UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCELO MIRANDA DA SILVA

DESMISTIFICANDO O CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

QUIXADÁ - CEARÁ
2018

MARCELO MIRANDA DA SILVA

DESMISTIFICANDO O CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Luzeilton de Oliveira.

QUIXADÁ - CEARÁ
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Silva, Marcelo Miranda da .
Desmistificando o conjunto dos números irracionais [recurso eletrônico] / Marcelo Miranda da Silva. - 2018.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 76 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Quixadá, 2018.
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. João Luzeilton de Oliveira.

1. Conjuntos numéricos . 2. Irracionais. 3. Provas de irracionalidade. I. Título.

MARCELO MIRANDA DA SILVA

DESMISTIFICANDO O CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 05 de outubro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Luzeilton de Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof.ª Dr.ª Maria Cristiane Magalhães Brandão
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Dedico à minha avó materna Luiza Correia dos Santos (Vó Zizinha), meu irmão Márcio José da Silva, e ao grande matemático e autor de vários livros nos quais estudei desde a graduação, Prof. Dr. Elon Lages Lima.

(in memoriam)

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, coragem e perseverança na busca de meus objetivos e pela força para contornar os obstáculos e seguir em frente na realização de meus sonhos.

Ao professor e orientador Luzeilton de Oliveira pela paciência e dedicação no auxilio durante a realização deste trabalho, bem como durante minha vida acadêmica desde a graduação.

Aos demais professores do PROFMAT na UECE/FECLESC, Ulisses Parente, Tony Melo e Jobson Oliveira, que também contribuiram muito na minha formação durante o curso de pós-graduação.

Aos meus pais José Miranda e Elizabete Lopes, meus irmãos Marciano Jakson e Elijôse Miranda, e minhas tias Nenê Cassiano e Neide, pelo incentivo e apoio durante todos os dias de minha vida.

Ao meu irmão Márcio José da Silva, falecido no dia 09.09.2012, e minha avó materna Luiza Correia dos Santos (Vó Zizinha), falecida no dia 08.05.2013, que muito contribuiram na minha vida e motivaram na busca de aperfeiçoamento profissional.

À minha esposa e companheira de todos os momentos Mª Silverlândia, pela compreensão, apoio e incentivo. E minha filha Sindy Alves, motivo pelo qual busco me aprimorar sempre como pessoa e profissional.

Ao meu amigo, colega de turma e parceiro nas viagens para as aulas em Quixadá, professor Ivan Silva Santos. E aos demais colegas da turma de mestrado, pelos desafios superados juntos, parceria e amizades.

À Daiane Santos, amiga e colega de trabalho, pelo apoio, incentivo e auxílio em toda a parte burocrática na solicitação do meu afastamento das atividades diárias, junto aos órgãos competentes, que possibilitou a dedicação exclusiva na realização desta dissertação.

Aos demais amigos, parentes e colegas de trabalho que contribuiram de forma direta ou indireta na conclusão de mais esta etapa de minha vida.

À Secretaria de Educação do Estado do Ceará - SEDUC-CE, Escola Almir Pinto e ao professor Manoel Lins (Diretor Escolar), pelo afastamento concedido.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, pela iniciativa do Projeto de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT e ao Professor Dr. Elon Lages Lima, falecido no dia 07.05.2017, que desempenhou um papel muito importante na formação de professores de todo o Brasil e, certamente, contribuiu muito além de nossas fronteiras territoriais.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de estudos.

“Nenhuma medição experimental pode oferecer como resultado um número irracional. Deve-se entretanto lembrar que, quando o raciocínio matemático assegura a incomensurabilidade, o número racional obtido experimentalmente é apenas um valor aproximado; O valor exato é um número irracional.”

(Elon Lages Lima).

RESUMO

Busca-se desmistificar o conjunto dos números irracionais através da explanação de suas propriedades e demonstrações. Tem como objetivo principal contribuir para a formação de estudantes do Ensino Médio e licenciandos em Matemática, bem como na formação continuada de professores da disciplina de Matemática. Realiza um estudo bibliográfico visando aprofundar o conhecimento sobre conjuntos numéricos, em especial, o conjunto dos números irracionais. Tal estudo é feito em dois níveis de aprofundamento: o primeiro não muito formal voltado para os discentes do Ensino Médio e um segundo nível mais formal e com maior rigor matemático direcionado aos docentes. Neste sentido, foi produzido um material que trata da teoria dos assuntos mencionados, além de algumas sugestões de atividades, a serem realizadas em sala de aula, que visam abordar de forma mais didática e atraente, os conceitos relacionados. Afim de incentivar a produção de mais atividades didáticas, não só sobre o tema deste trabalho, mas em diversos outros ramos da Matemática, contribuindo assim, para uma aprendizagem mais efetiva e significativa.

Palavras-chave: Conjuntos numéricos. Irracionais. Provas de Irracionalidade.

ABSTRACT

It seeks to demystify the set of irrational numbers through the explanation of their properties and demonstrations. Its main objective is to contribute to the training of High School students and graduates in Mathematics, as well as in the continuing training of teachers of Mathematics. It carries out a bibliographical study aiming to deepen the knowledge about numerical sets, especially the set of irrational numbers. This study is made in two levels of deepening: the first not very formal for the students of the High School and a second level more formal and with greater mathematical rigor directed to the teachers. In this sense, a material was produced that deals with the theory of the mentioned subjects, besides some suggestions of activities, to be realized in classroom, that aim to approach in a more didactic and attractive way, the related concepts. In order to encourage the production of more didactic activities, not only on the subject of this work, but in several other branches of Mathematics, thus contributing to a more effective and meaningful learning.

Keywords: Numerical sets. Irrational. Evidence of Irrationality.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos Números Racionais
$\mathbb{I}$	Conjunto dos Números Irracionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
I_n	Conjunto dos números naturais menores do que ou iguais a n
$\blacksquare$	Como queríamos demonstrar
$\approx$	Aproximadamente
∞	Infinito

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na Grécia antiga, acretidava-se que todo número inteiro positivo ou a razão entre eles, eram suficientes para medir todo e qualquer segmento, ou seja, dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sempre conseguiríamos um segmento $\overline{EF}$ que caberia um número n inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e um número m inteiro de vezes em $\overline{CD}$. Boa parte da Matemática grega baseava-se nessa crença. Mas, ao tentar medir a diagonal do quadrado unitário, tomando o lado como unidade de medida, chegaram a conclusão de que esses segmentos não podiam ser medidos, tomando-se o lado como unidade de medida, ou seja, são incomensuráveis. Como consequência disso, a medida da diagonal do quadrado unitário não pode ser expressa pela razão entre números inteiros, isto é, não é racional. Surgem assim, os irracionais.

No nosso contexto escolar, em nível de educação básica, nos encontamos como os gregos antigos. Os números que frequentemente utilizamos são as razões entre inteiros, que hoje denominamos de racionais. Estes são suficientes para realizar contagem, operações e medições, pois, embora o resultado, por exemplo, obtido em uma medição, seja teoricamente um número irracional, na prática, utilizamos apenas aproximações desses números, uma vez que, mesmo o mais preciso instrumento de medição fabricado até hoje, possui suas limitações. E assim, a ênfase necessária à compreensão dos irracionais e suas propriedades é, muitas vezes, negligenciada, seja pelo livro didático, programa de curso da escola ou até mesmo pelo próprio professor, acarretando um déficit muito grande na formação de nossos educandos.

Na tentativa de sanar essas dificuldades, fizemos um levantamento bibliográfico e pesquisas para produção de material e elaboração de atividades, visando aprofundar o conhecimento de professores e alunos do Ensino Médio em relação aos irracionais. Nesse sentido, propomos um estudo teórico e prático, a fim de desenvolver competências e habilidades dos educandos, assim como auxiliar os docentes na realização de tarefas que tornem mais significativa a aprendizagem desses números. Esperamos com este trabalho, desmistificar o conjunto dos irracionais através do estudo de suas propriedades e por meio de demonstrações a eles relacionadas.

A dissertação está dividida em quatro seções. A seção 1 contém este texto introdutório. A seção 2 está subdividida em duas partes: a primeira trata dos conjuntos numéricos, onde aceitamos inicialmente os conceitos de número e conjunto como algo intuitivo. Daí, desenvolvemos o estudo dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, apresentando suas propriedades e operações ao nível de entendimento dos alunos do ensino médio, salvo algumas demonstrações mais elaboradas; a segunda parte realiza uma abordagem mais formal e com rigor matemático sobre os conjuntos supra-citados. Nela, vemos como se dá a construção dos números, desde os naturais, com os axiomas de Peano, até os reais, com os Cortes de Dedekind. A seção 3, consiste em demonstrações formais que provam a irracionalidade de uma infinidade de números reais. Demonstra, por exemplo, a irracionalidade de casos particulares como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ e algumas generalizações como $\sqrt{p}$, com p primo; $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, com $\sqrt{ab}$ irracional; e $\sqrt[n]{a}$, em que a não seja uma n-ésima potencia de um número natural. Vale ressaltar ainda, as provas de irracionalidades de valores trigonométricos, logarítmicos e do número de Euler (e). Na sequência, apresenta uma bela fórmula matemática: $e^{i\pi} + 1 = 0$, seguida da justificativa de tal título. Além disso, contém as sugestões de algumas atividades que objetivam explorar conceitos matemáticos e despertar o interesse dos discentes em relação aos números irracionais. E, finalmente, as conclusões, na seção 4.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Nesta seção, faremos de modo elementar, uma construção dos números reais. Partimos dos números naturais, mostrando-se a necessidade de ampliá-lo para os inteiros, e deste, a necessidade de se criar os racionais. Em seguida, mostra-se que todo racional é um número com representação decimal finita ou infinita e periódica e, vice-versa. Mostraremos, também, que existem números com uma representação decimal infinita e não periódica, que são os irracionais.

2.1.1 Número e conjunto

Aceitaremos, no contexto deste trabalho, o conceito de número como entidade abstrata, o qual se refere à representação de quantidades e que está relacionada à noção de contagem. E conjunto, como sendo um conceito primitivo, isto é, aceito sem a necessidade de defini-lo, por se tratar de uma noção que se forma a partir de observações das coisas que nos cercam, embora, nos dê a ideia de coleção ou agrupamento. Os conjuntos são de fundamental importância no estudo da Matemática, conforme aponta (LIMA et al., 1997):

> Toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matematicas.

Nesse sentido, daremos enfoque aos conjuntos formados por números, em especial, ao conjunto dos naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, por serem estudados desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, aprofundados no Ensino Médio, e retomados novamente no Ensino Superior com uma visão mais ampla, analítica e formal. Os conjuntos supa-citados fazem parte de um dos principais objetos de estudo da Matemática, segundo (LIMA et al., 1997):

> A Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço. Portanto os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas (que são conjunto de pontos) e os conjuntos que se derivam destes, como os conjuntos de funções, de matrizes etc.

Segue daí, a importância de estudarmos esses conjuntos, que formam toda uma base de Matemática e servem de apoio para estudos em diversas áreas do conhecimento. Desse modo, são indispensáveis para uma boa compreensão dessa disciplina (Matemática) e uma formação sólida e significativa de nossos educandos.

A nossa ideia é fazer uma apresentação dos conjuntos numéricos, iniciando-se com os naturais, e mostrando-se a necessidade de expansão desses, criando um novo conjunto de números e expandindo-o, até chegarmos ao conjunto dos números reais. Começaremos tal apresentação com um breve estudo dos Naturais, na seção a seguir.

2.1.2 Conjunto dos números naturais - $\mathbb{N}$

A noção de contar está intimamente ligada ao conjunto dos números naturais que, segundo (LIMA et al., 1997), são o modelo matemático para a contagem, afirmando ainda que:

> A importância dos números naturais provém do fato de que eles constituem o modelo matemático que torna possível o processo de contagem. Noutras palavras, eles respondem a perguntas do tipo: "Quantos elementos tem este conjunto?". (LIMA et al., 1997, p.38).

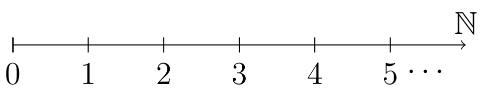
Ao longo da história da humanidade, as civilizações foram se apoderando dos números naturais através da realização de contagens. Assim, o conceito de número natural foi sendo desenvolvido de maneira não tão formal, até que no século XX, o Matemático italiano, Giuseppe Peano, descreveu concisa e precisamente estes números. Esta descrição ficou conhecida como os axiomas de Peano, os quais detalharemos no subitem 2.2.2.1, que trata da construção desses números.

O conjunto dos números naturais pode ser representado na forma tabular como

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\},$$

ou por meio da reta numerada, como na Fig. 1 abaixo

Figura 1 – Representação dos Naturais



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta reta, temos os números naturais representados por pontos e separados por um segmento unitário, isto é, segmento cujo comprimento é uma unidade. Observe que os números não se encontram de forma aleatória, estão seguindo a ordem de sucessão dos naturais. Este fato está mais detalhado no subitem 2.2.2.3, que trata da relação de ordem em $\mathbb{N}$.

Existe um questionamento em relação ao "zero", ser ou não natural. Para os gregos antigos o 1(*um*) não era número, e sim a unidade, a partir da qual se formavam os números. Na contagem de elementos, é mais comum iniciarmos pelo número 1, pois, dificilmente começamos uma contagem pelo “zero”. Este, surgiu como algarismo[1] para preencher o espaço vazio entre os demais símbolos na formação dos números, sendo, então, incorporado como número ao longo dos anos. Dependendo de como é constituída a Teoria de Números Naturais, podemos considerá-lo natural ou não. Neste trabalho, daremos um destaque para as propriedades dos conjuntos numéricos, onde será abordado, por exemplo, a existência de elemento neutro da adição, isto é, o “zero”. Portanto, o mesmo será apresentado nessa teoria como um elemento do conjunto dos números naturais.

A caracterização de $\mathbb{N}$ é feita essencialmente, a partir do termo primitivo sucessor, que está presente nos axiomas de Peano, e cujo primeiro elemento desse conjunto é o “zero”. O sucessor de zero é 1, o sucessor de 1 é 2, e assim, por diante. Representamos o sucessor de um número natural qualquer n por $n+1$. O conjunto dos números naturais é infinito, indicando tal afirmação com o uso de reticências (...) após escrevermos alguns de seus elementos, na sua representação tabular (antes de fechar as chaves). Mas, o que realmente significa dizer que um conjunto é infinito? Na próxima subseção, temos algumas definições a esse respeito.

2.1.2.1 Conjuntos infinitos

Daremos, inicialmente, as definições de conjuntos finito e infinito, contagem e número cardinal. Além disso, provaremos a infinitude dos naturais e dos primos, e apresentaremos o Teorema Fundamental da Aritmética[2]. As definições abaixo são essenciais para a compreensão das demonstrações que se seguem.

Antes das definições anunciadas, precisamos do conjunto dos n-ésimos primeiros naturais, $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$. Observe que I_n é o conjunto dos números naturais menores do que ou iguais a n.

Vamos agora definir conjunto finito e conjunto infinito.

Definição 2.1 (Conjunto Finito). *Um conjunto X é finito quando é vazio ou então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \longrightarrow X$, de modo que $x_1 = f(1), x_2 = f(2), ..., x_n = f(n)$, isto é, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. A bijeção f chama-se uma contagem e n o número de elementos, ou número cardinal do conjunto finito X. Se X for vazio, seu número de elementos é zero.*

Definição 2.2 (Conjunto Infinito). *Um conjunto X é infinito quando não é finito, ou seja, não é vazio e nem existe, seja qual for o $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f : I_n \longrightarrow X$.*

Com base nessas definições, vamos mostrar a seguir que o conjunto dos números naturais é infinito.

Teorema 2.1. *O conjunto dos números naturais é infinito.*

[1]Símbolos de 0 até 9, que usamos no nosso sistema de numeração decimal para formar os números, e estes são representações de quantidades.

[2]A demonstração se encontra no Ex. 2.1, pág.41, que trata da utilização do 2º Princípio de Indução.

Demonstração. De fato, dada qualquer função $f : I_n \longrightarrow \mathbb{N}$, não importa qual n se fixou, pomos $k = f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$, e vemos que para todo $x \in I_n$, tem-se $f(x) < k$. Logo, não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$. Assim, f não é sobrejetiva e, consequentemente, não é bijetiva. ■

Um subconjunto importante de $\mathbb{N}$ é o conjunto dos naturais não nulos, isto é,

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\},$$

obtido excluindo-se o número 0 de $\mathbb{N}$, ou seja,

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Outros subconjuntos de $\mathbb{N}$, igualmente importantes, são apresentados a seguir: o conjunto dos números pares, o conjunto dos números ímpares, e o conjunto dos números primos. O conjunto dos números pares, é o conjunto dado por $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...\}$ ou $P = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$, ou seja, são números pares os números naturais que na divisão por 2 deixam resto igual a zero, isto é, são divisíveis por 2. Já, o conjunto dos números ímpares, é dado por $P' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$ ou $P' = \{2n + 1; n \in \mathbb{N}\}$, ou seja, são números ímpares os números naturais que na divisão por 2 deixam resto igual a um, isto é, não são divisíveis por 2. Finalmente, temos o conjunto dos números primos $\overline{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$, cuja importância é destacada, principalmente, na segurança dos atuais sistemas de informações, que se utilizam de criptografia através de produtos com primos muito grandes. Os números primos positivos são os números naturais, exceto o 1, que possuem apenas dois divisores, o 1 e o próprio número.

Apresentamos a seguir o Teorema Fundamental da Aritmética, cuja demonstração é feita mais adiante, e demonstraremos a infinitude dos números primos.

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Todo número natural, diferente de 1, pode ser decomposto de modo único, a menos da ordem, em fatores primos.*

Teorema 2.3. *O conjunto dos números primos é infinito.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista uma quantidade finita n de números primos, os quais representaremos por $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, ..., p_n$. Considerando o número $N = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$, pelo Teo. 2.2, N pode ser decomposto em fatores primos, e assim, existe algum primo p_i que divide $N = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$. Mas, por hipótese, como só existem n primos, p_i deve ser igual a algum dos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, ou seja, $p_i \mid p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$. Do fato, de $p_i \mid N$, temos que $p_i \mid N - (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n)$, isto é $p_i \mid 1$, o que é absurdo!, pois p_i seria igual a 1, e 1 não é primo. Este absurdo surgiu do fato de supor que existia uma quantidade finita de primos. Portanto, existem infinitos primos. ■

No conjunto dos números naturais podemos definir as operações de adição

(+) e a multiplicação (·), cujos resultados são, respectivamente, denominados de *soma* e *produto*. Além disso, destacamos algumas propriedades:

P1. Fechamento. A adição de naturais resulta em um número natural, e a multiplicação de naturais, também tem como resultado outro natural, isto é, o conjunto dos números naturais é fechado para a adição e multiplicação.

P2. Existência de elemento neutro. Na adição, o zero (0) e na multiplicação, o um (1), que em símbolos, fica

$$a + 0 = 0 + a \quad \text{e} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a, \forall\, a \in \mathbb{N}.$$

P3. Comutatividade da adição e multiplicação. A ordem das parcelas na adição não altera a soma, bem como a ordem dos fatores na multiplicação não altera o produto. Em símbolos, temos

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in \mathbb{N}.$$

P4. Associatividade da adição e da multiplicação. A soma de a com b adicionada a c é igual a a adicionado da soma de b com c. E o produto de a por b multiplicado por c é igual a a multiplicado pelo produto de b por c. Em símbolos:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}.$$

P5. Distributividade da multiplicação em relação a adição. A soma de a com b multiplicado por c é igual a soma dos produtos de a por c e b por c. Em símbolos:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}.$$

As operações básicas conhecidas por nós, como subtração (−) e divisão (÷), não podem ser realizadas nos naturais, justamente por contrariar a propriedade **P1**. Por exemplo, 3 e 5 são naturais, mas $3 - 5 \notin \mathbb{N}$ e $3 \div 5 \notin \mathbb{N}$. Este exemplo ilustra a necessidade de um conjunto em que as operações descritas acima façam sentido e mantenham a validade das propriedades. Estes problemas serão resolvidos com a criação dos conjuntos dos Inteiros e dos Racionais, respectivamente, que serão descritos nos próximos tópicos.

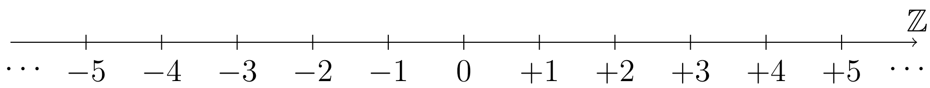
2.1.3 Conjunto dos números inteiros - $\mathbb{Z}$

Reunindo os números naturais (positivos e o zero) com os negativos, obtemos o conjunto dos números inteiros. O conjunto $\mathbb{Z}$ será indicado, na forma tabular, por

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...\},$$

ou por meio da reta numerada, conforme Fig. 2:

Figura 2 – Representação dos Inteiros



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os inteiros, assim como os naturais, são representados por meio de pontos sobre a reta numerada, separados por um segmento unitário, diferenciando-se apenas no fato de termos uma orientação. Os números positivos ficam à direita do zero e os negativos, à esquerda.

Apesar dessa sequência lógica não retratar a cronologia correta da descoberta e utilização dos conjuntos numéricos, ela segue a construção destes números na forma como estão estruturados na Matemática atual. Os gregos, por exemplo, conheciam os naturais, os racionais positivos, e a existência de números irracionais. No entanto, não utilizavam número negativos. Segundo (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010),

> [...] Apesar da profundidade e sutileza de sua matemática e filosofia, os gregos ignoraram os números negativos completamente. A maioria dos matemáticos gregos pensavam em 'números' como sendo inteiros positivos, e pensavam em segmentos de retas, áreas, e volumes como tipos diferentes de tamanhos (e, portanto, não com números). Mesmo Diofante, que escreveu um livro sobre a resolução de equações, nunca considerou nada além de números racionais positivos [...]

Após os gregos antigos, por volta do século VII, conforme apontam (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010), matemáticos como o indiano Brahmagupta, trabalharam com quantidades negativas e até desenvolveram algumas regras para operar com estes números. Muitos matemáticos os utilizaram, mas existia ainda certo receio e desconfiança, que só foram superados por volta do século XIX, conforme ainda (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010):

> [...] Colombo descobriu a América mais de dois séculos antes de os negativos serem incorporados à sociedade dos números. Eles não se tornaram cidadãos de primeira classe até meados do século XIX, por volta da mesma época da Guerra Civil dos Estados Unidos.

Um subconjunto importante de $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros não nulos - $\mathbb{Z}^*$, dado por

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +5, ...\},$$

ou seja,

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Dado um número inteiro não nulo n, indicamos o simétrico ou oposto ou inverso aditivo de n, por $-n$.

O conjunto $\mathbb{Z}$ preserva as propriedades de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{N}$, inclusive o fechamento, isto é, a adição de inteiros é um inteiro, e a multiplicação de inteiros, também resulta em um número inteiro. Com isso, podemos ampliar para os inteiros, os conceitos de número par (inteiro que na divisão por 2 deixa resto 0), e ímpar (inteiro que na divisão por 2 deixa resto 1), para, em seguida provarmos as duas próximas proposições, que tratam do fechamento do conjunto dos números pares para adição e multiplicação, e dos ímpares para a multiplicação.

Proposição 2.1. *O conjunto dos inteiros pares é fechado em relação à adição e à multiplicação.*

Demonstração. Sejam $2m$ e $2n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, inteiros pares quaisquer. Realizando a adição de $2m$ com $2n$, teremos $2m + 2n = 2\overbrace{(m+n)}^{k\in\mathbb{Z}} = 2k, k \in \mathbb{Z}$. De modo análogo, teremos $2m \cdot 2n = 2\overbrace{(2mn)}^{k\in\mathbb{Z}} = 2k, k \in \mathbb{Z}$ ■

Proposição 2.2. *O conjunto dos inteiros ímpares é fechado em relação a multiplicação.*

Demonstração. Sejam $2m + 1$ e $2n + 1$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, inteiros ímpares quaisquer. Realizando a multiplicação de $2m+1$ por $2n+1$, teremos $(2m+1)\cdot(2n+1) = 2\overbrace{(2mn + m + n)}^{k\in\mathbb{Z}}+1$, ou seja, $(2m + 1) \cdot (2n + 1) = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$. ■

Já, as duas proposições a seguir, nos dizem que o quadrado de um número par é par, e o quadrado de um número ímpar é ímpar.

Proposição 2.3. *x é par se, e somente se, x^2 for par.*

Demonstração. De fato, sendo $x \in \mathbb{Z}$ par, pela Prop. 2.1, x^2 é inteiro par. Reciprocamente, suponha que $x^2 \in \mathbb{Z}$ é par; então x também é par, pois se x fosse ímpar, pela Prop. 2.2, x^2 também seria ímpar, o que contradiz nossa hipótese. Assim, x é par. ■

Proposição 2.4. *x é ímpar se, e somente se, x^2 for ímpar.*

Demonstração. Análoga à Prop. 2.3. ■

Há uma relação entre os números naturais e os números inteiros não negativos, de modo que ambos são equivalentes em termos de propriedades e estrutura. Assim, aceitaremos o conjunto dos naturais como subconjunto dos inteiros, isto é, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Desta maneira, consideraremos os inteiros como uma extensão dos naturais, mantendo todas as propriedades das operações com os naturais, válidas para as operações no conjunto dos inteiros, acrescentado agora a existência do simétrico ou oposto.

Cada número inteiro n, com excessão do zero, passa a admitir um único simétrico, que indicaremos por $-n$.

Com base nas considerações feitas no parágrafo anterior, tem sentido em $\mathbb{Z}$, o símbolo $a - b$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Podemos, assim, definir a operação de subtração em $\mathbb{Z}$, como segue.

Definição 2.3 (Subtração)**.** *Dados inteiros a e b, a subtração $a - b$, nesta ordem, é a adição do inteiro a com o simétrico de b. Em símbolos:$a - b = a + (-b)$, com $a, b \in \mathbb{Z}$.*

Com o conjunto dos inteiros e a propriedade de existência de simétricos, podemos definir a operação de subtração, onde todas as propriedades dos naturais continuam válidas. Porém, não podemos realizar a divisão, pois tornaria inválida a propriedade **P1** (Fechamento). Por exemplo, para os inteiros 3 e 5, temos $3 - 5 \in \mathbb{Z}$, porém $3 \div 5 \notin \mathbb{Z}$.

Surge assim, a necessidade de um conjunto onde se possa realizar a divisão e que as propriedades válidas para os inteiros sirvam também nesse novo conjunto. É criado então, o conjunto dos números racionais como uma extensão dos inteiros, que passaremos a detalhar a seguir.

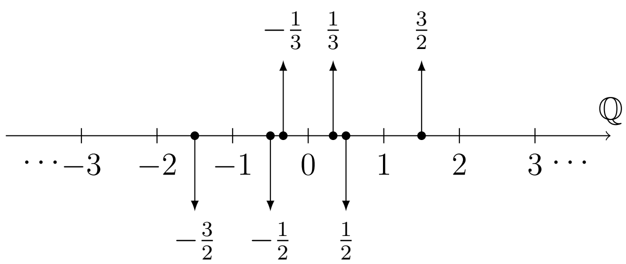
2.1.4 Conjunto dos números racionais - $\mathbb{Q}$

A noção de medir conduz ao conceito de número racional, que é o modelo matemático para realizar medição. Se aos inteiros acrescentarmos todas as frações não aparentes, isto é, frações que não representam inteiros, teremos o conjunto dos números racionais. Este conjunto, representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$, é formado por todos os números que podem ser escritos como frações, cujos numerador e denominador são inteiros, e o denominador diferente de zero. Usualmente, indicamos este conjunto, simbolicamente, por

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\},$$

que ficará, na reta numerada, conforme Fig. 3.

Figura 3 – Representação dos Racionais



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = ba', \forall \frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$.

Neste conjunto podemos definir as operações de adição $(+)$, subtração $(-)$, multiplicação $(\cdot)$ e divisão $(\div)$ como descritas abaixo:

Definição 2.4. *A adição, subtração, multiplicação e divisão de racionais, são definidas, respectivamente, por*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd},$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

para quaisquer racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Todas as propriedades listadas anteriormente, válidas para as operações com inteiros, permanecem válidas para os racionais. Além disso, se tomarmos $b = 1$, em $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$, teremos que o conjunto $\mathbb{Q}$ coincide com o conjunto dos inteiros, isto é, $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}$. Assim, dizemos que todo inteiro é racional, ou seja, o conjunto dos números inteiros é subconjunto do conjunto dos números racionais, indicando este fato por $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, temos as seguintes relações de inclusão

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Até agora, vimos que os racionais foram escritos na forma fracionária. Na subseção a seguir, estudaremos outra forma de representar os racionais, a sua representação decimal.

2.1.4.1 Representação decimal de um número racional

De maneira geral, a expressão decimal de um número α é um símbolo da forma

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ..., \tag{2}$$

em que a_0 é um número inteiro maior do que ou igual a zero, e os $a_i's$, com $i = 1, 2, .., n$, são dígitos, ou seja, algarismos de 0 a 9. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a_n é denominado n-ésimo dígito da expressão decimal α, e a_0, a sua parte inteira.

A expressão decimal acima pode ser escrita como

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots . \tag{3}$$

Este número tem por valores aproximados, os números racionais da forma

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \tag{4}$$

à medida que os valores de n crescem.

A passagem de um racional da forma $\frac{a}{b}$ para a forma decimal é feita dividindo-se a por b. Ao efetuarmos essa divisão, obteremos um número com uma quantidade finita de algarismos (decimal exato), ou um número com infinitos algarismos que se repetem periodicamente (um decimal infinito e periódico, ou dízima periódica).

Sendo assim, os elementos de $\mathbb{Q}$ podem ser representados na forma decimal exata, ou seja, um número finito de casas após a vírgula ou dízima periódica, isto é, um número infinito de casas após a vírgula, mas com uma repetição de um período formado por um ou mais algarismos.

Como exemplos de decimais exatos temos $0,5$; $1,25$ e $6,2573$, etc. Podemos citar como exemplos de dízimas periódicas, os números $0,555...$; $0,333...$ e $0,323232...$, etc. Para evidenciar o período e ficar claro o que vem depois das reticências (...), costuma-se representar a dízima colocando-se um traço acima do período. Desta forma, os exemplos acima ficam, respectivamente, assim $0,\overline{5}$; $0,\overline{3}$ e $0,\overline{32}$.

Mas, como saber quando um número racional $\frac{a}{b}$, na forma irredutível[3], tem representação decimal finita? E decimal infinita e periódica? As respostas a estas perguntas encontram-se nas duas proposições a seguir.

Proposição 2.5. *Um número racional $\frac{a}{b}$, na forma irredutível, tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e de 5.*

Demonstração. Suponhamos que o número racional $\frac{a}{b}$ está na forma irredutível, ou seja, que a e b são primos entre si. Desta forma, uma fração equivalente a $\frac{a}{b}$ deve ter a forma $\frac{ak}{bk}$, que obtemos multiplicando a e b pelo mesmo número natural $k > 0$. Como os fatores primos de uma potência de 10 são 2 e 5, se $\frac{ak}{bk}$ é fração decimal, para algum $k > 0$ natural, então, para algum $s \in \mathbb{N}$, $bk = 10^s$, ou seja, bk é potência de 10. Assim, bk só admite fatores primos iguais a 2 ou 5 e, portanto, b também. Reciprocamente, se b possui apenas fatores primos iguais a 2 ou 5, então $b = 2^\alpha 5^\beta$, com $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Analisaremos duas condições para α e β.

a) $\beta \leq \alpha$.

Neste caso, multiplicaremos o numerador e o denominador de $\frac{a}{b}$ por $5^{\alpha-\beta}$, obtendo-se assim,

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^\alpha 5^\beta} = \frac{a5^{\alpha-\beta}}{2^\alpha 5^\beta 5^{\alpha-\beta}} = \frac{a5^{\alpha-\beta}}{2^\alpha 5^\alpha} = \frac{a5^{\alpha-\beta}}{10^\alpha}.$$

Como $\alpha-\beta$ é positivo ou nulo, $5^{\alpha-\beta}$ é um inteiro e, portanto, $a5^{\alpha-\beta}$ também será um inteiro, digamos p. Logo,

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{10^\alpha},$$

[3]Uma fração $\frac{a}{b}$ se diz irredutível se o maior divisor comum de a e b for 1, ou seja, se a e b forem primos entre si.

e como a divisão do inteiro p por 10^α requer apenas um deslocamento da vírgula de um número α de casas decimais para a esquerda, obteremos para $\frac{a}{b}$ uma representação decimal finita.

b) $\beta > \alpha$.

Aqui, multiplicaremos o numerador e o denominador de $\frac{a}{b}$ por $2^{\beta-\alpha}$, obtendo-se assim

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^\alpha 5^\beta} = \frac{a2^{\beta-\alpha}}{2^\alpha 5^\beta 2^{\beta-\alpha}} = \frac{a2^{\beta-\alpha}}{2^\beta 5^\beta} = \frac{a2^{\beta-\alpha}}{10^\beta}.$$

Agora, fazendo $q = a2^{\beta-\alpha}$, na equação anterior, obteremos

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{10^\beta},$$

que, também, é uma representação decimal finita para $\frac{a}{b}$. ■

Na proposição a seguir, mostraremos que se um racional $\frac{a}{b}$, na forma irredutível, tiver outros fatores, além de 2 ou 5, a representação decimal de $\frac{a}{b}$ é infinita e periódica.

Proposição 2.6. *Dado um número racional, na forma irredutível $\frac{a}{b}$, se b tiver outros fatores primos além de 2 ou 5, então sua expansão decimal será infinita e, a partir de um certo ponto, periódica.*

Demonstração. De fato, como há fatores de b diferentes de 2 ou 5, em nenhuma etapa o resto da divisão continuada de a por b, para transformar $\frac{a}{b}$ em número decimal, será zero, pois estamos tratando apenas de números com representação decimal infinita, uma vez que, há fatores de b diferentes de 2 ou 5. Se sua representação fosse finita, seria uma contradição à recíproca contida na Prop. 2.5. Logo, a expansão nunca termina, ou seja, é infinita. Além disso, os diferentes restos (diferentes de zero) que ocorrem, são todos menores do que b; logo, o número deles é no máximo $b - 1$. Assim, algum resto deve repetir-se e, a partir daí, o processo se repete: os restos se sucedem na mesma ordem anterior e, portanto, os quocientes também, o que fornece a periodicidade (observe que o período tem, no máximo, $b - 1$ algarismos). ■

As Props. 2.5 e 2.6 acima, mostram que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por decimais finitos (decimais exatos) ou decimais infinitos, porém periódicos (dízimas periódicas). A recíproca também é verdadeira, isto é, todo número decimal exato ou decimal infinito periódico representa um número racional na forma $\frac{a}{b}$. Tratam-se de dois tipos de números decimais: os finitos e infinitos periódicos.

Os decimais finitos (exatos), representam números racionais como visto na Prop. 2.5, ou seja, um decimal exato é equivalente a um número racional $\frac{a}{b}$, em que a = numeral decimal sem a vírgula e $b = 10^s$, onde $s \in \mathbb{N}$ é o número de algarismos da parte decimal do numeral decimal.

Examinaremos, agora, as dízimas periódicas que podem ser escritas (sem a parte inteira) da seguinte forma:

$$x = 0, a_1a_2a_3...a_m\overline{b_1b_2b_3...b_n}, \tag{5}$$

em que $a_1a_2a_3...a_m$ representa a parte não periódica (antiperíodo) com m algarismos e $b_1b_2b_3...b_n$, representa o período (parte que se repete), com n algarismos.

Multiplicando-se ambos os membros da Eq. (5) por 10^{m+n}, para que tenhamos todo o antiperíodo seguido de um período antes da vírgula, temos

$$10^{m+n} \cdot x = a_1a_2a_3...a_mb_1b_2b_3...b_n + 0, \overline{b_1b_2b_3...b_n}. \tag{6}$$

Agora, multiplicando-se, membro a membro, a Eq.(6) por 10^m, para que fique apenas o antiperíodo antes da vírgula, temos

$$10^m \cdot x = a_1a_2a_3...a_m + 0, \overline{b_1b_2b_3...b_n}. \tag{7}$$

Subtraindo (7) de (6), obtemos

$$(10^{m+n} - 10^m) \cdot x = a_1a_2a_3...a_mb_1b_2b_3...b_n - a_1a_2a_3...a_m,$$

de modo que

$$x = \frac{a_1a_2a_3...a_mb_1b_2b_3...b_n - a_1a_2a_3...a_m}{10^{m+n} - 10^m},$$

ou seja,

$$x = \frac{a_1a_2a_3...a_mb_1b_2b_3...b_n - a_1a_2a_3...a_m}{10^m(10^n - 1)}, \tag{8}$$

que está na forma $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Portanto, x é racional, e a fração na Eq. (8), chama-se fração geratriz da dízima periódica na Eq.(5). ■

O procedimento acima, não só demonstra que toda dízima periódica representa um número racional $\frac{a}{b}$, como também fornece um algorítmo prático e eficiente para determinar a fração geratriz[4] de uma dízima, isto é, o número racional que a gerou, dispensando assim, memorizar regras para se determinar geratriz de dízimas periódicas simples ou compostas.

Portanto, reunindo as duas últimas proposições e esta demonstração sobre dízimas periódicas, podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2.7. *Um número é racional se, e somente se, quando escrito na forma decimal, é finito ou infinito periódico.*

[4]Se a dízima tem a parte inteira diferente de zero, este valor deve ser acrescentado a fração obtida para que se tenha a fração geratriz.

Observe que se for feita uma correspondência entre os números racionais e os pontos de uma reta, a cada racional corresponde um ponto na reta, ou seja, a todo decimal (finito ou infinito periódico) corresponde um ponto na reta. Mas, nem todo ponto da reta tem abscissa racional, ou seja, existem pontos na reta que não tem abcissa decimal (finita ou infinita periódica), de modo que os racionais não preenchem toda a reta. Qual é, então, a natureza desses pontos da reta que não possuem abscissa racional? Esses pontos existem, porém, com abscissas não racionais, e sua existência será mostrada na próxima subseção, que tratará do conjunto dos números irracionais (não racionais).

2.1.5 Conjunto dos números irracionais - $\mathbb{I}$

Na seção anterior, vimos que, todo racional é equivalente a um decimal exato ou decimal infinito e periódico, e que existem números, que também têm representação infinita não periódica.

Observa-se, então, que existem duas categorias de números decimais: os finitos e os infinitos, sendo que os infinitos podem ser periódicos ou não periódicos. Os decimais finitos juntos com decimais infinitos periódicos constituem os racionais, e os infinitos não periódicos, os não racionais, que como veremos, os chamaremos de irracionais.

Os números que, na forma decimal, são infinitos e não periódicos são denominados irracionais e, conforme Prop. 2.7, não podem ser representados como fração com numerador e denominador inteiros.

Alguns irracionais são bastante conhecidos, como $\pi \approx 3,1415$, que é a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência qualquer; $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033$, conhecido como número de ouro; $\delta_{AG} = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4142$, que é denominado número de prata; $e \approx 2,718281$, base dos logaritmos naturais (constante de Euler); $\sqrt{2} \approx 1,4142$, que é a medida da diagonal do quadrado unitário; $\sqrt{3} \approx 1,732$, etc.

Vimos nos tópicos anteriores algumas propriedades dos naturais, inteiros e racionais. Como existe uma relação de inclusão indicada na Eq. (1), pág.23, as propriedades válidas nos subconjuntos, são apenas extendidas para os conjuntos que os contém, permanecendo sua validade.

No caso dos irracionais, temos uma inconsistência com os demais, por exemplo, na propriedade de fechamento. A adição, subtração, multiplicação e divisão de irracionais nem sempre tem como resultado um número irracional. Por exemplo, considerando os números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $3+\sqrt{2}$ e $3-\sqrt{2}$ (será mostrado mais adiante a irracionalidade destes), temos que $(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2}) = 6$, $(3+\sqrt{2})-\sqrt{2} = 3$, $(3+\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{2}) = 7$, e $\sqrt{8} \div \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$, que são racionais. No entanto, existem irracionais, por exemplo $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, cuja soma é $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, que é irracional, como veremos na seção 3.

Na Grécia antiga, acreditava-se que os únicos números existentes eram naturais. O que hoje conhecemos por racionais eram vistos apenas como razão entre números naturais. Utilizavam-se os números para realizações de medições de segmentos de reta, e até então, esse conhecimento era suficiente para suas necessidades. Tamanho foi o espanto, ao descobrirem que a diagonal e o lado do quadrado eram incomensuráveis, isto é, não existe um submúltiplo comum de modo que um seja medido a partir do outro. Como consequência disso, a medida da diagonal do quadrado unitário não pode ser expressa pela razão entre números inteiros, ou seja, não é racional. Surge assim, o primeiro número irracional formalmente descoberto. Na notação atual, o representamos pelo símbolo $\sqrt{2}$.

A tabela a seguir mostra aproximações sucessivas por falta ou excesso:

Tabela 1 – Aproximações de $\sqrt{2}$

Nº Casas decimais	Falta	Excesso	Resultado
0	1	2	$1 < \sqrt{2} < 2$
1	1,4	1,5	$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$
2	1,41	1,42	$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
3	1,414	1,415	$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$
4	1,4142	1,4143	$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$
5	1,41421	1,41422	$1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$
6	1,414213	1,414214	$1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Mas, como garantir que se continuarmos esse processo de aproximações não haverá repetição? Como garantir que não chegaremos a uma dízima periódica? A única forma de garantir, com precisão, é com uma demonstração matemática que faremos na seção 3 sobre irracionalidade de alguns números reais.

A seguir, veremos um teorema que permitirá produzir uma infinidade de números irracionais, a partir de um único número irracional dado.

Teorema 2.4 (Produção de Irracionais)**.** *Se $\alpha \in \mathbb{I}$ e $0 \neq r \in \mathbb{Q}$, então a adição, subtração, multiplicação e divisão de r e α resultarão em números irracionais. Também $-\alpha$ e α^{-1} são irracionais.*

Demonstração. Suponhamos, para começar, que $-\alpha$ fosse racional, digamos $-\alpha = r', r' \in \mathbb{Q}$. Então, teríamos que $\alpha = -r' = (-1) \cdot r'$ e, pelo fato de os racionais serem fechados para multiplicação, acarretaria que $\alpha \in \mathbb{Q}$, o que é absurdo, pois contradiz a hipótese de ser $\alpha \in \mathbb{I}$. Provaremos a irracionalidade de α^{-1} no caso mais geral, pois se trata do caso particular $\frac{r}{\alpha}, r = 1$. O enunciado do teorema, afirma também, além do já demonstrado, que

$$\alpha + r, \quad \alpha - r, \quad r - \alpha, \quad r\alpha, \quad \frac{\alpha}{r}, \quad \frac{r}{\alpha} \in \mathbb{I}. \tag{9}$$

Se pelo menos uma dessas expressões fosse racional, então teríamos uma ou mais das equações

$$\alpha + r = r_1, \quad \alpha - r = r_2, \quad r - \alpha = r_3, \quad r\alpha = r_4, \quad \frac{\alpha}{r} = r_5, \quad \frac{r}{\alpha} = r_6,$$

com $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ representando números racionais. Resolvendo-as em α, obteríamos

$$\alpha = r_1 - r, \quad \alpha = r_2 + r, \quad \alpha = r - r_3, \quad \alpha = \frac{r_4}{r}, \quad \alpha = rr_5, \quad \alpha = \frac{r}{r_6}, \tag{10}$$

em que os segundos membros das equações, em (10), são racionais, pelas propriedade de fechamento dos números racionais. Mas, nenhuma dessas igualdades é verdadeira, pois α é irracional. Portanto, é impossível que qualquer um dos números na Eq.(9) seja racional, completando assim, a demonstração do teorema. ■

Usando o Teo.2.4, o número irracional descoberto pelos gregos, $\sqrt{2}$, e os elementos de $\mathbb{N}$, por exemplo, já somos capazes de produzir uma infinidade de números irracionais. A partir desses, e utilizando novamente o mesmo teorema, poderão ser criados outra infinidade de irracionais.

De modo análogo, poderíamos utilizar cada um dos irracionais citados no início desse tópico. Sendo assim, são exemplos de irracionais: $3 + \sqrt{2}$, $3 - \sqrt{2}$, $\sqrt{2} - 3$, $3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{2}{\sqrt{2}}$, $3 + \sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$, $\sqrt{3} - 3$, $3\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $3 + \pi$, $3 - \pi$, $\pi - 3$, 3π, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{2}{\pi}$, $3 + \Phi$, $3 - \Phi$, $\Phi - 3$, 3Φ, $-\Phi$, $\frac{\Phi}{2}$, $\frac{2}{\Phi}$, $3 + e$, $3 - e$, $e - 3$, $3e$, $-e$, $\frac{e}{2}$, $\frac{2}{e}$, etc.

Observemos que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$ e que os números racionais juntos com os irracionais formam uma nova categoria de números que chamaremos de reais, indicados por $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$. Vimos, assim, que todo número estudado até agora é real.

Os números reais e algumas de suas propriedades serão explorados na próxima subseção.

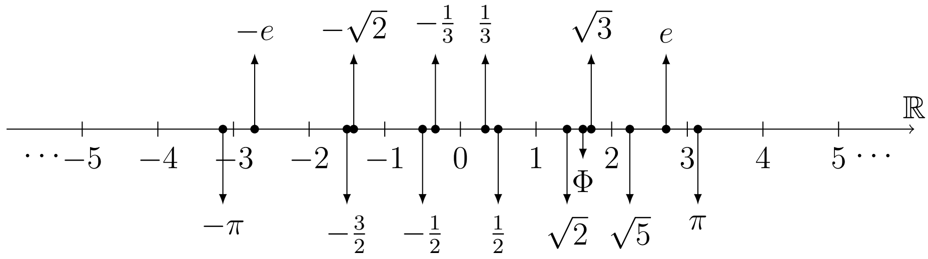
2.1.6 Conjunto dos números reais - $\mathbb{R}$

A reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais formam o conjunto dos número reais, isto é, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Podemos então, definir o conjunto dos números reais como

$$\mathbb{R} = \{x;\ x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}.$$

Para (LIMA et al., 1997), o conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como modelo aritmético de uma reta, enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$. Segue, conforme Fig. 4, a representação desse conjunto na reta numerada, que passaremos a denominar de reta real. Afirma ainda que tal propriedade é o que garante a continuidade da reta. Detalharemos um pouco mais essa importante característica dos números reais no tópico de representação decimal de números reais.

Figura 4 – Representação dos Reais



Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir veremos a relação existente entre comensurabilidade e incomensurabilidade com números racionais e irracionais, e ampliaremos o conceito de número para poder representar medidas incomensuráveis com a unidade.

2.1.6.1 Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

Seja $\overline{AB}$[5] um segmento de reta. Se quisermos medi-lo, devemos estipular um segmento padrão u, o qual utilizaremos para tal fim. Este segmento, será por definição, a nossa unidade de medida, tendo, portanto, comprimento 1(um). Para realizar a medição, devemos comparar o segmento unitário com o segmento $\overline{AB}$, ou seja, verificar quantas vezes o segmento u pode ser colocado de maneira justaposta no segmento $\overline{AB}$. Se u couber um número n exato de vezes em $\overline{AB}$, então a medida AB será n; caso contrário, a medida AB não será um número natural. Esta situação, nos leva a ideia de fração.

Procederemos da seguinte forma: (i) procuramos um segmento v que caiba um número q de vezes no segmento unitário u e p vezes no segmento $\overline{AB}$, e assim, v será uma medida comum de u e $\overline{AB}$. Se pudermos encontrar v, afirmaremos que $\overline{AB}$ e u são comensuráveis. O comprimento de v será a fração $\frac{1}{q}$ e a medida AB, será p vezes $\frac{1}{q}$, ou seja, $\frac{p}{q}$. (ii) Se não conseguirmos v como descrito acima, diremos que $\overline{AB}$ e u não são comensuráveis, isto é, serão incomensuráveis.

Observando (i), temos que u e $\overline{AB}$ são segmentos comensuráveis, em que $u = qv$ e $AB = pv$, isto é, $AB = p\frac{u}{q}$, ou ainda, $AB = \frac{p}{q}u$. Portanto, sendo u um segmento unitário, a medida de $\overline{AB}$ é o número $\frac{p}{q}$, que é racional. Em (ii), ampliamos o conceito de número, introduzindo os números irracionais para representarem as medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade. Assim, as medidas de segmentos comensuráveis com a unidade são representadas pelos números racionais, enquanto que as medidas de segmentos incomensuráveis com a unidade, são representados pelos números irracionais. Desse modo, fixando uma unidade de comprimento arbitrária, todo segmento de reta terá uma medida numérica que será um número real. Daí, a correspondência entre a reta e

[5]Utilizaremos $\overline{AB}$ para representar o segmento e AB representando sua medida.

o conjunto dos números reais, de modo que $\mathbb{R}$ é aceito como modelo aritmético da reta, enquanto esta será aceita como modelo geométrico de $\mathbb{R}$.

Podemos citar como exemplo da existência de segmentos incomensuráveis o lado e a diagonal de um quadrado $\square ABCD$ de lado AB. Com efeito, suponha que o lado $\overline{AB}$ e a diagonal $\overline{AC}$ são comensuráveis, isto é, existe um segmento de reta v que cabe q vezes em $\overline{AB}$ e p vezes em $\overline{AC}$. Tomando AB como unidade de comprimento, temos $AC = \frac{p}{q}$ e $AB = 1$, e assim, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2$, ou ainda,

$$p^2 = 2q^2. \tag{11}$$

A igualdade em (11) é um absurdo!, pois na decomposição de p^2 em fatores primos, o expoente do fator 2 é par, enquanto, em $2q^2$, é ímpar. Tal absurdo, deve-se ao fato de se supor o lado e a diagonal do quadrado comensuráveis. Portanto, o lado e a diagonal do quadrado são segmentos incomensuráveis. ■

2.1.6.2 Representação decimal de um número real

Ao estudarmos os números racionais ($\mathbb{Q}$), vimos que, na forma decimal, podem ser representados por meio de decimais exatos ou infinitos, mas periódicos. Já os irracionais ($\mathbb{I}$), por decimais infinitos não periódicos. Assim, como os reais são formados pela união de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, podemos representá-los, por decimais exatos, infinitos periódicos ou não periódicos, isto é, qualquer representação decimal é um número real.

Todo número irracional na forma decimal, é infinito e não periódico, como já mencionado anteriormente. No entanto, se limitarmos, um irracional β a uma quantidade n de casas decimais teremos um racional α_n, como em (4). E quanto mais casas decimais utilizarmos, mais próximo α_n estará de β. Dizemos, então, que o limite de α_n, quando a quantidade n de casas decimais tende ao infinito, é β. Em outras palavras, o número irracional β é uma aproximação por racionais α_n. Esta característica não é única dos irracionais. Na realidade, é o que caracteriza o conjunto dos números reais e, por isso, denominamos tal propriedade de completeza dos reais: todo número real pode ser obtido por aproximação de racionais α_n; ela nos permite representar os reais como uma reta.

Segundo (LIMA et al., 1997), “A completeza de $\mathbb{R}$ equivale a continuidade da reta. É ela que garante a existência de $\sqrt[n]{a}$ e, mais geralmente, de a^x, para todo $a > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}$. É a completeza de $\mathbb{R}$ que diferencia os reais dos racionais [...]”.

Na próxima subseção, são estudados alguns subconjuntos importantes de $\mathbb{R}$, dentre eles destacaremos os intervalos reais. Além disso, apresentaremos a propriedade Arquimediana dos reais e veremos também um importante teorema sobre a densidade dos irracionais e racionais na reta real, isto é, que estão “espalhados”por toda a reta.

2.1.6.3 Subconjuntos dos Reais

Do fato de que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{I}$, tem-se que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. Já vimos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; logo, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \varnothing$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$.

Outros subconjuntos de $\mathbb{R}$ que merecem destaque, por serem comumente utilizados, são os intervalos, cuja definição segue abaixo:

Definição 2.5 (Intervalos)**.** *Sejam a, b números reais com $a \leqslant b$. Denominamos de intervalos reais ou, simplesmente, intervalos, os subconjuntos de $\mathbb{R}$:*
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x \leqslant b\}$, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x < b\}$,
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leqslant b\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leqslant b\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$,
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant a\}$, $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Os quatro primeiros intervalos são limitados, com extremos a, b: $[a, b]$ é um intervalo fechado, (a, b) é aberto, $[a, b)$ é fechado à esquerda, $(a, b]$ é fechado à direita. Os demais intervalos são ilimitados: $(-\infty, b]$ é a semirreta esquerda, fechada de origem b; $(-\infty, b)$ é a semirreta esquerda, aberta de origem b; $[a, +\infty)$ é a semirreta direita, fechada de origem a; $(a, +\infty)$ é a semirreta direita, aberta de origem a, e $(-\infty, +\infty)$ é toda a reta real, isto é, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Quando $a = b$, o intervalo fechado $[a, b]$ reduz-se a um único ponto e o denominamos de intervalo degenerado. Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números, apenas símbolos que usamos para a representação de intervalos ilimitados.

A seguir, veremos uma propriedade importante dos números reais, a propriedade Arquimediana.

Proposição 2.8 (Propriedade Arquimediana)**.** *As propriedades em $\mathbb{R}$ são equivalentes:*

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente;

b) dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ talque $n \cdot a > b$;

c) para cada $a > 0$ de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ talque $0 < \frac{1}{n} < a$.

Demonstração. $a) \Rightarrow b)$ Sendo $a > 0$, por $a)$, existe $n \in \mathbb{N}$ talque $n > \frac{b}{a}$, isto é, $n \cdot a > b$.
$b) \Rightarrow c)$ Em $b)$, fazendo $b = 1$, obtemos $n \cdot a > 1$, isto é, $\frac{1}{n} < a$; logo, $0 < \frac{1}{n} < a$.
$c) \Rightarrow a)$ $\forall\, a > 0$, tem-se $\frac{1}{a} > 0$. Por $c)$, existe $n \in \mathbb{N}$ talque $\frac{1}{n} < \frac{1}{a}$. Portanto, $n > a$, ou seja, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$. ∎

No Teorema a seguir, veremos um resultado sobre intervalos, que tem como consequência a densidade de $\mathbb{I}$ e $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, isto é, que tanto os irracionais quanto os racionais estão por toda parte nos reais.

Teorema 2.5. *O conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais e o conjuto $\mathbb{Q}$ dos números racionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja (α, β) um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, não-degenerado. Devemos mostrar que existem um número irracional e um número racional em (α, β). Como $\beta - \alpha > 0$, existe um número natural n tal que $0 < \frac{1}{n} < \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{2}}$, ou seja, $0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < \beta - \alpha$. Os

números da forma $\frac{k\sqrt{2}}{n}$, onde $k \in \mathbb{Z}$, são (salvo $k = 0$) irracionais e dividem a reta $\mathbb{R}$ em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{n}$. Como $\frac{\sqrt{2}}{n}$ é menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo (α, β), conclui-se que algum $\frac{k\sqrt{2}}{n}$ deve pertencer ao intervalo (α, β). Esta é apenas uma ideia intuitiva da prova, cuja prova formal será feita a seguir. Considere o conjunto $Y = \{k \in \mathbb{Z}; \frac{k\sqrt{2}}{n} \geqslant \beta\}$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente. Logo, existe n tal que $\frac{k\sqrt{2}}{n} \geqslant \beta$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, não importa qual seja β. Então, $\varnothing \neq Y \subset \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente por βn. Assim, pela Boa Ordenação dos inteiros, Y possui um menor elemento, e seja $k_0 \in Y$ esse menor elemento. Então, $\beta \leqslant \frac{k_0\sqrt{2}}{n}$; mas, como $k_0 - 1 < k_0$, tem-se $\frac{(k_0-1)\sqrt{2}}{n} < \beta$.
Afirmamos que $\alpha < \frac{(k_0-1)\sqrt{2}}{n} < \beta$.
Com efeito, se não fosse assim, teríamos $\frac{(k_0-1)\sqrt{2}}{n} \leqslant \alpha < \beta \leqslant \frac{k_0\sqrt{2}}{n}$, o que acarreta $\beta - \alpha \leqslant \frac{k_0\sqrt{2}}{n} - \frac{(k_0-1)\sqrt{2}}{n} = \frac{\sqrt{2}}{n}$, o que é uma contradição, pois pela Prop. 2.8, item (iii), temos que $\forall\, a > 0$ de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < a$. Tomando $a = \beta - \alpha$, segue que $\frac{\sqrt{2}}{n} < \beta - \alpha$. Logo, o número irracional $\frac{(k_0-1)\sqrt{2}}{n} \in (\alpha, \beta)$. Para obter um número racional no intervalo (α, β), tomamos $n \in \mathbb{N}^*$, de modo que $\frac{1}{n} < \beta - \alpha$. Os números da forma $\frac{k}{n}$, onde $k \in \mathbb{Z}$, são todos racionais e dividem a reta $\mathbb{R}$ em intervalos de comprimentos $\frac{1}{n}$. Como $\frac{1}{n}$ é menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo (α, β), conclui-se que algum $\frac{k}{n}$ deve pertencer ao intervalo (α, β). A demonstração se faz como no caso anterior: se k_0 for o menor inteiro tal que $\beta \leqslant \frac{k_0}{n}$ então, o número racional $\frac{k_0-1}{n} \in (\alpha, \beta)$. ■

Fizemos nesta seção uma construção dos números reais, menos formal, e mais didática, pensando nos nossos alunos e professores do Ensino Médio.

Na próxima seção, faremos uma construção dos números, porém com um certo grau de formalidade, usando-se os Axiomas de Peano, para construir os naturais, a ideia de classe de equivalência, para construir os inteiros e os racionais e, finalmente, os cortes de Dedekind, para a contrução dos reais.

2.2 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS

Nesta seção, abordaremos, formalmente a construção dos números. Inicialmente, utilizando noções de conjuntos e os axiomas de Peano, costruiremos os naturais e, a partir daí, construiremos os conjuntos dos inteiros, racionais, irracionais e reais. Para tal fim, são necessárias algumas definições, como conjunto das partes, pares ordenados, produto cartesiano, relação e classes de equivalência, quociente de um conjunto por uma relação, dentre outras.

A seguir, apesentaremos algumas definições e propriedades, necessárias ao entendimento da seção e, na sequência, iniciamos a construção formal dos números naturais, utilizando os axiomas de Peano.

2.2.1 Conceitos preliminares

Definição 2.6 (Conjunto Potência)**.** *Denomina-se conjunto potência ou conjunto das partes de A, o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A, e o denotamos por $\mathscr{P}(A)$.*

Por exemplo, sendo $A = \{1, 2\}$, temos que $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, A\}$.

A definição a seguir, de pares ordenados, utiliza-se de um subconjunto bem específico do conjunto potência.

Definição 2.7 (Pares Ordenados)**.** *Dados um conjunto, não vazio, A, e $\alpha, \beta \in A$, definimos o par ordendo (α, β) como sendo o conjunto $\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\}$. (Observe que $(\alpha, \beta) \subset \mathscr{P}(A)$).*

A Def. 2.7 formaliza a ideia intuitiva de que par ordenado é um par de objetos onde a ordem tem importância. Este fato será comprovado no teorema a seguir.

Teorema 2.6 (Igualdade de pares ordenados)**.** *Sejam A um conjunto e $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A$. Temos que*

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \alpha = \gamma \, e \, \beta = \delta. \tag{12}$$

Demonstração. Se $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$, é claro que $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$. Reciprocamente, suponha que $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$, isto é, $\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\} = \{\{\gamma\}, \{\gamma, \delta\}\}$. Temos dois casos a considerar:

a) $\alpha = \beta$. Nesta situação, $(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha) = \{\{\alpha\}, \{\alpha, \alpha\}\} = \{\{\alpha\}, \{\alpha\}\} = \{\{\alpha\}\}$. Assim, a hipótese seria $\{\{\alpha\}\} = \{\{\gamma\}, \{\gamma, \delta\}\}$. Então, o conjunto $\{\gamma, \delta\}$ é um elemento de $\{\{\alpha\}\}$. Portanto, só pode ser igual a $\{\alpha\}$, o que acarreta que $\gamma = \delta = \alpha$. Como $\alpha = \beta$, temos que $\gamma = \delta = \beta$; logo, $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$.

b) $\alpha \neq \beta$. Devemos analisar a igualdade $\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\} = \{\{\gamma\}, \{\gamma, \delta\}\}$.
Se $\{\alpha, \beta\} = \{\gamma\}$, então teríamos $\alpha = \beta = \gamma$, contrazidendo a hipótese $\alpha \neq \beta$. Logo, $\{\alpha, \beta\} = \{\gamma, \delta\}$, de onde concluímos que $\gamma \neq \delta$. Assim, o elemento $\{\alpha\}$ não pode ser $\{\gamma, \delta\}$; logo, $\{\alpha\} = \{\gamma\}$, de onde obtemos

$\alpha = \gamma$. De $\{\alpha, \beta\}$, como $\beta \neq \alpha$ e $\gamma \neq \delta$, segue que $\beta = \delta$. ■

A seguir, definiremos produto cartesiano e o utilizaremos para definir operação, relação binária, relação de ordem e relação de equivalência.

Definição 2.8 (Produto cartesiano)**.** *Dados dois conjuntos A e B, não vazios, o produto cartesiano de A por B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$, isto é, $A \times B = \{(x, y);\ x \in A \text{ e } y \in B\}$.*

Por exemplo, se $A = \{\alpha, \beta\}$ e $B = \{\gamma, \delta\}$, então $A \times B = \{(\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\beta, \gamma), (\beta, \delta)\}$.

Definição 2.9. *Uma operação num conjunto $A \neq \varnothing$, é uma função $* : A \times A \to A$. A imagem $*((x, y))$ de um par ordenado (x, y) pela função $*$, é usualmente denotado por $x * y$. Em símbolos, temos*

$$\begin{aligned} * : A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned} \tag{13}$$

Definição 2.10 (Relação binária)**.** *Uma relação binária R num conjunto A é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times A$, isto é, $R \subset A \times A$.*

Por exemplo, sendo $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, temos que $R = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma)\}$ é uma relação binária em A.

Se R é uma relação binária em A e se $(\alpha, \beta) \in R$, escrevemos $\alpha R \beta$, isto é, $(\alpha, \beta) \in R \Leftrightarrow \alpha R \beta$. (Lê-se: α está relacionado com β via R).

Definição 2.11 (Relação de ordem)**.** *Uma relação R em A diz-se relação de ordem, se possuir as seguintes propriedades:*

a) reflexiva: $\alpha R \alpha$, $\forall\, \alpha \in A$;

b) antissimétrica: $\alpha R \beta$ e $\beta R \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$, $\forall\, \alpha, \beta \in A$;

c) transitiva: $\alpha R \beta$ e $\beta R \gamma \Rightarrow \alpha R \gamma$, $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in A$.

Definição 2.12 (Relação de equivalência)**.** *Uma relação R em A, diz-se relação de equivalência, se possuir as seguintes propriedades:*

a) reflexiva: $\alpha R \alpha, \forall\, \alpha \in A$;

b) simétrica: $\alpha R \beta \Rightarrow \beta R \alpha, \forall\, \alpha, \beta \in A$;

c) transitiva: $\alpha R \beta$ e $\beta R \gamma \Rightarrow \alpha R \gamma, \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in A$.

Definição 2.13 (Classe de equivalência)**.** *Sejam R uma relação de equivalência num conjunto A e $\alpha \in A$ um elemento fixado arbitrariamente. O conjunto $\overline{\alpha} = \{x \in A;\ xR\alpha\}$ é denominado classe de equivalência de α pela relação R, ou seja, $\overline{\alpha}$ é o conjunto formado por todos os elementos de A que são equivalentes a α.*

Definição 2.14 (Conjunto quociente)**.** *Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Denominamos conjunto quociente de A por R, o conjunto formado pelas classes de* *equivalência em A pela relação R. Denotando-se esse quociente por A/R, tem-se $A/R = \{\overline{\alpha}; \alpha \in R\}$.*

Feitas essas considerações que serão utilizadas na construção dos números inteiros, faremos inicialmente, na próxima subseção, a construção dos números naturais.

2.2.2 Construção dos naturais

2.2.2.1 Axiomas de Peano

Os Axiomas[6] de Peano baseiam-se nos conceitos de conjuntos e funções. Utiliza-se da função, denominada sucessor,

$$\begin{aligned} s &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n &\mapsto s(n), \end{aligned}$$

para construir o conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados *números naturais*, que satisfaz os axiomas a seguir:

A1. Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural n é denominada o sucessor de n;

A2. Se $s(m) = s(n)$, então $m = n$, isto é, s é injetiva;

A3. Existe um único natural $0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \neq s(n), \forall n \in \mathbb{N}$;

A4. Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $0 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$.

Podemos reformular as propriedades descritas acima de uma outra maneira, mais natural e em uma linguagem mais acessível:

1. Todo número natural n tem um único sucessor, denotado por $s(n)$, que ainda é natural;
2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
3. Existe um único natural, chamado zero, e representado pelo símbolo 0, que não é sucessor de nenhum outro;
4. Seja X um subconjunto de números naturias ($X \subset \mathbb{N}$).

Se $0 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento $x \in X$, ainda pertencer a X, então $X = \mathbb{N}$.

A propriedade 4, acima, também conhecida como Princípio da Indução, é de grande importância para construir o conjunto dos números naturais. Para (RIPOLL et al., 2016b), "O Princípio da Indução Finita caracteriza o conjunto $\mathbb{N}$ como aquele que é totalmente coberto pelo processo de se tomar o sucessor progressivamente a partir do 0". (LIMA, 2004), afirma que

> O princípio da indução serve de base para um método de demonstração de teoremas sobre números naturais, conhecido como o método

[6] Proposições que são aceitas como verdadeiras sem demonstrações.

> da indução (ou recorrência), o qual funciona assim: "se uma propriedade P é válida para o número 1, e se, supondo P válida para o número n daí resultar que P é valida também para seu sucessor $s(n)$, então P é válida para todos os números naturais".

Desse modo, construiremos o conjunto dos naturais:

$$
\begin{array}{rcl}
 & 0 & \\
s(0) & = & 1 \\
s(s(0)) & = & s(1) = 2 \\
s(s(s(0))) & = & s(s(1)) = s(2) = 3 \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Essa construção é assegurada pelo princípio supra-citado e determina todos os elementos do conjunto dos naturais. Neste ponto, passamos a adotar a notação indo-arábica para o nosso sistema decimal, ou seja, para os elementos de $\mathbb{N}$. Vemos então, que $\mathbb{N}$ coincide com o conjunto

$$\{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), ...\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Assim, $\mathbb{N}$ não contém outro elemento além desses. Isto confirma o que aprendemos nas séries inicias sobre quais são os elementos do conjunto dos naturais. Este fato é provado no Teo. 2.7 abaixo:

Teorema 2.7. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Demonstração. Seja A o conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...\}$. Então $A \subset \mathbb{N}$ que contém o 0 e também o sucessor de qualquer elemento nele contido. Logo pelo Princípio de Indução, $A = \mathbb{N}$. ■

A seguir, vamos apresentar as operações com os elementos de $\mathbb{N}$.

2.2.2.2 Operações em $\mathbb{N}$

Definiremos as operações de *adição* e *multiplicação* como uma função, conforme a Definição 2.9 e, também, utilizando recorrência. Estas operações formalizam a ideia de adição e multiplicação que utilizamos desde as séries iniciais.

A *Adição de números naturais* está na seguinte:

Definição 2.15. *A* ***adição*** *em* $\mathbb{N}$*, é uma função* $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definida para* $m, n \in \mathbb{N}$,

a) $m + 0 = m$;

b) $m + s(n) = s(m + n)$.

Ao fixar um número $m \in \mathbb{N}$, o item $a)$ acima, nos dá o resultado da soma desse número m com 0, isto é, $m + 0 = m$. Também nos dá a soma de m com o $s(0)$,

$m+s(0) = s(m+0) = s(m)$, item b). Temos ainda, $m+s(s(0)) = s(m+s(0)) = s(s(m))$, e assim, sucessivamente:

$$\begin{aligned}
m+0 &= m \\
m+1 &= m+s(0) = s(m+0) = s(m) \\
m+2 &= m+s(1) = s(m+1) = s(s(m)) \\
&\vdots \\
m+n &= m+s(n-1) = s(m+n-1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dessa forma, fixado o $m \in \mathbb{N}$, fica determinada a sua soma com cada um dos números naturais, sucessivamente. O Princípio da Indução garante que, por meio desse processo, a operação de adição é definida para todos os naturais. De fato, considerando o conjunto $A = \{m \in \mathbb{N};\ m+n \text{ está definida}, \forall n \in \mathbb{N}\}$, temos

- $0 \in A$, pelo item a) da Def. 2.15;
- $n \in A \Rightarrow s(n) \in A$, pelo item b) da Def. 2.15.

Isto significa que A satisfaz as hipóteses do Princípio da Indução. Portanto, $A = \mathbb{N}$, ou seja, $m+n$ está definida para todo par (m,n) de naturais, o que nos diz que a adição acima definida, é de fato uma operação em $\mathbb{N}$. Em particular, esta definição relaciona as ideias de sucessor e de adição, caracterizando assim o sucessor de um número $m \in \mathbb{N}$, como

$$s(m) = m+1. \tag{14}$$

A adição goza das seguintes propriedades, cuja demostração feita por indução omitiremos neste trabalho:

A1. Associatividade: $m+(n+p) = (m+n)+p, \forall m,n,p \in \mathbb{N}$

A2. Comutatividade: $m+n = n+m, \forall m,n \in \mathbb{N}$

A3. Elemento Neutro: $m+0 = 0+m = m, \forall m \in \mathbb{N}$

A4. Lei do corte: $m+n = m+p \Rightarrow n = p, \forall m,n,p \in \mathbb{N}$

A5. Tricotomia: Dados $m,n \in \mathbb{N}$, pode ocorrer exatamente uma das três alternativas: ou $m = n$, ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n+p$, ou existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m+q$.

A *Multiplicação de números naturais* será apresentada na seguinte:

Definição 2.16. *A* ***multiplicação*** *em* $\mathbb{N}$*, é uma função* $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definida para* $m,n \in \mathbb{N}$*,*

a) $m \cdot 0 = 0$;

b) $m \cdot s(n) = m \cdot n + m$.

Assim como na adição, ao fixarmos um número $m \in \mathbb{N}$, o item a) acima nos dá o resultado do produto de m por 0: $m \cdot 0 = 0$. Também nos dá o produto de m pelo

$s(0) = 1$: $m \cdot s(0) = m \cdot 0 + m = m$, isto é, $m \cdot 1 = m$, item b). Temos ainda,

$$m \cdot s(s(0)) = m \cdot s(1) = m \cdot 1 + m = m + m,$$

e assim, sucessivamente,

$$\begin{aligned}
m \cdot 0 &= 0 \\
m \cdot 1 &= m \cdot s(0) = m \cdot 0 + m = m \\
m \cdot 2 &= m \cdot s(1) = m \cdot 1 + m = m + m \\
m \cdot 3 &= m \cdot s(2) = m \cdot 2 + m = (m + m) + m \\
&\vdots \\
m \cdot n &= m \cdot s(n-1) = m \cdot (n-1) + m \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De modo análogo ao da adição, o Princípio da Indução garante que, por meio desse processo, a operação de multiplicação é definida para todos os naturais. De fato, considerando o conjunto $B = \{m \in \mathbb{N};\ m \cdot n \text{ está definida}, \forall n \in \mathbb{N}\}$, temos que

- $0 \in B$, pelo item a) da Def. 2.16;
- $n \in B \Rightarrow s(n) \in B$, pelo item b) da Def. 2.16.

Isto significa que B satisfaz as hipóteses do Princípio da Indução. Portanto, $B = \mathbb{N}$, isto é, $m \cdot n$ está definido para todo par (m, n) de naturais, o que nos diz que a multiplicação acima definida é de fato uma operação em $\mathbb{N}$.

A multiplicação goza das seguintes propriedades, cuja demostração feita por indução, também omitiremos neste trabalho:

M1. Associatividade: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p, \forall m, n, p \in \mathbb{N}$

M2. Comutatividade: $m \cdot n = n \cdot m, \forall m, n \in \mathbb{N}$

M3. Elemento Neutro: $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n, \forall n \in \mathbb{N}$

M4. Lei do corte: $m \cdot p = n \cdot p$ e $p \neq 0 \Rightarrow m = n, \forall m, n, p \in \mathbb{N}$

M5. Distributiva em relação a adição: $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p, \forall m, n, p \in \mathbb{N}$

M6. Se m, n são naturais tais que $m \cdot n = 0$, então, $m = 0$ ou $n = 0$.

2.2.2.3 Relação de ordem em $\mathbb{N}$

Definição 2.17. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $m \leqslant n$ (m é* ***menor do que ou igual*** *a n) se existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = p + m$.*

A relação binária " $\leqslant$ " acima é uma relação de ordem em $\mathbb{N}$, pois satisfaz as propriedades da Def. 2.11:

a) $n \leqslant n, \forall n \in \mathbb{N}$ (Reflexiva);

b) se $m \leqslant n$ e $n \leqslant m \Rightarrow m = n$ (Antissimétrica);

$c)$ se $m \leqslant n$ e $n \leqslant p \Rightarrow m \leqslant p$ (Transitiva).

A relação de Ordem " $\leqslant$ " satisfaz, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, as propriedades:

$a)$ compatibilidade com a adição: $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$

$b)$ cancelativa em relação à adição: $a + c \leqslant b + c \Rightarrow a \leqslant b$

$c)$ compatibilidade com a multiplicação: $a \leqslant b \Rightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot c$

$d)$ cancelativa em relação à multiplicação: $a \cdot c \leqslant b \cdot c, 0 < c \Rightarrow a \leqslant b$

Observamos que, da Def. 2.17 e da Eq. 14, temos $n \leqslant s(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, podemos relacionar os naturais do modo a seguir, $0 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant 5 \leqslant \cdots$, e dizemos, então, que $\mathbb{N}$ é um conjunto ordenado.

Como consequência da propriedade acima, isto é, do fato dos naturais serem ordenados, temos um resultado muito importante, conforme aponta (LIMA, 2008):

> Um resultado de grande importância, até mesmo como método de demonstração, é o fato de que todo conjunto não-vazio de números naturais possui um menor elemento. Este fato é conhecido como Princípio da Boa Ordenação.

A seguir, enunciaremos e provaremos o Princípio da Boa Ordenação.

Teorema 2.8 (Princípio da Boa Ordenação)**.** *Todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leqslant n$, para todo $n \in A$.*

Demonstração. Usando a notação $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leqslant n\}$, considere o conjunto $X \subset \mathbb{N}$, formado pelos números $n \in \mathbb{N}$, tais que $I_n \subset \mathbb{N} \setminus A$ (assim, dizer que $n \in X$ significa afirmar que $n \notin A$ e que todos os números naturais menores do que n também não pertencem a A). Se tivermos $0 \in A$, o teorema estará demonstrado, pois 0 será o menor elemento de A. Se, porém, $0 \notin A$, então $0 \in X$. Por outro lado, temos $X \neq \mathbb{N}$ (pois $X \subset \mathbb{N} \setminus A$ e $A \neq \varnothing$). Assim, X satisfaz a primeira parte da hipótese de **A4** (contém 0), mas não cumpre a conclusão (não é igual a $\mathbb{N}$). Logo, não pode satisfazer a segunda parte da hipótese. Isto quer dizer que deve existir algum $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Se $n_0 = n + 1$, então todos os inteiros desde 0 até n pertencem ao complementar de A, mas $n_0 = n + 1$ pertence a A. Desta maneira, $n_0 = n + 1$ é o menor elemento do conjunto A, o que conclui a demonstração. ■

Provamos o Teo. 2.8 usando o Princípio da Indução. Provaremos a seguir o Princípio da Indução como consequência do Princípio da Boa Ordenação, mostrando assim, a equivalência entre tais princípios, isto é, assumindo um deles como axioma, podemos provar o outro.

Teorema 2.9 (Princípio da Indução)**.** *Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $0 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja X um conjunto que satisfaz as condições da hipótese, isto é, $(i)\, 0 \in X$ e $(ii)\, \forall n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$. Vamos provar que $X = \mathbb{N}$. Suponha, por absurdo, que

$X \neq \mathbb{N}$ e defina $Y = \mathbb{N} \setminus X$. Temos que $Y \neq \varnothing$, pois X não é todo o $\mathbb{N}$. Logo, pelo Teo. 2.8, Y possui um menor elemento n_0. Por i), este elemento não pode ser 0; então, é sucessor de algum número natural. Assim, $n_0 = n + 1 \in Y$, mas $n \notin Y$ e, portanto, $n \in X$, e daí, por ii), $n + 1 \in X$, o que é uma contradição, que provém do fato de supor que X não é todo o conjunto dos naturais. Portanto, $X = \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.10 (2º Princípio da Indução)**.** *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com as seguintes propriedades: dado $n \in \mathbb{N}$, se X contém todos os números naturais m tais que $m < n$, então $n \in X$. Nestas condições, $X = \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $Y = \mathbb{N} \setminus X$. Afirmamos que $Y = \varnothing$. Com efeito, se Y não fosse vazio, existiria um elemento mínimo $n_0 \in Y$. Então, todo número natural $m < n_0$ pertenceria a X. Pela hipótese feita sobre X, teríamos $n_0 \in X$, que é uma contradição que provém do fato de supor $Y \neq \varnothing$. Portanto, $Y = \emptyset$, e assim, $X = \mathbb{N}$. ■

Exemplo 2.1. *Usaremos o 2º Princípio de Indução para provar o Teorema Fundamental da Aritmética.*

Demonstração. Se $n = 2$, o resultado é imediato, pois 2 é primo (consideramos um produto de fatores primos com um único fator igual a 2). Supondo que o resultado é válido para todo número natural menor do que n, provaremos a validade para n. Se n é primo nada temos a demonstrar (neste caso, n é trivialmente um produto de fatores primos). Suponha, então, que n seja composto; logo, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que $n = n_1 \cdot n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, existem primos $p_1, p_2, ..., p_r$ e $q_1, q_2, ..., q_s$ tais que $n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r$ e $n_2 = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$, ou seja, $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$. Portanto, podemos concluir que todo número natural $n \neq 1$, pode ser escrito como produto de fatores primos. Provaremos agora, a unicidade da escrita de n em fatores primos (a menos da ordem). Suponha que tenhamos $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$, onde os $p_i, 1 \leqslant i \leqslant r$, e $q_j, 1 \leqslant j \leqslant s$, são primos. Como $p_1 | q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$, temos que $p_1 = q_j$, para algum j, que após reordenação de $q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$, podemos supor que seja q_1, e daí, $p_2 \cdot ... \cdot p_r = q_2 \cdot ... \cdot q_s$. Como $p_2 \cdot ... \cdot p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$; logo, os p_i e q_j são iguais aos seus pares, o que conclui a demonstração. ■

Na seção a seguir, apresentaremos algumas definições e teoremas que serão usados na construção do conjunto dos números inteiros.

2.2.3 Construção dos inteiros

A construção de um número inteiro será feita usando-se a classe de equivalência de um par de números naturais.

Definição 2.18. *Em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definimos a relação $\sim$, por $(a, b) \sim (c, d)$ quando $a + d = b + c$.*

O teorema a seguir nos diz que $\sim$, definida acima, é uma relação de equivalência.

Teorema 2.11. *A relação binária $\sim$, definida em 2.18, é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Utilizando a Def. 2.12

a) $(a,b) \sim (a,b)$, pois $a+b = b+a$, devido à comutatividade em $\mathbb{N}$. (Reflexiva).

b) $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow a+d = b+c \Rightarrow b+c = a+d \Rightarrow c+b = d+a \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$. (Simétrica).

c) $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f) \Rightarrow a+d = b+c$ e $c+f = d+e \Rightarrow a+d+\boxed{f} = b+c+\boxed{f}$ e $\boxed{b}+c+f = \boxed{b}+d+e \Rightarrow a+\cancel{d}+f = b+\cancel{d}+e \Rightarrow a+f = b+e \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$. (Transitiva). ∎

Definição 2.19. $\overline{(a,b)}$ *é a classe de equivalência do par ordenado* (a,b) *pela relação* $\sim$, *isto é,*

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ (x,y) \sim (a,b)\}.$$

Definição 2.20. $\mathbb{Z}$ *é o conjunto quociente* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$, *constituído pelas classes de equivalência* $\overline{(a,b)}$, *que o denominaremos de conjunto dos números inteiros. Assim,*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim\ = \{\overline{(a,b)};\ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

A seguir, estudaremos as operações de *Adição* e *Multiplicação* em $\mathbb{Z}$.

2.2.3.1 Operações em $\mathbb{Z}$

A *Adição de números inteiros* será dada na seguinte:

Definição 2.21. *Dados* $\overline{(a,b)}$ *e* $\overline{(c,d)}$ *em* $\mathbb{Z}$, *definimos a adição de* $\overline{(a,b)}$ *com* $\overline{(c,d)}$, $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$, *como sendo o inteiro* $\overline{(a+c, b+d)}$.

Mostraremos, no teorema a seguir, que essa adição está bem definida.

Teorema 2.12. *Se* $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ *e* $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, *então* $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}$, *isto é, a adição de números inteiros está bem definida.*

Demonstração. De fato, se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$, então $(a,b) \sim (a',b')$, ou seja, $a+b' = b+a'$. De modo análogo, segue que $c+d' = d+c'$. Como $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)}$ e $\overline{(a',b')} + \overline{(c',d')} = \overline{(a'+c',b'+d')}$, devemos mostrar que os segundos membros de $a+b' = b+a'$ e $c+d' = d+c'$ coincidem, ou seja, mostraremos que $(a+c)+(b'+d') = (b+d)+(a'+c')$. Assim, de $a+b' = b+a'$ e $c+d' = d+c'$, temos que $(a+c)+(b'+d') = (b+d)+(a'+c')$. ∎

Assim como nos naturais, a adição nos inteiros é associativa, comutativa, tem $\overline{(0,0)}$ como elemento neutro e vale a lei do cancelamento. Além disso, tem o elemento oposto (ou simétrico ou inverso aditivo): dado $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, existe um único $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ talque $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$; este $\overline{(c,d)}$ é o elemento $\overline{(b,a)}$.

Agora, vamos definir, a seguir a *Multiplicação de números inteiros.*

Definição 2.22. *Dados* $\overline{(a,b)}$ *e* $\overline{(c,d)}$ *em* $\mathbb{Z}$*, definimos a multiplicação de* $\overline{(a,b)}$ *por* $\overline{(c,d)}$*,* $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}$*, como sendo o inteiro* $\overline{(ac+bd, ad+bc)}$*.*

A multiplicação também está bem definida, e goza das propriedades comutativa, associativa, tem $\overline{(1,0)}$ como elemento neutro e é distributiva em relação à adição. Além disso, vale o cancelamento multiplicativo.

Na próxima subseção, veremos como ordenar o conjunto $\mathbb{Z}$.

2.2.3.2 Relação de ordem em $\mathbb{Z}$

Definição 2.23. *Um subconjunto não-vazio* S *de* $\mathbb{Z}$ *é* ***limitado inferiormente****, se existir um* $k \in \mathbb{Z}$*, tal que* $k < x$*, para todo* $x \in S$*. Neste caso,* k *é uma* ***cota inferior*** *de* S*. Se* $n_0 \in S$ *é tal que* $n_0 \leqslant x, \forall x \in S$*, então* n_0 *é o* ***menor elemento*** *de* $S(n_0 = minS)$*.*

Definição 2.24. *Dados os inteiros* $\overline{(a,b)}$ *e* $\overline{(c,d)}$*, escrevemos* $\overline{(a,b)} \leqslant \overline{(c,d)}$*(lê-se* $\overline{(a,b)}$ *é menor do que ou igual a* $\overline{(c,d)}$*), quando* $a+d \leqslant b+c$*.*

A relação acima é uma relação de ordem nos inteiros e é uma extensão da relação de ordem nos naturais. Está bem definida e é compatível com as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$. Vale ainda ressaltar as proposições abaixo e, dentre elas, o Princípio da Boa ordenação nos inteiros, que é uma adaptação da mesma propriedade dos naturais. Conforme (LIMA, 2008),

> O Princípio da Boa Ordenação não se aplica imediatamente ao conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Existem conjuntos não-vazios de números inteiros que não possuem um menor elemento. O próprio $\mathbb{Z}$ é um deles: qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, o inteiro $n-1$ é menor do que n, logo não existe um inteiro n_0 menor do que os outros.

Proposição 2.9 (Princípio da Boa Ordenação em $\mathbb{Z}$)**.** *Se* S *é um subconjunto não vazio de* $\mathbb{Z}$ *e limitado inferiormente, então* S *possui um menor elemento.*

Demonstração. Sendo S limitado, existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k < s$, para todo $s \in S$. Considere o conjunto $A = \{s-k; s \in S\} \subset S$; então, $A \neq \varnothing$, pois $S \neq \varnothing$. Além disso, todos os seus elementos são inteiros positivos, isto é, $A \subset \mathbb{N}$. Logo, pelo Teo. 2.8, existe $n_0 \in A$, menor elemento de A, com $n_0 = s_0 - k$, $s_0 \in S$. Daí, $s_0 = n_0 + k$ é o menor elemento de S. ∎

Proposição 2.10. *Não existe número inteiro* n *tal que* $0 < n < 1$*.*

Demonstração. Suponha que existe n com esta propriedade e considere o conjunto $S = \{x \in \mathbb{Z}; 0 < x < 1\}$. Então, $S \neq \varnothing$, e limitado inferiormente. Portanto, S possui um menor elemento n_0, com $0 < n_0 < 1$. Multiplicando, esta última desigualdade por n_0, obtemos $0 < n_0^2 < n_0 < 1$; logo, $n_0^2 \in S$ e $n_0^2 < n_0$, o que contraria a minimalidade de n_0. Portanto, $S = \varnothing$. ∎

Proposição 2.11. *Dado um inteiro n qualquer, não existe nenhum inteiro m tal que $n < m < n+1$.*

Demonstração. Suponha que exite um número inteiro m satisfazendo a desigualdade $n < m < n+1$. Logo, $0 < m-n < 1$, o que contradiz a Prop. 2.10, pois $m-n \in \mathbb{Z}$. ■

Faremos, a seguir, a construção dos números racionais. Para isto, necessitaremos de algumas definições e teoremas.

2.2.4 Construção dos racionais

Definição 2.25. *Considere o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a,b);\, a \in \mathbb{Z}\, e\, b \in \mathbb{Z}^*\}$. Definimos a relação $\sim$ por $(a,b) \sim (c,d)$, quando $ad = bc$. Mostra-se que esta relação é uma relação de equivalência.*

Definição 2.26. *Dado $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotamos por $\frac{a}{b}$ a classe de equivalência do par (a,b) pela relação $\sim$ acima. Daí,*

$$\frac{a}{b} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ (x,y) \sim (a,b)\}.$$

Definição 2.27. *$\mathbb{Q}$ é o conjunto quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$, constituído pelas classes de equivalência $\frac{a}{b}$, denominado de conjunto dos números racionais. Assim,*

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim\ = \left\{\frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}.$$

Definiremos, agora, a *Adição* e a *Multiplicação* em $\mathbb{Q}$.

2.2.4.1 Operações em $\mathbb{Q}$

Definição 2.28. *Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais, isto é, elementos de $\mathbb{Q}$. Definimos as operações de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, respectivamente por*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad e \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

O conjunto $\mathbb{Q}$, munido das operações acima, tem as propriedades algébricas de $\mathbb{Z}$, onde o elemento neutro aditivo é $\frac{0}{1}$ e o neutro multiplicativo é $\frac{1}{1}$. Além disso, dado um racional $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$, existe $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1}$, isto é, todo elemento não nulo de $\mathbb{Q}$ possui inverso multiplicativo.

2.2.4.2 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Definição 2.29. *Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais com $b, d > 0$. Escrevemos $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$, quando $ad \leqslant bc$ e dizemos que $\frac{a}{b}$ é menor do que ou igual a $\frac{c}{d}$. A relação $\leqslant$ está bem definida e é* *uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$.*

Na seção seguinte, será feita a construção dos números reais, usando-se os cortes de Dedekind.

2.2.5 Construção dos reais

Faremos a construção do conjunto dos números reais, a partir do conjunto dos números racionais. Para tal fim, necessitamos definir alguns elementos.

Definição 2.30. *Um subconjunto não-vazio $T \subset \mathbb{Q}$ é **limitado superiormente**, se existir um $k \in \mathbb{Q}$, tal que $x < k$, para todo $x \in T$. Neste caso, k é uma **cota superior** de T. Se $a \in S$ é tal que $x \leq a, \forall x \in S$, então a é o **elemento máximo** de T, indicado por $a = maxT$.*

2.2.5.1 Cortes de Dedekind

Definição 2.31. *Um conjunto α de números racionais é denominado um corte se satisfaz às condições a seguir:*

a) $\varnothing \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$;
b) se $r \in \alpha$ e $s < r$ (s racional), então $s \in \alpha$;
c) em α não existe elemento máximo.

Exemplo 2.2. *O conjunto $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}; x < \frac{3}{5}\}$ é um corte.*

Demonstração. De fato, o conjunto acima satisfaz às condições da Def. 2.31. Vejamos:

a) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$; logo, $\frac{1}{2} \in \alpha$, e assim, $\alpha \neq \varnothing$. Por outro lado, para todo racional $y \geqslant \frac{3}{5}$, y não pertencerá a α, ou seja, $\alpha \neq \mathbb{Q}$;
b) Dado $x \in \alpha$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, com $y < x$, $y \in \alpha$, pela propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$;
c) $\forall\, x \in \alpha$, como $x < \frac{3}{5}$, existe $y \in \mathbb{Q}$, tal que $x < y < \frac{3}{5}$, bastando para isso tomar $y = \frac{x+\frac{3}{5}}{2}$. Logo α não tem elemento máximo. ■

Exemplo 2.3. O conjunto $\beta = \{x \in \mathbb{Q}; x > \frac{3}{5}\}$ não é um corte. Observe que β não satisfaz a condição (b) da Def. 2.31. Por exemplo, $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, no entanto, $\frac{1}{2} \notin \beta$.

Exemplo 2.4. $\gamma = \{x \in \mathbb{Q}; x \leqslant \frac{3}{5}\}$ não é um corte, pois não satisfaz (c), uma vez que, $\frac{3}{5}$ é elemento máximo de γ.

Exemplo 2.5. $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ não é um corte.

Demonstração. Embora satisfaça a) e c), não satisfaz a condição b) da Def. 2.31. Dado $r > 0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, 0 é racional menor que r e, no entanto, $0 \notin \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. ■

Proposição 2.12. *Se $r \in \mathbb{Q}$ e $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\}$, então α é um corte e r é a menor cota superior de α.*

Demonstração. Com efeito, α satisfaz as condições da Def. 2.31. Vejamos:

a) $r \notin \alpha$, logo $\alpha \neq \mathbb{Q}$. Por outro lado, para todo x racional menor que r, acarreta $x \in \alpha$, e assim, $\alpha \neq \varnothing$.

b) Como $x < r$, para todo racional y, $y < x \Rightarrow y < r$; logo $y \in \alpha$.

c) Observe que se $y \in \alpha$, então $y < \frac{y+r}{2} < r$ e, como $\frac{y+r}{2} \in \mathbb{Q}$, temos que $\frac{y+r}{2} \in \alpha$, ou seja, y não é elemento máximo de α. Esse argumento também mostra que r é a menor cota superior de α, pois qualquer racional menor do que r é elemento de α. Portanto, não pode ser uma cota superior, do contrário, seria elemento máximo. Contradição! ■

Definição 2.32. *Os cortes do tipo da Prop. 2.12, isto é, que possuem como cota superior mínima um número racional, são denominados de cortes racionais, e representaremos pelo símbolo r^*.*

Definição 2.33. *Todo corte que não for racional, será denominado corte irracional.*

A seguir, apresentaremos a prova de que existem cortes que não são racionais, ou seja, cortes que não possuem cota superior mínima em $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.13 (Existência de cortes não-racionais)**.** *Se $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}_+; x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_-^*$, então α é um corte que não é racional.*

Demonstração. Inicialmente, verificaremos que o conjunto acima é um corte. De fato, α satisfaz às condições da Def. 2.31, vejamos:

a) $1 \in \alpha$, logo $\alpha \neq \varnothing$. Por outro lado, $5 \in \mathbb{Q}$, mas $5 \notin \alpha$, e assim, $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

b) Se $x \in \alpha$ e $y < x$, como $y \in \mathbb{Q}$, então analisaremos os casos abaixo:
- Se $x, y \in \mathbb{Q}_+$, x e y são positivos, então $y < x \Rightarrow y^2 < x^2 < 2$, e assim, $y \in \alpha$;
- Se $x, y \in \mathbb{Q}_-^*$, então $y \in \alpha$, para $y < x$;
- Se $x \in \mathbb{Q}_+$ e $y \in \mathbb{Q}_-^*$, dado $y < 0 \leqslant x$, então $y \in \alpha$.

c) Devemos provar que se $x \in \alpha$, então existe $y \in \alpha$, com $y > x$. Para $x \leqslant 0$, é imediato que existe $x < y$, tal que $y^2 < 2$. $y = 1$, por exemplo. Analisaremos os valores de $x > 0$, com $x^2 < 2$. Para encontrar o valor de y nas condições acima, basta-nos encontrar um $h \in \mathbb{Q}_+^*$, tal que $(x+h)^2 < 2$, e por $y = x+h$. Sem perda de generalidade, podemos buscar $h < 1$. Assim, $(x+h)^2 < 2 \Rightarrow x^2 + 2xh + h^2 < 2$, e como $h < 1$, temos que

$$x^2 + 2xh + h < 2. \tag{15}$$

A expressão 15 será menor que 2, se tomarmos $h < \frac{2-x^2}{2x+1}$. Como a expressão anterior é positiva, tomando $h < min\left\{1, \frac{2-x^2}{2x+1}\right\}$, $h \in \mathbb{Q}_+$ e $y = x + h$, obtemos $y^2 = (x+h)^2 < 2$, ou seja, $y > x$ e $y \in \alpha$. A existência de tal h é garantida pelo fato de $\mathbb{Q}$ ser arquimediano. Mostramos, então, que α é um corte. Agora, verificaremos que α não possui cota superior mínima. Observe que os racionais que não pertencem a α são os positivos que tem quadrado $\geqslant 2$. Como não existe racional cujo quadrado é 2, segue que $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ se, e somente se, $y > 0$ e $y^2 > 2$. Assim, $\forall\, y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ será maior que $x \in \alpha$. Buscaremos novamente um h racional positivo, tal que $(y-h)^2 > 2$, e façamos $z = y - h$. Dessa forma, estaremos mostrando que, dado $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, existe $z \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, com $z < y$, ou seja, α não tem menor cota superior. Supondo, mais uma vez $h < 1$, obtemos:

$$(y-h)^2 > 2 \Rightarrow y^2 - 2yh + h^2 > 2 \Rightarrow y^2 - h(2y-h) > 2 \overset{(y>1\,\text{e}\,h<1)}{\Rightarrow} h < \frac{y^2-2}{2y-h} \overset{(h>0)}{<} \frac{y^2-2}{2y}.$$

Assim, tomando $h < min\left\{1, \frac{y^2-2}{2y}\right\}$ em $\mathbb{Q}^*_+$, o que é possível, pois $\mathbb{Q}$ é arquimediano, obtemos $(y-h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2y\left(\frac{y^2-2}{2y}\right) + h^2 = 2 + h^2 > 2$. ■

Denotamos por $\mathfrak{C}$ o conjunto de todos os cortes. Em $\mathfrak{C}$, podemos estabelecer uma relação de ordem "$\leqslant$", definir as operações "$+$"e "$\cdot$". Pode-se provar a validade da propriedade de tricotomia, que a adição é associativa, comutativa e tem elemento neutro. Define-se, também, o simétrico aditivo e, com isso, a operação de subtração, como feito em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. A multiplicação também é associativa, comutativa e tem elemento neutro. Existe a compatibilidade da relação de ordem com a adição e multiplicação. Há a distributividade da multiplicação em relação a adição.

Definição 2.34. *$\mathfrak{C}$ é denominado conjunto dos números reais e denotado por* $\mathbb{R}$.

Desse modo, cada corte de Dedekind, representa um número real conforme, definições abaixo.

Definição 2.35. *Um corte racional r^* define um número racional r.*

Definição 2.36. *Um corte não racional define um número irracional.*

Com base nas definições acima e nas Props. 2.12 e 2.13, todo corte define um número real. Essa é a característica que diferencia os reais dos racionais, também chamada, às vezes, de completeza de $\mathbb{R}$.

Na próxima seção, provaremos a irracionalidade de alguns números reais.

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 IRRACIONALIDADE DE ALGUNS NÚMEROS REAIS

Saber o que é e reconhecer os números irracionais, são coisas de fundamental importância para os professores de Matemática, principalmente, do Ensino Médio. Faz-se necessário também compreender que os irracionais formam a maior parte dos reais, sua cardinalidade (número de elementos) é muito maior que dos racionais. São eles que tornam o conjunto dos reais um conjunto não-enumerável, isto é, não se pode criar uma lista que contenha todos seus elementos. Neste intuito, esta seção apresenta a demonstração da irracionalidade de alguns números reais, bem como uma ideia informal da grande quantidade de elementos que satisfazem essa condição de irracionalidade (um detalhamento mais formal e rigoroso pode ser encontrado em (LIMA, 2004) e (LIMA, 2008).

As demonstrações de irracionalidade aqui apresentadas são feitas de forma indireta, isto é, por contradição ou redução ao absurdo. Iniciaremos a subseção abaixo com as demonstrações mais elementares que envolvem representação com radicais.

3.1.1 Números representados com radicais

Proposição 3.1. *Representamos por $\sqrt{2}$ a medida da diagonal do quadrado de lado 1. Afirmamos que $\sqrt{2}$ é um número irracional.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Então existem inteiros p e q, primos entre si, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Daí,

$$p^2 = 2q^2, \tag{16}$$

e assim, p^2 é par, o que acarreta p par (Prop.2.3), ou seja, $p = 2m, m \in \mathbb{Z}$. Substituindo-se o valor de p na Eq. (16), temos que $(2m)^2 = 2q^2$ e, portanto, q^2 é par, o que acarreta q par. Temos, assim, uma contradição, pois p e q são primos entre si, e não podem ser ambos pares. Concluímos então, que $\sqrt{2}$ não é racional. ■

Proposição 3.2. *Representamos por $\sqrt{3}$ a medida da diagonal do cubo de aresta 1. Afirmamos que $\sqrt{3}$ é um número irracional.*

Demonstração. Seguiremos o raciocínio análogo ao da prova de $\sqrt{2}$. Mas, ao invés de utilizar divisibilidade por 2, usaremos divisibilidade por 3. Provaremos, inicialmente, que o quadrado de um número inteiro é divisível por 3 se, e somente se, o número inteiro em si for divisível por 3. De fato, um inteiro divisível por 3 é da forma $3k, k \in \mathbb{Z}$, e um inteiro não divisível por 3 tem uma das formas $3k + 1$ ou $3k + 2$, com $k \in \mathbb{Z}$. Daí, a proposição é confirmada pelas equações abaixo

$$(3k)^2 = 9k^2 = 3\underbrace{(3k^2)}_{k_1\in\mathbb{Z}} = 3k_1,$$

$$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3\underbrace{(3k^2+2k)}_{k_2\in\mathbb{Z}} + 1 = 3k_2 + 1,$$

$$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3\underbrace{(3k^2+4k+1)}_{k_3\in\mathbb{Z}} + 1 = 3k_3 + 1.$$

Agora, suponha, por absurdo, que $\sqrt{3}$ seja um número racional. Então, existem inteiros p e q, primos entre si, tais que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, o que nos dá

$$p^2 = 3q^2. \tag{17}$$

Na Eq.(17), o inteiro $3q^2$ é divisível por 3, isto é, p^2 é divisível por 3 e, portanto, p é divisível por 3, ou seja, $p = 3k, k \in \mathbb{Z}$. Substituindo-se p na Eq.(17), teremos $(3k)^2 = 3q^2$, e daí, $q^2 = 3k^2$, ou seja, q^2 é divisível por 3, e também, q o é. Mas, isto é uma contradição, pois p e q não podem ser ambos divisíveis por 3, uma vez que $\frac{p}{q}$ é irredutível. Portanto, $\sqrt{3}$ não é racional. ■

Na prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$, utilizamos divisibilidade por 2, e na prova da irracionalidade de $\sqrt{3}$, utilizamos divisibilidade por 3. Na prova da irracionalidade de $\sqrt{6}$, podemos usar divisibilidade por 2 ou por 3, e recair em uma das duas demonstrações anteriores. Observe que $6 = 2 \cdot 3$.

Proposição 3.3. *$\sqrt{6}$ é um número irracional.*

Demonstração. Seguindo o raciocínio análogo ao das provas de irracionalidade de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, suponha, por absurdo, que $\sqrt{6}$ seja um número racional. Então, existem inteiros p e q, primos entre si, tais que $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, e daí,

$$p^2 = 6q^2 = 2 \cdot (3q^2) = 3 \cdot (2q^2).$$

Utilizando raciocínio análogo aos anteriores e, optando pela divisibilidade por 2 ou por 3, concluiremos que $\sqrt{6}$ é um número irracional. ■

Proposição 3.4. *$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.*

Demonstração. Suponha que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fosse um número racional α, isto é, $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Elevando-se ao quadrado ambos os membros da igualdade acima, obteremos

$$\sqrt{6} = \frac{\alpha^2 - 5}{2}.$$

Mas, o conjunto dos números racionais é fechado em relação às quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero)). Logo, $\frac{\alpha^2-5}{2}$ é um número racional.

Como vimos na Prop. 3.3, $\sqrt{6}$ é irracional e, portanto, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional. ■

Proposição 3.5. *Se p é inteiro positivo e primo, então $\sqrt{p}$ é um número irracional.*

Demonstração. Suponha que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, primos entre si. Daí, $p = \frac{m^2}{n^2}$, ou ainda, $m^2 = pn^2$ e, assim, $m = pk$, com $k \in \mathbb{Z}$. Agora, $(pk)^2 = pn^2$, ou seja, $p^2k^2 = pn^2$, e daí, $n = pk'$, com $k' \in \mathbb{Z}$, o que é uma contradição, pois m e n não podem ser ambos múltiplos de p. Portanto, $\sqrt{p}$ é um número irracional. ■

Proposição 3.6. *Se p e q são inteiros positivos e primos distintos, então $\sqrt{pq}$ é um número irracional.*

Demonstração. Suponha que $\sqrt{pq}$ é um número racional, ou seja, $\sqrt{pq} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, primos entre si. Daí, $pq = \frac{m^2}{n^2}$, ou ainda,

$$m^2 = pqn^2 = p\underbrace{qn^2}_{k_1 \in \mathbb{Z}} = q\underbrace{pn^2}_{k_2 \in \mathbb{Z}}. \tag{18}$$

Na Eq.(18) podemos usar o fato de m^2 ser múltiplo de p ou q, e assim, recair na demonstração anterior, chegando-se a uma contradição, pois m e n não podem ser ambos múltiplos de p ou ambos múltiplos de q. Portanto, $\sqrt{pq}$ é um número irracional. ■

A raiz quadrada de um número inteiro positivo a, que não seja quadrado perfeito, é um número irracional. Este fato está provado na proposição abaixo:

Proposição 3.7. *Se $a \in \mathbb{N}$ não é quadrado perfeito, então $\sqrt{a}$ é um número irracional.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\sqrt{a}$ é racional, isto é, existem $m, n \in \mathbb{Z}$, primos entre si, tais que $\sqrt{a} = \frac{m}{n}$. Se $n = 1$, $\sqrt{a}$ será inteiro. Nesta situação, a seria um quadrado perfeito, o que estamos excluindo de nossa hipótese. Então, vamos supor $n \neq 1$. Nesse caso, n tem um fator primo p. Vamos verificar que este p é fator comum de m e n. Isso é claro, pois $m^2 = an^2$ e, portanto, todo fator primo de n é também fator de m, o que é uma contradição, pois m e n são primos entre si. Logo, $\sqrt{a}$ será irracional. ■

Proposição 3.8. *Se $n = a \cdot b$ é um número inteiro tal que $\sqrt{n} = \sqrt{a \cdot b}$ é irracional, então $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é irracional.*

Demonstração. Utilizando o raciocínio da Prop. 3.4, suponha que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é um número racional γ, isto é, $\gamma = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Elevando-se ambos os membros da igualdade acima, e simplificando o resultado, obteremos $\sqrt{a \cdot b} = \frac{\gamma^2-(a+b)}{2}$. Como o conjunto dos números racionais é fechado em relação às quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero)), temos que $\frac{\gamma^2-(a+b)}{2}$ é um número racional. Mas, por hipótese, $\sqrt{a \cdot b}$ é irracional. Contradição! Portanto, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é irracional. ■

Observe que se $\sqrt{n} = \sqrt{a \cdot b}$ for racional, nada podemos afirmar. Por exemplo, tome $n = 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16$ e $\sqrt{64} = 8 \in \mathbb{Q}$. Daí,

a) $\sqrt{2}+\sqrt{32}=\sqrt{2}+4\sqrt{2}=5\sqrt{2}\in\mathbb{I}$;
b) $\sqrt{4}+\sqrt{16}=2+4=6\in\mathbb{Q}$.

Proposição 3.9. *Se $n=a\cdot b$ é um número inteiro positivo tal que $\sqrt{n}=\sqrt{a\cdot b}$ é irracional, então $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ é irracional.*

Demonstração. Análoga à demonstração da Prop.3.8, bastando apenas trocar o sinal de $+$ para $-$ entre os radicais. ■

Proposição 3.10. *Se $a\in\mathbb{N}$ não é uma n-ésima potência de um inteiro positivo, então $\sqrt[n]{a}$ é irracional.*

A irracionalidade de $\sqrt[n]{a}$, onde a não é uma n-ésima potência de um inteiro positivo, é uma generalização da Prop. 3.7. Este resultado, mais geral, é um corolário de um Teorema sobre raízes racionais de equações polinomias, que veremos a seguir. Mas, antes necessitamos de algumas definições e resultados, que serão apresentados abaixo.

Lema 3.1. *Se x,y,z são inteiros, tais que x seja um divisor de yz e, x e y não tenham fatores primos comuns, então, x é um divisor de z. De modo mais geral, se x for um divisor de $y^n z$, com n inteiro positivo qualquer e, x e y não tiverem fatores primos comuns, então x será divisor de z.*

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, existe apenas uma maneira de decompor x,y,z em fatores primos. Como x é um divisor de yz, todos os fatores primos de x, são também fatores de yz, além disso, se algum primo p ocorrer em x, elevado a um expoente α, também ocorrerá em yz, com pelo menos o mesmo expoente, ou seja, ocorrerá em yz, com expoente β, $\beta\geqslant\alpha$. Como x e y não têm fatores comuns, segue que todos os fatores primos de x ocorrerão na fatoração de z, com pelo menos o mesmo expoente. Portanto, x é um divisor de z. Usando ainda, o mesmo argumento, o fato de x e y não terem fatores primos comuns nos garante que x e y^n também não possuirá primos comuns. Assim, sendo x um divisor de $y^n z$, será, portanto, um divisor de z. ■

Definição 3.1 (Polinômios de grau n e Equações Polinomias)**.** *Um polinômio de grau n tem a forma*

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n, \tag{19}$$

com $a_n\neq 0$, em que $a_0,a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{Z}$ são denominados coeficientes e n o grau do polinômio. Uma Equação Polinomial ou Equação Algébrica é uma igualdade da forma

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0. \tag{20}$$

Teorema 3.1 (Raízes racionais de equações polinomiais)**.** *Se uma equação polinomial $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ tiver uma raiz racional $\frac{p}{q}$, com $p,q\in\mathbb{Z}$, primos entre si, então p será um divisor de a_0 e q será um divisor de a_n.*

Demonstração. Seja $\frac{p}{q}$ uma raiz da equação polinomial acima. Assim,

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

ou seja,

$$a_n\left(\frac{p^n}{q^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + \cdots + a_2\left(\frac{p^2}{q^2}\right) + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0. \tag{21}$$

Multiplicando ambos os membros da Eq.(21) por q^n, obtemos

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0, \tag{22}$$

que pode ser reescrita como

$$a_np^n = -a_{n-1}p^{n-1}q - \cdots - a_2p^2q^{n-2} - a_1pq^{n-1} - a_0q^n,$$

ou ainda,

$$a_np^n = q(-a_{n-1}p^{n-1} - \cdots - a_2p^2q^{n-3} - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}),$$

o que mostra que q é divisor de a_np^n. Aplicando o Lema 3.1, com q, p e a_n, respectivamente, no lugar de x, y e z, concluímos que q é divisor de a_n. Reescrevendo a Eq.(22), como

$$a_0q^n = p(-a_np^{n-1} - \cdots - a_2pq^{n-2} - a_1q^{n-1}),$$

segue que p é divisor de a_0q^n. Aplicando novamente o Lema 3.1, com p, q e a_0, respectivamente, no lugar de x, y e z, concluímos que p é divisor de a_0. ■

Corolário 3.1. *Se a equação $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com coeficientes inteiros possuir uma raiz racional, ela será um inteiro. E além disso, essa raiz inteira será um divisor de a_0.*

Demonstração. Seja $\frac{p}{q}$ uma raiz racional. Suponha, ainda, sem perda de generalidade, que q seja positivo, pois, caso contrário, podemos colocar o sinal menos para o p. De acordo com o Teo. 3.1, q terá que ser um divisor de a_n, isto é, terá que ser um divisor de 1. Como $+1$ e -1 são os únicos divisores de 1, teremos $q = +1$, pois excluímos valores negativos para q. Assim, qualquer raiz racional será da forma $\frac{p}{1}$, ou seja, um inteiro p. Ainda, pelo Teo. 3.1, sabemos que p será um divisor de a_0, completando assim, a demonstração. ■

Corolário 3.2. *Sejam a, m, n inteiros positivos. Um número da forma $\sqrt[n]{a}$, $a \neq m^n$, é irracional, ou seja, se a não for uma n-ésima potência de um inteiro m, então $\sqrt[n]{a}$ será irracional.*

Demonstração. O resultado decorre diretamente do Cor. 3.1, pois $\sqrt[n]{a}$ é uma raiz de $x^n - a = 0$, e se essa equação tiver uma raiz racional, ela terá que ser um inteiro. Mas se

$\sqrt[n]{a}$ fosse inteiro teríamos $a = m^n$, possibilidade esta, excluída na hipótese. Portanto, $\sqrt[n]{a}$ é irracional. ■

Veremos, agora, a irracionalidade de alguns valores trigonométricos e de alguns logaritmos decimais.

3.1.2 Valores trigonométricos e logaritmos decimais

Ao estudar as funções trigonométicas, $sen\,\theta$, $cos\,\theta$ e $\tan\,\theta$, e logarítimos decimais, $log\,x$ ou $log_{10}\,x$, dá-se destaque para os números reais. Mas, em particular, a grande maioria desses números é, na realidade, formada por irracionais. Conforme afirma (NIVEN, 2012), "Os valores das funções trigonométricas são irracionais, exceto para alguns valores especias do ângulo θ; analogamente para quase todos os números reais positivos x, os valoes de $log\,x$ são irracionais". Além disso, temos o logaritmo natural $ln\,x$ ou $log_e\,x$, importante no Cálculo Diferencial e Integral, bem como em outros segmentos da Matemática e demais áreas afins. A base deste logaritmo é o número e ou número de Euler, que é um número irracional, o qual veremos com mais detalhes a frente.

Mostraremos, inicialmente, que para alguns valores de θ, os valores das funções $sen\,\theta$, $cos\,\theta$ e $\tan\,\theta$ são irracionais. Para isso, relembraremos as seguinte identidades trigonométricas:

$$cos(\theta_1 + \theta_2) = cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 - sen\,\theta_1 sen\,\theta_2, \tag{23}$$

$$sen(\theta_1 + \theta_2) = sen\,\theta_1 cos\,\theta_2 + cos\,\theta_1 sen\,\theta_2. \tag{24}$$

Fazendo $\theta = \theta_1 = \theta_2$ nas Eqs.(23) e Eq.(24), obteremos

$$cos(2\theta) = cos^2\,\theta - sen^2\,\theta, \tag{25}$$

$$sen(2\theta) = 2sen\,\theta cos\,\theta. \tag{26}$$

Em seguida, substituindo θ_1 por 2θ e θ_2 por θ, na Eq.(23), obteremos

$$cos(3\theta) = cos\,2\theta cos\,\theta - sen\,2\theta sen\,\theta.$$

Agora, usando as equações Eq.(25), Eq.(26) e a relação trigonométrica fundamental, $cos^2\,\theta + sen^2\,\theta = 1$, obteremos

$$cos(3\theta) = \overbrace{(cos^2\,\theta - sen^2\,\theta)}^{cos\,2\theta} cos\,\theta - \overbrace{(2sen\,\theta cos\,\theta)}^{sen\,2\theta} sen\,\theta,$$

ou seja,

$$cos\,(3\theta) = 4cos^3\,\theta - 3cos\,\theta. \tag{27}$$

Proposição 3.11. *$cos\,75°$ é irracional.*

Demonstração. De fato, pela Eq.(23), temos que $cos\,75° = cos(45° + 30°)$ e $cos(45° + 30°) = cos\,45° cos\,30° - sen\,45° sen\,30°$. Substituindo os valores de $cos\,45°$, $cos\,30°$, $sen\,45°$ e $sen\,30°$, vem

$$cos\,75° \quad = \quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Pela Prop. 3.7, $\sqrt{12}$ é irracional, pois 12 não é quadrado perfeito. Além disso, $12 = 6 \cdot 2$. Então, pela Prop. 3.9, temos que $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ é irracional. E, finalmente, pelo Teo. 2.4, o número $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ será irracional[7], ou seja, $cos\,75°$ é irracional. ∎

Proposição 3.12. *$cos\,20°$ é irracional.*

Demonstração. De fato, fazendo $\theta = 20°$, na Eq.(27), temos $cos\,60° = 4cos^3\,20° - 3cos\,20°$. Fazendo $cos\,20° = x$ e $cos\,60° = \frac{1}{2}$, obtemos $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$, ou seja,

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \tag{28}$$

Pelo modo como a Eq. (28) foi construída, sabemos que uma de suas raízes é $cos\,20°$. Aplicando o Teo. 3.1, veremos que as únicas possíveis raízes racionais dessa equação são $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ e $\pm\frac{1}{8}$. Mas, verificando por substituição, nenhum desses números é uma raiz da mesma. Concluímos, então, que a Eq. 28 não tem raízes racionais e, portanto, $cos\,20°$ é um número irracional. ∎

3.1.2.1 Casos mais gerais

Até aqui utilizamos de um método de construção de equações com raiz igual ao valor trigonométrico, o qual desejamos verificar a irracionalidade e aplicar o Teo. 3.1 sobre raízes racionais de equações polinomiais e verificamos se os possíveis valores encontrados são de fato raízes da equação. Podemos estender esse método e provar a irracionalidade de vários outros valores de funções trigonométricas, uma vez que, valores de funções trigonométricas com número inteiro de graus, minutos e segundos são irracionais, salvo algumas exceções, como aponta (NIVEN, 2012):

> [...] com algumas poucas e óbvias exceções, as funções trigonométricas de qualquer ângulo igual a um número inteiro de graus, minutos e segundos, são irracionais. Estamos falando de ângulos como $14°41'13''$. Exceções aparecem no caso de ângulos de $0°, 30°, 45°, 60°$ e para alguns ângulos obtidos a partir desses pela adição ou subtração de múltiplos inteiros de $90°$. Isso não quer dizer que todas as funções trigonométricas de $30°$, por

[7] Apesar desse número está na forma de fração, não satizfaz as condições de número racional, a saber, o numerador e denominador devem ser inteiros. E $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ é irracional, conforme demonstrado acima.

exemplo, sejam racionais, mas pelo menos, uma função trigonomética de $30°$ é irracional.

Além do método descrito acima, temos um princípio que permite encontrar vários outros valores trigonométricos irracionais. Tal princípio será descrito e demonstrado na proposição a seguir.

Proposição 3.13. *Se θ for um ângulo tal que $cos\, 2\theta$ é irracional, então $cos\,\theta, sen\,\theta$ e $tan\,\theta$ também serão irracionais.*

Demonstração. Usando-se a Eq. 25, como $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$, temos que

$$cos(2\theta) = 2cos^2\,\theta - 1 \tag{29}$$

ou

$$cos(2\theta) = 1 - 2sen^2\,\theta. \tag{30}$$

Se fosse $cos\,\theta$ racional, teríamos que $cos^2\,\theta$ também seria racional e, por mais justa razão, $2cos^2\,\theta - 1$ seria racional e, assim $cos(2\theta)$, por (29) seria racional, o que é uma contradição. Portanto, $cos\,\theta$ é irracional.

De modo análogo, mostra-se que $sen\,\theta$ é irracional, usando-se a Eq. (30).

Agora, como

$$1 + tan^2\theta = sec^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta}, \tag{31}$$

se fosse $tan\,\theta$ racional, então $cos^2\,\theta$ também seria, e por (29), $cos(2\theta)$ seria racional, o que é uma contradição. Portanto, $tan\,\theta$ é irracional. ■

Com aplicações sucessivas da Prop. 3.13, podemos mostrar a irracionalidade de uma infinidade de números trigonométricos. Por exemplo, como $cos\,20°$ é irracional, pela Prop. 3.12, temos que

$$\begin{array}{lll} cos\,10° & sen\,10° & tan\,10° \\ cos\,5° & sen\,5° & tan\,5° \\ cos\,2'30'' & sen\,2'30'' & tan\,2'30'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

são todos irracionais.

Proposição 3.14. *$log_{10}\,2$ é irracional.*

Demonstração. Se $log_{10}\,2$ fosse racional, então existiriam $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$, primos entre si, tais que $log_{10}\,2 = \frac{p}{q}$, ou seja, $10^{\frac{p}{q}} = 2$. Elevando-se ambos os membros desta última igualdade, a q, obtemos $10^p = 2^q$, isto é, $5^p = 2^{q-p}$, com $q - p \neq 0$, uma vez que, p e q são primos ente si. Assim, o Teo. 2.2 garante que esta última igualdade é falsa, pois não podemos ter duas decomposições em fatores primos para o mesmo número. Poderíamos, também, observar que um dos lados da última igualdade é divisível por 5, enquanto o outro, é divisível por

2. Logo, chegamos a uma contradição que se originou do fato de supor $log_{10} 2$ racional. Portanto, $log_{10} 2$ é irracional. ■

Proposição 3.15. *$log_{10} p$, com p primo, é irracional.*

Demonstração. Suponha que $log_{10} p$ é racional. Então, existem $m, n \in \mathbb{Z}^*$, primos entre si, tais que $log_{10} p = \frac{m}{n}$, ou seja, $10^{\frac{m}{n}} = p$. Elevando-se ambos os membros desta última igualdade a n, temos que $10^m = p^n$. Daí, $2|p^n$ e $5|p^n$, ou seja, $2|p$ e $5|p$, o que é absurdo, pois p é primo. Portanto, $log_{10} p$ é irracional. ■

Proposição 3.16. *$log_{10} n$ é racional, se e somente se, n é uma potência de 10.*

Demonstração. Com efeito, se $n = 10^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$, então

$$log_{10} n = log_{10} 10^\alpha = \alpha log_{10} 10 = \alpha \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}.$$

Reciprocamente, se $log_{10} n$ é racional, então existem $u, v \in \mathbb{Z}^*$, primos entre si, tais que $log_{10} n = \frac{u}{v}$, ou seja, $10^{\frac{u}{v}} = n$. Elevando-se ambos os membros desta última igualdade a v, temos que $10^u = n^v$, e daí, $2|n^v$ e $5|n^v$, ou seja, $2|n$ e $5|n$. Por outro lado, se um primo p é tal que $p|n$, então $p|10^u$, e assim, $p = 2$ ou $p = 5$, ou seja, $n = 2^\alpha 5^\beta$. Mas, isso implica que $10^u = 2^{\alpha v} 5^{\beta v}$, ou seja, $2^u 5^u = 2^{\alpha v} 5^{\beta v}$. Daí, $\alpha v = u = \beta v$, isto é, $\alpha = \beta$. Portanto, $n = 10^\alpha$, isto é, n é uma potência de 10. ■

3.1.3 Número de Euler: e

Definição 3.2 (Utilizando limite)**.** *"e" ou número de Euler é definido como o limite a seguir*

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{32}$$

Definição 3.3 (Utilizado Área)**.** *O número "e" pode ser definido também como o número que torna igual a 1 a área hachurada do gráfico representado na Fig. 5.*

A curva da Fig. 5, é um ramo da hipérbole equilátera que representa o gráfico da função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. A região hachurada é denominada de faixa da hipérbole, de 1 até e, e representada por H_1^e.

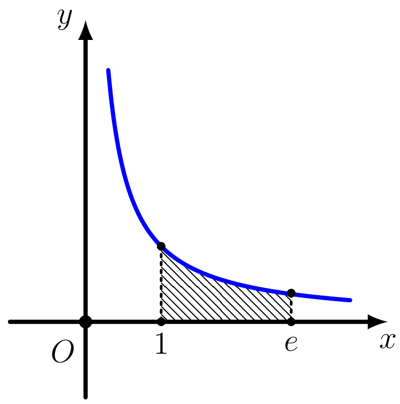
Definição 3.4 (Usando série)**.** *A soma infinita abaixo resulta no número e:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots. \tag{33}$$

Proposição 3.17. *O número e é irracional.*

Demonstração. Suponha que e fosse um número racional, isto é, $e = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$,

Figura 5 – Definição do número e utilizando área



Fonte: Elaborado pelo autor.

primos entre si. Da Def. 3.4, podemos obter a igualdade

$$\frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{q!}) = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{34}$$

Fazendo uma estimativa do segundo membro da Eq. (34), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\right) < \\
&< \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{q!}\left(\frac{\frac{1}{q+1}}{1 - \frac{1}{q+1}}\right) = \\
&= \frac{1}{q!}\left(\frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q+1-1}{q+1}}\right) = \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} \cdot \frac{q+1}{q}\right) = \frac{1}{q!}\frac{1}{q}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$0 < \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}.$$

Observe que os termos $\frac{1}{k}$ são todos positivos; assim, pela Eq.(34) e pela expressão acima, temos que

$$0 < \frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{q!}) < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}.$$

Daí, multiplicando por $q!$, segue que

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q}. \tag{35}$$

Finalmente, na Eq. (35), o termo do meio é inteiro, pois o $q!$ cancela todos os denominadores das frações entre parenteses. Isso nos leva a uma contradição, pois sendo $\frac{1}{q} \leqslant 1$, temos um inteiro entre 0 e 1, o que é absurdo, conforme provado na Prop. 2.10. Este absurdo provém da hipótese de supor e um número racional. Portanto, o número de Euler: e, é um número irracional. ■

3.1.3.1 Uma bela fórmula da Matemática: $e^{i\pi} + 1 = 0$

Veremos algumas fórmulas matemáticas envolvendo o número e e algumas manipulações utilizadas para se chegar à fórmula que dá título a essa subseção.

Inicialmente, temos a definição do número e, $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, de modo que e pode ser dado pela soma

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots . \tag{36}$$

Usando o número e, Euler definiu a *função exponencial*, como

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n . \tag{37}$$

Utilizou tal definição, para desenvolvê-la como uma série infinita de potências

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots . \tag{38}$$

Substituindo o x por ix, onde $i = \sqrt{-1}$, na Eq. (38), obtém-se

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots . \tag{39}$$

Como consequência da propriedade das potências inteiras da unidade imaginária i se repetirem em ciclos de quatro: $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$, e assim, por diante, podemos reescrever a Eq. (39) como

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + - \cdots . \tag{40}$$

Modificando a ordem dos termos na Eq. (40), juntando todos os termos reais, separadamente dos imaginários, chegou-se à série

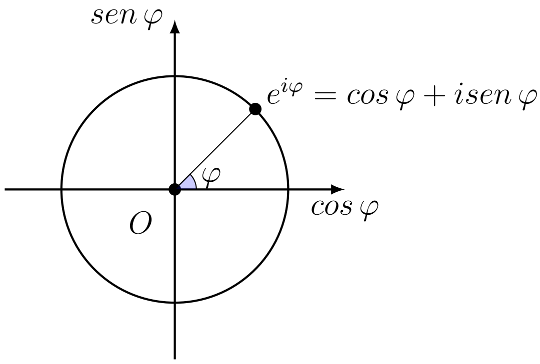
$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots\right) + i\left(x - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\right). \tag{41}$$

Euler sabia que as duas séries que aparecem nos parênteses, na Eq. (41), são as séries de potências das funções trigonométricas *cos* x e *sen* x, respectivamente, chegando-se à notável fórmula

$$e^{ix} = cos\,x + isen\,x. \tag{42}$$

A fórmula acima faz o elo entre as funções exponencial e trigonométricas, possibilitando a representação dessas no ciclo trigonométrico de raio unitário.

Figura 6 – Identidade de Euler



Fonte: Elaborado pelo autor.

Fazendo ainda a substituição de ix por $-ix$ na Eq. (42), e usando as identidades $cos(-x) = cos\,x$ e $sen(-x) = -sen\,x$, Euler obteve uma outra equação

$$e^{-ix} = cos\,x - isen\,x. \tag{43}$$

Somando-se e depois subtraindo as Eqs. (42) e (43), permitiu-se a expressão de $cos\,x$ e $sen\,x$ em termo das funções exponenciais, e^{ix} e e^{-ix}, isto é,

$$cos\,x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ e } sen\,x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{44}$$

A conexão entre função exponencial e Trigonometria possibilitou o aparecimento de novas relações envolvendo tais equações. Assim, substituindo $x = \pi$ na Eq. (42) e sabendo que $cos\,\pi = -1$ e $sen\,\pi = 0$, Euler obteve a fórmula $e^{i\pi} = -1$, que reescreveu do seguinte modo

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{45}$$

Segundo (MAOR, 2008), certamente a Eq. (45) se coloca entre as mais belas fórmulas de toda a Matemática, afirmando ainda que

> [...] Uma fórmula que liga as cinco constantes mais importante da matemática (e também as três operações mais importantes – adição, multiplicação e exponenciação). Estas cinco constantes simbolizam os quatro grandes ramos da matemática clássica: aritmética, representada pelo 0 e pelo 1; a álgebra representada pelo i; a geometria pelo π e análise pelo e.

Conclui-se que a beleza de tal fórmula é devido ao fato de ser compacta, simples de enunciar, mas de grande significado e representação, ao reunir as cinco constantes mais importantes e utilizadas da Matemática, além das três operações supracitadas. Essas características são representadas em uma fórmula que fascina matemáticos e estudiosos.

3.1.3.2 Alguns números curiosos relacionados com o e

Este tópico consta de uma lista de números retirados do livro "e: A história de um número", do Autor (MAOR, 2008, pp. 58-60). A seguir, veremos o numero e e alguns valores relacionados a ele:

- $e^{-e} = 0,065988036....$ Leonhard Euler provou que a expressão $x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$, quando o número de expoentes cresce infinitamente, tende a um limite, se x estiver entre $e^{-e}(=\frac{1}{e^e})$ e $e^{\frac{1}{e}}$.
- $e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,207879576...$
  Como Euler mostrou em 1746, a expressão i^i(onde $i = \sqrt{-1}$) tem infinitos valores, todos eles reais: $i^i = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$, onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ O valor principal destas (o valor de $k = 0$) é $e^{-\frac{\pi}{2}}$.
- $\frac{1}{e} = 0,367879441...$
  O limite de $(1 - \frac{1}{n})^n$, quando $n \to \infty$, é igual a $\frac{1}{e}$. Este número é usado para medir a taxa de decaimento da função exponencial $y = e^{-at}$. Quando $t = \frac{1}{a}$, teremos $y = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Ele também aparece no problema do "envelope errado", proposto por Nicolaus Bernoulli: se n cartas forem colocadas em n envelopes com endereços diferentes, qual a probabilidade de que cada carta seja colocada em um envelope errado? Quando $n \to \infty$, a probabilidade se aproxima de $\frac{1}{e}$.
- $e^{\frac{1}{e}} = 1,444667861...$
  A solução do problema de Jakob Steiner: Encontre o valor máximo obtido pela função $y = x^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{x}$. Esse valor é obtido quando $x = e$.
- $\frac{878}{323} = 2,718266254...$ A melhor aproximação racional de e usando inteiros abaixo de 1.000. É fácil memorizar e é reminiscente da aproximação racional $\frac{355}{113} = 3,141592...$ para π.
- $e = 2,718281828...$
  A base dos logaritmos naturais (também conhecidos como logaritmos neperianos, embora sem justificativa histórica) e o limite de $(1 + \frac{1}{n})^n$, quando $n \to \infty$. O bloco repetido de dígitos 1828 é enganador, pois e é um número irracional e representado por uma sequência infindável de decimais que não se repete. A irracionalidade de e foi provada, em 1737, por Euler. Charles Hermite, em 1873, provou que e é um número transcendental, isto é, não pode ser uma solução para uma equação polinomial com coeficientes inteiros. O número e pode ser interpretado geometricamente de vários modos. A área sob o gráfico de $y = e^x$ de $x = -\infty$ a $x = 1$ é igual a e, assim como o declive

do mesmo gráfico em $x = 1$. A área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, de $x = 1$ a $x = e$, é igual a 1.

- $e + \pi = 5,859874482...$
- $e \cdot \pi = 8,539734223...$

  Estes números raramente aparecem em aplicações e não se sabe se eles são algébricos ou transcendentais.
- $e^e = 15,15426224...$

  Não se sabe se este número é algébrico ou transcendental.
- $\pi^e = 22,45915772...$

  Não se sabe se este número é algébrico ou transcendental.
- $e^\pi = 23,140669263...$

  Alexander Gelfond provou, em 1934, que este número é transcendental.
- $e^{e^e} = 3.814.279,104...$

  Note como este número é muito maior do que e^e. O número seguinte nesta progressão, $e^{e^{e^e}}$, tem 1.656.521 dígitos em sua parte inteira.
- $\gamma = 0,577215664...$

  Este número, indicado pela letra grega gama, é conhecido como constante de Euler. Ele é o limite de $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-ln\,n$, quando $n \to \infty$. Em 1781, Euler calculou este número com dezesseis casas decimais. O fato de que o limite existe, significa que, embora a série $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ (conhecida como série harmônica) cresça ilimitadamente, à medida que $n \to \infty$, a diferença entre ela e $ln\,n$ se aproxima de um valor constante. Não se sabe se γ é um número algébrico ou transcendental e nem mesmo se é racional ou irracional.
- $ln\,2 = 0,693147181...$

  Esta é a soma da série harmônica com sinais alterados, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, obtida da série de Nicolaus Mercator, $ln\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$, colocando-se $x = 1$. Este é o número ao qual e deve ser elevado para conseguirmos resultado 2: $e^{0,693147181...} = 2$.

Na próxima seção, serão apresentadas algumas sugestões de atividades em sala de aula, utilizando-se os números irracionais.

3.2 SUGESTÕES DE ATIVIDADES EM SALA

Nesta seção apresentaremos algumas sugestões de atividades a serem realizadas em sala de aula, utilizando os números irracionais, afim de levar os educandos à compreensão, de forma efetiva, de tais números; sua representação na reta numérica; construção de segmentos de medidas irracionais (incomensuráveis); a impossibilidade de obter na prática, por meio de medições, números irracionais; construções utilizando o número de ouro Φ, tão utilizado na arte e presente na natureza; e construções usando o número de prata δ_{AG}.

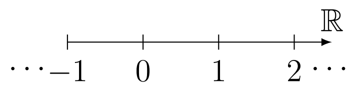
Listamos algumas sugestões de atividades a serem trabalhadas em sala de aula com os alunos para fixar melhor as ideias sobre números irracionais. Será necessário um kit básico de desenho geométrico (régua, compasso, transferidor) os quais searão utilizados para fazerem representações aproximadas dos números estudados. Vale ressaltar que existem números construtíveis usado o material citado e outros não-construtíveis. Iniciaremos com a representação dos números com radicais.

3.2.1 Representação de $\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, na reta real

Veremos, inicialmente, o passo a passo da representação do irracional $\sqrt{2}$.

1. Trace a reta real. (Fig. 7).

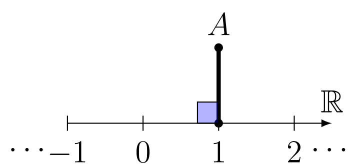
Figura 7 – Reta Real



Fonte: Elaborado pelo autor.

2. Construa um segmento unitário, perpendicular à reta real, com uma extremidade no ponto $x = 1$. A outra extremidade indicaremos pelo ponto A (Fig. 8).

Figura 8 – Segmento unitário

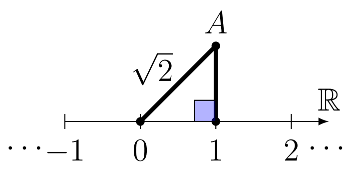


Fonte: Elaborado pelo autor.

3. Trace o segmento de extremidades nos pontos A e $x = 0$ (Fig. 9). Este segmento tem medida igual a $\sqrt{2}$ (Verifique! Sugestão: use Teorema de

Pitágoras).

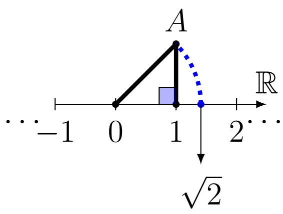
Figura 9 – Segmento de medida $\sqrt{2}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

4. Coloque a ponta seca do compasso no ponto $x = 0$ e a outra ponta em A. Trace o arco de circunferência até que este intersecte a reta. Neste ponto de interseção do arco com a reta, temos o ponto $x = \sqrt{2}$ (Fig. 10).

Figura 10 – Representação $\sqrt{2}$ na reta real

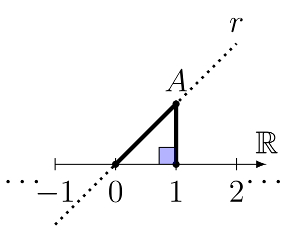


Fonte: Elaborado pelo autor.

Veremos agora o passo a passo da representação do irracional $\sqrt{3}$.

1. Vamos usar a Fig. 9 como base para nossa construção. Na figura citada trace a reta r que passa pelos pontos A e $x = 0$ (Fig. 11).

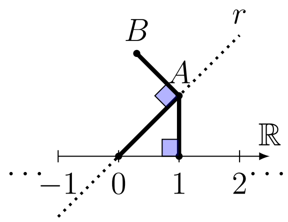
Figura 11 – Reta suporte



Fonte: Elaborado pelo autor.

2. Agora, seguiremos, praticamente, os mesmos passos utilizados para $\sqrt{2}$. Apenas faremos algumas adaptações. Construa um segmento unitário $\overline{AB}$, perpendicular à reta r, com uma extremidade no ponto A. O ponto B será a indicação da outra extremidade (Fig. 12).

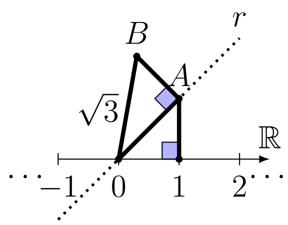
Figura 12 – Segmento perpendicular à reta r



Fonte: Elaborado pelo autor.

3. Trace o segmento de extremidades nos pontos B e $x = 0$ (Fig. 13). Este segmento tem medida igual a $\sqrt{3}$ (Verifique!).

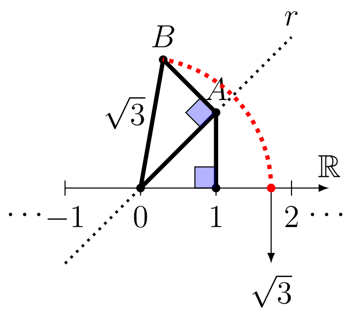
Figura 13 – Segmento de medida $\sqrt{3}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

4. Coloque a ponta seca do compasso no ponto $x = 0$ e a outra ponta em B. Trace o arco de circunferência até que este corte a reta real. Neste ponto de interseção do arco com a reta real, temos o ponto $x = \sqrt{3}$ (Fig. 14).

Figura 14 – Representação de $\sqrt{3}$ na reta real

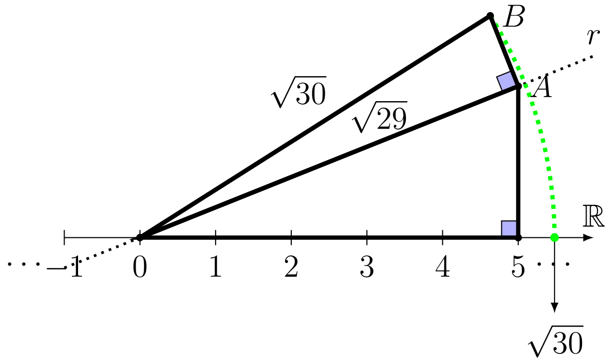


Fonte: Elaborado pelo autor.

Seguindo os mesmos procedimentos acima, sempre utilizando o segmento encontrado como suporte para encontrar o próximo, podemos localizar na reta os segmentos $\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. No entanto, quando o valor de n for muito grande, procedemos de modo a economizar tempo e esforços. Por exemplo, se quisermos localizar o ponto $\sqrt{30}$, faremos do seguinte modo:

- Trace a reta real;
- Construa um segmento, desta vez um pouco maior, digamos medindo 2 unidades. Este deve ser perpendicular à reta real e com extremidades nos pontos $x = 5$ e A;
- Trace o segmento de extremidades A e $x = 0$; este segmento mede $\sqrt{29}$ (Verifique!);
- Trace a reta r que passa por A e $x = 0$, e construa um segmento unitário perpendicular à r, de extremidade A e B;
- Trace o segmento partindo de $x = 0$ até o ponto B. Este tem medida $\sqrt{30}$ (Verifique!);
- Finalmente, coloque a ponta seca do compasso em $x = 0$ e a outra no ponto B. Trace o arco de circunferência até intersectar a reta real. Este ponto de interseção é $x = \sqrt{30}$. Conforme Fig. 15, abaixo.

Figura 15 – Representação de $\sqrt{30}$ na reta real



Fonte: Elaborado pelo autor.

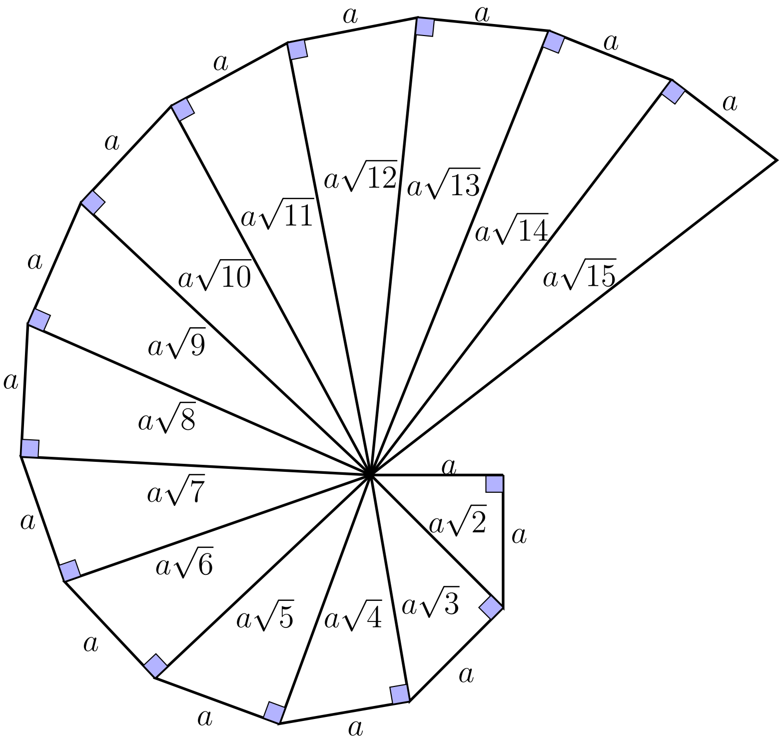
3.2.2 Construção de $a\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$

Essas construções são análogas às da subseção anterior, diferenciando-se apenas no fato que, nestas não há necessidade de desenhar arcos de circunferência, tão pouco, sua intersecção com a reta real. Além disso, aqui tomamos a unidade de medida como sendo $a \in \mathbb{R}$, e podemos proceder como feito na Fig. 16, ou por economia, podemos fazer como na Fig. 17.

Uma outra forma bastante interessante de representar $\sqrt{n}$, é a seguinte.

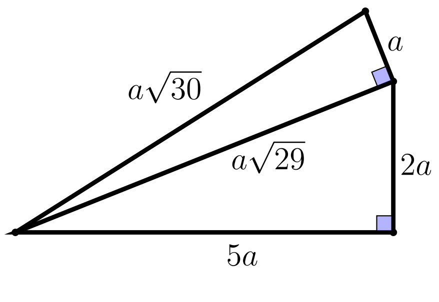
- Trace a reta real;
- Abra o compasso com uma medida maior que a metade de n;
- Coloque a ponta seca do compasso no ponto $x = 0$ e faça dois arcos, uma acima e outro abaixo da reta real;
- Faça o mesmo processo com o ponto $x = n$, de modo a obter as intersecções dos arcos desenhados;

Figura 16 – Construção de $a\sqrt{n}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

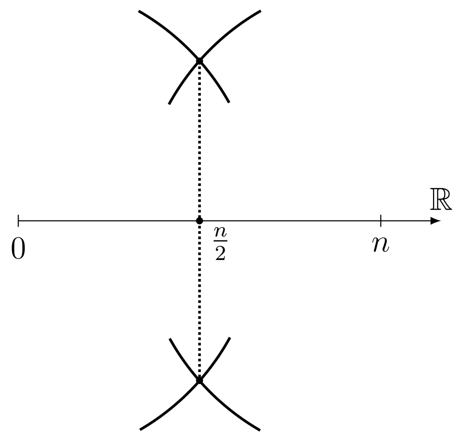
Figura 17 – Construção de $a\sqrt{21}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Trace uma reta passando nos pontos de interseções dos arcos. O local onde ela intersectar a reta real será o centro do semicírculo e tem medida $\frac{n}{2}$ (Fig. 18);
- Agora, posicione a ponta seca do compasso em $x = \frac{n}{2}$ (ponto B) e a outra ponta em uma das extremidades, $x = 0$ (ponto O) ou $x = n$ (ponto A). Trace o semicírculo de diâmetro n;
- Trace um segmento de $x = 1$ (ponto D), perpendicular à reta real até instersectar o semicírculo em um ponto que indicaremos por E. O segmento OE tem medida $\sqrt{n}$;

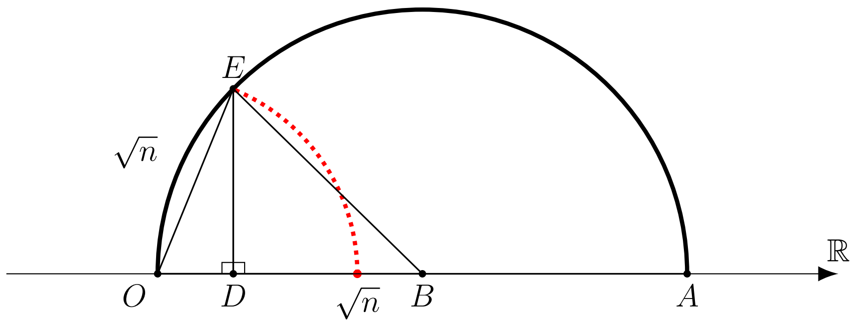
Figura 18 – Centro do semicírculo



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Coloque a ponta seca do compasso no ponto E e trace o arco até instersectar a reta real. Este ponto de interseção é $x = \sqrt{n}$ (Fig. 19).

Figura 19 – Outra forma de representar $\sqrt{n}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que os triângulos $\triangle ODE$ e $\triangle BDE$ são retângulos em D. $OA = n$ é diâmetro, $BE = \frac{n}{2}$, pois é raio do semicírculo. $BD = \frac{n}{2} - 1$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle BDE$, encontramos $DE = \sqrt{n-1}$ e novamente aplicanto piágoras no $\triangle ODE$ obtemos $OE = \sqrt{n}$.

Um aprofundamento maior das construções acima, bem como outras construções usando régua e compasso podem ser encontradas em (WAGNER, 2007).

3.2.3 Retângulo áureo

3.2.3.1 Segmento áureo

Tomemos um segmento AB e um ponto C, no seu interior, de tal modo que C divida o segmento AB em duas partes, cuja razão entre a menor e a maior parte é igual à razão

Figura 20 – Segmento áureo interno

Fonte: Elaborado pelo autor.

entre a maior parte e o segmento todo, ou seja,

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

O segmento AC com essa propriedade é chamado de *segmento áureo interno* de AB. Fazendo $AB = a$, obtemos

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{a - AC}{AC} = \frac{AC}{a} \Leftrightarrow AC^2 = a(a - AC) \Leftrightarrow AC^2 + aAC - a^2 = 0.$$

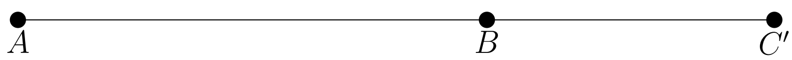
Daí, usando a fórmula para a resolução de equações quadráticas, segue que

$$AC = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4.1.(-a^2)}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AC = \frac{a\sqrt{5} - a}{2} = a\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right).$$

Tomamos, agora, um segmento AB e um ponto C', exterior a AB, com a mesma propriedade descrita acima, isto é,

$$\frac{BC'}{AB} = \frac{AB}{AC'}.$$

Figura 21 – Segmento áureo externo



Fonte: Elaborado pelo autor.

O segmento AC', com essa propriedade, é chamado de *segmento áureo externo* de AB. Fazendo $AB = a$, obtemos

$$AC' = a\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right).$$

3.2.3.2 Construção do retângulo áureo

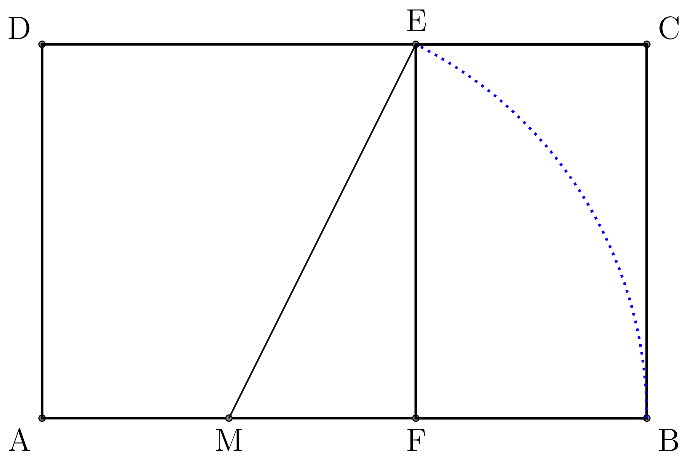
Definição 3.5. *Denomina-se retângulo áureo um retângulo cuja razão do comprimento para a largura é igual ao número de ouro,* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Os retângulos de ouro foram muito utilizados pelos gregos nas construções arquitetônicas, como no Paternon, pelos artistas renascentistas em suas obras, e ainda são muito utilizados nos dias atuais. Segundo, (AZEVEDO, 2013): "Retângulos áureos são frequentemente encontrados em cartões de crédito, cartões de visita, formatos de páginas virtuais, livros e outros [...]".

A construção do retângulo áureo de comprimento AB, é feita seguindo os passos abaixo:

- Trace um segmento $\overline{AF}$;
- Construa um quadrado $\square AFED$, com medida de lado AF;
- Marque o ponto médio M do segmento $\overline{AF}$;
- Marque o ponto B sobre o prolongamento do lado $\overline{AF}$, de modo que $ME = MB$. Para este fim, posicione a ponta seca do compasso no ponto M e a outra ponta em E. Construa o arco de circunferência $\overset{\frown}{EB}$ (arco menor) até intersectar o prolongamento de $\overline{AF}$. Este ponto séra B nas condições acima;
- Trace o ponto C, intersecção da reta suporte de $\overline{DE}$ com a perpendicular a $\overline{AB}$, pelo ponto B;
- O retângulo $ABCD$, assim construído (Fig. 22), é um retângulo áureo.

Figura 22 – Retângulo áureo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Justificativa da construção: Como $\square AFED$ é um quadrado e M pertence ao segmento $\overline{AF}$, então o triângulo $\triangle MFE$ é retângulo em F. Se $AF = x$, aplicando o Teorema de Pitágoras ao $\triangle MFE$, temos

$$ME^2 = MF^2 + FE^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{5x^2}{4},$$

que resulta em $ME = \frac{x\sqrt{5}}{2}$. Como $ME = MB$, substituindo o valor obtido na igualdade abaixo, temos:

$$AB = AM + MB = \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x(1+\sqrt{5})}{2}.$$

Portanto, a razão entre AB e AD é igual a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\frac{x(1+\sqrt{5})}{2}}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi,$$

mostrando que o retângulo (Fig. 22) é áureo.

Observe que, sendo $AD = AF$, então a razão da medida do segmento $\overline{AB}$ para a medida do segmentos $\overline{AF}$ também é igual a Φ. Analisando a razão entre AF e FB, nesta ordem, temos:

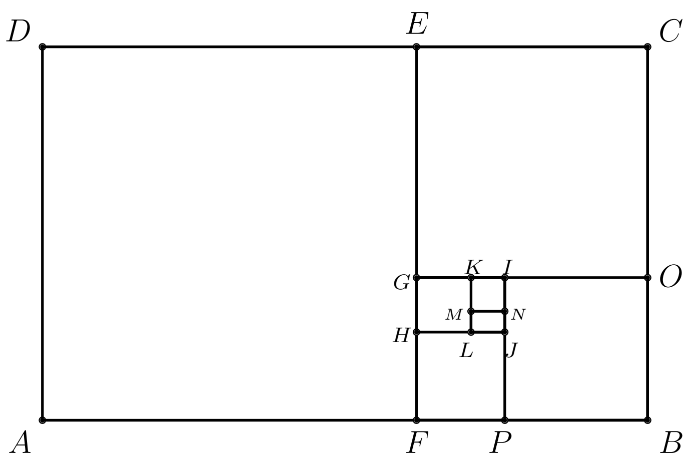
$$\frac{AF}{FB} = \frac{AF}{MB - MF} = \frac{x}{\frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2}} = \frac{x}{x\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Desse modo, a razão áurea aparece novamente:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{BF} = \frac{EF}{FB} = \Phi.$$

Conclui-se, então, que o retângulo $FBCE$ também é áureo. Assim, o processo pode ser repetido infinitas vezes e sempre obtemos retângulos áureos (Fig. 23). Mais detalhes sobre essa construção, consulte (AZEVEDO, 2013).

Figura 23 – Infinitos retângulos áureos



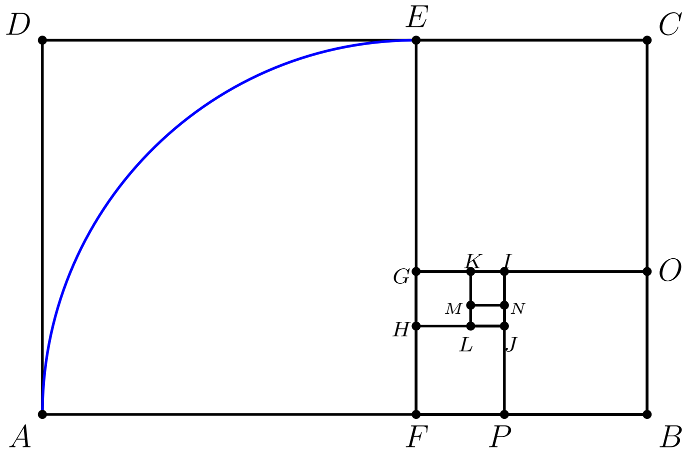
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.3.3 Construção da espiral áurea

Construir a espiral áurea faz-se necessário, inicialmente, a construção de um retângulo áureo, seguindo os passos descritos anteriormente. Uma vez que o retângulo já esteja desenhado, procederemos construindo os arcos, partindo do vértice inferior esquerdo do quadrado (base de construção do retângulo áureo) ao vértice oposto, sempre seguindo o mesmo sentido de construção (horário). O passo a passo segue abaixo.

1. Com centro em F, trace o arco $\overset{\frown}{AE}$.

Figura 24 – 1º arco da espiral áurea



Fonte: Elaborado pelo autor.

2. Com centro em G, trace o arco $\overset{\frown}{EO}$.
3. Com centro em I, trace o arco $\overset{\frown}{OP}$
4. Com centro em J, trace o arco $\overset{\frown}{PH}$
5. Com centro em L, trace o arco $\overset{\frown}{HK}$
6. Com centro em M, trace o arco $\overset{\frown}{KN}$

De modo análogo às etapas anteriores, a construção segue infinitamente, formando a figura abaixo.

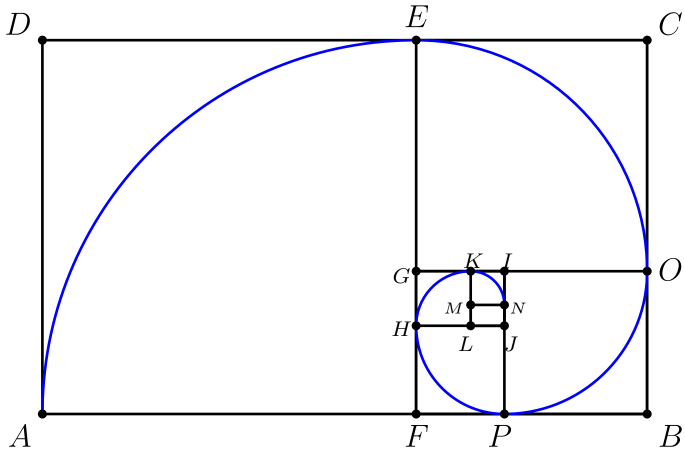
3.2.4 Retângulo de prata

Definição 3.6. *Denomina-se retângulo de prata, um retângulo cuja razão do comprimento para a largura é igual ao número de prata* $\delta_{AG} = 1 + \sqrt{2}$.

A razão prateada, assim como a razão áurea, já era conhecida pelos gregos antigos, mas sem esta denominação, que é bastante recente. Uma das aplicações notáveis desta proporção está relacionada com o dia a dia nos escritórios, escolas, papelaria, etc. A criação dos papéis da série A, em especial a folha A4, muito comum e utilizada em muitos países, é obtida a partir do conceito da razão de prata.

O papel do formato acima, é um retângulo na proporção $\sqrt{2} : 1$. Com a remoção de um quadrado maior possível a partir de uma folha desse papel, restará um retângulo com proporções $1 : \sqrt{2} - 1$, ou $1 + \sqrt{2} : 1$, que é a proporção de prata. A remoção novamente de um quadrado maior possível, resultará em outro retângulo com

Figura 25 – Espiral áurea



Fonte: Elaborado pelo autor.

proporção $\sqrt{2} : 1$. Esse retângulo com proporção $\sqrt{2} : 1$ é formado pela junção de um retângulo de prata e um quadrado, tem a propriedade de que, dobrando ao meio, obter dois papéis de mesmas proporções e metade da área do que foi dobrado. Esta propriedade é bastante explorada na criação de livros e também na redução ou ampliação de fotos, que pode ser realizada com mínimo de desperdício de papel.

3.2.4.1 Construção do retângulo de prata

A construção do retângulo prateado é feita seguindo os passos abaixo.

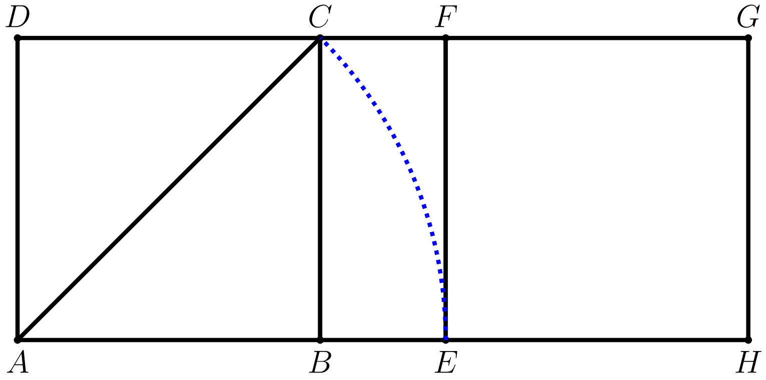
- Desenhe um quadrado $\square ABCD$ de lado a;
- Trace a diagonal $\overline{AC}$;
- Posicione a ponta seca do compasso no ponto A e a outra ponta em C. Construa o arco de circunferência até intersectar o prolongamento do lado $\overline{AB}$ no ponto que denominaremos de E;
- Trace o ponto F, pé da perpendicular a $\overline{DC}$, pelo ponto E;
- Construa um quadrado de lado, também medindo a, perpendicular ao lado do retângulo, passando pelos pontos E e F. Os outros vértices denominaremos de G e H.

O retângulo $AHGD$ construído (Fig. 26) é um retângulo de prata, pois, $AH = a(1+\sqrt{2})$ (Verifique!) e $AD = a$. Assim,

$$\frac{AH}{AD} = \frac{a(1+\sqrt{2})}{a} = 1+\sqrt{2} = \delta_{AG}.$$

Observe que o retângulo $AEFD$ tem as mesmas proporções que o papel A4 ($\sqrt{2}$:1), uma vez que, $AD = a$ e $AE = a\sqrt{2}$. Logo,

Figura 26 – Retângulo de prata



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\frac{a\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} \text{ ou } \sqrt{2} : 1.$$

Então, é de se esperar que o retângulo $BCFE$, também seja retângulo de prata. De fato, $CB = a$ e $BE = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$. Daí,

$$\frac{CB}{BE} = \frac{a}{a(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1 + \sqrt{2} = \delta_{AG}.$$

Assim, de modo análogo aos retângulos áureos, o processo pode ser repetido infinitas vezes e sempre obteremos retângulos de prata (Fig. 27), pois ao retirar os maiores quadrados possíveis nas duas extremidades do retângulo de prata, o novo retângulo formado é também um retângulo prateado.

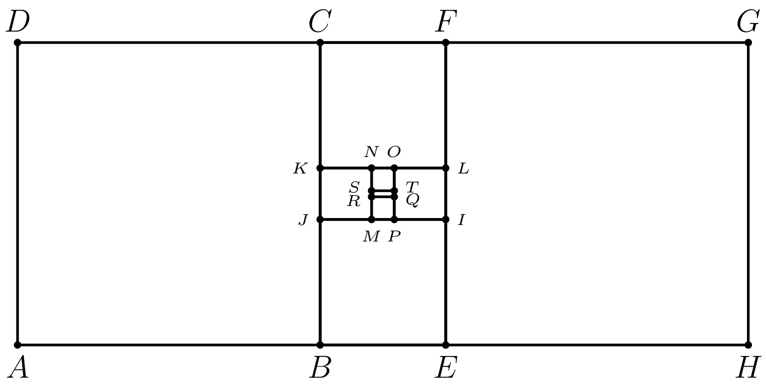
Se $AD = a$ e $BE = b$, na Fig. 27, então podemos descrevê-lo algebricamente, por $\frac{2a+b}{a} = \frac{a}{b}$, e daí comprovar novamente que os retângulos $ADGH$ e $BCFE$ são retângulos de prata. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{2a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad &\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + 2ab \Rightarrow 2a^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\
&\Rightarrow \quad 2a^2 = (a+b)^2 \Rightarrow a\sqrt{2} = a + b \\
&\Rightarrow \quad a\sqrt{2} - a = b \Rightarrow a(\sqrt{2}-1) = b \\
&\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\
&\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2} = \delta_{AG}.
\end{aligned}$$

3.2.4.2 Construção da espiral no retângulo de prata

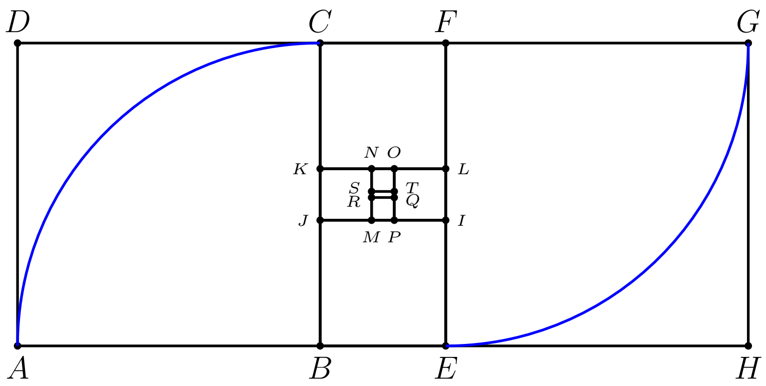
Analogamente à construção da espiral áurea, para construir a espiral prateada faz-se necessário, inicialmente, um retângulo de prata. Aqui, diferencia-se no fato de

Figura 27 – Infinitos retângulos de prata



Fonte: Elaborado pelo autor.

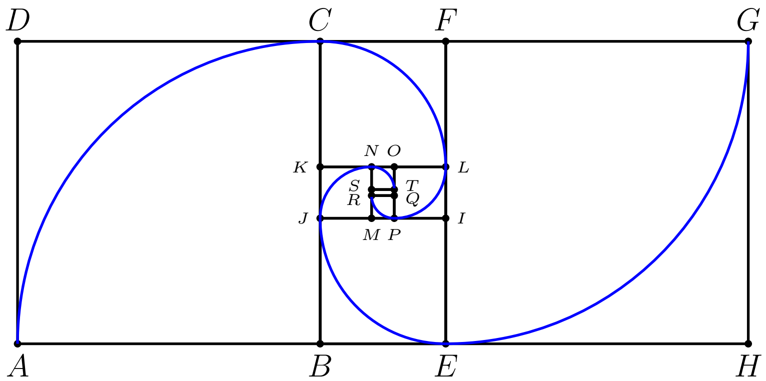
Figura 28 – Arcos iniciais



Fonte: Elaborado pelo autor.

podermos obter dois quadrados de lados maiores possíveis e, dessa forma, construirmos duas espirais prateadas, de acordo com os passos a seguir.

Figura 29 – Espirais no retângulo de prata



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma vez que o retângulo já esteja desenhado, procederemos construindo os arcos partindo do vértice inferior esquerdo do quadrado ABCD (base de construção do retângulo de prata) ao vértice oposto sempre seguindo o mesmo sentido de construção (horário). No segundo quadrado, que foi desenhado à direita, seguiremos traçando os arcos partindo do vértice superior direito ao vértice oposto sempre seguindo o mesmo sentido de construção (horário), conforme Fig.28. Segue-se traçando os arcos da espiral prateada, conforme Fig. 29.

4 CONCLUSÃO

O material aqui reunido, juntamente com as atividades elaboradas, não esgotam, nem de longe, todo o assunto, mas contemplam muitos aspectos da essência dos números irracionais, como suas propriedades e características. Além disso, apresenta diversos teoremas no intuito de somar esforços para a melhoria das aulas sobre o assunto e auxiliar na busca de uma aprendizagem mais sólida e significativa de nossos educandos.

Enquanto os números racionais, são aqueles que, na forma decimal são finitos ou infinitos periódicos, os irracionais são todos os demais números. Imagine, por exemplo, um número decimal com parte inteira igual a zero, e os demais números após a vírgula, infinitos, e podendo ser qualquer lista indefinida de algarismos, sem nenhuma restrição ou períodos. Reflita agora, que podemos construir estes números a partir dos racionais finitos acrescentando à lista, descrita acima, após seu último algarismo. Até mesmo os infinitos periódicos, ao substituir uma parte do período por números sem repetição tornam-se irracionais. Diante disto, ainda há muito o que se explorar sobre os irracionais: assuntos que já são conhecidos dos matemáticos e não foram abordados neste trabalho, como aplicações práticas, definição por meio de frações contínuas, classificação em números algébricos ou transcendentes, bem como, temas que ainda aguardam por serem descobertos ou demonstrados, como a irracionalidade da constante de Euler, $\gamma = 0,577215664...$, que é igual ao

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-ln\, n\right).$$

Portanto, embora tenhamos visto muito sobre os irracionais, há muito ainda a aprender sobre eles. Mas, o uso das atividades pedagógicas os tornam mais atraentes ao estudo dos nossos alunos, trazendo uma forma lúdica de aprendizagem que incentiva e desperta o interesse para estes números.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Natália de Cavalho. **O número de ouro e construções geométricas.** 2013. 48 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVEA, Fernando Q. **A Matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e enstusiastas. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Textos Universitários).

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1997. (Coleção do Professor de Matemática).

MAOR, Eli. **e:** a história de um número. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

NIVEN, Ivan. **Números:** racionais e irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Iniciação Científica).

RIPOLL, Cydara et al. **Livro do professor de matemática na educação básica:** números inteiros. Rio de Janeiro: SBM, 2016a. (Coleção Matemática para o Ensino).

RIPOLL, Cydara et al. **Livro do professor de matemática na educação básica:** números naturais. Rio de Janeiro: SBM, 2016b. (Coleção Matemática para o Ensino).

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).