que foram desenvolvidos durante suas vidas escolares.

5 PESQUISA EM CAMPO

Neste capítulo, apresentaremos a metodologia e os resultados de uma pesquisa feita com alunos do Ensino Médio de uma escola pública em Fortaleza-CE. O intuito dessa pesquisa é verificar o nível do conhecimento em Geometria.

5.1 METODOLOGIA

Essa pesquisa foi feita em uma escola publica de Ensino Médio em Fortaleza- CE a qual pertenço ao quadro de professores a oito anos e durante esse período comecei a questionar se meus alunos estavam realmente compreendendo os conteúdos em especial a parte de Geometria por ter uma afinidade maior. A pesquisa feita por amostragem que consistia de um questionários (Apêndice A), havia 8 perguntas, idade, sexo, disciplina com maior afinidade, grau de afinidade com Matemática, você sabe o que é Geometria, conceitos de Geometria, formas geométricas e teoremas conhecidos e um teste de conhecimentos (Apêndice B), onde haviam 4 questões em que deveriam definir algumas formas geométricas planas(triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio e circunferência), utilizar o teorema de Tales, construir duas figuras com régua e compasso e utilizar o teorema de Pitágoras e por último calcular a área de uma região poligonal.

Com os professores previamente consultados sobre a aplicação da pesquisa ao entrar em sala de aula explicava aos alunos que a pesquisa era sobre os conhecimentos que tinham sobre Geometria e consistia de um questionário e um teste de conhecimentos, a participação era voluntaria e anônima, evitando assim, qualquer tipo de constrangimento. Para aqueles que queriam participar entregava-se o primeiro questionário e após o termino entregava-se o teste de conhecimentos com o material necessário para as construções (régua e compasso), os que não quisessem já havia uma atividade previamente elaborada.

Na escola há 4 turmas de 1^o ano, 2 turmas de 2^o ano e 5 turmas de 3^o ano, sendo os primeiros e segundos anos integrais e os terceiros regulares, com três pela manha, um a tarde e um a noite, o terceiro da noite não participou da pesquisa. A escola tem participaram dessa pesquisa 317 alunos, sendo 110 do 1^o ano, 82 do 2^o ano e 125 do 3^o ano.

5.2 RESULTADOS DO 1º ANO

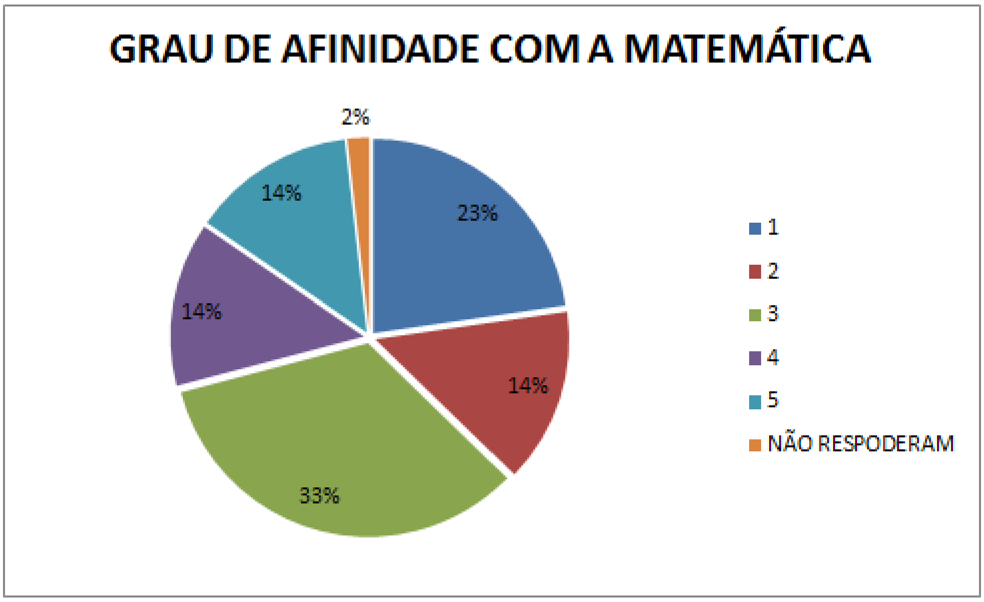
Os 110 alunos do 1º ano apresentaram idade entre 14 e 19 anos, com média igual a 15 anos e a maioria 87% estão na idade correta (14 a 16 anos) para a série em questão. A uma predominância do sexo masculino, mas a diferença é mínima, 51% masculino e 49% feminino. A disciplina que apresentou um maior grau de afinidade foi História, com 18% dos alunos enquanto Matemática atingiu 10%. Uma boa para interagir e tentar mostrar a beleza da Matemática através da História, a área da Natureza, também apresentou uma boa quantidade de alunos que se identifica com a área 28% (Figura 49).

Figura 49 – Alunos do 1º ano

Fonte: Elaborado pelo autor

Outro questionamento feito aos alunos foi. Qual o grau de afinidade com a disciplina de Matemática? A maioria 33% está num nível intermediário, porém muitos 23% não possuem afinidade com a disciplina (Figura 50). Apesar de não ser a disciplina favorita e sentirem dificuldade entendem sua importância.

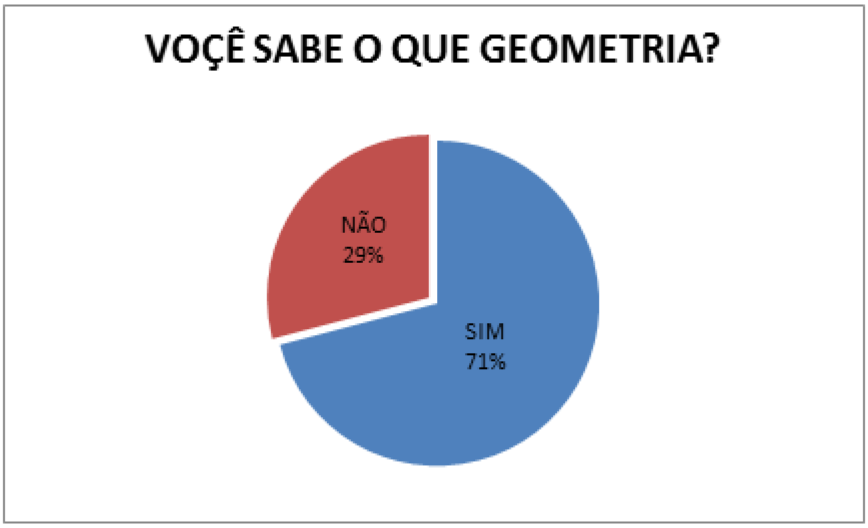
Figura 50 – Alunos do 1º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

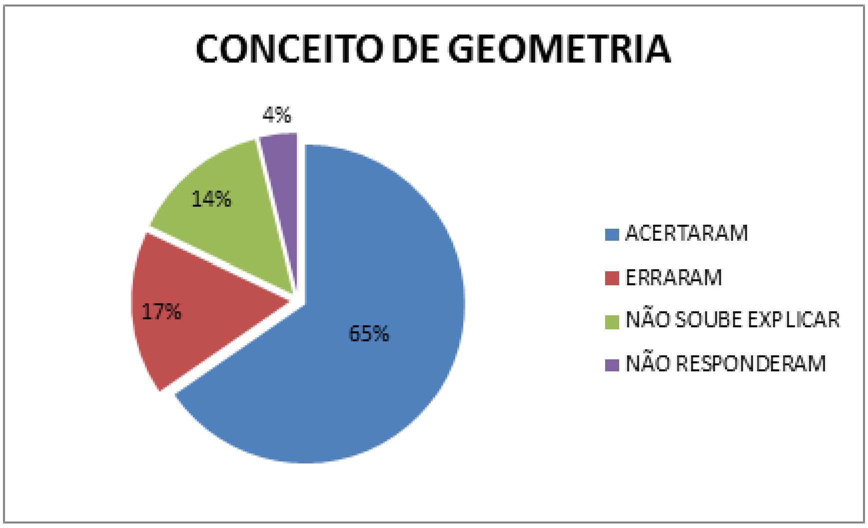
Quando questionados sobre o que é Geometria, 71% dos alunos disse saber o que é (Figura 51). Porém, apenas 65% dos que responderam *sim*, soube dizer de modo coerente a definição, o que corresponde a 48,8% do total (110 alunos). Os demais cometeram erros na definição, alguns por limitarem ao estudo aos ângulos, ou por não souberam explicar (Figura 52).

Figura 51 – Alunos do 1º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 52 – Alunos do 1º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

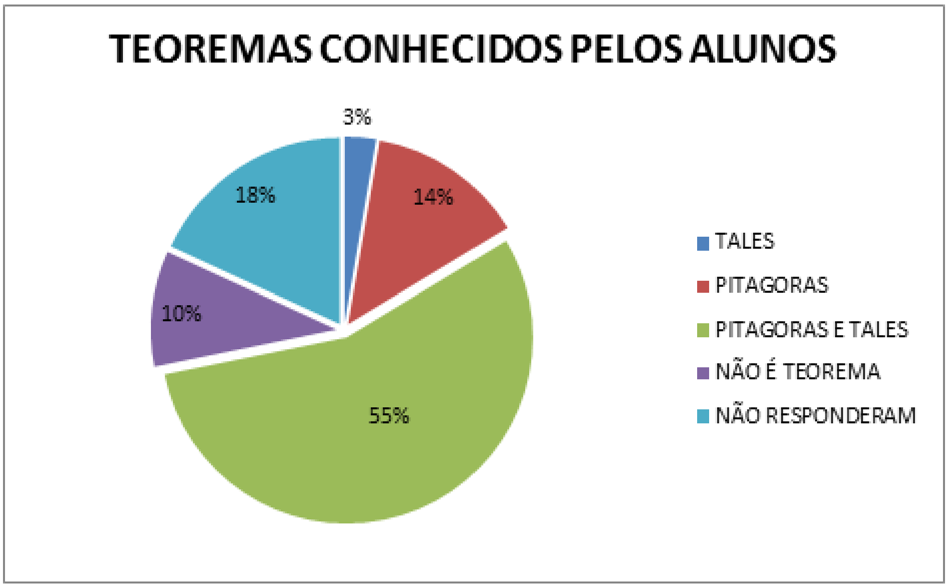
Outro questionamento foi se ele(a) conhecia as formas geométricas e, se as conhecesse, citá-las. A maioria dos alunos 67,3% escreveu pelo menos o nome de quatro formas, entre elas, estava o triângulo, quadrado, retângulo, e alguns colocaram pentágono, hexágono, octógono.

Entre as formas espaciais, apareceram o cubo, a esfera e, com maior frequência, o paralelepípedo, embora 36 alunos dos 110, que corresponde a 32,7% da população de alunos do 1º ano, não tenha respondido a essa pergunta. Constatou-se que os que responderam, conseguem reconhecer a maioria das formas geométricas básicas.

Com relação aos teoremas que eles(as) lembram, quase todos lembraram do teorema de Tales e o teorema de Pitágoras 72% (Figura 53). Porém, 3 erraram o nome de Pitágoras, escrevendo "Pentagonos"ou "Pintaguaras"; outros 2 pensaram que Tales de Mileto se referia a "duas pessoas". 10% da população do 1º ano cometeram algum tipo confusão como exemplo, 6 alunos disseram que a fórmula de Bhaskara era um teorema.

Levando em conta a população do 1º ano, 110 alunos, poucos equívocos foram cometidos, porém, é preciso trabalhar para consertar essas distorções e deixar claro na mente dos alunos a diferença entre esses conceitos, axiomas, definições, teoremas e fórmulas.

Figura 53 – Alunos do 1º ano

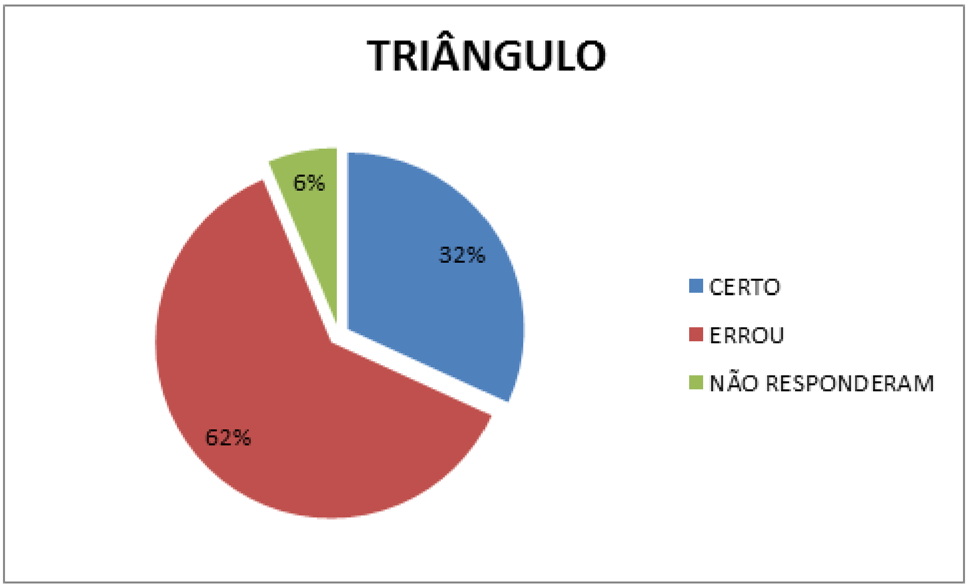


Fonte: Elaborado pelo autor

No teste de conhecimentos a primeira questão era para definir algumas as formas básicas estudadas como triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio e circunferência.

Na definição de triângulo, polígono de três lados, 32% responderam de forma correta enquanto 68% dos alunos não sabem dizer o que um triângulo (Figura 54), desses muitos foram por fazerem restrições a figura, por exemplo, dizer que era uma figura de lados iguais.

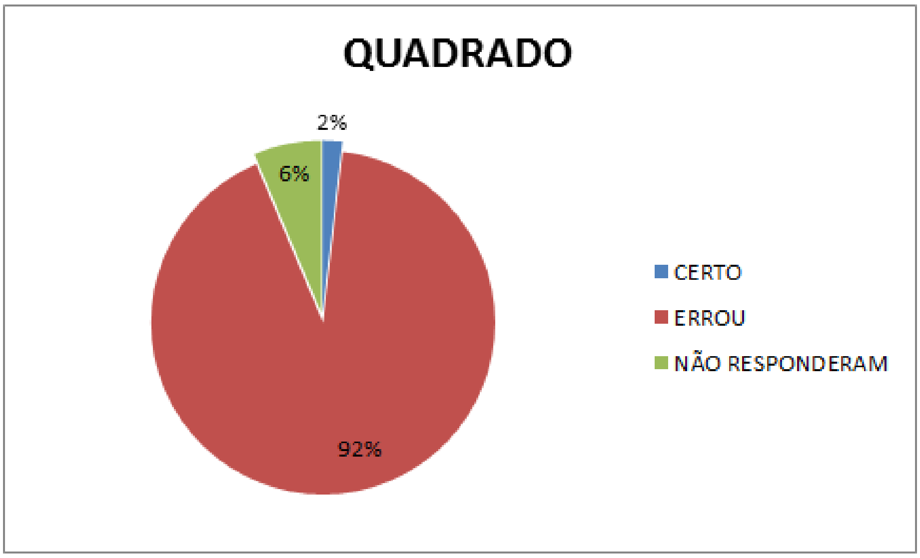
Figura 54 – Triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de quadrado, quadrilátero de lados iguais e todos os ângulos retos, apenas 2% responderam de forma correta enquanto 98% não souberam definir (Figura 55), dos 92% que erraram muitos foram por fazerem referencia apenas aos lados sem se preocupar com os ângulos.

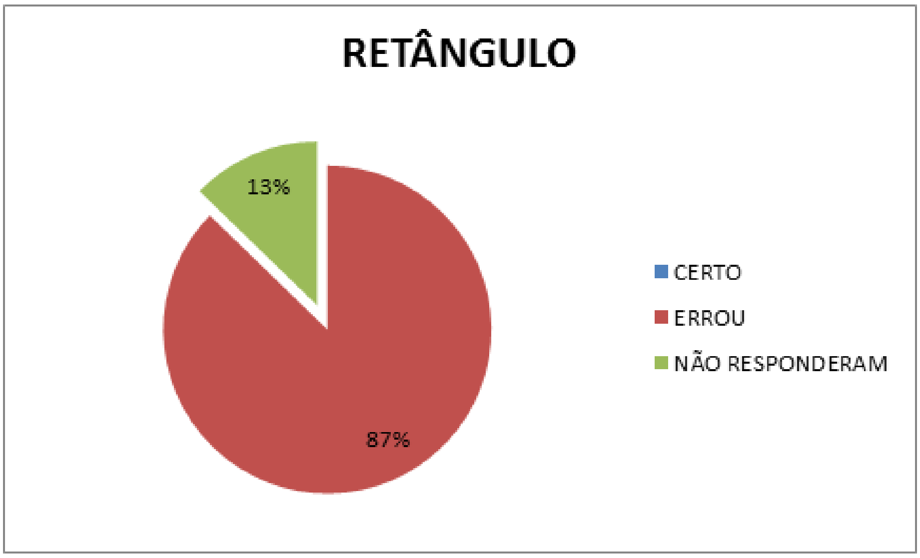
Figura 55 – Quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de retângulo, quadrilátero com todos os ângulos retos, nenhum aluno soube responder corretamente, dos 87% que tentaram vários disseram ser um quadrado esticado.

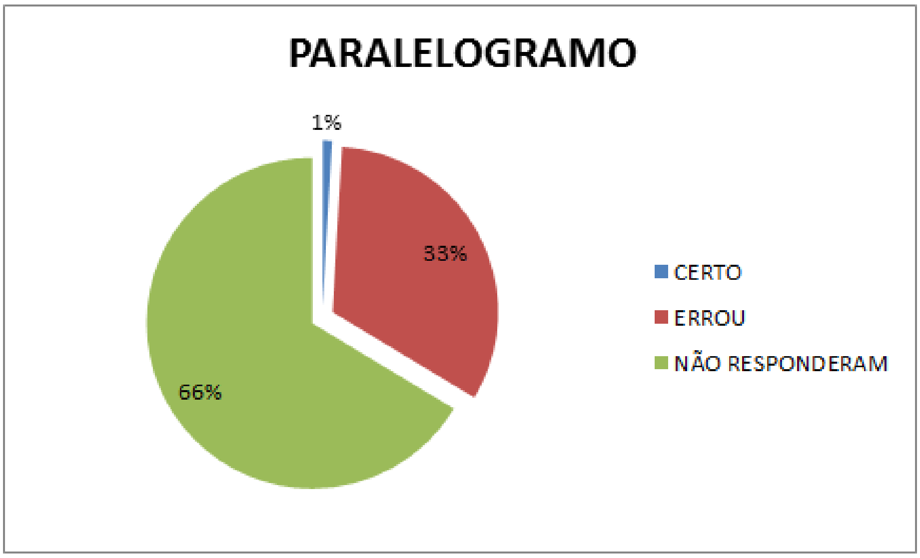
Figura 56 – Retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de paralelogramo, quadrilátero com lados opostos paralelos, apenas 1% acertaram, 66% não responderam e dos 33% que erraram (Figura 57) muitos disseram ser um retângulo deitado.

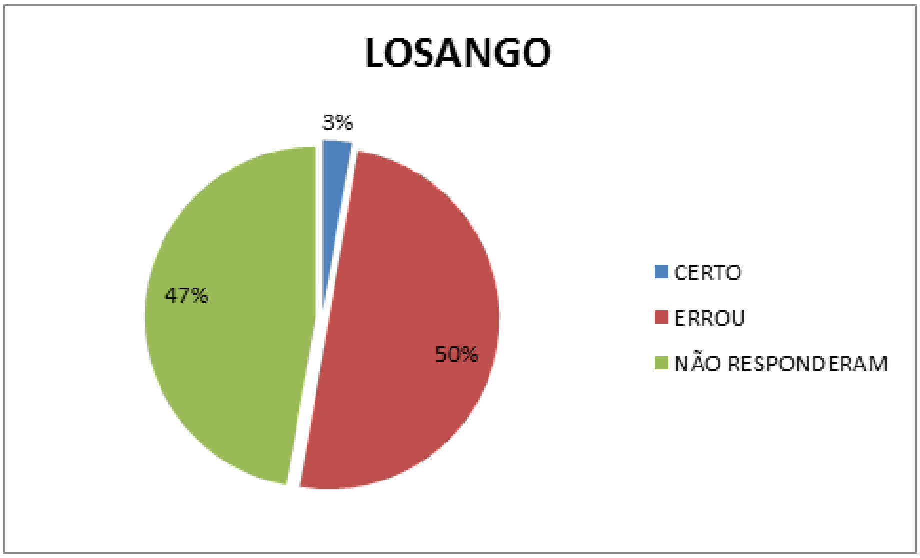
Figura 57 – Paralelogramo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de losango, quadrilátero com todos os lados iguais, 3% responderam de forma correta, 47% não responderam e 50% erraram (Figura 58), muitos por dizerem ser um quadrado.

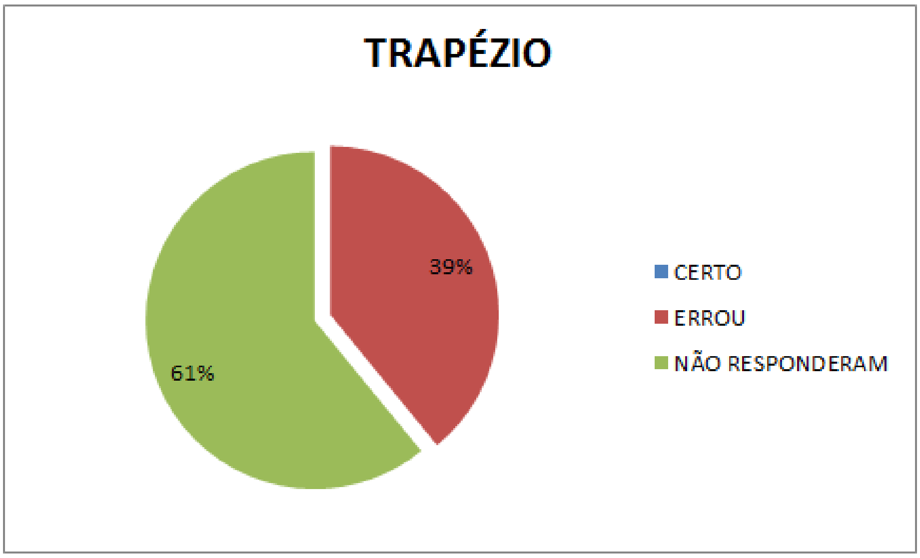
Figura 58 – Losango



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de trapézio, quadrilátero que possui dois lados paralelos, nenhum aluno acertou, 61% não responderam e 39% erraram (Figura 59), alguns alunos lembraram-se do musculo que fica localizado na região posterior do tronco e do pescoço.

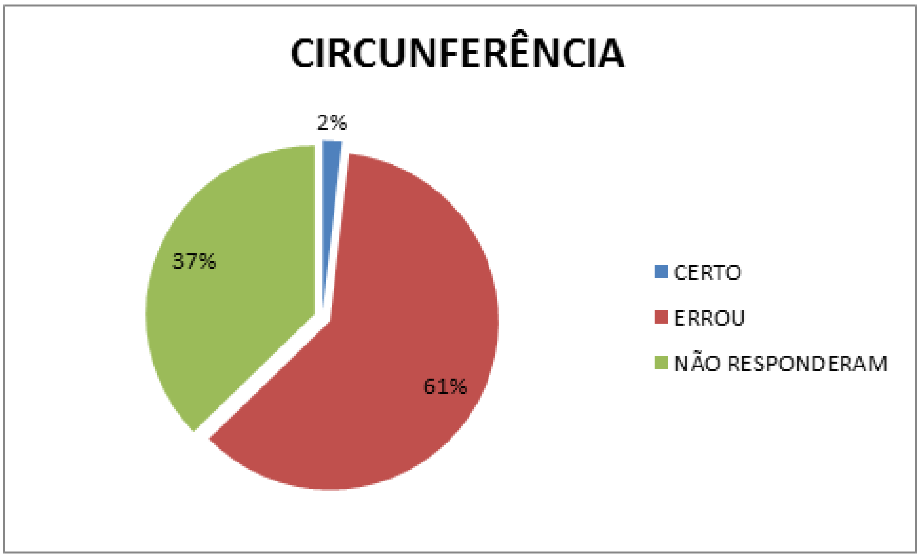
Figura 59 – Trapézio



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de circunferência, conjunto de todos os pontos equidistantes de um ponto dado (centro), 2% dos alunos conseguiram acertar, 37% não responderam e 61% erraram (Figura 60), desses muitos disseram que a circunferência era uma bola.

Figura 60 – Circunferência

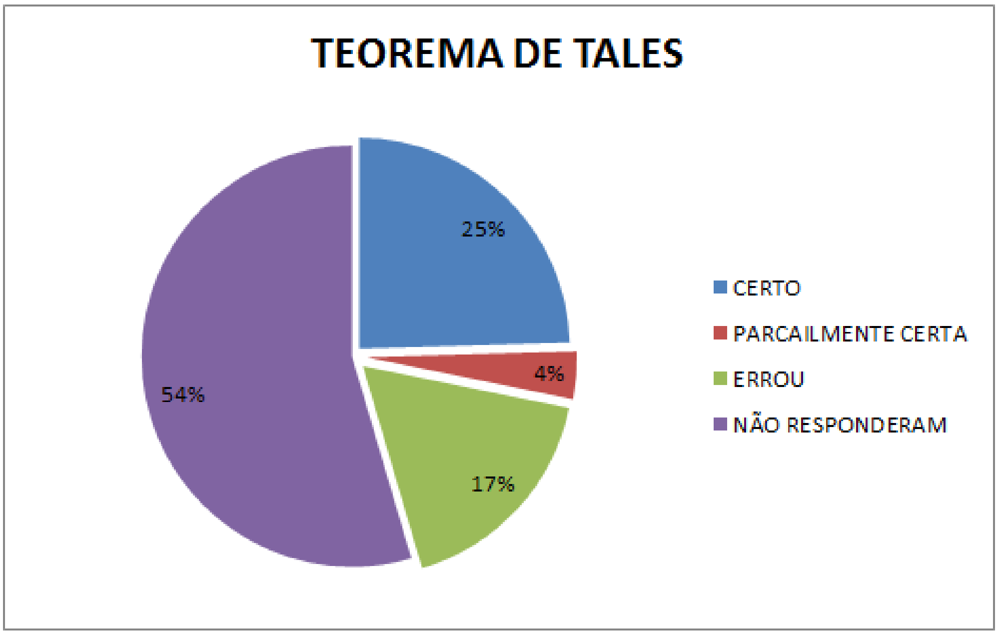


Fonte: Elaborado pelo autor

Como podemos perceber, ao analisar os gráficos, a grande maioria dos nossos alunos conseguem identificar uma figura geométrica, mas não conseguem defini-la, ou seja, dizer com palavras o que são essas figuras. Uma parte dos alunos faziam apenas os desenhos para representar as figuras, um nível que se espera de alunos do Fundamental, o reconhecimento das formas planas. No Ensino Médio é esperado, além do reconhecimento da figura em si, a definição e suas propriedades.

Na questão de número 2 (dois), era esperado que os alunos utilizassem o teorema de Tales. Porém, como podemos perceber na Figura 61, apenas 25% acertaram a questão, enquanto que mais de 50% nem tentaram responder. Quanto ao erro dos alunos, grande parte fez a inversão ao tomar os valores para as razões.

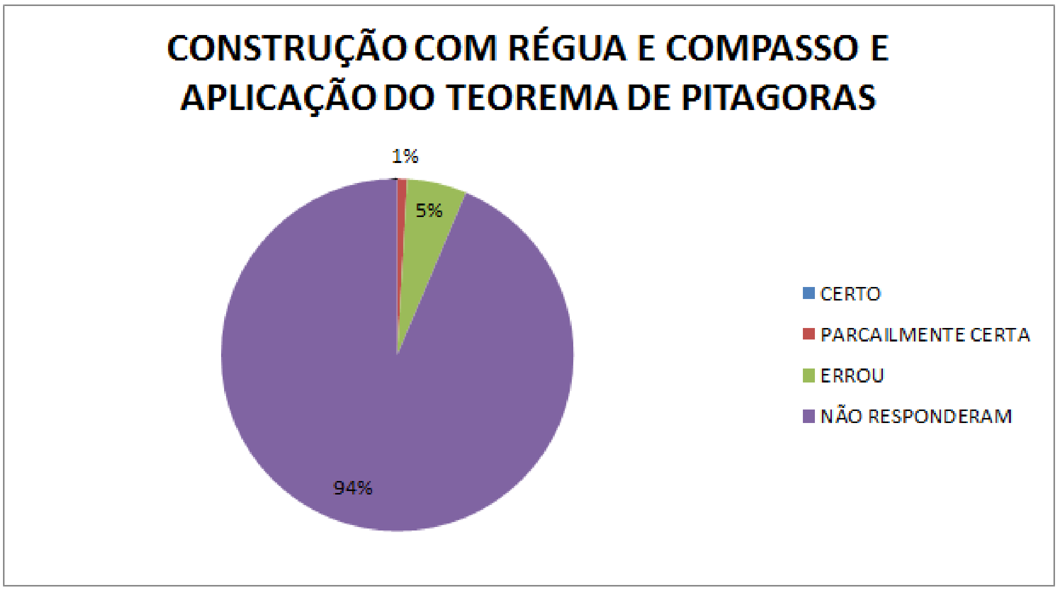
Figura 61 – Alunos 1º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

A terceira questão era uma construção com régua e compasso os alunos deveriam construir um triângulo equilátero e um quadrado de lado dado e usar o teorema de Pitágoras para expressar a medida da diagonal do quadrado e a medida da altura do triângulo equilátero em relação à medida de seu lado. Nenhum dos alunos conseguiu construir as figuras, mesmo com o material fornecido, apenas 1% dos alunos conseguiu expressar o que foi pedido, ou seja, colocar a diagonal do quadrado e a altura do triângulo equilátero em função do lados. A maioria 94% nem tentou resolver o problema (Figura 62).

Figura 62 – Alunos 1º ano

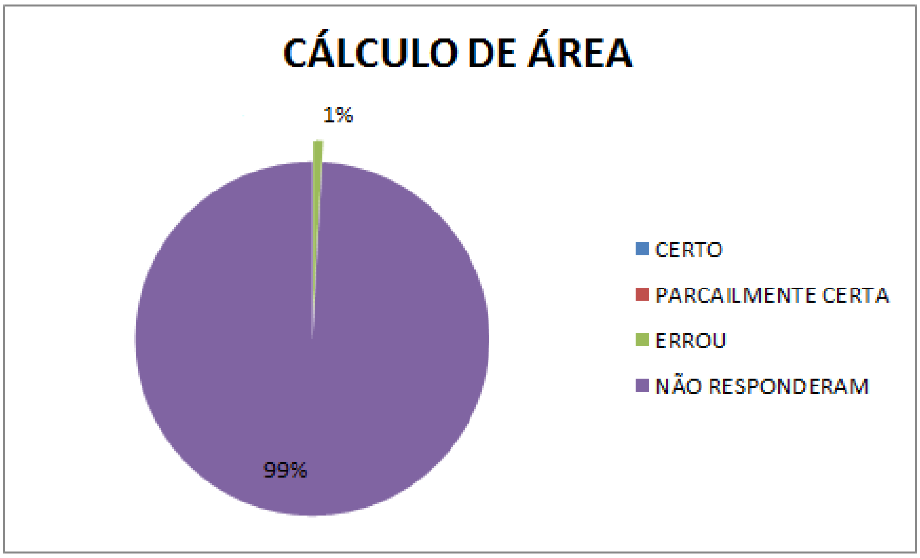


Fonte: Elaborado pelo autor

Na quarta e última questão, eles deveriam calcular a área da região sombreada, que num primeiro momento é desconhecida. Porém, usando os argumentos de Geometria, é possível construir figuras conhecidas e resolver o problema.

Quase 100% dos alunos (Figura 63) nem ao menos tentaram resolver quando lhes pedido para fazer o cálculo de área. Perguntados depois o motivo de quase ninguém ter tentado resolver o problema, muitos alunos disseram que não se lembravam das fórmulas que resolviam o problema, e outros disseram que parecia ser muito difícil, por isso nem tentaram.

Figura 63 – Alunos 1º ano



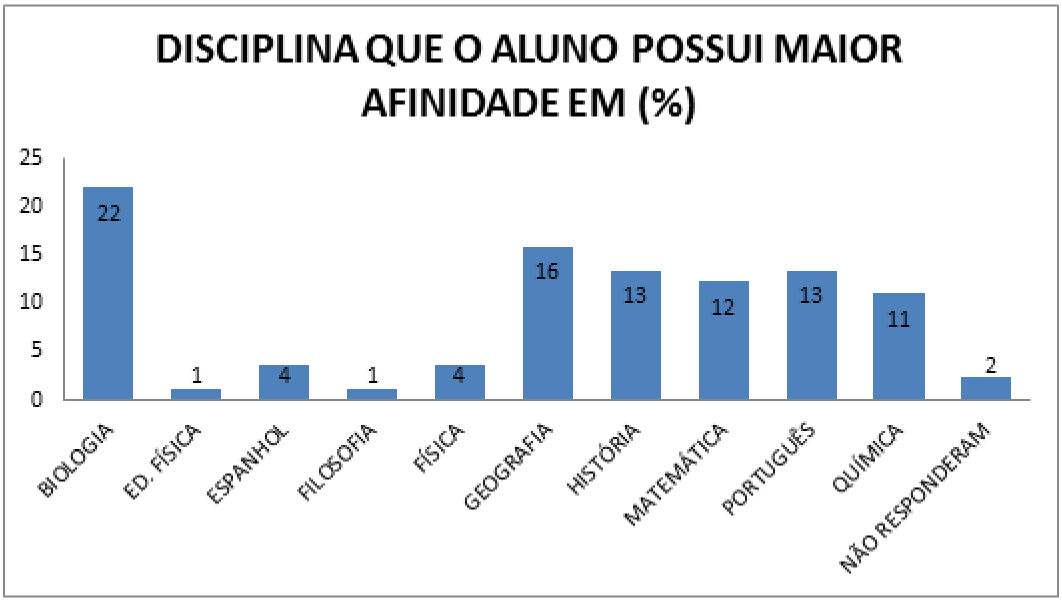
Fonte: Elaborado pelo autor

5.3 RESULTADOS DO 2º ANO

Os 82 alunos do 2º ano apresentaram idades variando de 15 a 18 anos, com média igual a 16 anos, sendo que a variação na idade entre os alunos do 2º ano é menor que a variação entre os alunos do 1º ano. Observemos ainda que há uma predominância maior de mulheres, 60% do sexo feminino e 40% do sexo masculino.

Com relação à afinidade, a disciplina que apresentou uma maior afinidade foi Biologia 22% (Figura 64), Matemática conseguiu 12%, muitos alunos apresentaram um gosto por outras disciplinas de natureza, Química 11% também por disciplinas das humanas, Geografia 16% e História 13%, bem como Português 13%.

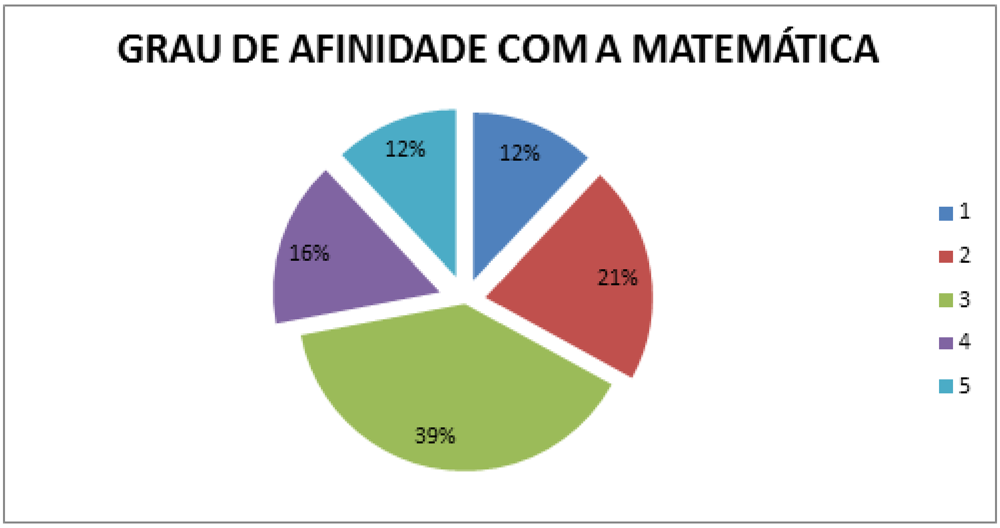
Figura 64 – Alunos 2º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

Mesmo a Matemática, sendo a disciplina de maior afinidade para apenas 12% da população do 2º ano, a maior parte dos aluno 67%, mostram ter uma boa afinidade (Figura 65), os demais mesmo achando uma disciplina difícil e complicada sabem que devem aprendê-la e reconhecem sua importância.

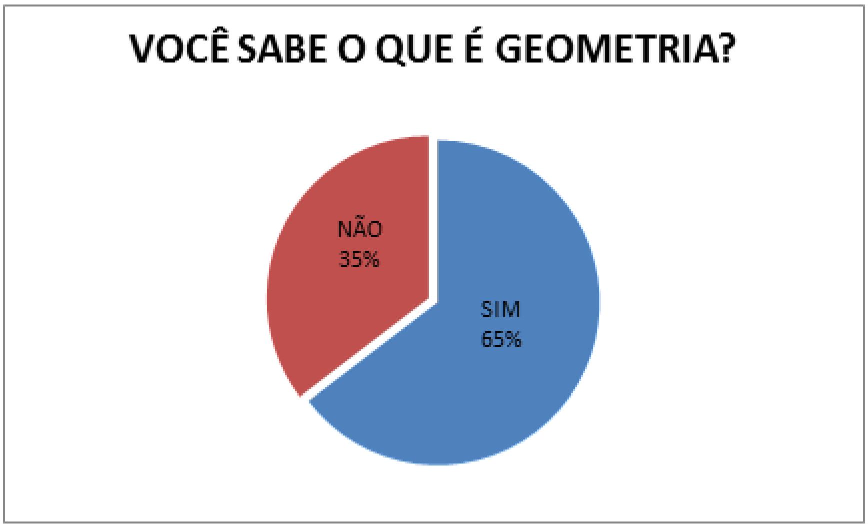
Figura 65 – Alunos 2º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

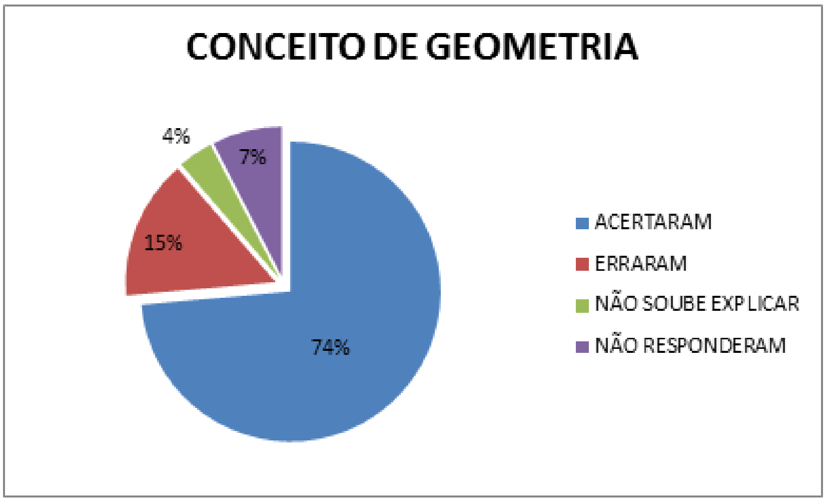
Quando questionados sobre se sabiam o que era Geometria, a maioria 65% disse *sim* (Figura 66). Desses que respondeu *sim*, 74% disseram de modo correto o conceito de Geometria (Figura 67), 15% erraram, alguns por limitarem a Geometria ao estudo dos triângulos ou outras formas geométricas.

Figura 66 – Alunos 2º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 67 – Alunos 2º ano

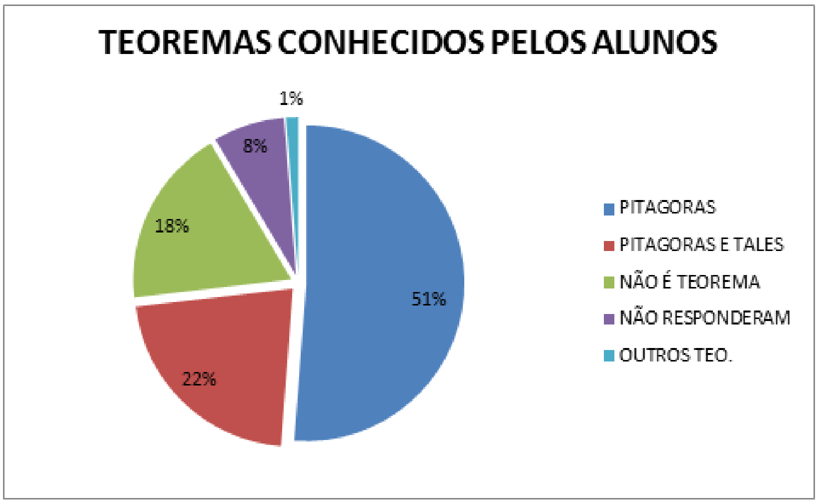


Fonte: Elaborado pelo autor

Um outro questionamento foi sobre as formas geométricas que eles conheciam, todos os alunos disseram pelo menos uma forma geométrica, os quais se destacaram, assim como no 1º ano, triângulo, quadrado, retângulo, losango, octógono. Algumas formas espaciais, como cubo e o paralelepípedo, também foram citadas.

Com relação aos teoremas que eles conheciam (Figura 68), 73% dos alunos disseram conhecer o Teorema de Tales ou o Teorema de Pitágoras, esse apareceu com uma porcentagem bem maior 51%. Apenas 1% dos alunos disseram lembrar o Teorema da bissetriz interna, 18% dos alunos disseram outras coisas que não é teorema.

Figura 68 – Alunos 2º ano

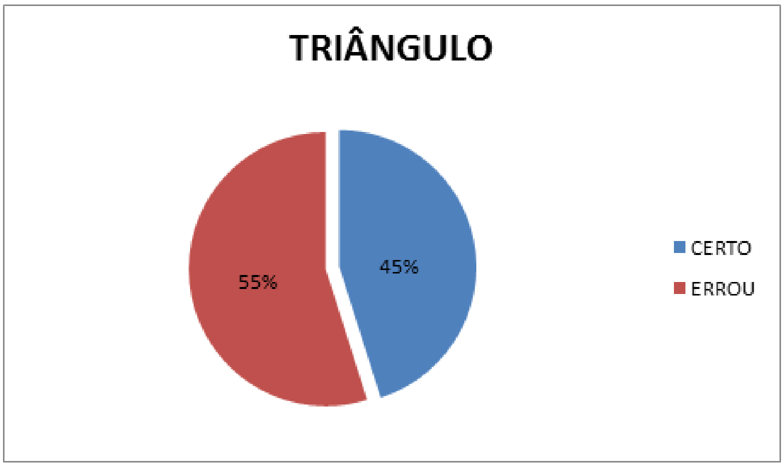


Fonte: Elaborado pelo autor

Sendo que 4 alunos, disseram que a fórmula de Bhaskara era um teorema, 2 alunos erraram o nome de Pitágoras escrevendo "Pitagono"e outros 6 alunos disseram que a fórmula de Heron, também era um teorema, ou seja, assim como os alunos do 1º ano, eles não conseguiram diferenciar o que é um teorema de uma fórmula.

No teste de conhecimentos, os resultados não foram muito diferentes do 1º ano, ao definir as figuras. Na definição de triângulo 45% acertaram e 55% erraram, desses muitos por dizerem que triângulo era uma figura de três lados iguais, pegando apenas um caso particular.

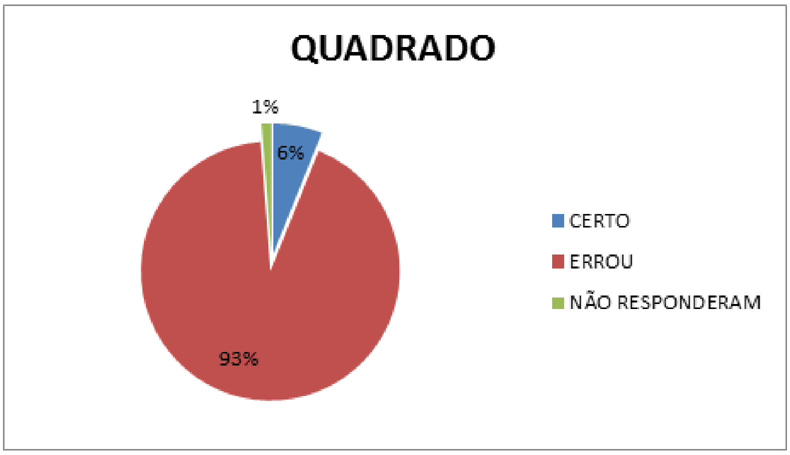
Figura 69 – Triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de quadrado tivemos um aumento em relação ao 1º ano com 6% de acerto, mesmo assim a maioria 93% não sabem definir quadrado, muitos por não lembrarem que os ângulos devem ser retos.

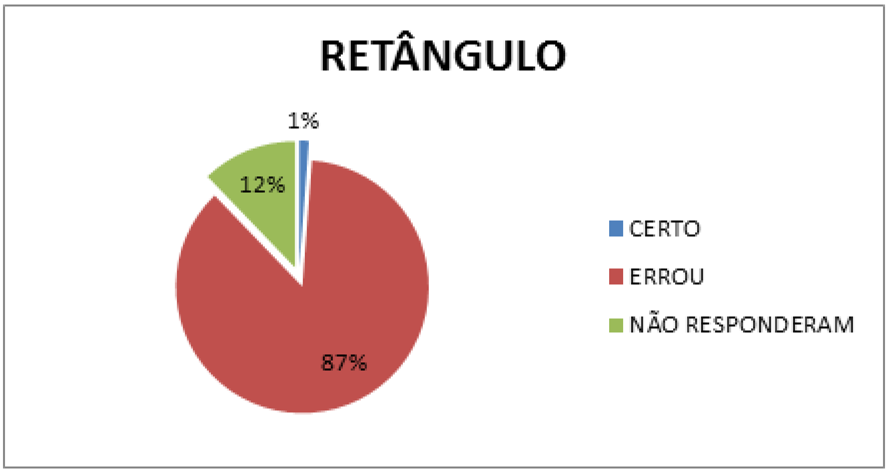
Figura 70 – Quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de retângulo tivemos 1% de acerto contra 87% de erros (Figura 71), novamente o erro mais comum foi dizer que o retângulo é um quadrado esticado.

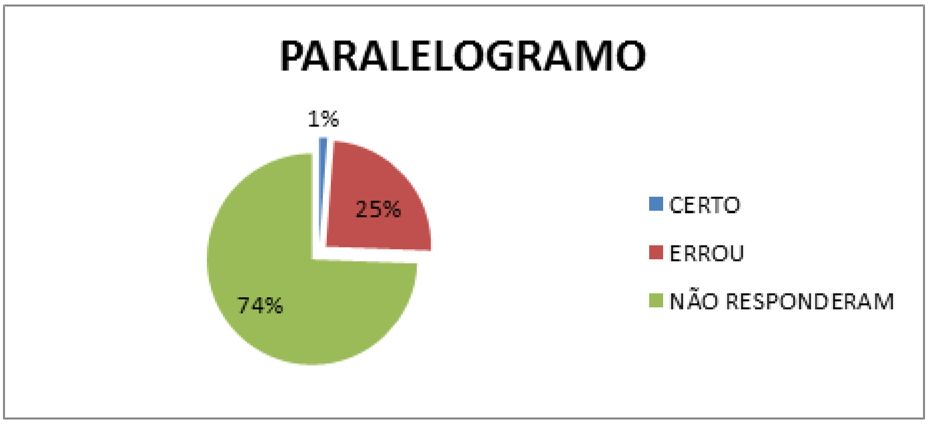
Figura 71 – retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de paralelogramo também tivemos 1% de acerto já nos erros foram 25%, pois a maioria 74% não responderam (Figura 72), alguns por não lembrarem o que um paralelogramo

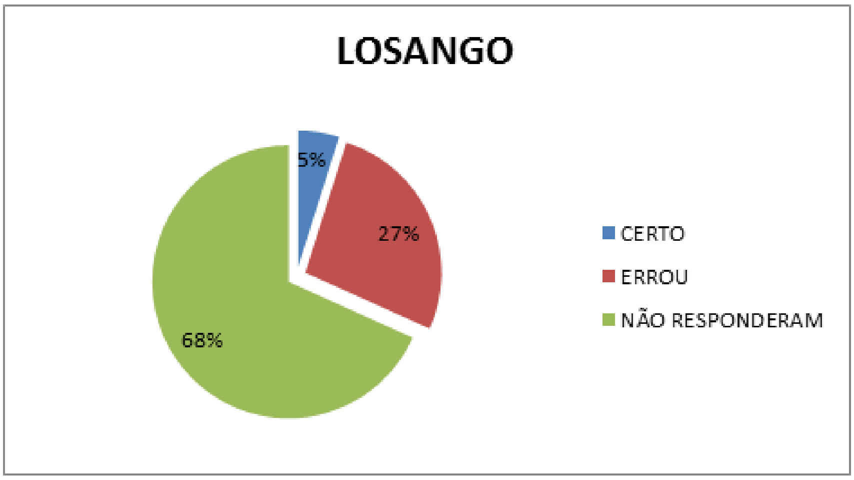
Figura 72 – Paralelogramo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de losango temos 5% de acerto, 68% não responderam e 27% de erros (Figura 73), nesse chamou a atenção uma resposta que dizia que o losango era uma formação no futebol de salão.

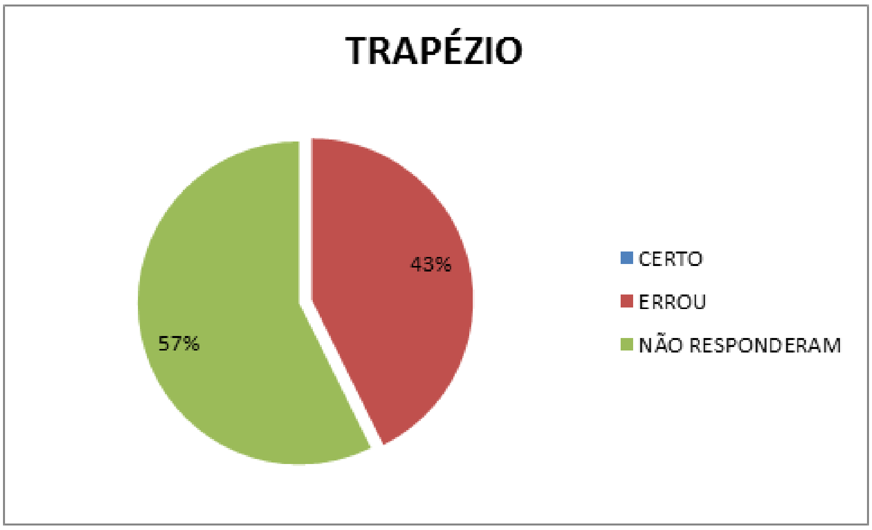
Figura 73 – Losango



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de trapézio não houve acertos, 57% não responderam e 43% erraram (Figura 74), desses alguns disseram ser um instrumento do circo.

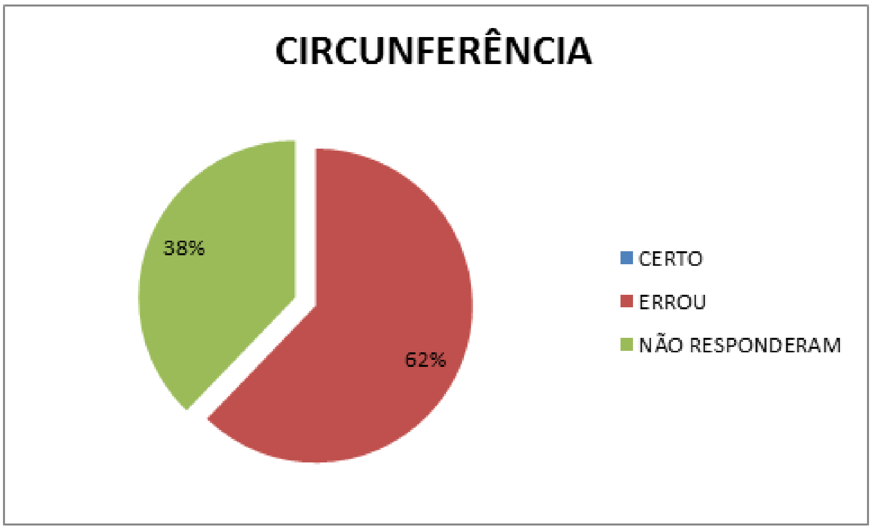
Figura 74 – trapézio



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de circunferência também não houve acertos, 38% não responderam e 62% erraram (Figura 75), desses a maioria disseram que circunferência era um circulo.

Figura 75 – Circunferência

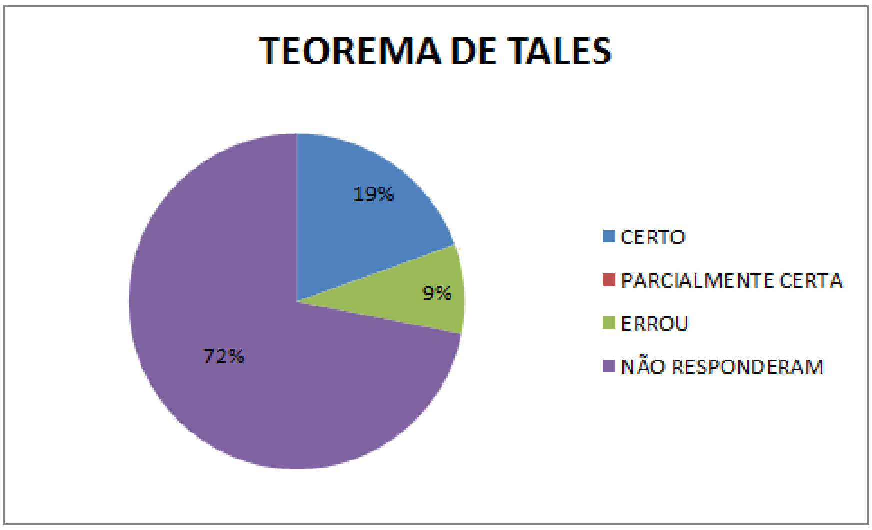


Fonte: Elaborado pelo autor

Assim como os alunos do 1º ano, os alunos do 2ºano sabem identificar figuras, mas não conseguem defini-las. Alguns deles não conseguem lembrar o nome das figuras, por exemplo, o trapézio e o losango, muitos diziam não saber nem o que era.

Na questão de numero dois, a maioria dos alunos 72% nem tentaram resolvê-la, mas dos que tentaram a maioria 19% acertou e os que erraram 9%, foi um equívoco em relação às razões (Figura 76).

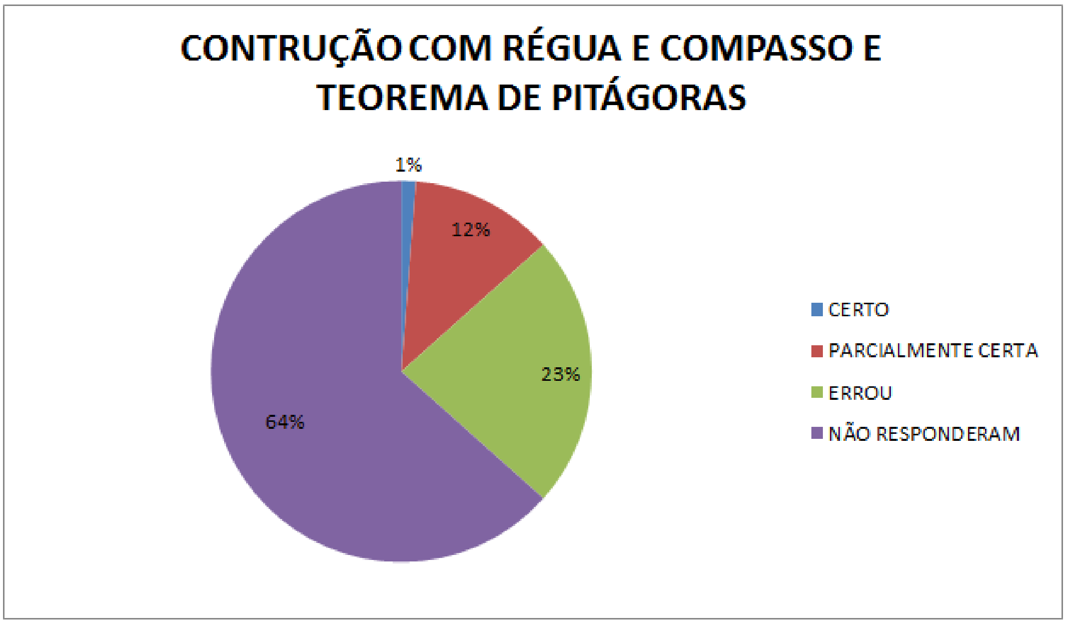
Figura 76 – Alunos 2º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

A questão de número três, 1% dos alunos conseguiu resolver completamente, 12% conseguiu relacionar a diagonal do quadrado e a altura do triângulo equilátero com lado, porém, mais da metade 64% nem ao menos tentou resolvê-la.

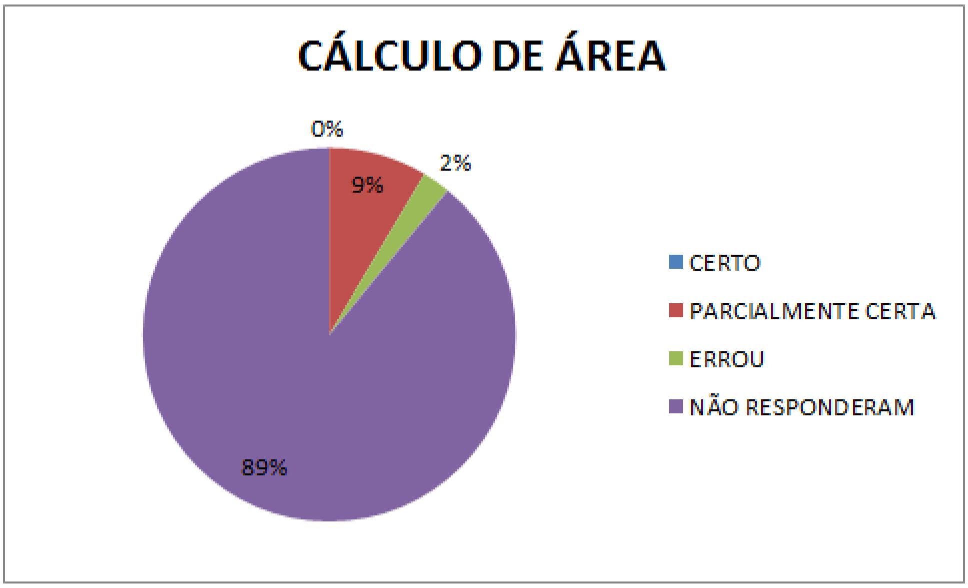
Figura 77 – Alunos 2º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

Na última questão, diferente do 1º ano, mais alunos tentaram resolvê-la (Figura 78), e alguns até tiveram um início correto, calculando a área do retângulo exterior, mas depois não desenvolveram o restante da questão. A grande maioria 89% olhou para o problema e desistiu, nem aos menos rabiscou para tentar resolvê-lo.

Figura 78 – Alunos 2º ano



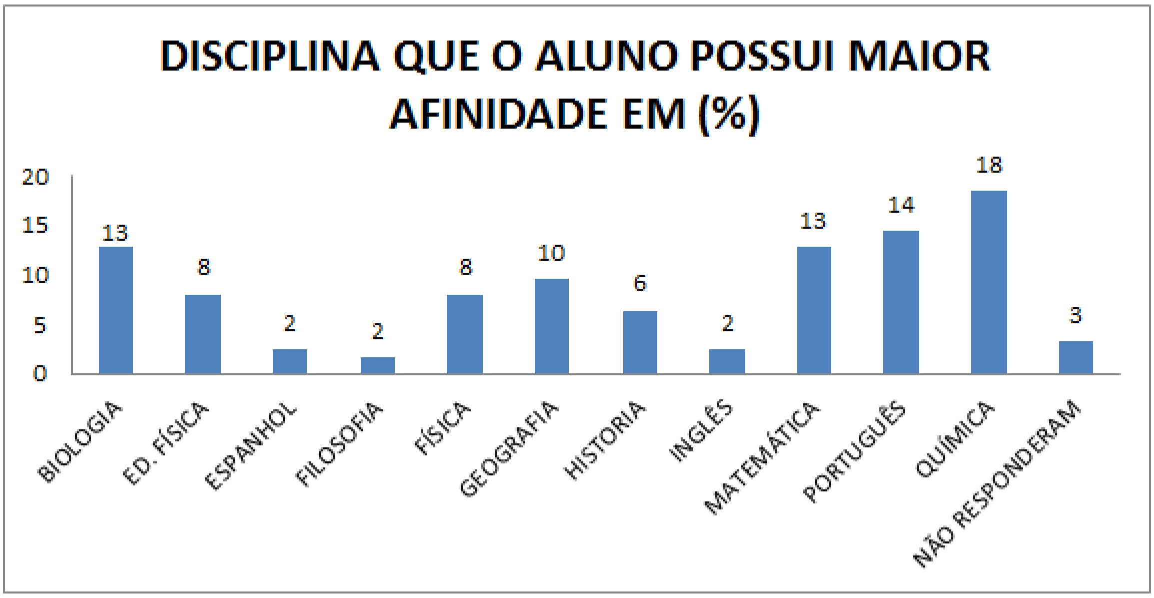
Fonte: Elaborado pelo autor

5.4 RESULTADOS DO 3º ANO

Por fim, temos o 3º ano último ano letivo de nossos alunos, que depois terão que decidir se continuam ou não na vida acadêmica, ou vão trabalhar ou, quem sabe, conciliar as duas coisas. Os 125 alunos pesquisados dessa série apresentam uma variação de idade entre 16 e 24 anos, com média igual a 17 anos e poucos estão fora de faixa. No terceiro ano, grande parte dos alunos é do sexo masculino 54% e 46% do sexo feminino.

A disciplina com maior afinidade no 3º ano foi a disciplina de Química, a Matemática obteve 13% empatando com Biologia 13% e ficando atrás apenas de Português (Figura 79).

Figura 79 – Alunos 3º ano

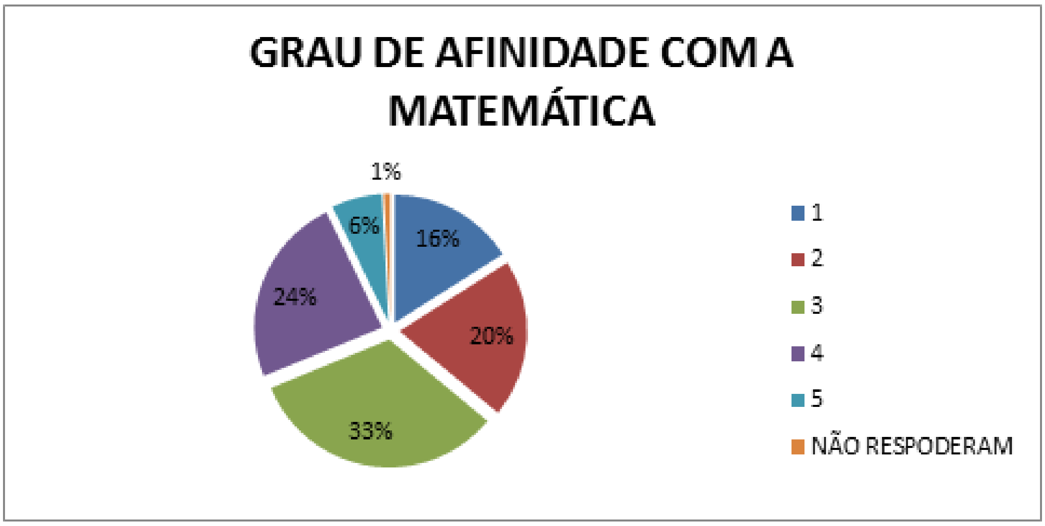


Fonte: Elaborado pelo autor

Uma das coisas que percebemos quando perguntamos sobre a afinidade do aluno com relação a determinada disciplina, é que eles vinculam à afinidade com o professor, por isso, chamamos a atenção a importância de o professor tentar desenvolver um bom relacionamento com suas turmas.

Com relação à afinidade com a Matemática, o resultado não é muito diferente comparando com o que já tínhamos visto nos anos anteriores, a maioria tem uma afinidade mediana 33% (Figura 80), porém a consciência ou a cobrança exige mais deles e, por isso, alguns buscam tentar sanar algumas dificuldades criadas nos anos anteriores.

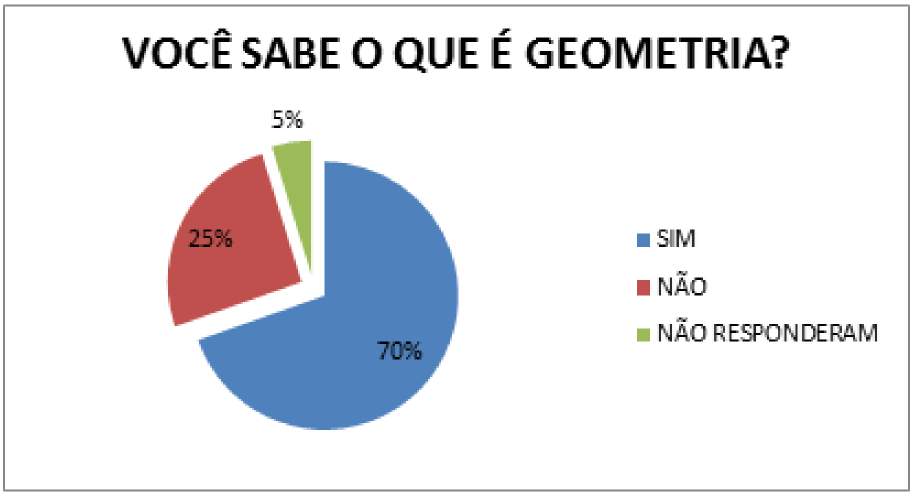
Figura 80 – Alunos 3º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

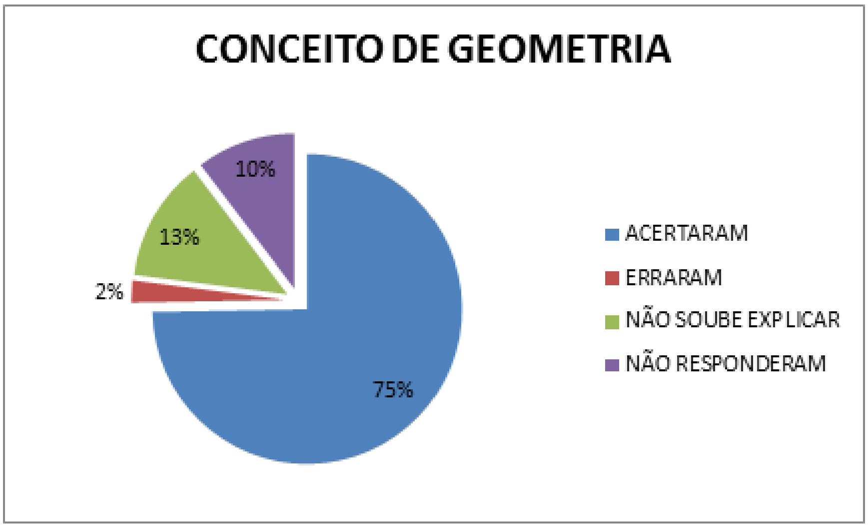
No questionamento sobre o que é Geometria, 70% dos alunos do terceiro ano respondeu que sabiam o que era Geometria (Figura 81). Porém, 75% dos 70% conseguiram expressar de maneira correta o conceito, 2% erraram por limitar o seu estudo aos triângulos ou aos ângulos, enquanto, 13% disse não saber expilcar os outros 10% não responderam (Figura 82).

Figura 81 – Alunos 3º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 82 – Alunos 3º ano



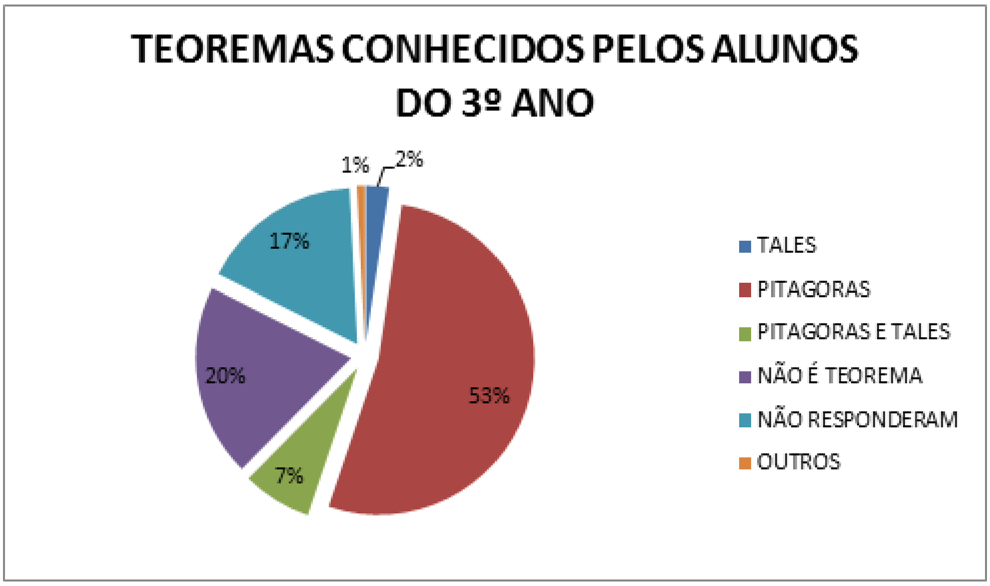
Fonte: Elaborado pelo autor

Quando questionados sobre quais formas geométricas você conhece, dos 125 alunos pesquisados, 25 não responderam. Dos 100 alunos que responderam, todos deram pelo menos dois exemplos de formas geométricas, destacando-se novamente, triângulo, quadrado, retângulo entre outros polígonos, como hexágono e o octógono.

Assim como nos 1º e 2º, também surgiram formas espaciais até com maior quantidade que nos outros, talvez devido a matéria ser recente, com destaque para cubo, paralelepípedo e a esfera. Porém, só no 3º ano alguns alunos confundiram formas geométricas com tipos de Geometria, pois 4 deles deram como resposta para forma geométrica que você conhece, Geometria Analítica e Geometria Espacial.

Com relação à pergunta sobre quais teoremas você conhece, novamente a grande maioria diz conhecer o teorema de Tales ou Teorema de Pitágoras 62%. Alguns alunos, assim como aconteceu no 1º e 2º ano, novamente mencionaram a fórmula de Bhaskara como teorema e, nesse mesmo erro, apareceu o teorema de Sarru, que é um método não um teorema, 1% dos alunos mencionou o teorema de Fermat. (Figura 83)

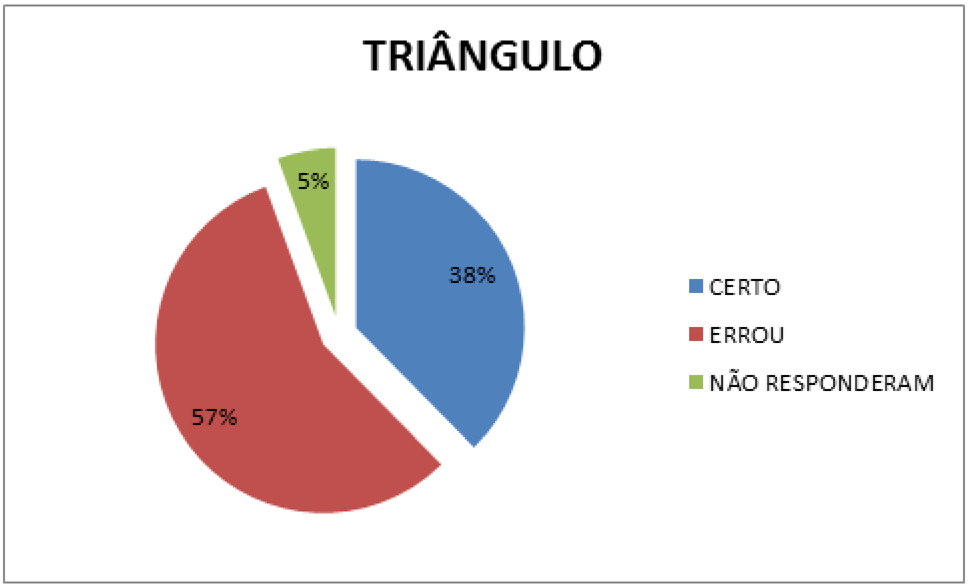
Figura 83 – Alunos 3º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

Na parte do teste de conhecimentos permaneceu a falta de conceituação entre alunos, pois na definição de triângulo 38% acertaram enquanto 57% erraram (Figura 84), novamente um erro comum foi limitar a definição a casos particulares.

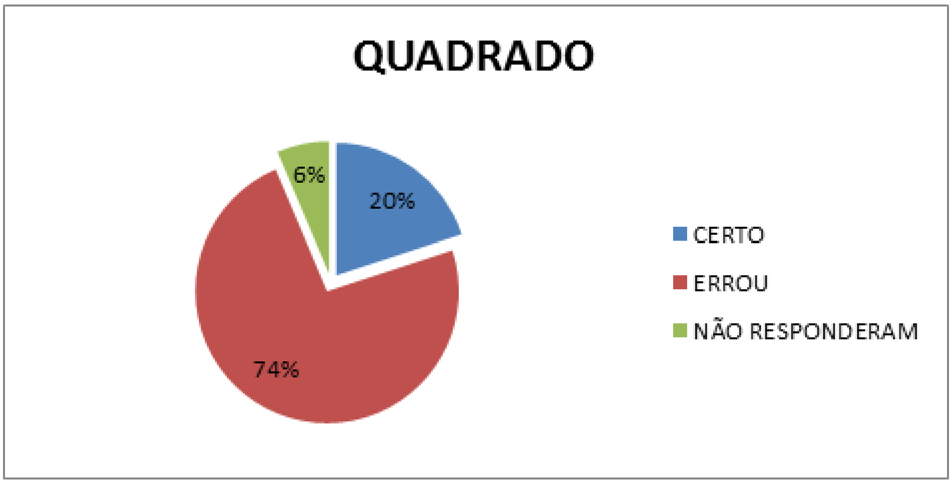
Figura 84 – Triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição do quadrado houve uma melhora com 20% de acertos, mas a maioria 74% erraram (Figura 85), o erro mais comum foi não lembrar que os ângulos precisam ser retos.

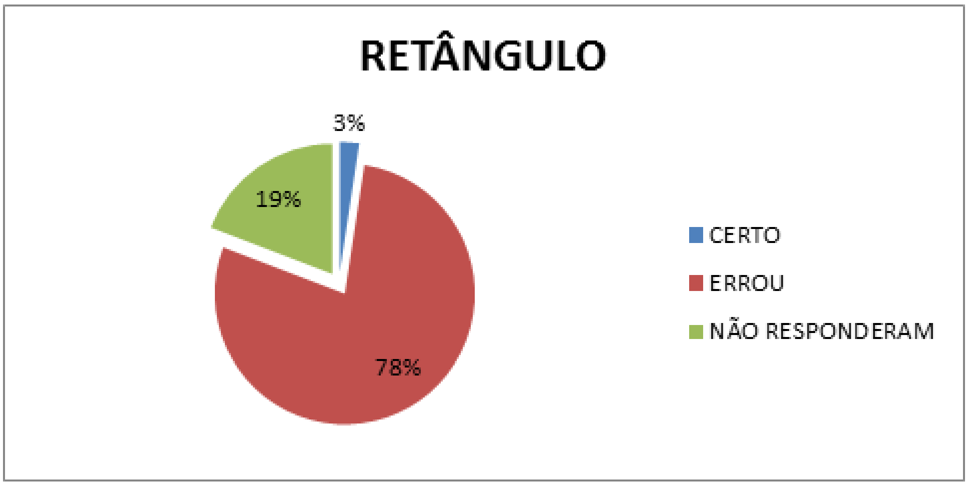
Figura 85 – Quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de retângulo, 3% acertaram, 19% não responderam e 78% erraram (Figura 86), novamente apareceu que é um quadrado esticado, mas alguns alunos erraram por não lembrarem que no retângulo os ângulos também devem ser retos.

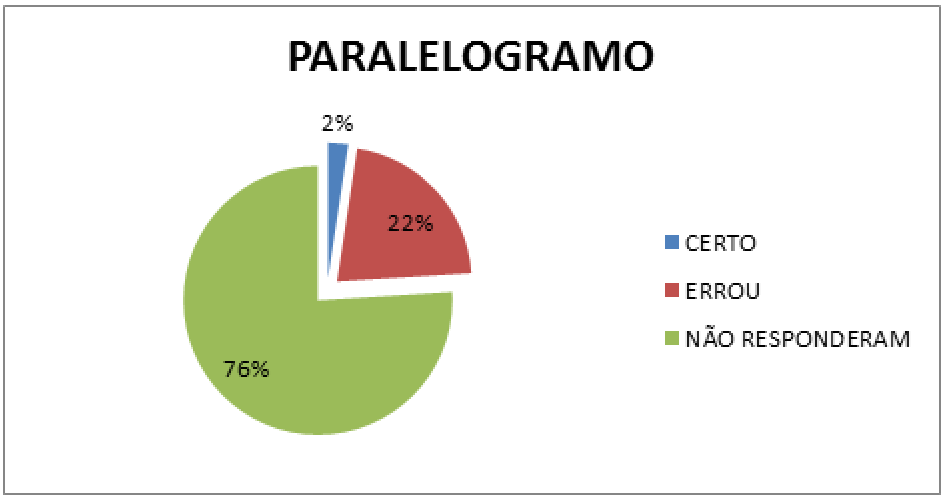
Figura 86 – Retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de paralelogramo, 2% acertaram, 22% erraram e 76% não responderam (Figura 87), o erro comum foi dizer que o paralelogramo é um retângulo deitado ou torto.

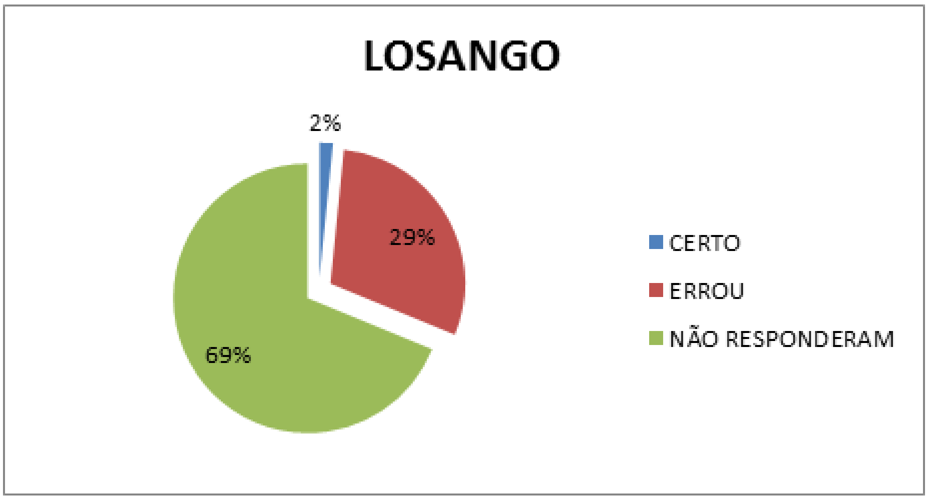
Figura 87 – Paralelogramo



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de losango, 2% acertaram, 29% erraram e 69% não responderam (Figura 88), dos que tentaram responder o erro comum foi dizer que era um raia (pipa) o que pode ser um exemplo não a definição.

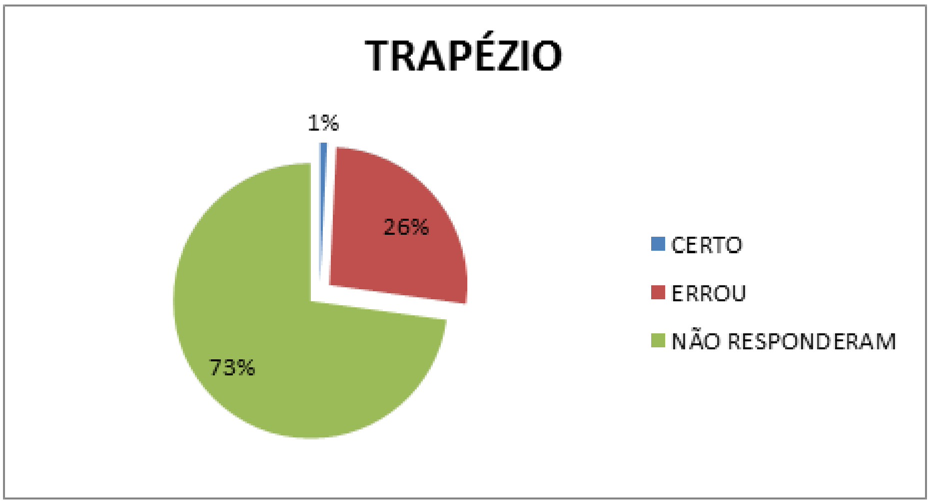
Figura 88 – Losango



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de trapézio, 1% acertou, 26% erraram e 73% não responderam (Figura 89), o erro comum foi dizer que era um retângulo com dois lados tortos, mas apareceu também o musculo.

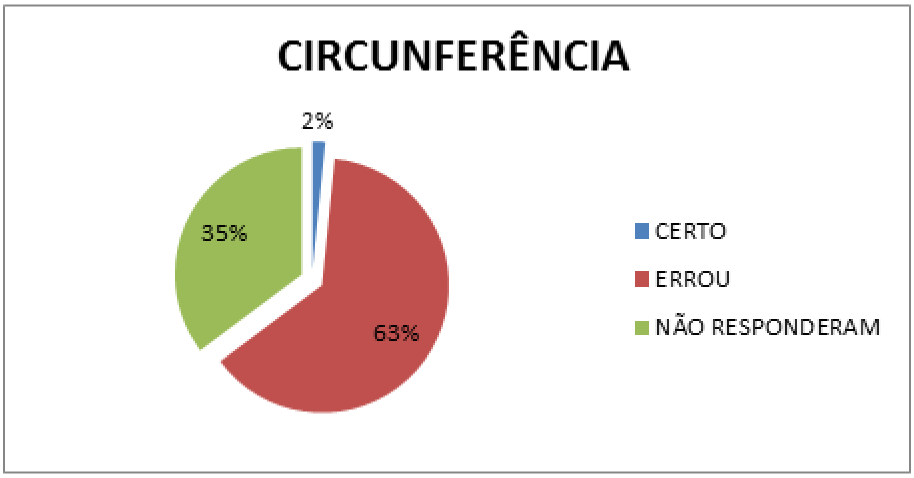
Figura 89 – Trapézio



Fonte: Elaborado pelo autor

Na definição de circunferência, 2% acertaram, 63% erraram e 35% não responderam (Figura 90), o erro mais comum foi dizer que é um circulo, também apareceram exemplos como a borda de uma pizza.

Figura 90 – Circunferência



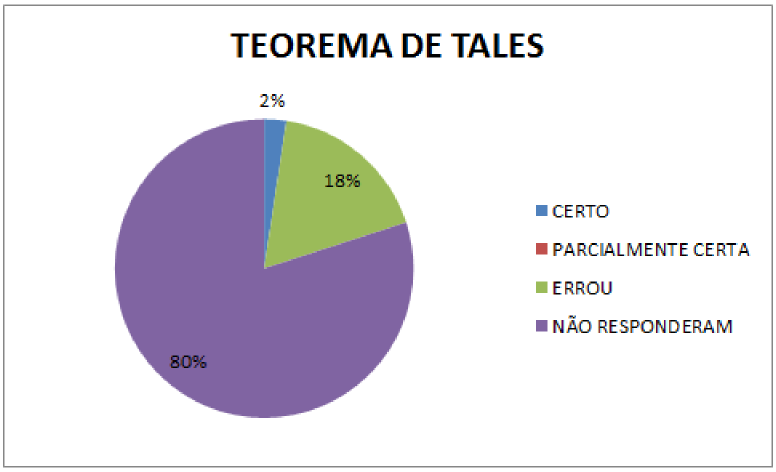
Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos perceber que apesar de a maioria continuar sem saber conceituar ou errar o conceito houve um acerto maior nas definições, pois houve acertos em todas as figuras mesmo sendo uma quantidade mínima em relação a população pesquisada, os 317 alunos. Assim pude comprovar com fatos e números o que todos já suspeitávamos a grande maioria dos nossos alunos dessa escola terminam o ensino médio com uma base que se espera de um aluno do fundamental no nível de 6º ano, na parte de geometria conseguem fazer reconhecimento de algumas formas,

mas não conseguem defini-las, nem manipula-las e nem estabelecer relações entre elas.

Na questão de número dois, 80% dos alunos nem tentaram resolver a questão, dos 20% que tentaram apenas 2% conseguiram resolver de modo correto, os outros cometeram o erro de trocar as razões (Figura 91).

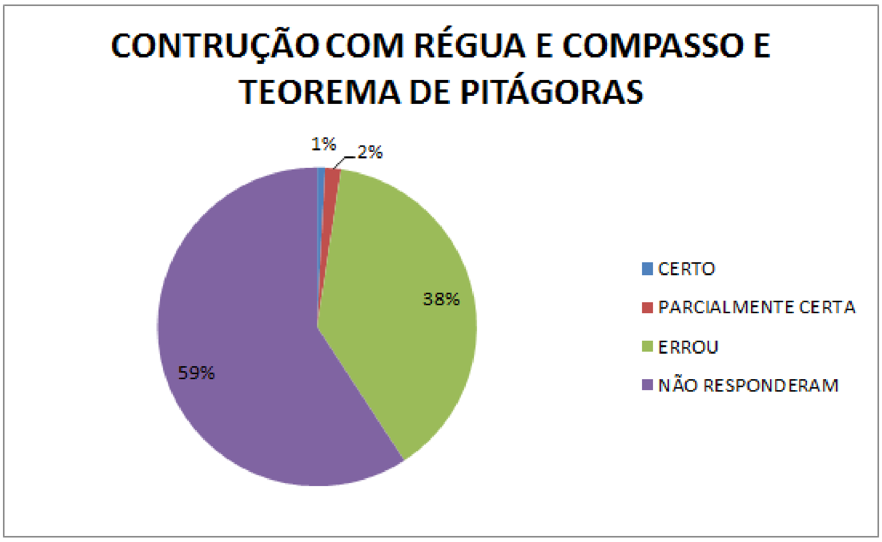
Figura 91 – Alunos 3º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

Na construção com régua e compasso, 1% conseguiu resolver toda a questão, 2% conseguiram relacionar a diagonal do quadrado e a altura do triângulo equilátero com a medida do seu lado, 38% tentaram apenas desenhar, mas eram quadrados e triângulos que não tinham a medida dada, outros desenharam triângulos retângulos e mais uma vez a maioria 59% não responderam. (Figura 92).

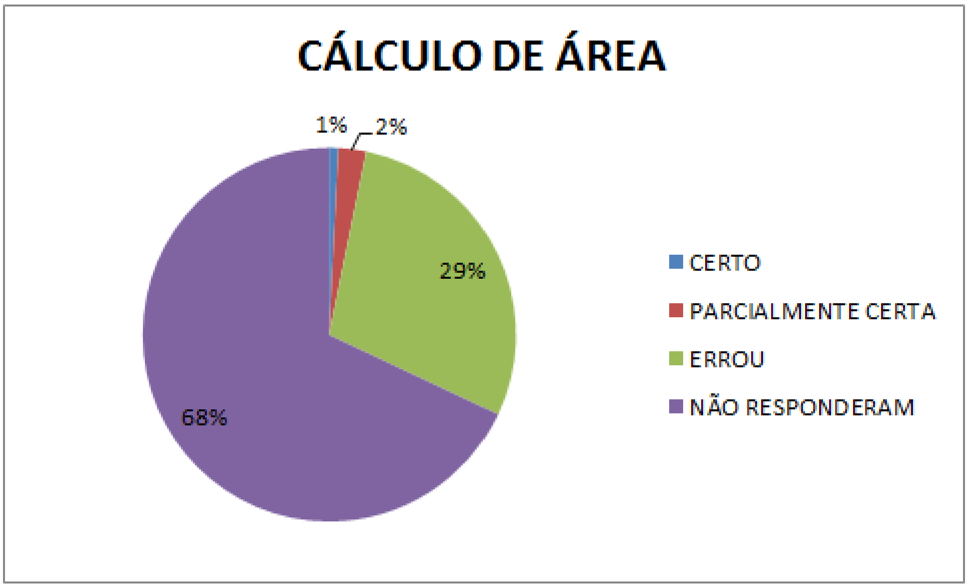
Figura 92 – Alunos 3º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

No calculo da área sombreada novamente apenas 1% dos alunos resolveu o problema de forma correta, 2% calcularam apenas a área do retângulo externo, 29% erraram (Figura 93), mas pelo menos houve mais tentativa de resolver que nos 1º e 2º anos, mesmo assim 68% nem tentaram.

Figura 93 – Alunos 3º ano



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim podemos constatar que os alunos dessa escola que terminam o ensino médio não têm o nível esperado. Muitos estudiosos defendem que a matemática deve ser ensinada através da problematização, mas como problematizar se nosso aluno não tem o conceito em sua mente, por isso concordo com LAGES (2007) quando diz que a Matemática tem que ser ensina em três passos conceituação, manipulação e aplicação. Desse modo podemos fazer o que a LDB diz, ensinar dando significado sabendo que o conhecimento foi construído dentro de um contexto sociocultural, assim a história da matemática entra como um forte recurso para poder auxiliar o professores no ensino, dando significado a disciplina. "A história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas desenvolvidas e utilizadas num contexto de sua época."(D'AMBROSIO, 2009, p. 29,30)

O Brasil ao tentar resolver seus problemas educacionais importa muitas ideias de outros países, principalmente os mais desenvolvidos, no entanto esquece que nossa sociedade é diferente, claro que boas ideias são validas, mas deve-se pensar como executar nesse meio com tantas desigualdades sociais. A Finlândia é um exemplo de país que se desenvolveu bastante ao investir em educação, melhorando as escolas a formação e o salário desses profissionais tornando assim o magistério a primeira opção de 3 em cada 5 alunos, para

SAHLBERG (2012) A base para a educação foi o compromisso da sociedade finlandesa pela igualdade de acesso a uma educação de qualidade. Nosso país está tentando essa igualdade com a BNCC, mas será que com tanta desigualdade social a unificação dos conteúdos para todos será o suficiente para deixar todos os alunos em um mesmo patamar educacional? Os relatórios do PISA mostram que países com muita desigualdade social apresentam pouca evolução educacional. Então não é apenas
conteúdo e sim toda uma estrutura que deve ser equiparada para todo o país.

Pasi Sahlberg, diretor de centro de estudos vinculado ao Ministério da Educação finlandês[1] em entrevista ao repórter Leonardo Cazes do jornal O GLOBO, em 22 de fev. de 2012, diz:

> Não existe nenhuma fórmula mágica nem um milagre secreto na educação finlandesa. O que fizemos melhor do que outros países foi entender qual é a essência do bom ensino e do bom aprendizado. As crianças devem ser vistas como indivíduos que têm diferentes necessidades e interesses na escola. Ensinar deve ser uma profissão inspiradora com um grande propósito de fazer a diferença na vida dos jovens. Infelizmente, esses princípios básicos deram lugar a políticas regidas pelo mercado em vários países. Essa lógica de testar estudantes e professores direcionou os currículos e aumentou o tédio em milhões de salas de aula. A fórmula para uma reforma da educação em muitos países é parar de fazer essas coisas sem sentido e entender o que é importante na educação.

A história da matemática é uma ferramenta para o ensino, mas cada professor pode e deve desenvolver suas próprias técnicas usando todo conhecimento didático e pedagógico desenvolvido e escolher as ferramentas que ele acha que irá funcionar em cada uma de suas turmas. Assim seguindo os passos do professor Elon Lages na conceituação, podemos usar um problema histórico para que eles venham a entender como aquele conhecimento foi criado, na manipulação desse problema, mostrar a evolução no procedimento para a realização e generalização de determinado cálculo e na aplicação mostrar uma prática daquele conhecimento, no ensino da geometria onde quase todo conhecimento surgiu de maneira prática devemos tentar desamarra-nos apenas dos exemplos do livro didático e fazer alguma prática em outro ambiente, seja numa quadra, calculando a área usando objetos de medidas diferentes, ou no laboratório de informática usando simuladores, como geogebra, geoenzo e outros disponíveis gratuitamente na internet como no site webeduc.mec.gov.br entre muitos outros que existem.

---

[1] Leia mais: https://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/as-licoes-da-revolucao-educacional-finlandesa-para-mundo-4077243ixzz5OjzfnNd9 stest

6 CONSIDERAÇÕES

A História é o meio pelo qual podemos entender o presente e projetar o futuro, sendo assim, devemos sempre usar esse meio para mostrar como chegamos aqui e possíveis caminhos a seguir. Com a Matemática não pode ser diferente, por isso devemos desenvolver à História da Matemática em nosso dia a dia escolar planejando e pesquisando.

Os exames feitos tanto internacionalmente como nacionalmente mostram que temos muito a melhorar, mas já começamos a dá alguns passos, porém ainda temos muito a melhorar, para isso, precisamos que a sociedade desperte para vê e entender que a educação é quem pode desenvolver uma sociedade sem esperar por salvadores da pátria que trarão novas ideias e consertaram toda injustiça praticada durante tanto tempo.

Durante esse período algumas experiências foram bem interessantes, vou destacar duas, uma foi pedir aos alunos que fizessem trios e apresentassem uma das demonstrações do teorema de Pitágoras, onde existem mais de 350 demonstrações tanto algébricas como geométricas, algumas equipes realmente conseguiram me surpreender positivamente, pois trouxeram demonstrações bem simples e fáceis de visualizar, além de algumas animações. Outra foi poder dividir uma aula de preparação para o ENEM com uma professora de História onde trabalhamos a civilização egípcia no seu aspecto cultural, social, religioso e matemático, mostrando aos alunos que o conhecimento é interdisciplinar onde um matemático também deve ter conhecimento de outras áreas bem como os formados em outras áreas devem também ter um conhecimento matemático básico.

Algumas dificuldades que tive foi a falta de compromisso mostrada por boa parte de alguns alunos que mesmo sabendo que era uma pesquisa onde não deveriam se identificar muitos tentavam colar tentando olhar no celular ou pedindo resposta ao colega. Assim chegamos à conclusão que além de trabalhar os conceitos e aplicações é necessário um bom trabalho de formação e conscientização social. Várias metodologias vêm sendo desenvolvidas para o ensino de matemática e a historia mostra que não existe uma metodologia milagrosa, mas devemos buscar um equilíbrio entre elas para desenvolvermos em nossas aulas uma curiosidade em nossos alunos para ensina-los como estudar não apenas matemática, mas qualquer conhecimento que eles queiram.

Observamos ao longo desse trabalho que os desafios na educação são enormes e por isso não podemos nos acomodar e fazer de conta que estamos ensinando, muitos são os fatores que nos fazem pensar que não tem solução, mas precisamos lembrar que se a evolução de uma sociedade passa pela educação, então nós como professores temos nossas responsabilidades perante a sociedade, temos que ter discernimento para identificar possíveis meios para intervir na vida de alunos seja por ver que ele tem um potencial a ser desenvolvido em determinada disciplina como Matemática ou por ele confiar em nós. Já tivemos o belo prazer de ex-alunos voltarem e reconhecer que de alguma maneira fizemos a diferença em sua vida.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. Tradução de João Bosco Pitombeira. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. 3. ed. São Paulo: BLUCHER, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

______. Senado Federal. **Emenda constitucional nº 53, de 19 de dezembro de 2006**. Brasília, 2006. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Emendas/Emc/emc53.htm>. Acesso em: 15 jul. 2018.

______. Senado Federal. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, 2017. Disponível em: <http://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/529732/lei_de_diretrizes_e_bases_1ed.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2018.

______. Supremo Tribunal Federal. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://www.stf.jus.br/arquivo/cms/legislacaoConstituicao/anexo/CF.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2018.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. 2. ed. Campinas, SP: PAPIRUS, 2009. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, H. **GEOMETRIA**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: ATUAL, 1994. v. 3. (Série Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula).

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: UNICAMP, 2004.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. d. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

SANTOS, R. R. d. Breve histórico do ensino médio no brasil. In: SEMINÁRIO E POLÍTICA NA PRIMEIRA REPUBLICA, 1., 2010. Santa Catarina. **Anais...** Santa Catarina: UESC, 2010.

SILVA, C. P. D. **A matemática no Brasil:** história de seu desenvolvimento. 3. ed. São Paulo: BLUCHER, 2003.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

FECLESC

FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL

Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT

QUESTIONÁRIO

Este questionário enquadra-se numa investigação no âmbito de uma dissertação de Mestrado em matemática, realizada na Faculdade de educação, ciências e letras do sertão (FECLESC). Os resultados obtidos serão utilizados apenas para fins académicos, sendo realçado que as respostas dos inquiridos representam apenas a sua opinião individual. O questionário é anónimo, não devendo por isso colocar a sua identificação em nenhuma das folhas nem assinar o questionário. Não existem respostas certas ou erradas. Por isso lhe solicitamos que responda de forma espontânea e sincera a todas as questões.

Obrigado pela sua colaboração.

1- Sua idade:

2- Sexo:

( ) Masculino ( ) Feminino

3- Disciplina que você tem maior afinidade?

4- Seu grau de afinidade por Matemática?

( ) 1

( ) 2

( ) 3

( ) 4

( ) 5

5- Você sabe o que é Geometria?

( ) sim

( ) não

6- Se sim, explique com suas palavras.

7- Quais as formas geométricas que você conhece?

8- Quais os teoremas que você conhece?

APÊNDICE B – Teste de conhecimentos

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

FECLESC

FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL

PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática

TESTE DE CONHECIMENTOS

1- Defina:

a) Triângulo:

b) Quadrado:

c) Retângulo:

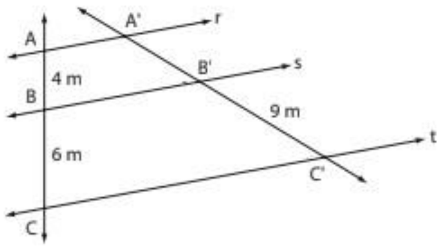
d) Paralelogramo:

e) Losango:

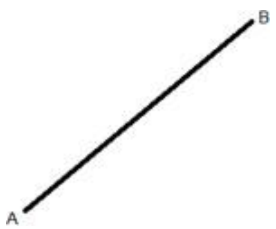
f) Trapézio:

g) Circunferência:

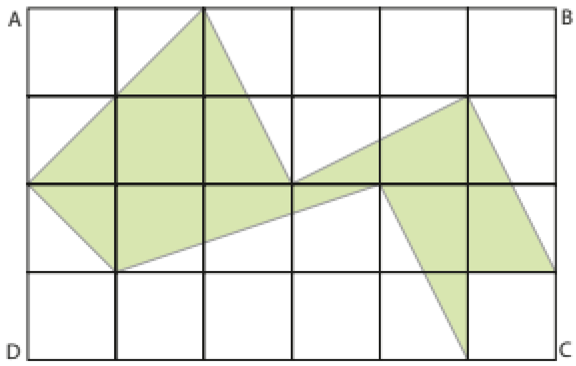
2- Sabendo que as retas r, s e t são retas paralelas, determine o valor do segmento $\overline{A'B'}$.



3- Dado o segmento $\overline{AB}$ de comprimento u, construa um quadrado e um triângulo equilátero de lado igual a u, depois escreva a diagonal do quadrado e a altura do triângulo em função de seu lado.



4- Na figura abaixo, o retângulo *ABCD* foi dividido em quadrados de 2 cm de lado.



Qual é a área da região sombreada, em centímetros quadrados?