UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

IVAN SILVA SANTOS

# APLICAÇÕES DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA À CONSTRUÇÃO CIVIL

QUIXADÁ - CEARÁ
2018

IVAN SILVA SANTOS

# APLICAÇÕES DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA À CONSTRUÇÃO CIVIL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Luzeilton de Oliveira.

QUIXADÁ - CEARÁ

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Santos, Ivan Silva.
Aplicações de geometria e trigonometria à construção civil [recurso eletrônico] / Ivan Silva Santos. - 2018.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 71 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Quixadá, 2018.
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. João Luzeilton de Oliveira.

1. geometria. 2. trigonometria. 3. construção civil. I. Título.

IVAN SILVA SANTOS

# APLICAÇÕES DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA À CONSTRUÇÃO CIVIL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 05 de outubro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Luzeilton de Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Prof. Dr. Hermínio Borges Neto
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof.ª Dr.ª Maria Cristiane Magalhães Brandão
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Dedico a meus familiares e a todos que fizeram parte, direta ou indiretamente, de minha formação acadêmica.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela vida, e por me dar forças para sempre continuar na busca pelos meus objetivos.
Aos professores do PROFMAT na UECE/FECLESC, Ulisses Parente, Tony Melo, Jobson Oliveira e, em especial, João Luzeilton, orientador deste trabalho.
À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, responsável pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, por oportunizar a mim e a professores em todo o Brasil, a chance de ingressar e concluir um curso de mestrado, algo importantíssimo em nossa vida profissional e acadêmica.
À toda minha família e, em especial, a meus pais, Maria Lucilda e Jozivan Oliveira, meus irmãos Jonathan Silva e Pâmela Silva, e meu tio e professor, Jozinaldo Oliveira, pela apoio e incentivo irrestrito durante toda minha vida acadêmica.
À Natalina Almeida, minha esposa e companheira, pela compreensão e total apoio e incentivo durante este curso. E ao meu filho, Victor Gabriel, motivação para sempre seguir em frente e pelos melhores caminhos.
Ao meu amigo Marcelo Miranda, companheiro de trabalho e colega de turma, pela companhia durante as viagens para Quixadá e orientações para a formatação desta dissertação. E a todos os colegas da turma de mestrado, pelos desafios superados juntos, parceria e amizades.
À Daiane Santos, pelo auxílio e orientação durante o processo de afastamento de sala de aula.
À CAPES, pela concessão da bolsa de estudos, incentivo fundamental durante este curso de mestrado.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

(*Lobachevsky*).

## RESUMO

Este trabalho foi elaborado através de uma revisão da literatura sobre a utilização da Matemática pelos operários da Construção Civil, com destaque para Geometria e Trigonometria. Procurou-se evidenciar, no trabalho, os conhecimentos matemáticos adquiridos pelos pedreiros através de suas experiências cotidianas, que não estão presentes nos livros didáticos, mas são de fundamental importância no canteiro de obras. Para isso, é mostrado, no terceiro capítulo, as etapas para a construção de uma casa, relacionando-as à Geometria e a Trigonometria. Além disso, no mesmo capítulo, uma seção é dedicada às aplicações das propriedades da curva Catenária em construções. No desenvolvimento da dissertação, o primeiro capítulo apresenta um breve histórico da evolução e desenvolvimento da Geometria, enquanto o segundo aborda a Trigonometria, com os principais nomes que contribuíram para a sua consolidação. O terceiro traz as aplicações à Construção Civil e, as conclusões finais, são apresentadas no quarto capítulo.

**Palavras-chave**: Geometria. Trigonometria. Construção Civil. Matemática.

**ABSTRACT**

This work was elaborated through a literature review on the use of mathematics by construction workers, with emphasis on Geometry and Trigonometry. It was tried to evidence, in the work, the mathematical knowledge acquired by the masons through their daily experiences, that are not present in the didactic books, but are of fundamental importance in the construction site. For this, the steps in the construction of a house are shown in the third chapter, relating them to Geometry and Trigonometry. In addition, in the same chapter, a section is devoted to the applications of the properties of the Catenary curve in constructions. In the development of the dissertation, the first chapter presents a brief history of the evolution and development of Geometry, while the second chapter deals with Trigonometry, with the main names that contributed to its consolidation. The third brings the applications to Civil Construction and the final conclusions are presented in the fourth chapter.

**Keywords**: Geometry. Trigonometry. Construction. Mathematics.

## LISTA DE FIGURAS

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A Matemática, que aborda o estudo das quantidades, medidas, espaços e estatísticas, desenvolveu-se na Mesopotâmia, no Egito, na Grécia e no Oriente Médio, intensificando-se na Europa, no período do Renascimento.

Com os egípcios e o gregos, principalmente, surgiram e desenvolveram-se dois importantes ramos da Matemática: a Geometria, ligada às questões de forma, tamanho e posições relativas de figuras, e a Trigonometria, que trata das proporções entre os lados de um triângulo retângulo.

Atualmente, esses dois importantes conteúdos, têm aplicações em diversas áreas. Uma dessas áreas é a Construção Civil, que faz uso de diversos conceitos matemáticos em uma obra, como por exemplo, a construção de casas, pontes, edifícios, entre outras.

O presente trabalho foi elaborado com o objetivo de destacar a Matemática, principalmente, a Geometria e a Trigonometria, utilizadas pelos profissionais da Construção Civil, mostrando a sua relação com as etapas de construção de uma obra.

A escolha do tema partiu da observação do trabalho dos pedreiros na construção de casas onde moro. Independentemente do tamanho da obra, estão ali presentes diversos conceitos matemáticos, envolvendo Geometria, Trigonometria e Aritmética, e todos esses conceitos são utilizados pelos pedreiros, mesmo que sua formação seja desprovida dos conteúdos matemáticos formais, estudados nas escolas.

Nas leituras feitas para a elaboração deste trabalho, bem como nas observações do trabalho desempenhado pelos pedreiros, fica evidente que a Matemática conhecida por esses profissionais é fruto de suas experiências adquiridas durante anos de serviços prestados à construção civil. Isso mostra que a contextualização pode ser um bom auxílio para a aprendizagem matemática.

O trabalho foi dividido em quatro capítulos, onde destacamos: A evolução histórica da Geometria, descrevendo seu surgimento com os egípcios e seu desenvolvimento com os gregos, no primeiro capítulo; a evolução histórica da Trigonometria, enfatizando o seu surgimento ligado à Astronomia e seu desenvolvimento, passando pelos árabes até chegar à Europa, no segundo capítulo; as aplicações da Geometria e da Trigonometria à Construção Civil, relacionando os conceitos matemáticos com as etapas de construção de uma casa, e o uso das propriedades da catenária nas construções, no terceiro capítulo; e as conclusões finais, no quarto capítulo.

# 2 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA GEOMETRIA

Para o historiador grego, Heródoto (século V a.C.), as inundações periódicas das terras cultiváveis, às margens do Rio Nilo, levaram os egípcios a criarem técnicas de demarcação mais precisas e eficazes dessas terras, já que as águas sempre apagavam as marcações anteriores. O aprimoramento dessas técnicas, há aproximadamente 5 mil anos, teve como consequência direta, o desenvolvimento da ciência das formas e medidas, que viria a ser chamada de Geometria (do grego *geo* = terra e *metria* = medida), que significa medição de terra. Porém, o homem pré-histórico já apresentava noções de um sentido geométrico quando se preocupava em representar a naturza por meio de desenhos ou em dar forma aos objetos. Assim, se considerarmos a Geometria quanto à forma, sua origem é anterior à civilização egípcia.

Como se vê, a origem da Geometria é imprecisa, o que se confirma nas palavras do matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813): "Logo que houve homens na sociedade, propriedades, trocas e partilhas, é natural que se tenha procurado medir a extensão dos campos e determinar seu contorno."

Nesta seção, veremos como se deu o desenvolvimento da Geometria, procurando mostrar a contribuição dos povos antigos nessa evolução, passando também pelos matemáticos mais importantes da Idade Moderna.

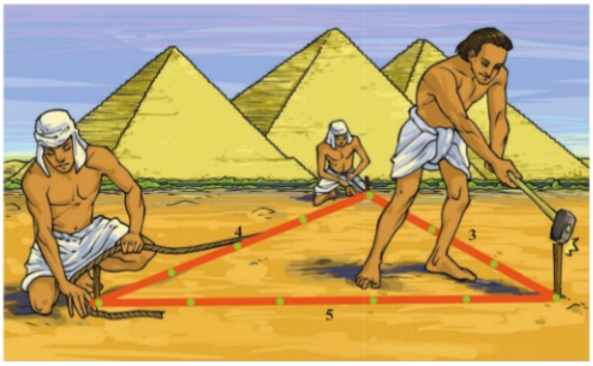
Esse desenvolvimento será detalhado nas subseções seguintes, começando pela Geometria no antigo Egito.

## 2.1 A GEOMETRIA NO ANTIGO EGITO

No antigo Egito, após o período de chuvas, era necessário remarcar os limites das propriedades, danificados pelas enchentes do rio Nilo. Esse trabalho era feito por agrimensores com uma corda esticada que reproduziam um triângulo retângulo e auxiliava na demarcação desses terrenos.

As civilizações antigas que povoavam as margens dos grandes rios (Nilo e Ganges) utilizavam formas geométricas para demarcação e medição das terras para o plantio, possiblitando calcular a área atingida pelas enchentes, o custo e os impostos relativos à área demarcada. Era uma exigência do faraó a demarcação dos terrenos, para que a cobrança de impostos fosse realizada. Nessas medições, os egípcios utilizavam-se da relação pitagórica para obter ângulos retos a partir dos triângulos retângulos, mesmo antes de Pitágoras demonstrar seu famoso teorema.

**Figura 1 – Uso do triângulo retângulo pelos egípcios**




Fonte: https://pt.slideshare.net/wildneicecilio/matemtica-7-s8aef volume4, acessado em 25/06/2018

Para solucionar o problema de traçar ângulos retos, os egípcios utilizavam uma simples corda, com 13 nós, distribuídos em intervalos iguais. Dobravam essa corda, formando um triângulo de lados 3, 4 e 5, amarrando-a pelas extremidades. O triângulo obtido é retângulo, com o ângulo reto oposto ao lado 5.

De um modo geral, dentro de uma perspectiva histórica, a necessidade de definição de unidades de área está relacionada às cheias do Rio Nilo, que inundavam o seu delta anualmente. Aquela região tinha as terras mais ricas em nutrientes existentes no mundo e, consequentemente, as terras mais férteis e lavráveis do planeta. Porém, devido às tais cheias, as marcas de delimitação das propriedades eram periodicamente destruídas. Em consequência disso, ocorriam constantes conflitos entre indivíduos e comunidades sobre o uso de terras não delimitadas.

**Figura 2 – Possível local do surgimento da Geometria**


Fonte: https://sala19.wordpress.com/2012/03/01/historia-do-egito-sintese/acessado em 16/05/2018

A construção de pirâmides também demonstra que os egípcios já dominavam a Geometria. Esses monumentos, de grande valor histórico e que resistem ao tempo, foram construídos sobre bases quadradas. E, para obter os ângulos retos, utilizavam-se da corda com 13 nós.

**Figura 3 – Pirâmides do Egito**

Fonte: http://www.geographicguide.com/africa/egypt.htm, acessado em 25/06/2018

Mesmo com todo esse domínio, por parte dos egípcios, a Geometria ainda se resumia a um conjunto de regras práticas, para obter resultados aproximados. Era uma ciência empírica, intuitiva, cujas experiências levaram o homem a criar as bases do que hoje chamamos Geometria.

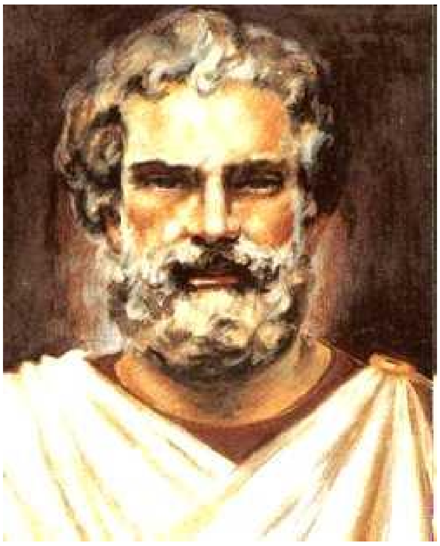
Os gregos e, em particular, Euclides, lhe darão estrutura de ciência e um método próprio, o axiomático, que será visto a seguir.

## 2.2 A GEOMETRIA NA ANTIGA GRÉCIA

No início, a Geometria era uma ciência experimental, e as medições eram baseadas em regras, sem nenhum conhecimento científico. Assim, os resultados obtidos eram aproximados e, sem um conhecimento matemático apropriado para fazer os cálculos necessários, era comum a oscilação entre erros e acertos.

Por volta de 600 a.C., filósofos gregos, entre os quais Tales de Mileto e Pitágoras, passaram a sistematizar os conhecimentos geométricos da época, estabelcendo a Geometria como área teórica e dedutiva. O trabalho de sistematização dos conceitos geométricos iniciada por Tales tem continuidade nos séculos seguintes através dos pitagóricos.

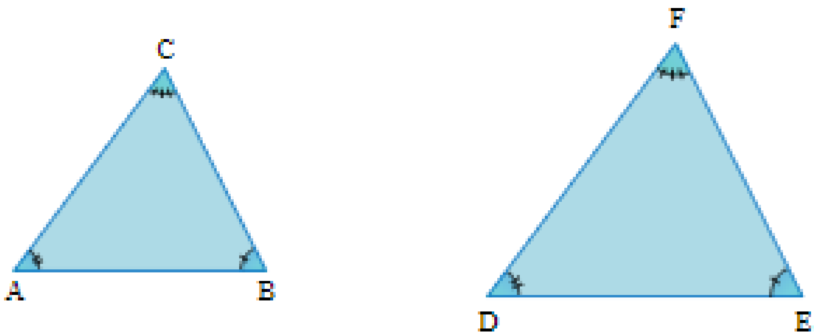
**Figura 4 – Tales de Mileto**



Fonte: https://www.estudopratico.com.br/biografia-do-filosofo-tales-de-mileto/ acessado em 16/05/2018

Tales de Mileto, considerado um dos sete "sábios da antiguidade", é o fundador da Geometria Demonstrativa. É dele o chamado *Teorema de Tales*. Das aplicações do Teorema de Tales, temos que, dois triângulos são semelhantes se as razões entre dois lados homólogos são iguais (Fig. 5) e, em todo triângulo isósceles, os dois ângulos da base são iguais (Fig. 6).

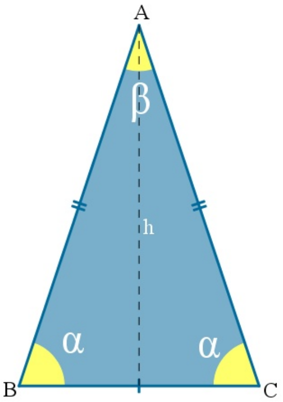
**Figura 5 – Triângulos semelhantes**




$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

Fonte: http://livrozilla.com/doc/716662/nuno-miguel-da-apresentação-pereira-semelhança-de-triângulos, acessado em 25/06/2018

**Figura 6 – Triângulo isósceles**

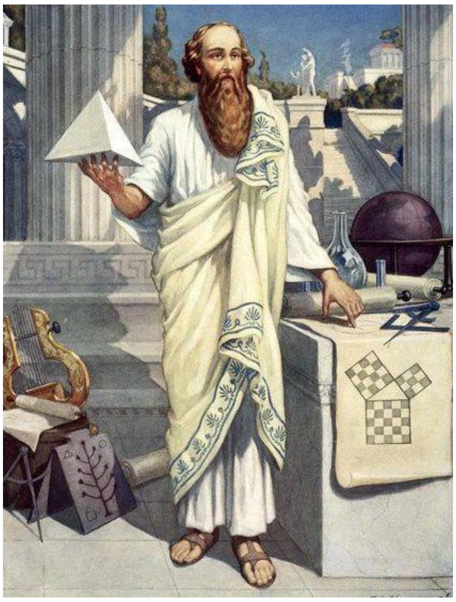



Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/tipos-de-triangulos/ acessado em 25/06/2018

Outra descoberta é a de que, conhecendo-se um lado e os dois ângulos adjacentes, conhece-se o triângulo, ou seja, constrói-se esse triângulo.

Pitágoras de Samos, filósofo grego e discípulo de Tales, e filho de um rico comerciante, viajou por vários países, e fundou a Escola Pitagórica, onde ensinava Religião, Filosofia, Política e Matemática. A Escola Pitagórica alcança grande sucesso em seus estudos matemáticos e geométricos.

**Figura 7 – Pitágoras de Samos**



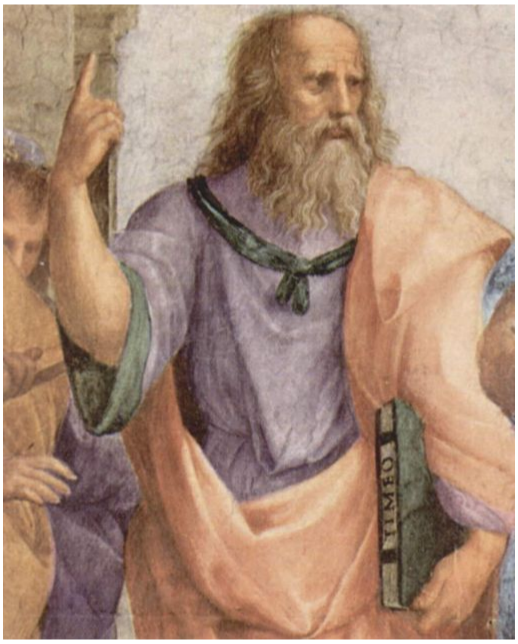
Fonte: http://www.vanialima.blog.br/2014/01/pitagoras-de-samos.html, acessado em 16/05/2018

O resultado mais marcante descoberto por Pitágoras e seus alunos é o chamado *Teorema de Pitágoras*, relação existente entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo: a hipotenusa, lado oposto ao ângulo reto, e catetos, os outros dois lados. Conheciam também os cinco sólidos geométricos regulares: Hexaedro, Tetraedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro. Acrescentam-se a estes, a esfera, que consideravam o mais perfeito dos sólidos.

Com os estudos aprofundados de Geometria, os conhecimentos do universo aumentavam com rapidez e, com isso, a escola pitagórica afirmava que a Terra era esférica e não plana. Surgiram diversas construções geométricas, e com os estudos realizados os cálculos de áreas, perímetros e volumes não eram tão difíceis de serem realizados.

Platão, interessado por Matemática, em especial pela Geometria, evidenciou em seus estudos a necessidade de demonstrações rigorosas e dedutíveis, e não somente de verificação experimental.

**Figura 8 – Platão**




Fonte: https://pt.lifeder.com/frases-de-platao/, acessado em 16/05/2018

Esta concepção foi exemplarmente demonstrada pelo discípulo da escola platônica, Euclides de Alexandria (325 a.C.- 285 a.C.), em seu trabalho intitulado *Os Elementos*, publicado por volta de 300 a.C., em 13 volumes. Essa obra foi traduzida para diversos idiomas, e por muito tempo foi a referência ao se tratar de Geometria.

**Figura 9 – Fragmento do livro II da obra *Os Elementos***

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides, acessado em 26/06/2018

Além de escrever *Os Elementos*, Euclides foi autor de alguns tratados, que cobriam outras áreas, como Óptica, Astronomia, Música e Mecânica. Porém, apenas algumas dessas obras sobreviveram até hoje, entre elas está *Os Elementos*.

Os 13 volumes ou capítulos que compõem essa obra não tratam apenas de Geometria, mas também de Teoria dos Números e Álgebra Elementar. Os seis primeiros volumes tratam de Geometria Plana, os três seguintes sobre Teoria dos Números, enquanto o volume X aborda Segmentos Incomensuráveis e, os três últimos, Geometria no Espaço. (FONTE: www.matematica.br/historia/euclides)

A obra *Os Elementos* apresenta, de maneira lógica, a maior parte do conhecimento matemático da época de Euclides. O desenvolvimento sistemático do assunto, partindo de alguns axiomas até atingir grandes resultados, e a consistência da abordagem ao longo da obra, possibilitou seu uso como livro didático por mais de 2000 anos. *Os Elementos* ainda tem influência sobre livros modernos de Geometria. Além diso, sua abordagem axiomática lógica e suas provas rigorosas, são reconhecidamente válidas até hoje. É provável que nenhuma obra, além da Bíblia, tenha tido maior número de edições e que nenhuma obra matemática tenha tido tanta influência.
(FONTE: https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides)

Devido a esse trabalho, Euclides é considerado o pai da Geometria na Grécia. Partindo de definições (noções primitivas) e postulados, Euclides construiu uma estrutura geométrica de forma rigorosa e lógica, dando origem ao que chamamos de Metódo Axiomático.

Portanto, a Geometria Euclidiana, assim denominada atualmente, em homenagem ao trabalho de Euclides, organizou todo o conhecimento geométrico existente até então, sistematizando-o a partir de princípios e definições e procedendo com seu desenvolvimento de forma puramente dedutiva. Dava-se início ao chamado Metódo Axiomático, que ao longo dos tempos e em diversos campos do saber sempre buscou organizar as idéias segundo os mesmos princípios. A subsubseção seguinte é dedicada à Geometria Euclidiana.

### 2.2.1 A geometria euclidiana

Na visão de Euclides, a Geometria era uma ciência dedutiva e que operava a partir de axiomas, que foram divididos em dois grupos: as noções comuns e os postulados.

As noções comuns eram consideradas como hipóteses aceitáveis a todas as ciências e foram definidas assim:

- Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais;
- Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais;
- Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais;
- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais; e,
- O todo é maior do que qualquer uma das partes.

Já os postulados eram considerados hipóteses próprias da Geometria. São eles:

- Pode-se traçar uma única reta ligando dois pontos;
- Pode-se prolongar de uma única maneira uma reta continuamente em uma linha reta;
- Pode-se traçar um círculo com centro qualquer e raio qualquer;
- Todos os ângulos retos são iguais; e,
- Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado, cuja soma é menor do que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado, cuja soma dos ângulos internos é menor do que dois retos.

Euclides introduziu os postulados ao escrever *Os Elementos*. Juntamente, com suas definições e axiomas, deduziu 465 proposições. Esta obra foi utilizada como manual em vários países por mais de 2000 anos.

Com os trabalhos de Euclides, a Geometria conseguiu uma notável sistematização, tornando-se um modelo de organização do conhecimento. A interpretação do trabalho euclidiano, na perspectiva do momento, sugere que Euclides teria compreendido plenamente o fato de que a estruturação do conhecimento geométrico deveria começar pela elaboração de uma linguagem, com o esclarecimento das noções utilizadas de modo intuitivo.

Assim, algumas idéias básicas para serem intuídas de maneira direta, foram aceitas como noções primitivas, e a partir delas foram elaboradas definições geométricas. Quanto à justificativa das proposições geométricas, passou-se a deduzir uma a partir das outras, utilizando-se das ligações de elementos de natureza lógica. A partir dos postulados geométricos, tendo apenas a lógica como conhecimento, foram construídos argumentos para justificar os teoremas.

**Figura 10 – Euclides de Alexandria**

Fonte: https://www.infoescola.com/biografias/euclides/acessado em 16/05/2018

Embora, Euclides não tivesse qualquer pretensão de natureza didática, seu trabalho é caracterizado como uma sistematização de um conhecimento acumulado de maneira empírica ao longo de vários milênios e é considerado o marco inicial tanto para a apresentação da Geometria em atividades didáticas, quanto em estudos sobre a evolução do conhecimento geométrico.

Arquimedes é outro nome influente na História da Geometria. Nasceu na cidade de Siracusa em 287 a.C. Suas invenções se basearam no que hoje chamamos de máquina simples: alavancas, roldanas que foram de grande influência na guerra. Em sua visita ao Egito inventou o "Parafuso de Arquimedes", sistema de bombeamento de água utilizado ainda nos dias de hoje. Visitou também Alexandria, onde conheceu os sucessores de Euclides, com os quais manteve correspondência científica e ao mesmo tempo compartilhava suas realizações.

As mais importantes contribuições de Arquimedes na Matemática foram feitas na área que hoje chamamos de Cálculo Integral. Em seu livro *A Esfera e o Cilindro*, encontramos expressões para a área da superfície esférica e para a área de um segmento parabólico.

**Figura 11 – Arquimedes de Siracusa**

Fonte: https://sites.google.com/site/greciaantigamatematicos/home/arquimedes, acessado em 16/05/2018

Nos seus trabalhos, percebe-se uma originalidade excessiva de raciocínio acompanhada de uma inquestionável habilidade de técnicas de cálculo e rigorosas demonstrações. Essa capacidade com cálculos diferenciou Arquimedes dos demais matemáticos de sua época. Para muitos autores, Arquimedes é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Na subseção seguinte, veremos uma nova Geometria, que usa entes algébricos para representar entes geométricos, a Geometria Analítica, criada por René Descartes.

## 2.3 DESCARTES E A GEOMETRIA ANALÍTICA

Os gregos solucionaram vários problemas matemáticos, muitos dos quais atualmente fazem parte da Álgebra, porém não avançaram o bastante, devido às suas deficiências em Matemática. Na primeira metade do século XVII, a Álgebra já se encontra bastante desenvolvida, e René Descartes já a utliza com grande êxito.

Em 1637, Descartes publicou o primeiro livro de Geometria Analítica, estabelecendo uma relação entre equações algébricas e figuras geométricas. Esse acontecimento abriu novos horizontes ao pensamento matemático e, também, permitiu o surgimento da Matemática que possiblitou a resolução de problemas antes sem solução.

**Figura 12 – René Descartes**

Fonte: https://www.infoescola.com/filosofos/rene-descartes/, acessado em 16/05/2018

A Geometria Analítica é o uso sistemático da correspondência natural entre os números reais e os pontos de uma reta, entre os pares de números reais e os pontos de um plano. Os problemas geométricos podem ser traduzidos como problemas algébricos e os cálculos com números podem ser interpretados geometricamente.

De forma separada, mas na mesma época, Pierre de Fermat também contribuiu para o desenvolvimento da Geometria Analítica, escrevendo um pequeno texto intitulado *"Introdução aos Lugares Planos e Sólidos"*, publicado após a sua morte.

A Geometria Analítica tem como base um sistema de eixos ortogonais, característica marcante atual. Porém, as contribuições de Descartes e Fermat não usavam esse sistema, mas sabiam da idéia central de associar equações a curvas e superfícies. Ainda hoje, no nosso dia-a-dia, a utilização desse sistema consiste em representar um ponto $P$ do espaço ou do plano através de suas projeções em segmentos de reta orientados e tri-ortogonais, que se cruzam em um ponto comum (origem) pertencente a um gráfico representacional. Dessa forma, associamos a um ponto $P$ um único conjunto ordenado de números reais $(x, y, z)$ em coordenadas cartesianas.

O tratamento de problemas de Geometria através de equações algébricas, inovação atribuída a Descartes, é um novo metódo que garantia a superioridade dos filósofos modernos sobre os antigos. Com efeito, são vários os adeptos a trilhar esse novo caminho, Fermat, Torricelli e outros, na primeira metade do século XVII.

Na próxima subseção, veremos como se consolidou e se desenvolveu a Geometria.

## 2.4 CONSOLIDAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA

Galileu, Descartes e Fermat, conhecedores da obra dos gregos, retomaram muitos dos problemas não resolvidos, incorporando gradualmente as novas ferramentas e abandonando progressivamente o ideal científico grego. Fermat, introduziu a linguagem algébrica, Descartes as coordenadas e o plano para localizar os pontos e as curvas e, Cavalieri e Torricelli, redescobriram os métodos infinitesimais, criando as bases da Geometria Analítica.

Uma das dificuldades da Geometria Cartesiana era que, embora, fosse possível descrever as curvas fechadas através de equações algébricas, estas se limitavam a expressões com número de termos limitados. Porém, sabia-se que o cálculo de áreas destas figuras não podia ser expresso utlizando apenas um número finito de termos. Como solução, os matemáticos do século XVII recorreram a generalizações que hoje se tratam de uma série de termos infinitos. Outra referência utilizada e difundida até hoje é o Cálculo Diferencial e Integral, desenvolvido por Isaac Newton, que permitia por métodos matemáticos o cálculo da área de diversas figuras geométricas.

No século XVIII, Lagrange deu sua contribuição ao promover a aplicação da Álgebra a problemas de Geometria Elementar, com o trabalho sobre soluções analíticas de problemas relacionados à área de um triângulo e ao volume de um tetradro, expressos por determinantes de terceira e quarta ordem. O Cálculo, apoiado pela Geometria Analítica, foi o maior instrumento matemático revelado no século XVIII.

Já no século XIX, três matemáticos - Gauss (1797 - 1855), Lobachevsky (1773 - 1856) e Janós Bolyai (1802 - 1860) - imaginavam um substituto para o postulado das paralelas de Euclides. No mesmo século, Riemann (1826 - 1866), demonstra ser possível uma outra Geometria, não euclidiana, denominada Geometria Riemanniana ou Elíptica. As teorias da relatividade de Albert Einstein (1879 - 1955) baseiam-se em uma Geometria Riemanniana.

A nova Geometria constitui-se da introdução de novas curvas e seu uso se dá tanto no estudo de problemas determinados, quanto na resolução de equações de grau mais elevado e de lugares geométricos, traduzidos por equações indeterminadas.

A evolução histórica da Geometria nos mostra que essa área é mais do que um amontoado de figuras, postulados e teoremas, e sim uma necessidade que se incorpora e organiza nossa relação com o mundo real. Hoje a Geometria está presente na construção civil, nos esportes, na navegação, na informática, nos meios de comunicação e em diversas áreas do conhecimento que atuam em nossa vida.

## 2.5 CONCLUSÃO

Nesta seção, apresentamos um breve relato da evolução histórica da Geometria, destacando suas origens, no Antigo Egito, bem como a contribuição de outros povos da antiguidade, até sua consolidação e desenvolvimento, com os matemáticos modernos da Europa.

A próxima seção é dedicado à Trigonometria, onde será abordada, também, sua evolução histórica.

# 3 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA TRIGONOMETRIA

A palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: *tri* = três, *gonos* = ângulos e *metrein* = medir. Dessa forma, Trigonometria significa medida de triângulos.

As origens da Trigonometria são incertas, mas seu estudo teve grande ligação com a Astronomia, sendo que algumas informações sobre esse estudo foram transmitidas aos gregos pelos astrônomos babilônios, por volta dos séculos IV e V a.C..

A Trigonometria pode ser considerada uma criação da Matemática grega. Seu surgimento está ligado às necessidades da Astronomia, como prever efemérides celestes, calcular o tempo, e para ser utilizada na Navegação e na Geografia.

Nesta seção, veremos como se deu o desenvolvimento da Trigonometria ao longo dos tempos, destacando os gregos e a contribuição de outros povos para a consolidação dessa importante área da Matemática.

O desenvolvimento da Trigonometria é detalhado nas próximas subseções, citando, inicialmente, os egípcios e os babilônios.

## 3.1 A TRIGONOMETRIA NO EGITO E NA BABILÔNIA

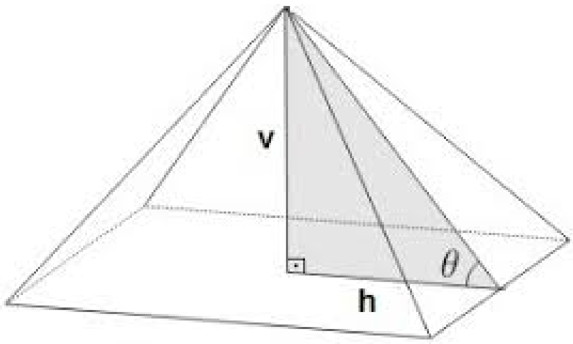
Os egípcios foram um dos primeiros a desenvolver e usar conhecimentos rudimentares de Trigonometria, fato que pode ser observado no Papiro Rhind, datado de 1650 a.C., aproximadamente. O problema de número 56 do papiro contém rudimentos de Trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes.

**Figura 13 – Papiro Rhind**

Fonte: http://www.matematica.br/historia/prhind.html, acessado em 16/05/2018

Dos 84 problemas reunidos no Papiro Rhind, quatro deles tratam do *seqt* de um ângulo. O conceito de *seqt* foi utilizado pelos egípcios na construção das pirâmides, cuja inclinação das faces em relação à base deveria ser constante. Para isso, calculavam a razão entre o afastamento horizontal ($h$) e a elevação vertical ($v$), em relação à projeção do vértice da pirâmide na base.

**Figura 14 – O seqt egípcio**

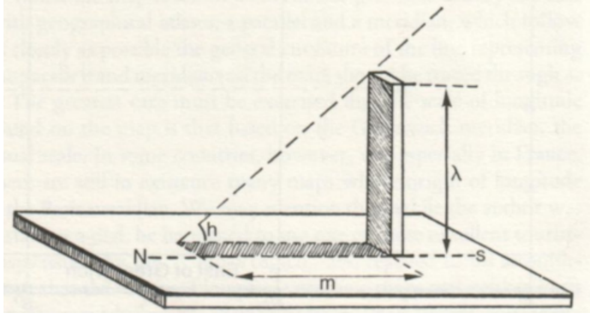



Fonte: https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/5407/1/victor hugovassallo.pdf, acessado em 26/06/2018

Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e foi essa preocupação que levou os egípcios a introduzir o conceito de *seqt* que, atualmente, é equivalente ao cálculo da cotangente de um ângulo, no triângulo retângulo.

Já a função tangente surgiu da ideia de associar sombras projetadas pela incidência do sol sobre uma vara vertical. Por volta de 1500 a.C., os egípcios começaram a fazer uso do relógio de sol, que associava o comprimento das sombras a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com as horas do dia.

**Figura 15 – Esquema do relógio de sol egípcio**




Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/4257724/, acessado em 26/06/2018

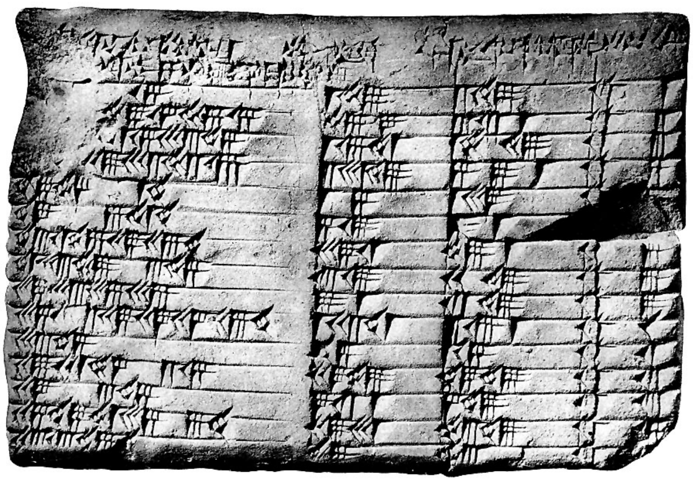
Os primeiros vestígios de Trigonometria foram encontrados também na Babilônia, onde era grande o interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas relações com o calendário e as épocas do plantio.

Tidos como excelentes astronômos, os babilônios buscavam desenvolver ferramentas e cálculos para fazer observações, como registrar o tempo para o desenvolvimento da agricultura. Com isso, estabeleceram um calendário lunar com base no nascimento e desaparecimento da lua no horizonte a oeste e leste, analisaram o movimento dos planetas envolvendo fenômenos como eclipses lunares, e até localizaram constelações, permitindo a orgnização de um calendário astrológico.

Pouco antes de 300 a.C., introduziram a divisão da circunferência em 360 partes iguais, adotada pelos gregos dois séculos depois, juntamente com a divisão sexagesimal em graus, minutos e segundos, para exprimir comprimentos de arcos e cordas em uma circunferência.

Outro notável feito matemático dos babilônios é a tábua *Plimpton 322*, escrita no período babilônio antigo (aproximadamente entre 1900 a.C. e 1600 a.C.). Nessa tábua parece evidente que eles tinham conhecimento da representação geral dos ternos pitágoricos primitivos. Ela apresenta uma tábua de secantes para ângulos de 45 a 31 graus, formada por meio de triângulos retângulos de lados inteiros, em que se verifica uma variação em saltos regulares na função em vez do ângulo correspondente.

**Figura 16 – Tabela Plimpton 322**



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322, acessado em 16/05/2018

Na próxima subseção, abordaremos o surgimento e desenvolvimento da Trigonometria na Grécia, destacando alguns sábios e suas contribuições à Matemática.

## 3.2 A TRIGONOMETRIA NA GRÉCIA

No mundo Ocidental, o saber dos egípcios foi seguido pelos gregos e não tardou para que eles os superassem. Na Grécia, a Matemática teve um grande desenvolvimento, passando a civilização grega a servir de disseminadora desses saberes matemáticos a todas as outras nações.

O desenvolvimento da Trigonometria na Grécia, ao longo do tempo, foi gradual e esteve intimamente ligado ao desenvolvimento da Geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios que se dedicaram ao estudo dos triângulos e à Astronomia, permitindo assim que os conhecimentos trigonométricos se consolidassem. Entre eles podemos destacar Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Eratóstenes de Cirene, Hiparco de Nicéia e Cláudio Ptolomeu de Alexandria.

Aristarco (310 a.C. - 230 a.C.) e Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) estudaram círculos e retas, aplicando esses resultados à Astronomia. Porém, não conseguiram chegar a uma trigonometria sistemática. Nesse período, o interesse dos gregos era calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre, bem como o raio da Terra. Contemporâneo de Aristarco e Arquimedes, foi Eratóstenes de Cirene (276 a.C. - 196 a.C.) que produziu a mais notável medida da antiguidade para a circunferência da Terra, usando semelhanças de triângulos e razões trigonométricas.

**Figura 17 – Eratóstenes de Cirene**

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Eratóstenes, acessado em 16/05/2018

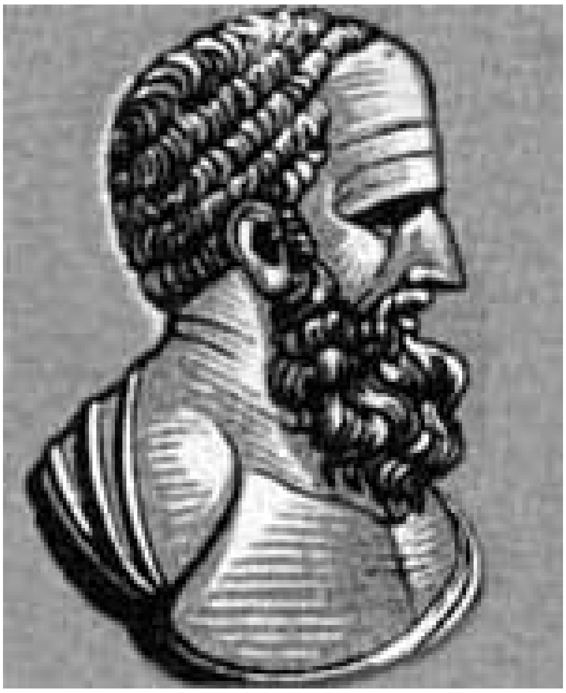
Essa idéia o levou a perceber a necessidade de estabelecer relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas, fazendo com que o conhecimento de ângulo e como medi-lo fosse determinante para a realização de seu trabalho na época.

Nas duas próximas subsubseções, vamos destacar as contribuiçoes de Hiparco e Ptolomeu.

### 3.2.1 A trigonometria de Hiparco

Na busca por essa sistematização, merece destaque os estudos do astrônomo, construtor, cartógrafo e matemático, Hiparco de Nicéia (180 a.C. - 125 a.C.), o qual associou a corda de um arco ao ângulo central correspondente em um círculo de raio fixo.

**Figura 18 – Hiparco de Nicéia**



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Hiparco, acessado em 16/05/2018

A Trigonometria, até então, baseava-se no estudo da relação entre o arco arbitrário e sua corda. O cálculo do comprimento de cordas foi feito por Hiparco. Para efetuar esse cálculo, usava a metade do comprimento da corda, dividida pelo raio do círculo.

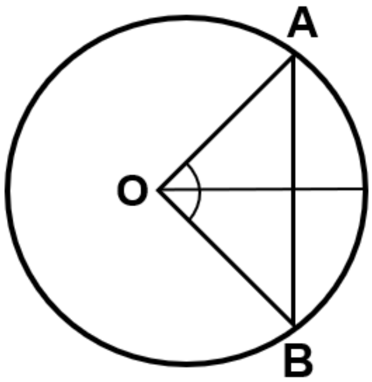
Na Fig. 19, temos que $\angle AOB = \alpha$, $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ e $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{AB}}{2r}$. Para um círculo de raio unitário, o comprimento da corda $\overline{AB}$, subtendida por um ângulo $\alpha$, é

$$\overline{AB} = 2 \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

conforme figura e cálculo apresentados anteriormente.

Fortemente influenciado pela Matemática babilônica, acreditava-se que a melhor base de contagem era a 60. Atribui-se a Hiparco a nomenclatura "arco de 1 grau" para cada divisão da circunferência e a divisão de cada arco de 1 grau em 60 partes iguais, obtendo o arco de um minuto.

**Figura 19 – Corda de um arco e ângulo central correspondente**




Fonte: Próprio Autor

Hiparco escreveu, na segunda metade do século II a.C., um tratado de doze livros, em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas de uma série de ângulos de 0º a 180º. Ele observou que, num dado círculo, a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180º para 0º. Então associou a cada corda de um arco o ângulo central correspondente, o que representou um grande avanço na Trigonometria. Por esse feito, é lhe dado o título de "Pai da Trigonometria".

Não há dados que comprovem como Hiparco construiu sua tabela de cordas, pois muitos registros se perderam. Entretanto, as teorias de Hiparco contribuíram grandemente para a realização da mais importante obra da Trigonometria da antiguidade, o *Almagesto*, de Claudio Ptolomeu, que trataremos a seguir.

### 3.2.2 Ptolomeu e o almagesto

Depois de um longo intervalo de quase 300 anos sem que progresso algum acontecesse, não só na Astronomia, mas também na Ciência, apareceu aquele que seria o último grande astrônomo de Alexandria, Claudio Ptolomeu de Alexandria (85 d.C. - 165 d.C.).

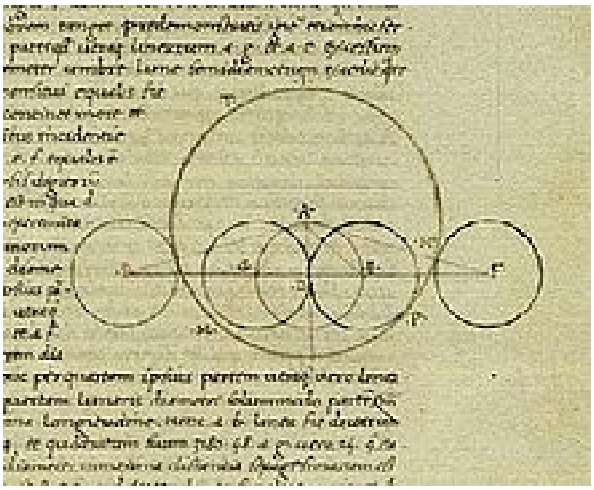
Nessa época, Ptolomeu fez observações em Alexandria e, com base nos trabalhos de Hiparco, sistematizou e compilou uma série de conhecimentos bastante difundidos nesse período. Essa sistematização se tornou a mais importante obra da Trigonometria da antiguidade a "*Syntaxis Mathematica*", composta de treze volumes. Ela ficou conhecida como *Almagesto* que, em árabe, significa "*A Maior*", pois os tradutores árabes a consideravam a maior obra existente na época.

**Figura 20 – Claudio Ptolomeu de Alexandria**

Fonte: http://www.explicatorium.com/biografias/claudio-ptolomeu.html, acessado em 16/05/2018

O *Almagesto* é um marco, um modelo de Astronomia, que perdurou até Copérnico, no século XVI. Em sua obra, Ptolomeu faz descrições matemáticas completas sobre a posição dos planetas através do modelo grego, com parâmetros para vários movimentos do sol, da lua e dos planetas, distribuídos em 13 volumes. O primeiro dos 13 livros traz informações matemáticas básicas, indispensáveis na época, à compreensão de fenômenos celestes, como por exemplo, as proposições sobre Geometria Esférica, estudadas por Menelau de Alexandria, os métodos para calcular o comprimento das cordas, entre outras. Os demais livros foram dedicados à Astronomia.

**Figura 21 – Tradução em latim do Almagesto**

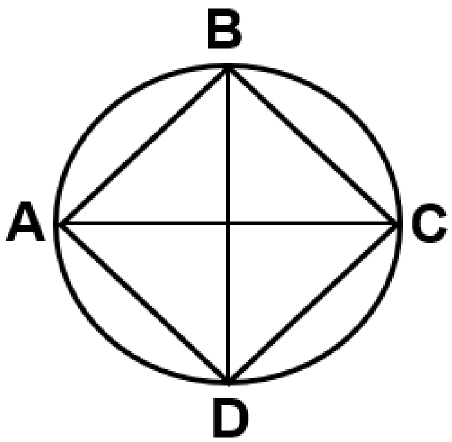


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Almagesto, acessado em 16/05/2018

Ptolomeu desenvolveu o estudo da Trigonometria nos capítulos X e XI do primeiro livro do *Almagesto*. O capítulo II, consiste numa tabela de cordas e o capítulo X explica como tal tabela pode ser calculada. O *Almagesto* contém uma tabela de cordas mais completa que a de Hiparco, com ângulos de meio em meio grau, e faz uso da base 60, com a circunferência dividida em 360 graus e o raio em 60 partes e frações sexagemais, não só para expressar ângulos, e sim, para qualquer tipo de arco, exceção dos cálculos com medida de tempo.

Também, temos no *Almagesto* o resultado que passou a ser conhecido como Teorema de Ptolomeu: “Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais”. A partir desse resultado, e operando com cordas de arcos, Ptolomeu chegou a um resultado equivalente das fórmulas de seno da soma e da diferença de dois arcos.

**Figura 22 – Teorema de Ptolomeu**




$$\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}}$$

Fonte: Próprio Autor

A seguir, falaremos da contribuição dos hindus e dos árabes à Trigonometria.

## 3.3 A TRIGONOMETRIA DOS HINDUS E DOS ÁRABES

Com as transformações políticas e econômicas ocorridas na Europa Ocidental, causadas pelas invasões dos bárbaros germânicos e com a queda do Império Romano no início de nossa era, outros povos ganharam destaque no cenário intelectual: os hindus e os árabes.

Nas próximas subsubseções, daremos destaque à Trigonometria dos hindus e dos árabes.

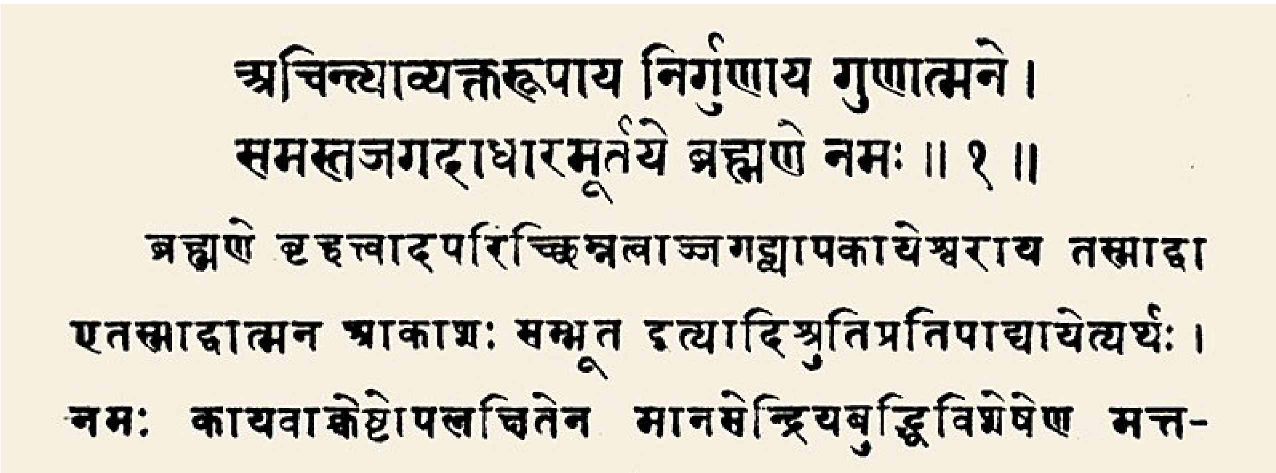
### 3.3.1 A trigonometria dos hindus

No século IV de nossa era, o centro da cultura se deslocou para a Índia, que revolucionou a Trigonometria com um conjunto de textos denominado *Siddhanta*, que significa sistemas de Astronomia. Foi com os hindus, influenciados pelo conhecimento trigonométrico grego, que surgiu a mais importante contribuição para a Trigonometria, a criação da precursora da função trigonométrica moderna, a função seno.

Mesmo com poucas explicações e quase nenhuma prova sobre Matemática e regras astronômicas, o *Siddhanta* traz uma tabela de meia corda, com base na tabela de Ptolomeu. Mesmo contendo uma nítida influência grega, pois os hindus adquiriram seus conhecimentos sobre Trigonometria em Alexandria, o material tomou nova forma. Os hindus, juntamente com os árabes, introduziram uma nova versão equivalente à da função seno, em substituição à antiga tabela grega de cordas, apresentada por Ptolomeu.

Dessa obra, o que chegou até nós foi o *Surya Siddhanta*, que quer dizer sistemas do sol. Sua importância se dá na abertura de novas perspectivas para a Trigonometria.

**Figura 23 – Verso do 1º capítulo do Surya Siddhanta**

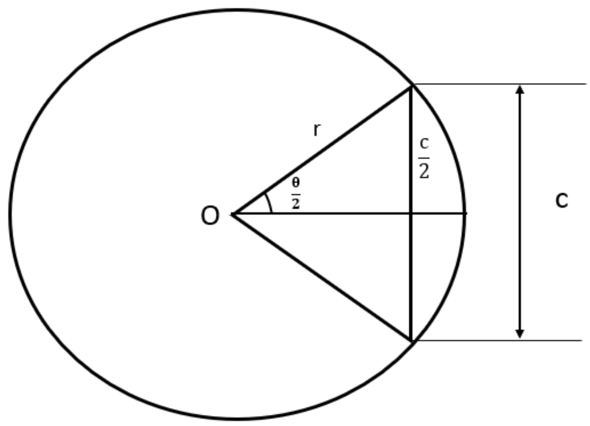

अचिन्त्याव्यक्तरूपाय निर्गुणाय गुणात्मने ।
समस्तजगदाधारमूर्तये ब्रह्मणे नमः ॥ १ ॥
ब्रह्मणे बृहत्त्वादपरिच्छिन्नत्वाज्जगद्व्यापकायेश्वराय तस्माद्वा
एतस्मादात्मन आकाशः सम्भूत इत्यादिश्रुतिप्रतिपाद्यायेत्यर्थः ।
नमः कायवाक्चेष्टोपलक्षितेन मानसेन्द्रियबुद्धिविशेषेण मत्त-

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Surya_Siddhanta, acessado em 28/06/2018

Nas aplicações da “ função ”corda à Astronomia, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. No *Surya*, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamado por eles de *Jyva*. Isto possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência, e a definição de *Jyva* como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa desse triângulo.

Observe que o jyva dá origem ao que conhecemos atualmente como o seno de um ângulo agudo do triângulo retângulo. Com os hindus, as principais funções trigonométricas foram introduzidas e os métodos de tabulação se aperfeiçoaram, particularmente os de interpolação quadrática e linear.

**Figura 24 – O jyva hindu**




Fonte: Próprio Autor

Por volta de 500 d.C., o matemático hindu, Aryabhata, já calculava semicordas e usava também o sistema decimal, desenvolvido aproximadamente em 600 d.C.. Quando os hindus introduziram os conceitos de semicorda e de seno, conseguiram demonstrar algumas identidades. Uma dessa identidades, encontrada na obra *Pancha-Siddhantika* (Tratado sobre os Cinco Cânones Astronômicos), do matemático indiano Varahamiria (505 - 587), é o equivalente verbal de $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$.

Após os hindus, foram os árabes e os persas a darem sua contribuição à trigonometria, contribuição esta destacada na próxima subsubseção.

### 3.3.2 A trigonometria dos árabes

Mesmo não tendo um estudo voltado exclusivamente para a Matemática, os árabes possuiam grandiosas técnicas e recursos matemáticos e, consequentemente, uma grande Astronomia. Os matemáticos árabes consideravam-se primeiro astrônomos, ou seja, a astronomia era seu foco.

O Império Árabe, além da expansão econômica, viveu extraordinário avanço nos diversos campos das artes e das ciências, do fim do século VIII até o século XI, com destaque ao século IX. Nesse período, ocorreu uma competição entre os sistemas de cordas de Ptolomeu, de origem grega, e as tabelas indianas de senos, vencedoras dessa competição. Quase toda a Trigonometria árabe se baseou na função seno, e foi através dos árabes, não diretamente dos hindus, que a Trigonometria do seno chegou à Europa.

**Figura 25 – Império árabe e sua expansão**


Fonte: http://hstoryfoco.blogspot.com/p/as-origens-do-califado-e-o-imperio.html, acessado em 29/06/2018

Podemos dizer que a influência árabe começou com a fundação da Escola de Bagdá, no século IX, e um de seus maiores destaques foi o princípe da Síria, Mohamed-ben-Geber, conhecido como Al Battani (850 - 929), chamado o Ptolomeu de Bagdá. Seus estudos ficaram entre o *Almagesto* e o *Siddhanta*, e foi por sua influência que a Trigonometria foi adotada pelos árabes, principalmente, a partir de sua genial ideia de introduzir o círculo de raio unitário e, com isso, demonstrar que a razão *jyva* é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente, do valor da medida da hipotenusa. Num livro chamado *"Sobre o Movimento das Estrelas"*, Al Battani deu a fórmula em que aparecem a função seno e seno versor. O seno versor de um ângulo, que significa o seno do ângulo complementar, posteriormente seria denominado função cosseno.

**Figura 26 – Al Battani, o gênio trigonométrico**

Fonte: http://aboutislam.net/science/science-tech/al-battani-trigonometrical-genius/, acessado em 29/06/2018

Depois de Al Battani, merece destaque entre os matemáticos árabes, Abu'I Wêfa, que, em 980, iniciou uma sistematização de provas e teoremas da Trigonometria. Construiu uma tabela de senos para ângulos que se diferiam por $\frac{1}{4}$ de grau, foi um dos que fornceu a tabela das tangentes e usou as seis funções trigonométricas comuns, como também estabeleceu relações entre elas. Apenas no século XV, essas tabelas foram impressas por outros estudiosos. Além disso, provou teoremas, como as fórmulas para ângulo duplo ou metade.

Destacamos, também, o astrônomo persa Naser ed-dên al-Tusi, autor, em 1250, do primeiro trabalho no qual a Trigonometria apareceu como ciência própria, desvinculada da Astronomia. Isto seria retomado na Europa, no século XV, quando Regiomontanus estabeleceu a Trigonometria como um ramo da Matemática.

Em suma, os árabes contribuíram grandiosamente para a Trigonometria, tanto que estabeleceram conexões com a Álgebra, solucionando o problema do cálculo de seno de ângulos arbitrários, através de resolução de equações cúbicas, tornando a Trigonometria árabe cada vez mais sofisticada.

A subseção seguinte é dedicada a um rápido estudo sobre a Trigonometria na Europa.

## 3.4 A TRIGONOMETRIA NA EUROPA

Com o declínio do Império Árabe, por volta de 1436, que simboliza o fim do período medieval, os estudos de Trigonometria difundiram-se em toda a Europa. Em contato com a Trigonometria árabe, os europeus desenvolveram uma Trigonometria que tornou-se objeto de si mesma, como uma ciência autônoma em relação à Astronomia, fato iniciado através da tradução e publicação de manuscritos clássicos.

No śeculo XIV, Johann Purbach (1423 - 1461) (Fig. 27), na Inglaterra, retomou a obra de Ptolomeu e computou uma nova tábua de senos, muito difundida entre os estudiosos europeus. Nesta época, o sistema hindu-arábico, sistema decimal, estava se propagando pela Europa, tanto que Purbach já utilizava esse sistema para calcular suas tábuas trigonométricas.

Discípulo de Purbach, Johannes Muller (1436 - 1476), mais conhecido como Regiomontanus (Fig. 28), considerado um dos maiores matemáticos do século XV, tomou para si a tarefa de completar a traduçao do *Almagesto* de Ptolomeu. Traduziu também, do grego, trabalhos de Apolônio, Herão e Arquimedes. Produziu um trabalho de grande importância para a época, um tratado em cinco livros intitulado *Tratado sobre Triângulos*. Nesse trabalho, apresenta-se uma Trigonometria mais completa, além de determinar questões envolvendo Geometria Plana e Esférica. Construiu-se novas tábuas trigonométricas e aprimorou as de seno de Purbach, como também inseriu na Trigonometria dos europeus a utilização das tangentes. A partir desse trabalho, a Trigonometria foi definida como uma ciência independente da Astronomia.

**Figura 27 – Johann Purbach**

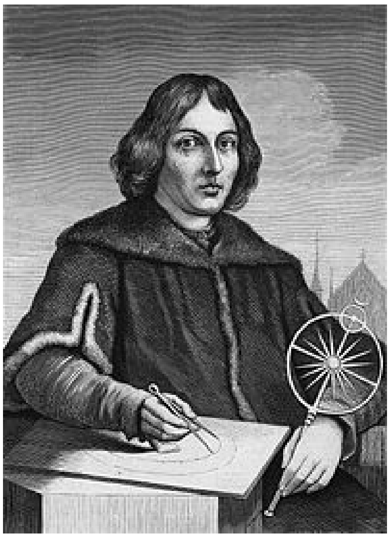
Fonte: https://pms.wikipedia.org/wiki/Georg_von_Peuerbach, acessado em 28/06/2018

**Figura 28 – Regiomontanus**

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/biografia/regiomontanus.htm, acessado em 16/05/2018

Em seguida, por volta de 1520, Copérnico (1473 - 1543) completou alguns trabalhos de Regiomontanus. Deixou também várias obras, entre elas *"De revolutionibus arbitum coelestium"*, publicado em 1543, que contém seções substanciais sobre Trigonometria, que haviam sido publicadas em separado no ano anterior sob o título *"De Lateribus et Anglis Triangulorum"*.

**Figura 29 – Nicolau Copérnico**

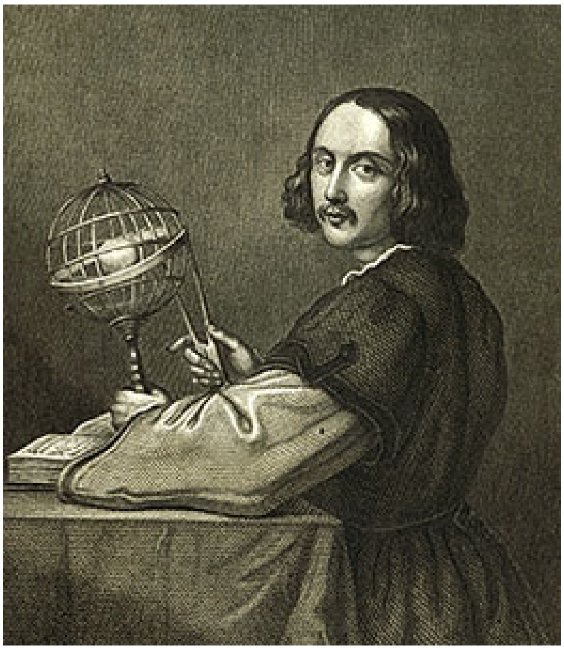


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Nicolau_Copernico, acessado em 16/05/2018

Um século depois, com Georg Joachim Rhaeticus (1514 - 1576) (Fig. 30), as tábuas de Regiomontanus foram recalculadas com maior exatidão, tanto que foram aumentadas com a precisão de onze casas decimais para cada valor. Além disso, calculou os senos, cossenos, tangentes e secantes, de minuto em minuto, para os arcos do primeiro quadrante. Em seu trabalho *Canon Doctrinae Triangulorum*, todas as seis funções trigonométricas aparecem pela primeira vez, definidas como funções do ângulo em vez de funções do arco, isto é, ilustradas em termos de razões definidas no triângulo retângulo, sem fazer menção a um círculo dado.

Já no século XVI, François Viète (1540 - 1603) (Fig. 31) foi de grande importância para a Trigonometria, por tratá-la de uma maneira analítica, em 1580. François Viète foi o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais, o que representou grande progresso no campo da Álgebra. Também construiu tábuas trigonométricas e calculou o seno de 1° com treze casas decimais. Viète obteve, ainda, um avanço no cálculo de medidas de lados e ângulos nos triângulos planos e esféricos com a ajuda das seis funções trigonométricas, além de decompor os triângulos oblíquos em triângulos retângulos, para que se pudesse determinar todas as medidas dos seus lados e ângulos. Isto está em sua obra *Canon Mathematicus*.

**Figura 30 – Georg Joachim Rhaeticus**



Fonte: http://warehouse13.wikia.com/wiki/Rheticus%27s_Compass, acessado em 28/06/2018

**Figura 31 – François Viète**


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/François_Viète, acessado em 28/06/2018

No livro *Variorum de Rebus Mathematicus*, aparece um equivalente da nossa lei das tangentes

$$\frac{tg(A+B)}{tg(A-B)} = \frac{a+b}{a-b},$$

com $A$ e $B$ ângulos, e $a$ e $b$ os arcos respectivos. Na verdade, esta relação só foi publicada pelo matemático dinamarquês, Thomas Fincke (1561 - 1656), no seu *Geometria Rotundi*, em Basel, 1583, apesar de ser devida à Viète.

**Figura 32 – Thomas Fincke**

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Thomas_Fincke, acessado em 29/06/2018

Em sua obra, Thomas Fincke, apresenta os nomes modernos das funções trigonométricas tangente e secante. O nome tangente deve-se talvez ao fato de que a sombra projetada por um círculo esteja situada ao longo da tangente desse círculo. Em 1620, Edmund Gunter estabeleceu o equivalente latino de *"cotangente de A"* para o *"complemente tangente of A"*, que significa "tangente complementar de $A$". Em 1674, Jonas Moore criou a oservação *cot*, para co-tangente.

A palavra Trigonometria aparece pela primeira vez em 1595, como título de um tratado publicado pelo matemático Bartholomeo Pitiscus (1561 - 1613), no qual ele corrige as tábuas de Rhaeticus e moderniza o tratamento do assunto.

Na próxima subseção, veremos como a Trigonometria se consolida, com outras aplicações e notações modernas.

## 3.5 A CONSOLIDAÇÃO DA TRIGONOMETRIA

Vários outros matemáticos contribuíram para a consolidação da Trigonometria como ramo da Matemática, independente da Astronomia. Jonh Wallis (1616 - 1703) expressou fórmulas usando equações em vez de proproções e trabalhou com séries infinitas. Sir Isaac Newton (1642 - 1727), também trabalhou com séries infinitas, tendo expandido $arcsenx$ em séries e, por reversão, deduzindo a série para $sen\ x$. Além disso, comunicou a Leibniz a fórmula geral para $sen(nx)$ e $cos(nx)$, abrindo a perspectiva para $sen\ x$ e $cos\ x$ surgirem como números e não como grandezas, fato esse alcançado no século XVIII, com Kastner, em 1758. Kastner foi o primeiro matemático a definir funções trigonométricas de números puros. Em 1710, a periodicidade das funções trigonométricas foi comprovada por Thomas Fantet de Lagny (1660 - 1734), matemático francês que, além dessa comprovação, ficou conhecido por suas contribuições à Matemática Computacional e pelo cálculo de $\pi$ com 120 casas decimais.

Dessa forma, percebemos que a Trigonometria ao longo dos tempos foi tomando o formato conhecido nos dias atuais. Contudo, isso só ocorreu com Leonhard Euler (1707 - 1783), quando ele passa a considerar a circunferência trigonométrica de raio unitário e define funções aplicadas a um número, e não mais a um ângulo, como era feito até então. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal, no século XVII, e culminou com Euler, no século XVIII.

**Figura 33 – Leonhard Euler**

Fonte: http://fermatslasttheorem.blogspot.com.br/2005/05/leonhard-euler.html, acessado em 16/05/2018

A criação da função $\varphi$, conhecida como função de Euler, é o ponto máximo dessa transição. A função de Euler permitiu que a Análise Matemática e diversas aplicações às ciências físicas abrissem as portas para a Trigonometria, tanto que Euler escreveu um livro, chamado *Introductio in Analysin Infinitorium*, considerada a obra chave da Análise Matemática, a qual deu um tratamento às funções trigonométricas do ponto de vista analítico.

Nessa função, cada número é associado a um ponto de um círculo $C$, unitário e centrado na origem do plano cartesiano. Através dessa função, é possível descobrir o $sen(x)$ e o $cos(x)$, com $x \in \mathbb{R}$. Seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ e o contradomínio é o círculo $C$. A função $\varphi : \mathbb{R} \to C$ associa cada $x \in \mathbb{R}$ a um único ponto $P(a, b) \in C$ se, e somente se, $a^2 + b^2 = 1$.

A representação das relações trigonométricas na circunferência de raio unitário levou os matemáticos a estudarem seu comportamento, esboçando-as como funções, sendo Gilles Roberval (matemático francês do século XVII), o primeiro a esboçar a curva do seno. O estudo das funções trigonométricas teve seu ápice com o francês Joseph Fourier (1768 - 1830), no século XIX, no campo dos movimentos periódicos. Os fenômenos periódicos, aqueles que se repetem em intervalos de tempo regulares, são encontrados em várias áreas, como música, acústica, eletricidade, mecânica, e nelas as aplicações das funções trigonométricas são de extrema importância.

Muito distante de suas origens, no triângulo retângulo, a Trigonometria toma proporções ampliadas, constituindo-se como um ramo da Matemática, independente, e as funções trigonométricas expandem seu campo de aplicação. No início, uma auxiliar da Agrimensura e da Astronomia, tornou-se autônoma e, por fim, uma parte da Análise Matemática, expressando relações entre números complexos sem a necessidade de recorrer a arcos ou ângulos.

Atualmente, o estudo da Trigonometria não se aplica apenas ao estudo dos triângulos, mas sim, em vários campos da Matemática, como por exemplo, Geometria, Cálculo e Análise, sendo uma importante ferramenta no desenvolvimento das mesmas, além de outras áreas, como a Física (no auxílio de cálculos relacionados à Cinemática, Dinâmica e Óptica), a Astronomia (nos cálculos das rotações feita por uma nave espacial), a Mecânica e a Topografia (no cálculo de distâncias inacessíveis), a Música (onde cada tom é determinado pelo tamanho de sua onda senoidal), a Eletricidade (nos cálculos de Fator de Potência e Força Magnética), a Engenharia Civil (na construção de estradas, desenho de pontes e solução de problemas científicos), entre outras.

## 3.6 CONCLUSÃO

Nesta seção, vimos a evolução histórica da Trigonometria, destacando a sua origem, no Egito e na Babilônia, até sua afirmação como um campo da Matemática, independente da Astronomia.

Na seção seguinte, abordaremos as aplicações da Geometria e da Trigonometria à Construção Civil.

# 4 APLICAÇÕES À CONSTRUÇÃO CIVIL

O surgimento da Matemática, em princípio, está relacionado à necessidade humana de contagem, de trocas comerciais, de transformação do espaço, etc. Desde a antiguidade até os dias atuais, a Matemática não pára de evoluir e, paralelamente, a Construção Civil usa muitos recursos matemáticos como ferramentas, e sua evolução é notável ao longo do tempo.

A Construção Civil é um setor de grande importância na economia e responsável pelas grandes construções que, na maioria das vezes, promovem desenvolvimento e crescimento econômico, além de empregar uma importante mão-de-obra. A origem das atividades que hoje fazem parte da Construção Civil está associada às transformações na forma de organização dos seres humanos. Quando estes deixaram de ser nômades, passando a viver em lugares fixos, tiveram a necessidade de construir um local seguro, livre dos perigos que a vida oferecia, surgindo assim, as primeiras habitações. Nessa época, as construções objetivavam a proteção contra animais e fenômenos da natureza. Com a evolução das comunidades, as construções passaram a ter importância contra inimigos humanos e, do conjunto dessas obras, surgiram as primeiras cidades.

Com o passar do tempo, os operários foram evoluindo na sua maneira de trabalhar, se especializaram e se profissionalizaram, fazendo uso de pedras e tijolos na construção das cidades. A Matemática teve um papel fundamental nessa evolução, uma vez que é através dessa ciência que se torna possível chegar a uma conclusão por meio de deduções lógicas e cálculos de precisão.

No mundo antigo, diversas obras remanescentes comprovam o desenvolvimento das construções ao longo do tempo. Grandes obras surgiram há mais de cinco mil anos, na Mesopotâmia, porém com poucos registros. No Egito, destacamos a construção das grandes pirâmides, há quatro mil anos, aproximadamente, além da cidade de Alexandria, juntamente com um grande farol, não mais existente. Podemos citar outras grandes construções desse período, como muros, templos e os aquedutos, muito importantes durante o Império Romano.(Fig. 34).

Na antiga Grécia, as obras de grande magnitude, por sinal, tinham como objetivo principal representar a grandiosidade dos deuses. Entre essas obras, estão enormes estátuas e templos complexos(Fig. 35).

A construção dos templos era baseada na *razão de ouro*, constante irracional, denotada pela letra grega $\phi$ (phi), em homenagem ao escultor Phídeas, que a utilizou para conceber o Parthenon, com o valor arredondado a três casas decimais, de 1,618.

**Figura 34 – Aqueduto Aqua Claudia**

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Aqua_Claudia_01.jpg, acessado em 04/07/2018

**Figura 35 – Parthenon, em Atenas - Grécia**

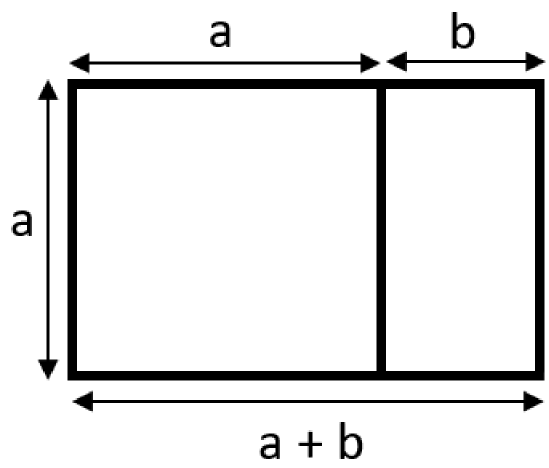
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Parthenon.jpg, acessado em 04/07/2018

A *razão de ouro* está ligada ao retângulo de ouro, no qual verifica-se a seguinte igualdade

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b},$$

onde $a$ e $b$ são comprimentos dos lados de um retângulo (Fig. 36).

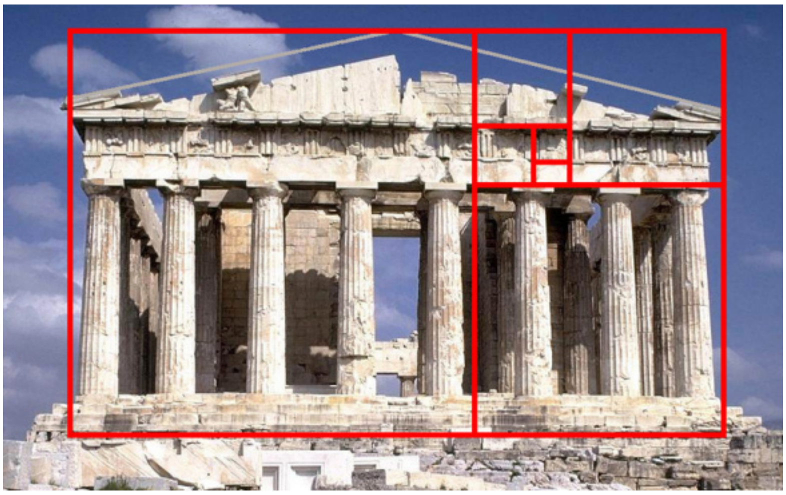
**Figura 36 – Retângulo de ouro**




Fonte: Próprio Autor

No Parthenon, toda a parte frontal é um retângulo áureo e, a razão entre a altura da construção e a altura das colunas, é a razão áurea.

**Figura 37 – Parthenon e a razão de ouro**



Fonte: https://sophiaofnature.wordpress.com/2014/01/07/a-mitologia-e-a-verdade-da-razao-de-ouro/gold08/, acessado em 04/07/2018

A Matemática também está presente no dia-a-dia dos profissionais da construção civil, como mestres de obra, pedreiros e carpinteiros, na construção de casas. Esses profissionais trazem consigo informações matemáticas construídas em sua vivência cotidiana. Não utilizam fórmulas para calcular ângulos e nem teoremas, como Pitágoras, para construir telhados. Mas traduzem em suas obras, mesmo sem saber os conteúdos que são trabalhados em sala de aula, como Geometria, Trigonometria e Aritmética.

É nas situações reais que se torna possível perceber a habilidade desses profissionais em realizar cálculos matemáticos. É notável a capacidade de um pedreiro, que na maioria dos casos possui baixa ou nenhuma escolaridade, em raciocinar de um modo diferente, muitas vezes ignorado pela Matemática, mas que resolvem perfeitamente as mais diferentes situações apresentadas em uma construção.

Nesta seção, apresentaremos o passo a passo da construção de uma pequena casa, destacando-se as etapas dessa construção, bem como a Geometria e Trigonometria utilizadas nessa construção que, em geral, são desconhecidas por pedreiros e mestres de obra.

## 4.1 CONSTRUÇÃO DE UMA PEQUENA CASA

O processo de construção de uma casa consiste em etapas interligadas e que se complementam para o término da mesma. Essas etapas estão diretamente relacionadas com a Matemática Basica (quatro operações básicas, números decimais, porcentagem, medidas de comprimento e proporcionalidade), a Geometria (cálculo de ângulos e semelhança de triângulos) e a Trigonometria (ângulos de inclinação e desnível do terreno).

Apresentaremos aqui algumas etapas, na visão de um pedreiro, necessárias para a construção de uma casa evidenciando, principalmente, a Matemática usada nesse processo, além dos problemas encontrados e como são resolvidos por esses profissionais.

As etapas destacadas são:

- A demarcação do terreno com base na planta baixa, observando também o nivelamento do terreno, bem como o uso da escala adotada nessa planta;
- O esquadrejamento do local da obra e construção do alicerce;
- O levantamento das paredes, observando a perpendicularidade em relação ao alicerce;
- A construção do telhado; e,
- O acabamento final.

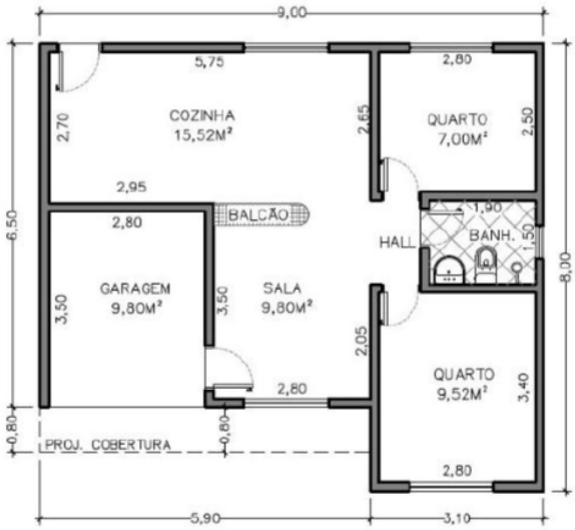
Essas etapas serão detalhadas nas próximas subsubseções.

### 4.1.1 Demarcação do terreno

Ao elaborar a planta baixa de uma casa são informadas as medidas das paredes, a área de cada cômodo e outros dados, além da escala utilizada no desenho da planta. A escala é uma razão de proporcionalidade que permite aumentar ou diminuir o tamanho de um desenho, mantendo-se semelhante ao original.

De posse da planta baixa (Fig. 38), o próximo passo é medir o terreno, delimitar a área onde será erguida a construção e tirar o nível.

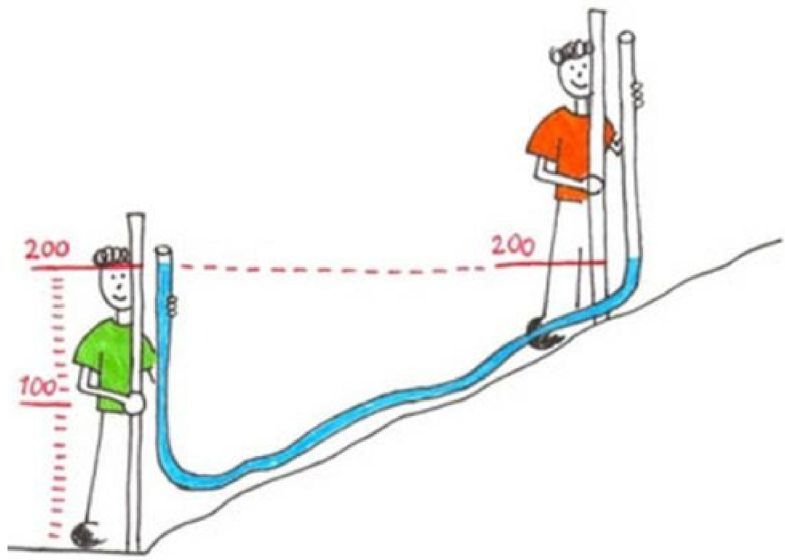
**Figura 38 – Planta baixa de uma casa**




Fonte: http://projetosdacasasgratis.com.br, acessado em 03/05/2018

"Bater o nível", como é dito pelos pedreiros, consiste em transportar uma referência de nível marcada em uma determinada altura para outro local, estabelecendo assim um plano horizontal. A ferramenta utilizada para fazer o nivelamento é a mangueira de nível (Fig.39). No caso de pequenos vãos, utiliza-se o nível de madeira (Fig. 40).

**Figura 39 – Mangueira de nível**



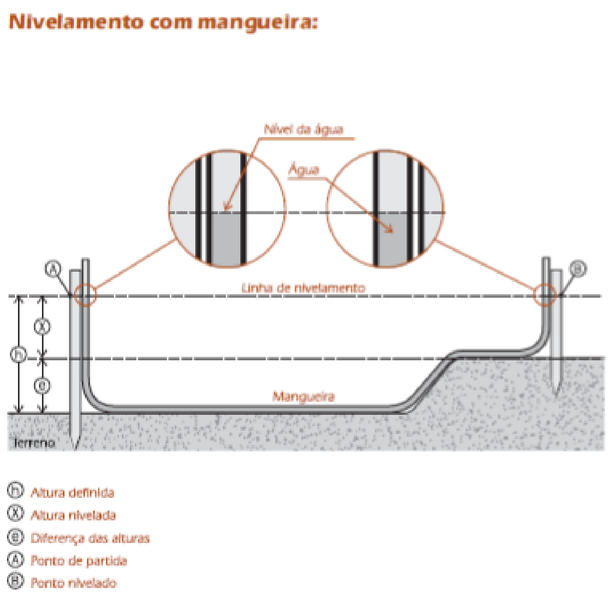

Fonte: http://www.coolgals.webcam/como-utilizar-mangueira-de-nivel, acessado em 03/05/2018

**Figura 40 – Nível de madeira**

Fonte: www.produto.mercadolivre.com.br, acessado em 03/05/2018

Para fazer o nivelamento do terreno, além da mangueira de nível, o pedreiro utiliza estacas fincadas no chão, em pontos diferentes do terreno. Em uma das estacas, faz-se a primeira marcação que serve como ponto de referência, geralmente estabelecida a um metro do chão. Após isso, utiliza-se da mangueira para estabelecer o nível do terreno, fazendo as marcações devidas nas demais estacas fincadas no solo. O nivelamento será correto desde que não haja bolhas na mangueira, e a marcação nas outras estacas só é feita quando a água da mangueira estiver parada no ponto de referência.

**Figura 41 – Esquema do nivelamento de um terreno**




Fonte: Cartilha do Pedreiro

Observa-se que ao demarcar o terreno de acordo com as medidas da planta baixa, o pedreiro utliza as quatro operações básicas e a idéia de proporcionalidade para transformar as medidas contidas no desenho para o real tamanho da construção, de acordo com a escala adotada na planta. Já no nivelamento com uma mangueira, é observado o princípio dos vasos comunicantes, cujo enunciado diz:

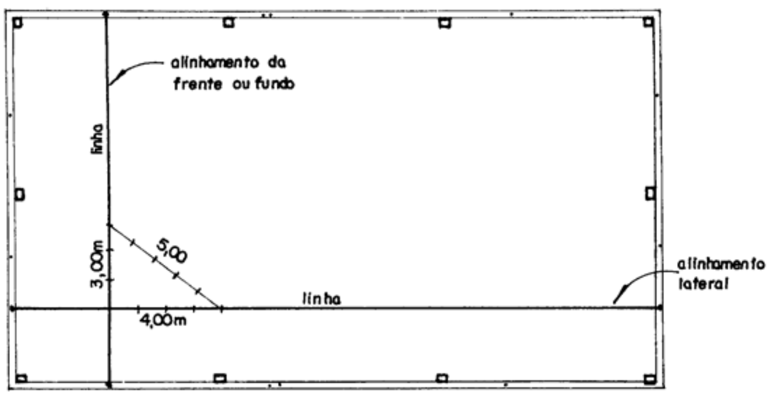
“Quando se tem um único líquido em equilíbrio contido no recipiente, conclui-se que a altura alcançada por esse líquido em equilíbrio em diversos vasos comunicantes é a mesma, qualquer que seja a forma de seção do ramo. E, para todos os pontos do líquido que estão na mesma altura, obtém-se também a mesma pressão.”
(FONTE: wikpédia, acessado em 03/05/2018)

### 4.1.2 Esquadrejamento e alicerce

Na fase inicial de uma construção, o pedreiro faz a demarcação da área a ser construída. Essa demarcação é comumente chamada de gabarito e é construída com pequenas estacas de madeira. Sua parte superior deve está nivelada para receber os pregos e as linhas que definem a planta baixa usada na demarcação do alicerce. É nessa etapa, também, que o pedreiro faz o esquadrejamento, que são marcações efetuadas no terreno a fim de garantir ângulos retos (90º) para a alvenaria que será construída posteriormente.

É comum nas atividades da construção civil a medida de ângulos, principalmente ângulos de 90º. Para obter o esquadro, geralmente, utliza-se fios de nylon (linha) dispostos de maneira que formem um triângulo retângulo. Inicialmente fixa-se uma estaca no canto da área a ser construída. Daí, fixa-se mais duas estacas, uma a 40cm e outra a 30cm da estaca colocada inicialmente. Medindo-se a distância entre as duas últimas estacas, o valor deverá ser de 50cm. Percebemos, nessa etapa, o uso do Teorema de Pitagóras.

**Figura 42 – Esquema do esquadrejamento de um terreno**




Fonte: www.meiacolher.com.br, acessado em 05/05/2018

Para verificar se o esquadrejamento está correto, os pedreiros usam o esquadro (Fig.43), que é uma ferramenta em forma de “L”utilizada para verificar ângulos retos. O nome esquadrejar se refere ao uso dessa ferramenta.

**Figura 43 – Esquadro**

Fonte: www.eclivilnet.com, acessado em 05/05/2018

A terna pitagórica 30cm, 40cm e 50cm, garante ao ângulo a perpendicularidade entre retas e, consequentemente, o esquadro buscado pelos pedreiros, o ângulo de 90º. Em alguns casos, utiliza-se a terna pitagórica 60cm, 80cm e 100cm.

Após o esquadrejamento inicia-se a construção da fundação ou alicerce. É a parte da construção que recebe seu peso e o transfere para o solo. É a primeira etapa da construção e é o pé da edificação.

Para a construção do alicerce, geralmente cava-se uma vala com 20cm de profundidade e 50cm de largura. Nessa vala são colocadas pedras e os espaços entre elas são preenchidos com areia e barro. Para que esses materiais penetrem nesses espaços, é utlizado água. Após isso, coloca-se a massa, mistura de cimento, areia e barro, para se construir a camada sobre a qual será erguido o alicerce.

### 4.1.3 Levantamento das paredes

Feito o alicerce, a próxima etapa é a construção das paredes. As paredes são erguidas, na maioria dos casos, com tijolos cerâmicos de 6 ou 8 furos, cuja quantidade por metro quadrado varia entre 25 e 28 tijolos. Nessa estimativa, é levada em conta a forma como o tijolo é utilizado, em pé (Fig.44) ou deitado (Fig.45).

O cálculo da quantidade de tijolos necessária para a construção é um problema de área de uma superfície retangular. Calcula-se a área da parede e sabendo-se a quantidade de tijolos por metro quadrado, faz-se a estimativa do total para a construção da parede. Repete-se esse processo para as outras paredes da casa e, assim, obtém-se o total de tijolos para a obra completa. Porém, o pedreiro não utiliza cálculos com rigor matemático, geralmente desconhecido por eles. Simplesmente, usa sua experiência para saber a proporção tijolos/$m^2$ e, dessa maneira, faz a estimativa da quantidade total para a construçao da obra.

**Figura 44 – Parede construída com tijolo em pé**

Fonte: www.ufrgs.br/napead/repositorio/objetos/alvenaria-estrutural, acessado em 07/05/2018

**Figura 45 – Parede construída com tijolo deitado**

Fonte: www.engenhariacivil.com.br, acessado em 07/05/2018

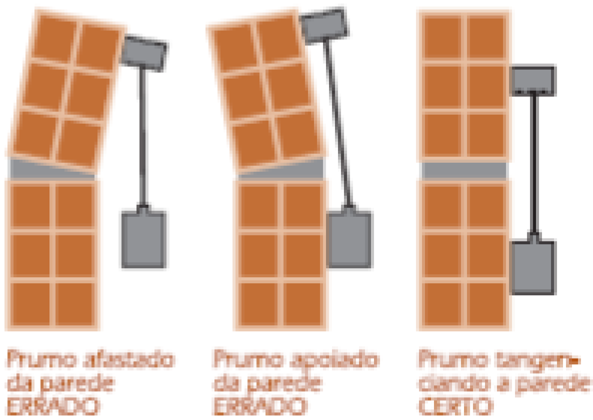
A construção das paredes é iniciada pelos cantos, para que seja observado, também, nas paredes o esquadro obtido no alicerce. Além disso, deve ser observada a verticalidade da parede em relação ao alicerce. Para isso, o pedreiro utiliza-se de um objeto, chamado fio de prumo (Fig.46).

**Figura 46 – Fio de prumo**

Fonte: www.clubedasferramentas.com.br, acessado em 07/05/2018

O prumo é composto por um peso preso a um barbante, que permite seu manuseamento sobre o ponto onde se pretende obter a vertical. Esse instrumento é de fundamental importância, pois se as paredes não “ estiverem no prumo ”poderão cair ou precisarão de muita massa para o reboco, elevando assim o custo da obra.

**Figura 47 – Esquema de uso do fio de prumo**




Fonte: Cartilha do Pedreiro

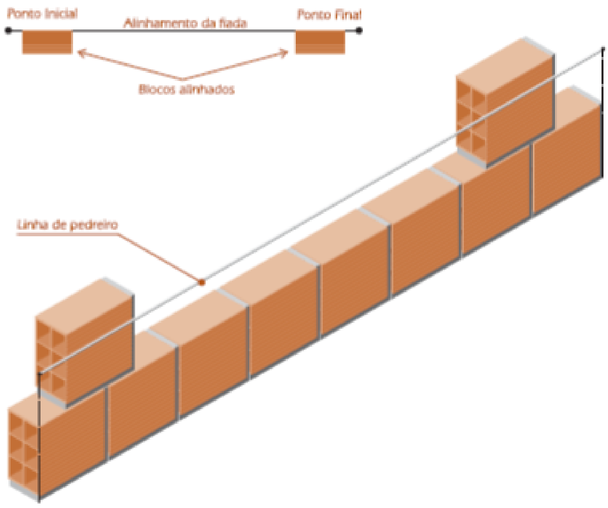
O levantamento das paredes exige contínua atenção do pedreiro, pois deve-se sempre buscar um ângulo de 90º em relação ao alicerce. Por isso, o pedreiro usa várias vezes, durante a construção, o fio de prumo (Fig.48).

**Figura 48 – Pedreiro usando o fio de prumo**

Fonte: casadetijolo.blogspot.com, acessado em 09/05/2018

Construído os cantos, o pedreiro estica uma linha ligando esses pontos para a construção das demais fiadas que irão constituir a parede. O uso dessa linha é importante para que seja observado o alinhamento dos tijolos nas fiadas.

**Figura 49 – Alinhamento**



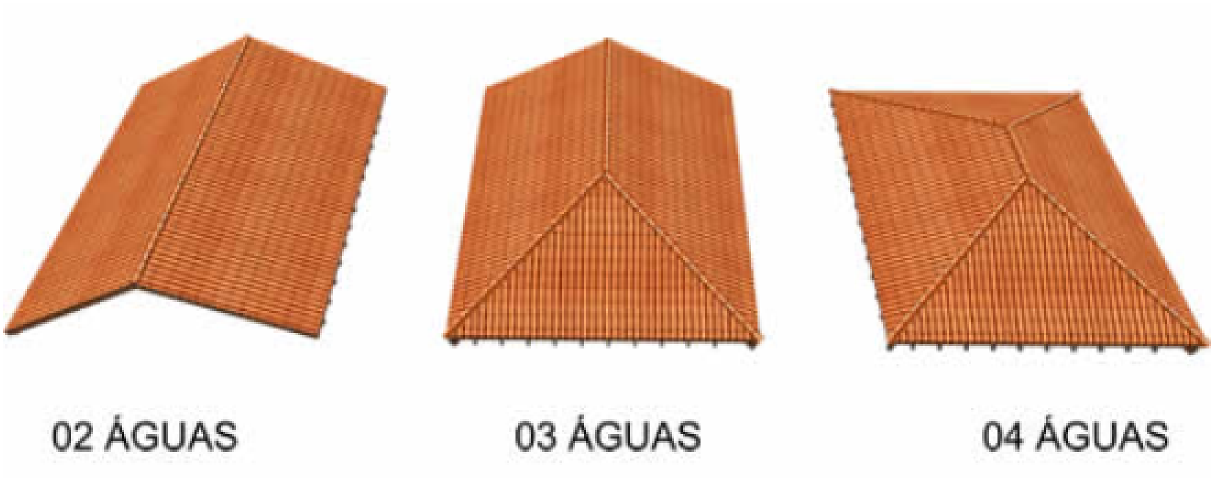

Fonte: Cartilha do Pedreiro

Durante essa etapa da construção, destacamos o cálculo de área de superfícies planas, no momento em que é preciso saber a quantidade total de tijolos para a obra e medição de ângulos, ação observada na colocação das paredes no prumo e no início do levantamento das mesmas pelos cantos para a observação do esquadro.

### 4.1.4 Construção do telhado

O telhado é a cobertura da construção, formado por um ou mais planos inclinados em relação à horizontal. Sua função principal é proteger a construção do sol, da chuva, do vento, entre outros fenômenos da natureza, além de proporcionar isolamento térmico à edificação. Cada plano que constitui o telhado é denominado queda d'água ou, simplesmente, água. O telhado de duas águas possui dois planos, que podem ser do mesmo tamanho ou não, o de três águas possui três e o de quatro águas possui quatro planos inclinados.

**Figura 50 – Tipos de telhado**



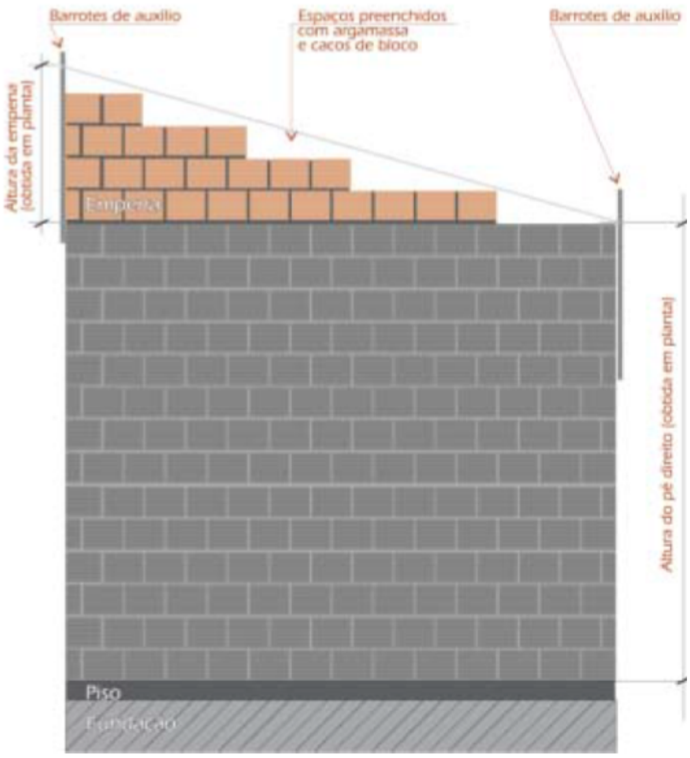

Fonte: blogpraconstruir.com.br/etapas-da-construção/telhado-exposto, acessado em 08/05/2018

O telhado é construído sobre estruturas chamadas empenas. As empenas são alvenarias de formato triangular com a mesma inclinação do telhado (Fig. 51), erguidas após a construção das paredes. Sobre as empenas é colocada a estrutura de madeira que dá suporte ao telhado.

Na construção das empenas é observada a inclinação do telhado, expressa em porcentagem. Essa inclinação é importante para que a água da chuva possa escoar normalmente. Geralmente, usa-se uma inclinação de 30%, valor mínimo utilizado pelos pedreiros. Esse percentual equivale a dizer que para cada um metro na metade da base do telhado, são construídos 30cm de altura para a empena.

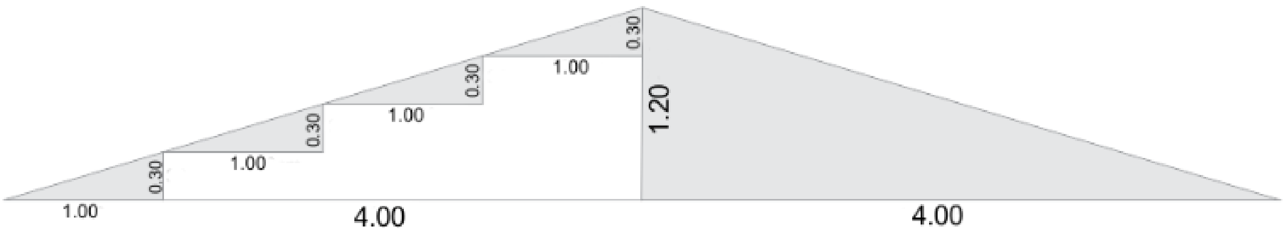
Na Fig. 52, temos a representação de um telhado com inclinação de 30%. Essa inclinação é obtida pelo pedreiro, partindo da extremidade para o topo do telhado. Para cada metro na horizontal tem-se 30% na vertical, ou seja, 30cm.

**Figura 51 – Esquema de construção da empena**




Fonte: Cartilha do Pedreiro

**Figura 52 – Representação de um telhado com inclinação de 30%**



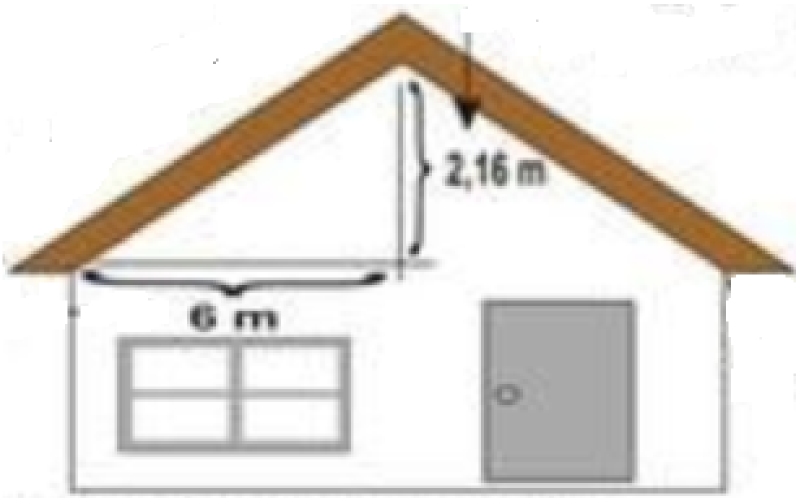

Fonte: https://construir.org.br/calculo-e-desenho-da-inclinaçao-de-um-telhado, acessado em 08/05/2018

A inclinação é a razão entre as medidas vertical e horizontal da empena do telhado, conforme o cálculo abaixo:

$$\frac{1,20}{4} = 0,30 = \frac{30}{100} = 30\% \tag{1}$$

Para calcular a altura da empena, geralmente o pedreiro toma a metade da medida da parede sobre a qual foi erguida essa estrutura. A altura será 30% desse valor, se essa for a inclinação a ser utilizada. A porcentagem da inclinação está relacionada ao ângulo reto, Portanto, uma inclinação de 30% não significa uma inclinação de 30º. Como exemplo, considere o telhado de uma casa com as dimensões especificadas na figura.

**Figura 53 – Casa com seu telhado**




Fonte: https://br.pinterest.com, acessado em 08/05/2018

Considerando a altura da empena de 2,16m e a metade da medida da parede medindo 6m, temos que a inclinação do telhado é igual a

$$\frac{2,16}{6} = 0,36 = \frac{36}{100} = 36\% \tag{2}$$

Na Matemática, esse cálculo é equivalente a obter a tangente do ângulo de inclinação. Considerando uma parte da empena como um triângulo retângulo (observe a figura anterior), temos que 2,16m é a medida do cateto oposto e, 6m, é a medida do cateto adjacente ao ângulo de inclinação. Usando essas medidas e as razões trigonométricas no triângulo retângulo, calculamos a tangente do ângulo $x$, de inclinação

$$tg(x) = \frac{1,20}{4} = 0,36.$$

Consultando uma tabela de razões trigonométricas, o ângulo $x$ procurado fica entre 19º e 20º.

Observamos que, na construção do telhado, os pedreiros fazem uso de vários conceitos matemáticos, como razões trigonométricas, cálculo de porcentagem e medidas de ângulos, mesmo sem ter uma noção formal deles, sem nunca ter estudado Matemática.

### 4.1.5 Acabamento final

A fase final de uma obra consiste na aplicação de revestimento sobre as paredes e construção do piso. Nas paredes é aplicado o reboco que, em obras de pequeno porte, é feito com uma mistura de cimento, areia e barro em proporções pré-determinadas. Já em obras maiores, esse revestimento é feito com gesso e peças cerâmicas em algumas das paredes. Podemos, também, incluir nessa etapa final a pintura das paredes.

**Figura 54 – Reboco com cimento e gesso**

Fonte: www.blogdogesseiro.com, acessado em 11/05/2018

A construção do piso é feita em duas partes: contrapiso e piso. Para a construção do contrapiso, nivela-se o chão da obra e sobre ele aplica-se o concreto, mistura de areia e brita, com uma espessura de 5cm.

**Figura 55 – Pedreiro fazendo o contrapiso**

Fonte: https://www.escolaengenharia.com.br, acessado em 11/05/2018

Sobre essa camada faz-se o piso cimentado, também chamado piso queimado, que é de aspecto liso, ou então colocam-se peças cerâmicas com a utilização de argamassa.

**Figura 56 – Piso queimado**

Fonte: https://aecweb.com.br, acessado em 11/05/2018

**Figura 57 – Piso com peças cerâmicas**

Fonte: https://revista.zapimoveis.com.br, acessado em 11/05/2018

No revestimento das paredes e construção do piso, assim como no levantamento das paredes, é observado pelo pedreiro o nivelamento e o esquadro. Na colocação das peças cerâmicas é feito uso do cálculo de áreas e medida de ângulos retos, pois nessa etapa, também, é observado o esquadro. Na construção do piso fica evidenciado o cálculo do volume, pois conhecendo suas dimensões (comprimento, largura e espessura), é possível calcular o volume de concreto para sua construção.

## 4.2 CONCLUSÃO

Nesta seção, destacamos a presença da Geometria e da Trigonometria na construção civil, enfatizando o uso desses conteúdos matemáticos pelos pedreiros, conhecimentos estes adquiridos nas experiências vivenciadas em sua profissão, além de relacionar esses conteúdos da matemática com as etapas de construção de uma casa.

Na próxima seção, veremos um pouco da Catenária, uma curva que geralmente está presente em algumas construções, como casas, pontes, túneis, etc.

# 5 CATENÁRIA E CONSTRUÇÃO CIVIL

Um tipo de estrutura curva está presente, na forma de arco, em algumas construções, como por exemplo, em casas, túneis, etc. Tal estrutra é chamada catenária, e será mostrada como e porque ela aparece nessas construções.

Em Matemática, a catenária descreve uma família de curvas planas, semelhantes as que seriam geradas por uma corda suspensa por suas extremidades, e sujeitas à ação da gravidade (FONTE: https://pt.wikipedia.org/wiki/Catenária, acessado em 04/07/2018). Encontramos esse tipo de curva na natureza, em objetos criados pelo homem e, também, em obras da construção civil.

As linhas que unem as "extremidades"de um ovo são catenárias; os fios de alta tensão presos a dois postes, à mesma altura, em relação ao solo; uma corrente presa por duas colunas de mesma altura (Fig. 58); e as cordas suspensas por duas hastes verticais usada em bancos e supermercados para organizar filas, também são exemplos de Catenária.

**Figura 58 – Corrente descrevendo uma catenária**

Fonte: https://www.institutodeengenharia.org.br/site/2011/05/27/acredite-esta-bike-anda-e-nao-vibra/, acessado em 05/07/2018

Muitos problemas matemáticos surgiram a partir de observações feitas da própria natureza, ou de processos mecânicos. O problema para encontrar a equação de uma curva, obtida quando uma corda ou corrente flexível é suspensa por dois pontos, pode ser considerado um dos mais famosos e difíceis da história do cálculo. Esse problema foi abordado, entre outros, por Leonardo da Vinci e Galileu, que acreditavam tratar-se de uma parábola, e foi solucionado por Johann Bernoulli (1667 - 1748).

**Figura 59 – Johann Bernoulli**

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli, acessado em 05/07/2018

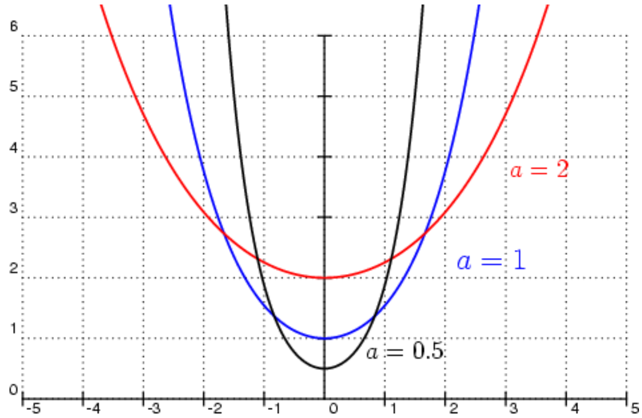
Durante muito tempo, os matemáticos trataram a catenária como uma parabóla, porque era a curva mais semelhante de que se tinha conhecimento. Porém, o desenvolvimento do cálculo, no século XVIII, possibilitou que Johann Bernoulli demonstrasse que essa curva não se trata de uma parabóla, e determinasse sua equação. Atualmente, sabemos que as curvas formadas por cabos presos por suas extremidades são catenárias.

A catenária é uma curva de equação transcedente, expressa por

$$y = \frac{e^{x} + e^{-ax}}{2a}, \tag{3}$$

onde $a$ é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da curva - massa por unidade de comprimento - e a tensão com a qual ela é segura.

**Figura 60 – Catenária para diferentes valores de $a$**




Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Catenária, acessado em 25/10/2018

A palavra catenária é originária da palavra latina *catena*, que significa cadeia. A curva da corrente suspensa por dois pontos foi batizada com essa denominação por Leibniz. As propriedades dessa curva são muito úteis para construções, como pontes pênseis, e são bastante exploradas pela arquitetura. Ao aplicar uma força na catenária, a mesma é distribuída igualmente por todo o seu comprimento, fato não observado em outras formas geométricas. Devido a essa propriedade, o desenho de túneis e arcos de sustentação, utilizam a catenária.

Por ser uma forma natural, a catenária tem características físicas muito interessantes. Trabalhos de matemáticos e arquitetos mostram que, se uma corrente suspensa por dois pontos sofre uma força de tensão, então um arco com o mesmo formato sofre força de compressão. Os arcos, nesse caso, são exemplos de catenária invertida.

Alguns exemplos de aplicações da catenária podem ser observados nas Figuras 61 e 62.

**Figura 61 – Golden Gate Bridge, exemplo de ponte pênsil**

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_pênsil, acessado em 05/07/2018

**Figura 62 – Catenária em túnel**

Fonte: https://sciencesofworld.wordpress.com/2012/03/04/tunel-ovo-gravida/, acessado em 05/07/2018

A catenária invertida, que se sustenta pelo próprio peso, é uma excelente forma para construção de arcos, e é utilizada em muitos projetos arquitetônicos. O arquiteto espanhol Antonio Gaudi (1852 - 1926) a investigou e a utilizou em suas obras.

**Figura 63 – Casa Milá, projetada por Gaudi**

Fonte: https://es.123rf.com/photo_88010660_barcelona-9-de-agosto-arcos-de-catenaria-en-el-ático-de-casa-milá-también-conocido-como-la-pedrera-edifici.html, acessado em 05/07/2018

As propriedades da Catenária também são utilizadas em construções de menor porte, como pode ser observado na Fig. 64.

**Figura 64 – Arcos de catenária em uma casa**

Fonte: Próprio Autor

As estruturas em arco, atualmente, provocam admiração aos observadores, principalmemte, pela forma como é concebida e, também, pela sua grandiosidade apresentada em obras modernas.

**Figura 65 – Arco no Estádio de Wembley, Inglaterra**

Fonte: https://www.vianova-realestate.com/index.php/wembley-park/wembley-7-2/, acessado em 06/07/2018

## 5.1 CONCLUSÃO

Nesta seção destacamos a catenária, um tipo de curva cujas propriedades são de grande utilidade para a Construção Civil, possibilitando resistência e um aspecto de elegância às estruturas em forma de arco.

Na seção seguinte faremos as considerações finais deste trabalho.

# 6 CONCLUSÃO

O avanço científico e tecnológico é cada vez maior ao longo dos tempos. Isso exige da sociedade conhecimentos nas mais diversas áreas. Nesse cenário, a Matemática tem sua parcela de contribuição, sendo utilizada de diversas maneiras, tornando-se fundamental para a compreensão do nosso meio e para a idealização de objetos e atividades que facilitem a vida das pessoas, fato esse observado também na Construção Civil.

Os profissionais dessa área, realizam, em seu trabalho diário, cálculos que, na maioria das vezes, são desconhecidos por eles, em relação ao processo para se chegar ao resultado. Como exemplo, podemos citar o trabalho de esquadrejamento da obra e o cálculo da inclinação de um telhado. Mesmo com o total desconhecimento em Geometria e Trigonometria, esses profissionais conseguem fazer seu trabalho corretamente, de forma a concluir a obra da maneira desejada. Esse fato mostra que, o mínimo de conhecimento nessas áreas, torna o processo de edificação de uma casa mais simples e eficaz, o que pode evitar transtornos futuros.

Os conhecimentos matemáticos observados na Construção Civil não foram repassados em escolas, são aprendidos na prática e nas experiências diárias. Apesar de não possuir o conhecimento matemático formal, os pedreiros, em uma obra, fazem uso constante de medição de ângulos, cálculo de área, porcentagem e do Teorema de Pitágoras, além de usarem a Trigonometria na construção do telhado de uma casa. Eles têm conhecimentos matemáticos suficientes para a resolução de situações advindas de sua profissão, mesmo sem conhecer esses conceitos formalmente.

A elaboração deste trabalho buscou relacionar a teoria à prática. Como pessoas com pouco conhecimento em Matemática fazem uso dela para a resolução de situações-problema em uma obra. Ao observarmos a construção de uma casa por etapas, podemos notar a Matemática e seus conceitos evidenciados, e a forma como é utilizada pelos pedreiros, como ferramenta para resolução de situações diversas.

Observamos no trabalho, também, a relação da Geometria e da Trigonometria com a construção civil. Tal observação pode servir de subsídio para o ensino desses conteúdos na própria sala de aula, além de mostrar que a Matemática pode ser aprendida por todos de maneira contextualizada.

O conhecimento teórico é importante, porém, se mostrada uma aplicação prática dos conteúdos matemáticos trabalhado nas escolas, a aprendizagem pode se tornar mais significativa. As ações, em sala de aula, com objetivo de mostrar as aplicações cotidianas da Geometria e da Trigonometria à Construção Civil, podem ser de ótimo proveito na busca pela contextualização dos conteúdos didáticos, pela aquisição de conhecimentos por parte dos alunos e por uma maneira de tornar a Matemática mais significativa para os mesmos.

Esperamos que este trabalho sirva de subsídios à elaboração de outros, tanto na relação existente entre a Matemática e outras áreas, como para aplicação de metodologias, com o objetivo de melhor abordar a Geometria e a Trigonometria em sala de aula.

# REFERÊNCIAS


AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática;** tradução de João Bosco Pitombeira. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ALMEIDA, Michele Nazareth de. **Vivências Matemáticas:** a construção de conhecimentos no cotidiano de um pedreiro. 2008. 110f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2008.

ARRUDA FILHO, Adilson Brito de , SILVA, Sandro Luiz da, SOUSA, Warley Pitanga. **Cartilha do Pedreiro**. Salvador: Governo do Estado da Bahia. 2001.

BORTOLI, Gladis. **Um Olhar Histórico nas Aulas de Trigonometria:** possibilidades de uma prática pedagógica investigativa. 2012. 85f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro Universitário Univates, Lajeado, 2012.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Trigonometria/Números Complexos**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LEITE, Lindevania de Almeida. **Breve História da Trigonometria.** 2016. 54f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

NUNES, Patricia Cristina Cunha. **Teoria do Arco de Alvenaria:** uma perspectiva histórica. 2009. 95f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

OLIVEIRA, Jaqueline de. **Tópicos Selecionados de Trigonometria e sua História.** 2010. 45f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes. **Trigonometria na Educação Básica com Foco em sua Evolução Histórica e suas Aplicações Contemporâneas.** 2013. 145f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

RODOVANSKI, Andreia Ugioni Colombo. **Geometria do Pedreiro:** um estudo de casos para melhorar a compreensão da geometria no Ensino Fundamental. 2004. 56f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2004.

RODRIGUES, Jose Donizeti. **Construção Civil e Relações Geométricas:** um caminho para aprender e ensinar Matemática?. 2014. 111f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

SARAIVA, Elihebert. **A Matemática na Construção Civil Sob a Ótica dos Construtores.** 2012. 45f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Rondônia, Ji-Paraná, 2012.

SCARMIGNANI, Arlete Rosana Banaczeski. **Geometria Presente na Construção Civil.** 2010. 42f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Erechim, 2010.

SCHELCK, Paula Aparecida Aquiles do Valle. **O Uso da Trigonometria na Construção de Rampas de Acesso.** 2015. 112f. Dissertação (Mestrado em Ciências Matemáticas) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015.

SILVA, Joadir Ferreira da. **Trigonometria no Triângulo Retângulo e Exemplos na Construção Civil.** 2016. 145f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2016.

SOUSA, Aldemir Soares de. **A Geometria na Construção Civil:** uma aplicação em sala de aula. 2015. 56f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, Araruna, 2015.

TALAVERA, Leda Maria Bastoni. **Parábola e Catenária:** história e aplicações. 2008. 115f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

UBERTI, Gerson Luiz. **Uma Abordagem das Aplicações Trigonométricas.** 2003. 51f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianopólis, 2003.

VASSALLO, Victor Hugo. **Razões Trigonométricas:** Uma abordagem do cotidiano. 2017. 98f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017.