



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Ajuste de Curvas Usando Métodos Numéricos

Theófilo Machado de Sousa Neto

Goiânia

2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

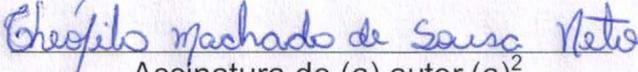
Nome completo do autor: Theófilo Machado de Sousa Neto

Título do trabalho: Ajuste de Curvas Usando Métodos Numéricos

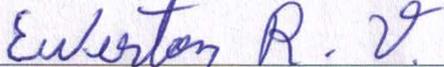
3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do (a) autor (a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do (a) orientador (a)²

Data: 30 / 07 / 2018

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

Theófilo Machado de Sousa Neto

**Ajuste de Curvas Usando Métodos
Numéricos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira

Goiânia

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Sousa Neto, Theófilo Machado de
Ajuste de Curvas Usando Métodos Numéricos [manuscrito] /
Theófilo Machado de Sousa Neto. - 2018.
CXXXIV, 134 f.

Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2018.

Bibliografia. Anexos.

Inclui siglas, gráfico, tabelas, lista de figuras.

1. Dados experimentais. 2. Métodos de ajustes de curvas. 3. Regressão por mínimos quadrados. 4. Interpolação. 5. Educação básica.
I. Vieira, Ewerton Rocha , orient. II. Título.

CDU 517



Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br



Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Théofilo Machado de Sousa Neto – Aos vinte e oito dias do mês de junho do ano de dois mil e dezoito, às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira – Orientador, Prof^a. Dr^a. Kamila da Silva Andrade e a Prof^a. Dr^a. Dahisy Valadão de Souza Lima, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no LEMAT do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada “**Ajuste de Curvas Usando métodos Numéricos**”, em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Théofilo Machado de Sousa Neto, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 18:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Sóstenes Soares Gomes, secretário do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira
Presidente – IME/UFG

Prof^a. Dr^a. Kamila da Silva Andrade
Membro – IME/UFG

Prof^a. Dr^a. Dahisy Valadão de Souza Lima
Membro – Unicamp

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Theófilo Machado de Sousa Neto graduou-se em Matemática pela Universidade Católica de Goiás (UCG) em 2006 e em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Goiás (UFG) no ano de 2012, durante a primeira graduação foi bolsista de um programa interno da UCG, conhecida como bolsa Filantropia, já a segunda graduação, por ser através de uma universidade pública, não foi concedido nenhum tipo de bolsa.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus que foi quem me trouxe até aqui e me sustentou nos momentos de dificuldade, aos meus filhos, Luís Henrique e André Lucas, que souberam compreender minha ausência nos finais de semana e feriados; aos meus amigos do mestrado, que proporcionaram vários momentos de aprendizado; a minha mãe Valdeci Machado que compartilhou dos meus momentos de dificuldades e a minha namorada Bruna Rodrigues, que ficou firme ao meu lado nas madrugadas de escrita.

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, por proporcionarem esse ensino de excelência. Agradeço ao meu orientador Dr. Ewerton Rocha Vieira, pela dedicação, disponibilidade e ponderações feitas neste trabalho. Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro nesse período de dois anos.

Resumo

Diante da necessidade de se discutir sobre métodos matemáticos capazes de ajustar curvas que representem dados experimentais. Este trabalho apresenta como escopo sete métodos de ajustes de curvas, sendo que três destes, utilizam as técnicas de regressão por mínimos quadrados e os outros quatro, usando técnicas de interpolação. Inicialmente, traremos algumas definições que apresentam ao leitor todo o embasamento matemático que rege os equacionamentos. Em paralelo, procuramos discutir, através de exemplos, a área de atribuição dos métodos descritos, realizando sempre que possível um comparativo entre as variadas técnicas apresentadas e seus erros nas estimativas.

Com o intuito de demonstrar que as técnicas aqui discutidas são viáveis para utilização na educação básica, apresentaremos uma experiência de aplicação de um desses métodos na resolução de um problema básico da disciplina de Física. Após relatar os procedimentos do método de obtenção da resistividade do solo, que é uma variável de suma importância para a elaboração de projetos de malhas de aterramento que atendem subestações de energia. Finaliza-se este trabalho resolvendo o problema com auxílio das técnicas de ajustes de curva estudados, propondo a inclusão dos métodos abordados em uma das etapas do procedimento de obtenção da resistividade do solo.

Palavras-chave

Dados experimentais, métodos de ajustes de curvas, regressão por mínimos quadrados, interpolação, educação básica.

Abstract

Given the need to discuss mathematical methods capable of adjusting curves that represent experimental data. This work presents seven methods of curves adjustment, three of these, methods that use least squares regression techniques and the other four, using interpolation techniques. Initially, it brings some definitions that present to the reader all the mathematical foundation that rules the equations. In parallel, it seeks to discuss, through examples, the area of attribution of the described methods, realizing whenever possible a comparison between the several techniques presented and their errors in the estimates.

In order to demonstrate that the techniques discussed here are feasible for use in basic education, it exposes an experience of applying one of these methods in solving a basic problem of the discipline of Physics. After presenting the step-by-step method of obtaining soil resistivity, a variable that is of the utmost importance for the elaboration of projects for grounding meshes that supply energy substations, We finish this work by solving the problem with the aid of adjustment techniques curves studied, proposing the inclusion of the methods addressed in one of the steps of the procedure to obtain soil resistivity.

Keywords

Experimental data, methods of curve fitting, least squares regression, interpolation, basic education.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Três tentativas de ajustar a “melhor” curva aos cinco pontos dados. (a) Regressão por mínimos quadrados. (b) Interpolação linear. (c) Interpolação curvilínea. | 18 |
| 2.1 | Ajustes das curvas nos planos cartesianos. (a) Representação no plano cartesiano de 7 pontos colhidos experimentalmente. (b) Ajuste polinomial. (c) Ajuste por mínimos quadrados. Fonte:[9]. | 20 |
| 2.2 | Representação gráfica do Exemplo 1 usando ajuste por mínimos quadrados. | 24 |
| 2.3 | Resíduo na regressão linear. | 24 |
| 2.4 | Dispersão dos dados. (a) Dispersão dos dados em torno da média da variável dependente. (b) Dispersão dos dados em torno da reta de melhor ajuste. Fonte:[9]. | 26 |
| 2.5 | Exemplos de regressão linear. (a) Regressão linear com erros residuais pequenos. (b) Regressão linear com erros residuais grandes. Fonte:[9]. | 26 |
| 2.6 | Modelos não-lineares e suas respectivas versões linearizadas. (a) Modelo exponencial. (b) Modelo de potência Simples. (c) Modelo da taxa de crescimento da saturação. | 31 |
| 2.7 | Ajuste de curvas aos dados não lineares. (a) Dados não adequados para uma regressão linear por mínimos quadrados. (b) Indicação de que uma parábola é preferível. | 32 |
| 2.8 | Ajuste por um polinômio de grau 2. | 36 |
| 2.9 | Ajuste de curvas pelo método de regressão não-linear. (a) Ajuste não-linear usando parâmetros iniciais. (b) Ajuste não-linear usando parâmetros da primeira iteração. (c) Ajuste não-linear usando parâmetros da iteração satisfatória. | 45 |
| 3.1 | Interpolação linear para estimativa de $\ln(3)$ realizada por intervalos diferentes. | 51 |
| 3.2 | Interpolação linear e quadrática para estimativa de $\ln(3)$ | 53 |
| 3.3 | Representação gráfica do Exemplo 10. | 63 |
| 3.4 | Representação gráfica do Exemplo 12. | 65 |
| 3.5 | Representação gráfica das splines lineares do Exemplo 13. | 67 |
| 3.6 | Representação gráfica das splines quadráticos para 3 intervalos. | 68 |
| 3.7 | Ajuste por spline de um conjunto de quatro pontos. (a) Spline linear. (b) Spline quadrático. (c) Spline cúbico. | 76 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.1 | Kit para medição da resistência de uma lâmpada incandescente. | 80 |
| 4.2 | Tela inicial do software <i>Qtiplot</i> | 82 |
| 4.3 | Ajuste de regressão quadrática realizado no <i>Qtiplot</i> | 83 |
| 4.4 | Representação gráfica dos dados da Tabela 10 realizada no <i>Qtiplot</i> . . . | 84 |
| 4.5 | Uso do <i>Qtiplot</i> para determinação da curva de regressão polinomial. . . | 85 |
| 5.1 | $\rho \times$ Umidade percentual do solo arenoso. Fonte:[16]. | 92 |
| 5.2 | $\rho \times$ Temperatura. | 93 |
| 5.3 | Estratificação do solo em duas camadas. Fonte:[16]. | 93 |
| 5.4 | Quatro hastes cravadas no solo. Fonte:[16]. | 96 |
| 5.5 | Método de Wenner. Fonte:[16]. | 97 |
| 5.6 | Penetração na profundidade a . Fonte:[16]. | 98 |
| 5.7 | Direções do ponto de medição. Fonte:[16]. | 98 |
| 5.8 | Solo em duas camadas. Fonte:[16]. | 101 |
| 5.9 | Configuração de Wenner no solo de duas camadas. Fonte:[16]. | 103 |
| 5.10 | Curvas teóricas para os valores de K . (a) Curvas para K negativos (b) Curvas para K positivos. Fonte:[16]. | 104 |
| 5.11 | Curva $\rho(a) \times a$ | 106 |
| 5.12 | Curvas para K negativo. | 106 |
| 5.13 | Curvas $h \times K$ | 108 |
| 5.14 | Solo estratificado, Exemplo 17. Fonte:[16]. | 108 |
| 6.1 | Plotagem dos pontos colhidos experimentalmente pelo método de Wenner. | 110 |
| 6.2 | Curva $\rho(a) \times a$ traçada a partir de técnicas de ajustes de curvas. | 112 |
| 6.3 | Curva teórica para K negativo interceptada pela reta 0.4973. | 113 |
| 6.4 | Representação no plano $h \times K$ dos pontos do quinto e oitavo passo. (a) Representação dos pontos da Tabela 5.2. (b) Representação dos pontos da Tabela 5.3. | 116 |
| 6.5 | Curvas do quinto e oitavo passo no mesmo plano. | 117 |
| 6.6 | Solo estratificado, solução do exemplo usando técnicas de regressão por mínimos quadrados. | 118 |
| 9.1 | Circuito série de lâmpadas incandescente. | 127 |
| 9.2 | Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 1. | 129 |
| 9.3 | Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 2. | 130 |
| 9.4 | Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 3. | 131 |
| 9.5 | Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 4. | 132 |
| 9.6 | Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 5. | 133 |

9.7 Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 6. 134

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 16 |
| 1.1 | Organização do trabalho | 19 |
| 2 | Regressão por mínimos quadrados | 20 |
| 2.1 | Regressão linear por mínimos quadrados | 21 |
| 2.1.1 | Análise do erro da regressão linear | 23 |
| 2.1.2 | Linearização de equações não-lineares | 28 |
| 2.2 | Regressão polinomial | 30 |
| 2.3 | Modelo linear geral por mínimos quadrados | 36 |
| 2.4 | Regressão não-linear | 39 |
| 3 | Interpolação | 46 |
| 3.1 | Interpolação polinomial | 46 |
| 3.2 | Polinômios interpoladores por diferenças de divididas de Newton | 48 |
| 3.2.1 | Interpolação linear | 49 |
| 3.2.2 | Interpolação quadrática | 50 |
| 3.2.3 | Forma geral dos polinômios interpoladores de Newton | 53 |
| 3.2.4 | Erros nos polinômios interpoladores de Newton | 56 |
| 3.3 | Polinômios interpoladores de Lagrange | 60 |
| 3.4 | Interpolação inversa | 63 |
| 3.5 | Interpolação por splines | 64 |
| 3.5.1 | Splines lineares | 66 |
| 3.5.2 | Spline quadrática | 67 |
| 3.5.3 | Splines cúbicas | 72 |
| 4 | Aplicação da regressão polinomial em aula experimental | 77 |
| 5 | Método gráfico para determinação da resistividade do solo | 89 |
| 5.1 | Introdução ao sistema de aterramento | 89 |
| 5.2 | Resistividade do solo | 90 |
| 5.3 | A influência da umidade | 90 |
| 5.4 | A influência da temperatura | 91 |
| 5.5 | A influência da estratificação | 93 |
| 5.6 | Ligação à terra | 94 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.7 | Haste de aterramento | 94 |
| 5.8 | Projeto do sistema de aterramento | 94 |
| 5.9 | Medição da resistividade do solo | 95 |
| 5.10 | Procedimento para realizar medições pelo método de Wenner | 97 |
| 5.11 | Espaçamento entre hastes e direção das medições | 98 |
| 5.12 | Exemplificação do tratamento dos dados medidos pelo método de Wenner | 100 |
| 5.13 | Representação do solo em duas camadas | 101 |
| 5.14 | Método de estratificação do solo em duas camadas | 102 |
| 5.15 | Método de duas camadas usando curvas | 103 |
| 6 | Análise do problema de estratificação do solo utilizando os ajustes gráficos estudados | 109 |
| 7 | Resultados alcançados | 119 |
| 8 | Referências bibliográficas | 122 |
| 9 | Anexos | 125 |

1 Introdução

Os conceitos desta seção foram baseados nas referências [8], [9] e [16].

Muitos problemas na engenharia e demais ciências, utilizam curvas na determinação de seus métodos de estudos ou na resolução de seus problemas matemáticos. Curvas essas que, a princípio, são trabalhadas no ensino médio, mas que por falta de aplicação na presente data de estudo, acabam desestimulando os estudantes no avanço dos estudos ligados a essas técnicas numéricas.

Dois fatores foram determinantes no desenvolvimento deste tema, o primeiro foi com o objetivo de se verificar se as técnicas aqui estudadas para os ajustes de curvas, também poderiam ser trabalhadas no ensino médio, de forma que os estudantes já adquiram os conhecimentos necessários dessas poderosas ferramentas matemáticas e que vejam a aplicação das mesmas no dia a dia e em algumas profissões. O outro está na possibilidade de se propor uma melhoria no método gráfico da estratificação do solo em duas camadas conhecido como método de Wenner.

Com a atual disposição da grade curricular de matemática na educação a nível médio, o conteúdo de funções, matrizes, determinantes e noções de estatística já vem sendo apresentado desde o 1º ano do ensino médio. E, quando esse aluno chega no 3º ano, sua formação matemática já lhe dá base suficiente para compreender o método numérico da regressão por mínimos quadrados e da interpolação polinomial.

Seguindo este raciocínio, os estudantes possuem ferramentas necessárias para desenvolver os cálculos matemáticos para a plotagem dos gráficos. Além de aprender as técnicas da regressão polinomial, os conteúdos que lhes serão apresentados, os auxiliarão bastante na compreensão de teorias apresentadas por outras disciplinas, como a Física e a Química, que por sua vez trabalham com dados experimentais de difícil manipulação. A proposta de trabalhar os conhecimentos matemáticos em aplicações que transcendem as atividades cotidianas da disciplina de matemática, vai de acordo com Parâmetros Curriculares Nacionais [8], que não vê interdisciplinaridade como a pretensão de criar novas disciplinas ou saberes, mas uma forma de utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista.

Além disso, se torna interessante mostrar ao estudante que nem sempre existem fórmulas que se ajustem bem aos dados experimentais e, quando existem, seu alto grau de complexidade nos impede de entender melhor seu comportamento. Dentro desse contexto, apresentamos aos alunos as técnicas de regressão polinomial que os

auxiliará nos processos de análise dos dados experimentais e na estimativa de valores não fornecidos pela pesquisa, mas que são de suma importância para algum tipo de aplicação.

Diante dessa vertente, esse trabalho busca responder a seguinte indagação: o aluno do ensino médio é capaz de compreender, usar ou identificar algumas situações em que as técnicas aqui propostas possam se aplicar? Visando responder essa pergunta, propomos discutir sobre as principais técnicas de ajuste de curvas e compará-las, a fim de compreender as particularidades de cada método. Por fim, propomos levar esse conhecimento às aulas práticas de matemática e física promovendo situações onde os métodos sejam aplicáveis.

A outra problemática que esse trabalho visa estudar, está aplicada no campo da eletricidade, mais especificamente, na obtenção da grandeza que influencia de forma determinante os projetos de malhas de aterramento. Para que um sistema de Energia Elétrica opere corretamente, promovendo sempre a continuidade do serviço, dentro dos limites de segurança pessoal, é fundamental que o quesito aterramento mereça um cuidado especial. Com isso projetos de malhas de aterramento são desenvolvidos, visando o maior controle da grandeza *resistividade elétrica* que é a principal responsável pela resistência que o aterramento oferece as correntes que penetram o solo.

O técnica de estratificação do solo em duas camadas, consiste em dividir o solo em duas regiões, afim de se determinar a *resistividade elétrica* de ambas, os resultados obtidos, auxilia na construção do projeto da malha de aterramento e conseqüentemente na segurança dos sistemas elétricos. A *resistividade elétrica* da primeira camada é determinada através do ponto de interseção entre a curva traçada pelos dados experimentais colhidos no método de Wenner e o eixo das ordenadas. Esse ponto não colhido experimentalmente por impossibilidades da própria medição, acaba sendo estimado através de um simples prolongamento da curva traçada a partir dos dados experimentais até a sua interceptação com eixo das ordenadas, isso sem nenhum critério matemático para tal ajuste.

Diante dessa falta de critério matemático fica a pergunta: será que um método matemático mais apurado para o ajuste da curva traçada a partir do método Wenner [16], não melhoraria em partes ou na totalidade a obtenção da resistividade elétrica? Portanto, visando responder a essa pergunta propomos apresentar métodos numéricos que tem total embasamento matemático para a determinação desse ponto com maior precisão e, assim, garantir maior fidedignidade no estimado para representar essa tão importante grandeza elétrica.

As técnicas de ajuste de curvas, consistem em determinar curvas que descrevam o comportamento geral dos dados colhidos experimentalmente e desenvolva sua relação de previsão. Através da análise de tendência, que consiste em usar o padrão dos dados para fazer previsões, iremos discutir sobre duas técnicas:

A primeira técnica, chamada de regressão por mínimos quadrados, é usada quando os dados fornecidos já exibirem uma quantidade significativa de erros por terem sido colhidos por um processo não muito preciso. A estratégia para esse caso será encontrar uma única curva que represente o comportamento geral dos dados. Como cada ponto fornecido pode estar com seu valor incorreto, não faremos aqui nesse método nenhum esforço adicional para que a curva absorva todos os pontos, ao contrário disso, tal curva será escolhida para sobrepor apenas os pontos que seguem um certo padrão.

A segunda técnica, chamada de interpolação, é usada quando se tem maior confiabilidade de que os dados foram medidos com alta precisão. Nestes casos, a técnica se resume em ajustar uma curva ou série de curvas que atendam diretamente a cada um dos pontos.

A Figura 1.1 faz um comparativo do ajuste de curvas usando as técnicas de regressão e interpolação.

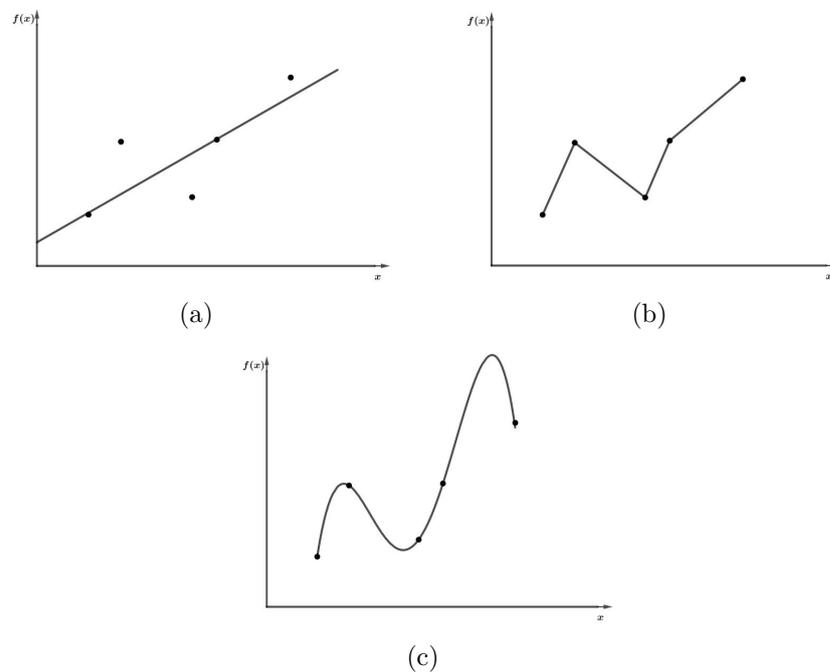


Figura 1.1: Três tentativas de ajustar a “melhor” curva aos cinco pontos dados. (a) Regressão por mínimos quadrados. (b) Interpolação linear. (c) Interpolação curvilínea.

1.1 Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, é apresentado um método de ajuste de curvas através da regressão por mínimos quadrados, esse método se mostra muito eficaz para aplicação em dados que podem exibir um grau significativo de erros na sua coleta.

No Capítulo 3, discute-se o método da interpolação, que nos permite fazer estimativas de valores entre dados colhidos de forma precisa.

No Capítulo 4, apresenta-se um experimento feito com alunos do 3º ano do ensino médio, onde os mesmos usaram algumas das técnicas apresentadas nesse trabalho para resolver um problema real de medição da resistência elétrica variável em função temperatura.

No Capítulo 5, apresenta-se todo o embasamento teórico que descreve como se dá a coleta de dados pelo método de Wenner, que por sua vez necessita de um método gráfico para chegar ao seu valor fim, durante o desenrolar do processo, chegamos a uma situação onde se necessita da estimativa de um valor no gráfico, que por sua vez, se mal determinado poderá inserir um enorme erro no método.

No Capítulo 6, exploramos um exemplo que foi desenvolvido no Capítulo 5 pelo método gráfico atualmente utilizado no processo de estratificação do solo em duas camadas, para enfim inserir as técnicas de ajuste de curvas, nas etapas que acabam por não usar técnica alguma.

Finalmente, no Capítulo 7, discute-se a implementação do método numérico em atividades com alunos do ensino médio e, também faremos uma análise da inserção das técnicas de ajuste de curvas no método de estratificação do solo.

2 Regressão por mínimos quadrados

Todos os conceitos e demonstrações desta seção foram baseados nas referências [2], [4], [5], [6], [7], [9], [11] [21], [26], [29] e [30]

Ajustar curvas à dados colhidos experimentalmente nem sempre é uma tarefa fácil. Em casos em que os dados estiverem associados à um erro substancial, ocasionado por uma coleta ineficiente ou pela incerteza das grandezas medidas, o método da interpolação polinomial não apresenta um bom ajuste de curva. Tomando como exemplo a Figura 2.1(a), observamos a disposição dos pontos no plano cartesiano, daí podemos perceber uma certa relação crescente entre as coordenadas x e y de cada ponto através de uma inspeção visual. Agora, caso se resolva associar os dados através de um polinômio interpolador de grau 6, temos uma curva que passará por todos os pontos conforme a Figura 2.1(b). Contudo, devido à grande variabilidade dos dados, a curva oscilará e isso fará com que os valores intermediários que venham a ser previstos estejam sujeitos à uma grande margem de erro, pois, parecem não seguir o padrão dos demais pontos coletados.

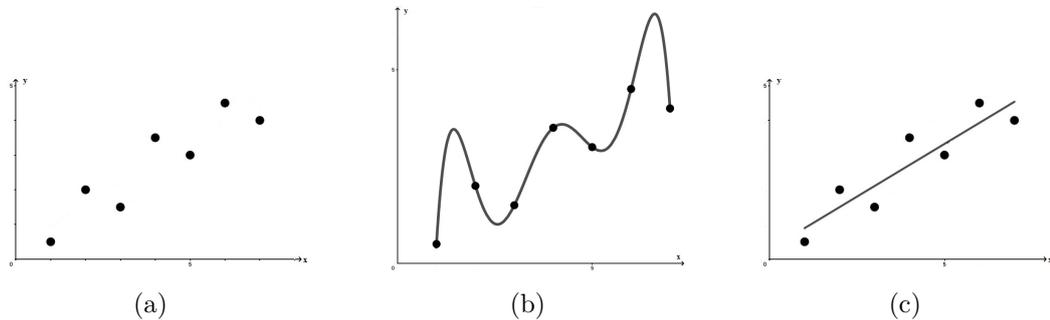


Figura 2.1: Ajustes das curvas nos planos cartesianos. (a) Representação no plano cartesiano de 7 pontos colhidos experimentalmente. (b) Ajuste polinomial. (c) Ajuste por mínimos quadrados. Fonte:[9].

Uma estratégia utilizada para sanar ou minimizar esse tipo de erro, seria traçar uma curva que seguisse a tendência geral dos dados sem necessariamente passar pelos pontos colhidos, a Figura 2.1(c) mostra como uma reta representa bem a tendência geral dos dados apesar de não passar por nenhum dos pontos.

O que será feito neste capítulo é apresentar os critérios matemáticos que justifiquem a escolha desta curva que melhor se adequa aos pontos dados. Assim, se elimina a escolha arbitrária da mesma, ou seja, padronizamos a solução para o problema. A regressão por mínimos quadrados é uma técnica matemática de determinação da

curva que minimiza a discrepância entre os dados coletados e os pontos da curva que representam a tendência geral dos dados.

2.1 Regressão linear por mínimos quadrados

A regressão linear por mínimos quadrados consiste em determinar uma reta que melhor se adequa ao conjunto de pares $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ dados ou colhidos experimentalmente. A reta é descrita pela equação

$$y = a_0 + a_1x + e, \quad (2.1)$$

onde:

- a_0 é o coeficiente que representa a interseção da reta de regressão com o eixo y ;
- a_1 é o coeficiente que representa a inclinação da reta;
- e é o erro ou resíduo entre a reta de regressão e os pontos dados.

Se isolarmos o erro e na equação (2.1), podemos ver na equação (2.2) abaixo com maior clareza, que o mesmo representa a discrepância entre o valor verdadeiro do dado, que aqui estamos representando por y , e o valor aproximado, $a_0 + a_1x$, proposto pela equação linear:

$$e = y - a_0 - a_1x. \quad (2.2)$$

Com o objetivo de encontrar uma reta que melhor se ajuste aos dados, buscamos uma forma de minimizar o erro da equação (2.2), com isso chegamos que tal abordagem seria minimizar a soma dos quadrados dos erros entre o valor medido y e o valor calculado pelo modelo linear $a_0 + a_1x$, como segue na equação (2.3). Esse critério tem a vantagem de fornecer uma única reta para um dado conjunto de dados, evitando assim várias soluções para o mesmo problema.

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i)^2. \quad (2.3)$$

Objetivando agora, determinar os valores dos coeficientes a_0 e a_1 que minimizem a equação (2.3), para isso derivamos a mesma em relação aos coeficientes e igualamos a

zero, uma vez que do cálculo diferencial, sabemos que igualando-se a primeira derivada de uma função à zero, podemos obter seu valor de máximo ou de mínimo. No nosso caso teremos valor de mínimo, já que o coeficiente angular a_1 é negativo.

A derivada com relação a cada coeficiente é vista no sistema (2.4):

$$\begin{cases} \frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0, \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n [(y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i] = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Como todos os somatórios variam de $i = 1$ a n , optamos por simplificar os símbolos, separando o somatório das parcelas nas parcelas dos somatórios, que ficou:

$$\begin{cases} \sum y_i - \sum a_0 - \sum a_1 x_i = 0, \\ \sum y_i x_i - \sum a_0 x_i - \sum a_1 x_i^2 = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Como $\sum a_0 = n a_0$, podemos simplificar a expressão acima no sistema de equação linear em duas variáveis (a_0 e a_1), como segue:

$$\begin{cases} n a_0 + (\sum x_i) a_1 = \sum y_i, \\ (\sum x_i) a_0 + (\sum x_i^2) a_1 = \sum x_i y_i, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde as equações que compõe o sistema 2.6 são chamadas de *equações normais*.

Para que o sistema 2.6 tenha uma única solução, a matriz formada a partir dos coeficientes das equações normais, deve ter determinante diferente de zero, ou seja:

$$\mathbf{detA} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \neq 0,$$

e isso acontecerá, desde que $n \sum x_i^2 \neq (\sum x_i)^2$.

Resolvendo o sistema 2.6 para a variável a_1 , temos:

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (2.7)$$

Isolando a_0 na primeira equação normal do sistema (2.6), temos que:

$$a_0 = \frac{\sum y_i}{n} - a_1 \frac{\sum x_i}{n}. \quad (2.8)$$

Como $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$ e $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ são respectivamente as médias de y e x , podemos reescrever a equação (2.8), que determina o valor de a_0 em função de a_1 , da seguinte forma:

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}. \quad (2.9)$$

Assim, temos nas expressões encontradas em (2.7) e (2.9), uma forma de determinar os coeficientes da reta de regressão linear através do método dos mínimos quadrados.

Segue um exemplo que nos ajudará a compreender como funciona o método determinado nesse tópico.

Exemplo 1. Dados os pontos $(1, 0.5)$, $(2, 2.0)$, $(3, 1.5)$, $(4, 3.5)$, $(5, 3.0)$, $(6, 4.5)$ e $(7, 4.0)$, ajuste uma reta que os descreva através da regressão linear por mínimos quadrados.

Solução: Como temos 7 pontos a serem ajustados por uma reta através da regressão linear por mínimos quadrados, logo $n = 7$.

Resolvendo os somatórios das coordenadas dos pontos fornecidos temos:

$$\sum x_i y_i = 1 \times 0.5 + 2 \times 2.0 + 3 \times 1.5 + 4 \times 3.5 + 5 \times 3.0 + 6 \times 4.5 + 7 \times 4.0 = 93;$$

$$\sum x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140;$$

$$\sum x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28;$$

$$\sum y_i = 0.5 + 2.0 + 1.5 + 3.5 + 3.0 + 4.5 + 4.0 = 19.$$

Com as expressões $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ e $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$, podemos chegar aos valores médios das coordenadas x e y , como segue: $\bar{x} = 28/7 = 4$ e $\bar{y} = 19/7 = 2,714286$.

Substituindo os valores encontrados acima nas equações (2.7) e (2.9), temos:

$$a_1 = \frac{7(93) - 28(19)}{7(140) - (28)^2} = 0,607143 \text{ e } a_0 = 2,714286 - 0,607143(4) = 0,285714.$$

Com os coeficientes já determinados, escrevemos a equação da reta:

$$y = 0,285714 + 0,607143x.$$

A reta junto aos dados é mostrada na Figura 2.2.

2.1.1 Análise do erro da regressão linear

Examinando com mais detalhes a forma que os resíduos foram calculados, diversas propriedades adicionais aos ajustes podem ser anunciadas. Observando a equação

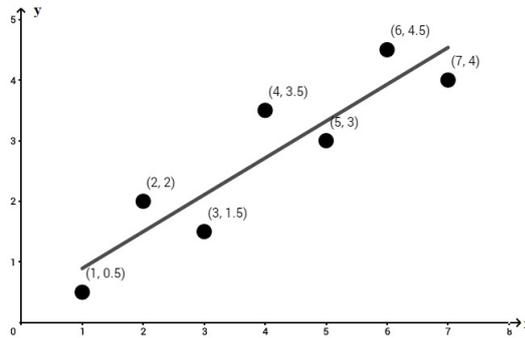


Figura 2.2: Representação gráfica do Exemplo 1 usando ajuste por mínimos quadrados.

da soma dos quadrados ver equação (2.3), que neste caso representa o quadrado da distância vertical entre os pontos e a reta de regressão, conforme se observa na Figura 2.3.

Percebemos ainda que a mesma tem o equacionamento algébrico semelhante à equação (2.10), que descreve a soma dos quadrados dos resíduos entre os pontos dados em uma pesquisa estatística e a média aritmética dos mesmos, conforme (2.10).

$$S_t = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2. \quad (2.10)$$

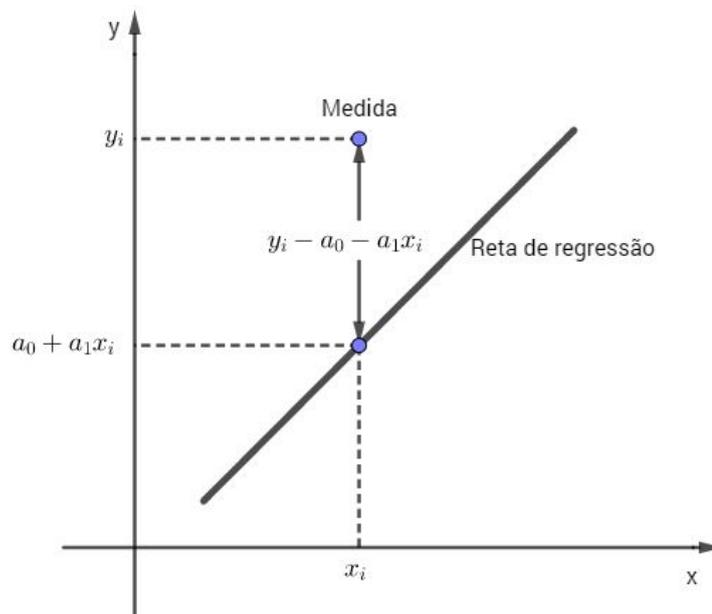


Figura 2.3: Resíduo na regressão linear.

Essa comparação fica mais evidente quando se tem um dos casos:

1. A variação dos pontos em torno da reta tem valor absoluto parecido ao longo do intervalo analisado;
2. A distribuição desses pontos nas proximidades da reta de regressão segue uma distribuição normal, que é uma distribuição de probabilidades mais utilizadas para modelar fenômenos naturais.

Se algum desses critérios forem satisfeitos, podemos demonstrar que a regressão por mínimos quadrados fornecerá as mais prováveis estimativas para os coeficientes a_0 e a_1 .

Temos ainda que, se os dois critérios acima apresentados forem satisfeitos, podemos, em comparação à equação do desvio padrão dada por (2.11), determinar o que chamamos de erro-padrão da estimativa dado pela equação (2.12).

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}} \quad (2.11)$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n - 2}} \quad (2.12)$$

onde o subscrito “ y/x ” indica que o erro previsto para um dado y está vinculado ao valor particular de x . E ainda, temos a observar que agora estamos dividindo por $(n - 2)$, pois foram duas estimativas provenientes dos dados a_0 e a_1 usados no cálculo de S_r e com isso, perdemos dois graus de liberdade.

Conforme representa a Figura 2.4(b), o erro-padrão da estimativa quantifica a dispersão dos dados em torno da reta de regressão, assim como o desvio padrão quantifica a dispersão em torno da média ver Figura 2.4(a).

Os conceitos apresentados podem ser usados para nos informar sobre a eficiência do ajuste, em outras palavras, poderá ser feita comparação entre diversas regressões, conforme Figura 2.5.

Para que consigamos fazer comparações usando os conceitos apresentados, procedemos da seguinte forma, com os dados originais calculamos, pela equação (2.10), a soma total dos quadrados das discrepâncias dos dados em torno da média da variável dependente (no caso, y). Esse resultado é representado por S_t , que denota o módulo do erro residual antes da regressão. Depois de se determinar a reta de regressão, podemos, pela equação (2.3), encontrar S_r que é a soma dos quadrados dos resíduos em torno

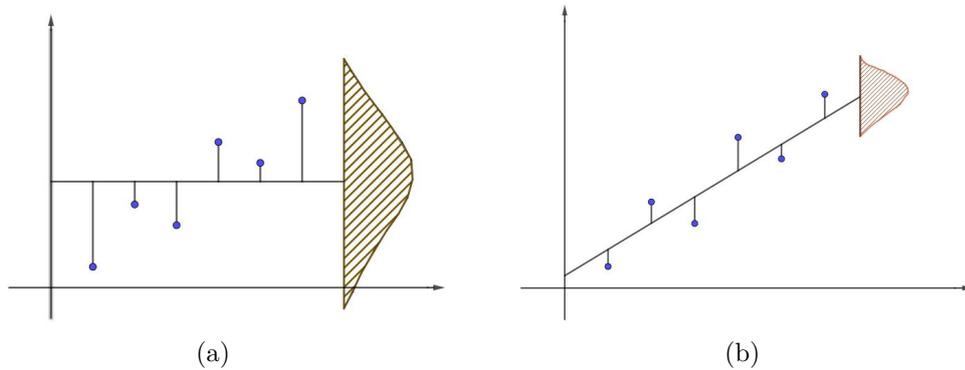


Figura 2.4: Dispersão dos dados. (a) Dispersão dos dados em torno da média da variável dependente. (b) Dispersão dos dados em torno da reta de melhor ajuste. Fonte:[9].

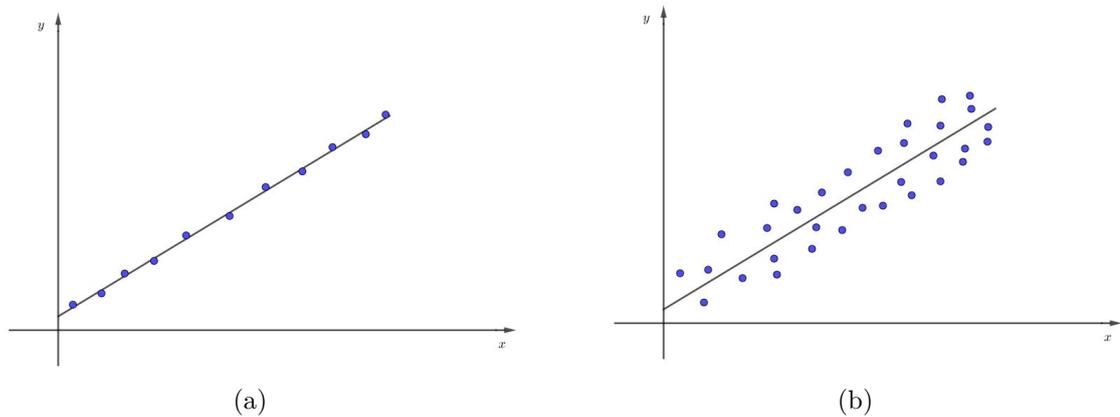


Figura 2.5: Exemplos de regressão linear. (a) Regressão linear com erros residuais pequenos. (b) Regressão linear com erros residuais grandes. Fonte:[9].

da reta de regressão. Com a diferença entre S_t e S_r , temos como quantizar a melhora ou redução do erro quando descrevemos os dados em termos de uma reta, em vez de valores médios.

A equação (2.13) fornece essa diferença de forma normalizada.

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}, \quad (2.13)$$

onde r^2 é chamado de coeficiente de determinação e r é o coeficiente de correlação.

Como se observa pela Figura 2.4, S_t que representa a soma dos quadrados dos resíduos entre os pontos em uma pesquisa estatística e a média aritmética dos mesmos, é sempre maior ou igual a S_r , que por sua vez representa a soma dos quadrados das

distâncias vertical entre os pontos e a reta de regressão, isso porque a reta de regressão é de forma única a melhor reta de ajuste para os pontos dados, assim garantimos que a equação (2.13) sempre será positiva.

Dessa forma, para um ajuste perfeito, esperamos que $S_r = 0 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$, isso representa que a reta contém 100% dos pontos dados, já para $r^2 = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow S_r = S_t$, o ajuste não propõe nenhuma melhoria.

Exemplo 2. Calcule o desvio-padrão total, o erro-padrão da estimativa e o coeficiente de correlação para os dados (1, 0.5), (2, 2.0), (3, 1.5), (4, 3.5), (5, 3.0), (6, 4.5) e (7, 4.0).

Solução: Como temos 7 pontos fornecidos no problema, $n = 7$.

A média das coordenadas y dos pontos dados é

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{0.5 + 2.0 + 1.5 + 3.5 + 3.0 + 4.5 + 4.0}{7} = 2.714286.$$

Com a média dos dados já calculada, pela equação (2.10) podemos calcular a soma dos quadrados dos resíduos, como segue

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 4.9031 + 0.5102 + 1.4745 + 0.6173 + 0.0816 + 3.1888 + 1.6531 = 12.4286,$$

Pela equação (2.11), podemos calcular o desvio-padrão

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{12.4286}{7 - 1}} = 1.4392,$$

Para determinar o erro-padrão, primeiro devemos encontrar o valor S_r dado por (2.3).

$$S_r = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2.$$

Como $a_1 = 0.607143$ e $a_0 = 0.285714$, conforme encontrado no Exemplo 2.1, temos que $S_r = (0.5 - 0.285714 - 0.607143 \times 1)^2 + (2.0 - 0.285714 - 0.607143 \times 2)^2 + (1.5 - 0.285714 - 0.607143 \times 3)^2 + (3.5 - 0.285714 - 0.607143 \times 4)^2 + (3.0 - 0.285714 - 0.607143 \times 5)^2 + (4.5 - 0.285714 - 0.607143 \times 6)^2 + (4.0 - 0.285714 - 0.607143 \times 7)^2 = 2.107143$.

Agora, podemos determinar o erro-padrão pela equação (2.12).

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} = \sqrt{\frac{2.627557}{7-2}} = 0.724922,$$

Portanto, como $S_{y/x} < S_y$ a reta de regressão linear tem mérito. Logo, o coeficiente de determinação determinará o grau de melhora.

Pela equação (2.13), temos

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{12.4286 - 2.627557}{12.4286} = 0.788588$$

Assim, o resultado aponta que 78.86% da incerteza original foi explicada pelo modelo linear.

2.1.2 Linearização de equações não-lineares

Em muitos casos, nos deparamos com situações onde os dados não ficam bem representados por uma reta de regressão, mesmo a técnica sendo poderosa como já foi verificado anteriormente, isso acontece quando não existe uma relação linear entre as variáveis dependentes e independentes. Por isso, o primeiro passo da análise é sempre traçar e inspecionar os dados visualmente, a fim de determinar se o modelo linear se aplica.

Para o caso onde os dados são visualmente curvilíneos, têm-se as técnicas como regressão polinomial que serão abordadas na seção 2.2, ou a técnica da transformação ou linearização, que nos dá a capacidade de representar dados antes não-lineares de uma forma linearizada.

Os casos mais comuns de aplicação da linearização, acontecem quando temos os dados se comportando como algum dos modelos abaixo:

- Modelo exponencial

$$y = \alpha_1 e^{\beta_1 x} \tag{2.14}$$

onde α_1 e β_1 são as constantes a serem determinadas e desde que $\beta_1 \neq 0$, a equação representa uma relação não-linear entre y e x .

A linearização, que é a modelagem de uma equação não-linear através de uma

equação linear, para o modelo exponencial, se dá aplicando o logaritmo natural na equação (2.14) para obter

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln(\alpha_1) + \ln(e^{\beta_1 x}) \\ \ln(y) &= \ln(\alpha_1) + \beta_1 x \ln(e). \end{aligned}$$

Como $\ln(e) = 1$ temos,

$$\ln(y) = \ln(\alpha_1) + \beta_1 x. \quad (2.15)$$

Logo, um gráfico $\ln(y)$ em função de x irá fornecer uma reta com intersecção com o eixo $\ln(y)$ em $\ln(\alpha_1)$ e inclinação β_1 .

- Modelo de potência simples

$$y = \alpha_2 x^{\beta_2} \quad (2.16)$$

onde α_2 e β_2 são os coeficientes constantes a serem determinados. A equação representa uma relação não-linear para $\beta_2 \neq 0$ ou $\beta_2 \neq 1$.

A equação (2.16) será linearizada se tomarmos o logarítimo na base 10 para obter

$$\begin{aligned} \log(y) &= \log(\alpha_2 x^{\beta_2}) \\ \log(y) &= \log(\alpha_2) + \log(x^{\beta_2}). \end{aligned}$$

Organizando a equação temos,

$$\log(y) = \beta_2 \log(x) + \log(\alpha_2). \quad (2.17)$$

Logo, um gráfico de $\log(y)$ em função de $\log(x)$, fornecerá um modelo linear para a equação (2.16), onde β_2 é o coeficiente angular e $\log(\alpha_2)$ é a intersecção do eixo $\log(y)$ com a reta de linearização.

- Modelo da taxa de crescimento da saturação

$$y = \alpha_3 \frac{x}{\beta_3 + x} \quad (2.18)$$

onde α_3 e β_3 são os coeficientes constantes a serem determinados.

A equação (2.18) pode ser linearizada invertendo-a para obter

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{\alpha_3 x}{\beta_3 + x}} = \frac{\beta_3 + x}{\alpha_3 x}.$$

Organizando a equação temos,

$$\frac{1}{y} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} \frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha_3}. \quad (2.19)$$

Assim, o gráfico $1/y$ em função de $1/x$ será linear, com uma inclinação β_3/α_3 é uma interseção com o eixo $1/y$ em $1/\alpha_3$.

Nas formas transformadas, os modelos podem ser usados pelas técnicas da regressão linear para se determinar os coeficientes constantes. Depois de determiná-los, as equações podem retornar ao seu estado inicial a fim de ajustar os dados não lineares.

A Figura 2.6 apresenta o gráfico dos modelos não-lineares e suas respectivas retas de linearização.

2.2 Regressão polinomial

Como definimos na seção anterior, podemos deduzir a equação de uma reta através do método dos mínimos quadrados. Embora essa reta consiga descrever o comportamento de vários dados experimentais, existem alguns conjuntos de dados que podem não ser representados de uma forma satisfatória por uma reta, ver Figura 2.7(a). Isso acontece porque a relação entre as variáveis independentes e dependentes nem sempre são lineares. Por isso, antes de se propor qualquer tipo de análise de regressão, primeiro devemos traçar e inspecionar visualmente o comportamento dos dados, a fim de verificar se algum tipo de modelo linear se ajusta aos mesmos. Por exemplo, podemos ver pela Figura 2.7(b) que uma curva seria a melhor opção para ajustar os dados.

Assim, a proposta deste tópico é apresentar um ajuste para tais dados usando a equação polinomial através do método dos mínimos quadrados, chamamos de regressão polinomial.

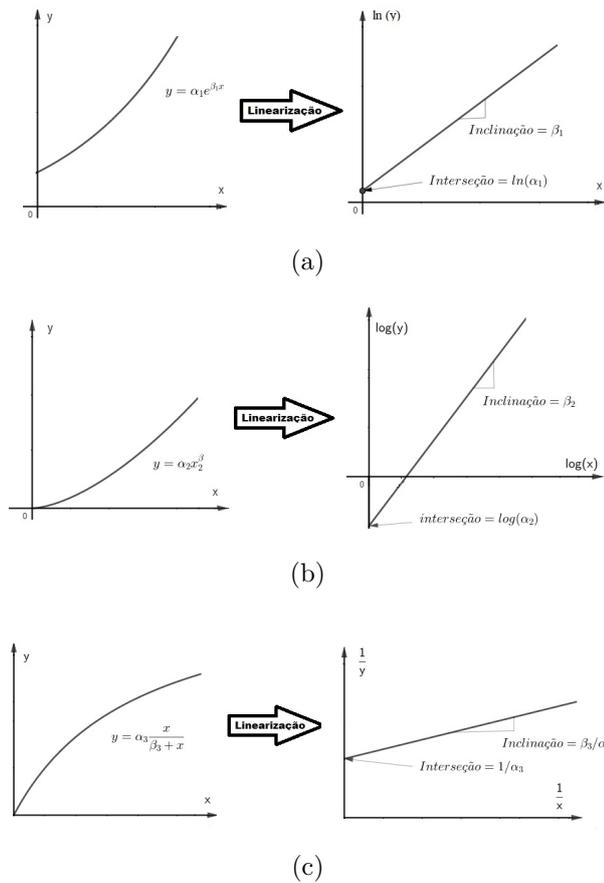


Figura 2.6: Modelos não-lineares e suas respectivas versões linearizadas. (a) Modelo exponencial. (b) Modelo de potência Simples. (c) Modelo da taxa de crescimento da saturação.

A princípio iremos deduzir o método da regressão polinomial para um polinômio de grau 2, em seguida expandiremos o raciocínio para determinar um polinômio grau qualquer. Para evitar que a escolha da ordem de um polinômio seja um processo especulativo, fazemos primeiro a inspeção visual dos dados colhidos e, a partir da tendência geral dos pontos, propomos o grau do polinômio que melhor se ajustará. Depois de escolhido o grau do polinômio que aparentemente é o melhor para representar a variabilidade dos dados, sempre devemos calcular os coeficientes de determinação e correlação, já que tais coeficientes, conforme vimos no tópico anterior, nos quantifica a melhora ou a redução de erro decorrente da descrição dos dados em termos de uma curva, em vez de um valor médio.

Para um polinômio de grau 2, o método da regressão polinomial, consiste em descrever a equação da curva:

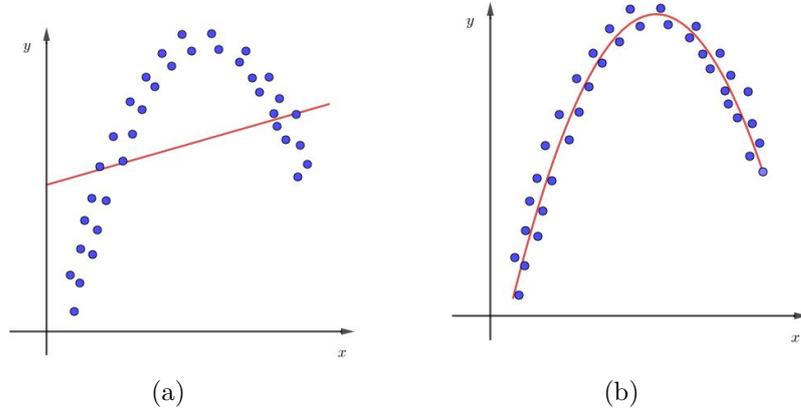


Figura 2.7: Ajuste de curvas aos dados não lineares. (a) Dados não adequados para uma regressão linear por mínimos quadrados. (b) Indicação de que uma parábola é preferível.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + e, \quad (2.20)$$

onde e é o erro entre o ponto verdadeiro da curva e o ponto encontrado pelo polinômio de grau 2.

Neste caso, conforme procedemos na Seção 2.1, o nosso objeto aqui é reduzir esse resíduo ao máximo, sendo assim, a soma dos quadrados dos resíduos é dada por (2.21).

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2. \quad (2.21)$$

Tomando a derivada da equação (2.21) em relação a cada um de seus coeficientes e igualando a zero, teremos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) = 0, \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) = 0, \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum x_i^2(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Essas equações podem ser reorganizadas para determinar o seguinte sistema de equações lineares em três variáveis (a_0 , a_1 e a_2), onde estas são denominadas de equações normais, conforme as equações do sistema (2.23).

$$\begin{cases} na_0 + \sum x_i a_1 + \sum x_i^2 a_2 = \sum y_i, \\ \sum x_i a_0 + \sum x_i^2 a_1 + \sum x_i^3 a_2 = \sum x_i y_i, \\ \sum x_i^2 a_0 + \sum x_i^3 a_1 + \sum x_i^4 a_2 = \sum x_i^2 y_i, \end{cases} \quad (2.23)$$

onde os somatórios que variam de $i = 1$ a n , tiveram seus índices suprimidos simplesmente para termos expressões mais limpas.

Assim, concluímos que determinar o polinômio de grau 2 por mínimos quadrados, se resume em encontrar a solução do sistema de três equações lineares com três variáveis.

Para se determinar o erro-padrão, usamos a expressão:

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-3}}, \quad (2.24)$$

que é semelhante à equação (2.12), porém, temos agora no denominador $(n-3)$, pois, perdemos 3 graus de liberdade ao calcular os valores dos três coeficientes de S_r .

Neste caso, os coeficientes de determinação e correlação, são:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \quad (2.25)$$

e

$$r = \sqrt{\frac{S_t - S_r}{S_t}}. \quad (2.26)$$

No próximo exemplo, vamos determinar a equação de ajuste dos dados usando a regressão polinomial nos mesmos pontos utilizados no Exemplo 1, (resolvido pelo método de regressão linear). O objetivo é demonstrar o método aqui estudado e também comparar os resultados encontrados.

Exemplo 3. Ajuste um polinômio do segundo grau aos dados $(1, 0.5)$, $(2, 2.0)$, $(3, 1.5)$, $(4, 3.5)$, $(5, 3.0)$, $(6, 4.5)$ e $(7, 4.0)$.

Solução: Encontrar a equação de regressão polinomial usando um polinômio de grau 2, consiste em resolver o sistema (2.23) mas, antes, vamos determinar o valor dos coeficientes que compõem suas respectivas equações.

Pelos dados, temos que $n = 7$, pois temos 7 pontos para serem ajustados pela curva. Em seguida, procedemos com o cálculo da média das coordenadas dos pontos

fornecidos como segue:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{7} = \frac{28}{7} = 4 \quad \text{e}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{0.5 + 2.0 + 1.5 + 3.5 + 3.0 + 4.5 + 4.0}{7} = \frac{19}{7} = 2.7143.$$

Calculamos os somatórios dos coordenadas fornecidas, conforme abaixo:

$$\left| \begin{array}{l|l|l} \sum x_i = 28 & \sum x_i^4 = 4676 & \sum x_i^2 y_i = 511 \\ \sum x_i^2 = 140 & \sum y_i = 19 & \\ \sum x_i^3 = 784 & \sum x_i y_i = 93 & \end{array} \right|$$

Portanto, teremos o seguinte sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{l} 7a_0 + 28a_1 + 140a_2 = 19, \\ 28a_0 + 140a_1 + 784a_2 = 93, \\ 140a_0 + 784a_1 + 4676a_2 = 511. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Pela regra de Cramer

$$a_0 = \frac{\left| \begin{array}{ccc|c} 19 & 28 & 140 & \\ 93 & 140 & 784 & \\ 511 & 784 & 4676 & \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc|c} 7 & 28 & 140 & \\ 28 & 140 & 784 & \\ 140 & 784 & 4676 & \end{array} \right|} = -0.4286,$$

$$a_1 = \frac{\left| \begin{array}{ccc|c} 7 & 19 & 140 & \\ 28 & 93 & 784 & \\ 140 & 511 & 4676 & \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc|c} 7 & 28 & 140 & \\ 28 & 140 & 784 & \\ 140 & 784 & 4676 & \end{array} \right|} = 1.0833,$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 28 & 19 \\ 28 & 140 & 93 \\ 140 & 784 & 511 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 28 & 140 \\ 28 & 140 & 784 \\ 140 & 784 & 4676 \end{vmatrix}} = -0.0595.$$

Portanto, a equação quadrática por mínimos quadrados é:

$$y = -0.4286 + 1.0833x - 0.0595x^2.$$

Com o objetivo de calcular o erro-padrão e os coeficientes de determinação e correlação, vamos organizar os dados necessários na Tabela 1.

| x_i | y_i | $(y_i - \bar{y})^2$ | $(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2$ |
|----------|-------|---------------------|-------------------------------------|
| 1 | 0.5 | 4.9031 | 0.0091 |
| 2 | 2.0 | 0.5102 | 0.2500 |
| 3 | 1.5 | 1.4745 | 0.6175 |
| 4 | 3.5 | 0.6173 | 0.2996 |
| 5 | 3.0 | 0.0816 | 0.2504 |
| 6 | 4.5 | 3.1887 | 0.3258 |
| 7 | 4.0 | 1.6530 | 0.0571 |
| Σ | 19 | 12.4284 | 1.8095 |

Tabela 1: Dados para o cálculo do erro-padrão.

Assim, o erro-padrão da estimativa baseado na regressão polinomial é:

$$S(y/x) = \sqrt{\frac{1.8095}{(7-3)}} = 0.6726,$$

e o coeficiente de determinação $r^2 = \frac{12.4284 - 1.8095}{12.4284} = 0,8544$.

Os resultados indicam que 85,44% da incerteza original foi explicada pelo modelo. Comparando esse resultado com o resultado obtido no Exemplo 2, temos que o modelo de regressão polinomial para os dados fornecidos, representa melhor a variabilidade dos dados do que o modelo de regressão linear.

A Figura 2.8 representa os dados do exemplo sendo representados pelo modelo de regressão polinomial.

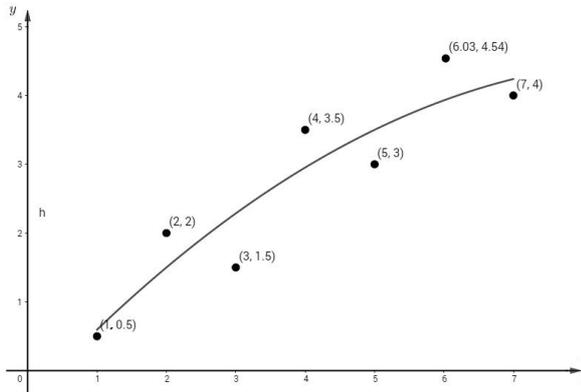


Figura 2.8: Ajuste por um polinômio de grau 2.

O método aqui descrito para um polinômio do segundo grau, pode ser generalizado para um polinômio de grau m , conforme a equação (2.28).

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + e. \quad (2.28)$$

Desenvolvendo o método dos mínimos quadrados para o polinômio de grau m , chegaremos a um sistema como $m + 1$ equações e $m + 1$ variáveis, cujo erro-padrão é:

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n - (m + 1)}}. \quad (2.29)$$

A equação foi dividida por $n - (m + 1)$ já que foi perdido $(m + 1)$ graus de liberdade na determinação dos coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ usados no cálculo de S_r . Para os coeficientes de determinação e correlação, podemos proceder como já definido pelas equações (2.25) e (2.26).

2.3 Modelo linear geral por mínimos quadrados

Antes de avançar para a regressão não linear por mínimos quadrados, vamos discutir nesse tópico algumas questões que enriquecerão a compreensão dos conteúdos já discutidos.

Até o momento, analisamos dois tipos de regressão: linear simples e a polinomial. Se observarmos os casos, veremos que os dois pertencem ao seguinte modelo geral de mínimos quadrados lineares:

$$y = a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_mz_m + e, \quad (2.30)$$

onde z_0, z_1, \dots, z_m são $m + 1$ funções e e é o erro entre o ponto verdadeiro da curva e o ponto encontrado pelo polinômio. Facilmente conseguimos perceber que a regressão linear simples e a polinomial se encaixam nesse modelo, para isso basta que a função base seja respectivamente $z_0 = 1, z_1 = x$ para retomar o modelo linear simples e monômios simples como em $z_0 = x^0 = 1, z_1 = x, z_2 = x^2, \dots, z_m = x^m$, para representar a regressão polinomial.

A terminologia linear é usada apenas para demonstrar como o modelo depende de seus parâmetros. Como vimos na regressão polinomial, as próprias funções a serem modeladas pelo método dos mínimos quadrados podem não ser lineares, como exemplo, podemos ter os $z_i; i = 0, 1, \dots, m$ da equação (2.30) como funções trigonométricas como, por exemplo,

$$y = a_0 + a_1\cos(\omega t) + a_2\sen(\omega t).$$

Já, por outro lado, uma equação simples como

$$f(x) = a_0(1 - e^{-a_1x})$$

é de fato não linear em relação aos parâmetros, pois, a mesma não pode ser manipulada na forma da equação (2.30).

Uma maneira de analisar a equação (2.30), seria escrever a mesma na forma matricial como:

$$Y = ZA + E, \quad (2.31)$$

onde Z é a matriz dos valores calculados das funções base nos valores medidos através das variáveis independentes:

$$Z = \begin{bmatrix} z_{01} & z_{11} & \dots & z_{m1} \\ z_{02} & z_{12} & \dots & z_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{0n} & z_{1n} & \dots & z_{mn} \end{bmatrix};$$

onde m é o número de variáveis da matriz e n a quantidade de pontos fornecidos pela pesquisa (como $n \geq m + 1$, na maioria das vezes a matriz não é quadrada).

O vetor coluna Y apresenta os valores observados das variáveis independentes

$$Y^T = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n],$$

o vetor coluna A apresenta os coeficientes desconhecidos

$$A^T = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_m],$$

já o vetor coluna E contém os resíduos

$$E^T = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n].$$

A soma dos quadrados dos resíduos, como feita por todo esse capítulo, podem ser encontrada por:

$$S_r = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j z_{ji} \right)^2.$$

Para encontrar as equações normais na forma matricial, basta tomarmos as derivadas parciais em relação a cada um dos coeficientes e igualá-los a zero.

$$[Z^T Z]A = Z^T Y. \tag{2.32}$$

É possível demonstrar que a equação (2.32) é equivalente às equações normais desenvolvidas para os métodos de regressão linear simples e polinomial.

Para isolar a matriz A , que contém os coeficientes desconhecidos da equação matri-

cial, basta multiplicar ambos os lados da equação (2.32), pela seguinte matriz $[Z^T Z]^{-1}$, já que sabemos pela teoria das matrizes que o produto de uma matriz por sua inversa nos dá a matriz identidade e essa por sua vez é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, sendo assim temos:

$$[Z^T Z]^{-1}[Z^T Z]A = [Z^T Z]^{-1}Z^T Y \Leftrightarrow$$

$$IA = [Z^T Z]^{-1}Z^T Y \Leftrightarrow$$

$$A = [Z^T Z]^{-1}Z^T Y. \quad (2.33)$$

Como não podemos garantir que a matriz $[Z^T Z]^{-1}$ seja sempre inversível, podemos concluir que a abordagem apresentada é ineficiente para resolver um conjunto de equações simultâneas, entretanto do ponto de vista estatístico, existem algumas razões para se determinar a inversa e examinar seus coeficientes, porém esse estudo não será discutido nesse trabalho.

2.4 Regressão não-linear

Nos casos em que os pontos colhidos tem uma relação não linear entre seus dados dependentes e independentes, se faz necessário a escolha de um modelo que tem a dependência não linear com seus parâmetros. Por exemplo,

$$f(x) = a_0(1 - e^{-a_1 x}) + e. \quad (2.34)$$

Porém esse tipo de equação não pode ser manipulada de forma que fique semelhante a equação (2.30), que é a equação geral do método dos mínimos quadrados lineares.

Seguindo a mesma ideia da regressão linear por mínimos quadrados, a regressão não-linear é baseada na obtenção dos coeficientes que minimizem a soma dos quadrados dos resíduos.

Para o caso não-linear, o método que seguimos para a determinação dos coeficientes da equação proposta provém de uma forma interativa chamado, *método de Gauss-Newton*, que é o algoritmo minimizar a soma dos quadrados dos resíduos entre o dados e as equações não-lineares.

Para o desenvolvimento do método, expressamos genericamente a equação não-linear por:

$$y_i = f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_m) + e_i,$$

onde y_i é o valor medido da variável dependente, $f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_m)$ é a função não-linear que depende dos coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ e da variável independente x_i , e e_i é um erro aleatório. Para simplificar a notação, vamos escrever o modelo apresentado da seguinte forma:

$$y_i = f(x_i) + e_i. \quad (2.35)$$

No modelo não-linear apresentado em (2.35), a função $f(x_i)$ pode ser expandido pela série de Taylor em torno dos valores dos parâmetros e truncada depois da primeira derivada. Assim teremos, por exemplo, a seguinte expressão para um caso com dois parâmetros:

$$f(x_i)_{j+i} = f(x_i)_j + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_1} \Delta a_1, \quad (2.36)$$

onde j é a aproximação inicial, $j+1$ é a previsão, $\Delta a_0 = a_{0,j+1} - a_{0,j}$ e $\Delta a_1 = a_{1,j+1} - a_{1,j}$. Assim, conseguimos linearizar o modelo inicial em relação aos coeficientes a_0 e a_1 . Sendo assim, podemos usar o modelo expandido como a função não-linear em (2.35) e obtemos:

$$y_i = f(x_i)_j + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_1} \Delta a_1 + e_i,$$

ou, equivalente,

$$y_i - f(x_i)_j = \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a_1} \Delta a_1 + e_i.$$

Observe que, a forma matricial, se assemelha a equação matricial (2.31) do método dos mínimos quadrados linear

$$D = Z_j \Delta A + E, \quad (2.37)$$

onde Z_j é a matriz das derivadas parciais da função, calculada na aproximação inicial j , D é o vetor que contém as diferenças entre os valores medidos e os valores encontrados pela função e ΔA é o vetor que contém a variação nos valores dos parâmetros:

$$Z_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1)}{\partial a_0} & \frac{\partial f(x_1)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f(x_2)}{\partial a_0} & \frac{\partial f(x_2)}{\partial a_1} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f(x_n)}{\partial a_0} & \frac{\partial f(x_n)}{\partial a_1} \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} y_1 - f(x_1) \\ y_2 - f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n - f(x_n) \end{bmatrix}; \Delta A = \begin{bmatrix} \Delta a_0 \\ \Delta a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta a_m \end{bmatrix};$$

sendo n o número de pontos dados e $\frac{\partial f(x_i)}{\partial a_k}$ a derivada parcial da função com relação ao k -ésimo parâmetro calculada no i -ésimo ponto dado.

Aplicando a teoria linear dos mínimos quadrados à equação (2.37), obtemos as equações normais abaixo (que se assemelham a equação (2.32)):

$$[Z_j^T Z_j] \Delta A = Z_j^T D. \quad (2.38)$$

Logo, utilizando (2.33) e resolvendo a equação (2.38) para determinar ΔA , temos:

$$\Delta A = [Z_j^T Z_j]^{-1} Z_j^T D. \quad (2.39)$$

A expressão ΔA em (2.39), nos garante os elementos necessários para se calcular os parâmetros com os valores melhorados como em

$$a_{0,j+1} = a_{0,j} + \Delta a_0 \quad \text{e} \quad a_{1,j+1} = a_{1,j} + \Delta a_1.$$

Este procedimento se repete até que a solução convirja, ou seja, até que fique abaixo de um critério de parada aceitável.

Exemplo 4. Usando o Método de Gauss-Newton ajuste a função $f(x; a_0, a_1) = a_0(1 - e^{-a_1 x})$ aos dados

| | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|
| x | 0.25 | 0.75 | 1.25 | 1.75 | 2.25 |
| y | 0.28 | 0.57 | 0.68 | 0.74 | 0.79 |

Use aproximações iniciais de $a_0 = 1.0$ e $a_1 = 1.0$ para os parâmetros. Observe que, para essas aproximações, a soma inicial dos quadrados dos resíduos é 0.0248.

Solução: Primeiramente encontramos as derivadas parciais em relação aos parâmetros a_0 e a_1 como segue abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 1 - e^{-a_1 x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = a_0 x e^{-a_1 x}.$$

Essas equações serão usadas para determinar a matriz Z_0 , para isso, basta aplicar os termos independentes e os valores dos parâmetros iniciais fornecidos no enunciado, nas equações encontradas acima, ou seja:

para $x = 0.25$: $\frac{\partial f(x)}{\partial a_0} = 0.2212$ e $\frac{\partial f(x)}{\partial a_1} = 0.1947$;

para $x = 0.75$: $\frac{\partial f(x)}{\partial a_0} = 0.5276$ e $\frac{\partial f(x)}{\partial a_1} = 0.3543$;

para $x = 1.25$: $\frac{\partial f(x)}{\partial a_0} = 0.7135$ e $\frac{\partial f(x)}{\partial a_1} = 0.3581$;

para $x = 1.75$: $\frac{\partial f(x)}{\partial a_0} = 0.8262$ e $\frac{\partial f(x)}{\partial a_1} = 0.3041$;

para $x = 2.25$: $\frac{\partial f(x)}{\partial a_0} = 0.8946$ e $\frac{\partial f(x)}{\partial a_1} = 0.2371$.

Assim, teremos a matriz Z_0 :

$$Z_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1)}{\partial a_0} & \frac{\partial f(x_1)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f(x_2)}{\partial a_0} & \frac{\partial f(x_2)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f(x_3)}{\partial a_0} & \frac{\partial f(x_3)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f(x_4)}{\partial a_0} & \frac{\partial f(x_4)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f(x_5)}{\partial a_0} & \frac{\partial f(x_5)}{\partial a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(0.25)}{\partial a_0=1} & \frac{\partial f(0.25)}{\partial a_1=1} \\ \frac{\partial f(0.75)}{\partial a_0=1} & \frac{\partial f(0.75)}{\partial a_1=1} \\ \frac{\partial f(1.25)}{\partial a_0=1} & \frac{\partial f(1.25)}{\partial a_1=1} \\ \frac{\partial f(1.75)}{\partial a_0=1} & \frac{\partial f(1.75)}{\partial a_1=1} \\ \frac{\partial f(2.25)}{\partial a_0=1} & \frac{\partial f(2.25)}{\partial a_1=1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2212 & 0.1947 \\ 0.5276 & 0.3543 \\ 0.7135 & 0.3581 \\ 0.8262 & 0.3041 \\ 0.8946 & 0.2371 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz Z_0 por sua transposta, temos:

$$\begin{aligned}
Z_0^T Z_0 &= \begin{bmatrix} 0.2212 & 0.5276 & 0.7135 & 0.8262 & 0.8946 \\ 0.1947 & 0.3543 & 0.3581 & 0.3041 & 0.2371 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2212 & 0.1947 \\ 0.5276 & 0.3543 \\ 0.7135 & 0.3581 \\ 0.8262 & 0.3041 \\ 0.8946 & 0.2371 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2.3193 & 0.9489 \\ 0.9489 & 0.4404 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

a qual, por sua vez, pode ser invertida:

$$[Z_0^T Z_0]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{0.4404}{2.3191x0.4404-0.9489^2} & \frac{-0.9489}{2.3191x0.4404-0.9489^2} \\ \frac{-0.9489}{2.3191x0.4404-0.9489^2} & \frac{2.3193}{2.3191x0.4404-0.9489^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6421 & -7.8473 \\ -7.8473 & 19.1804 \end{bmatrix}$$

Já o vetor D , que consiste nas diferenças entre as medidas da variável y fornecidas pelo enunciado e os valores encontrados, quando se aplica os termos em x na função $f(x; a_0, a_1)$, levando em consideração os valores iniciais para $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$, são dados abaixo:

$$D = \begin{bmatrix} 0.28 - f(0.25) \\ 0.57 - f(0.75) \\ 0.68 - f(1.25) \\ 0.74 - f(1.75) \\ 0.79 - f(2.25) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0588 \\ 0.0424 \\ -0.0335 \\ -0.0862 \\ -0.1046 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos agora a matriz D por Z_0^T teremos:

$$Z_0^T D = \begin{bmatrix} -0.1533 \\ -0.0365 \end{bmatrix}.$$

Com todos o parâmetros já calculados, por (2.39), temos que:

$$\Delta A = [Z_j^T Z_j]^{-1} Z_j^T D = \begin{bmatrix} -0.2719 \\ 0.5029 \end{bmatrix}.$$

Podemos agora determinar os valores melhorados, apenas somando os valores iniciais dos parâmetros aos encontrados na matriz ΔA como segue:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2719 \\ 0.5029 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7281 \\ 1.5029 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos uma estimativa melhorada dos parâmetros que são $a_0 = 0.7281$ e $a_1 = 1.5029$. Esses novos valores resultam em uma soma dos quadrados dos resíduos igual a $S_r = 0.0244$.

A partir daqui, o cálculo seria repetido até que esses valores ficassem abaixo do critério prescrito. Para uma soma dos quadrados dos resíduos cerca de 37 vezes menor que o fornecido, chegamos aos parâmetros $a_0 = 0.79186$ e $a_1 = 1.6751$, que nos dão uma soma dos quadrados dos resíduos de 0.000662.

Se escrevermos a função $f(x; a_0, a_1)$ para os parâmetros iniciais fornecidos, para os parâmetros encontrados na primeira iteração e para os parâmetros encontrados na iteração satisfatória, teremos as seguintes funções:

$$f(x; 1, 1) = 1(1 - e^{-x}),$$

$$f(x; 0.7281, 1.5029) = 0.7281(1 - e^{-1.5029x}),$$

$$f(x; 0.79186, 1.6751) = 0.79186(1 - e^{-1.6751x}).$$

Essas funções plotadas no plano cartesiano, nos dão a ideia de como a curva tende a se adequar aos dados experimentais.

Uma coisa que vale ressaltar sobre a regressão não-linear usando o *método de Gauss-Newton* é que as derivadas parciais das funções podem ser difíceis de calcular, o método

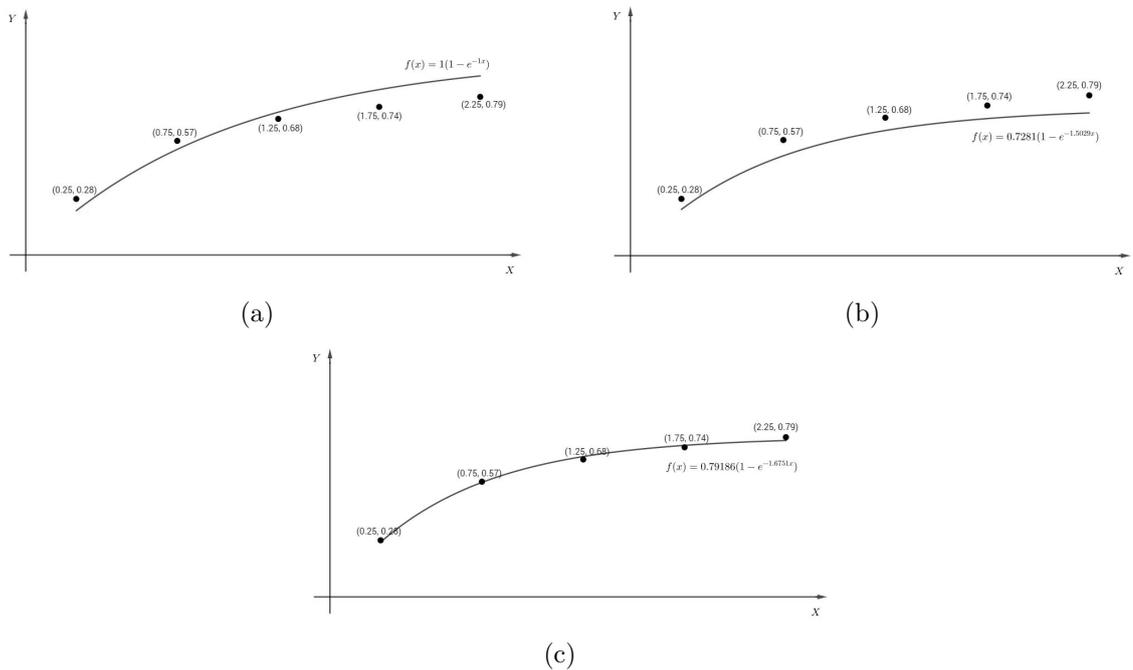


Figura 2.9: Ajuste de curvas pelo método de regressão não-linear. (a) Ajuste não-linear usando parâmetros iniciais. (b) Ajuste não-linear usando parâmetros da primeira iteração. (c) Ajuste não-linear usando parâmetros da iteração satisfatória.

pode convergir lentamente ou pode oscilar muito, isto é, mudar de direção continuamente ou, até mesmo, não convergir.

Modificações do método vem sendo desenvolvidos afim de remediar tais deficiências, porém, as mesmas não serão discutidas, por fugir um pouco da proposta deste trabalho, que consiste em apresentar os métodos numéricos mais práticos e que apresentem baixo grau de dificuldade, a fim de viabilizar sua aplicação com estudantes do ensino médio.

3 Interpolação

Todos os conceitos e demonstrações deste capítulo foram baseados nas referências [2], [5], [9], [15], [24], [26], [28] e [29].

Consideremos os pontos distintos $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, cada um desses $(n + 1)$, conhecidos por *nós de interpolação*, e seus respectivos valores quando aplicados em uma função $f(x)$: $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$.

A interpolação de $f(x)$ consiste em se obter uma função $h(x)$ qualquer, tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x_0) = f(x_0), \\ h(x_1) = f(x_1), \\ h(x_2) = f(x_2), \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ h(x_n) = f(x_n). \end{array} \right.$$

3.1 Interpolação polinomial

Sejam os pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_n, f(x_n))$, podemos aproximar esses $(n + 1)$ pontos por um polinômio $p_n(x)$ de grau menor ou igual a n , tal que: $f(x_k) = p_n(x_k)$ com $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Usando a fórmula geral para um polinômio de grau n , temos:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \tag{3.1}$$

Sendo assim, obter $p_n(x)$ significa encontrar os valores dos coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ em (3.1) que satisfaçam a condição $p_n(x_k) = f(x_k), \forall k = 0, 1, 2, \dots, n$.

De acordo com o definido, surgem algumas perguntas:

- Existe sempre um polinômio $p_n(x)$ que satisfaça estas condições?
- Caso exista, ele é único?

Para responder a essas perguntas, escrevemos a condição $p_n(x_k) = f(x_k)$, para todo $k = 0, 1, \dots, n$, no seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0), \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1), \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = f(x_2), \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n). \end{array} \right. \quad (3.2)$$

que tem $n + 1$ equações e $n + 1$ variáveis. A matriz A , dos coeficientes do sistema (3.2) é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

A matriz A é conhecida como matriz de Vandermonde, pois é uma matriz em que os termos de cada linha estão em progressão geométrica, isto é $A_{ij} = x_i^{j-1}$ para todos os índices i e j .

Então, para verificarmos se o sistema proposto tem solução única, basta garantirmos que a matriz A de coeficientes tenha determinante diferente de zero.

A matriz A , tem seu determinante dado pela expressão:

$$\det(A) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i),$$

onde n é o grau do polinômio $p_n(x)$.

Então, para que $\det(A) \neq 0$, basta que $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ sejam pontos distintos, isso implica que o sistema linear proposto admite solução e essa será única.

Abaixo segue como exemplo, o cálculo do determinante da matriz A para $n = 2$ usando a expressão do determinante de Vandermonde,

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0).$$

Supondo $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$, temos:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{bmatrix} = (4 - 2)(4 - 3)(3 - 2) = 2 \times 1 \times 1 = 2.$$

Então, de acordo com o que acabamos de ver, o polinômio interpolador, que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ é único, embora existam várias formas de ser obtido. Neste trabalho, consideremos apenas as formas de Lagrange e Newton que serão vistas na sequência.

3.2 Polinômios interpoladores por diferenças de divididas de Newton

Dentre as várias formas de se determinar um polinômio interpolador, o método das Diferenças Divididas de Newton se destaca por estar dentre as fórmulas mais populares e úteis de acordo com [9]. Faremos aqui um esboço geral da teoria que define esse tipo de polinômio iniciando pelo caso particular de um polinômio de grau 1, depois progredimos para um polinômio de grau 2 e, por fim enunciaremos o método para um polinômio de grau qualquer.

3.2.1 Interpolação linear

A forma de Newton para um polinômio $p_1(x)$ que interpola $f(x)$ através de apenas dois pontos distintos (x_0 e x_1) é a seguinte:

$$P_1(x) = d_0 + d_1(x - x_0), \quad (3.3)$$

onde d_0 e d_1 são as diferenças divididas que dependem somente de dois pontos, isto é:

$$\begin{aligned} d_0 &= f[x_0] = f(x_0), \\ d_1 &= f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \end{aligned}$$

Logo, o polinômio interpolador de Newton para o grau 1 é da forma:

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (3.4)$$

Observando a expressão de $p_1(x)$ em (3.4), que é a *fórmula da interpolação linear*, o termo $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ representa o coeficiente angular da reta que o gráfico de $P_1(x)$. Assim, quanto menor o intervalo entre os pontos dados, melhor será a aproximação de $f(x)$ pelo polinômio interpolador de grau 1, tendo em vista que para pequenos intervalos entre os pontos dados, uma função contínua será melhor aproximada por uma reta.

Exemplo 5. Faça uma estimativa de $\ln(3)$ usando uma interpolação linear. Primeiramente, faça o cálculo interpolando entre $\ln(1) = 0$ e $\ln(6) \approx 1,791759$. Então, repita o procedimento, mas use o intervalo menor de $\ln(1)$ a $\ln(4) \approx 1,386294$. Observe que $\ln(3) \approx 1,098612$.

Solução: Primeiramente vamos encontrar a função de interpolação linear para os pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 6$, usando a fórmula em (3.4) como segue

$$p_1(x) = f(1) + \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1}(x - 1) = 0 + \frac{1.791759 - 0}{6 - 1}(x - 1) = 0.3583518(x - 1).$$

Aplicando o ponto $x = 3$ no polinômio $p_1(x)$, temos a seguinte estimativa para $\ln(3) \approx p_1(3) = 0.7167036$.

Essa estimativa gera um erro dado por

$$\epsilon_t = \left| \frac{f(3) - p_1(3)}{f(3)} \right| \times 100\% = \left| \frac{1.098612 - 0.7167036}{1.098612} \right| \times 100\% = 34.76\%.$$

Refazendo os cálculos para o intervalo menor de $x_0 = 1$ a $x_1 = 4$, teremos o seguinte polinômio interpolador:

$$p_1^*(x) = f(1) + \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) = 0.462098(x - 1)$$

Calculando $x = 3$, teremos $\ln(3) \approx p_1^*(3) = 0.924196$ e o novo erro passa a ser

$$\epsilon_t = \left| \frac{f(3) - p_1^*(3)}{f(3)} \right| \times 100\% = \left| \frac{1.098612 - 0.924196}{1.098612} \right| \times 100\% = 15.88\%.$$

Observando os dois erros, podemos perceber que quanto menor o intervalo usado na determinação do polinômio interpolador, mais o valor estimado se aproxima do valor real, embora não se possa generalizar essa conclusão a partir apenas de dois valores. Quando olharmos para a Figura 3.1, podemos observar que conforme o intervalo diminui, uma função contínua será mais bem aproximada por uma reta e por consequência o erro dado pela interpolação tende a diminuir.

A Figura 3.1 nos mostra como a estimativa de $\ln(3)$ feita pelo polinômio interpolador $p_1^*(x)$, se aproxima muito mais do valor real que o polinômio interpolador $p_1(x)$.

3.2.2 Interpolação quadrática

A forma de Newton para um polinômio $p_2(x)$ que interpola $f(x)$ através de três pontos distintos (x_0 , x_1 e x_2) é a seguinte:

$$p_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1), \quad (3.5)$$

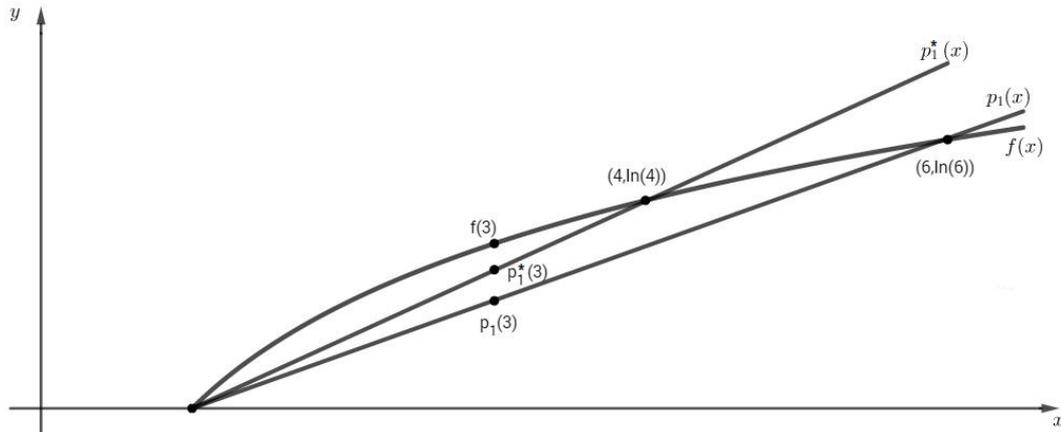


Figura 3.1: Interpolação linear para estimativa de $\ln(3)$ realizada por intervalos diferentes.

onde d_0 , d_1 e d_2 são as diferenças divididas que dependem dos três pontos, ou seja,

$$\begin{aligned} d_0 &= f[x_0] = f(x_0), \\ d_1 &= f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\ d_2 &= f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}. \end{aligned}$$

Logo, o polinômio interpolador de Newton de grau 2 é da forma:

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1) \quad (3.6)$$

Observando o erro encontrado no Exemplo 5, ao se aproximar a função $\ln(x)$ por um polinômio de grau 1, fica visível que o gráfico do polinômio de grau 1 não é a melhor opção para descrever o comportamento da função $\ln(x)$, sendo assim, a estratégia para melhorar a estimativa seria introduzir uma curvatura na ligação de cada dois pontos, por isso acredita-se que o ajuste polinomial de grau 2, dará para o mesmo problema proposto um erro bem menor, como no Exemplo 6 confirmando o que foi afirmado.

Exemplo 6. Ajuste um polinômio do segundo grau aos três pontos usados no Exemplo

5, ou seja:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1 \Rightarrow f(x_0) = \ln(1) = 0, \\x_1 &= 4 \Rightarrow f(x_1) = \ln(4) = 1.386294, \\x_2 &= 6 \Rightarrow f(x_2) = \ln(6) = 1.791759.\end{aligned}$$

Use o polinômio $p_2(x)$ para calcular $\ln(3)$

Solução: Primeiramente vamos calcular os valores das diferenças divididas d_0 , d_1 e d_2 como segue:

$$\begin{aligned}d_0 &= f(x_0) = 0 \\d_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0.4620981 \\d_2 &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = -0.0518731\end{aligned}$$

Substituindo esses valores em (3.6), obtemos o polinômio

$$p_2(x) = 0 + 0.4620981(x - 1) - 0.0518731(x - 1)(x - 4).$$

O qual nos fornece, em $x = 3$, o valor: $p_2(3) = 1.0279424$.

Como o valor de $\ln(3) \approx 1.098612$, podemos calcular o erro ϵ_t da estimativa como segue:

$$\epsilon_t = \left| \frac{f(3) - p_2(3)}{f(3)} \right| \times 100\% = \left| \frac{1.098612 - 1.0279424}{1.098612} \right| \times 100\% = 6.43\%$$

Portanto, fica evidente que a estimativa feita pelo polinômio de grau 2 supera o polinômio de grau 1, já que a função a ser estimada tem seu gráfico mais próximo da curva gerada pelo polinômio de grau 2. A Figura 3.2 apresenta o comparativo entre os valores encontrados pela interpolação linear e a quadrática frente ao valor verdadeiro da função dada.

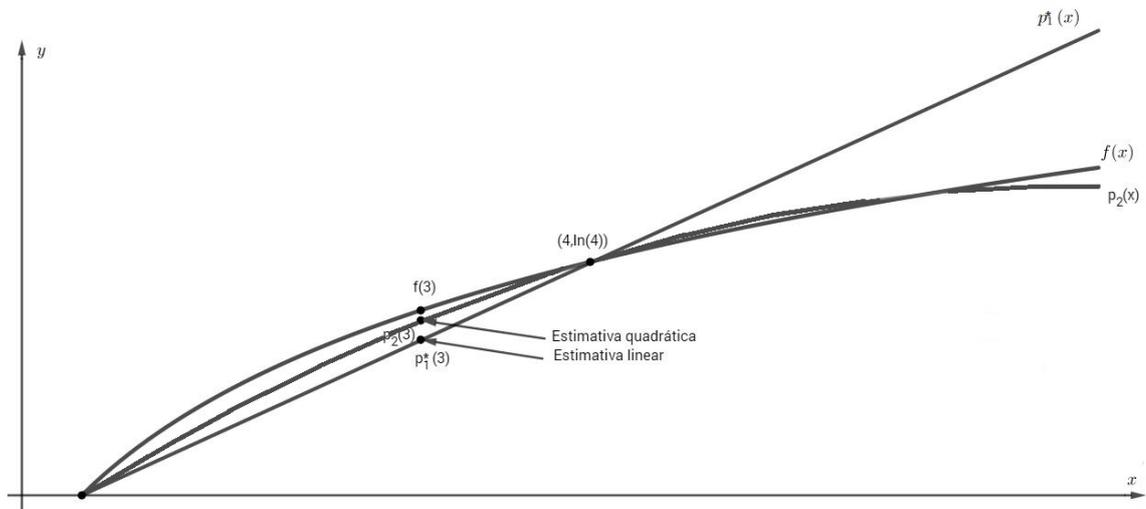


Figura 3.2: Interpolação linear e quadrática para estimativa de $\ln(3)$.

3.2.3 Forma geral dos polinômios interpoladores de Newton

Generalizando as análises anteriores, podemos descrever um método para ajustar um polinômio de grau n a $n + 1$ pontos dados pela seguinte expressão

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}), \quad (3.7)$$

onde $d_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$ é o operador diferenças divididas de ordem k entre os pontos $(x_j, f(x_j)), j = 0, 1, 2, \dots, k$.

Definição 1 (Operador Diferenças Divididas). *Definimos os operadores diferenças para uma função $f(x)$, tabelada em $n + 1$ pontos distintos, pelas expressões da tabela 2.*

| | | | |
|--------------------------------|---|---|--------------|
| $f[x_0]$ | = | $f(x_0)$ | (ordem zero) |
| $f[x_0, x_1]$ | = | $\frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$ | (ordem 1) |
| $f[x_0, x_1, x_2]$ | = | $\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$ | (ordem 2) |
| | | . | |
| | | . | |
| | | . | |
| $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$ | = | $\frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$ | (ordem n) |

Tabela 2: Operador de diferenças divididas.

Assim, dizemos que $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ é a diferença dividida de ordem k para a função $f(x)$ sobre os $k + 1$ pontos.

De forma a tornar o método mais operacional, quando conhecemos os pontos x_0, x_1, \dots, x_n e seus respectivos valores quando aplicados na função $f(x)$, construímos a tabela 3.

| x | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 | . . . | Ordem n |
|-------|----------|-------------------|----------------------------|-------|----------------------|
| x_0 | $f[x_0]$ | | | | |
| | | $f[x_0, x_1]$ | | | |
| x_1 | $f[x_1]$ | | $f[x_0, x_1, x_2]$ | | |
| | | $f[x_1, x_2]$ | | | |
| x_2 | $f[x_2]$ | | $f[x_1, x_2, x_3]$ | . | |
| | | $f[x_2, x_3]$ | | . | |
| x_3 | $f[x_3]$ | | $f[x_2, x_3, x_4]$ | | $f[x_0, \dots, x_n]$ |
| | | $f[x_3, x_4]$ | . | . | |
| x_4 | $f[x_4]$ | . | . | . | |
| . | . | . | $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$ | | |
| . | . | | | | |
| . | . | $f[x_{n-1}, x_n]$ | | | |
| x_n | $f[x_n]$ | | | | |

Tabela 3: Tabela de diferenças divididas.

Vamos resolver o exemplo abaixo com o objetivo de compreender melhor como montar a tabela de diferenças divididas que por sua vez é extremamente necessária para a determinação do polinômio interpolador.

Exemplo 7. Dados os pontos $(-1, 1), (0, 1), (1, 0), (2, -1), (3, -2)$, determine a tabela de diferenças divididas.

Solução: Procedemos determinando as diferenças divididas:

- Diferenças de Ordem 0:

$$\begin{array}{lll}
 x_0 = -1 & \Rightarrow f[x_0] = f(-1) & \Rightarrow f[x_0] = 1, \\
 x_1 = 0 & \Rightarrow f[x_1] = f(0) & \Rightarrow f[x_1] = 1, \\
 x_2 = 1 & \Rightarrow f[x_2] = f(1) & \Rightarrow f[x_2] = 0, \\
 x_3 = 2 & \Rightarrow f[x_3] = f(2) & \Rightarrow f[x_3] = -1, \\
 x_4 = 3 & \Rightarrow f[x_4] = f(3) & \Rightarrow f[x_4] = -2.
 \end{array}$$

- Diferenças de Ordem 1:

$$\begin{array}{ll}
 f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 1}{0 - (-1)} & \Rightarrow f[x_0, x_1] = 0, \\
 f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{1 - 0} & \Rightarrow f[x_1, x_2] = -1, \\
 f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-1 - 0}{2 - 1} & \Rightarrow f[x_2, x_3] = -1, \\
 f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} = \frac{-2 - (-1)}{3 - 2} & \Rightarrow f[x_3, x_4] = -1.
 \end{array}$$

- Diferenças de Ordem 2:

$$\begin{array}{ll}
 f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1 - 0}{1 - (-1)} & \Rightarrow f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{1}{2}, \\
 f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-1 - (-1)}{2 - 1} & \Rightarrow f[x_1, x_2, x_3] = 0, \\
 f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{-1 - (-1)}{3 - 2} & \Rightarrow f[x_2, x_3, x_4] = 0.
 \end{array}$$

- Diferenças de Ordem 3:

$$\begin{array}{ll}
 f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0 - (-\frac{1}{2})}{2 - (-1)} & \Rightarrow f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{6}, \\
 f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = \frac{0 - 0}{3 - 0} & \Rightarrow f[x_1, x_2, x_3, x_4] = 0.
 \end{array}$$

- Diferença de Ordem 4:

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} = \frac{0 - (\frac{1}{6})}{3 - (-1)} = -\frac{1}{24}.$$

Os dados estão apresentados na tabela 4

| x | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 | Ordem 3 | Ordem 4 |
|-----|---------|---------|----------------|---------------|-----------------|
| -1 | 1 | | | | |
| | | 0 | | | |
| 0 | 1 | | $-\frac{1}{2}$ | | |
| | | -1 | | $\frac{1}{6}$ | |
| 1 | 0 | | 0 | | $-\frac{1}{24}$ |
| | | -1 | | 0 | |
| 2 | -1 | | 0 | | |
| | | -1 | | | |
| 3 | -2 | | | | |

Tabela 4: Diferenças divididas do Exemplo 7.

3.2.4 Erros nos polinômios interpoladores de Newton

Seja $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$ e com tantas derivadas contínuas quantas necessária.

Para $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $(n+1)$ pontos, estudaremos o erro de se aproximar o polinômio $p_n(x)$ que interpola a função $f(x)$ nas coordenadas $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Iniciamos a construção pelo polinômio de grau 0, depois partiremos para o polinômio de grau ≤ 1 , depois o de grau ≤ 2 e, daí, partiremos para o polinômio de grau k , $k \leq n$, que interpola $f(x)$ em x_0, \dots, x_n .

Seja $p_0(x)$ o polinômio interpolador de grau 0 que interpola $f(x)$ em $x = x_0$, então $p_0(x) = f[x_0] = f(x_0)$.

Para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, temos:

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

logo

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x].$$

Como $p_0(x) = f(x_0)$, chamando $E_0(x) = (x - x_0)f[x_0, x]$, temos que

$$E_0(x) = f(x) - p_0(x) = (x - x_0)f[x_0, x].$$

Note que $E_0(x)$ representa o erro ao se aproximar a função $f(x)$ pelo polinômio de grau 0, $p_0(x)$.

Vamos agora analisar o erro para a interpolação por um polinômio de grau ≤ 1 . Seja $p_1(x)$ o polinômio de grau ≤ 1 que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1 .

Prova-se que as diferenças divididas satisfazem a propriedade

$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_k}]$, onde j_0, j_1, \dots, j_k é qualquer permutação de $0, 1, 2, \dots, k$.

Por exemplo, para $k = 2$, $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$.

Temos:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x] &= f[x_1, x_0, x] = \\ &= \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} \\ &= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0]}{(x - x_1)(x - x_0)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0] = (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

ou, equivalentemente,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x].$$

Como $p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] = p_0(x) + (x - x_0)f[x_1, x_0]$ e chamando $E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]$, temos que:

$$E_1(x) = f(x) - p_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x].$$

Note que $E_1(x)$ é o erro cometido ao se aproximar $f(x)$ por $p_1(x)$. Analisamos agora o erro para a interpolação por um polinômio de grau ≤ 2 . Seja $p_2(x)$ o polinômio de grau ≤ 2 que interpola $f(x)$ em x_0, x_1 e x_2 . Sabemos que:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2, x] &= f[x_2, x_1, x_0, x] = \\ &= \frac{f[x_1, x_0, x] - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} \\ &= \frac{\frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} \\ &= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0] - (x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x]. \end{aligned}$$

Como $p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]$, chamando $E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x]$, temos que:

$$E_2(x) = f(x) - p_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x].$$

Note que $E_2(x)$ é o erro cometido ao se aproximar $f(x)$ por $p_2(x)$.

Se usarmos sucessivamente, o mesmo raciocínio adotado para encontrar $E_0(x)$, $E_1(x)$ e $E_2(x)$, teremos que a forma do erro $E_n(x)$ gerado na construção de $p_n(x)$, polinômio de grau $\leq n$, que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, é:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x], \quad (3.8)$$

onde $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x]$ é a $(n + 1)$ -ésima diferença dividida finita. Como a expressão de $E_n(x)$ em (3.8) contém uma incógnita $f(x)$, ela não determina o erro, porém se tivermos disponível um ponto dado adicional $f(x_{n+1})$, que seja diferente dos $(n + 1)$ termos utilizados na obtenção do polinômio interpolador esta poderá ser usada para aproximar o erro:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}]. \quad (3.9)$$

Exemplo 8. Use a expressão dada por (3.9) para fazer uma estimativa do erro para o polinômio interpolador do segundo grau encontrado através da interpolação dos pontos:

$$x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = \ln(1) = 0,$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow f(x_1) = \ln(4) = 1.386294,$$

$$x_2 = 6 \Rightarrow f(x_2) = \ln(6) = 1.791759.$$

Utilize o ponto dado adicional $f(x_3) = f(5) = 1.609438$ para obter a estimativa do erro na determinação de $\ln(3)$.

Solução: Do Exemplo 6, temos que o polinômio $p_2(x)$ que interpola $f(x) = \ln(x)$ em $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$ é $p_2(x) = 0.4620981(x - 1) - 0.0518731(x - 1)(x - 4)$ e quando aplicamos o valor de $x = 3$ em $p_2(x)$, encontramos $p_2(3) = 1.0279424$, que nos

fornece um erro de interpolação de $\epsilon_t = 6.43\%$.

Antes de usar a equação (3.9), temos que primeiro encontrar $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Temos:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0.462098, \\ f[x_1, x_2] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.202732, \\ f[x_3, x_2] &= \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = 0.182321, \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -0.051873, \\ f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = -0.020411, \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = 0.007865. \end{aligned}$$

Assim, aplicando a equação (3.9), para $x = 3$, temos:

$$E_2(3) = (3 - 1)(3 - 4)(3 - 6)f[1, 4, 6, 5] = 0.04719$$

Se compararmos o erro encontrado pela estimativa usando o polinômio de grau 2, $f(3) - p_2(3) = 1.098612 - 1.027942 = 0.07067$, com o erro $E_2(3)$ encontrado pela equação 3.9, podemos perceber quão próximo ficam os resultados. Essa comparação nos apresenta a eficiência da equação do erro, que por sua vez, fornece resultados na mesma ordem de grandeza do erro cometido na estimativa usando o método da interpolação.

3.3 Polinômios interpoladores de Lagrange

O *polinômio interpolador de Lagrange* é uma reformulação do polinômio de Newton, onde se evita os cálculos das diferenças divididas que acabam por complicar a determinação do polinômio interpolador, sua expressão é dada por:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)f(x_k) \quad (3.10)$$

onde

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \quad (3.11)$$

- Para $n = 1$, versão linear, temos:

$p_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$. Como, $L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$ e $L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, segue que:

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1). \quad (3.12)$$

- Para $n = 2$, versão quadrática, temos:

$p_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$. Como, $L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$, $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$ e $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$, segue que:

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2). \quad (3.13)$$

Exemplo 9. Use polinômios interpoladores de Lagrange de primeiro e segundo grau para calcular $\ln(3)$ com base nos dados fornecidos abaixo:

$$x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = \ln(1) = 0,$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow f(x_1) = \ln(4) = 1.386294,$$

$$x_2 = 6 \Rightarrow f(x_2) = \ln(6) = 1.791759.$$

Solução: Como vimos anteriormente, o polinômio de grau 1 pode ser usado para se obter a estimativa em $x = 3$.

$$p_1(3) = \frac{3-4}{1-4}0 + \frac{3-1}{4-1}1.386294 = 0.924196.$$

De semelhante modo, o polinômio $p_2(3)$ fornece:

$$p_2(3) = \frac{(3-4)(3-6)}{(1-4)(1-6)}0 + \frac{(3-1)(3-6)}{(4-1)(4-6)}1.386294 + \frac{(3-1)(3-4)}{(6-1)(6-4)}1.791759 = 1.027949.$$

Como esperado, já que o método para obtenção do polinômio interpolador de La-

grange é simplesmente uma melhoria do método de interpolação de Newton, ambos os resultados coincidem com os obtidos anteriormente nos Exemplos 5 e 6.

Exemplo 10. Pela forma de Lagrange, use o polinômio de grau 2 para obter a expressão que interpola os pontos $(0, 1)$, $(1, 2.718)$, $(3, 20.086)$ fornecidos pela função $f(x) = e^x$.

Solução: Pela forma de Lagrange, temos que o polinômio de grau 2 é:

$$p_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

onde

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 3)} = \frac{x^2 - 4x + 3}{3}, \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 3)}{(1 - 0)(1 - 3)} = \frac{x^2 - 3x}{-2}, \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(3 - 0)(3 - 1)} = \frac{x^2 - x}{6}. \end{aligned}$$

Assim, na forma de Lagrange,

$$p_2(x) = 1 \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{3} \right) + 2.718 \left(\frac{x^2 - 3x}{-2} \right) + 20.086 \left(\frac{x^2 - x}{6} \right),$$

agrupando os termos de mesmo grau, obtemos que $p_2(x) = 2.322x^2 - 0.604x + 1$.

A Figura 3.3 apresenta a plotagem do polinômio interpolador de grau 2 e a função $f(x)$ no mesmo plano cartesiano.

Assim como no método de Newton, a versão de Lagrange também fornece uma estimativa do erro:

$$E_n = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^n (x - x_j). \quad (3.14)$$

Com a disposição de um ponto adicional para x_{n+1} é possível se obter uma estimativa para o erro.

Em geral, nos casos onde não se conhece o grau do polinômio interpolador, o método de Newton tem vantagens por causa da percepção que ele fornece através do comportamento das fórmulas para as diferentes ordens, assim, para esses casos, o método de Newton é em geral a melhor opção.

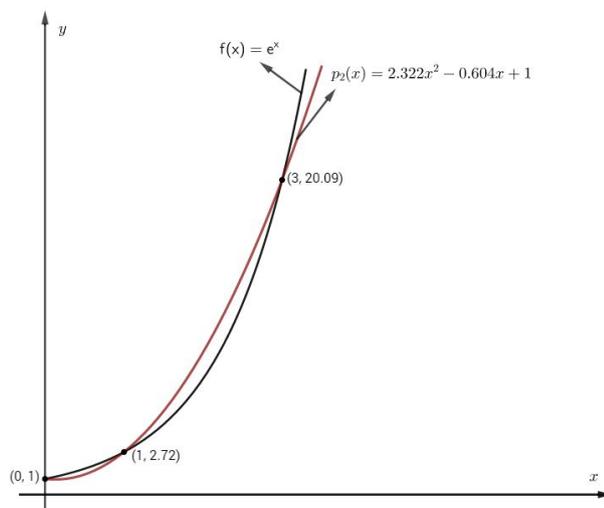


Figura 3.3: Representação gráfica do Exemplo 10.

3.4 Interpolação inversa

Na maioria dos contextos de interpolação os valores de $f(x)$ e x são respectivamente as variáveis dependentes e independentes, como consequência os valores de x acabam sendo distribuídos em intervalos uniformes e isso favorece o bom condicionamento do polinômio interpolador.

Agora, supondo que usando os mesmos dados, precisemos determinar o valor da variável independente x tendo o conhecimento de $f(x)$, devemos partir para a técnica da interpolação inversa.

O método da interpolação inversa não consiste em simplesmente trocar os termos independentes, x , pelos termos dependentes, $f(x)$, já que, nos casos mais complicados não temos nenhuma garantia de que os valores ao longo da nova abscissa $f(x)$ terão espaçamentos regulares. Tal espaçamento descompassado na abscissa, em geral acaba influenciando bastante nas oscilações do polinômio interpolador, aumentando o erro da interpolação. Assim, a solução encontrada é a de ajustar um polinômio de grau n a $f(x)$, a partir dos dados originais, ou seja, $f(x)$ em função de x , como na maioria dos casos os termos independentes são igualmente espaçados, teremos um polinômio interpolador bem condicionado, ou seja, com variabilidades semelhantes entre cada intervalo formado pelos nós de interpolação. Logo a resposta ao problema se reduz em substituir na equação o termo dependente a fim de se encontrar o termo independente que a satisfaz através da aplicação do mesmo no polinômio, em outras palavras, o nosso problema se reduz ao problema de cálculo de raízes de um polinômio.

Exemplo 11. Dados os pontos $(2, 0.5)$, $(3, 0.3333)$ e $(4, 0.25)$ provenientes da função $f(x) = 1/x$, determine o valor de x , para $f(x) = 0.3$.

Solução: Por termos três pontos, vamos interpolá-los através de um polinômio de grau 2, conforme a equação (3.13):

$$p_2(x) = 0.041667x^2 - 0.375x + 1.08333.$$

A resposta ao problema de interpolação inversa, consiste agora em encontrar o x que corresponde a $f(x) = 0.3$, para isso, basta substituir os valores no polinômio $p_2(x)$ e resolver a equação, ou seja,

$$0.3 = 0.041667x^2 - 0.375x + 1.08333,$$

Daí temos duas soluções possíveis:

$$x_1 = 5.704158 \quad \text{e} \quad x_2 = 3.295842.$$

Como $x_2 = 3.295842$ é a raiz que mais se aproxima do valor verdadeiro 3.333, ignoramos o valor de x_1 . Sabemos também que se desejássemos um percentual de erro menor bastava caso tivéssemos pontos adicionais, utilizar polinômios de graus maiores.

3.5 Interpolação por splines

Em casos como o Exemplo (12), onde temos uma função $f(x)$ traçada para x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, x_{n+1}$ é aproximada por um polinômio de grau n que interpola sobre todos os pontos dados, podemos ter resultados desastrosos dependendo do intervalo de observação.

Exemplo 12. Considere $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ tabelado no intervalo $[-1, 1]$ nos pontos da forma $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Represente graficamente função $f(x)$ por um polinômio interpolador de grau 10.

Solução: O Figura 3.4 que segue, representa a curva $f(x)$ e o polinômio interpolador de grau 10 que interpola $f(x)$ em x_i , $i = 0, 1, \dots, 10$.

Observe que para valores fora do intervalo $[-1, 1]$ o módulo da diferença $|f(x) - p_{10}(x)|$ se torna extremamente grande, a ponto do polinômio $p_{10}(x)$ não ter mais condição alguma de representar $f(x)$.

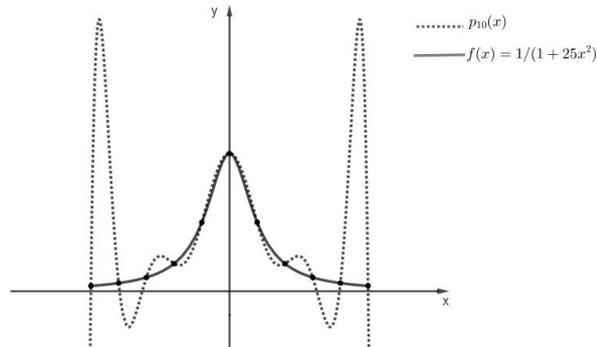


Figura 3.4: Representação gráfica do Exemplo 12.

Em casos que as funções podem levar a resultados errôneos por causa de erros nos arredondamentos ou nas estimativa, uma abordagem alternativa é aplicar polinômios de grau mais baixo a subconjuntos dos pontos dados. Tais polinômios são chamados *funções splines*.

Definição 2. Considere a função $f(x)$ tabelada nos pontos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Uma função $S_p(x)$ e denominada “spline de grau p ” com nós nos pontos $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, se satisfaz as seguintes condições.

1. em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, (n - 1)$, $S_p(x)$ é um polinômio de grau p : $S_p(x)$;
2. $S_p(x)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem $(p - 1)$ em $[a, b]$. Se, além disto, $S_p(x)$ também satisfaz a condição:
3. $S_p(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$, então será denominado spline interpolante.

A ideia do nome “spline” vem de uma régua plástica usada em engenharia que tem capacidade de se deformar para passar por um dado conjunto de pontos.

Observação: ao longo das discussões sobre splines que seguirão, falaremos em nós externos e nós internos, esses termos representam os pontos do intervalo usado na determinação dos splines, no caso se os pontos forem os extremos do intervalo, chamaremos de nós externos, caso sejam os pontos interior ao intervalo, denominaremos por nós internos.

3.5.1 Splines lineares

Sabendo que a ligação mais simples entre dois pontos é uma reta, a função spline linear interpolante de $f(x)$ pode ser definida como um conjunto de funções lineares, que interpola os nós x_0, x_1, \dots, x_n em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$ com

$$S_i(x) = f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Essa expressão pode ser usada para calcular a função em qualquer ponto no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Exemplo 13. Achar a spline linear que interpola a função apresentada na Tabela 5.

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| x | 1 | 2 | 5 | 7 |
| $f(x)$ | 1 | 2 | 3 | 2.5 |

Tabela 5: Dados do Exemplo 13.

Solução: de acordo com a definição, vamos encontrar a função spline em cada intervalo formado por dois pontos consecutivos.

$$\begin{aligned} S_1(x) &= f(1) \frac{2-x}{2-1} + f(2) \frac{x-1}{2-1} = x, \quad x \in [1, 2], \\ S_2(x) &= f(2) \frac{5-x}{5-2} + f(5) \frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}(x+4), \quad x \in [2, 5], \\ S_3(x) &= f(5) \frac{7-x}{7-5} + f(7) \frac{x-5}{7-5} = \frac{1}{2}(-0.5x + 8.5), \quad x \in [5, 7]. \end{aligned}$$

A Figura 3.5 apresenta a plotagem dos pontos do exemplo 13 usando as spline lineares determinadas.

Exemplo 14. Ajuste os dados da Tabela 6 com um spline de primeiro grau, para calcular a função em $x = 5$.

Solução: de acordo com a definição, vamos encontra a função spline em cada

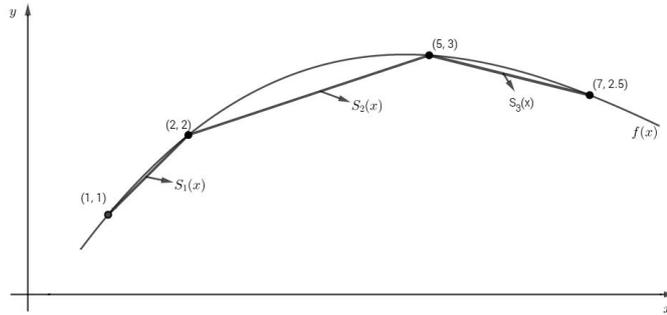


Figura 3.5: Representação gráfica das splines lineares do Exemplo 13.

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| x | 3.0 | 4.5 | 7.0 | 9.0 |
| $f(x)$ | 2.5 | 1 | 2.5 | 0.5 |

Tabela 6: Dados do exemplo 14.

intervalo formado por dois pontos consecutivos.

$$\begin{aligned}
 S_1(x) &= f(3.0) \frac{4.5 - x}{4.5 - 3.0} + f(4.5) \frac{x - 3.0}{4.5 - 3.0} = -x + 5, 5, \quad x \in [3.0, 4.5], \\
 S_2(x) &= f(4.5) \frac{7.0 - x}{7.0 - 4.5} + f(7.0) \frac{x - 4.5}{7.0 - 4.5} = 0.6x - 1.7, \quad x \in [4.5, 7.0], \\
 S_3(x) &= f(7.0) \frac{9.0 - x}{9.0 - 7.0} + f(9.0) \frac{x - 7.0}{9.0 - 7.0} = -x + 9.5, \quad x \in [7.0, 9.0].
 \end{aligned}$$

Para determinar o valor da função em $x = 5$ usando spline linear, basta aplicar na função definida no intervalo $[4.5, 7.0]$, como segue:

$$S_2(5.0) = 0.6(5.0) - 1.7 = 3.0 - 1.7 = 1.3.$$

3.5.2 Spline quadrática

A função spline quadrática tem por finalidade determinar um polinômio de grau 2 para cada intervalo de pontos dados. Esse polinômio para cada intervalo, pode ser representado pela seguinte expressão:

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i. \quad (3.15)$$

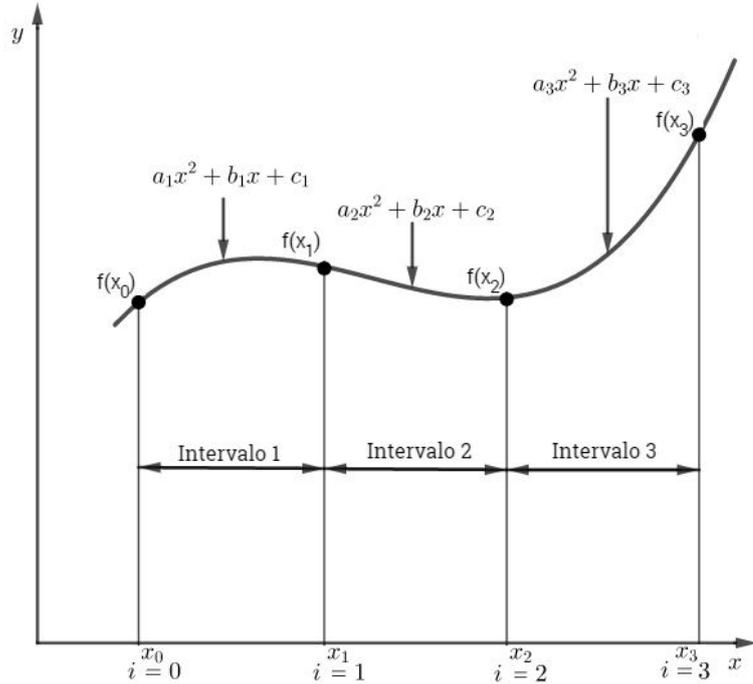


Figura 3.6: Representação gráfica das splines quadráticas para 3 intervalos.

A Figura 3.6 nos ajuda a compreender a notação. Observe que, para $n + 1$ pontos dados, existem n intervalos e $3n$ valores de constante a se determinar, são elas os a'_i s, b'_i s e c'_i s, logo precisamos de $3n$ equações para se determinar as incógnitas. São elas:

- os valores da função e dos polinômios adjacentes devem ser iguais nos nós interiores. Essa condição pode ser representada por

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1}), \quad (3.16)$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1}), \quad (3.17)$$

para $i = 2 \dots n$. Como apenas os nós interiores foram usados, as equações (3.16) e (3.17) fornece, cada uma, $n - 1$ condições totalizando $2(n - 1)$ condições.

- A primeira e última função devem passar pelos pontos externos. Isso acrescenta duas equações

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0), \quad (3.18)$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n). \quad (3.19)$$

Totalizando $2n - 2 + 2 = 2n$ condições.

- As primeiras derivadas nos nós interiores devem ser iguais, isso garante que nos nós interiores o encontro das splines não aconteça de forma abrupta. A primeira derivada da equação (3.15) é $S'(x) = 2ax + b$. Portanto, a condição pode ser representada, de modo geral, por

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_ix_i + b_i, \quad (3.20)$$

para $i = 2 \dots n$. Fornecendo outras $n - 1$ condições, resultando num total de $2n + n - 1 = 3n - 1$. Como precisamos de $3n$ equações, ainda falta uma condição e essa pode ser obtida de forma arbitrária a fim de se ter sucesso no cálculo das constantes, embora existem várias escolhas possíveis, optou-se pela seguinte:

- Suponha que a segunda derivada seja nula no primeiro ponto. Como a segunda derivada da equação (3.15) é $2a_i$, essa condição pode ser expressa matematicamente por

$$a_1 = 0, \quad (3.21)$$

a implicação visual dessa condição é que a ligação entre os dois primeiros pontos dados serão feitos através de uma reta.

Exemplo 15. Ajuste os dados da Tabela 7 com um spline de segundo grau, depois use os resultados para fazer uma estimativa do valor de $f(5)$.

| | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
| x | 3.0 | 4.5 | 7.0 | 9.0 |
| $f(x)$ | 2.5 | 1 | 2.5 | 0.5 |

Tabela 7: Dados do Exemplo 15.

Solução: como nesse problema temos quatro pontos dados e $n = 3$ intervalos, precisaremos determinar o valor de 9 incógnitas.

Usando as equações (3.17) e (3.17) teremos $2n - 2 = 4$ condições, lembrando que $i = 2, 3$, temos

- para $i = 2$:

$$a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = f(x_1) \Rightarrow 20.25a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 1.0,$$

$$a_2x_1^2 + b_2x_1 + c_2 = f(x_1) \Rightarrow 20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1.0,$$

- para $i = 3$:

$$a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2 = f(x_2) \Rightarrow 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5,$$

$$a_3x_2^2 + b_3x_2 + c_3 = f(x_2) \Rightarrow 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5.$$

Fazer com que a primeira e última função passem pelos pontos extremos, nos acrescenta mais duas equações:

- Pela equação (3.18), temos que:

$$a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = f(x_0) \Rightarrow 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5.$$

- Pela equação (3.19), temos que:

$$a_nx_n^2 + b_nx_n + c_n = f(x_n) \Rightarrow 81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5.$$

A continuidade das derivadas cria mais $n - 1 = 2$ equações, usando equação (3.20), obtemos:

- para $i = 2$:

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_ix_{i-1} + b_i \Rightarrow 2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2 \Rightarrow 9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2,$$

- para $i = 3$:

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_ix_{i-1} + b_i \Rightarrow 2a_2x_2 + b_2 = 2a_3x_2 + b_3 \Rightarrow 14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3.$$

Finalmente, a equação (3.21) especifica $a_1 = 0$. Sendo assim, o nosso problema se resume a resolver apenas oito equações, já que a incógnita $a_1 = 0$.

Primeiro organizamos todas as oito equações na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando o software *Matlab*, conseguimos resolver tal equação matricial, onde teremos os seguintes resultados

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0 & b_1 = -1 & c_1 = 5.5 \\ a_2 = 0.64 & b_2 = -6.76 & c_2 = 18.46 \\ a_3 = -1.6 & b_3 = 24.6 & c_3 = -91.3 \end{array}$$

Observação: utilizamos nesse exemplo o software *Matlab*, para nos ajudar a resolver a equação matricial, porém vários outros que possui a capacidade de resolver equações matriciais também podem ser utilizados sem nenhum problema.

Substituindo os valores encontrados nas equações quadráticas originais, determinamos as seguintes splines de grau ≤ 2 para cada intervalo de dois pontos, a partir dos quatro pontos dados

$$S_1(x) = -x + 5.5, \quad 3.0 \leq x \leq 4.5$$

$$S_2(x) = 0.64x^2 - 6.76x + 18.46, \quad 4.5 \leq x \leq 7.0$$

$$S_3(x) = -1.6x^2 + 24.6x - 91.3, \quad 7.0 \leq x \leq 9.0.$$

Quando usamos S_2 para determinar a estimativa em $x = 5$, temos

$$S_2(5) = 0.64(5)^2 - 6.76(5) + 18.46 = 0.66.$$

3.5.3 Splines cúbicas

Uma spline cúbica, $S_3(x)$, é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte $S_i(x)$, é um polinômio de grau 3 no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

A vantagem da spline de grau 3 é que a curva não tem picos e nem troca abruptamente a concavidade nos nós, isso se deve ao fato da função ter a primeira e a segunda derivadas contínuas.

Supondo $f(x)$ esteja tabelada nos $n + 1$ pontos dados ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), existem n intervalos e, conseqüentemente, $4n$ constantes indeterminadas para se calcular. Assim como aconteceu na spline quadrática, algumas condições são necessárias para se calcular as incógnitas, no caso da spline cúbica serão necessárias $4n$ condições. São elas:

1. os valores das funções e dos polinômios adjacentes quando aplicados nos nós alocados entre os extremos devem ser iguais, isso gera $2n - 2$ condições;
2. o polinômio do primeiro e último intervalo devem passar pelos pontos extremos, isso gera 2 condições;
3. nos nós interiores ao intervalo, as primeiras derivadas de cada polinômio interpolador devem ser iguais, isso gera $n - 1$ condições;
4. nos nós interiores ao intervalo, as segundas derivadas de cada polinômio interpolador devem ser iguais, gerando $n - 1$ condições;
5. as segundas derivadas nos nós extremos do intervalo são nulas, isso gera 2 condições.

Esses cinco tipos de condições nos permite determinar $4n$ equações necessárias para se determinar as $4n$ incógnitas. Embora esse seja um método bem definido, sua utilização exige a solução de um sistema de $4n$ equações, que sem a ajuda de um software, se tornaria uma tarefa árdua, por isso, vamos apresentar uma técnica que exige a solução de apenas $n - 1$ equações. Como a dedução desse método é

um pouco mais complexa do que aquela para obtenção dos sistemas de equações das splines cúbicas, vamos omitir sua dedução, que se dá através do polinômio interpolador de Lagrange e, assim, ficaremos apenas com o resultado da equação cúbica de cada intervalo, caso o leitor se interesse pela dedução, a mesma se encontra na página 454 da fonte [9].

$$\begin{aligned}
 S_i(x) = & \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 \\
 & + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x_i - x) \\
 & + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1}).
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como podemos perceber, essa expressão possui apenas duas incógnitas, que são as segundas derivadas nas extremidades de cada intervalo. Essas incógnitas podem ser encontradas, quando aplicamos os pontos do intervalo escolhido na equação

$$\begin{aligned}
 & (x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\
 & = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)].
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Se aplicarmos a equação acima para todos os n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, teremos $n - 1$ equações simultâneas com $n - 1$ incógnitas. Não esqueça que as segundas derivadas aplicadas nos nós extremos, pela condição 5, devem ser sempre nulas.

Exemplo 16. Ajuste os dados da Tabela 8 abaixo com uma spline cúbica, depois use os resultados para fazer uma estimativa do valor de $f(5)$.

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|------|-------|-------|-------|-------|
| x | 3.0 | 4.5 | 7.0 | 9.0 |
| f(x) | 2.5 | 1 | 2.5 | 0.5 |

Tabela 8: Dados do Exemplo 16.

Solução: Como primeiro passo, vamos utilizar a equação (3.23) para gerar as equações que nos ajudarão na determinação das segundas derivadas nos nós.

Para o primeiro nó interior, vamos usar o seguintes conjunto de dados:

$$x_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 2.5,$$

$$x_1 = 4.5 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = 1,$$

$$x_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = 2.5.$$

Assim, temos de pois de algumas simplificações:

$$1.5f''(3) + 8f''(4.5) + 2.5f''(7) = 9.6.$$

Como, pela condição 5, as segundas derivadas nos nós extremos são nulas, temos que $f''(3) = 0$, logo

$$8f''(4.5) + 2.5f''(7) = 9.6.$$

De modo análogo, podemos aplicar a equação (3.23) no segundo nó interior para isso serão usados os seguintes dados

$$x_1 = 4.5 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = 1$$

$$x_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = 2.5$$

$$x_3 = 9 \quad \Rightarrow \quad f(x_3) = 0.5,$$

donde teremos depois de simplificar, a seguinte expressão:

$$2.5f''(4.5) + 9f''(7) + 2f''(9) = -9.6.$$

Pela condição 5, as segundas derivadas nos nós extremos são nulas logo, temos que $f''(9) = 0$, daí:

$$2.5f''(4.5) + 9f''(7) = -9.6.$$

Resolvendo o sistema com as duas equações encontradas:

$$\begin{cases} 8f''(4.5) + 2.5f''(7) = 9.6 \\ 2.5f''(4.5) + 9f''(7) = -9.6 \end{cases}$$

obtemos,

$$f''(4.5) = 1.67909 \text{ e } f''(7) = -1.53308.$$

Substituindo esses valores na equação (3.22), temos

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \frac{0}{6(4.5-3)}(4.5-x)^3 + \frac{1.67909}{6(4.5-3)}(x-3)^3 + \left[\frac{2.5}{4.5-3} - \frac{0(4.5-3)}{6} \right] (4.5-x) \\ &\quad + \left[\frac{1}{4.5-3} - \frac{1.67909(4.5-3)}{6} \right] (x-3) \\ S_1(x) &= 0.186566(x-3)^3 + 1.666667(4.5-x) + 0.246894(x-3), \quad \forall x \in [3, 4.5]. \end{aligned}$$

De forma similar ao que foi desenvolvido, podemos também encontrar a spline cúbica para o segundo e o terceiro intervalo, onde teremos

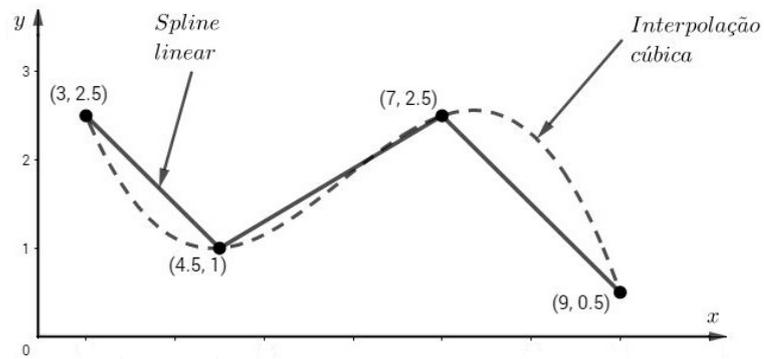
$$\begin{aligned} S_2(x) &= 0.1119(7-x)^3 - 0.1022(x-4.5)^3 - 0.2996(7-x) + 1.6388(x-4.5), \quad \forall x \in [4.5, 7], \\ S_3(x) &= -0.127757(9-x)^3 + 1.761027(9-x) + 0.25(x-7), \quad \forall x \in [7, 9]. \end{aligned}$$

Assim chegamos nas splines cúbicas que descrevem o comportamento da função $f(x)$ em cada intervalo de dois pontos dados.

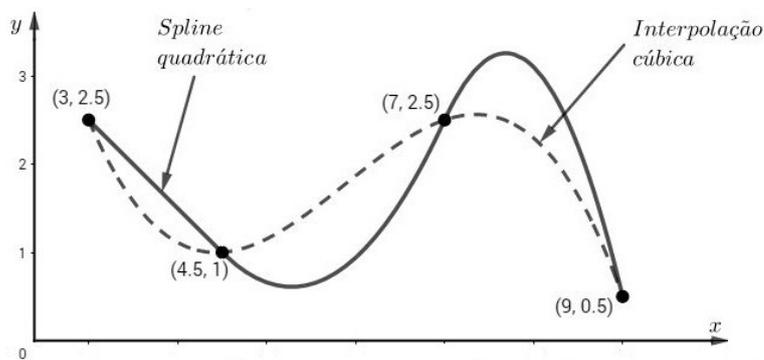
Como $x = 5 \in [4.5, 7]$, a spline cúbica $S_2(x)$, nos fornece a estimativa desejada

$$S_2(5) = 1.102886.$$

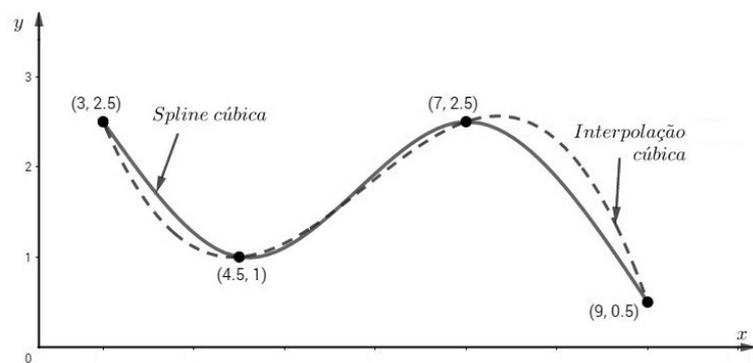
A Figura 3.7, representa o resultado dos exemplos 14, 15 e 16. Se observarmos bem, veremos uma melhora progressiva, quando nos movemos das splines lineares para as quadráticas e depois para as cúbicas. Nos gráficos apresentados na figura também representamos o ajuste dos dados por um polinômio interpolador de grau 3, com isso fica evidente que o critério da segunda derivada nula, influencia a tal ponto a spline cúbica, que a mesma passa a fornecer um ajuste diferente do ajuste apresentado pelo polinômio interpolador de grau 3.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.7: Ajuste por spline de um conjunto de quatro pontos. (a) Spline linear. (b) Spline quadrático. (c) Spline cúbico.

4 Aplicação da regressão polinomial em aula experimental

Todos os conceitos deste capítulo foram baseados nas referências [3], [5], [10], [12], [13], [14], [17], [20], [22], [25] e [27].

O método da regressão polinomial pode ser apresentado no ensino médio de forma ampla, como exemplo temos a análise de dados estatísticos, a explicação de dados experimentais de reações físicas e químicas e na simplificação de funções matemáticas mais complexas. Neste trabalho discutimos uma aplicação simples, mas que realça de forma significativa como esse conhecimento pode fazer a diferença na vida escolar dos alunos.

Como aplicação dos conteúdos de ajuste de curvas, foi proposto no terceiro ano do ensino médio uma atividade prática que visa determinar a resistência elétrica de uma lâmpada incandescente de 70W/220V. A atividade foi desenvolvida ao longo de 6 aulas, de 50 minutos cada, onde, a primeira e a segunda aula foram utilizadas para realizar as medições das grandezas tensão e corrente elétrica, a terceira aula foi utilizada para apresentar o método numérico de regressão polinomial, usando um polinômio do segundo grau. A quarta e a quinta aula foram utilizadas para realizar o tratamento dos dados experimentais. Por fim, a sexta aula foi utilizada para estimar valores através da curva de regressão determinada, a fim de se comparar com os valores medidos no experimento.

Usamos como apoio para os cálculos numéricos o software *LibreOffice Calc*, uma ferramenta gratuita, acessível à maioria dos alunos, que pode ser instalada em laboratórios de informática de escolas. Para realizar a plotagem dos pontos medidos no plano cartesiano, que nos fornece a tendência geral dos dados, a fim de se verificar o método de regressão polinomial que melhor os descrevem, usamos o ferramenta *Qtiplot*, um software também gratuito, executável, além de ser fácil de manipular e de traçar o gráfico, também apresenta a lei de formação do polinômio de regressão.

Antes de começarmos a discorrer sobre o procedimento experimental e sobre os resultados encontrados, vamos apresentar um pouco da teoria que embasa essa aula experimental.

A resistência elétrica é a propriedade da matéria de resistir à passagem da corrente elétrica, essa grandeza se relaciona com as grandezas tensão e corrente elétrica através

de uma relação matemática conhecida como 1º Lei de Ohm

$$R = \frac{U}{I}, \quad (4.1)$$

onde:

- R é a resistência elétrica do material (Ω , Ohm);
- U é a tensão elétrica (V , Volt);
- I é a corrente elétrica (A , Ampère).

Através dessa Lei, Georg Simon Ohm afirma que para alguns materiais a razão de tensão por corrente é sempre constante caso a temperatura seja mantida, porém o problema é justamente manter a temperatura quando a carga está sob influência das grandezas elétricas. A corrente elétrica ao se locomover pelo meio condutor, libera calor através do que denominamos de efeito Joule, essa produção instantânea de calor acaba elevando a temperatura do material, fazendo com que a relação entre tensão e corrente elétrica deixe de ser linear, passando agora a depender do fator temperatura.

A fórmula utilizada para se determinar a resistência elétrica de um material sujeito a altas variações de temperatura é

$$R = R_0(1 + \alpha(T - T_0)), \quad (4.2)$$

onde:

- R_0 é a resistência do material em temperatura ambiente;
- T é temperatura instantânea do material ao longo do processo de condução de corrente;
- T_0 é a temperatura ambiente;
- α é o coeficiente de temperatura.

Como o coeficiente α oscila com variações de temperatura acima de dezenas de graus, a complexidade de se calcular a grandeza resistência usando a equação (4.2) aumenta muito.

Nossa proposta com o experimento relatado neste trabalho, é de apresentar a grandeza resistência elétrica de uma forma não abordada nos livros didáticos, uma vez que os materiais atualmente desenvolvidos não abordam a resistência elétrica como uma grandeza que está em função da temperatura.

A turma escolhida para a aplicação desse trabalho experimental foi o terceiro ano do Ensino Médio, do Colégio Estadual João Carneiro dos Santos. O currículo mínimo do estado de Goiás prevê que, no segundo bimestre do ensino médio na disciplina Física, seja apresentado o conteúdo de eletrodinâmica, que é justamente o conteúdo em que se estuda as grandezas elétricas já mencionadas. Escolhemos, para nos ajudar a entender como se varia a grandeza resistência elétrica com a mudança da temperatura, a lâmpada incandescente de 70W/220V que, quando instalada em um circuito cuja tensão nominal seja de 220V, nos fornece luminosidade nominal através da transformação da energia elétrica em calor e em luz, quando seu filamento já aquecido se torna incandescente, liberando radiação na faixa de luz visível. Devido ao fato do material usado como filamento da lâmpada estar sujeito a altas variações de temperatura, temos aí um perfeito caso de resistência elétrica variável.

Participaram do projeto vinte e seis alunos, que foram divididos em um total de 8 grupos, sendo 6 grupos com 3 alunos e 2 grupos com 4 alunos. Iniciamos a primeira aula apresentando o kit didático da Figura 4.1 e os instrumentos de medição que seriam usados para colher as grandezas tensão e corrente elétrica. Em seguida, os alunos receberam um roteiro para a aula experimental (ver anexo), com uma introdução sobre o tema da aula e o procedimento experimental para se chegar no objetivo proposto pelo experimento.

Ao usar no kit didático lâmpadas incandescentes de valores iguais na disposição em série, podemos garantir, tomando por base a 1^o Lei de Ohm, que a queda de tensão em cada lâmpada, seria dado pela tensão total de alimentação dividida pela quantidade de cargas expostas em série no circuito. Sendo assim, o que esperávamos com as medições eram tensões com valores discretos seguindo a lógica: n lâmpadas em série, o esperado era uma tensão no valor de $\frac{1}{n}$ da tensão de alimentação do circuito, onde $1 \leq n \leq 6$.

Iniciamos as medições no kit de lâmpadas em série apresentado na Figura 4.1, colhendo as grandezas tensão e corrente elétrica para várias configurações no circuito. De forma que as tensões e correntes medidas na lâmpada L_6 sofram alterações gradativas até que a mesma receba a diferença de potencial máxima para o circuito proposto.

Na Tabela 9, temos os valores medidos pelos grupos de alunos que participaram do projeto. Observando bem, podemos perceber uma pequena variação entre os valores

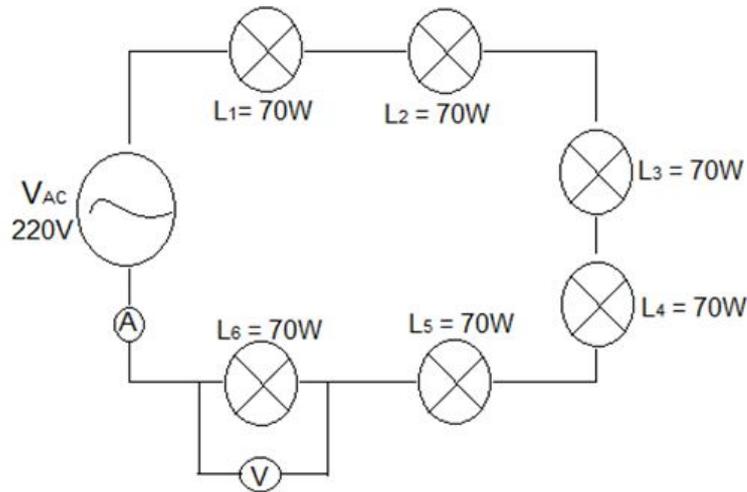


Figura 4.1: Kit para medição da resistência de uma lâmpada incandescente.

de tensão e corrente medidos pelos 8 grupos de alunos, valores esses que teoricamente deveriam ser os mesmos, mas como esperado isso não ocorre, porque os aparelhos usados para medição das grandezas elétricas apresentam imprecisões em suas medições.

Para medir a tensão elétrica, usamos o multímetro modelo ET-1400, do fabricante Minipa, tal modelo apresenta uma medição de tensão em corrente alternada na faixa de 500V, que foi a faixa utilizada no experimento, uma resolução de 1V com precisão de $\pm(1, 2\% + 10 \text{ Dígitos})$. Sabendo que a precisão indica o quanto medidas repetidas estão próximas umas das outras, medidas diferentes para o mesmo experimento já eram esperadas. Outro detalhe que poderia acontecer (e de fato aconteceu neste experimento) foi que a tensão elétrica fornecida pela concessionária não tinha seu valor fixo em 220V, mas sim um valor que variava entre 201V e 231V, que são os limites mínimos e máximo permitido pela Agência Nacional de Energia Elétrica - ANEEL.

Para realizar a medição da grandeza corrente elétrica, foi utilizado o Alicete Amperímetro ET - 3100, do fabricante Minipa que, na faixa de medição de 2A, apresenta resolução de 0.001A com precisão de $\pm(5, 0\% + 5 \text{ Dígitos})$.

Normalmente, quando não temos como determinar com extrema precisão os dados experimentais, que é o nosso caso, o mais comum a se fazer é colher o mesmo dado repetidas vezes, a fim de se trabalhar com o valor médio.

Como a prática que estamos discutindo foi realizada por grupos de alunos diferentes, seguindo a ideia de que cada grupo estivesse realizando seu próprio experimento. Vamos analisar os resultados individuais, tomando como exemplo os resultados encontrados pelo grupo 3, depois faremos análise da média dos resultados encontrados pelos 8 grupos

| | | | | | | | |
|-------------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Experimento do grupo 01 | Corrente (A) | 0.122 | 0.131 | 0.148 | 0.170 | 0.213 | 0.313 |
| | Tensão (V) | 35 | 42 | 52 | 70 | 105 | 210 |
| Experimento do grupo 02 | Corrente (A) | 0.123 | 0.134 | 0.151 | 0.175 | 0.216 | 0.325 |
| | Tensão (V) | 35 | 42 | 52 | 69 | 108 | 212 |
| Experimento do grupo 03 | Corrente (A) | 0.128 | 0.134 | 0.151 | 0.171 | 0.217 | 0.313 |
| | Tensão (V) | 35 | 42 | 51 | 72 | 104 | 212 |
| Experimento do grupo 04 | Corrente (A) | 0.122 | 0.132 | 0.151 | 0.171 | 0.201 | 0.320 |
| | Tensão (V) | 35 | 42 | 52 | 69 | 109 | 208 |
| Experimento do grupo 05 | Corrente (A) | 0.123 | 0.133 | 0.149 | 0.172 | 0.210 | 0.311 |
| | Tensão (V) | 35 | 42 | 52 | 69 | 104 | 208 |
| Experimento do grupo 06 | Corrente (A) | 0.124 | 0.134 | 0.150 | 0.171 | 0.213 | 0.320 |
| | Tensão (V) | 35 | 42 | 53 | 71 | 107 | 213 |
| Experimento do grupo 07 | Corrente (A) | 0.124 | 0.135 | 0.152 | 0.176 | 0.214 | 0.324 |
| | Tensão (V) | 37 | 44 | 55 | 73 | 104 | 213 |
| Experimento do grupo 08 | Corrente (A) | 0.123 | 0.131 | 0.146 | 0.171 | 0.212 | 0.314 |
| | Tensão (V) | 35 | 45 | 52 | 69 | 104 | 209 |

Tabela 9: Resultados das medições realizadas pelos alunos.

e, por fim, uniremos todos dados experimentais a fim de unificar os 8 experimentos em somente um.

A partir dos dados apresentados na Tabela 10, o grupo 3, seguindo o roteiro experimental, partiu para a plotagem dos pontos no plano cartesiano. Primeiro a plotagem foi feita manualmente, usando um papel quadriculado, depois, como proposta de melhoria. Realizaram, com auxílio do professor, a plotagem dos pontos usando o software *Qtplot*.

| Grupo 03 | |
|--------------|------------|
| Corrente (A) | Tensão (V) |
| 0.128 | 35 |
| 0.134 | 42 |
| 0.151 | 51 |
| 0.171 | 72 |
| 0.217 | 104 |
| 0.313 | 212 |

Tabela 10: Resultados das medições realizadas pelo grupo 3.

O *Qtplot* nos permite a plotagem dos pontos no plano cartesiano, e já vem com

vários métodos de regressão por mínimos quadrados e de interpolação polinomial. Sua utilização é bastante simples, uma vez que o mesmo conta com uma interface bastante simples e intuitiva. A Figura 4.2, apresenta a tela inicial do software *Qtiplot*, onde temos a disposição a tabela de entrada de dados, já separadas em colunas nomeadas de X e Y , juntamente com a barra de ferramentas que é onde encontramos os comandos de plotagem, análise e formatação dos gráficos.

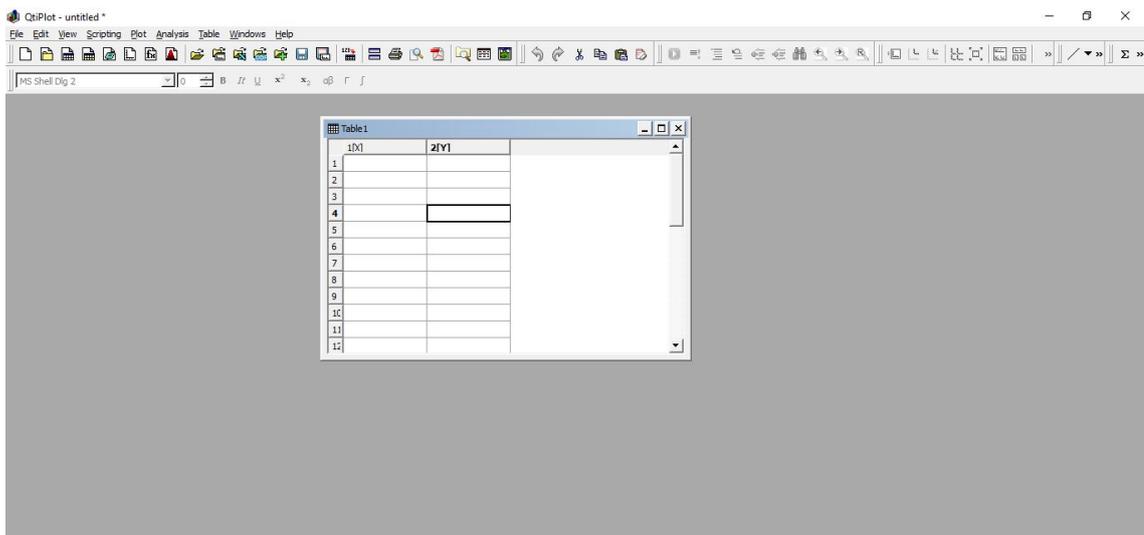


Figura 4.2: Tela inicial do software *Qtiplot*.

Para se realizar uma plotagem de alguns pontos, seguido de um ajuste por regressão polinomial com polinômio de grau 2 procedemos da seguinte forma: primeiro inserimos os dados na tabela de entrada; em segundo momento selecionamos os pontos já lançados na tabela; no terceiro passo nos dirigimos a barra de ferramentas e escolhemos o comando “Plot”, em seguida o comando “Scatter”, com isso plotamos todos os pontos no plano cartesiano; como quarto passo, clicamos no comando “Analysis” da barra de ferramentas e como desejamos realizar uma regressão quadrática, escolhemos o comando “FIT Polynomial”, escolhemos a cor do gráfico depois clicamos em “FIT”, em seguida “close”.

O gráfico plotado seguindo os passos detalhados acima segue na Figura 4.3, juntamente com os coeficientes da equação de regressão quadrática, que podem ser acessados na barra de ferramentas através do comando “Format”, seguido do comando “Plot”.

Em seguida, no circuito em série da Figura 4.1, trocamos as lâmpadas L1 e L2 por lâmpadas de 120W/220V, energizamos novamente o circuito para realizar a medição da grandeza corrente elétrica na lâmpada L6, onde foi medido o valor de 0,142A junta-

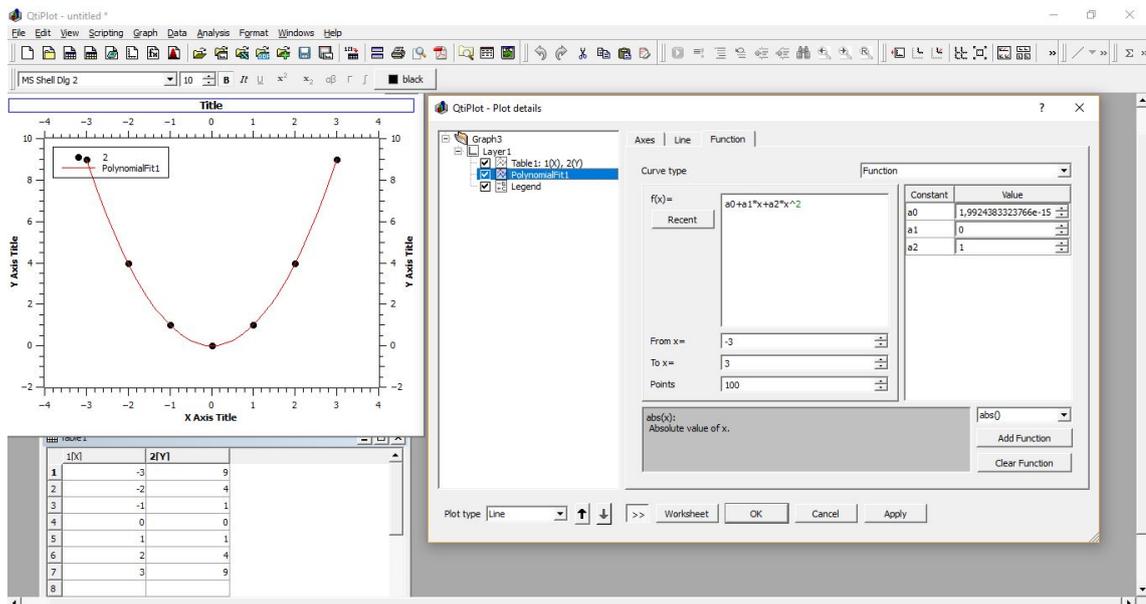


Figura 4.3: Ajuste de regressão quadrática realizado no *Qtiplot*.

mente com sua tensão de 46V. Porém, a tensão medida não foi divulgada aos alunos, a princípio, uma vez que esse era o valor a ser determinado pelo método. A medida da tensão elétrica que corresponde ao valor de corrente de 0,142A foi medida antes do final de toda a análise, pois, o fato de não termos uma fonte de tensão ajustável, poderia dificultar que conseguíssemos chegar a mesma corrente já medida em função da tensão.

O próximo passo do grupo foi estimar um valor de tensão que correspondia à corrente de 0,142A, usando somente o gráfico traçado a partir dos dados experimentais colhidos e os conhecimentos matemáticos presentes na educação básica. O gráfico traçado no software *Qtiplot* juntamente com o ponto estimado seguem na Figura 4.4.

Na sequência, depois que os alunos foram instruídos sobre como usar o método da regressão polinomial do segundo grau, eles partiram para o cálculo dos parâmetros necessários para se encontrar os coeficientes do polinômio de regressão. Os resultados que seguem na Tabela 11 foram calculados usando como ferramenta de cálculo o software Calc, que os permitiu elaborar planilhas capazes de calcular somatórios e determinantes.

Com os parâmetros calculados, o grupo 3 montou o sistema abaixo,

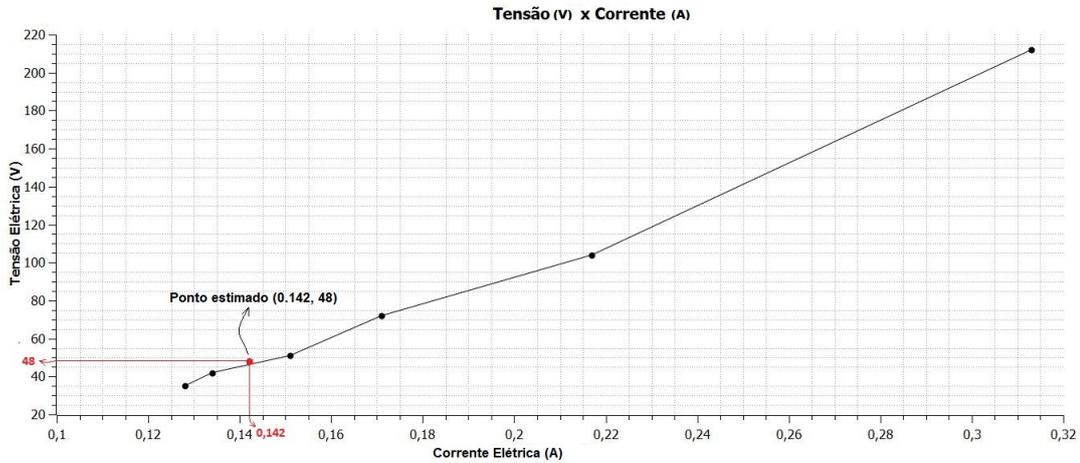


Figura 4.4: Representação gráfica dos dados da Tabela 10 realizada no *Qtiplot*.

| | | |
|----------------------|-------------------------|-----------------------------|
| $m = 2$ | $\sum i_i = 1.114$ | $\sum i_i^4 = 0.013781$ |
| $n = 6$ | $\sum U_i = 516$ | $\sum i_i U_i = 119.045$ |
| $\bar{x} = 0.185667$ | $\sum i_i^2 = 0.23144$ | $\sum i_i^2 U_i = 30.26248$ |
| $\bar{y} = 86$ | $\sum i_i^3 = 0.053829$ | |

Tabela 11: Parâmetros dos dados experimentais colhidos pelo grupo 3.

$$\begin{bmatrix} 6 & 1.114 & 0.23144 \\ 1.114 & 0.23144 & 0.053829 \\ 0.23144 & 0.053829 & 0.013781 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 516 \\ 119.045 \\ 30.26248 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema usando o Calc com suas planilhas já elaboradas para resolver sistemas lineares 3×3 , foi $a_0 = -17.4902079$, $a_1 = 213.0100431$ e $a_2 = 1657.656668$. Portanto, a equação quadrática por mínimos quadrados encontrada foi:

$$U(i) = -17.4902079 + 213.0100431i + 1657.656668i^2.$$

O erro padrão da estimativa baseado na regressão polinomial foi $S_{U/i} = 3.481694$ com o coeficiente de determinação de 0.998359.

Os resultados indicam que 99.8359% da incerteza original foi explicada por esse modelo.

Na sequência foi aplicado o valor de 0.142A no polinômio de regressão, a fim de se determinar a sua tensão elétrica correspondente:

$$U(0.142) = -17.4902079 + 213.0100431 \times 0.142 + 1657.656668 \times 0.142^2 = 46.182207.$$

Se compararmos o valor estimado pelo grupo antes de usar a regressão polinomial que foi de 48V com o valor apresentado pelo aparelho de medição que foi de 46V, temos aí um erro de 2V, já em comparação com o valor da tensão estimado pelo método de regressão quadrática que foi de 46,182207 V, teremos uma aproximação muito mais eficaz, com um erro de 0.182207V.

Por fim, o grupo, usando o software *Qtiplot*, inseriu os dados experimentais e usando o comando de ajuste polinomial para um polinômio de grau 2, depois encontrou, conforme segue na Figura 4.5, não somente os coeficientes do polinômio interpolador, como também o traçado da curva de regressão.

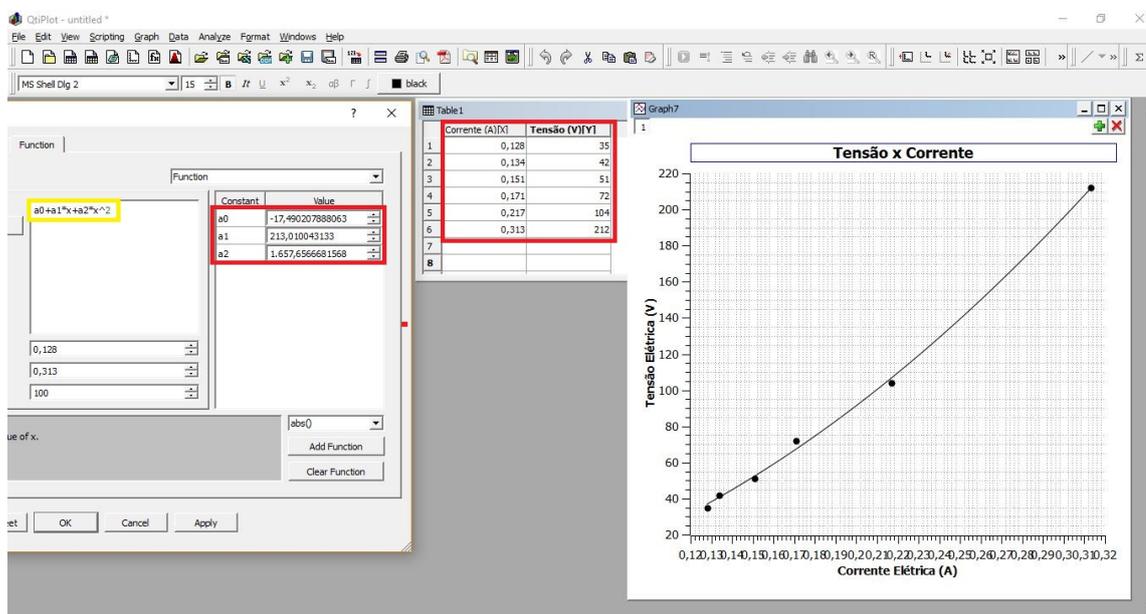


Figura 4.5: Uso do *Qtiplot* para determinação da curva de regressão polinomial.

Seguindo com a análise dos resultados apresentados na aula experimental, a Tabela 12, mostra o resultado individual da estimativa sem usar regressão polinomial de cada grupo, seguido do resultado usando as técnicas de regressão.

Analisando a tabela, podemos ver que em apenas 2 dos 8 resultados apresentados, o erro entre o valor estimado pelos alunos seguindo critérios que os próprios definiram foi menor que o erro da estimativa feita através da regressão quadrática. Quando olhamos para o resultado médio de toda a turma, fica fácil perceber que o método de regressão linear superou as estimativas feitas pelos alunos de forma aleatória.

Os dados colhidos pelos grupos de alunos se tratam das mesmas medidas experi-

| Grupos | Valor Est. s/ regressão | Valor Est. c/ regressão | Valor medido | Módulo do erro s/ regressão | Módulo do erro c/ regressão |
|----------|----------------------------|----------------------------|-----------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Grupo 01 | 43 | 47.294989 | 46.2 | 3.2 | 1.094990 |
| Grupo 02 | 42 | 45.549854 | 46.0 | 4.0 | 0.450150 |
| Grupo 03 | 48 | 46.182207 | 46.0 | 2.0 | 0.182207 |
| Grupo 04 | 46 | 47.571600 | 46.1 | 0.1 | 1.471599 |
| Grupo 05 | 43 | 43.455169 | 46.1 | 3.1 | 2.644831 |
| Grupo 06 | 46 | 43.383641 | 46.2 | 0.2 | 2.816359 |
| Grupo 07 | 48 | 46.556766 | 46.1 | 1.9 | 0.456766 |
| Grupo 08 | 44 | 45.356539 | 46.0 | 2.0 | 0.643461 |
| Média | 45 | 45.668847 | 46.0875 | 2.06250 | 1.220045 |

Tabela 12: Resultados das estimativas feitas pelos alunos.

mentais e a discrepância entre os valores, como já justificada, fica por conta da precisão dos aparelhos de medição e da flutuabilidade do valor da tensão nominal. Vamos, como é de costume em procedimentos experimentais, usar a média desses valores para verificar se o método da regressão linear continua a fornecer valores com erro verdadeiro menor que o erro padrão e se sua estimativa fica próximo da média das estimativas realizadas pelos grupos antes de conhecer sobre a regressão polinomial.

Na Tabela 13, temos os valores médios das correntes e tensões apresentados na Tabela 9. Usando os pontos da Tabela 13 no software *Qtiplot*, determinamos os coeficientes da regressão quadrática $a_0 = -32,58556809$, $a_1 = 407,0652371$ e $a_2 = 1131,993185$. Assim temos a equação quadrática determinada pelo método dos mínimos quadrados é:

$$U(i) = -32,58556809 + 407,0652371i + 1131,993185i^2.$$

| Medições | Corrente elétrica média (A) | Tensão elétrica média (V) |
|------------|--------------------------------|------------------------------|
| Medição 01 | 0.123625 | 35.250 |
| Medição 02 | 0.133000 | 42.625 |
| Medição 03 | 0.149750 | 52.375 |
| Medição 04 | 0.172125 | 70.250 |
| Medição 05 | 0.212000 | 105.625 |
| Medição 06 | 0.317500 | 210.625 |

Tabela 13: Valores médios de tensões e correntes colhidos experimentalmente.

O erro padrão da estimativa baseado na regressão polinomial foi $S_{U/i} = 1.25665$ com o coeficiente de determinação de 0.999782.

Os resultados indicam que 99.9782% da incerteza original foi explicada por esse modelo.

Na Tabela 14, temos os valores das correntes e tensões medidas por cada grupo de alunos, no circuito em série da Figura 4.1, quando trocamos as lâmpadas L1 e L2 por lâmpadas de 120W/220V.

| Medições | Corrente elétrica (A) | Tensão elétrica (V) |
|------------|-----------------------|---------------------|
| Medição 01 | 0.140 | 46.2 |
| Medição 02 | 0.140 | 46.0 |
| Medição 03 | 0.142 | 46.0 |
| Medição 04 | 0.140 | 46.1 |
| Medição 05 | 0.136 | 46.1 |
| Medição 06 | 0.136 | 46.2 |
| Medição 07 | 0.139 | 46.1 |
| Medição 08 | 0.136 | 46.0 |
| Média | 0.138625 | 46.0875 |

Tabela 14: Valores de correntes e tensões medidos experimentalmente por cada grupo.

Usando o valor médio dentre as correntes medidas na tabela acima, podemos estimar o valor da tensão pela equação quadrática como segue:

$$\begin{aligned}
 U(0.138625) &= -32,58556809 + 407,0652371 \times 0.138625 + 1131,993185 \times 0.138625^2 \\
 &= 45,59723962V.
 \end{aligned}$$

Esse último resultado mostra que o método da regressão polinomial, usando um polinômio de grau 2, apresenta resultados muito precisos na determinação da equação que descreve o comportamento da resistência elétrica a partir das grandezas tensão e corrente elétrica. O erro padrão do método quando comparado com o erro verdadeiro, apresentou sempre um valor maior e isso representa um resultado muito bom, pois, nos trás confiança nas estimativas, já que o erro real é bem representado pelo erro do processo de regressão.

Com os comparativos apresentados no final da 6º aula desse projeto, percebemos uma acolhida muito boa por parte dos alunos, que aprenderam não somente um mé-

todo novo e confiável de ajuste de curvas, como também se adaptaram muito bem às ferramentas computacionais que lhes foram apresentadas.

O ensino médio no Brasil está mudando e de acordo com o que apresentam os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, elaborado no ano de 2000, o Ministério da Educação (MEC), partindo dos princípios definidos na LDB, juntamente com os professores de todo o país tem buscado definir um novo perfil para o currículo. A proposta consiste em apresentar significados ao conhecimento escolar através da contextualização, interdisciplinaridade e a desfragmentação do ensino. Em face disso, a proposta que apresentamos neste experimento, quando usamos métodos numéricos matemáticos de ajuste de curvas no auxílio as disciplinas de Ciências da Natureza, vem de acordo com o que atualmente tem sido praticado na escola em incentivo da Secretaria de Educação do Estado de Goiás.

5 Método gráfico para determinação da resistividade do solo

Todos os conceitos e demonstrações deste capítulo foram baseados nas referências [1], [10], [16], [18], [19], [22], [23] e [31].

Este capítulo é dedicado a apresentar algumas definições sobre o sistema de aterramento, e uma breve introdução sobre o método mais usado para se determinar a resistividade do solo, embora, o método não siga nenhum rigor matemático no processo determinação de um ponto não mapeado pela curva traçada a partir dos dados experimentais, ainda assim é o mais utilizado por profissionais da área elétrica na elaboração do projeto de malha de aterramento.

Como o método que será exposto aqui apresenta uma deficiência matemática em uma de suas etapas, vamos primeiro conhecê-lo para então, no Capítulo ??, propormos como sugestão de melhoria, a utilização de um dos conceitos que foi apresentado nos Capítulos 2 e 3 deste trabalho, a fim de chegarmos no referido dado que é tão importante para a obtenção da resistividade do solo, usando um procedimento matemático com eficácia comprovada.

5.1 Introdução ao sistema de aterramento

Para que um sistema elétrico funcione bem, com boa continuidade no serviço e com um sistema de proteção operante, se faz necessário que tomemos alguns cuidados com o sistema de aterramento. Esses cuidados se resumem na elaboração de projetos precisamente elaborados que contemplem todas ou, pelo menos, a maioria das condições disponíveis a que o sistema possa ser submetido. Com base nisso, podemos dizer que o sistema de aterramento tem os seguintes objetivos:

1. garantir uma resistência de aterramento o mais baixo possível, para que as correntes de falta possam ter um caminho seguro e de boa absorção pela terra;
2. manter as tensões que são geradas no solo no momento que as correntes de fuga se dissipem na terra em potenciais seguros;
3. permitir que os dispositivos de proteção atuem com maior eficiência interrompendo as fugas de corrente;

4. proporcionar um caminho seguro para as correntes de descargas atmosféricas;
5. eliminar as cargas estáticas que se acumulam nas carcaças dos equipamentos.

Um sistema elétrico pode receber seu aterramento de várias maneiras distintas, dentre elas, destacamos desde uma simples haste aterrada até uma complexa malha de aterramento.

As configurações do projeto de aterramento podem variar muito dependendo das características do solo, dentre elas destacaremos aqui neste trabalho a resistividade elétrica que é uma das variáveis mais importante na determinação da resistência do solo, que por sua vez representa a imposição que o meio condutor impõe a corrente elétrica durante sua circulação.

5.2 Resistividade do solo

São muitos os fatores que interferem diretamente na resistividade do solo. Dentre eles destacamos: os variados tipos de solo ou suas composições; solos constituídos por camadas estratificadas com profundidades e materiais diferentes; umidade; variação de temperatura; compactação e pressão; quantidade e tipo de sais dissolvidos na água retida no solo.

Assim, as diversas combinações relatadas acima acabam por determinar diferentes tipos de solos que por sua vez implicam em diferentes valores para as resistividades. Como ilustração da variação da grandeza resistividade elétrica em função das características do solo, temos a Tabela 15 abaixo.

5.3 A influência da umidade

Como mencionado anteriormente, a resistividade do solo varia com a umidade do solo, isso acontece porque no mesmo a condução de cargas ocorre predominantemente pela formação de íons, sendo assim um solo com maior porcentagem de umidade, favorece a dissolução dos sais ali presentes formando um meio eletrolítico favorável a condução de corrente iônica. Em um solo específico, podemos concluir que a resistividade do solo, que é a dificuldade que a corrente elétrica encontra quando se propaga no mesmo, varia com a umidade como mostrado na Tabela 16 que faz uma relação entre a umidade de um solo arenoso e sua respectiva umidade.

| Tipo de Solo | Resistividade ($\Omega.m$) |
|------------------------------------|------------------------------|
| Lama | 5 a 100 |
| Terra de jardim com 50% de umidade | 140 |
| Terra de jardim com 20% de umidade | 480 |
| Argila seca | 1500 a 5000 |
| Argila com 40% de umidade | 80 |
| Argila com 20% de umidade | 330 |
| Areia molhada | 1300 |
| Areia seca | 3000 a 8000 |
| Calcário compacto | 1000 a 5000 |
| Granito | 1500 a 1000 |

Tabela 15: Tipo de solo e respectiva resistividade. Fonte:[16].

| Índice de Umidade (% por peso) | Resistividade ($\Omega.m$) (Solo Arenoso) |
|-----------------------------------|--|
| 0,0 | 10.000.000 |
| 2,5 | 1.500 |
| 5,0 | 430 |
| 10,0 | 185 |
| 15,0 | 105 |
| 20,0 | 63 |
| 30,0 | 42 |

Tabela 16: Resistividade de um solo arenoso com concentração de umidade. Fonte:[16].

Verifica-se, então, que a grandeza física resistividade do solo tem um comportamento que depende diretamente da umidade do solo, assim o sistema de aterramento varia sua qualidade com o período de seca e chuva da região, sendo de boa qualidade no período da chuva e pior no período da seca.

A Figura 5.1 representa bem em um solo arenoso, como se dá a variação da resistividade do solo frente a umidade.

5.4 A influência da temperatura

Outro fator que influencia bastante na resistividade do solo é a temperatura, e a explicação está novamente nas moléculas de água contidas no solo. A Tabela 17 apresenta como se dá a variação da resistividade em um solo arenoso, mantendo todas

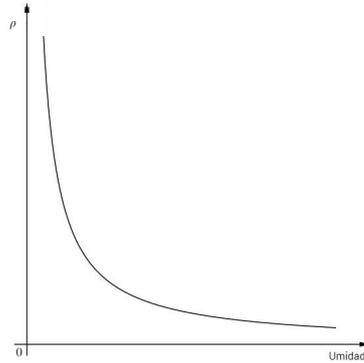


Figura 5.1: $\rho \times$ Umidade percentual do solo arenoso. Fonte:[16].

as outras características.

| Temperatura ($^{\circ}C$) | Resistividade ($\Omega.m$) (Solo Arenoso) |
|--------------------------------|--|
| 20 | 72 |
| 10 | 99 |
| 0 (água) | 138 |
| 0 (gelo) | 300 |
| -5 | 790 |
| -10 | 3.300 |

Tabela 17: Relação entre resistividade do solo arenoso e temperatura. Fonte:[16].

Podemos, também, verificar como varia a resistividade do solo através da curva $\rho \times$ Temperatura apresentada na Figura 5.2.

Como se pode observar no gráfico há uma descontinuidade no ponto de $0^{\circ}C$ que é onde a água muda de estado físico e provoca uma grande variação no estado de ligação entre as partículas que constituem a concentração eletrolítica.

Com a continuidade do decréscimo da temperatura a partir do ponto de $0^{\circ}C$, o solo se torna cada vez mais seco devido as concentrações moleculares o que implica diretamente no aumento da resistividade.

Observando o outro extremo do gráfico, percebemos também um aumento da resistividade quando a temperatura se aproxima dos $100^{\circ}C$, essa proximidade do estado de vaporização da água, faz com que o solo fique cada vez mais seco, que por sua vez produz bolhas entre os grânulos dificultando, assim, a condutividade de corrente elétrica.

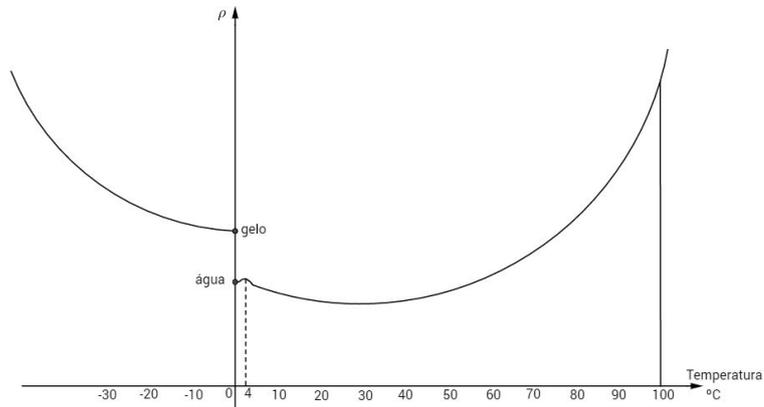


Figura 5.2: $\rho \times$ Temperatura.

5.5 A influência da estratificação

Outro fator que influencia bastante na resistividade do solo é sua composição geológica, a maioria dos solos não apresentam a composição homogênea, com isso teremos resistividades diferentes para profundidades diferentes. Dentre os estudos feitos sobre os tipos de solo, tanto na bibliografia [16] tomada como referência e nos demais autores que abordam sobre o assunto, o perfil levantado considera que suas camadas homogêneas são na maioria horizontais, uma vez que casos verticais são bem atípicos.

Como os solos tem suas resistividades dependentes das camadas que o compõe, a corrente que dispersa pelo mesmo também sofre alteração. A Figura 5.3 mostra como se comporta a dispersão de corrente no solo heterogêneo, quando a mesma é injetada através de um único eletrodo de aterramento.

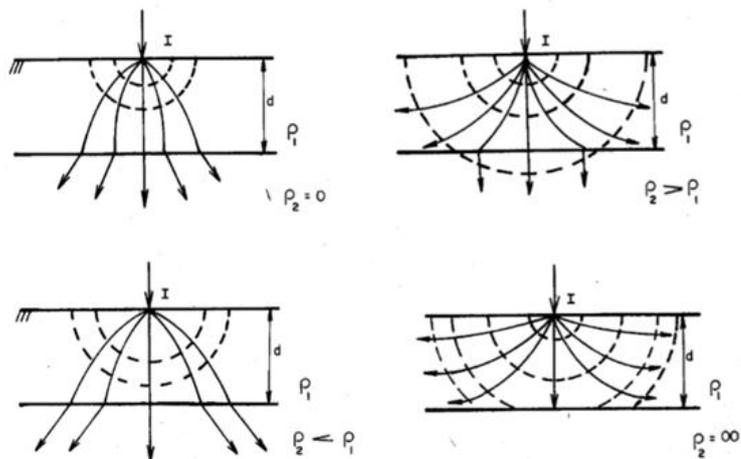


Figura 5.3: Estratificação do solo em duas camadas. Fonte:[16].

5.6 Ligação à terra

Quando se interliga uma parte metálica a um sistema de aterramento, espera-se que em um caso de fuga de corrente, exista um caminho de baixa resistência para a corrente elétrica. Durante o processo de fuga, gera-se valores elevados de corrente elétrica que sensibiliza os dispositivos de proteção, permitindo a atuação com fidelidade e precisão eliminando o defeito o mais rápido possível.

Caso o tempo de defeito demore um pouco mais do que o previsto pela não eficiência do aterramento, a corrente que ecoa pelo solo poderá gerar, nas massas metálicas energizadas ou no solo, potenciais perigosos.

Por isso, num sistema de aterramento procura-se sempre garantir uma adequada ligação das massas ao solo, com a finalidade de garantir o melhor aterramento possível. Assim, em caso de fuga de corrente para o solo, os potenciais de passo e de toque fiquem sempre abaixo dos limites críticos determinados pelas normas de segurança.

O sistema de aterramento se configura através da junção de hastes, conectores e condutores que, em conjunto, se organizam de modo a garantir a melhor ligação das massas à terra. Os modelos mais comuns de sistemas de aterramento são: única haste cravada no solo; hastes cravadas em linha; três hastes cravadas em forma de triângulo equilátero; hastes em forma de quadrado; hastes formando um círculo; placas de material condutor enterradas no solo e fios ou cabos enterrados em forma de cruz, em vala comum, em estrela ou em formato de malhas quadriculadas.

5.7 Haste de aterramento

As hastes utilizadas no sistema de aterramento devem seguir algumas características, de forma a contribuir para facilitar a transmissão da corrente de fuga para o solo que se dá através da haste. Dentre essas características podemos destacar: a boa condutividade; ser constituída de material que não reage quimicamente com os ácidos e sais do solo; ser de um material que sofre a menor ação possível da corrosão galvânica e que tenha boa resistência mecânica.

5.8 Projeto do sistema de aterramento

Realizar um sistema de aterramento, consiste em providenciar todas as condições possíveis para que as massas metálicas e os equipamentos da instalação estejam em

contato com a terra. Fazendo assim, garante-se que os potenciais desses equipamentos, ou massas, sempre sejam iguais ao da terra e em caso de uma possível fuga de corrente, o sistema proporciona o caminho de baixa resistência para seu escoamento na terra. Ao projetar esse sistema, algumas etapas deveram ser seguidas, são elas:

- 1º etapa: Encontrar um bom local para o aterramento;
- 2º etapa: Realizar várias medições no local;
- 3º etapa: Realizar a estratificação do solo;
- 4º etapa: Escolher o sistema de aterramento desejado para o projeto;
- 5º etapa: Calcular a resistividade aparente do solo;
- 6º etapa: Dimensionar os sistemas de aterramento levando em consideração a sensibilidade dos dispositivos de proteção e os limites de tensões de passo e de toque permitidas por normas.

5.9 Medição da resistividade do solo

Existem vários métodos para a obtenção da resistividade do solo, entre os quais temos o método de Lee, o método de Schlumberger/Palmer e o método de Wenner. Vamos direcionar o nosso trabalho ao método de Wenner, que consiste em usar quatro pontos alinhados, cravados em uma mesma profundidade e igualmente espaçados, conforme a Figura 5.4.

Uma corrente elétrica é injetada na haste 1 e coletada na haste 4, essa corrente, ao passar pelo solo, produz uma diferença de potencial entre as hastes 2 e 3 que podem ser calculadas através da seguinte equação:

$$V_{23} = V_2 - V_3 = \frac{\rho I}{4\pi} \left[\frac{1}{a} + \frac{2}{\sqrt{a^2 + (2p)^2}} - \frac{2}{\sqrt{(2a)^2 + (2p)^2}} \right]. \quad (5.1)$$

Pela primeira lei de Ohm, sabemos que, ao dividir essa diferença de potencial entre as hastes 2 e 3, pela corrente que gera esses potenciais, teremos o valor da resistência

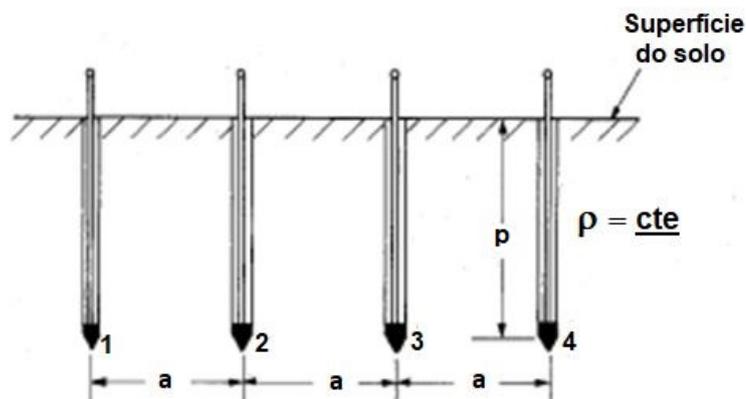


Figura 5.4: Quatro hastes cravadas no solo. Fonte:[16].

elétrica da devida medição, conforme abaixo:

$$R = \frac{V_{23}}{I} = \frac{\rho}{4\pi} \left[\frac{1}{a} + \frac{2}{\sqrt{a^2 + (2p)^2}} - \frac{2}{\sqrt{(2a)^2 + (2p)^2}} \right]. \quad (5.2)$$

Com essa equação, para se obter a resistividade do solo, basta isolar a variável ρ na equação acima, logo teremos

$$\rho = \frac{4\pi a R}{1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + (2p)^2}} - \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + (2p)^2}}}. \quad (5.3)$$

A expressão acima é conhecida como fórmula de Palmer e é usada no método de Wenner. Para tal é recomendado que o diâmetro da haste a ser utilizada na medição seja menor ou igual a 10% do espaçamento entre as hastes.

Se tivermos hastes com espaçamentos 20 vezes maior que o tamanho das hastes que estão cravadas no solo, a fórmula de Palmer pode ser reduzida a

$$\rho = 2\pi a R [\Omega \times m]. \quad (5.4)$$

5.10 Procedimento para realizar medições pelo método de Wenner

Para coleta de dados, utiliza-se o instrumento de medida de resistência elétrica chamado Megger, que possui quatro eletrodos, sendo dois de corrente e dois de potencial, conforme a Figura 5.5.

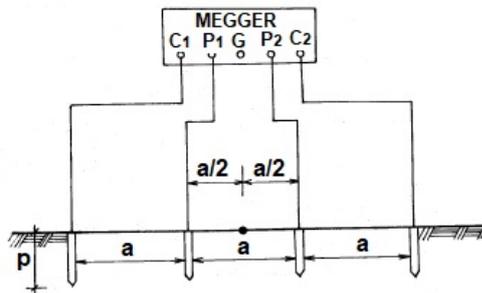


Figura 5.5: Método de Wenner. Fonte:[16].

Através de sua fonte interna, o aparelho faz circular uma corrente I pelos eletrodos de corrente ($C1$ e $C2$) e detecta a queda de tensão elétrica através dos eletrodos de potencial ($P1$ e $P2$). A resistência do solo será a razão V/I cujo aparelho processa internamente e indica na leitura.

No arranjo apresentado, se usa os quatro eletrodos alinhados, sempre com os mesmos espaçamentos e cravados no solo a uma profundidade que varia de 15 à 25cm, seu comprimento deve ser de aproximadamente 50cm com diâmetro variando de 10 a 15mm.

O método considera apenas as correntes que circulam entre as hastes de corrente, com sua profundidade igual ao espaçamento entre as duas hastes cravadas no solo. A corrente analisada representa apenas 58% da corrente total injetada no solo, isso por que as demais correntes que se dissipam em outras profundidades, por terem maior área de dispersão, tem seus efeitos desconsiderados para o processo de medição, ver Figura 5.6.

Durante as medições devem ser observados os itens: alinhamento das hastes; garantia que as hastes estejam igualmente espaçadas; profundidade iguais entre as hastes, recomenda-se de 20 a 30cm; manter o aparelho de medição no ponto médio entre as hastes; garantia de que as hastes estejam bem limpas e livre de óxidos e gorduras, de forma a garantir um bom contato com o solo; anotar sempre a situação que se encontra

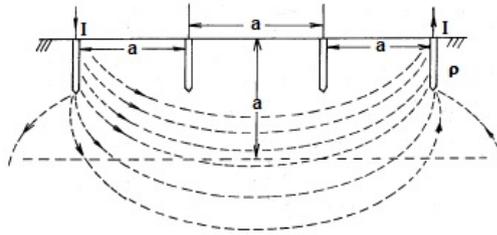


Figura 5.6: Penetração na profundidade a . Fonte:[16].

o solo durante a medição; evitar realizar medições em condições atmosféricas adversas, isso para se evitar acidentes com descargas atmosféricas; evitar circulação de pessoas e animais no local das medições; utilizar os EPIs (Equipamentos de Proteção Individual) na execução das medições; verificar se o aparelho de medição está funcionando corretamente.

5.11 Espaçamento entre hastes e direção das medições

O método de Wenner, propõe para a realização de suas medições que o espaçamento entre as hastes seja uma progressão geométrica de razão 2, começando pela distância de 1m e variando até 32m.

De forma a se garantir uma maior cobertura do terreno que se deseja medir a resistência, deve-se observar, no mínimo, as direções indicadas na Figura 5.7.

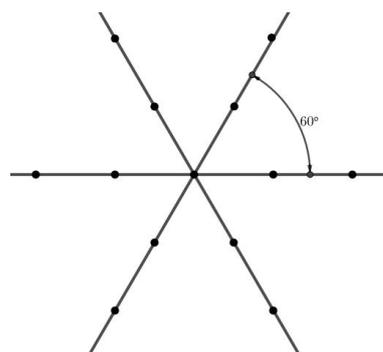


Figura 5.7: Direções do ponto de medição. Fonte:[16].

A quantidade de direções que devem ser observadas para o levantamento das medidas dependerá do quão importante é o local do aterramento, da discrepância acentuada entre os valores medidos e das dimensões do sistema de aterramento.

Para se garantir uma boa precisão nas medições o ideal é efetuar várias medidas em pontos e direções diferentes. Agora, caso se deseja realizar uma quantidade menor de medições, recomenda-se que pelo menos se faça medições na direção da linha de alimentação que provém da rede elétrica e, na direção entre o ponto que se deseja efetuar o aterramento e o ponto de aterramento da fonte de alimentação.

Para se garantir a confiabilidade dos resultados da medição, deve-se calcular a média aritmética das resistividades elétricas de cada espaçamento adotado, seguindo a equação:

$$\rho_M(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i(a_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, q \quad \text{e} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.5)$$

onde

n é a quantidade de medições para o espaçamento a_j ;

q é a quantidade de espaçamentos analisados;

$\rho_M(a_j)$ é a resistividade média da espaçamento a_j ;

$\rho_i(a_j)$ é a resistividade da i -ésima medição no espaçamento a_j . Depois procede com

o cálculo do desvio padrão entre cada medida e a resistividade média, como segue

$$|\rho_i(a_i) - \rho_M(a_j)| \quad \forall j = 1, 2, \dots, q \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6)$$

Observações:

- Todas as resistividades que tem o desvio padrão maior que 50% devem ser descartadas;
- Valores das resistividades com desvio padrão menor que 50% serão aceitos como representativos;
- Caso um número considerável de medidas tenha desvio padrão maior que 50%, recomenda-se realizar novas medições, caso as medidas persistam com o mesmo desvio padrão, deve-se considerar para efeito de modelagem a região como independente.

5.12 Exemplificação do tratamento dos dados medidos pelo método de Wenner

Para contextualização do método aqui estudado, utilizaremos um exemplo apresentado na referência [16], que apresenta alguns dados sobre medições realizadas em campo, relativo a cinco direções de medição, conforme apresentado na Tabela 18.

| Espaçamento a(m) | Resistividade Elétrica Medida $\Omega.m$ | | | | |
|---------------------|---|-----|------------|-----|------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| — | | | | | |
| 2 | 340 | 315 | 370 | 295 | 350 |
| 4 | 520 | 480 | 900 | 550 | 490 |
| 6 | 650 | 580 | 570 | 610 | 615 |
| 8 | 850 | 914 | 878 | 905 | 1010 |
| 16 | 690 | 500 | 550 | 480 | 602 |
| 32 | 232 | 285 | 196 | 185 | 412 |

Tabela 18: Medições em campo. Fonte:[16].

Em posse dos dados das medições, partimos para o cálculo da resistividade média usando a equação (5.5) e para o cálculo do desvio padrão percentual usando a equação (5.6). Resultados seguem na Tabela 19.

| Espaça - mento a(m) | Desvios Relativos % | | | | | Resistividade Média ($\Omega.m$) | Resistividade Recalculada ($\Omega.m$) |
|------------------------|------------------------|------|-------------|------|-------------|---------------------------------------|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | |
| — | | | | | | — | — |
| 2 | 1,7 | 5,6 | 10,8 | 11,7 | 4,8 | 334 | 334 |
| 4 | 11,6 | 18,4 | 53,1 | 6,5 | 16,7 | 588 | 510 |
| 6 | 7,4 | 4,1 | 5,8 | 0,8 | 1,6 | 605 | 605 |
| 8 | 6,7 | 0,3 | 3,7 | 0,7 | 10,8 | 911,4 | 911,4 |
| 16 | 22,2 | 11,4 | 2,6 | 14,8 | 6,7 | 564,4 | 564,4 |
| 32 | 11,4 | 8,8 | 25,2 | 29,4 | 57,2 | 262 | 224,5 |

Tabela 19: Resistividade média. Fonte:[16].

Com base nos desvios relativos apresentados na Tabela 19, percebemos que duas medidas apenas estão fora dos padrões aceitos, pois tem desvio maior que 50%, sendo assim, descartamos tal valor e recalculamos a média para os espaçamentos que tiveram medidas que foram descartadas, mantendo as demais médias.

Assim, os valores representativos das medições realizadas pelo Método de Wenner, já tratados e preparados para a continuação do método de estratificação, seguem na Tabela 20.

| Espaçamento a(m) | Resistividade $\Omega.m$ |
|---------------------|-----------------------------|
| 2 | 334 |
| 4 | 510 |
| 6 | 605 |
| 8 | 911,4 |
| 16 | 564,4 |
| 32 | 224,5 |

Tabela 20: Resistividade do solo medido. Fonte:[16].

5.13 Representação do solo em duas camadas

Usando as medidas efetuadas pelo **Método de Wenner** e com o auxílio das teorias do eletromagnetismo no solo com duas camadas horizontais, podemos encontrar a resistividade da primeira camada e sua respectiva profundidade.

Na Figura 5.8, a corrente I que penetra no solo de duas camadas pelo ponto A , acaba gerando na primeira camada tensões que satisfazem a equação (5.7), conhecida como **Equação de Laplace**.

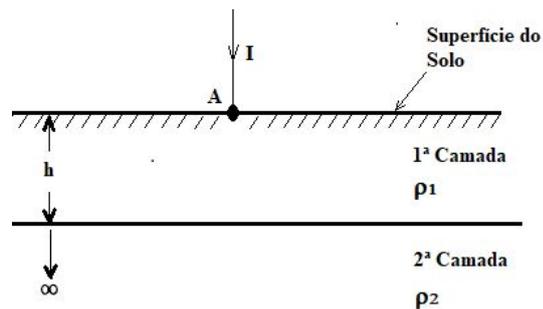


Figura 5.8: Solo em duas camadas. Fonte:[16].

$$\nabla^2 V = 0, \quad (5.7)$$

onde V é a tensão da primeira camada do solo.

Ao desenvolver a **Equação de Laplace** levando em consideração o potencial V a qualquer ponto p , distante da distância r da fonte de corrente A , chegamos na seguinte equação:

$$V_p = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{K^n}{\sqrt{r^2 + (2nh)^2}} \right], \quad (5.8)$$

onde:

V_p = potencial de um ponto p qualquer da primeira camada em relação ao infinito;

ρ_1 = resistividade da primeira camada;

h = profundidade da primeira camada;

r = distância do ponto p à fonte de corrente A ;

K = coeficiente de reflexão, definido por

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1}, \quad (5.9)$$

onde ρ_2 é a resistividade da segunda camada.

Observando a equação (5.9), podemos observar que o coeficiente de reflexão é limitado entre -1 e $+1$, isto é,

$$-1 \leq K \leq +1. \quad (5.10)$$

5.14 Método de estratificação do solo em duas camadas

De acordo com a Figura 5.9, a corrente I que entra pelo eletrodo de corrente A e retorna pelo eletrodo D gera, nos pontos B e C , eletrodos de potenciais, tensões que podem ser calculadas pela equação (5.8), levando em consideração a contribuição da corrente elétrica que entra em A e sai em D , cujas expressões são representadas abaixo,

$$V_B = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{a} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{K^n}{\sqrt{a^2 + (2nh)^2}} \right] - \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{2a} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{K^n}{\sqrt{(2a)^2 + (2nh)^2}} \right], \quad (5.11)$$

$$V_C = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{2a} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{K^n}{\sqrt{(2a)^2 + (2nh)^2}} \right] - \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{a} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{K^n}{\sqrt{a^2 + (2nh)^2}} \right]. \quad (5.12)$$

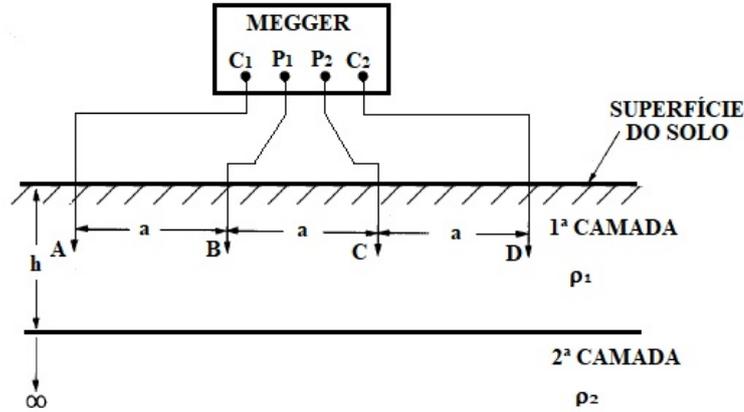


Figura 5.9: Configuração de Wenner no solo de duas camadas. Fonte:[16].

Para obtermos a diferença de potencial entre os pontos B e C , basta substituímos as equações (5.11) e (5.12) na expressão $V_{BC} = V_B - V_C$, temos que,

$$V_{BC} = \frac{I\rho_1}{2\pi a} \left[1 + 4 \sum_{i=1}^n \left(\frac{K^n}{\sqrt{1 + (2n\frac{h}{a})^2}} - \frac{K^n}{\sqrt{4 + (2n\frac{h}{a})^2}} \right) \right], \quad (5.13)$$

$$2\pi a \frac{V_{BC}}{I} = \rho_1 \left[1 + 4 \sum_{i=1}^n \left(\frac{K^n}{\sqrt{1 + (2n\frac{h}{a})^2}} - \frac{K^n}{\sqrt{4 + (2n\frac{h}{a})^2}} \right) \right]. \quad (5.14)$$

Como a relação V_{BC}/I representa o valor da resistência elétrica (R) lida pelo aparelho e pela equação (5.4), $\rho(a) = 2\pi aR$ é a resistividade do solo, para o espaçamento " a ", temos finalmente a expressão para elaboração da estratificação do solo em duas camadas

$$\frac{\rho(a)}{\rho_1} = 1 + 4 \sum_{i=1}^n \left[\frac{K^n}{\sqrt{1 + (2n\frac{h}{a})^2}} - \frac{K^n}{\sqrt{4 + (2n\frac{h}{a})^2}} \right]. \quad (5.15)$$

5.15 Método de duas camadas usando curvas

O método de estratificação do solo em duas camadas usando curvas, se resume em seguir os passos listados abaixo:

- 1º Passo: Traçar em um gráfico a curva $\rho(a) \times a$ obtida pelo Método de Wenner;
- 2º Passo: Prolongar a curva $\rho(a) \times a$ até cortar o eixo das ordenadas do gráfico. Neste ponto é lido diretamente o valor de ρ_1 , isto é, a resistividade da primeira camada. Isto se justifica porque a penetração da corrente elétrica dá-se predominantemente na primeira camada;
- 3º Passo: Um valor de espaçamento a_1 é escolhido arbitrariamente, e levado na curva para obter-se o correspondente valor de $\rho(a_1)$;
- 4º Passo: Pelo comportamento da curva $\rho(a) \times a$, determina-se o sinal de K . Isto é, se a curva for descendente, o sinal de K é negativo e efetua-se o cálculo de $\rho(a_1)/\rho_1$, se a curva for ascendente, o sinal de K é positivo e efetua-se o cálculo de $\rho_1/\rho(a_1)$.
- 5º Passo: Com o valor de $\rho(a_1)/\rho_1$ ou $\rho_1/\rho(a_1)$ obtido, entra-se nas curvas teóricas correspondentes, ver Figura 5.10, e traça-se uma linha paralela ao eixo da abscissa. Esta reta corta curvas distintas de K . Proceder a leitura de todos os específicos K e h/a correspondentes.

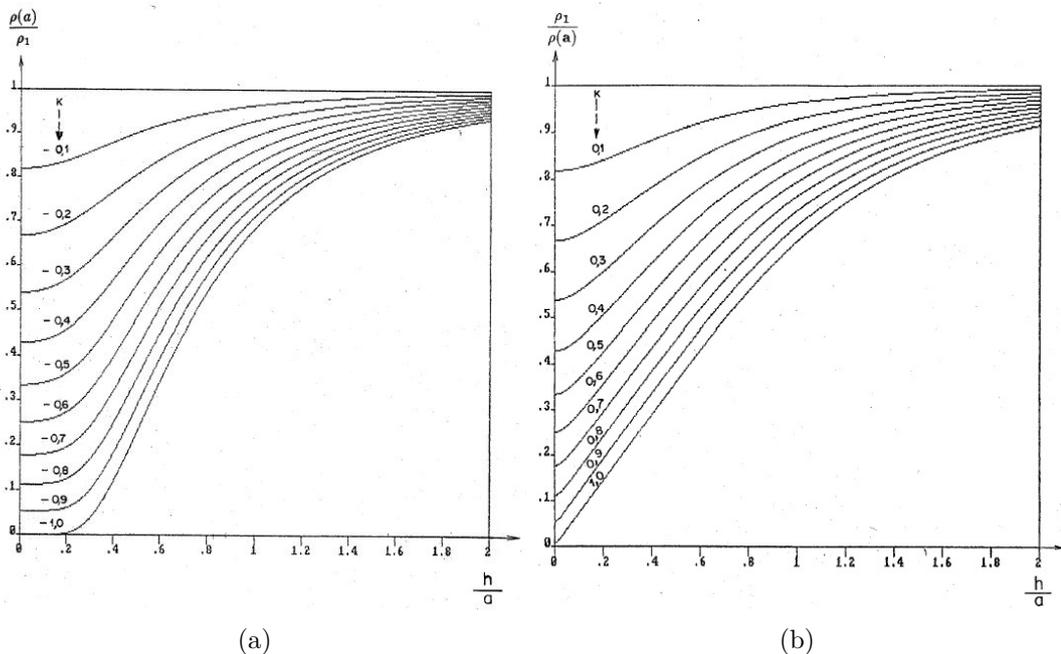


Figura 5.10: Curvas teóricas para os valores de K . (a) Curvas para K negativos (b) Curvas para K positivos. Fonte:[16].

- 6º Passo: Multiplica-se todos os valores de h/a encontrados no quinto passo pelo valor de a_1 do terceiro passo. Assim, com o quinto e sexto passo, gera-se uma tabela com os valores correspondentes de K , h/a e h ;
- 7º Passo: Plota-se uma curva $K \times h$ dos valores obtidos da tabela gerada no sexto passo;
- 8º Passo: Um segundo valor de espaçamento $a_2 \neq a_1$ é novamente escolhido, e todo o processo é repetido, resultando numa nova curva $K \times h$.
- 9º Passo: Plota-se esta nova curva $K \times h$ no mesmo gráfico do sétimo passo;
- 10º Passo: A intersecção de duas curvas $K \times h$ num dado ponto resultará nos valores reais de K e h , e a estratificação do solo estará definida.

O exemplo que segue abaixo foi retirado da fonte [16], com o objetivo de demonstrar como é aplicado na prática, o método de estratificação do solo em duas camadas usando curvas a partir dos dados colhidos pelo método de Wenner.

Exemplo 17. Efetuar a estratificação do solo pelo método de duas camadas usando curvas, correspondentes à série de medidas feitas em campo pelo Método de Wenner, cujos dados estão na Tabela 21,

| Espaçamento a(m) | Resistividade $\Omega.m$ |
|---------------------|-----------------------------|
| 1 | 684 |
| 2 | 611 |
| 4 | 415 |
| 6 | 294 |
| 8 | 237 |
| 16 | 189 |
| 32 | 182 |

Tabela 21: Valores de medição em campo. Fonte:[16].

Solução: A solução é feita seguindo os passos recomendados pelo método proposto.

- 1º Passo: traçamos a curva $\rho(a) \times a$;
- 2º Passo: Prolongando-se a curva, obtém-se $\rho_1 = 700\Omega.m$;

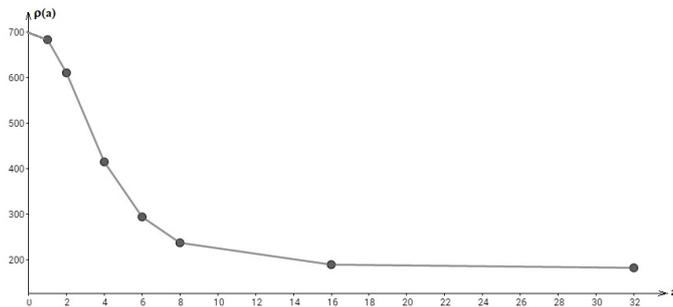


Figura 5.11: Curva $\rho(a) \times a$.

- 3º Passo: Escolhe-se $a_1 = 4m$ e obtém-se $\rho(a_1) = 415\Omega.m$.
- 4º Passo: Como a curva $\rho(a) \times a$ é descendente, K é negativo, então calcula-se a relação:

$$\frac{\rho(a_1)}{\rho_1} = \frac{415}{700} = 0,593;$$

- 5º Passo: Como K é negativo e como o valor $\rho(a_1)\rho_1 = 0,593$ levado na família de curvas teóricas da Figura 5.10(a), procede-se com a leitura dos respectivos K e h/a , conforme Figura 5.12. Assim, gera-se a Tabela 22 proposta no sexto passo,

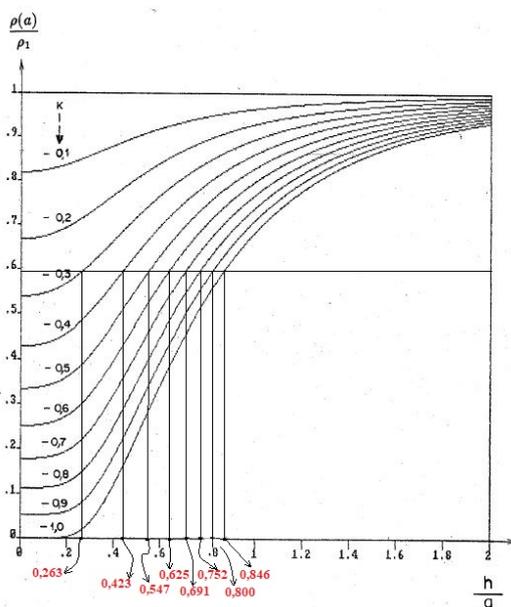


Figura 5.12: Curvas para K negativo.

$$a_1 = 4m \frac{\rho(a_1)}{\rho_1} = 0,593$$

| K | $\frac{h}{a}$ | $h[m]$ |
|------|---------------|--------|
| -0,1 | - | - |
| -0,2 | - | - |
| -0,3 | 0,263 | 1,052 |
| -0,4 | 0,423 | 1,692 |
| -0,5 | 0,547 | 2,188 |
| -0,6 | 0,625 | 2,500 |
| -0,7 | 0,691 | 2,764 |
| -0,8 | 0,752 | 3,008 |
| -0,9 | 0,800 | 3,200 |
| -1,0 | 0,846 | 3,384 |

Tabela 22: Valores do quinto e sexto passo. Fonte:[16].

- 8º Passo: Escolhe-se outro espaçamento

$$a_2 = 6m \Rightarrow \rho(a_2) = 294\Omega.m \Rightarrow \frac{\rho(a_2)}{\rho_1} = \frac{294}{700} = 0,42$$

Constrói-se a Tabela 23.

$$a_2 = 6m \frac{\rho(a_2)}{\rho_1} = 0,42$$

| K | $\frac{h}{a}$ | $h[m]$ |
|------|---------------|--------|
| -0,1 | - | - |
| -0,2 | - | - |
| -0,3 | - | - |
| -0,4 | - | - |
| -0,5 | 0,305 | 1,830 |
| -0,6 | 0,421 | 2,526 |
| -0,7 | 0,488 | 2,928 |
| -0,8 | 0,558 | 3,348 |
| -0,9 | 0,619 | 3,714 |
| -1,0 | 0,663 | 3,978 |

Tabela 23: Valores do oitavo passo. Fonte:[16].

- 9º Passo: A Figura 5.13 apresenta o traço das duas curvas $K \times h$ obtidas a partir das Tabelas 22 e 23.

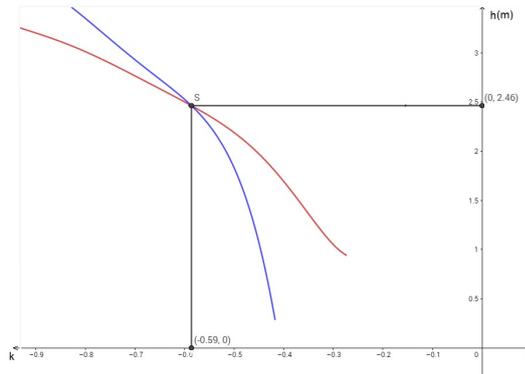


Figura 5.13: Curvas $h \times K$.

- 10º Passo: A intersecção ocorre em:

$$k = -0,59 \text{ e } h = 2,46m.$$

Usando a equação (5.9), obtêm-se o valor de ρ_2

$$\rho_2 = 180,5 \Omega \times m$$

A Figura 5.14 mostra o solo estratificado em duas camadas.

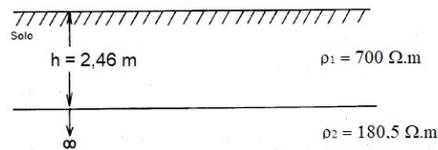


Figura 5.14: Solo estratificado, Exemplo 17. Fonte:[16].

6 Análise do problema de estratificação do solo utilizando os ajustes gráficos estudados

Todos os conceitos usados para resolver o problema proposto nesse capítulo foram baseados nas referências [9] e [16].

O Exemplo 17 será novamente desenvolvido e como proposta de melhoria no momento de se estimar um valor para um dado não colhido experimentalmente, utilizaremos dos métodos matemáticos de ajuste de curvas.

Problema: Efetuar a estratificação do solo pelo método de duas camadas usando curvas, correspondentes às séries de medidas feitas em campo pelo método de Wenner, cujos dados estão na Tabela 21.

Solução: A solução será feita seguindo os passos recomendados pelo método proposto no Capítulo 5, porém, quando chegar na etapa de estimar um valor através do gráfico, utilizaremos o método da regressão por mínimos quadrados, usando a linearização, já que a relação entre as variáveis dependentes e independentes é não linear.

A razão de não optarmos pelas técnicas da regressão não-linear pelo método de Gauss-Newton, que aparentemente para esse caso seria a melhor opção, foi pelas deficiências que o mesmo apresenta. Ou seja, por ser um método iterativo, precisaremos de valores iniciais para começar com as iterações e isso não temos, o método pode não convergir ou convergir lentamente, pode oscilar muito antes de chegar a valores aceitáveis ou pode até mesmo não convergir, sem contar que o alto grau de complexidade exigido pelo método pode desestimular seu uso em campo.

Como primeira etapa de solução, vamos plotar os pontos $(a, \rho(a))$ colhidos experimentalmente pelo método de Wenner. Isso nos dará uma boa estimativa da tendência geral dos dados, o que nos indicará qual o tipo de ajuste escolher.

Inspecionando visualmente a Figura 6.1, percebemos com certa facilidade que a tendência geral dos dados seguem uma exponencial decrescente, mas, como já mencionado anteriormente, não utilizaremos o método de regressão-não linear. Então, como forma alternativa, propomos o método da linearização dos dados, de forma que os mesmos passem a ser compatíveis com a regressão linear, que por sua vez, tem baixo grau de complexidade em sua composição.

A proposta aqui será usar o modelo exponencial $\rho(a) = \alpha_1 e^{\beta_1 x}$, onde α_1 e β_1 são constantes a serem determinadas. Como claramente podemos perceber que a equação representa uma relação não-linear para $\beta_1 \neq 0$, usaremos manipulações matemáticas

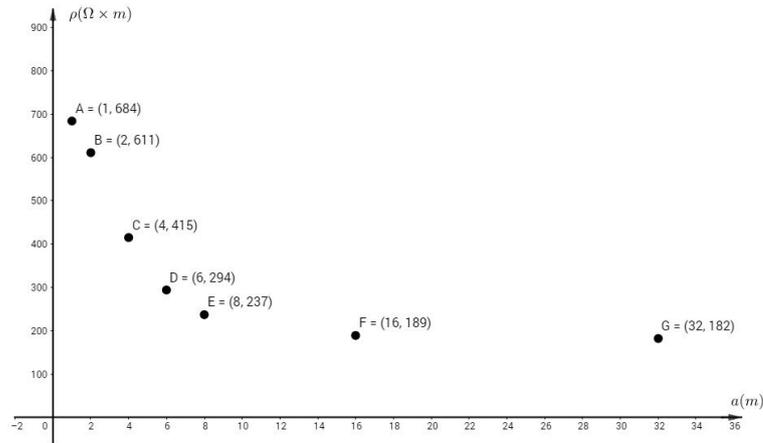


Figura 6.1: Plotagem dos pontos colhidos experimentalmente pelo método de Wenner.

para transformar as equações para uma forma linear. Daí então, uma simples regressão linear poderá ser usada para ajustar as equações aos dados.

No caso de nossa equação, a mesma pode ser linearizada tomando o seu logaritmo natural, onde obtemos

$$\ln(\rho(a)) = \ln(\alpha_1 e^{\beta_1 x}) = \ln(\alpha_1) + \beta_1 x \ln(e) = \ln(\alpha_1) + \beta_1 x.$$

Assim, o gráfico de $\ln(y)$ em função de x irá nos fornecer uma reta com uma inclinação β_1 e, no ponto de interseção com o eixo das ordenadas, o valor de $\ln(\alpha_1)$.

Para determinar a equação da reta, usaremos somente os 4 primeiros pontos do experimento, uma vez que a proximidade dos mesmos nos fornecerá uma curva mais precisa. O fato de ignorarmos os demais pontos, não influencia na determinação da grandeza procurada, pois, o objetivo desse passo da atividade é o de encontrar a resistividade da primeira camada do solo.

Assim, somente as medições das camadas iniciais do solo impactam nessa grandeza, no caso, essas medições seriam as quatro primeiras. Essas, por sua vez, representam as camadas iniciais do solo, já que de acordo com a teoria apresentada no Capítulo 5, a distância entre as hastes de medição, representam a profundidade em que está sendo realizado a medida da resistividade do solo.

A Tabela 24 apresenta todos os parâmetros necessários para se determinar os coeficientes da reta de regressão, proposta com a linearização da equação exponencial que se ajustará aos 4 primeiros pontos da Tabela 21.

| Medições | a | $\rho(a)$ | $\ln(\rho(a))$ | a^2 | $a \times \ln(\rho(a))$ |
|----------|------------------|-----------------|----------------------|---------------|----------------------------|
| 1 | 1 | 684 | 6.527958 | 1 | 6.527958 |
| 2 | 2 | 611 | 6.415097 | 4 | 12.83019 |
| 3 | 4 | 415 | 6.028279 | 16 | 24.11311 |
| 4 | 6 | 294 | 5.683580 | 36 | 34,10148 |
| n=4 | $\Sigma = 13$ | $\Sigma = 2004$ | $\Sigma = 24,654913$ | $\Sigma = 57$ | $\Sigma = 77.572745$ |
| | $\bar{a} = 3.25$ | | | | $\bar{\rho(a)} = 6.163728$ |

Tabela 24: Parâmetros para determinação da reta de regressão linear.

Com os parâmetros acima, podemos calcular os coeficientes $\ln(\alpha_1)$ e β_1 , como segue

$$\beta_1 = \frac{n \sum (a \times \ln(\rho(a))) - \sum a \sum \ln(\rho(a))}{n \sum a^2 - (\sum a)^2} = -0.17327,$$

$$\ln(\alpha_1) = \overline{\rho(a)} - \beta_1 \bar{a} = 6.726854 \quad e \quad \alpha_1 = e^{6.726854} = 834.5175.$$

Assim, determinamos a equação exponencial que ajusta os 4 primeiros pontos dos dados experimentais e que nos permitirá estimar com maior precisão a resistividade elétrica para $a = 0$,

$$\rho(a) = 834.5175e^{-0.17327a}.$$

Seguindo na resolução do problema, na segunda etapa, determinamos o valor de ρ_1 , que é a resistividade para a distância $a = 0$,

$$\rho_1 = \rho(0) = 834.5175\Omega \times m.$$

A Figura 6.2, apresenta como a equação exponencial determinada, se ajusta aos 4 pontos analisados e, destaca a interseção da mesma com o eixo das ordenadas. Fornecendo assim maior rigor matemático na segunda etapa do método que antes determinava o valor de ρ_1 , usando um simples prolongamento da curva $\rho(a) \times a$ antes traçada sem nenhum critério.

Como terceiro passo da solução, procedemos escolhendo um valor de espaçamento arbitrário que denominamos de a_1 , de forma que possamos obter seu correspondente valor de resistividade $\rho(a_1)$.

Neste caso, vamos escolher o espaçamento $a_1 = 4m$, que pela curva traçada, nos

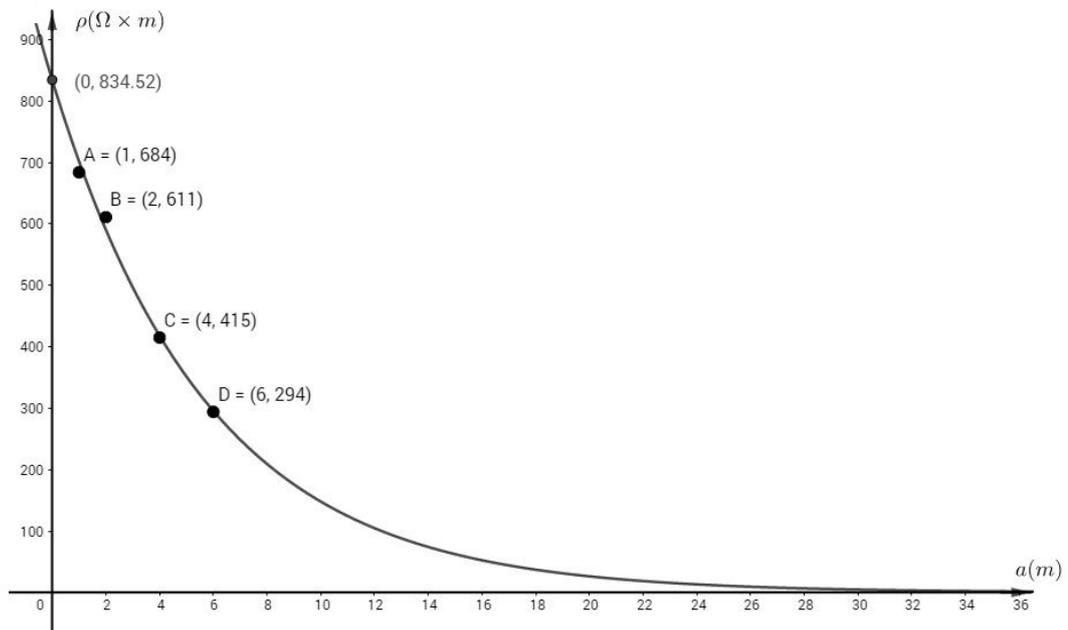


Figura 6.2: Curva $\rho(a) \times a$ traçada a partir de técnicas de ajustes de curvas.

fornece $\rho(a_1) = 415\Omega \times m$.

No quarto passo da solução, verificamos como se dá o comportamento da curva para se determinar o sinal do coeficiente de reflexão K . Pela Figura 6.2 percebemos claramente que o gráfico é descendente. Pelo método apresentado na Seção 5.15 temos que K é negativo e isso nos fornece a relação:

$$\frac{\rho(a_1)}{\rho_1} = \frac{415}{834.5175} = 0.4973.$$

Como quinto passo da solução, traçamos uma reta paralela ao eixo das abscissas passando pela relação 0.4973 nas curvas teóricas fornecidas (ver Figura 6.3) e determinamos os valores de K e h/a correspondentes as interseções como segue na Tabela 25.

Para o sexto passo, multiplicamos o valor de $a_1 = 4m$ pelos valores encontrados de h/a e preenchemos na terceira coluna da Tabela 25.

O sétimo passo será executado juntamente com o nono.

Para o oitavo passo, escolhemos outro valor arbitrário de espaçamento $a_2 \neq a_1$, depois repetimos todo o procedimento do quarto ao sexto passo para determinar a Tabela 26.

No nono passo, plotamos a curva $K \times h$, para os valores encontrados nas Tabelas 25 e 26.

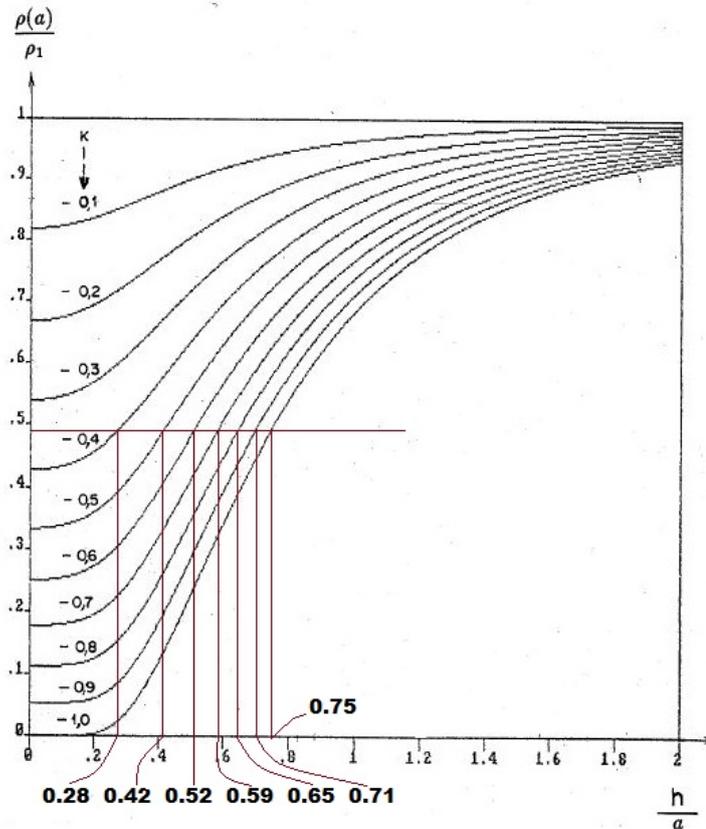


Figura 6.3: Curva teórica para K negativo interceptada pela reta 0.4973.

Nessa etapa, vamos propor novamente utilizar das técnica de regressão por mínimos quadrados para a determinação desses gráficos, pois novamente não nos deparamos com nenhuma técnica matemática para ajustar curvas aos pontos das tabelas construídas a partir do quinto e oitavo passo.

A escolha de usar a regressão por mínimos quadrados ao invés de interpolação, se dá pelo fato de que não podemos garantir a confiabilidade dos pontos fornecidos, já que na sua obtenção através das curvas teóricas, o projetista pode cometer erros de leitura. Sendo assim, podemos estar trabalhando com dados não confiáveis.

Primeiro seguimos com as plotagens dos pontos no plano cartesiano, isso nos ajudará a perceber a tendência geral dos dados e, com isso, definir qual o tipo de regressão melhor se encaixar para o ajuste.

Observando a Figura 6.4, percebemos que os pontos descrevem o comportamento de uma parábola decrescente, logo vamos descrever o método de ajuste usando a regressão polinomial, para um polinômio de grau 2.

$$a_1 = 4m \frac{\rho(a_1)}{\rho_1} = 0,4973$$

| K | $\frac{h}{a}$ | $h[m]$ |
|------|---------------|--------|
| -0,1 | - | - |
| -0,2 | - | - |
| -0,3 | - | - |
| -0,4 | 0.280 | 1.120 |
| -0,5 | 0.420 | 1.680 |
| -0,6 | 0.520 | 2.080 |
| -0,7 | 0.590 | 2,360 |
| -0,8 | 0.650 | 2.600 |
| -0,9 | 0.710 | 2.840 |
| -1,0 | 0.750 | 3.000 |

Tabela 25: Valores do quinto e sexto passo para $a = 4m$.

Para diferenciar as curvas, vamos denominar de $h_1(k)$ o polinômio que descreve o comportamento dos pontos da Tabela 25 e $h_2(k)$ o polinômio de regressão que descreve os dados da Tabela 26.

As Tabelas 27 e 28 apresentam, respectivamente, os parâmetros necessários para calcular os polinômios de regressão.

Com os parâmetros da Tabela 27, chegamos no seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 7.000 & -4.900 & 3.710 \\ -4.900 & 3.710 & -2.989 \\ 3.710 & -2.989 & 2.524 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.680 \\ -11.824 \\ 9.469 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema linear 3×3 , é $a_0 = -1.422857$, $a_1 = -7.829571$ e $a_2 = -3.428571$. Portanto, a equação quadrática dada pela regressão por mínimos quadrados encontrada foi

$$h_1(k) = -1.422857 - 7.829571k + -3.428571k^2.$$

O erro padrão da estimativa baseado na regressão polinomial é $S_{h_1/k} = 0.045355737$ com o coeficiente de determinação de 0.996924129.

Os resultados indicam que 99.6924% da incerteza original foi explicada por esse modelo.

| $a_2 = 6m \frac{\rho(a_2)}{\rho_1} = 0,3523$ | | |
|--|---------------|---------------|
| K | $\frac{h}{a}$ | $h[\text{m}]$ |
| -0,1 | - | - |
| -0,2 | - | - |
| -0,3 | - | - |
| -0,4 | - | - |
| -0,5 | 0.180 | 1.080 |
| -0,6 | 0.350 | 2.100 |
| -0,7 | 0.440 | 2,640 |
| -0,8 | 0.510 | 3.060 |
| -0,9 | 0.570 | 3.420 |
| -1,0 | 0.620 | 3.720 |

Tabela 26: Valores do quinto e sexto passos repetidos para $a_2 = 6m$.

| | | |
|------------------|-----------------------|---------------------------|
| $m = 2$ | $\sum K_i = -4.9$ | $\sum K_i^4 = 2.5235$ |
| $n = 7$ | $\sum h_i = 15.68$ | $\sum K_i h_i = -11.824$ |
| $\bar{K} = -0.7$ | $\sum K_i^2 = 3.71$ | $\sum K_i^2 h_i = 9.4688$ |
| $\bar{h} = 2.24$ | $\sum K_i^3 = -2.989$ | |

Tabela 27: Parâmetros colhidos a partir dos dados da Tabela 25.

De forma análoga ao procedimento desenvolvido para se determinar $h_1(k)$, procedemos, através dos dados da Tabela 28 para se determinar a equação:

$$h_2(k) = -5.211429 - 16.594286k + -7.714286k^2,$$

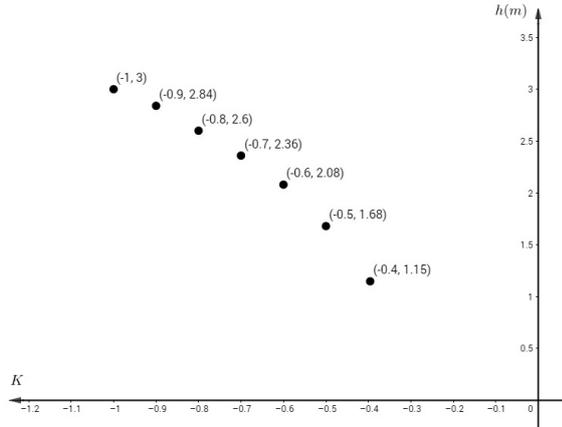
onde o erro padrão da estimativa é $S_{h_2/k} = 0.106045812$ com coeficiente de determinação de 0.992777319 e coeficiente de correlação de 0.996382.

Com as equações $h_1(k)$ e $h_2(k)$ que descrevem o comportamento dos dados das Tabelas 25 e 26, procedemos com a conclusão do nono passo, que é a plotagem das curvas no mesmo plano e a determinação do ponto de intersecção entre elas.

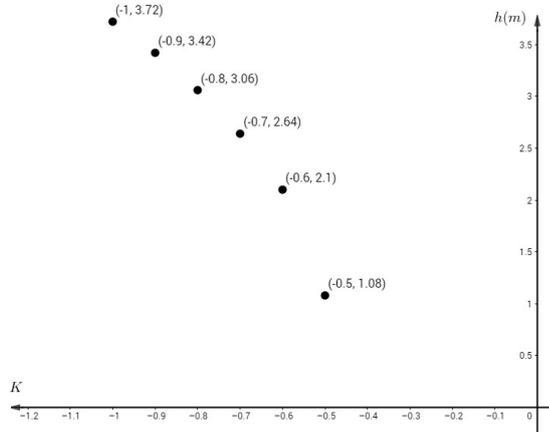
Para isso, basta igualarmos $h_1(k)$ com $h_2(k)$, isto é,

$$\begin{aligned} h_1(k) &= h_2(k) \\ -1.422857 - 7.829571k - 3.428571k^2 &= -5.211429 - 16.594286k - 7.714286k^2 \end{aligned}$$

Daí,



(a)



(b)

Figura 6.4: Representação no plano $h \times K$ dos pontos do quinto e oitavo passo. (a) Representação dos pontos da Tabela 5.2. (b) Representação dos pontos da Tabela 5.3.

$$-3.788572 - 8.765715k - 4.285715k^2 = 0.$$

Em seguida resolvemos a equação resultante, obtemos nas raízes $k_1 = -1.425$ e $k_2 = -0.62$. Como a raiz k_1 está fora do intervalo analisado, ficamos apenas com o valor de k_2 que, aplicado na equação de $h_1(k)$ ou de $h_2(k)$, nos fornece, a outra coordenada do ponto de interseção:

$$\begin{aligned} h_1(-0.62) = h_2(-0.62) &= -1.422857 - 7.829571 \times (-0.62) - 3.428571 \times (-0.62)^2 \\ &= 2.11m. \end{aligned}$$

| | | |
|-------------------|-----------------------|----------------------------|
| $m = 2$ | $\sum K_i = -4.5$ | $\sum K_i^4 = 2.4979$ |
| $n = 6$ | $\sum h_i = 16.02$ | $\sum K_i h_i = -12.894$ |
| $\bar{K} = -0.75$ | $\sum K_i^2 = 3.55$ | $\sum K_i^2 h_i = 10.7682$ |
| $\bar{h} = 2.67$ | $\sum K_i^3 = -2.925$ | |

Tabela 28: Parâmetros colhidos a partir dos dados da Tabela 26.

A Figura 6.5 apresenta a plotagem das duas curvas de $K \times h$ no mesmo plano, finalizando assim o nono passo.

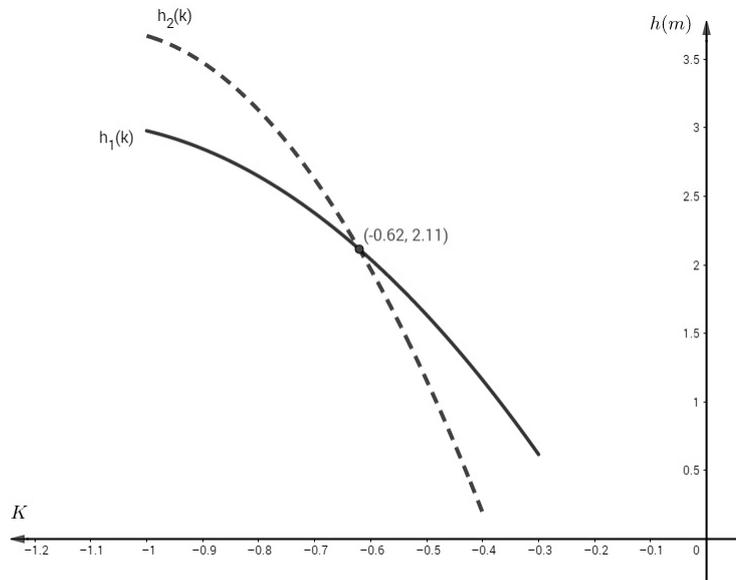


Figura 6.5: Curvas do quinto e oitavo passo no mesmo plano.

Para o décimo, e último passo, usando os valores de $k = -0.62$ e $h = 2.11m$, determinamos a resistividade do solo para a segunda camada através da equação (5.9), como segue:

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{K + 1}{1 - K},$$

Logo,

$$\rho_2 = 834.5175 \frac{-0.62 + 1}{1 + 0.62} = 195.7510 \Omega \times m.$$

A Figura 6.6 mostra o solo estratificado em duas camadas através do método gráfico e das técnicas de regressão por mínimos quadrados apresentadas neste trabalho científico.

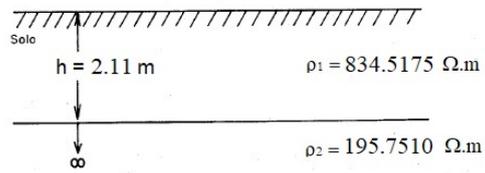


Figura 6.6: Solo estratificado, solução do exemplo usando técnicas de regressão por mínimos quadrados.

7 Resultados alcançados

Visando verificar se o aluno do ensino médio é capaz de compreender, usar ou até mesmo identificar algumas situações em que as técnicas de ajustes de curvas possam ser utilizadas, aplicamos em aula experimental, que teve por objetivo determinar a resistência elétrica da lâmpada incandescente, o método de regressão polinomial no auxílio ao tratamento e análise dos dados.

Os resultados dessas seis aulas não poderiam ter sido melhores, os alunos que participaram do projeto, abraçaram bem a causa, gostaram de participar da aula prática e de ver a física acontecer de uma forma bem dinâmica, porém, se depararam com uma deficiência antes não observada. Assim que os mesmos, já com os dados nas mãos, se viram na situação de ter que traçar uma curva, os problemas começaram a aparecer, pois, a visão que outrora permeava a maioria dos alunos era de que os conhecimentos sobre função, plano cartesiano e pares ordenados eram desnecessários e sem nenhuma aplicação prática.

Então, como vimos, utilizar o *Qtiplot* é uma tarefa bastante simples mas de grande retorno, porém, antes mesmo de ensinar os alunos a manusear a ferramenta, expliquei sobre o passo a passo do método de regressão quadrática. Justifiquei que usaríamos a regressão quadrática, pois, os métodos de regressão são os melhores quando se tem erros inseridos nas medições, que era o nosso caso medindo as grandezas corrente e tensão elétricas com aparelhos não muito precisos. Também ficou claro aos alunos que a escolha do grau 2 para o polinômio, foi influenciada pela tendência geral dos dados, que por sua vez, se comportavam como uma parábola.

Assim, os grupos usando as fórmulas que repassei e o software *Calc*, fizeram os cálculos sem maiores dificuldades, uma vez que usamos a regra Cramer. Como a parte mais enfadonha, que são os cálculos, foram todos feitos usando as fórmulas da ferramenta *Calc*, com auxílio do professor, os alunos acabaram demonstrando muito interesse na atividade, terminando com certa agilidade.

Com essa atividade, acabamos por perceber que os alunos tem bastante interesse em usar ferramentas que os auxiliam nos cálculos matemáticos, mesmo que sejam cálculos que eles já dominem, como é o caso da resolução do sistema linear 3×3 .

Por fim repassamos aos alunos que todos os cálculos que fizemos usando a ferramenta *Calc*., durante o processo de determinação do polinômio interpolador de grau 2, poderiam ser evitados, se plotássemos os pontos no *Qtiplot*, que além de apresentar os coeficientes do polinômio de regressão quadrática, ainda fornece a plotagem da curva.

Com esse desfecho na atividade, percebemos que os alunos conseguiram assimilar bem a técnica da regressão quadrática que usamos no experimento. Além de desenvolverem bem os cálculos com a ajuda da ferramenta auxiliar e por fim, compreenderam que o software *Qtiplot* pode se tornar um poderoso aliado nas atividades experimentais.

Concluíram ainda que plotagem e tratamento de dados experimentais são mais comuns do que antes imaginavam e que através dessas curvas, quando bem ajustadas, a estimativa se torna bastante eficaz. Uma vez que os valores estimados pelos grupos antes de aprenderem as técnicas, foram quase todos com um erro bem maior que os valores encontrados pela estimativa através da equação de regressão quadrática.

Quanto à análise do método gráfico para se determinar a estratificação do solo em duas camadas, acabamos por encontrar no mesmo, dois pontos que podem ser considerados como pontos críticos.

No método original, já na segunda etapa da resolução é solicitado que, através da curva $\rho(a) \times a$, seja estimada a resistividade para a distância zero ($a = 0$), apesar de parecer uma ação simples, quando vamos desenvolver o método, nos deparamos com a dificuldade de se realizar uma boa estimativa para tal valor, já que não temos uma curva de ajuste calculada dentro dos critérios confiáveis.

A livre determinação do ponto de interseção entre a curva $\rho(a) \times a$ e o eixo $\rho(a)$ pode nos levar a valores muito discrepantes quando comparada com a mesma estimativa vista por outro observador, isso do ponto de vista de projetos, é muito ruim pela duplicidade de resultados que se pode causar, sem contar que nesse método a grandeza mais importante é justamente essa interseção, embora sua determinação deixe a desejar.

A resistividade encontrada no ponto de interseção entre a curva $\rho(a) \times a$ com o eixo ρ é conhecida como a resistividade da primeira camada do solo. Por essa resistividade ser a mais externa, ela é quem mais influencia na resistência elétrica da primeira camada, que por sua vez, quando percorrida por uma corrente elétrica, gera um potencial no solo conhecido como potencial de passo, que é muito perigoso por ter a capacidade de eletrocutar uma pessoa apenas por dar um passo em sua região de atuação.

Para minimizar os riscos provocados pelo potencial de passo, o procedimento é aumentar a resistência de contato com o solo, inserindo corpos isolantes como borrachas, britas e exigindo que profissionais que trabalhem na região usem botas isolantes. Como esses isolantes externos trabalham para aumentar a resistência de contato entre o indivíduo e o solo, valores maiores da resistividade da primeira camada acarretam maior potencial de passo, e valores menores para a resistividade geram menor potencial de passo. Sendo assim, o parâmetro resistividade da primeira camada, acaba sendo fator

determinante no momento de se planejar o grau de proteção da isolação de contato com o solo. Assim, valores errôneos para essa grandeza podem gerar um mal planejamento de material isolante.

Com isso, duas coisas podem acontecer, ou a estimativa nos faz exagerar no grau de isolação, isso não gera nenhum problema elétrico porém aumenta os custos, ou a estimativa nos faz usar isolação menos, com isso o indivíduo que trabalha na região ou nas proximidades dela, fica sujeito ao risco de choque por falta de isolação adequada.

Outro ponto crítico que também acontece no desenvolver do método, está no sétimo e nono passo, que é onde novamente se faz necessário plotar uma curva através de dados que são imprecisos pela sua própria forma de obtenção, que por sua vez se dá por curvas teóricas sem muita precisão. Sendo assim, a estimativa de uma curva que descreva tais pontos sem critérios matemáticos, aumenta as chances de se obter resultados cada vez mais irreais.

Esses dois passos que também geram valores críticos, acabam agora influenciando não mais na resistividade da primeira camada, mas sim na profundidade dela, já que esse é outro fator que influencia no cálculo da resistência da primeira camada.

Levando em consideração os pontos críticos apresentados pelo método gráfico de estratificação do solo em duas camadas, surgiu a necessidade de se propor maior rigor matemático na obtenção dessas curvas, uma vez que já dispomos de critérios matemáticos bem precisos à realização desses ajuste.

Como resultado da aplicação dos ajustes de curvas no segundo, sétimo e nono passo do método, chegamos a um valor matematicamente mais preciso que, se repetido por outro projetista, também chegará no mesmo valor, uma vez que as equações de ajuste não são especulativas, mas sim formulações, que tem erros calculáveis e que seguem sempre o mesmo padrão.

Para não dizer que a sugestão de melhoria no método gráfico de estratificação do solo seja inviável pelo aumento da complexidade devido ao maior rigor matemático, temos o software *Qtiplot*, que se mostrou uma poderosa ferramenta no ajuste de curvas e que pode perfeitamente ser inserido nas etapas críticas do método.

Assim, sugere-se que na segunda, sétima e nona etapa do método de estratificação do solo, seja usado técnicas de ajuste de curvas que possibilitem maior confiabilidade nos resultados encontrados.

8 Referências bibliográficas

Referências

- [1] ADEMARO A. M. B. C. **Instalações Elétricas**. 4º ed. São Paulo- SP. Editora Pearson Prentice Hall, 2003.
- [2] ANTON H.; PATARRA T. C. C.; TAMANAHA M. **Cálculo, um novo horizonte**. 6º ed. Porto Alegre - SC. Editora Bookman, 2000.
- [3] BARRETO F. B.; SILVA C. X. **Física aula por aula: eletromagnetismo, física moderna**. Coleção física aula por aula, 3º ano. 3º ed. São Paulo. Editora FTD, 2016.
- [4] BIANCHINI E.; PACCOLA H. **Matemática**, vol. 1. 1º ed. São Paulo - SP: Editora Moderna, 1990.
- [5] BIANCHINI E.; PACCOLA H. **Matemática**, vol. 2. 1º ed. São Paulo - SP: Editora Moderna, 1990.
- [6] BIANCHINI E.; PACCOLA H. **Matemática**, vol. 3. 1º ed. São Paulo - SP: Editora Moderna, 1990.
- [7] BOOTH G. W.; PETERSON T. L. **Nolinear Estimation**. IBM Share Program WLNL1 1958, pp 687.
- [8] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. A reforma curricular e a organização do Ensino Médio. Brasília -DF: MEC/SEF, 2000.
- [9] CHAPRA S. C.; CANALE R. P. **Métodos numéricos para engenheiros**. 5º ed. São Paulo - SP. Mc Graw - Hill, 2008, pp. 366 - 469.
- [10] CREDER H. **Instalações Elétricas**. 14º ed. São Paulo - SP. LTC Editora, 2002.
- [11] DEVORE J. L. **Probabilidade e estatística para engenharia e ciências**. São Paulo - SP. Cengage Learning, 2016.
- [12] GUERRINI D. P. **Eletricidade para a engenharia**. Barueri - SP. Editora Manole, 2003.

- [13] GUSSOW M. **Eletricidade Básica**. 2º ed. São Paulo - SP. Editora Makron Books, 1996.
- [14] HALLIDAY D.; RESNICK R.; WALKER J. **Fundamentos de Física**, vol. 3: eletromagnetismo. 6º ed. Rio de Janeiro - RJ. Editora LTC, 2003.
- [15] HARTLEY H. O. **The modified Gauss-Newton Method for fitting non-linear regression functions by least squares**. *Technometrics*, vol.3. 1961, pp 269-280.
- [16] KINDERMANN G.; CAMPAGNOLO J. M. **Aterramento Elétrico**. 3ª Edição modificada e ampliada. Porto Alegre - RS. Editora Sagra-DC Luzzatto 2005, pp. 1 - 60.
- [17] LIBREOFFICE. **Software Calc**. Download do software e demais software da LibreOffice. Disponível em: <https://pt-br.libreoffice.org/baixar/libreoffice-novo/>. Acessado em: 16 de Julho de 2018.
- [18] LIMA F. D. L. **Projetos de Instalações Elétricas Prediais**. São Paulo - SP. Érica Editora, 1997.
- [19] MAMEDE F. J **Instalações Elétricas Industriais**. 8º ed. Rio de Janeiro - RJ. LTC Editora, 2010.
- [20] MÁXIMO A.; ALVARENGA B. **Curso de Física**. Coleção Curso de Física, vol 3. São Paulo - SP. Editora Scipione, 2010.
- [21] MONTGOMERY D. C.; RUNGER G. C.; HUBELE N. F. **Estatística Aplicada à Engenharia**. 2º ed. Rio de Janeiro - RJ. Editora LTC Ltda, 2004.
- [22] NISKIER J. MACINTYRE A. J. **Instalações Elétricas**. 6º ed. Rio de Janeiro - RJ. LTC Editora, 2013.
- [23] PEREIRA F. C. M. L. **Técnicas de Aterramentos Elétricos**: cálculos, projetos e softwares para aterramentos elétricos. São Paulo - SP. Oficina de mydia Editora Ltda, 2001.
- [24] PRESS. W. H.; TEUKOLSKY S. A.; VETTERLING W. T.; FLANNERY B. P. **Métodos numéricos aplicados**: rotinas em C++. 3º ed. Porto Alegre - RS. Bookman, 2011.

- [25] QTIPLLOT. **Software Qtiplot**. Download do Software Qtiplot. Disponível em: <<http://www.if.ufrj.br/amgomes/qtiplotinfo.html>>. Acesso em: 03 de Março de 2018.
- [26] RUGGIERO M. A. G; LOPES V. L. R. **Cálculo Numérico**: aspéctos teóricos e computacionais. 2º ed. São Paulo - SP. Editora MAKRON Books, 1996, pp. 211 - 294.
- [27] SCANDELARI J. R. **Física**. Coleção vitória-régia. Vol. único, Ensino Médio, livro do professor. São Paulo - SP. IBEP, 2004.
- [28] SILVA B. A.; MANRIQUE A. L.; BIANCHINI B. L.; DUBUS M. T. G.; SOUZA V. H. G. **Atividades para o estudo de funções em ambiente computacional**. São Paulo - SP. Editora Iglu, 2002.
- [29] SWOKOWSKI E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2º ed. São Paulo - SP. Editora Makron Books, 1994.
- [30] THOMAS J. G. B.; WEIR M. D.; HASS J.; GIORDANO F. R. **Cálculo**, vol. II. São Paulo - SP. Editora Addison Wesley, 2009.
- [31] VISACRO F. S., **Aterramento Elétrico**: conceitos básicos, técnicas de medição e instrumentação, filosofias de aterramento. São Paulo - SP. Artliber Editora, 2002.

9 Anexos

ROTEIRO PARA AULA EXPERIMENTAL

Escola/Colégio: _____

Alunos: _____

Professor: _____ Série: _____ Turma: _____ Disciplina: Física

EXPERIMENTO : ESTUDO DA RESISTÊNCIA ELÉTRICA DE LÂMPADAS INCANDESCENTES

1. Objetivo

Determinar a lei de formação da resistência elétrica na lâmpada incandescente de 70W/220V através das grandezas elétricas tensão e corrente.

2. Introdução

A resistência elétrica é uma grandeza que representa a propriedade da matéria de resistir a passagem da corrente elétrica. Isso acontece quando o elétron ao se movimentar pelo meio material, fica sujeito a constantes choques ocorridos entre os portadores de carga e as impurezas contidas no meio condutor, entre os portadores de carga e o núcleo dos átomos que constitui o material ou até mesmo choques entre os próprios elétrons que estão em constante movimento, isso faz com que a intensidade do movimento seja reduzido e parte da energia cinética perdida se converte em calor. De acordo com a primeira Lei de Ohm, essa grandeza pode ser determinada pela razão entre tensão e corrente elétrica, desde que ambas sejam referidas ao mesmo material.

$$R = \frac{U}{I},$$

onde R é a resistência elétrica medida em ohm (Ω); U é a tensão elétrica medida em volt (V); I é a intensidade da corrente elétrica medida em ampère (A).

Quando há proporção entre a tensão e a corrente elétrica ao longo das medições em uma mesma carga puramente resistiva, dizemos que tal material se trata de um resistor ôhmico, porém, quase sempre isso não acontece, pois, a grandeza

temperatura influencia na resistência do material e como a passagem da corrente pelo mesmo, por si só, gera calor por efeito Joule, temos aí uma relação não linear entre tensão e corrente elétrica. Logo, a determinação da grandeza resistência elétrica fica sujeita a seguinte fórmula:

$$R = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$$

onde R é a resistência elétrica do material na temperatura T ; T_0 é a temperatura inicial do material; R_0 é a resistência do material a temperatura T_0 ; α é o coeficiente de temperatura que depende do material e da temperatura, pois, normalmente esse coeficiente sofre variação de valores para intervalos de temperatura acima de dezenas de graus.

No caso de materiais puramente resistivos que tem sua resistência elétrica variando com as grandezas tensão e corrente, ou seja, materiais que não tem uma relação linear entre tensão e corrente, damos o nome de resistores não ôhmicos. Como exemplo de resistores não ôhmicos, temos as lâmpadas incandescente, que quando submetidas a diferentes potenciais elétricos, fornecem diferentes valores de resistência elétrica, uma vez que seu elemento incandescente, um metal conhecido como tungstênio, varia bastante sua temperatura durante o processo de emissão de luz visível.

3. Lista de Materiais

Para a realização do experimento de medição da grandeza resistência elétrica em uma carga puramente resistiva cuja temperatura durante a condução de corrente varia bastante, utilizaremos os seguintes materiais:

- seis lâmpadas incandescentes de potencia $70W/220V$;
- duas lâmpadas incandescentes de potencia $120W/220V$;
- condutores elétricos de cobre de $1.5mm^2$;
- um disjuntor monopolar de $10A$ curva C ;
- um alicate amperímetro;
- um multímetro;
- uma fonte de tensão de $220V$.

4. Procedimento Experimental

4.1 Utilizando o multímetro na escala de resistência elétrica, realize a medição da resistência da lâmpada de $70W/220V$ na temperatura ambiente e anote abaixo:

$$R_{70W} = \text{---}$$

4.2 Monte o circuito série de 6 lâmpadas de $70W/220V$ conforme Figura 9.1, meça na lâmpada L_6 as grandezas tensão e corrente elétrica, depois anote os valores medidos na linha de medição 1 da Tabela 29. Em seguida curto circuite a lâmpada L_1 , realize as medições de tensão e corrente na lâmpada L_6 e anote na medição 2 da Tabela 29, prossiga com esse processo de medição curto circuitando todas as demais lâmpadas até que por fim sobre somente a lâmpada L_6 .

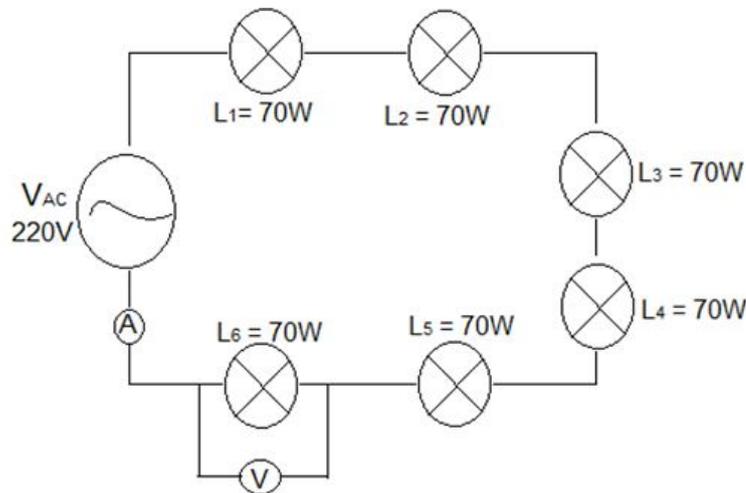


Figura 9.1: Circuito série de lâmpadas incandescente.

| Medições | Tensão elétrica(V) | Corrente Elétrica (A) | Resistência Elétrica (Ω) |
|----------|--------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |

Tabela 29: Medidas de tensão e corrente de uma lâmpada incandescente de $70W/220V$.

4.3 No circuito série de Figura 9.1, troque as lâmpadas L_1 e L_2 por lâmpadas de $120W/220V$, energize novamente o circuito e realize a medição da grandeza

corrente elétrica na lâmpada L_6 e anote o resultado abaixo:

$$I_{70W} = \text{———}$$

5. Questões

i) Trace o gráfico da tensão x corrente através dos dados da Tabela 29.

ii) Através do gráfico traçado no item i), estime um valor de tensão para corrente medida no tópico 4.3 do procedimento experimental e anote abaixo:

$$U_{estimado} = \text{———}.$$

iii) Usando as técnicas de regressão polinomial apresentada pelo professor, ajuste um polinômio do segundo grau aos dados da Tabela 29 e estime um valor para a tensão usando a corrente do tópico 4.3 e anote abaixo:

Coefficientes do polinômio de regressão:

$$a_0 = \text{———}; \quad a_1 = \text{———}; \quad a_2 = \text{———};$$

$$U_{calculado} = \text{———}.$$

iv) Compare os coeficientes do polinômio do segundo grau, com os coeficientes determinados pelo software *Qtiplot* usado para a determinação da curva que ajusta os pontos da Tabela 29 através regressão polinomial.

v) Volte no experimento do tópico 4.3, realize a medição da grandeza tensão elétrica na lâmpada de L_6 , depois verifique o erro entre o valor medido, o valor estimados no item ii) e o valor determinado pelo polinômio do item iii).

vi) Escreva uma fórmula para o cálculo da resistência elétrica da lâmpada incandescente em função apenas da grandeza corrente elétrica.

ATIVIDADE EXPERIMENTAL DO GRUPO 3 - COLÉGIO ESTADUAL JOÃO CARNEIRO DOS SANTOS, TURMA DE 3º ANO

Colégio Estadual João Carneiro dos Santos

Alunos: Grupo 3

Professor: Theófilo Machado Série: 3º Turma: "D" Disciplina: Física

EXPERIMENTO 01: ESTUDO DA RESISTÊNCIA ELETRICA DE LÂMPADAS INCANDESCENTES

1- Objetivo.

Determinar a lei de formação da resistência elétrica em lâmpada incandescente de 70W/220V através das grandezas elétricas tensão e corrente.

2- Introdução

A resistência elétrica é uma grandeza que representa a propriedade da matéria de resistir a passagem da corrente elétrica. Isso acontece quando o elétron ao se movimentar pelo meio material, fica sujeito a constantes choques ocorridos entre os portadores de carga e as impurezas contidas no meio condutor, entre os portadores de carga e o núcleo dos átomos que constitui o material ou até mesmo choques entre os próprios elétrons que estão em constante movimento, isso faz com que a intensidade do movimento seja reduzida e parte da energia cinética perdida se converte em calor.

De acordo com a primeira Lei de Ohm, essa grandeza pode ser determinada pela razão entre tensão e corrente elétrica, desde que ambas sejam referidas ao mesmo material.

$$R = \frac{U}{I}$$

Onde R é a resistência elétrica medida em ohm (Ω);

U é a tensão elétrica medida em volt (V);

I é a intensidade da corrente elétrica medida em ampère (A)

Quando há proporção entre a tensão e a corrente elétrica ao longo das medições em uma mesma carga puramente resistiva, dizemos que tal material se trata de um resistor ôhmico, porém, quase sempre isso não acontece pois, a grandeza temperatura influencia na resistência do material e como a passagem da corrente pelo mesmo, por si só, gera calor por efeito Joule, temos aí uma relação não linear entre tensão e corrente elétrica. Logo, a determinação da grandeza resistência elétrica fica sujeita a seguinte fórmula:

$$R = R_0 (1 + \alpha(T - T_0))$$

Onde R é a resistência elétrica do material na temperatura T;

T₀ é a temperatura inicial do material;

R₀ é a resistência do material a temperatura T₀;

α é o coeficiente de temperatura que depende do material e da temperatura, pois, normalmente esse coeficiente sofre variação de valores para intervalos de temperatura acima de dezenas de graus.

Figura 9.2: Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 1.

No caso de materiais puramente resistivos que tem sua resistência elétrica variando com as grandezas tensão e corrente, ou seja, materiais que não tem uma relação linear entre tensão e corrente, damos o nome de resistores não ôhmicos. Como exemplo de resistores não ôhmicos, temos as lâmpadas incandescente, que quando submetidas a diferentes potenciais elétricos, fornecem diferentes valores de resistência elétrica, uma vez que seu elemento incandescente, um metal conhecido como tungstênio, varia bastante sua temperatura durante o processo de emissão de luz visível.

3- Lista de Materiais

Para a realização do experimento de medição da grandeza resistência elétrica em uma carga puramente resistiva cuja temperatura durante a condução de corrente varia bastante, utilizaremos os seguintes materiais:

- 6 lâmpadas incandescentes de potencia 70W/220V;
- 2 lâmpadas incandescentes de potencia 120W/220V;
- Condutores elétricos de cobre de 1.5mm²;
- 1 Disjuntor monopolar de 10A curva C;
- 1 Alicates amperímetro;
- 1 Multímetro;
- Uma fonte de tensão de 220V.

4- Procedimento Experimental

4.1 Utilizando o multímetro na escala de resistência elétrica, realize a medição da resistência lâmpada de 70W/220V na temperatura ambiente e anote abaixo:

$$R_{70W} = 48,1 \Omega$$

4.2 Monte o circuito série de 6 lâmpadas de 70W/220V conforme Figura 1, meça na lâmpada L₆ as grandezas tensão e corrente elétrica, depois anote os valores medidos na linha de medição 1 da Tabela 1. Em seguida curto circuite a lâmpada L₁, realize as medições de tensão e corrente na lâmpada L₆ e anote na medição 2 da Tabela 1, prossiga com esse processo de medição curto circuitando todas as demais lâmpadas até que por fim sobre somente a lâmpada L₆.

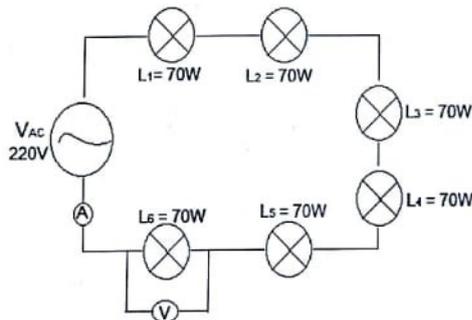


Figura 1: Circuito série de lâmpadas incandescentes

Figura 9.3: Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 2.

| Medições | Tensão elétrica (V) | Corrente elétrica (A) | Resistência elétrica (Ω) |
|----------|---------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| 1 | 35 V | 0,128 A | 273,43 |
| 2 | 42 V | 0,134 A | 313,43 |
| 3 | 52 V | 0,152 A | 337,74 |
| 4 | 72 V | 0,171 A | 421,05 |
| 5 | 104 V | 0,217 A | 479,26 |
| 6 | 212 V | 0,313 A | 677,31 |

Tabela 1: Medidas de tensão e corrente de um lâmpada incandescente de 70W/220V

4.3 No circuito série de Figura 1, troque as lâmpadas L_1 e L_2 por lâmpadas de 120W/220V, energize novamente o circuito e realize a medição da grandeza corrente elétrica na lâmpada L_6 e anote o resultado abaixo:

$$I_{70W} = 0,142 A$$

5 Questões

i) Trace o gráfico da tensão x corrente através dos dados da Tabela 1

ii) Através do gráfico traçado no item i), estime um valor de tensão para corrente medida no tópico 4.3 do procedimento experimental e anote abaixo:

$$U_{\text{estimado}} = 48 V$$

iii) Usando as técnicas de regressão polinomial apresentada pelo professor, ajuste um polinômio do segundo grau aos dados da tabela 1 e estime um valor para a tensão usando a corrente do tópico 4.3 e anote abaixo:

Coefficientes do polinômio de regressão:

$$a_0 = -17,4902079 ; a_1 = 213,010043 ; a_2 = 1657,65667$$

Erro padrão:

$$R = \frac{U}{I}$$

$$U_{\text{calculado}} = 46,1822073 V$$

iv) Compare os coeficientes do polinômio do segundo grau, com os coeficientes determinados pelo software Qplot usado para a determinação da curva que ajusta os pontos da Tabela 1 através regressão polinomial.

v) Volte no experimento do tópico 4.3, realize a medição da grandeza tensão elétrica na lâmpada de L_6 , depois verifique o erro entre o valor medido, o valor estimados no item ii) e o valor determinado pelo polinômio do item iii).

vi) Escreva uma fórmula para o cálculo da resistência elétrica da lâmpada incandescente usada como o resistor não ôhmico em função apenas da grandeza corrente elétrica.

Figura 9.4: Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 3.

Solução:

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } n &= 6 & \sum U &= 516 \\
 \sum \dot{u} &= 3,334 & \sum \dot{u} \cdot U &= 339,045 \\
 \sum \dot{u}^2 &= 0,23144 & \sum \dot{u}^2 \cdot U &= 30,26248 \\
 \sum \dot{u}^3 &= 0,053829 & \sum \dot{u}^3 \cdot U &= \\
 \sum \dot{u}^4 &= 0,013781 & m &= 2
 \end{aligned}$$

$$U(\dot{u}) = a_0 + a_1 \dot{u} + a_2 \dot{u}^2$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum U & \sum \dot{u} & \sum \dot{u}^2 \\ \sum \dot{u} \cdot U & \sum \dot{u}^2 & \sum \dot{u}^3 \\ \sum \dot{u}^2 \cdot U & \sum \dot{u}^3 & \sum \dot{u}^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum \dot{u} & \sum \dot{u}^2 \\ \sum \dot{u} & \sum \dot{u}^2 & \sum \dot{u}^3 \\ \sum \dot{u}^2 & \sum \dot{u}^3 & \sum \dot{u}^4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 516 & 3,334 & 0,23144 \\ 339,045 & 0,23144 & 0,053829 \\ 30,26248 & 0,053829 & 0,013781 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3,334 & 0,23144 \\ 3,334 & 0,23144 & 0,053829 \\ 0,23144 & 0,053829 & 0,013781 \end{vmatrix}}$$

$$a_0 = -37,490279$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum U & \sum \dot{u}^2 \\ \sum \dot{u} & \sum \dot{u} \cdot U & \sum \dot{u}^3 \\ \sum \dot{u}^2 & \sum \dot{u}^2 \cdot U & \sum \dot{u}^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum \dot{u} & \sum \dot{u}^2 \\ \sum \dot{u} & \sum \dot{u}^2 & \sum \dot{u}^3 \\ \sum \dot{u}^2 & \sum \dot{u}^3 & \sum \dot{u}^4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 516 & 0,23144 \\ 3,334 & 339,045 & 0,053829 \\ 0,23144 & 30,26248 & 0,013781 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3,334 & 0,23144 \\ 3,334 & 0,23144 & 0,053829 \\ 0,23144 & 0,053829 & 0,013781 \end{vmatrix}}$$

$$a_1 = 213,030043$$

Figura 9.5: Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 4.

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum u & \sum U \\ \sum u & \sum u^2 & \sum u \cdot U \\ \sum u^2 & \sum u^3 & \sum u^2 \cdot U \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum u & \sum u^2 \\ \sum u & \sum u^2 & \sum u^3 \\ \sum u^2 & \sum u^3 & \sum u^4 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3,114 & 516 \\ 3,114 & 0,23144 & 339,045 \\ 0,23144 & 0,053829 & 30,26248 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3,114 & 0,23144 \\ 3,114 & 0,23144 & 0,053829 \\ 0,23144 & 0,053829 & 0,013781 \end{vmatrix}}$$

$$a_2 = 3657,65667$$

$$U(u) = -17,4902079 + 213,030043 \cdot u + 3657,65667 \cdot u^2$$

$$U(0,142) = -17,4902079 + 213,030043 \cdot 0,142 + 3657,65667 \cdot 0,142^2$$

$$U(0,142) = 46,1822073 \text{ V}$$

ii) Os coeficientes apresentados pelo software (tiplot são exatamente iguais aos calculados no item iii).

v) Erro entre o valor medido e o valor estimado pelo gráfico

$$E = 48 - 46,1822073$$

$$E = 48 - 46 = 2 \text{ V}$$

Erro entre o valor estimado pelo polinômio e o valor medido

$$E = 46,1822073 - 46$$

$$E = 0,1822073 \text{ V}$$

$$vi) R = \frac{U}{u} = \frac{-17,4902079}{u} + 213,030043 + 3657,65667 \cdot u$$

$$\text{com } u \neq 0$$

Figura 9.6: Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 5.

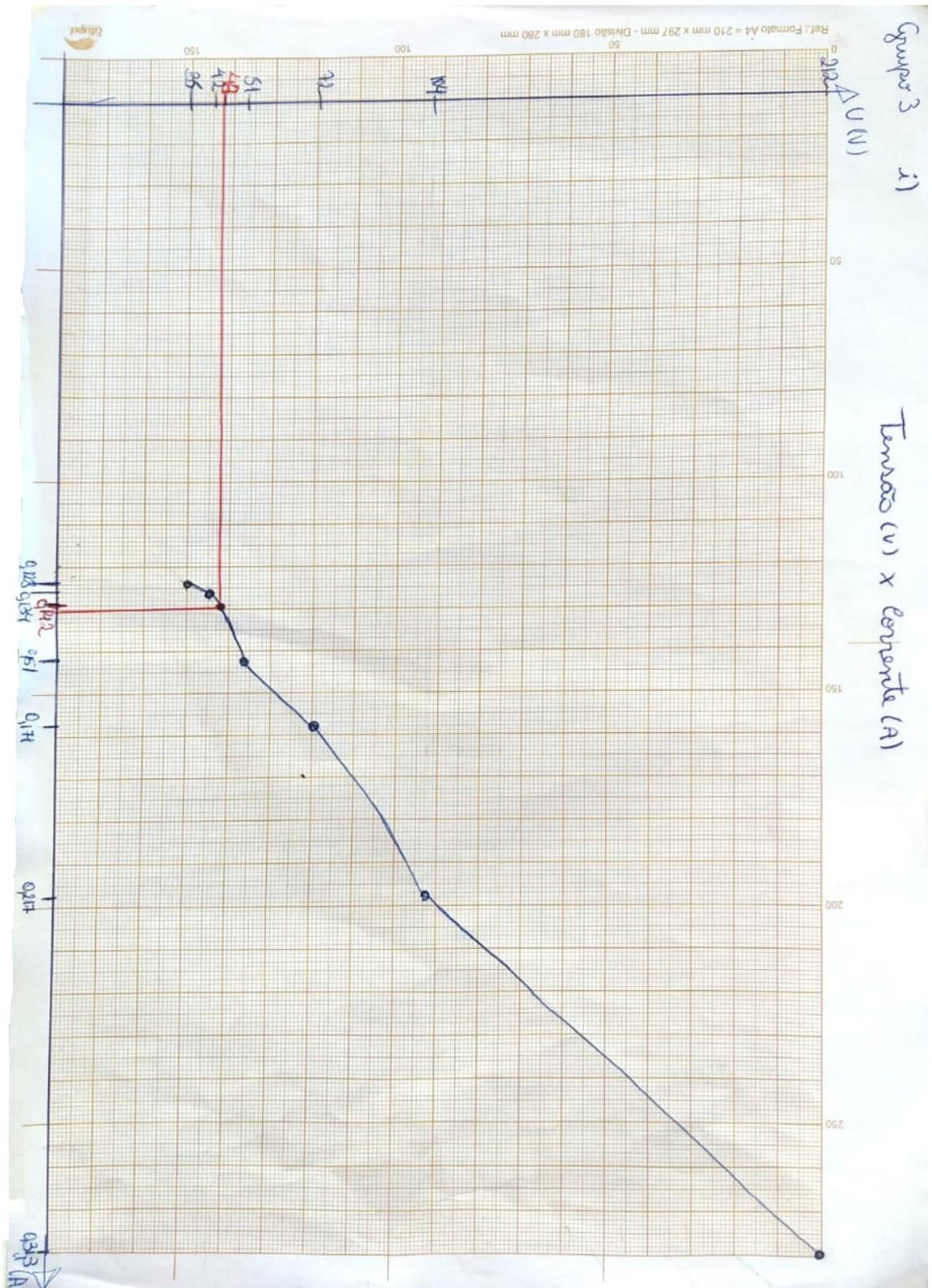


Figura 9.7: Atividade realizada pelo grupo 3 - parte 6.