



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT**

**LUÍDSON ROBSON DA SILVA PEDROZO**

**A MATEMÁTICA E AS ANTENAS PARABÓLICAS**

**JUAZEIRO DO NORTE  
2018**

LUÍDSON ROBSON DA SILVA PEDROZO

A MATEMÁTICA E AS ANTENAS PARABÓLICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:  
Prof<sup>a</sup>.Dr<sup>a</sup>.Maria Silvana Alcantara Costa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Cariri  
Sistema de Bibliotecas

- 
- P417m Pedrozo, Luídson Robson da Silva.  
A matemática e as antenas parabólicas/ Luídson Robson da Silva Pedrozo. – 2018.  
58 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia  
– Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2018.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
- Orientação: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Silvana Alcântara Costa.
1. Parábola. 2. Paraboloide. 3. Antena parabólica. I. Título.

---

CDD 516.3

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

---

## A Matemática e as Antenas Parabólicas

*Luídson Robson da Silva Pedrozo*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 05 de outubro de 2018.

### Banca Examinadora

Maria Silvana Alcântara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa - UFCA

Orientadora

Erica Boizan Batista  
Profa. Dra. Erica Boizan Batista - UFCA

Mário Henrique Gomes Pacheco  
Prof. Dr. Mário Henrique Gomes Pacheco –  
UFCA

*Dedico este trabalho: a Deus por iluminar minha vida sempre, a minha família, a minha noiva Thamires, a todos os professores que participaram da minha formação, e aos meus amigos, amigos que conquistei nesse mestrado, agradeço a todos pelo apoio, incentivo e compreensão.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois acredito que coisas boas como essa acontecem na nossa vida graças ajuda dele.

Agradeço aos meus pais, pois desde muito cedo, na medida do possível, fizeram esforços para garantir minha formação e sempre depositaram muita confiança nas minhas decisões.

Agradeço a todos os professores que participaram da minha educação e a paciência, compreensão e dedicação dos professores desse mestrado: o grande Plácido Andrade, Paulo César, F. Assis Filho, Francisco Chaves, Érica Boizan, Valdir Ferreira e a minha Orientadora Maria Silvana Alcântara Costa que, com seu profissionalismo e apoio, tornei-me um admirador da sua pessoa e do seu trabalho.

Agradeço o incentivo e apoio dos meus amigos, professores da escola Eunice Maria no distrito de palestina em Mauriti-CE, da escola Monsenhor João Pires, onde estudei e hoje trabalho, em Belém do São Francisco-PE, da escola João Justiniano da Fonseca em Rodelas-BA, em especial a Klédiba Fonseca, Anamélia Souza e Alair Carvalho pela grande compreensão na organização do meu horário o que possibilitou a frequência nas aulas presenciais desse curso.

Agradeço a minha noiva Thamires Brito pelo auxílio, compreensão e forte apoio nos meus momentos de dedicação aos estudos.

Agradeço de forma significativa aos meus colegas e amigos de turma, em especial: Francisco Airton, Carlos Macedo, F. Aglaiza Romão, Ediuberto Oliveira, Antônio Ricardo, Samuel Alves que nos auxiliou e incentivou a nos empenharmos cada vez mais em nossos estudos e Antônio Eudo pela parceria nos momentos difíceis os quais passamos.

Agradeço a todos os meus familiares, mencionando meu primo, Sérgio Araújo, pela ajuda e estímulo no desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES pelo apoio financeiro na aquisição de livros e gastos com viagens semanais para Juazeiro do Norte-CE, agradeço também aqueles que não citei mas que de forma direta ou indireta contribuíram para esse resultado tão almejado por mim.

*“O homem erudito é um descobridor de fatos que já existem - mas o homem sábio é um criador de valores que não existem e que faz existir.” (Albert Einstein)*

## RESUMO

Este trabalho baseia-se na ideia de apresentar os conhecimentos matemáticos presentes no formato, funcionamento e na instalação das antenas parabólicas, tendo como principal estudo a parábola, cuja rotação, em torno de uma reta fixa, gera uma superfície parabólica também conhecida como parabolóide. Assim, iniciaremos com uma abordagem histórica sobre as seções cônicas, em seguida, veremos algumas noções básicas sobre Geometria Plana que será de bastante utilidade nos capítulos seguintes. Em sequência apresentaremos as funções quadráticas cujo gráfico é uma parábola e a propriedade de reflexão da parábola a qual justifica o formato da antena e finalizamos o trabalho apresentando a importância da matemática no funcionamento e na instalação das antenas parabólicas.

**Palavras-chave:** Parábola. Parabolóide. Antena parabólica.



## ABSTRACT

This work is based on the idea of presenting the mathematical knowledge present in the format, operation and installation of the parabolic antennas, whose main study is the parabola, whose rotation, around a fixed line, generates a parabolic surface also known as paraboloid. Like this, we will start with a historical approach on the conic sections, then, we will see some basics about Plane Geometry that will be very useful in the following chapters. In sequence we will present the quadratic functions whose graph is a parabola and the reflection property of the parabola which justifies the antenna format and finalize the work presenting the importance of mathematics in the operation and installation of the parabolic antennas.

**Keywords:** Parable. Paraboloid. Parabolic antenna.

# Lista de Figuras

2.1	Cone Circular Reto . . . . .	14
2.2	Interseção do cone com o plano $\Theta$ e o ângulo do vértice $V$ . . . . .	15
2.3	Curva gerada pela interseção do cone com um plano . . . . .	16
2.4	Cones de Menaecmus . . . . .	16
2.5	Cone de Apolônio . . . . .	17
2.6	Elementos da Parábola . . . . .	18
2.7	Ponto $Q$ interior à Parábola . . . . .	19
2.8	Ponto $Q$ exterior à Parábola . . . . .	19
2.9	Reta tangente a $\varphi$ no ponto $O$ . . . . .	20
3.10	Reta determinada por $A$ e $B$ . . . . .	20
3.11	Semirretas de origem $A$ passando por $B$ . . . . .	21
3.12	Semirretas de mesma origem. . . . .	21
3.13	Região convexa (esquerda) e não convexa (direita) . . . . .	22
3.14	Regiões angulares no plano . . . . .	22
3.15	Grau como unidade de medida de ângulos . . . . .	23
3.16	Boa definição de grau . . . . .	23
3.17	Transferidor de acrílico . . . . .	24
3.18	Ângulo raso . . . . .	24
3.19	Ângulos: agudo, reto e obtuso . . . . .	25
3.20	Ângulos opostos pelo vértice - OPV . . . . .	25
3.21	Transferidor. . . . .	26
3.22	Medindo ângulo com transferidor . . . . .	27
3.23	Círculo de centro $O$ e raio $r$ . . . . .	28
3.24	Mediatriz de $\overline{AB}$ . . . . .	28
3.25	Ponto $P$ pertencente a Bissetriz de $\angle AOB$ . . . . .	29
4.26	Concavidade da Parábola . . . . .	38
4.27	Obtenção do parabolóide por rotação . . . . .	38
4.28	Ângulos de incidência e reflexão . . . . .	39
4.29	Reta tangente à parábola . . . . .	41
4.30	Segmento perpendicular a tangente . . . . .	42
4.31	Tangente à parábola em $P$ . . . . .	43

4.32	Ângulos entre a tangente $T$ e a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ . . . . .	43
5.33	Área de cobertura de um satélite . . . . .	46
5.34	Sinais convergindo para o foco da antena parabólica . . . . .	46
5.35	Esquema de transmissão de sinais via satélite . . . . .	47
5.36	Bússola e transferidor com prumo . . . . .	48
5.37	Norte geográfico e norte magnético . . . . .	48
5.38	Coordenadas para localização do Brasilsat II . . . . .	49
5.39	Cálculo de apontamento no web site da Century . . . . .	50
5.40	Azimute de $306,8^\circ$ . . . . .	50
5.41	Cálculo de apontamento para Maceió pelo site da Century. . . . .	51
5.42	Exemplos de direcionamento horizontal da antena . . . . .	51
5.43	Ângulo de elevação da antena . . . . .	52
5.44	Medindo o ângulo de elevação da antena parabólica . . . . .	52
5.45	Retas $r$ , $s$ , $r'$ e $s'$ . . . . .	53
5.46	Ângulos congruentes formados pelas retas . . . . .	53

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>CÔNICAS: BREVE HISTÓRICO</b>	<b>13</b>
2.1	Surgimento das cônicas . . . . .	13
2.2	Os nomes: Parábola, Elipse e Hipérbole . . . . .	17
2.3	Definição de parábola . . . . .	17
<b>3</b>	<b>ALGUNS CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS</b>	<b>20</b>
3.1	Axiomas de incidência e ordem . . . . .	20
3.2	Ângulos . . . . .	22
3.2.1	Medindo ângulos com transferidor . . . . .	26
3.3	Noções sobre lugares geométricos . . . . .	27
<b>4</b>	<b>FUNÇÕES QUADRÁTICAS</b>	<b>30</b>
4.1	Funções quadráticas . . . . .	30
4.2	Propriedade de reflexão da parábola . . . . .	38
<b>5</b>	<b>FUNCIONAMENTO E INSTALAÇÃO DAS ANTENAS PARABÓ- LICAS</b>	<b>45</b>
5.1	A transmissão do sinal de telecomunicação . . . . .	45
5.2	A instalação da antena parabólica . . . . .	47
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>55</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>56</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A motivação para o presente trabalho deve-se às disciplinas cursadas durante o mestrado aliada a vivência, como professor, em sala de aula. Se deparar com perguntas do tipo: “para que serve matemática?”, “Para quê eu devo aprender isso professor? Eu nem vou precisar disso aí!”, despertou o interesse em apresentar, para estudantes da educação básica, como a matemática está presente no nosso cotidiano através de um objeto comum a praticamente todas as residências, a antena parabólica. Veremos que, no formato e funcionamento deste objeto, estão presentes conhecimentos matemáticos como funções e gráficos, geometria, parábola e suas propriedades.

Devido à propriedade de reflexão da parábola muitos objetos possuem formato parabólico em sua fabricação, como espelhos parabólicos, lanternas de mão, holofotes, entre outros. Na construção civil, juntamente com a função quadrática, a parábola se faz presente no formato de alguns cabos em pontes e na Física descreve trajetória de lançamentos de projéteis, etc. Porém, neste trabalho, iremos nos restringir a matemática presente no formato, no funcionamento e na instalação das antenas parabólicas.

Como o público alvo são estudantes do Ensino Médio e alunos de licenciatura em matemática, apresentamos os assuntos de forma detalhada para melhor compreensão do texto e optamos por trabalhar com a parábola como gráfico da função quadrática pois é um conteúdo visto no primeiro ano do Ensino Médio, porém o mesmo estudo pode ser feito somente com a parábola e conhecimentos de geometria. Para tanto, iniciamos com um breve histórico sobre as seções cônicas tendo a parábola como destaque. No Capítulo 3 apresentamos alguns conceitos básicos de Geometria Plana necessários para a compreensão dos capítulos seguintes. No Capítulo 4 introduzimos as funções quadráticas que têm como gráfico uma parábola e destacaremos a propriedade de reflexão desta curva. Finalizamos o nosso trabalho apresentando como a matemática se faz presente na montagem e no funcionamento das antenas parabólicas.

## 2 CÔNICAS: BREVE HISTÓRICO

Segundo a História da Matemática o surgimento das seções cônicas, elipse, parábola e hipérbole, remontam o século *IV* a.C. e está relacionado com a tentativa de solucionar o problema de *duplicação do cubo*, que é um dos três problemas clássicos da antiguidade.

Grandes nomes da matemática contribuíram com a origem e evolução do estudo das cônicas, como por exemplo, Menaecmus (380-320 a.C.) e Apolônio (262-190 a.C) conhecido como o *O Grande Geômetra*. As cônicas são curvas que desempenham papel significativo no desenvolvimento da matemática tendo forte relação com a tecnologia devido às suas propriedades e são, até hoje, objeto de estudo.

Como motivação para leitura do trabalho, neste capítulo faremos um breve histórico sobre o surgimento das seções cônicas e, em particular, daremos destaque à parábola. Para maiores detalhes sobre o assunto veja [12], [19] e [23].

### 2.1 Surgimento das seções cônicas

Três problemas clássicos de Geometria fazem parte da história da matemática e desafiaram matemáticos da antiguidade. São os seguintes:

- **Quadratura do círculo:** construir, usando somente régua e compasso, um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo dado;
- **Duplicação do cubo:** construir, usando somente régua e compasso, a aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo dado;
- **Trissecção de um ângulo:** construir, usando somente régua e compasso, um ângulo com medida igual a terça parte de um ângulo dado.

Por volta do século *XIX* foi provado ser impossível resolver esses três problemas usando apenas régua e compasso. Porém, a busca por uma solução para cada um destes problemas contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento da matemática. A tentativa de solucionar o segundo problema, o problema de *Duplicação do cubo*, deu origem às cônicas e falaremos brevemente sobre este problema e sua relação com estas curvas.

A história por trás deste problema está envolta em lendas. Uma delas diz que Minos, rei de Creta, insatisfeito com o tamanho do túmulo de seu filho Glauco, ordenou que fosse

feito um túmulo com o dobro do original, porém sem que perdesse a forma original que era a forma de um cubo.

Uma outra lenda conta que, em meados de 429 a.C., ocorreu uma epidemia de peste na cidade de Atenas, situada na Grécia. Com a situação agravando-se, autoridades da época foram consultar o oráculo do deus Apolo que sugeriu a solução para o problema da peste: o altar de adoração à Apolo no formato cúbico, deveria ser substituído por um outro altar cúbico que teria o dobro do volume do altar anterior. Assim surge o *Problema da Duplicação do Cubo*, também conhecido como o *Problema Deliano* ou *Problema de Delos* devido à localização ser na ilha jônica de Delos.

Entre os matemáticos que dedicaram parte de seus estudos na busca por uma solução para os *três problemas clássicos* destacamos *Hipócrates de Chios* (470-410 a.C.) que tentou resolver o problema usando a Teoria das Proporções, transformando o problema da duplicação do cubo em um problema de proporção.

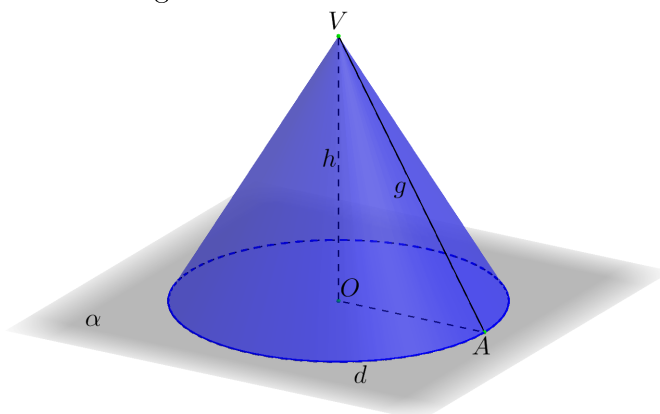
Outro matemático que dedicou parte de seu tempo ao estudo deste problema foi o Geômetra grego Menaecmus(380-320 a.C.) que resolveu o problema utilizando médias proporcionais e não régua e compasso como, inicialmente, o problema havia sido proposto.

Ao buscar uma solução para o problema de duplicação do cubo, Menaecmus utilizou cortes, por planos, em cones circulares retos. Porém, mais do que a solução para o problema, ele descobriu novas curvas que hoje chamamos seções cônicas: elipse, parábola e hipérbole.

Vejamus a definição de cone circular reto para descrevermos brevemente como Menaecmus descobriu as seções cônicas.

**Definição 1.** *Um cone, ou superfície cônica, é gerada por uma reta  $g$  (geratriz) que passa por um ponto dado  $V$  (vértice) e percorre os pontos de uma linha dada  $d$  (diretriz), onde  $V$  não pertence a  $d$ . Em particular, se  $d$  é uma circunferência com centro  $O$  e a reta  $VO$  é perpendicular ao plano que contém  $d$ , a superfície cônica é um cone circular reto.*

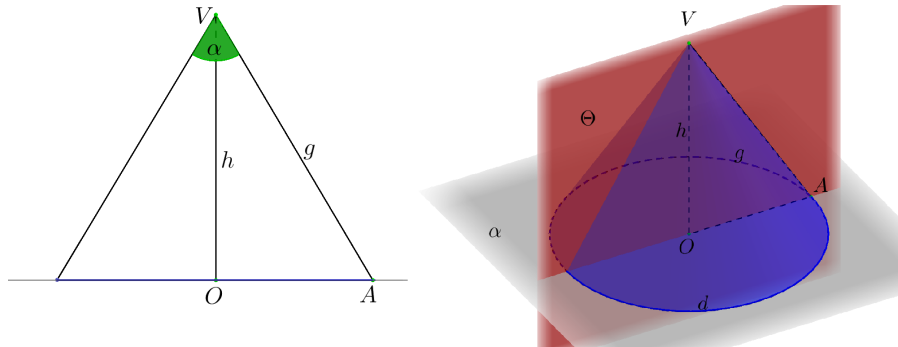
Figura 2.1: Cone Circular Reto



Fonte: Autor.

Agora imaginemos um plano  $\Theta$  passando pelo ponto  $V$  e pelo diâmetro da base do cone, ou seja, perpendicular a base, como na figura a seguir. A intersecção de  $\Theta$  com o cone será um triângulo. A medida do ângulo no vértice  $V$  desse triângulo é também a medida do *ângulo do vértice do cone*.

Figura 2.2: Intersecção do cone com o plano  $\Theta$  e o ângulo do vértice  $V$ .



Fonte: Autor.

Para entendermos como Menaecmus descobriu as novas curvas, devemos considerar três cones com medidas do ângulo do vértice diferentes: um cone com ângulo de medida menor que  $90^\circ$ , outro com ângulo de medida igual a  $90^\circ$  e o terceiro com ângulo de medida maior que  $90^\circ$ . Para cada um destes cones, suponha que exista um plano perpendicular passando por sua geratriz. A intersecção deste plano com cada um destes cones geram curvas que foram denominadas da seguinte forma:

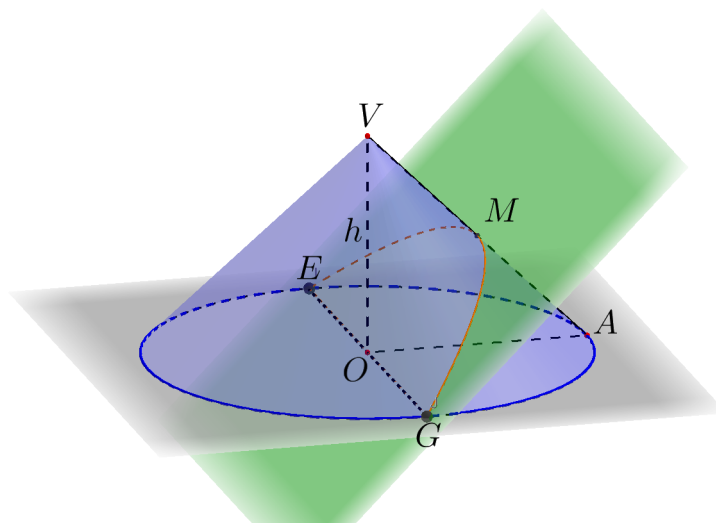
1. No cone com ângulo do vértice de medida menor que  $90^\circ$ , a curva foi denominada de *oxythome* (elipse);
2. No cone com ângulo do vértice de medida de  $90^\circ$ , a curva foi denominada de *orthotome* (parábola);
3. O terceiro, que possui ângulo do vértice de medida maior que  $90^\circ$ , a curva foi chamada de *amblythome* (hipérbole).

Essas intersecções deram origem as *Seções Cônicas* ou *Cônicas*, e a partir deste estudo, Menaecmus resolveu o problema da duplicação do cubo. Para maiores detalhes sobre a solução dada por Menaecmus veja [12]. Nos deteremos apenas às cônicas.

Dado  $VGE$  um cone circular reto, com o ângulo no vértice  $V$  medindo  $90^\circ$ , considere um plano perpendicular à geratriz  $VA$  passando pelo ponto  $M$  seccionando o cone. A intersecção deste plano com o cone resulta na curva  $EMG$ , sendo  $E$  e  $G$  pontos da diretriz  $d$  da base, conforme a figura 2.3, de equação  $y^2 = lx$ , onde o número  $l$  é uma constante.



Figura 2.3: Curva gerada pela interseção do cone com um plano



Fonte: Autor.

Para o cone reto de ângulo do vértice com medida menor que  $90^\circ$ , a intersecção do plano perpendicular a geratriz é a curva de equação,

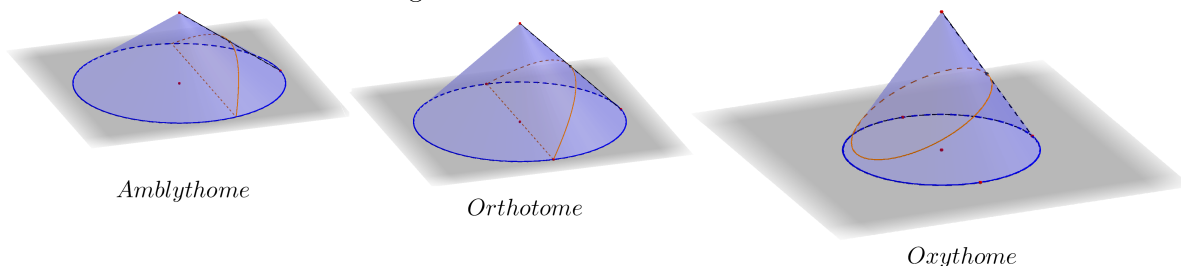
$$y^2 = lx - \frac{b^2x^2}{a^2},$$

que é a equação da *oxytome*. Para a *amblytome*, que é a curva obtida pela interseção do plano perpendicular a geratriz do cone de ângulo do vértice com medida maior que  $90^\circ$ , chegou-se a equação

$$y^2 = lx + \frac{b^2x^2}{a^2}$$

onde  $a, b$  são constantes reais. Para mais detalhes sobre o cálculo das equações destas curvas sugerimos [12] e [19].

Figura 2.4: Cones de Menaecmus

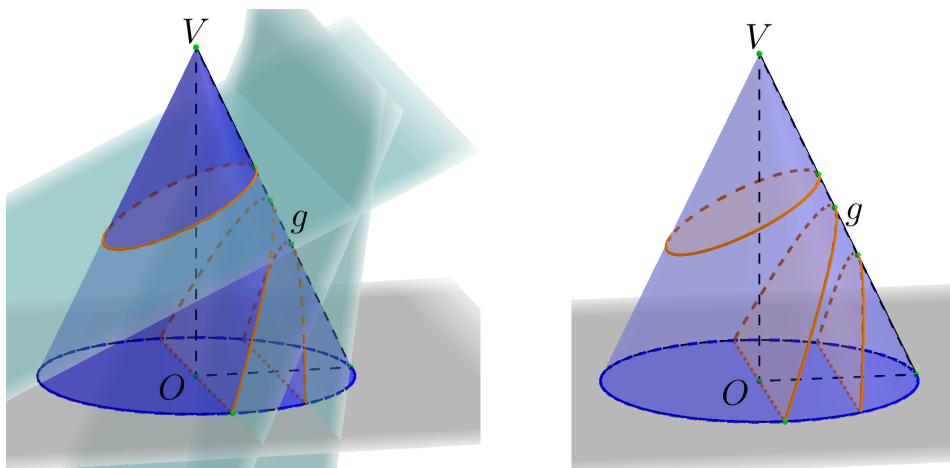


Fonte: Autor.

## 2.2 Os nomes: Parábola, Elipse e Hipérbole

Apolônio (262-190 a.C.) nasceu em Perga na Panfília situada ao sul da Ásia Menor. Foi um notório matemático da sua época de forma a contribuir para a matemática atual. Conhecido como *O grande Geômetra*, Apolônio de Perga, em uma de suas obras mais conhecidas, *As Cônicas*, foi o responsável por dar os nomes parábola, elipse e hipérbole as curvas descobertas por Menaecmus, orthotome, oxythome e amblithome, respectivamente. Além disso, Apolônio mostrou que, a partir de cortes em um único cone, seria possível determinar as cônicas bastando apenas variar o ângulo de inclinação do plano de corte a geratriz do cone.

Figura 2.5: Cone de Apolônio



Fonte: Autor.

## 2.3 Definição de parábola

As seções cônicas possuem propriedades refletoras que são aplicadas em vários objetos fabricados. Segundo a história da matemática, essa propriedade já era conhecida por Arquimedes de Siracusa (250 a.C.). Outro matemático a estudar tal propriedades foi Diocles (240-190 a.C.) cuja obra recebeu o título de *Sobre Espelhos que Queimam*. Diocles provou que, se um paraboloide de superfície espelhada for orientado, apontado para o sol, os raios refletidos por ele convergem para um ponto, proporcionando uma grande concentração de raios solares de forma a provocar uma combustão em certos materiais que sejam colocados no ponto, ou estejam nas suas proximidades.

Utilizando espelhos parabólicos, Isaac Newton (1643-1727) construiu seu primeiro telescópio o qual é utilizado até hoje.

No Capítulo 4 faremos um estudo sobre a propriedade de reflexão da parábola. Finalizaremos este capítulo com a definição de parábola como é hoje utilizada, mas antes vamos relembrar a definição de distância entre dois pontos em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.** *Sejam  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  dois pontos em  $\mathbb{R}^2$ . Definimos a distância de  $P$  à  $Q$  por*

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Vale ressaltar que a distância  $|PQ| \geq 0$ , e que  $|PQ| = 0$  se, e somente se  $P = Q$ .

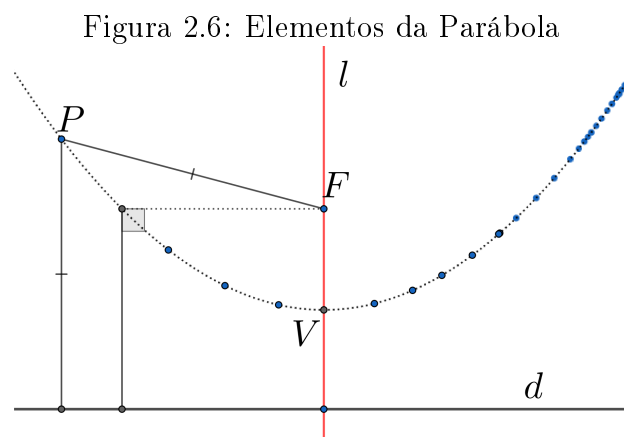
A distância de um ponto  $P$  a uma reta  $r$ , denotada por  $|Pr|$ , significa a distância do ponto  $P$  ao ponto  $Q$ , onde  $Q$  é o pé da reta perpendicular baixada de  $P$  até  $r$ . Neste caso  $|Pr| = 0$  se, e somente se,  $P = Q$ , isto é,  $P \in r$ . Relembremos também que a equação de uma reta  $r$  que passa por um ponto  $P = (x_0, y_0)$  e tem coeficiente angular  $m$  é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

**Definição 3.** *Dados um ponto  $F$  e uma reta  $d$  no plano, com  $F \notin d$ , a parábola  $\varphi$  de foco  $F$  e reta diretriz  $d$  é o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano tais que a distância de  $P$  à  $F$  é igual à distância de  $P$  à  $d$ , ou seja,  $|PF| = |Pd|$ .*

Além do foco e da reta diretriz, existem outros elementos na parábola. A reta  $l$ , perpendicular à reta diretriz  $d$  e que passa no foco  $F$ , é chamada de *reta focal* e é também o eixo de simetria da parábola.

O ponto  $V$  da parábola mais próximo de  $F$  e da reta diretriz  $d$  é chamado *vértice da parábola* e é também o único ponto de intersecção da reta focal  $l$  com a parábola.



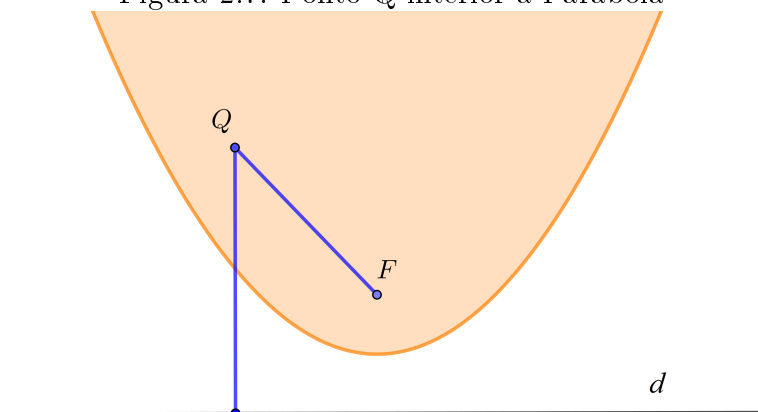
Fonte: Autor.

A partir da figura 2.6, observamos que a parábola divide o plano em duas regiões: uma região interior à parábola e outra exterior à parábola. Vejamos também que, se  $Q$  é

um ponto que pertence à região interior à parábola, então

$$|QF| < |Qd|,$$

Figura 2.7: Ponto Q interior à Parábola

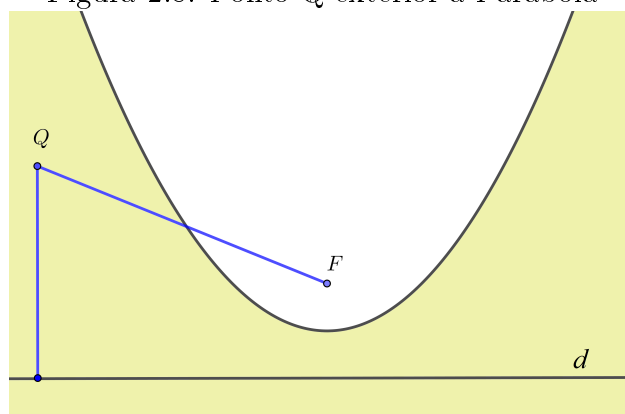


Fonte: Autor.

e se  $Q$  é um ponto que pertence a região exterior à parábola, tem-se que

$$|QF| > |Qd|.$$

Figura 2.8: Ponto Q exterior à Parábola



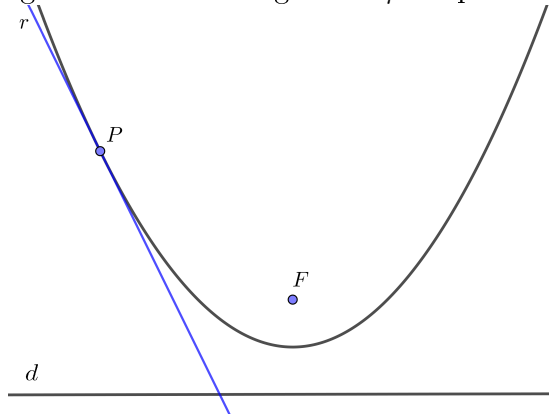
Fonte: Autor.

Dado um ponto  $P$  da parábola, dentre todas as retas que passam por  $P$ , existe uma única reta que tem este ponto em comum com a parábola e está totalmente contida na região exterior à parábola. Esta reta é chamada de *Reta Tangente* à parábola no ponto  $P$ , onde a palavra tangente é oriunda do latim tangens, que significa "tocando".

A definição de reta tangente será apresentada aqui sem o uso do *Cálculo*, mas para nossos propósitos é suficiente.

**Definição 4.** *Sejam  $\varphi$  uma parábola com foco  $F$ , diretriz  $d$  e  $P$  um ponto de  $\varphi$ . Dizemos que  $r$  é a reta tangente à parábola em  $P$ , se  $P$  é o único ponto de interseção entre  $r$  e  $\varphi$  e, para todo ponto  $Q \in r$ ,  $Q \neq P$ , a distância  $|QF| > |Qd|$ .*

Figura 2.9: Reta tangente a  $\varphi$  no ponto  $P$ .



Fonte: Autor.

Assim a reta  $r$ , tangente a parábola  $\varphi$  no ponto  $P$ , é a reta que "toca" a parábola apenas no ponto  $P$ , e todos os demais pontos de  $r$  estão na região exterior à parábola.

# 3 ALGUNS CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

Nesse capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos de Geometria Plana que serão necessários para melhor compreensão do funcionamento e também da instalação das antenas parabólicas que serão estudados no capítulo 5. Este capítulo foi baseado em [4], [14], [17] as quais podem ser consultadas, caso o leitor tenha interesse nas demonstrações, aqui omitidas, de alguns resultados.

## 3.1 Axiomas de incidência e ordem

Em nosso cotidiano, deparamo-nos com situações que remetem a ideia de ponto, reta e plano, um ponto feito de caneta num texto em que escrevemos, as linhas de um caderno, a folha de papel e entre outros. Na geometria as ideias de ponto, reta e plano são considerados conceitos primitivos, isto é, não há necessidade de defini-los pois retas e planos são constituídos de pontos, logo uma reta no plano é um conjunto de pontos distinguidos dos demais pontos do plano.

Um axioma é uma sentença matemática imposta como verdade, ou seja, aceitamos como verdadeira sem a necessidade de provar a sua veracidade. Vejamos a seguir alguns axiomas.

**Axioma 1.** *Dados no plano um ponto  $P$  e uma reta  $r$  no plano, só há duas situações: ou  $P$  pertence a reta  $r$  ou  $P$  não pertence a reta  $r$ .*

**Axioma 2.** *Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  do plano, podemos traçar uma única reta determinada por  $A$  e  $B$ .*

Tal reta  $r$  será denotada por  $r = \overleftrightarrow{AB}$ .

Figura 3.10: Reta determinada por  $A$  e  $B$



Fonte: Autor.

**Proposição 1.** *Duas retas distintas no plano ou se interceptam em um único ponto ou não interceptam.*

A prova desta proposição pode ser encontrada em [4].

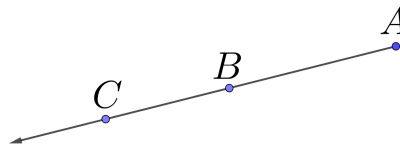
Se duas retas no mesmo plano não se intersectam, dizemos que elas são retas *Paralelas*. Caso contrário as retas são *Concorrentes*.

**Axioma 3.** *Dados três pontos distintos pertencentes a uma reta, apenas um dos três estará localizado entre os outros dois.*

**Definição 5.** *O conjunto de pontos formado por dois pontos distintos  $A$  e  $B$  sobre uma reta  $r$  e todos os outros pontos entre  $A$  e  $B$  dessa mesma reta é chamado de segmento de reta de extremidades  $A$  e  $B$  e denotamos por  $\overline{AB}$ .*

**Definição 6.** *O conjunto de pontos constituído por um segmento  $\overline{AB}$ , onde  $A$  e  $B$  são pontos distintos, e todos os pontos  $C$  tais que  $B$  esteja entre  $A$  e  $C$  é chamado de semirreta de origem  $A$  contendo o ponto  $B$ .*

Figura 3.11: Semirretas de origem  $A$  passando por  $B$

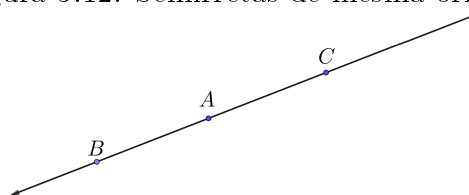


Fonte: Autor.

**Axioma 4.** *Uma reta  $r$  divide o plano em exatamente dois semi-planos distintos cuja intercessão desses é a reta  $r$ .*

Considere  $A$ , um ponto pertencente à uma reta  $r$ , dividindo-a em duas semirretas de origem  $A$ . Escolhendo os pontos  $B$  e  $C$  sobre  $r$  onde  $A$  localiza-se entre eles, podemos denotar as semirretas opostas de mesma origem  $A$  por  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , como na figura 3.11.

Figura 3.12: Semirretas de mesma origem.



Fonte: Autor.

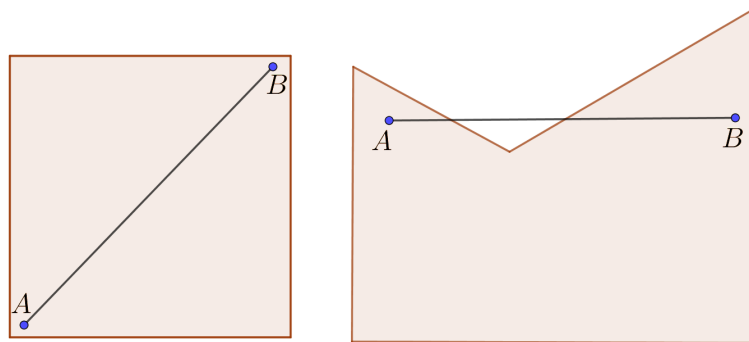
## 3.2 Ângulos

Antes de apresentarmos a definição de ângulo, definiremos região convexa.

**Definição 7.** Uma região  $S$  do plano é Convexa quando, para todos os pontos  $A, B$  pertencente a  $S$ , tivermos o segmento  $\overline{AB}$  contido em  $S$ . Caso contrário, diremos que  $S$  é uma região Não Convexa.

Baseado na definição imediatamente anterior podemos dizer que uma região  $S$  é não convexa quando existem dois pontos  $A, B \in S$  tais que pelo menos um ponto do segmento  $\overline{AB}$  não pertence a região  $S$ .

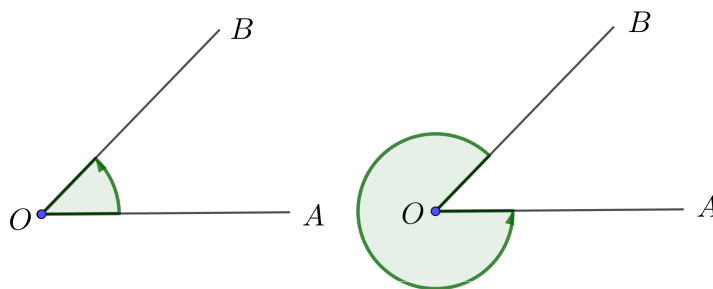
Figura 3.13: Região convexa (esquerda) e não convexa (direita)



Fonte: Autor.

**Definição 8.** Dadas, no plano, duas semirretas de mesma origem  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ , um Ângulo (ou Região Angular) de vértice  $O$  e lados  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ .

Figura 3.14: Regiões angulares no plano



Fonte: Autor.

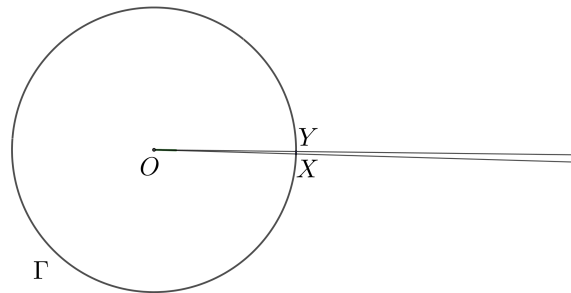


A partir da definição 7 e observando a figura 3.13, podemos perceber que o ângulo da esquerda é convexo e o da direita é não convexo. Um ângulo de lados  $\vec{OB}$  e  $\vec{OA}$  será denotado por  $\angle AOB$  ou  $\angle BOA$ . A letra indicativa do vértice deve sempre aparecer entre as outras duas e deixando claro se estamos nos referindo ao ângulo convexo ou ao não convexo.

Todo ângulo ocupa uma região do plano a qual podemos associar uma medida não negativa. Considere um círculo  $\Gamma$  (lê-se: gamma) de centro  $O$ , dividido em 360 arcos iguais e tomando pontos  $X$  e  $Y$  como os extremos de um desses arcos iguais. Dizemos que o ângulo  $\angle XOY$  tem medida de *1 grau*, denotado  $1^\circ$ , e escrevemos

$$X\hat{O}Y = 1^\circ$$

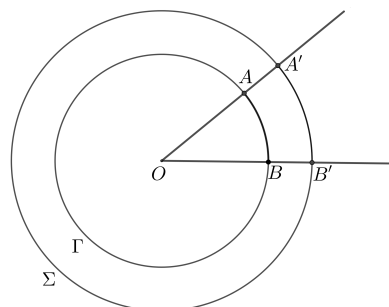
Figura 3.15: Grau como unidade de medida de ângulos



Fonte: Autor.

Consideremos dois círculos  $\Gamma$  e  $\Sigma$  (lê-se: sigma), de mesmo centro  $O$ , onde  $\Sigma$  possui raio maior, e dois pontos  $A, B \in \Gamma$  como na figura 3.15. Sejam  $A'$  e  $B'$  os pontos de intersecção das semirretas  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  com  $\Sigma$ . É fácil ver que os  $\angle AOB$  e  $\angle A'OB'$  possuem mesma abertura, logo, a medida de 1 grau vale para qualquer círculo, independentemente do tamanho do raio.

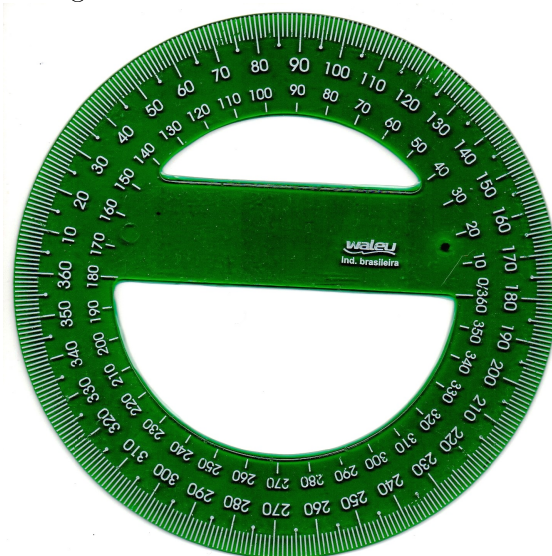
Figura 3.16: Boa definição de grau



Fonte: Autor.

Dentre as formas de se determinar a medida de um ângulo, podemos simplesmente utilizar uma ferramenta muito popular no meio escolar chamada de *transferidor*, a qual nos fornece uma medida bem aproximada do ângulo que se quer medir.

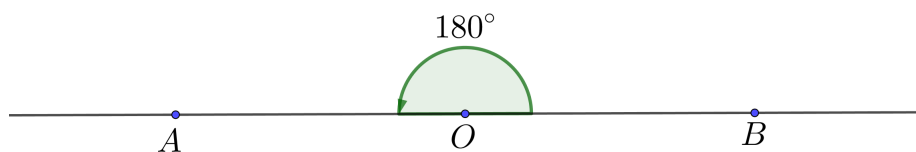
Figura 3.17: Transferidor de acrílico



Fonte: Autor.

O diâmetro divide o círculo em duas partes iguais. Dessa maneira, se considerarmos  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  semirretas opostas, então o ângulo  $\angle AOB$  possui medida de  $180^\circ$ , denominado ângulo *raso*.

Figura 3.18: Ângulo raso



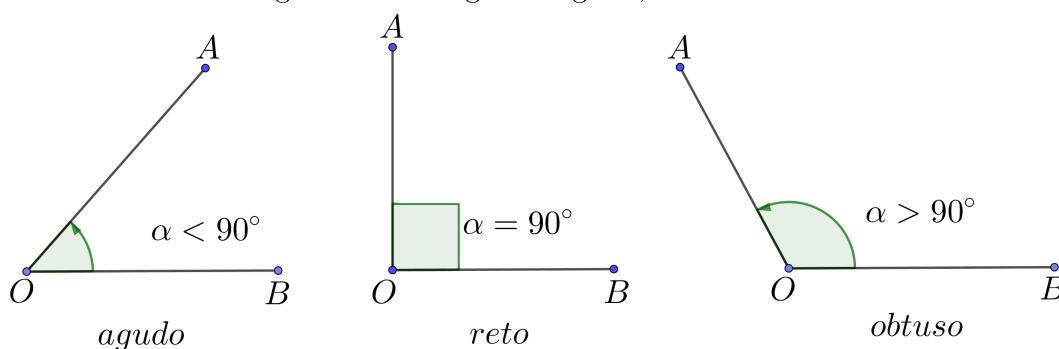
Fonte: Autor.

Como todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero, então um ângulo possui medida zero grau se, e somente se, ele é constituído por duas semirretas coincidentes e, neste caso, o chamamos de *ângulo nulo*.

Um ângulo com medida de  $90^\circ$  é chamado de ângulo *Reto*. Se a medida está compreendida entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  dizemos que o ângulo é *Agudo* e no caso em que a medida do ângulo está entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$  chamamos de ângulo *Obtuso*.

Quando duas retas concorrentes formam um ângulo cuja a medida é  $90^\circ$ , denominamos de retas *Perpendiculares*.

Figura 3.19: Ângulos: agudo, reto e obtuso

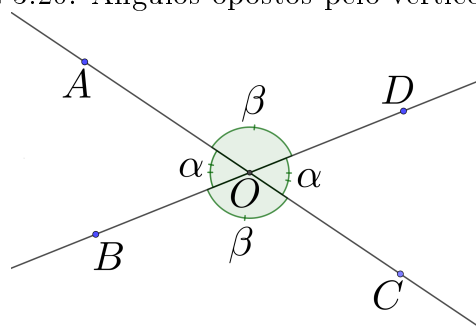


Fonte: Autor.

Dados dois ângulos com medidas  $\alpha$  e  $\beta$ . Se  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , dizemos que os ângulos são *Complementares*.

**Definição 9.** Dois ângulos  $\angle AOB$  e  $\angle COD$  (de mesmo vértice) são opostos pelo vértice (forma abreviada OPV) se seus lados forem semirretas opostas.

Figura 3.20: Ângulos opostos pelo vértice - OPV



Fonte: Autor.

Observe na figura 3.19 que os ângulos  $\angle AOB$  e  $\angle COD$  são opostos pelo vértice, e  $\angle AOD$  e  $\angle BOC$  também, pois  $\vec{OB}$  e  $\vec{OD}$  são semirretas opostas, bem como as semirretas  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$ .

**Proposição 2.** Dois ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida.

*Demonstração.* Observe na figura 3.19 que a soma das medidas dos ângulos  $\angle AOB$  e  $\angle AOD$  é igual a  $180^\circ$  pois as semirretas  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OD}$  são opostas. Mas a soma das medidas dos ângulos  $\angle AOD$  e  $\angle DOC$  também é  $180^\circ$  já que  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OC}$  também são semirretas opostas. Portanto,

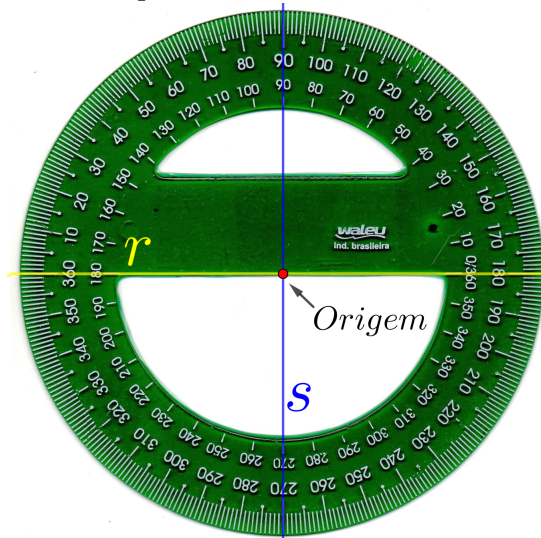
$$\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{AOD} = \widehat{DOC}.$$

□

### 3.2.1 Medindo ângulos com transferidor

Para medir um ângulo qualquer com o transferidor, devemos inicialmente centralizar o vértice do ângulo que se deseja medir com o centro do transferidor (origem) que é o ponto de intersecção da reta  $r$  que passa em  $0^\circ$  e em  $180^\circ$  com a reta  $s$ , perpendicular a  $r$ , que passa na medida  $90^\circ$  do transferidor, conforme a figura a seguir.

Figura 3.21: Transferidor.



Fonte: Autor.

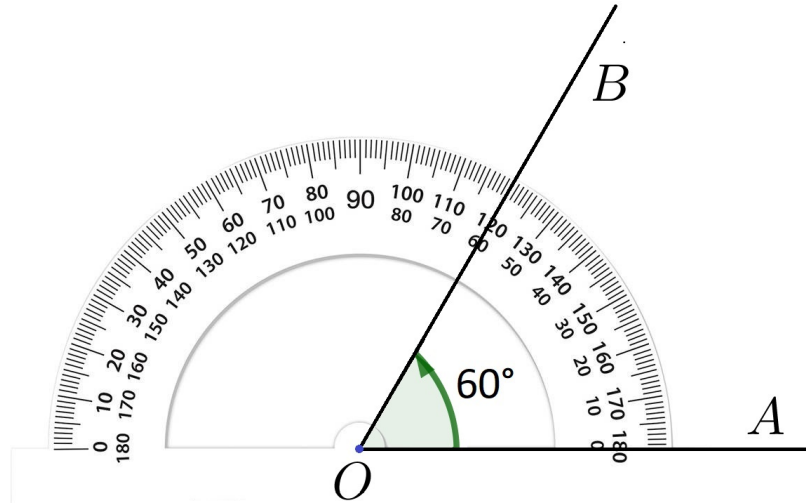
Posicionando a origem do transferidor com o vértice do ângulo, podemos rotacionar o instrumento de modo que facilite a verificação da medida do ângulo em graus. Por outro lado, suponha que os lados do ângulo passem nas medidas em graus  $\alpha$  e  $\beta$  do transferidor, com a origem centralizada no vértice do ângulo, basta fazermos  $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha| = \theta$ , onde  $\theta$  é a medida em graus do ângulo.

No caso em que um dos lados do ângulo que se deseja medir fique sobre a medida  $0^\circ$  e o outro lado sobre a medida  $\theta$  obviamente esse ângulo terá medida de  $\theta$  graus.

Por exemplo, considere o ângulo  $\angle AOB$ . Posicionando um transferidor centralizado no vértice  $O$  de maneira que a semirreta  $\overrightarrow{OB}$  passa na medida  $60^\circ$  e  $\overrightarrow{OA}$  passa em  $0^\circ$ , logo o ângulo que estamos a medir possui uma abertura de  $60^\circ$ , como descrito na figura 3.21.

É comum utilizarmos a medida do transferidor que está no sentido anti-horário, porém existe também a disposição das medidas no sentido horário.

Figura 3.22: Medindo ângulo com transferidor



Fonte: Autor.

Observe ainda que as medidas em graus dispostas no sentido horário, onde a semirreta  $\vec{OB}$  passa na medida  $120^\circ$  e  $\vec{OA}$  passa em  $180^\circ$ , não muda o resultado da nossa medição, já que

$$|120^\circ - 180^\circ| = |-60^\circ| = 60^\circ.$$

Para medirmos um ângulo não convexo, ou seja, um ângulo com medida superior a  $180^\circ$ , com um transferidor que possui apenas meia volta, basta medirmos o ângulo convexo e ver o que falta para  $360^\circ$  pois os ângulos cuja soma de suas medidas é  $360^\circ$  são chamados de ângulos *replementares*.

### 3.3 Noções sobre lugares geométricos

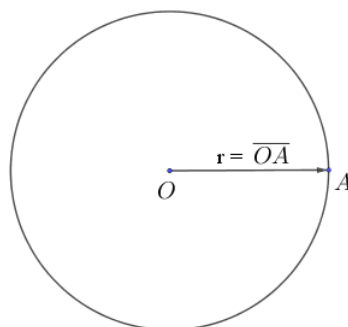
Para compreendermos a transmissão de sinal via satélite para as antenas parabólicas, precisamos da ideia de lugar geométrico. Iniciemos com sua definição.

**Definição 10.** *Dada uma propriedade  $P$  relativa a pontos do plano, o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade  $P$  é o subconjunto  $L$  do plano que satisfaz as duas condições abaixo:*

- I) *Todo ponto de  $L$  possui a propriedade  $P$ .*
- II) *Todo ponto do plano que possui a propriedade  $P$  pertence a  $L$ .*

Como exemplo, considere um número real positivo  $r$  e um ponto  $O$  do plano. O lugar geométrico dos pontos do plano que distam  $r$  do ponto  $O$  é chamado círculo de centro  $O$  e raio  $r$ .

Figura 3.23: Círculo de centro  $O$  e raio  $r$

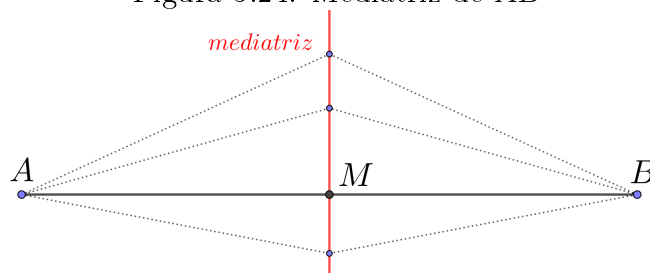


Fonte: Autor.

**Definição 11.** Sejam  $\overline{AB}$  um segmento de reta e  $M$  seu ponto médio. A mediatriz de  $\overline{AB}$  é a reta que passa por  $M$  e é perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$ .

Assim, podemos dizer que a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  é o lugar geométrico de todos os pontos do plano que equidistam de  $A$  e de  $B$ .

Figura 3.24: Mediatriz de  $\overline{AB}$



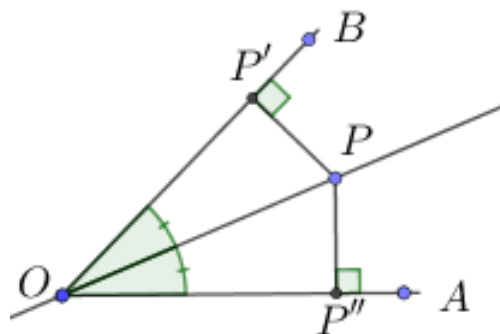
Fonte: Autor.

**Definição 12.** Dado um ângulo  $\angle AOB$ , chamamos de bissetriz do ângulo  $\angle AOB$  uma semirreta que divide o ângulo em dois ângulos de mesma medida.

**Proposição 3.** Dados um ângulo  $\angle AOB$  e  $P$  é um ponto da região angular  $\angle AOB$ . Então a distância de  $P$  a  $\overrightarrow{OA}$  é igual a distância de  $P$  a  $\overrightarrow{OB}$  se, e somente se,  $P$  pertence a bissetriz de  $\angle AOB$ .

A prova deste resultado poderá ser encontrada em [17], páginas 35 e 36.

Figura 3.25: Ponto  $P$  pertencente a Bissetriz de  $\angle AOB$



$$\overline{PP'} = \overline{PP''}$$

Fonte: Autor.

# 4 FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Neste capítulo, falaremos sobre as funções quadráticas e suas propriedades. Daremos enfoque a alguns conceitos básicos que estão ligados à propriedade de reflexão da parábola. Esse estudo se faz necessário para uma melhor compreensão da forma e do funcionamento das antenas parabólicas. Os assuntos aqui tratados, foram baseados nas referências [10], [17] [14], [24], [25].

## 4.1 Funções quadráticas

Para compreendermos qual a relação existente entre funções quadráticas e antenas parabólicas, precisamos, inicialmente, conhecer estas funções e suas propriedades. Começemos com a sua definição.

**Definição 13.** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se quadrática se existem números reais  $a, b$  e  $c$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

É fácil ver que os coeficientes  $a, b$  e  $c$  de uma função quadrática são unicamente determinados pelos valores que ela assume, ou seja, se  $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então  $a = a', b = b'$  e  $c = c'$ .

É possível identificarmos uma função quadrática com um trinômio do segundo grau, pois existe uma correspondência biunívoca entre trinômio e função quadrática.

Quando duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , então essas funções são iguais. Isto é o que conteúdo da proposição a seguir.

**Proposição 4.** *Sejam  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$  e  $R = (x_3, y_3)$  três pontos não colineares em  $\mathbb{R}^2$ , cujas abscissas são duas a duas distintas. Então existe uma única função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tal que  $f(x_1) = y_1$ ,  $f(x_2) = y_2$  e  $f(x_3) = y_3$ .*

*Demonstração.* Mostremos que existem, e são únicos, os coeficientes  $a, b$  e  $c$ , com  $a \neq 0$ , para os quais  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Para isto, precisamos resolver o seguinte sistema:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2$$



$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3.$$

Ao contrário do que normalmente ocorre, nossas incógnitas são  $a, b$  e  $c$ , e não  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ . Com isso, nossos coeficientes são  $x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2$  e,  $1, 1, 1$ . Observe que  $y_1, y_2$  e  $y_3$  não são todos nulos pois  $P, Q$  e  $R$  não são colineares. Logo o sistema não é homogêneo.

Fazendo uma matriz associada ao sistema, imediatamente anterior, é

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela Regra de Sarrus,

$$\det A = (x_3 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_1) \neq 0$$

pois os pontos  $x_1, x_2$  e  $x_3$  são dois a dois distintos. Pela Regra de Cramer o sistema possui uma única solução. Para  $f$  ser quadrática, precisamos mostrar que o número  $a \neq 0$ .

Vamos subtrair a primeira equação das outras duas, resultando em

$$a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

$$a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) = y_3 - y_1.$$

Por hipótese,  $x_1, x_2$  e  $x_3$  são dois a dois distintos, logo  $x_2 - x_1 \neq x_3 - x_1 \neq 0$ ,  $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$  e como  $x_3^2 - x_1^2 = (x_3 - x_1)(x_3 + x_1)$ , então podemos dividir a primeira equação por  $(x_2 - x_1)$  e a outra por  $(x_3 - x_1)$ , chegando nas seguintes equações

$$a(x_2 + x_1) + b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a(x_3 + x_1) + b = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Subtraindo membro a membro, obtemos

$$a(x_3 - x_2) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Logo

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2} \left[ \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right].$$

Mas  $a = 0$  se, e somente se, vale

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Olhando para os pontos  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$  e  $R = (x_3, y_3)$  em  $\mathbb{R}^2$ , a condição

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

implica que as retas  $\overleftrightarrow{PR}$  e  $\overleftrightarrow{PQ}$  têm a mesma inclinação, isto é, que os pontos  $P, Q, R$  são colineares. Mas isto é um absurdo pois  $P, Q$  e  $R$  são não colineares. Portanto  $a \neq 0$ , logo existe uma única função quadrática passando pelos pontos  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$  e  $R = (x_3, y_3)$ .  $\square$

Definiremos agora os zeros da função, isto é, os pontos onde a função  $f$  se anula.

**Definição 14.** Dizemos que um número real  $\alpha$  é um zero da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , se  $\alpha$  é raiz da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Segue então que  $f(\alpha) = 0$  se, e somente se,  $ax^2 + bx + c = 0$ . Assim se  $\alpha$  é um zero da função  $f$ , então podemos escrever  $f(x) = f(x) - f(\alpha)$ . Logo

$$f(x) = f(x) - f(\alpha) = a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha).$$

Como  $a \neq 0$ , então

$$f(x) = a(x - \alpha)\left(x + \alpha + \frac{b}{a}\right).$$

Fazendo  $-\beta = \alpha + \frac{b}{a}$ , chegamos na seguinte expressão

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta),$$

onde  $\beta$  é outro zero da função  $f$ .

A expressão  $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ , é denominada *forma fatorada da função quadrática*.

Nem sempre uma função quadrática  $f$  possui zeros reais, ou um trinômio possui raízes reais. Para determinarmos a existência, ou não, de zeros da função  $f$  procedemos como segue. Façamos

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right].$$

Perceba que

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2},$$

logo

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x$$

que são exatamente os dois primeiros termos da expressão dentro do colchete imediatamente anterior. Portanto

$$ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right].$$

Como  $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$ , obtemos

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right].$$

Essa expressão é chamada de *Forma Canônica*. A fórmula geral de resolução da equação do segundo grau é uma consequência da forma canônica e a partir dela é possível determinar se  $f$  possui, ou não, raízes reais. De fato, sendo  $a \neq 0$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \\ &\iff \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Observe que a igualdade  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  só tem sentido se  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ . Caso contrário, a equação (4.1) não admitirá solução real, tendo em vista que  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$  e  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ . Supondo que  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ , podemos extrair a raiz quadrada em ambos os lados da equação (4.1) e assim

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ &\iff x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Supondo  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tem duas raízes reais distintas

$$\alpha = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2a} \text{ e } \beta = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})}{2a},$$

com  $\alpha < \beta$ . Veja que  $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$  e  $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ . Logo

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{-b}{2a}$$

é a média aritmética das raízes. Observe ainda que, como  $a \neq 0$ , podemos escrever

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right].$$

Se  $f$  admite duas raízes reais distintas então, utilizando a expressão para a soma e o produto das raízes, obtemos a seguinte igualdade

$$f(x) = a [x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Quando  $\Delta = 0$ , tem-se que  $\alpha = \beta = \frac{-b}{2a}$  e  $f(x) = a(x - \alpha)^2$ .

**Proposição 5.** Dada a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , então:

1. Se  $a > 0$ ,  $f$  tem um ponto de mínimo em  $x = \frac{-b}{2a}$ , isto é,  $f(x) \geq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Se  $a < 0$ ,  $f$  tem um ponto de máximo em  $x = \frac{-b}{2a}$ , ou seja,  $f(x) \leq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $f(x_1) = f(x_2)$  se, e somente se,  $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$ .

*Demonstração.* Considere a função  $f$  na forma canônica, isto é,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right].$$

Multiplicando as duas parcelas dentro do colchete por  $a$ , obtemos

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right).$$

Veja que

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Então temos:

1. Se  $a > 0$ , tem-se que  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ . Assim

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) \geq -\left( \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Segue então que  $f(x) \geq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

2. De forma análoga, se  $a < 0$ , tem-se que  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ . Assim

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \leq -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo  $f(x) \leq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , com  $x_1 \neq x_2$ . Então a igualdade  $f(x) = f(x')$  vale se, e somente se

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Como  $x_1 \neq x_2$ , então

$$x_1 + \frac{b}{2a} = -\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right),$$

ou seja,

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} \iff \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}.$$

□

O item 3 da proposição anterior assegura que o gráfico da função quadrática é simétrico em relação a reta  $x = \frac{-b}{2a}$ , é o que veremos logo a seguir, mas inicialmente lembraremos a definição de gráfico de função.

Sejam  $X$  e  $Y$  dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . O produto cartesiano de  $X$  e  $Y$ , denotado por  $X \times Y$ , é o conjunto formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$ , tais que a primeira coordenada  $x \in X$  e a segunda coordenada  $y \in Y$ . Em notação temos

$$X \times Y = \{(x, y) \in X \times Y; x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

**Definição 15.** *Dados  $X$  e  $Y$  dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$  e uma função  $f : X \rightarrow Y$ , o Gráfico de  $f$  é o subconjunto  $G_f$  do produto cartesiano  $X \times Y$ , definido por*

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y \text{ e } y = f(x)\}.$$

O próximo resultado assegura que o gráfico da função quadrática é uma parábola.

**Teorema 1.** *O Gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é uma parábola com os seguintes elementos.*

1. Foco  $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}\right)$ ;
2. Vértice  $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ ;

3. Reta diretriz  $d$  dada pela equação  $y = -\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}$ ;
4. O Eixo de simetria é a reta de equação  $x = -\frac{b}{2a}$ .

*Demonstração.* Sejam  $x_0, y_0, k \in \mathbb{R}$ , com  $y_0 \neq k$  e  $\varphi$  a parábola de foco  $F = (x_0, y_0)$  e reta diretriz  $d$  de equação  $y = k$ . Pela definição de parábola, o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , é a parábola  $\varphi$ , se e somente se, para todo ponto  $P = (x, y) \in G_f$  tem-se que

$$|PF| = |Pd|.$$

Pela definição de gráfico, tem-se que

$$P = (x, y) \in G_f \iff y = ax^2 + bx + c.$$

Denotemos por  $Q = (x, k)$  o pé da perpendicular à reta  $d$  baixada do ponto  $P$ . Pela fórmula de cálculo da distância entre dois pontos e pela definição de distância entre ponto e reta garantimos, respectivamente, que

$$|PF| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad \text{e} \quad |PQ| = \sqrt{(x - x)^2 + (y - k)^2} = \sqrt{(y - k)^2}.$$

Segue então que

$$|PF| = |PQ| \iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(y - k)^2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &\iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(y - k)^2} \\ &\iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (y - k)^2 \\ &\iff y = \frac{1}{2(y_0 - k)}x^2 - \frac{x_0}{y_0 - k}x + \frac{x_0^2 + y_0^2 - k^2}{2(y_0 - k)}. \end{aligned}$$

No último termo do segundo membro da equação imediatamente anterior, façamos  $y_0^2 - k^2 = (y_0 - k)(y_0 + k)$  e comparando as equações

$$y = ax^2 + bx + c \iff y = \frac{1}{2(y_0 - k)}x^2 - \frac{x_0}{y_0 - k}x + \frac{x_0^2}{2(y_0 - k)} + \frac{1}{2}(y_0 + k),$$

obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{1}{2(y_0 - k)} = a, \quad -\frac{x_0}{y_0 - k} = b, \quad \frac{x_0^2}{2(y_0 - k)} + \frac{1}{2}(y_0 + k) = c.$$

Dividindo membro a membro as duas primeiras igualdades, segue que

$$\frac{\frac{1}{\frac{2(y_0 - k)}{x_0}}}{\frac{1}{y_0 - k}} = \frac{a}{b} \iff x_0 = -\frac{b}{2a}. \quad (4.3)$$

Para a terceira equação, veja que

$$\frac{x_0^2}{2(y_0 - k)} + \frac{1}{2}(y_0 + k) = c \iff y_0 + k = 2c - \frac{x_0^2}{(y_0 - k)}.$$

Pela primeira equação do sistema, tem-se também que  $y_0 - k = \frac{1}{2a}$ . Então substituindo este valor no denominador da fração no segundo membro da equação imediatamente anterior chegamos na seguinte igualdade:

$$y_0 + k = 2c - 2ax_0^2.$$

Pela equação (4.3),  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , então

$$y_0 + k = 2c - 2a\frac{b^2}{4a^2} = 2c - \frac{b^2}{2a} = -\frac{b^2 - 4ac}{2a} = -\frac{\Delta}{2a}.$$

Das igualdades

$$y_0 - k = \frac{1}{2a}, \quad y_0 + k = -\frac{\Delta}{2a},$$

obtemos

$$y_0 = \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a} \text{ e } k = -\frac{1}{4a} + \frac{\Delta}{4a}.$$

Segue então que o gráfico de  $f$  é a parábola de foco  $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}\right)$  e reta diretriz  $d = k = -\frac{1}{4a} + \frac{\Delta}{4a}$ . Pela proposição 6, o eixo de simetria é a reta  $x = -\frac{b}{2a}$  e para determinarmos as coordenadas do vértice  $V = (x_v, y_v)$ , veja que este ponto da parábola é a intersecção da reta  $x = -\frac{b}{2a}$  com o gráfico de  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Então  $x_v = -\frac{b}{2a}$  e sua ordenada  $y_v$  é

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{\Delta}{4a}.$$

□

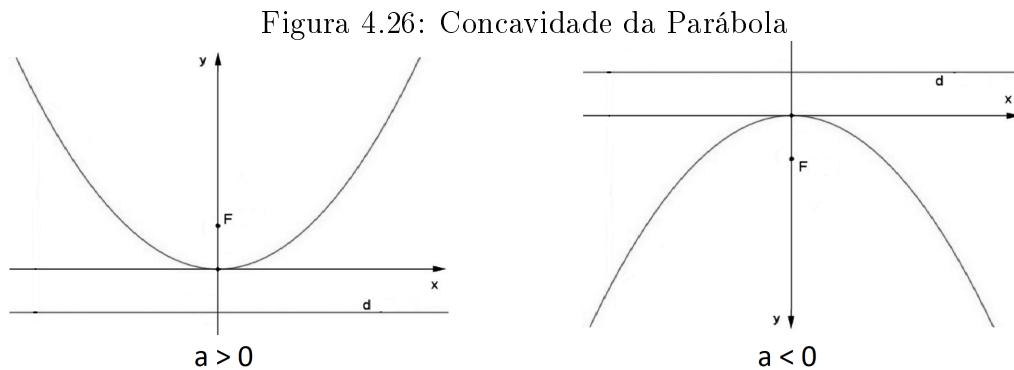
Assim, Pelo teorema 1, o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , é uma parábola. Observe ainda que, pela proposição 6, se  $a > 0$  a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tem um ponto de mínimo em  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , isto é,

$$f(x) \geq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo a parábola tem a concavidade para cima e se  $a < 0$  a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tem um ponto de máximo em  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , ou seja,

$$f(x) \leq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  e, neste caso, a parábola tem a concavidade para baixo.



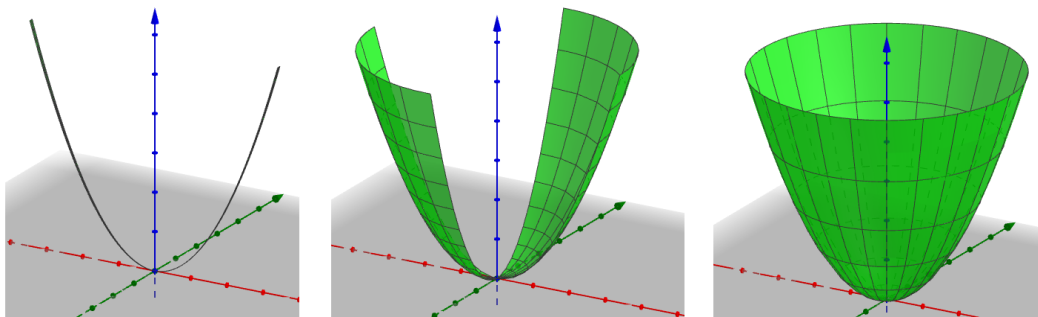
Fonte: Autor.

A seguir falaremos sobre uma propriedade da parábola que é de fundamental importância para entendermos o funcionamento das antenas parabólicas, cujo assunto será explanado no capítulo 5.

## 4.2 Propriedade de reflexão da parábola

Imaginemos uma parábola girando em torno do seu eixo de simetria, tal movimento, gera uma superfície chamada *paraboloide de revolução*, conhecida também como *superfície parabólica*.

Figura 4.27: Obtenção do paraboloide por rotação



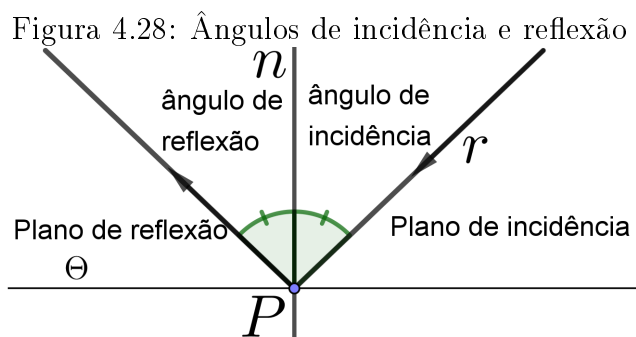
Fonte: Autor.



Essa superfície possui várias aplicações interessantes, decorrentes de uma propriedade geométrica da parábola. Todo o estudo feito anteriormente nos permitirá compreender está propriedade que é também conhecida como propriedade de reflexão da parábola.

Muitos objetos possuem formato parabólico devido a propriedade de reflexão da parábola, como os holofotes, faróis de automóveis, lanternas comuns de mão, antenas parabólicas e entre outros objetos.

Neste trabalho, daremos destaque as antenas parabólicas usadas na rádio-astronomia, bem como no nosso dia-a-dia nos aparelhos de televisão. Para compreendermos o formato e o funcionamento das antenas parabólicas, nesta seção estudaremos a propriedade de reflexão da parábola começando com as *leis da reflexão* da Física.



Fonte: Autor.

Considere um ponto  $P$  pertencente ao plano  $\Theta$  no qual um raio de luz incide em  $P$  e  $n$  é a reta normal a  $\Theta$  (reta perpendicular ao plano em  $P$ ): o ângulo formado por  $r$  e  $n$  é denominado *ângulo de incidência* e o plano que o contém é chamado de *plano de incidência*. O ângulo formado pelo raio refletido e  $n$  é o *ângulo de reflexão* e o plano que contém o é chamado de *plano de reflexão*, como mostra a figura 4.27.

**Primeira lei da reflexão:** o plano de incidência coincide com o plano de reflexão.

**Segunda lei da reflexão:** o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

O que acontece no funcionamento das antenas parabólicas é que: os raios que atingem a superfície da antena paralelos ao eixo de rotação dela são refletidos para o foco. Para provarmos essa propriedade refletora usando matemática, será necessário a ideia de reta tangente a parábola em um ponto  $P$ .

Pela definição de reta tangente à parábola, sabemos que, se  $\varphi$  é uma parábola e  $r$  é a reta tangente em  $P$ , então  $P$  é o único ponto em comum entre a reta  $r$  e a curva  $\varphi$  e todos os demais pontos de  $r$  estão na região exterior a  $\varphi$ . Assim se  $\varphi$  é o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , tem-se que:

1. Se  $a > 0$ , a parábola tem a concavidade para cima, assim todos os pontos  $Q$  de  $r$  com  $Q \neq P$ , pertencem a região exterior a parábola, logo estão abaixo da parábola. Isto significa que, se  $Q = (x, y)$ , então

$$f(x) > y.$$

2. Similarmente, se  $a < 0$ , a parábola tem a concavidade para baixo, o que acarreta

$$f(x) < y.$$

Lembrando que a equação da reta  $r$  em um ponto  $P = (x_0, y_0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0), \tag{4.4}$$

onde  $m$  é o coeficiente angular de  $r$ , apresentaremos o próximo resultado sobre retas tangentes ao gráfico da função quadrática.

**Teorema 2.** *Se a parábola  $\varphi$  é o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , sua tangente no ponto  $P = (x_0, y_0)$ , onde  $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ , é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a  $2ax_0 + b$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $a > 0$  e considere  $\varphi$  a parábola que é o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e  $P = (x_0, y_0)$  um ponto de  $\varphi$ . Seja  $r$  a reta que contém o ponto  $P = (x_0, y_0)$  e tem por equação

$$y = y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0).$$

Mostremos que todos pontos  $Q = (x, y)$  da parábola onde  $x \neq x_0$  e  $y = ax^2 + bx + c$ , estão acima da reta  $r$ , ou seja, acima dos pontos da forma

$$(x, y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0))$$

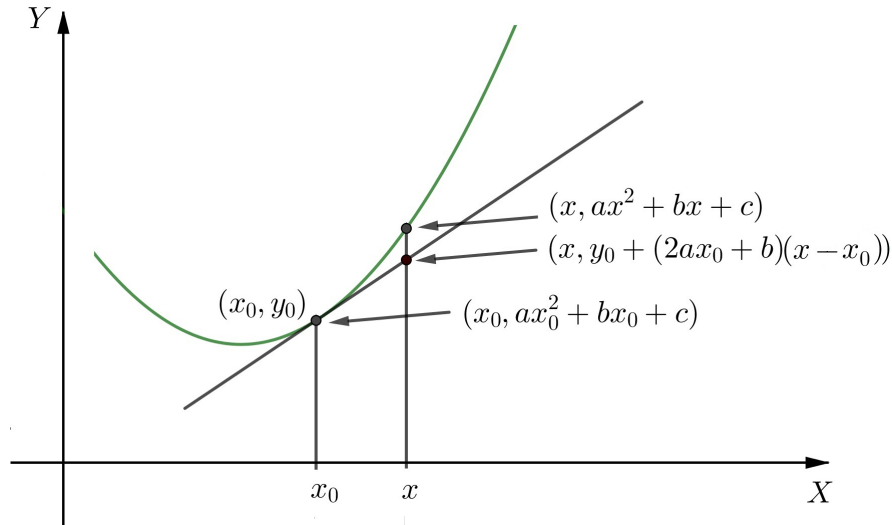
pertencente a reta  $r$ . Como  $f(x_0) = y_0$ , então basta verificar que

$$f(x) > y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  com  $x \neq x_0$ .

Como  $a > 0$  e  $x \neq x_0$ , isso implica que

Figura 4.29: Reta tangente à parábola



Fonte: Autor.

$$\begin{aligned}
 f(x) - [y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)] &= f(x) - [ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0)] = \\
 &= f(x) - ax_0^2 - \cancel{bx_0} - c - 2ax_0x + 2ax_0^2 - bx + \cancel{bx_0} = \\
 &= f(x) + ax_0^2 - c - 2ax_0x - bx = \\
 &= (ax^2 + \cancel{bx} + c) + ax_0^2 - c - 2ax_0x - \cancel{bx} = \\
 &= ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 = \\
 &= a(x - x_0)^2 > 0.
 \end{aligned}$$

Logo, o único ponto que é comum a parábola e a reta  $r$  de inclinação  $2ax_0 + b$  é o ponto  $P = (x_0, y_0)$  pois todos os pontos do gráfico de  $f$  estão acima da reta  $r$  o que equivale a dizer que a reta  $r$  está contida na região exterior a parábola. Portanto a reta  $r$  é a reta tangente à parábola neste ponto. Similarmente, se  $a < 0$  basta mostrar que

$$f(x) < y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  com  $x \neq x_0$ . □

Sabemos que a parábola, gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , tem uma tangente no ponto  $P = (x, y)$ , cuja inclinação é  $2ax + b$ . Para determinarmos as retas que são perpendiculares a reta tangente, precisamos do lema a seguir da Geometria Analítica cuja prova poderá ser encontrada em [14].

**Lema 3.** As retas  $y = ax + b$  e  $y = a'x + b'$ , com  $a \neq 0$  e  $a' \neq 0$ , são perpendiculares se,

e somente se,  $a' = -\frac{1}{a}$ .

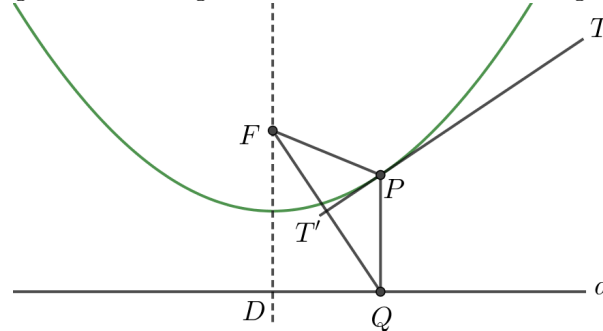
Pelo lema anterior, se  $m = 2ax + b \neq 0$ , então todas as retas com coeficiente angular  $m' = -\frac{1}{2ax + b}$  são perpendiculares a reta  $r$  que é tangente ao gráfico de  $f(x) = ax^2 + bx + c$  no ponto  $P = (x, y)$ . Se  $2ax + b = 0$ , então  $x = -\frac{b}{2a}$  e o ponto  $P = (x, y)$  é o vértice da parábola, logo a reta  $r$ , tangente à parábola em  $P$ , é paralela a reta diretriz e é perpendicular ao eixo de simetria da parábola cuja equação é  $x = -\frac{b}{2a}$  e, neste caso, qualquer reta perpendicular à  $r$  é paralela ao eixo de simetria da parábola.

**Lema 4.** *Sejam  $\varphi$  a parábola que é o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $P = (x, y) \in \varphi$  e  $Q$  o pé da perpendicular à reta diretriz  $d$  baixada do ponto  $P$ . Então a reta que une o foco  $F$  de  $\varphi$  ao ponto  $Q$  é perpendicular a reta tangente a  $\varphi$  no ponto  $P$ .*

*Demonstração.* Inicialmente observe que, se  $P = (x, y)$  é o vértice da parábola, então  $2ax + b = 0$ , e a reta que une o foco  $F$  ao ponto  $Q$ , é o eixo de simetria da parábola, logo  $T$  é perpendicular a reta tangente no ponto  $P$ .

Supondo que  $P$  não é o vértice da parábola, então  $2ax + b \neq 0$ . Vejamos figura 4.29.

Figura 4.30: Segmento perpendicular a tangente



Fonte: Autor

Vimos anteriormente que as coordenadas do foco  $F$  e do ponto  $Q$  são

$$F = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a} \right) \text{ e } Q = \left( x, -\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a} \right),$$

onde  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Logo a inclinação da reta que une os pontos  $F$  e  $Q$  é igual a

$$\frac{\left( -\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a} \right) - \left( \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a} \right)}{\left( x + \frac{b}{2a} \right)} = \frac{-1}{2a \left( x + \frac{b}{2a} \right)} = -\frac{1}{2ax + b}.$$

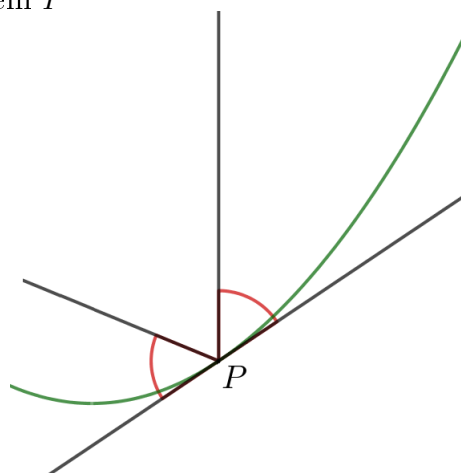
De acordo com o lema imediatamente anterior, tal reta é perpendicular a reta tangente ao gráfico de  $F$  no ponto  $P$ . □

O próximo resultado é de fundamental importância para mostrarmos que, a partir da geometria da parábola, podemos assegurar que esta curva atende as leis de reflexão da Física.

**Lema 5.** *A reta tangente à parábola num ponto  $P$  faz ângulos iguais com a reta que passa pelo ponto  $P$ , paralela ao eixo de simetria, e com a reta que une o foco  $F$  ao ponto  $P$ .*

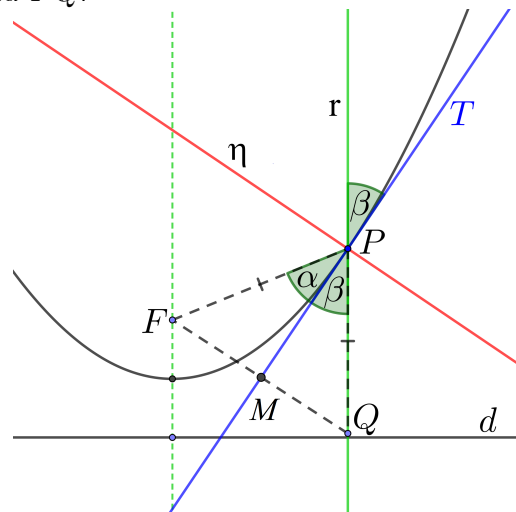
*Demonstração.* Sejam  $\varphi$  a parábola de foco  $F$ , diretriz  $d$  e  $P \in \varphi$ . Denotemos por  $Q$  o pé da perpendicular a reta diretriz  $d$  baixada de  $P$ . Observe que a reta que une os pontos  $P$  e  $Q$ , sendo perpendicular à reta  $d$ , é paralela ao eixo de simetria da parábola. Da definição de parábola,  $|FP| = |PQ|$ , logo o triângulo  $FPQ$  é isósceles conforme figura 4.31.

Figura 4.31: Tangente à parábola em  $P$



Fonte: Autor.

Figura 4.32: Ângulos entre a tangente  $T$  e a reta  $\overleftrightarrow{PQ}$ .



Fonte: Autor.

Pelo lema 4 a reta que une o ponto  $F$  ao ponto  $Q$  é perpendicular a reta tangente  $T$  à parábola no ponto  $P$ . Assim, o segmento de reta  $\overline{PM}$  é a altura do triângulo  $FPQ$ . Sendo  $FPQ$  isósceles,  $M$  é o ponto médio do segmento  $\overline{FQ}$  e o segmento  $\overline{PM}$  é bissetriz do ângulo  $\angle FPQ$ . Segue então que os ângulos  $\angle FPM$  e  $\angle MPQ$  possuem mesma medida.  $\square$

Agora podemos mostrar o principal resultado deste capítulo, o qual justifica o uso das superfícies parabólicas em objetos utilizados no dia-a-dia.

**Teorema 6.** *Sejam  $S$  um parabolóide e  $r$  um raio paralelo ao eixo de simetria desta superfície que incide sobre  $S$  no ponto  $P$ . Então o raio  $r$  refletido converge para o foco.*

*Demonstração.* Sejam  $S$  um parabolóide e  $\pi$  um plano que contém o eixo de simetria do parabolóide. A interseção de  $S$  e  $\pi$  é a parábola  $\varphi$  que é a curva geratriz de  $S$ , logo  $\varphi$  possui o mesmo eixo de simetria que o parabolóide. Se  $P$  é um ponto de  $\varphi$  e  $r$  é um raio paralelo ao eixo de simetria de  $\varphi$  passando em  $P$ , o qual pode ser pensado como uma

reta paralela ao eixo de simetria de  $\varphi$  passando pelo ponto  $P$ , então a reta tangente  $T$ , em  $P$ , e  $r$  são retas concorrentes em  $P$ , formando ângulos opostos pelo vértice  $P$ , logo possuem medidas iguais a qual denotamos por  $\beta$  como mostra a figura 4.31. Se  $\alpha$  é a medida do ângulo formado pela tangente  $T$  e a reta que une o foco  $F$  ao ponto  $P$ , pelo lema imediatamente anterior,  $T$  faz ângulos iguais com  $r$  e com a reta que une o foco  $F$  ao ponto  $P$ , logo  $\alpha = \beta$ .

Vejam agora que, o ângulo entre a reta normal  $\eta$  em  $P$ , e a reta  $r$ , é o ângulo de incidência e é o complementar de  $\beta$ . Assim  $90^\circ - \beta = \theta$  e o ângulo de reflexão é aquele formado pela reta normal  $r$  e pelo raio refletido.

Se  $S$  atende as leis de reflexão da Física, o plano de incidência coincide com o plano de reflexão, logo o raio de incidência e o de reflexão estão em um mesmo plano. Além disso os ângulos de incidência e reflexão são iguais. Como o ângulo entre a reta tangente  $T$  e a reta que une o foco ao ponto  $P$  também mede  $\beta$ , ele é o complementar do ângulo de reflexão. Assim o raio refletido é a reta que une os pontos  $F$  e  $P$ , logo o raio refletido converge para o foco, isto é, o raio refletido é a reta  $\overleftrightarrow{FP}$  conforme figura 4.31.

□

As antenas parabólicas fabricadas com material cuja superfície é perfeitamente refletora são instaladas nas residências ajustadas a posição do satélite cuja distância é tão grande que os sinais emitidos por ele, isto é os raios de incidência, seguem trajetórias praticamente paralelas ao eixo da superfície parabólica. E de acordo com o *teorema 6*, ao atingirem a superfície da antena parabólica, são refletidos para o foco.

# 5 FUNCIONAMENTO E INSTALAÇÃO DAS ANTENAS PARABÓLICAS

Como foi definido no início desse trabalho, temos como propósito relacionar a matemática com as antenas parabólicas. Já apresentamos o porquê do seu formato ser um parabolóide, agora veremos como os conhecimentos matemáticos desenvolvidos nesse trabalho se relacionam na função e instalação desses equipamentos tão populares nos dias atuais.

Inicialmente falaremos sobre os satélites responsáveis pelos sinais de transmissão, usando como base as referências [1], [7], [11], [15], [18], [20] e [21].

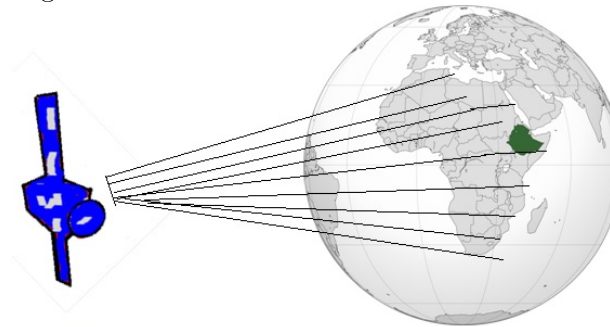
## 5.1 A transmissão do sinal de telecomunicação

Um satélite pode ser natural ou artificial. Os satélites naturais são corpos celestes que gravitam ao redor de outro corpo celeste de maior massa, tamanho e força gravitacional, como exemplo temos a lua como satélite natural da Terra, enquanto que os satélites artificiais são estruturas construídas pelos seres humanos e que costumam estar em órbita dos planetas.

Existem diversos tipos de satélites artificiais: os de observação do planeta Terra, para exploração do universo, uso militar, meteorológico, navegação, entre outros, mas interessados nos satélites de comunicação usados para transmitir a programação de televisão.

A funcionalidade destes satélites consiste em receber e enviar informações para a Terra. As estações de transmissão de TV enviam informações para os mesmos através de poderosas antenas parabólicas especializadas, chamadas parabólicas de satélite. Elas enviam estas informações através de ondas de rádio e atingem grandes distâncias. As parabólicas de satélite variam no seu tamanho e curvatura do parabolóide. As diferenças influenciam na capacidade de receber ou enviar informações para os satélites.

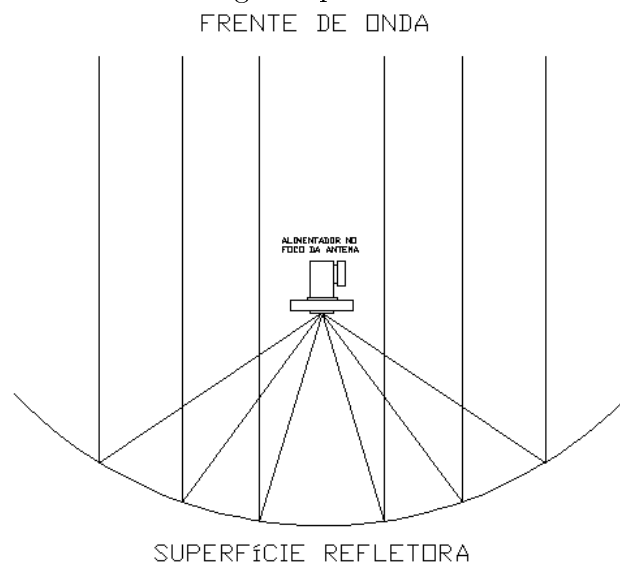
Figura 5.33: Área de cobertura de um satélite



Fonte: [7].

Tendo em vista que estes satélites possuem diferentes potências de transmissão e o sinal enviado por eles não é o mesmo para todas as regiões, a parabólica de satélite da residência do telespectador também varia em tamanho e forma para receber a transmissão do sinal enviado do satélite para o qual ela está apontada. Estes sinais chegam praticamente em feixes de linhas paralelas ao eixo de simetria da superfície da antena parabólica. Ao atingirem a superfície da antena, devido ao seu formato parabólico, estas linhas (sinais de rádio) convergem para o foco da superfície parabólica. No foco do equipamento, existe um LNBF *Low Noise Block Downconverter Feeder* que é um conversor de sinais de satélite, ele é quem faz a comunicação entre o satélite e o receptor que a antena está ligada. Ele também é responsável pela troca de polarização de vertical para horizontal. Fazendo um filtro dos sinais e enviando para o receptor que transforma o sinal recebido em som e vídeo que são exibidos nas TVs.

Figura 5.34: Sinais convergindo para o foco da antena parabólica

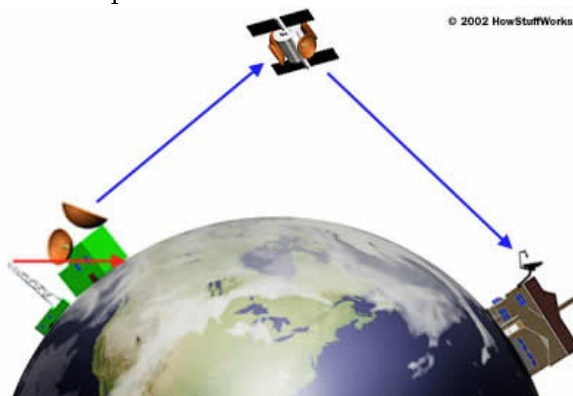


Fonte: [21].



Vale ressaltar que os satélites usados para transmissão do sinal de TV estão em órbita geossíncrona, ou seja, seu movimento de rotação é sincronizado com o movimento de rotação da Terra e encontram-se à 35.786 km acima do nível do mar, logo tal órbita é, em particular, geoestacionária, isto significa que, em relação a Terra, o satélite parece que está parado no espaço. Este fato permite que o apontamento da antena parabólica para o satélite seja feito apenas no momento da instalação.

Figura 5.35: Esquema de transmissão de sinais via satélite



Fonte: [18]

De acordo com [20], o Star One C2, lançado em abril de 2008, faz parte da terceira geração de satélites Embratel Star One (denominada série C). Esses novos satélites garantem a continuidade dos serviços de telefonia, televisão, rádio, transmissão de dados e internet no Brasil e países da América Latina. Este satélite ocupa a posição orbital de  $70,0^{\circ}\text{W}$  ( $70^{\circ}$  a Oeste, a partir do Meridiano de Greenwich) que é de grande importância para o mercado de Broadcasters (Radiodifusores) no Brasil pois nessa posição, considerada *hot position*, por transmitir os sinais das maiores emissoras de televisão do país e possuir um parque de aproximadamente 16 milhões de antenas parabólicas apontadas.

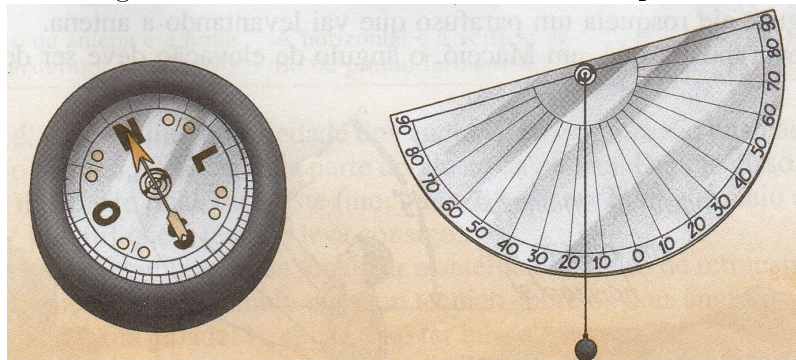
Para mais informações sobre esse satélite, bem como outras gerações de satélites brasileiros que se encontram ativos ou em órbita cemitério, consulte [1] e [20].

## 5.2 A instalação da antena parabólica

Esta seção foi baseada em [6], [13] e [16].

Para a instalação de uma antena apontada para o satélite Star One C2 o técnico faz uso de dois instrumentos: a bússola e o transferidor. O transferidor utilizado pelo técnico responsável pela instalação é diferenciado: na origem dele tem um fio de prumo para indicar a vertical e a numeração dos graus inicia-se no meio, com  $0^{\circ}$  onde no transferidor comum é  $90^{\circ}$ , indo até  $90^{\circ}$  para suas extremidades. Conforme a figura 5.36 à seguir .

Figura 5.36: Bússola e transferidor com prumo

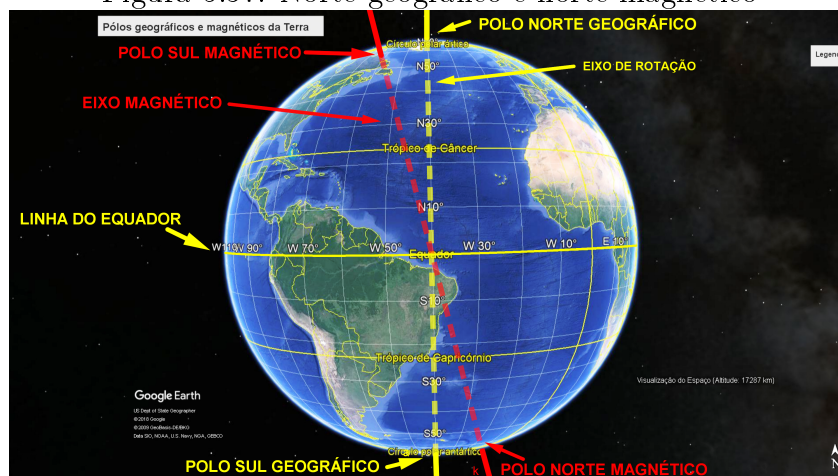


Fonte: [13].

Como não podemos ver da Terra o satélite que se deseja apontar a antena parabólica de TV, a bússola serve para auxiliar o técnico na localização, na orientação espacial, para fazer o apontamento, pois ela é um instrumento que aponta para os polos magnéticos da Terra. Antigamente pensava-se que o norte geográfico e o norte magnético eram um só. Em 1831, James Ross, explorador inglês, verificou que não eram iguais, pois ao chegar no Ártico sua bússola apontava o norte no chão, ou seja, o norte magnético (a força de atração era vertical, então a única maneira para a agulha não se movimentar era colocando a bússola na vertical).

O norte geográfico é determinado pelo movimento de rotação da Terra, já o norte magnético é gerado pelo movimento do metal fundido no núcleo externo em volta do núcleo metálico sólido da Terra. Portanto, os dois nortes representam fenômenos geofísicos distintos. Usando essas ideias, os chineses criaram a bússola que foi muito usada em grandes navegações pelos europeus.

Figura 5.37: Norte geográfico e norte magnético



Fonte: Adaptado em [9].

Uma bússola possui uma agulha imantada, como se fosse um ímã, assim como o planeta Terra. Todo ímã possui dois polos, um é o polo norte e o outro polo sul, sendo que estes polos opostos se atraem. Por isso, o polo norte magnético da bússola (ponteiro pintado) aponta para o polo sul magnético do planeta que fica próximo do polo norte geográfico da Terra. O ângulo entre o polo norte geográfico e o magnético reflete a declinação magnética do lugar e varia geralmente de 20 a 30 graus. Há variações no campo magnético ao longo do tempo, atualmente em São Paulo a diferença entre os dois nortes é de 23 graus.

Os técnicos costumavam instalar antenas usando, além da bússola e do transferidor, uma tabela conforme a figura 5.38, que servia para apontar para o satélite Brasilsat A2, também conhecido como Brasilsat II, que fornece as coordenadas dependendo da localidade onde o técnico se encontrava.

Figura 5.38: Coordenadas para localização do Brasilsat II

COORDENADAS PARA LOCALIZAÇÃO DO BRASILSAT II		
CIDADE	INDICAÇÃO NA BÚSSOLA	ÂNGULO DE ELEVAÇÃO
Maceió	53,2° oeste	49°
Macapá	74,4° oeste	68°
Manaus	63,7° oeste	78°
Salvador	47,7° oeste	50°
Teresina	60,7° oeste	57°

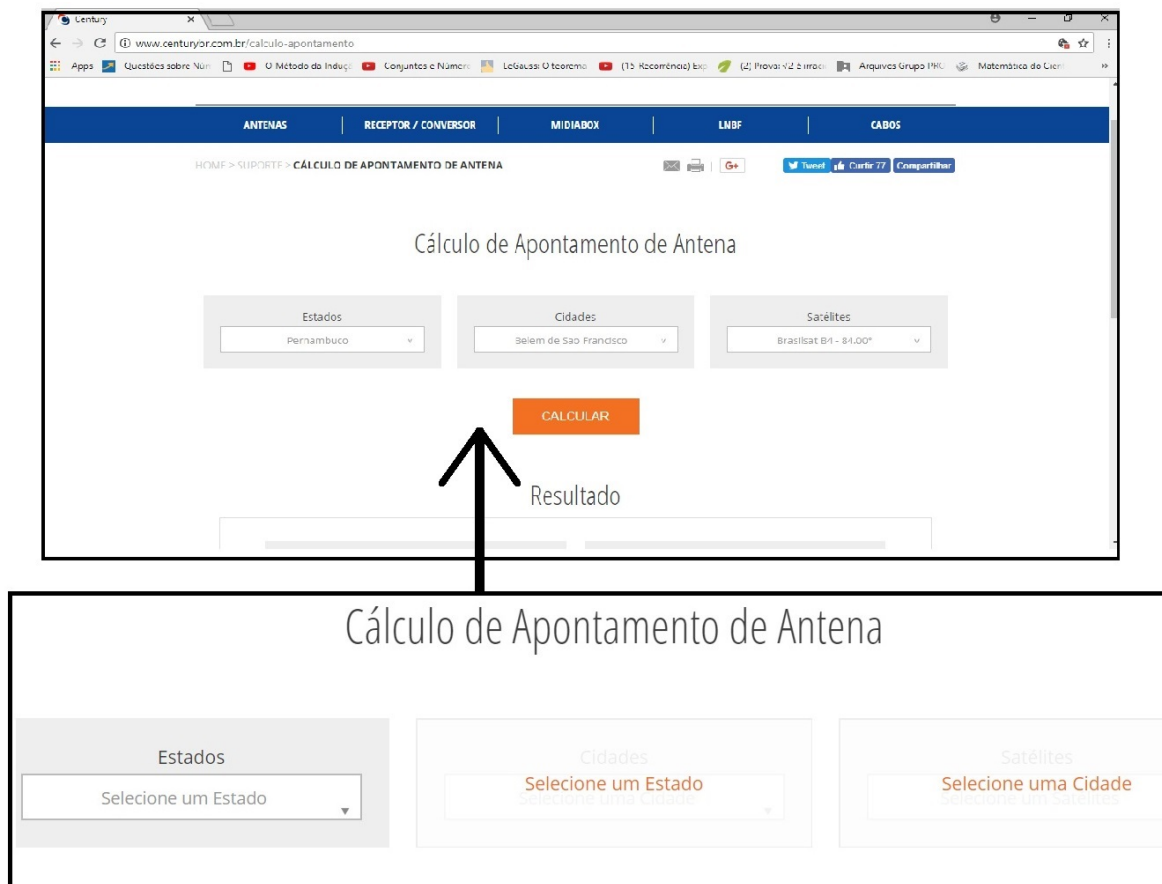
Fonte: [13].

Hoje em dia, o Brasilsat II já está na órbita cemitério, e seu substituto atual é o Star One C2.

A evolução da tecnologia tem facilitado o trabalho dos técnicos de instalação desses equipamentos. Eles podem, através da internet, acessar sites específicos de empresas, como por exemplo a Century, para encontrar o *azimute* que é basicamente uma medida de direção horizontal ao plano onde se encontra o técnico, definida em graus, marcada no sentido horário tendo o zero grau no norte, ou seja, varia de 0° a 360°, além da elevação necessária para a antena apontar para o satélite em que se quer receber o sinal, como mostra a figura 5.39.

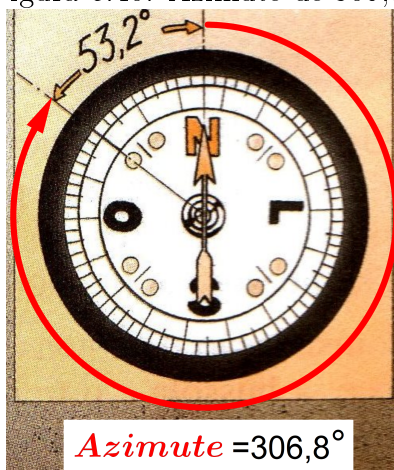
O **azimute** é o ângulo medido na bússola, no sentido horário, considerando o norte como 0°. Por exemplo, se um técnico deseja girar 53,2° a oeste, seu azimute corresponde a 306,8° ( $360° - 53,2°$ ) no sentido horário. Veja a figura 5.40.

Figura 5.39: Cálculo de apontamento no web site da Century



Fonte: Autor.

Figura 5.40: Azimute de 306,8°



Fonte: [13] alterado pelo autor.

Se um técnico está instalando uma antena de TV em Maceió, fazendo uso do site da Century e da bússola, ele colocará a antena com o eixo da superfície de revolução na horizontal, isto é, a reta que passa pelo foco e no vértice da superfície parabólica ficará

na posição horizontal.

Como podemos ver na figura 5.41, obtemos um azimute de  $302,9^\circ$  para Maceió.

Figura 5.41: Cálculo de apontamento para Maceió pelo site da Century.

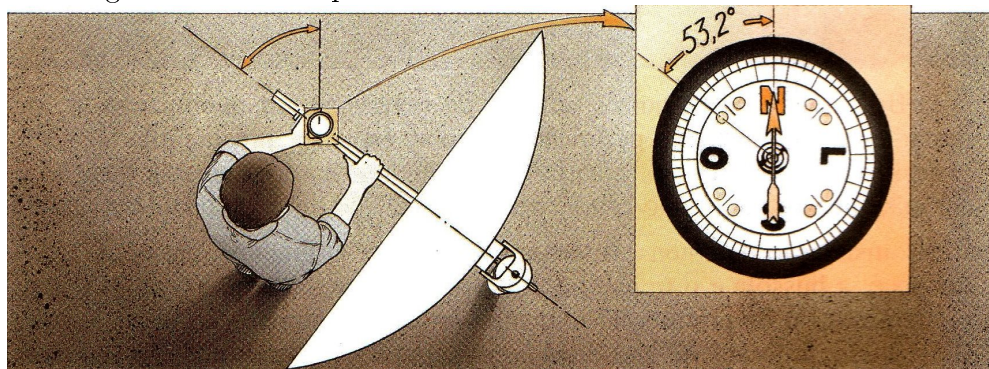


Fonte: Autor.

Obviamente, se a antena está direcionada para  $0^\circ$  ao norte, basta movimentarmos  $57,1^\circ$  a oeste, pois usando o ângulo replementar, fica mais fácil de posicionar a antena, ao invés de  $302,9^\circ$  para o leste.

Com a antena apontada horizontalmente, bússola indicando  $0^\circ$  (zero grau) para o norte, fazendo movimento de rotação na horizontal, é feito o apontamento da antena na direção de  $57,1^\circ$  no sentido oeste, fazendo de forma semelhante a figura 5.42.

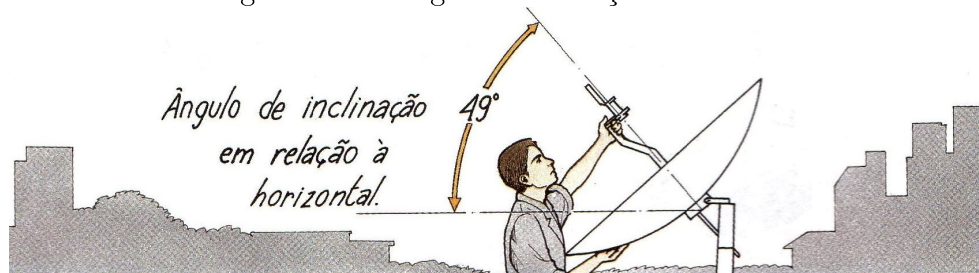
Figura 5.42: Exemplos de direcionamento horizontal da antena



Fonte: [13].

Feito o direcionamento horizontal da antena, o técnico aperta os parafusos para que o equipamento não saia da posição horizontal que está apontando e começa a rosquear uma outra parte da antena que faz levantar verticalmente a posição para à qual está a apontar. De acordo com as informações obtidas no site da Century, figura 5.40, o ângulo de elevação em Maceió deve ser de aproximadamente  $48,8^\circ$  em relação a horizontal, ou seja, aproximadamente  $49^\circ$ .

Figura 5.43: Ângulo de elevação da antena

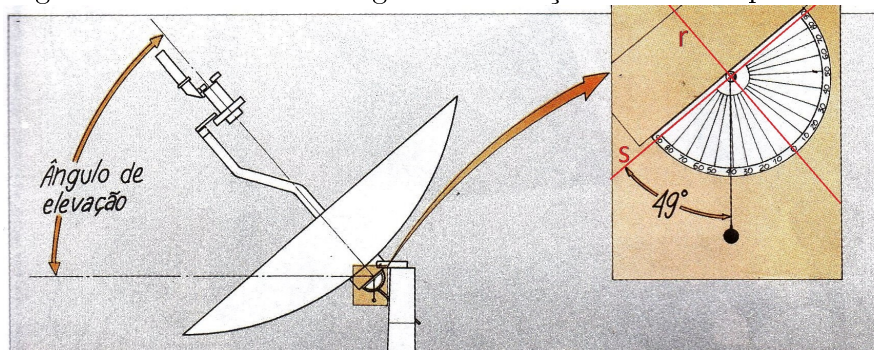


Fonte: [13].

Existem antenas modernas que possuem um sistema que indica uma aproximação do seu ângulo de elevação. Geralmente são antenas de TV por assinatura. Mas, mesmo tendo uma aproximação, o transferidor auxiliar para uma medida mais precisa.

Seja  $r$  a reta que passa no vértice e no foco da antena em questão. O técnico posiciona seu transferidor diferenciado próximo ao vértice da superfície parabólica de forma que a reta  $s$ , que passa nas medidas de  $90^\circ$  (como vimos na figura 5.36) desse transferidor, seja perpendicular a  $r$ , com  $r$  passando na medida  $0^\circ$ . Com isso, o fio do prumo marca um ângulo com  $s$ . Como mostra a figura 5.44.

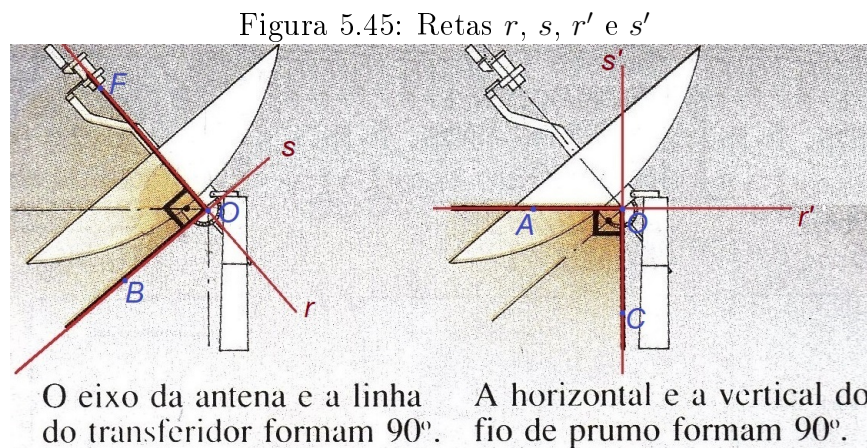
Figura 5.44: Medindo o ângulo de elevação da antena parabólica



Fonte: [13].

O ângulo formado entre  $s$  e o fio do transferidor representa a medida do ângulo de elevação.

De fato, imaginando a antena vista de perfil e as retas  $r$  e  $s$  no mesmo plano,  $r$  é perpendicular a  $s$ . Sendo  $r'$  a reta horizontal que passa na origem do transferidor e  $s'$  a reta coincidente com o fio de prumo do transferidor,  $r'$  e  $s'$  são perpendiculares.

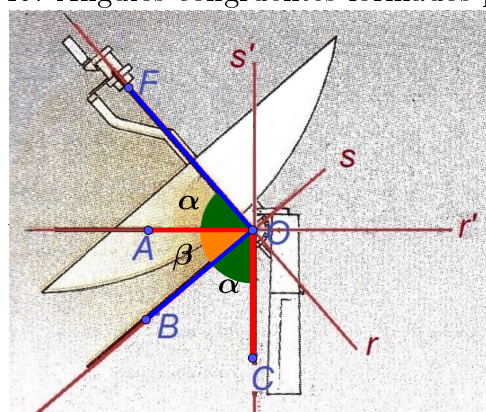


Fonte: [13]

Considere ainda  $F \in r$  o ponto no foco da antena, o ponto  $O$  a intersecção das retas  $r, r', s$  e  $s'$ ,  $A \in r'$  e  $B \in s$  do mesmo lado de  $F$  em relação a  $s'$  e  $C \in s'$  na parte inferior a  $O$ , Como mostra a figuras 5.45.

Seja  $\angle AOB = \beta$  e  $\angle BOC = \alpha$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são medidas em graus, segue que  $\beta + \alpha = 90^\circ$ , logo são complementares. Por outro lado,  $\angle AOF + \angle AOB = \angle AOF + \beta = 90^\circ$  se, e somente se,  $\angle AOF = 90^\circ - \beta = \alpha$ . Portanto,  $\angle AOF = \alpha$ . Logo, o ângulo de elevação  $\angle AOF$  possui medida igual ao ângulo  $\angle BOC$ , ou seja,  $\angle AOF = \alpha = \angle BOC$ .

Figura 5.46: Ângulos congruentes formados pelas retas



Fonte: [13].

## CAPÍTULO 5. FUNCIONAMENTO E INSTALAÇÃO DAS ANTENAS PARABÓLICAS

---

Note que as muitas ideias geométricas do capítulo 3 estão ligadas a instalação da antena de TV, o técnico faz uso desses conhecimentos matemáticos para realizar o apontamento. Por fim, ele faz um ajuste final, ou ajuste fino, que costuma ser feito por meio de uma TV portátil que leva consigo.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática e a tecnologia estão intimamente relacionadas porém, muitas vezes, tal relação não é percebida pela comunidade em geral tendo em vista que a matemática presente não fica em evidência, e mesmo quando há clareza desta, falta conhecimento matemático para percebê-la.

Neste trabalho abordamos a matemática presente no formato, funcionamento e instalação da antena parabólica, a qual tem como ente principal a parábola e sua propriedade de reflexão. Presente, nas residências em geral, a antena parabólica tem o formato de um parabolóide ou superfície parabólica. Apesar do estudo sobre superfícies ser apresentado em poucos cursos de graduação, é possível explicar sua funcionalidade através de conhecimentos básicos de matemática do Ensino Médio, como Geometria Plana, funções quadráticas e parábola.

Portanto, dentre tantas aplicações, e com uma linguagem simples, buscamos apresentar uma funcionalidade da matemática, através das antenas parabólicas, de forma a contribuir com a formação de alunos do Ensino básico e assim divulgar a importância da matemática em nosso dia-a-dia.

# REFERÊNCIAS

- [1] AEB, Agência Espacial Brasileira. *Programa Espacial Brasileiro: Satélites*. 2018. Disponível em: <[www.aeb.gov.br/programa-espacial-brasileiro/satelites/](http://www.aeb.gov.br/programa-espacial-brasileiro/satelites/)> Acesso em: 10 de agosto de 2018.
- [2] ALVES, Marcelo Sousa.; COSTA, M. S. Alcântara.; ANDRADE, Plácido. *A Geometria Grega e As Tecnologias Atuais*. Resumo publicado na IV Mostra UFCA.
- [3] ANDRIETTA, Matheus. *Ângulos Complementares, Suplementares e Replementares*. 2016. Disponível em: <[www.infoenem.com.br/angulos-complementares-suplementares-e-replementares/](http://www.infoenem.com.br/angulos-complementares-suplementares-e-replementares/)> Acesso em: 28 de maio de 2018.
- [4] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Coleção do professor de matemática, SBM, 1994.
- [5] CAMPOS, Matheus. *Cartografia Básica: Aula 6 - O Uso da Bússola e a Declinação Magnética da Terra*. Disponível em: <[www.cesadufs.com.br/ORBI/public/uploadCatalogo/11193004042012Cartografia\\_Basica\\_Aula\\_6.pdf](http://www.cesadufs.com.br/ORBI/public/uploadCatalogo/11193004042012Cartografia_Basica_Aula_6.pdf)> Acesso em: 08 de julho de 2018.
- [6] CENTURY. *Cálculo de Apontamento de Antena*. 2018. Disponível em: <[www.centurybr.com.br/instalador/apontamento](http://www.centurybr.com.br/instalador/apontamento) > Acesso em: 08 de julho de 2018.
- [7] COBERTURA. *Satélite doméstico e a sua respectiva área de cobertura*. Disponível em: <[www.albertogeraldo.com/wp-content/uploads/2017/09/satelite-domestico-e-a-sua-respectiva-area-de-cobertura-1.jpg](http://www.albertogeraldo.com/wp-content/uploads/2017/09/satelite-domestico-e-a-sua-respectiva-area-de-cobertura-1.jpg)> Acesso em: 15 de julho de 2018.
- [8] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática (Ensino médio) I*. São Paulo: Ática, 2004.
- [9] EARTH, Google. *Google Earth ("Maps/Earth")*. Disponível em: <[www.google.com/earth/download/gep/agree.html](http://www.google.com/earth/download/gep/agree.html)> Acesso em: 25 de novembro de 2018.
- [10] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática (Ensino médio) I*. São Paulo: Ática, 2004.

- [11] ESDIFFERENT.COM. *Diferença entre a Órbita Geossíncrona e Geoestacionária*. 2018. Disponível em: <[pt.esdifferent.com/difference-between-geosynchronous-and-geostationary-orbit](http://pt.esdifferent.com/difference-between-geosynchronous-and-geostationary-orbit)> Acesso em: 21 de novembro de 2018.
- [12] FILHO, Luiz Efigênio Silva. *Cônicas: apreciando uma obra-prima da matemática*. 2015. 141 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte. Disponível em: <[www.proformat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=&aluno=Luiz+Efigenio](http://www.proformat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=&aluno=Luiz+Efigenio)> Acesso em: 14 de julho de 2018.
- [13] IMENES, Luiz Márcio.; JAKUBOVIC, José.; LELLIS, Marcelo Cestari. *Pra que serve a matemática?*. 16<sup>a</sup> ed. São Paulo: Atual, 2004.
- [14] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, SBM, 2013.
- [15] LUÍZA, Sâmara. *Telecomunicações: Satélites de Comunicação*. Infofísica, 2018. Disponível em: <[www.infofisica.com/telecomunicacoes/satelites-de-comunicacao/](http://www.infofisica.com/telecomunicacoes/satelites-de-comunicacao/)> Acesso em: 22 de novembro de 2018.
- [16] MOLINA, Eder. *O que é, o que é? Norte geográfico e norte magnético*. 197<sup>a</sup> ed. São Paulo: Revista Pesquisa FAPESP, julho de 2012. Disponível em: <[revistapesquisa.fapesp.br/2012/07/16/o-que-e-o-que-e-8/](http://revistapesquisa.fapesp.br/2012/07/16/o-que-e-o-que-e-8/)> Acesso em: 08 julho 2018.
- [17] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Geometria*. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, SBM, 2013.
- [18] NICE, Karim.; HARRIS, Tom. *Como funciona a TV via satélite*. 30 de maio de 2002. Disponível em: [HowStuffWorks.com. <electronics.howstuffworks.com/satellite-tv.htm>](http://electronics.howstuffworks.com/satellite-tv.htm) Acesso em: 27 de novembro de 2018.
- [19] OLIVEIRA, José Adriano dos Santos. *Sobre Seções Cônicas*. 2015. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte. Disponível em: <[sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=82170](http://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=82170)> Acesso em: 14 de julho de 2018.
- [20] ONE, Copyright Embratel Star *Embratel Star One C2*. 2017. Disponível em: <[www.starone.com.br/internas/satelite\\_c2/](http://www.starone.com.br/internas/satelite_c2/)> Acesso em: 14 de agosto de 2018.
- [21] PAIVA, Geraldo. *Parábolas e Parabólicas*. 2009. Disponível em: <[www.bandaku.com.br/paraseparas.html](http://www.bandaku.com.br/paraseparas.html)> Acesso em: 22 de novembro de 2018.

- [22] REIS, Norma T. O. *Controle orbital e de atitude*. Disponível em: <[educacaoespacial.wordpress.com/recursos-2/materiais-de-estudo/conteudos/astronautica/controle-orbital-e-de-atitude/](http://educacaoespacial.wordpress.com/recursos-2/materiais-de-estudo/conteudos/astronautica/controle-orbital-e-de-atitude/)> Acesso em: 23 de junho de 2018.
- [23] RIZZATO, Fernanda Buhner. *Geometria: duplicação do cubo*. 2001. Disponível em: <[www.matematica.br/historia/duplica-cubo.html](http://www.matematica.br/historia/duplica-cubo.html)> Acesso em: 15 de julho de 2018.
- [24] SILVA, Ramon de Abreu e. *Funções Quadráticas e suas Aplicações no Ensino Médio*. 2013. 141 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. Disponível em: <[sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=45458](http://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=45458)> Acesso em: 06 de março de 2018.
- [25] SOARES, Jóbson Hugo de Sousa. *Função Quadrática*. 2013. 40 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. Disponível em: <[www.profmtat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=&aluno=jobson+hugo](http://www.profmtat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=&aluno=jobson+hugo)> Acesso em: 15 de janeiro de 2018.
- [26] SOUZA, André Luiz Gama. *Sistema de Apontamento de Antena para Estação de Comunicação com Satélites*. 2013. 77 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica, Publicação PGEA.DM-527/13) Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília. Disponível em: <[repositorio.unb.br/bitstream/10482/13847/1/2013\\_AndreLuizGamaDeSouza.pdf](http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/13847/1/2013_AndreLuizGamaDeSouza.pdf)> Acesso em: 03 de julho de 2018.