UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ANTONIO EUDO DOS SANTOS

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E SUAS APLICAÇÕES

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ
2018

ANTONIO EUDO DOS SANTOS

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S233s Santos, Antonio Eudo dos.
Semelhança de triângulos e suas aplicações/Antonio Eudo dos Santos. – 2018.
65 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia –Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2018.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Júnior.

1. Teorema de Ptolomeu. 2. Teorema das cordas. 3. Semelhança de pirâmides. I. Título.

. CDD 510.07

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Semelhança de Triângulos e Suas Aplicações

Antônio Eudo dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 29 de outubro de 2018.

Banca Examinadora

Valdir Ferreira de Paula Junior

Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior - UFCA

Orientador

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Junior - UFCA

Samara Costa Lima

Profª. Dra. Samara Costa Lima – UFOB

Dedico a meus pais, a minha esposa Luana Santos e a meus filhos Douglas, Pierre e Enrico pois é junto a eles que sei o significado de família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelos dons que me concedeu, guiando-me para fazer destes qualidades.

Aos meus pais, pelo espírito de luta, perseverança e otimismo, dando-me apoio e confiança nos momentos que precisei.

A minha esposa, Luana, a meus filhos, Douglas, Pierre e Enrico, por estar presente em minha vida, compreendendo as minhas ausências, consolando-me nos momentos de fraqueza e desânimo, e por acreditarem em meu potencial.

Aos meus irmãos e demais familiares, por torcerem para o alcance desse meu objetivo.

A minha comadre, Dinamária, por ter sido sempre solícita quando necessitei de sua ajuda.

Aos colegas de Mestrado pela convivência harmoniosa e de companheirismo durante o período em que estivemos a aprender juntos. Especialmente aos meus amigos Aírton, Aglaysa e Ediuberto, pelo companheirismo, pelos finais de semana e feriados que passamos estudando e pelos momentos de descontração. Não esquecendo de meus dois anjos da guarda Robson e Samuel, pois sempre que precisei não mediram esforços para me ajudar, serei eternamente grato. Essa vitória também é de vocês.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior , pelo apoio, dedicação e pelos ensinamentos que foram dados na orientação deste trabalho e nas disciplinas que lecionou.

A todos os professores da UFCA que ministraram aula no PROFMAT, por ter compartilhado seus conhecimentos nesses dois anos de curso.

Por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

"A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la." (Johannes Kepler)

RESUMO

Um dos grandes desafios do professor de matemática em sala de aula é o de motivar seus alunos quanto a importância do estudo da matemática. Diante disso, as aplicações da matemática desempenham um papel fundamental para o aluno compreender a sua importância. Neste trabalho, descreveremos algumas aplicações interessantes de semelhança de triângulos, na matemática, como para demonstrar o Teorema de Ptolomeu e o Teorema das Cordas, depois daremos algumas aplicações práticas, entre elas, obtenção da altura de prédios e postes, e o calculo da distância da Terra ao Sol usando semelhança de triângulos. Por fim, faremos um estudo sobre semelhança de pirâmides.

Palavras-chave: Semelhança de Triângulos. Teorema de Ptolomeu. Teorema das Cordas. Semelhança de Pirâmides

ABSTRACT

One of the major challenges of the classroom math teacher is to the importance of the study of mathematics. In view of this, the applications of mathematics play a key role for the student to understand its importance. In this paper, we will describe some interesting applications of similarity triangles in mathematics, how to demonstrate Ptolemy's Theorem and String Theorem, then we will give some practical applications, among them, obtaining the height of buildings and poles, and calculating the distance from Earth to the Sun using similarity of triangles. Finally, we will do a study on the similarity of pyramids.

Keywords: Similar to Triangles. Ptolemy's Theorem. String Theorem. Similarities of Pyramids

Lista de Figuras

1 Medindo a altura da Pirâmide segundo Hicrônimos 10
2 Medindo a altura da Pirâmide segundo Plutarco 11
3 Teodolito 12
4 Segmento AB 13
5 Semirreta $\overrightarrow{AB}$ 14
6 Ângulo convexo e não convexo 14
7 Triângulo 15
8 Triângulo Equilátero 15
9 Triângulo Isósceles 16
10 Triângulo Escaleno 16
11 Triângulo Acutângulo 16
12 Triângulo Obtusângulo 17
13 Triângulo Retângulo 17
14 Triângulos congruentes 18
15 Triângulos Equiláteros são Congruentes 18
16 Critério de congruência LAL 19
17 Critério de congruência ALA 19
18 Prova do Critério de congruência ALA 20
19 Critério de congruência LLL 20
20 Prova do Critério de congruência LLL 21
21 Teorema de Tales 22
22 Paralelas cortadas por transversais 23
23 Razão $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ irracional 24
24 Aplicação do Teorema de tales 26
25 Triângulos semelhantes 28
26 Razão entre o perímetro de dois triângulos 29
27 Teorema Fundamental de Semelhança 30
28 Prova do Teorema Fundamental de Semelhança 1ª parte 30
29 Prova do Teorema Fundamental de Semelhança 2ª parte 31
30 Aplicação do Teorema Fundamental de Semelhança 32
31 Triângulos semelhantes − Critério LLL 33

32 Prova do Critério LLL . . . 33
33 Aplicação do Critério LLL . . . 34
34 Triângulos semelhantes − Critério LAL . . . 34
35 Prova do Critério LAL . . . 35
36 Aplicação do Critério LAL . . . 36
37 Triângulos semelhantes − Critério AA . . . 36
38 Prova do Critério AA . . . 36
39 Aplicação do Critério AA . . . 37
40 Triângulos Retângulo . . . 38
41 Triângulo retângulo e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa . . . 39
42 Triângulos semelhantes . . . 39
43 Semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$ . . . 40
44 Aplicação do Corolário 3 . . . 40
45 Semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$ . . . 41
46 Semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HBA$ . . . 41
47 Aplicação do Corolário 4 . . . 42
48 Semelhança entre os triângulos $\triangle HAB$ e $\triangle HCA$ . . . 42
49 Aplicação das relações métricas . . . 44
50 Demonstração da Proposição 7 . . . 44
51 Demonstração da Proposição 7 . . . 45
52 Triângulos Semelhantes para obter as razões trigonométricas . . . 46
53 Triângulo Retângulo com os ângulos β e α . . . 47
54 Aplicação das razões trigonométricas . . . 48
55 Teorema de Ptolomeu . . . 49
56 Aplicação do Teorema de Ptolomeu . . . 50
57 Teorema das cordas . . . 51
58 Teorema das cordas . . . 51
59 Aplicação do Teorema das cordas . . . 52
60 Aplicação de semelhança de triângulos . . . 53
61 Aplicação de semelhança de triângulos . . . 53
62 Aplicação de semelhança de triângulos . . . 54
63 Aplicação de semelhança de triângulos . . . 54
64 Aplicação de semelhança de triângulos . . . 55
65 Elementos de uma Pirâmide . . . 56
66 Teorema de Tales para planos paralelos . . . 57
67 Pirâmides semelhantes . . . 58
68 Exemplo sobre Semelhança de Pirâmide . . . 60
69 Exemplo sobre Semelhança de Pirâmide . . . 61
70 Exemplo sobre Semelhança de Pirâmide . . . 61

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **10**

1 PRELIMINARES **13**

1.1 Conceitos Elementares 13

1.2 Triângulos 14

1.3 Congruência de Triângulos 17

1.4 Teorema de Tales 21

2 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS **27**

2.1 Definição de Semelhança de triângulos 28

2.2 Critérios de Semelhança 30

3 APLICAÇÕES DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS **38**

3.1 Relações métricas no triângulo retângulo 38

3.2 Razões trigonométricas de um ângulo agudo 45

3.3 Teorema de Ptolomeu 48

3.4 Teorema das Cordas 50

3.5 Resolução de Problemas 52

4 SEMELHANÇA DE PIRÂMIDES **56**

4.1 Teorema de Tales no Espaço 57

4.2 Definição de Semelhança de Pirâmides 58

4.3 Aplicações 59

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **63**

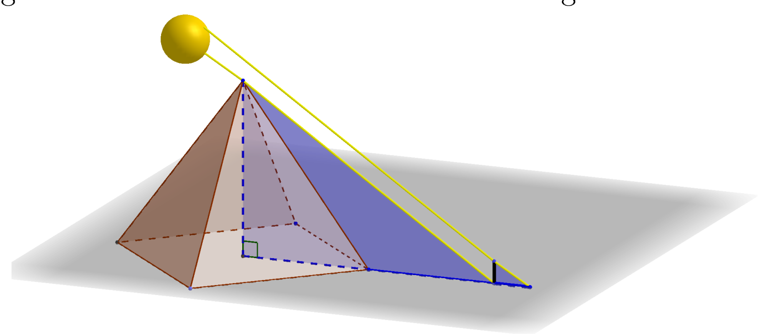
REFERÊNCIAS **64**

INTRODUÇÃO

A aplicação mais famosa de semelhança de triângulos foi devido á Tales de Mileto (640 a.C. e 564 a.C.). Tales foi um rico comerciante, filósofo, matemático e astrônomo. Ele é considerado um dos grandes sábios da antiguidade. Como era comerciante, Tales viajava por muitas cidades. Numa de suas viagens ao Egito, Tales foi desafiado a medir a altura da Pirâmide Quéops, sem ter que subir nela. Historicamente, existem duas versões de como Tales conseguiu calcular a altura desta Pirâmide.

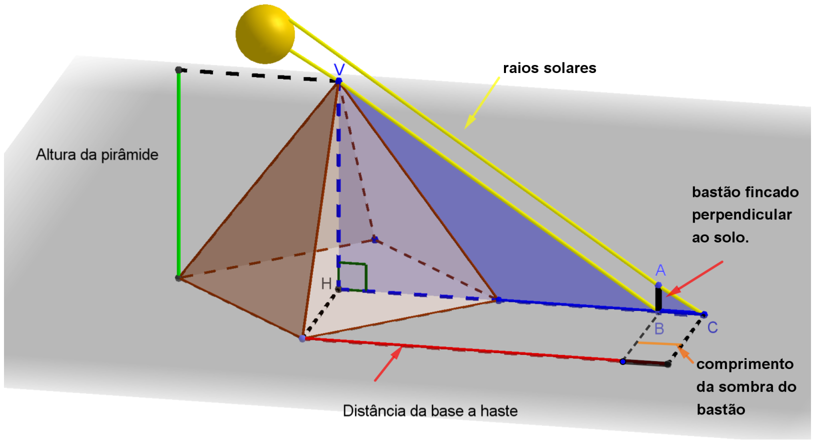
A versão mais famosa é devido à Hicrônimos, discípulo de Aristóteles. Segundo ele, Tales fincou um bastão de madeira próximo a pirâmide, depois fez um risco no chão, de forma que o comprimento do risco para a madeira fosse igual ao tamanho da sua altura em relação ao solo. Assim, no momento em que a sombra da madeira era igual à medida da sua altura, ele mediu o tamanho da sombra da pirâmide, e então pôde calcular a altura da pirâmide (Figura 1).

Figura 1: Medindo a altura da Pirâmide segundo Hicrônimos



A segunda versão foi contada por Plutarco. Segundo ele, Tales fincou um bastão de madeira vertical no extremo da sombra projetada pela pirâmide, construiu a sombra projetada do bastão, formando no solo dois triângulos semelhantes (Figura 2). Tales usou que os lados desses triângulos eram proporcionais, para poder determinar a altura da pirâmide através da proporção entre os lados dos triângulos.

Figura 2: Medindo a altura da Pirâmide segundo Plutarco



Uma aplicação muito interessante da semelhança de triângulos foi feito por volta do século III a.c. por Aristarco, ele calculou a distância da Terra ao Sol e a distância da Terra à Lua, para mais detalhes veja ([17]).

A semelhança de triângulos está presente em diversas situações da vida cotidiana, como por exemplo, na ampliação ou redução de objetos como fotos, mapas, documentos, miniaturas de carros, de bonecos, na visualização de imagens na tela do celular, que podem ser aumentadas ou diminuídas com o movimento dos dedos. Até mesmo, quando usamos maquetes para representar ambientes reais. As telas de televisão e outro exemplo de semelhança de triângulos, pois mesmo com diferentes polegadas, a maioria delas possui o mesmo formato, o que permite que transmitam a mesma imagem. Como as telas de cinemas não possuem o mesmo formato das telas das televisões, ou seja, elas não são semelhantes, isso explica o fato de que os filmes que passam nas telas dos cinemas não possuem as mesmas imagens quando são passados em uma televisão.

Na matemática ela é muito usada para demonstrar e provar várias proposições e teoremas, tais como: relações métricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas, Teorema de Pitágoras, Teorema de Ptolomeu e Teorema das cordas. Além disso, ela nos permite calcular distâncias inacessíveis, por isso, ela é muito usada no dia-a-dia de topógrafos, cartógrafos, geógrafos, engenheiros etc. Hoje em dia, existem até instrumentos que medem ângulos em situações como essas, como o *teodolito* (Figura 3). Portanto, é de extrema importância o estudo e a compreensão da semelhança de triângulos, bem como destacar suas inúmeras aplicações no cotidiano e na matemática.

Figura 3: Teodolito

Fonte: [18]

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No Capitulo 1, faremos algumas preliminares que serão necessárias para a compreensão dos demais capítulo. No Capítulo 2, será feito um estudo da semelhança de triângulos, e também provaremos o Teorema Fundamental de Semelhança, que será usado para obter alguns critérios que ajudem a determinar se um triângulo é semelhante à um outro triângulo ou não . No Capítulo 3, iremos estudar várias aplicações interessantes sobre semelhança de triângulo, entre elas destacamos o Teorema de Ptolomeu, Teorema das Cordas, razões trigonométricas e o cálculo do raio do Sol, sabendo apenas a distância do Sol para Terra. No Capítulo 4, estudaremos a semelhança de pirâmides, e por fim, faremos algumas considerações finais.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos os conteúdos que serão necessários para a compreensão deste trabalho. Consideraremos que os leitores já tenham familiaridade com os conceitos elementares da Geometria Euclidiana e sua axiomática (Axiomas de Incidência, de Ordem, de Medição e das Paralelas). Vale ressaltar que todas definições e demonstrações podem ser encontradas em [1], [4], [11], [12] e [13].

1.1 Conceitos Elementares

Nesta seção, faremos um estudo sobre alguns conceitos elementares da Geometria plana, que serão importantes para que o entendimento do conteúdo abordado. Iremos considerar ponto, reta e plano como conceitos primitivos. Nossa primeira definição é sobre segmentos de retas.

Definição 1 *Sejam A e B pontos distintos sobre uma reta r. Chama-se de segmento AB ao conjunto formado pelos pontos A e B, e por todo ponto C de r que está entre A e B.*

Figura 4: Segmento AB

Usaremos a notação AB para expressar o segmento da reta determinado pelos pontos A e B e $\overline{AB}$ para indicar o comprimento (ou distância) do segmento AB (entre A e B).

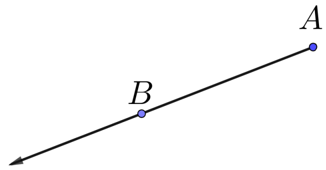
A ideia principal por trás da semelhança de triângulos, é o de comparar triângulos, por exemplo, comparar seus lados. Para comparar lados de triângulos é necessário comparar segmentos, para isso, precisamos da seguinte definição.

Definição 2 *Dizemos que dois segmentos de reta são congruentes quando possuem o mesmo comprimento, isto é, AB e CD são congruentes se, e somente se, $\overline{AB} = \overline{CD}$.*

No próximo capítulo, veremos vários critérios para determinar se dois triângulos são semelhantes ou não. Alguns desses critérios usam o conceito de ângulo. Para isso faz-se necessário a próxima definição.

Definição 3 *O conjunto de pontos constituídos por um segmento AB, onde A e B são pontos distintos, e todos os pontos C tais que B esteja entre AC é chamado de semirreta de origem A contendo o ponto B, indicada por $\overrightarrow{AB}$.*

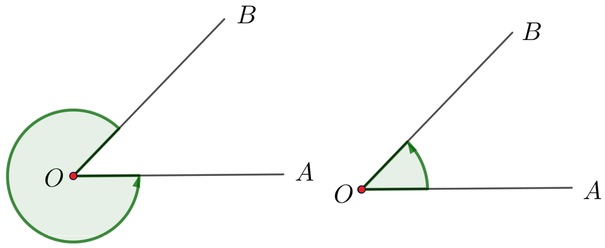
Figura 5: Semirreta $\overrightarrow{AB}$



Definiremos agora o conceito de ângulo entre semirretas.

Definição 4 *Chamamos de ângulo a região de um plano determinada pelo encontro de duas semirretas que possui uma origem em comum, chamada de vértice do ângulo.*

Figura 6: Ângulo convexo e não convexo



Pela Figura 6, duas semirretas de mesma origem determinam dois ângulos, um convexo (da direita) e outro não convexo (da esquerda). Sempre no texto usaremos o ângulo convexo e para indicá-lo usaremos a a seguinte notação.
Notação: $A\widehat{O}B$ significa o ângulo convexo formado pela semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Definição 5 *Dizemos que dois ângulos $A\widehat{B}C$ e $E\widehat{F}G$ são congruentes quando possuem a mesma abertura ou a mesma medida.*

1.2 Triângulos

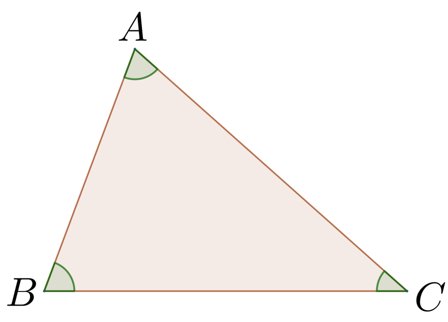
Nesta seção, apresentaremos nosso objeto de estudo, o *Triângulo*. Veremos algumas classificações de triângulos quanto aos seus lados e ângulos, como também faremos um estudo sobre congruência e alguns de seus critérios, que serão importantíssimos no estudo de semelhança .

O triângulo é uma das mais importantes figuras geométricas, pois ele está presente no desmembramento de quase todas as outra figuras. Conhecer os triângulos é fundamental para compreender a Geometria. Por isso daremos a seguir sua definição formal. Para mais detalhes veja [1, 4, 5, 12, 15].

Definição 6 *Dados três pontos, A, B e C, não colineares, à reunião dos segmentos AB, AC e BC chama-se triângulo ABC, denotado por $\triangle ABC$.*

Dado o $\triangle ABC$, os pontos A, B e C são os vértices, os segmentos AB, BC e AC são os lados, os ângulos $B\widehat{A}C, C\widehat{B}A$ e $A\widehat{C}B$ são os ângulos internos do $\triangle ABC$, que denotaremos apenas por $\widehat{A}, \widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, a soma desse três ângulos é igual a 180°, isto é, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ e é o único polígono que não possui diagonal.

Figura 7: Triângulo

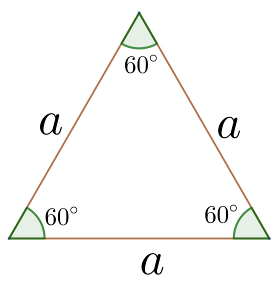


Os triângulos podem ser classificados conforme as relações entre seus lados ou entre seus ângulos. Quanto aos lados, os triângulos se classificam em: equiláteros, isósceles e escalenos; quantos aos ângulos se classificam em: acutângulo, retângulo e obtusângulo.

Primeiro estudaremos a classificação em relação aos lados.

Definição 7 *Um triângulo é equilátero quando têm os três lados congruentes.*

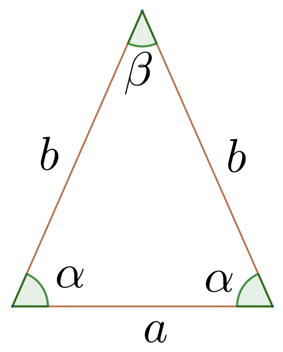
Figura 8: Triângulo Equilátero



Um triângulo equilátero é também equiângulo: todos os seus ângulos internos são congruentes (medem 60°), sendo portanto classificado como um polígono regular.

Definição 8 *Um triângulo é isósceles quando possuir, pelo menos, dois de seus lados congruentes.*

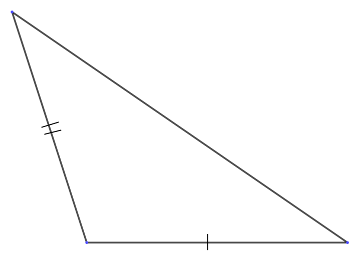
Figura 9: Triângulo Isósceles



Um triângulo isósceles possui pelo menos dois lados de mesma medida. Assim temos que todo triângulo equilátero é, consequentemente, um caso especial de triângulo isósceles. Num triângulo isósceles, o ângulo formado pelos lados congruentes é chamado *ângulo do vértice* e os demais ângulos denominam-se *ângulos da base* no qual são congruentes.

Definição 9 *Um triângulo é escaleno quando possuir os três lados com medidas diferentes.*

Figura 10: Triângulo Escaleno

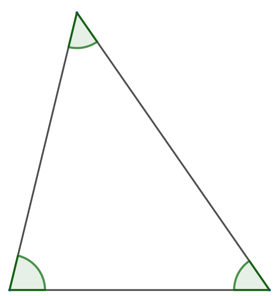


Num triângulo escaleno as medidas dos três lados são diferentes. Assim, os ângulos internos de um triângulo escaleno também possuem três medidas diferentes, sendo o maior ângulo oposto ao maior lado e o menor ângulo oposto ao menor lado.

Agora, estudaremos a classificação em relação aos ângulos do triângulo.

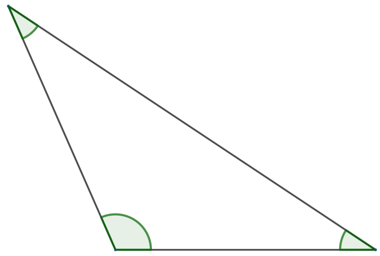
Definição 10 *Um triângulo é acutângulo quanto possuir os três ângulos agudos (menores que 90°).*

Figura 11: Triângulo Acutângulo



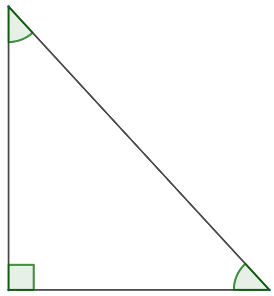
Definição 11 *Um triângulo é obtusângulo quando possuir um ângulo obtuso (maior que 90°).*

Figura 12: Triângulo Obtusângulo



Definição 12 *Um triângulo é retângulo quando possuir um ângulo reto (igual a 90°).*

Figura 13: Triângulo Retângulo



Num triângulo retângulo, denomina-se *hipotenusa* o lado oposto ao ângulo reto. Os demais lados chamam-se *catetos*.

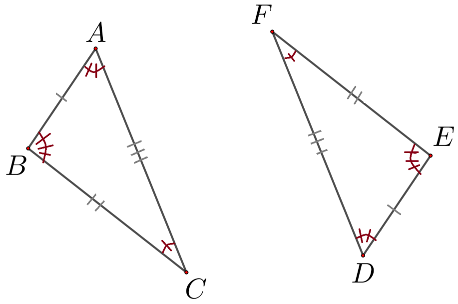
Após conhecer o nosso objeto de estudo, o próximo passo é começar a comparar os vários tipos de triângulos para sabermos quais possuem propriedades iguais. Este é o conteúdo da nossa próxima seção.

1.3 Congruência de Triângulos

Começaremos agora a comparar triângulos, para dizer quando são semelhantes, isto é, quando eles possuem algumas características semelhantes. É evidente que triângulos iguais possuem características semelhantes. A próxima definição dirá quando dois triângulos quaisquer são iguais. Para os casos de congruência de triângulos não abordados neste texto veja [1, 4, 11, 13].

Definição 13 *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes quando existir uma correspondência entre os vértices de um e do outro, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como os lados opostos a vértices correspondentes.*

Figura 14: Triângulos congruentes



Usaremos a notação $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ para indicar que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes.

Segue direto da Definição 13 que, dois triângulos congruentes possuem todas as propriedades iguais , por exemplo, mesmo perímetro, mesma área, etc.

Na Figura 14 , considerando a correspondência entre os vértices:

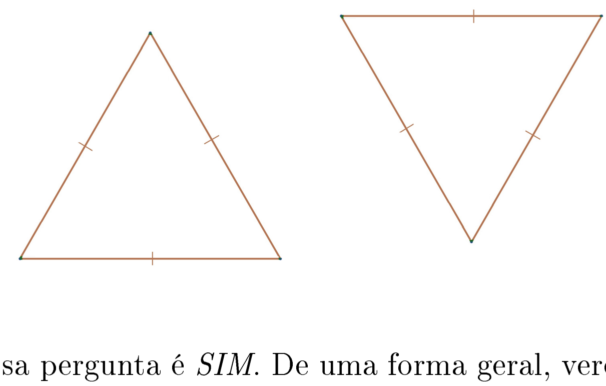
$$A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E \text{ e } C \leftrightarrow F$$

dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, teremos que,

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \Longleftrightarrow \left(\widehat{A} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{E}, \widehat{C} = \widehat{F}, \overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}, \overline{AC} = \overline{DF}\right) \quad (1)$$

Logo, para verificar que dois triângulos são congruentes via definição, temos que verificar todas as 6 condições de (1), o que se torna uma tarefa árdua e difícil, pois teremos que ter conhecimento da medida de todos os lados do triângulo e também de seus ângulos. Assim precisamos encontrar condições mínimas para determinar se dois triângulos são ou não congruentes. Por exemplo, dois triângulos equiláteros quaisquer com a mesma medida de lados, são claramente congruente Veja Figura 15, assim uma pergunta natural é: podemos saber, se dois triângulos são congruentes ou não, apenas conhecendo o tamanho de seus lados?

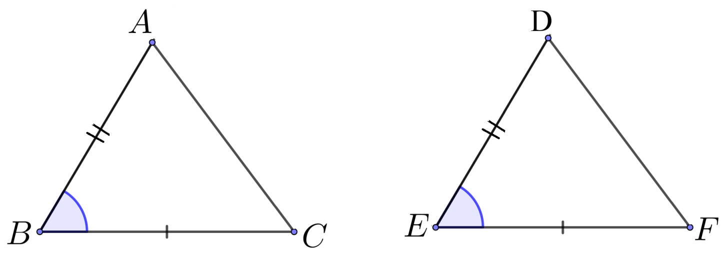
Figura 15: Triângulos Equiláteros são Congruentes



A resposta para essa pergunta é *SIM*. De uma forma geral, veremos que existem situações em que podemos concluir a congruência de dois triângulos a partir da igualdade de três medidas básicas. São nessas situações que aplicamos os **critérios de congruência**.

Axioma 1 ***(Critério - LAL)***. *Se dois triângulos têm dois lados e o ângulo entre eles respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Figura 16: Critério de congruência LAL

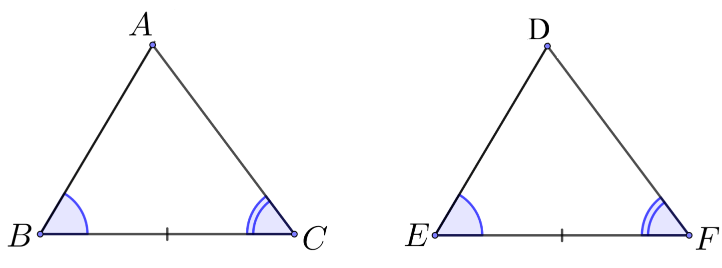


Pelo axioma 1, dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$, então os triângulos são congruentes. Logo, $\overline{AC} = \overline{DF}, \widehat{C} = \widehat{F}$ e $\widehat{A} = \widehat{D}$. Portanto, em vez de verificarmos as 6 condições de (1), basta verificarmos apenas 3 dessas condições.

Como consequência do Axioma 1, provaremos a seguir mais duas proposições (critérios) que facilitam identificar quando dois triângulos são congruentes.

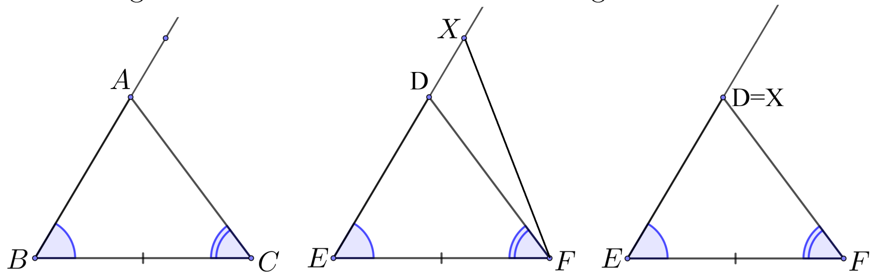
Proposição 1 ***(Critério - ALA)*** *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem, respectivamente, iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

Figura 17: Critério de congruência ALA



Prova: Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\widehat{B} = \widehat{E}, \widehat{C} = \widehat{F}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$, (veja Figura 18). Pelo Axioma 1 (critério LAL), devemos mostrar que $\overline{BA} = \overline{ED}$.

Figura 18: Prova do Critério de congruência ALA



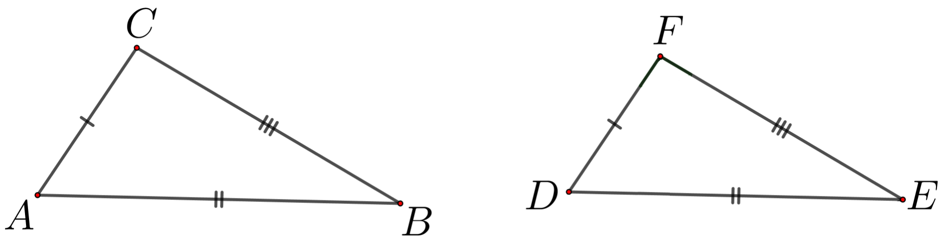
Seja X um ponto pertencente a semirreta $\overrightarrow{ED}$ tal que $\overline{EX} = \overline{BA}$. Daí, segue pelo critério LAL que $\overline{BC} = \overline{EF}, \widehat{B} = \widehat{E}$ e $\overline{EX} = \overline{BA}$ e logo $\triangle ABC \cong \triangle XEF$ e portanto, $B\widehat{C}A = E\widehat{F}X$

Usando a hipótese que $\widehat{C} = \widehat{F}$, isto é, $B\widehat{C}A = E\widehat{F}D$, temos $E\widehat{F}D = E\widehat{F}X$, o que implica $D = X$. Logo, $\overline{BA} = \overline{ED}$. ■

O próximo critério nos diz que apenas conhecendo as medidas dos lados dos triângulos, podemos determinar se eles são ou não congruentes.

Proposição 2 ***(Critério - LLL)****. Se os três lados de um triângulo são, em certa ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

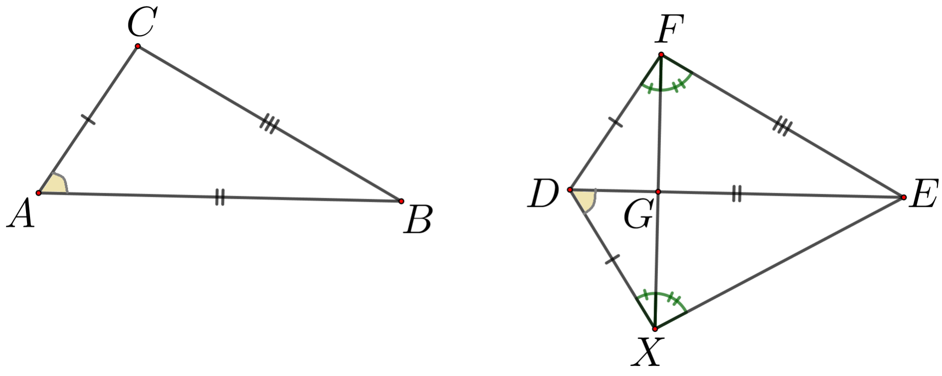
Figura 19: Critério de congruência LLL



Prova: Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ e $\overline{CA} = \overline{FC}$. Vamos mostrar que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Trace um semirreta $\overrightarrow{DX}$ no semiplano oposto ao determinado por $\overline{DE}$ e F, de modo que $X\widehat{D}E = C\widehat{A}B$ e $\overline{DX} = \overline{AC}$. Considere G o ponto de interseção entre os segmentos FX e DE, veja Figura 20.

Figura 20: Prova do Critério de congruência LLL



Como $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DX}$ e $X\widehat{D}E = C\widehat{A}B$, por construção (veja Figura 20), segue do Axioma 1, que $\triangle ABC \cong \triangle DEX$, e consequentemente, $\overline{XE} = \overline{CB}$.

Agora, mostraremos que os triângulos $\triangle DEF$ e $\triangle DEX$ são congruentes. De fato, temos que $\overline{AC} = \overline{DF} = \overline{DX}$ e $\overline{BC} = \overline{EF} = \overline{XE}$, segue respectivamente que $\triangle DFX$ e $\triangle EFX$ são isósceles de base $\overline{FX}$. Onde concluímos que os ângulos $D\widehat{F}X = D\widehat{X}F$ e $E\widehat{F}X = E\widehat{X}F$, logo $D\widehat{F}E = D\widehat{X}E$

Portanto, pelo caso LAL temos que $\triangle DEF \cong \triangle DEX$ e $\triangle ABC \cong \triangle DXF$. Logo $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ■

1.4 Teorema de Tales

Apresentaremos agora o teorema central por trás de semelhança de triângulos, pois a partir dele obteremos o Teorema Fundamental de Semelhança e os critérios de semelhança.

O Teorema de Tales possui diversas aplicações no cotidiano, constituindo uma importante ferramenta da Geometria no cálculo de distâncias inacessíveis e nas relações envolvendo semelhança entre triângulos.

Antes de enunciar o Teorema de Tales, vamos relembrar alguns conceitos importantes que serão usados para compreender este teorema.

Definição 14 *Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.*

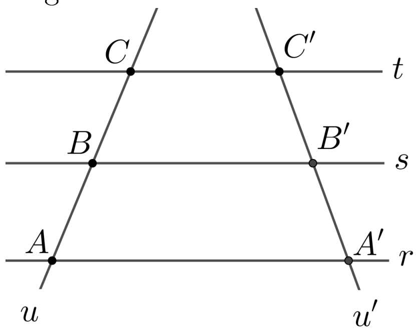
Definição 15 *Reta transversal é uma reta que intercepta um feixe de retas paralelas.*

Agora estamos prontos pra enunciar o famoso Teorema de Tales, que foi extraído de [3].

Teorema 1 (Teorema de Tales) *Sejam r, s e t um feixe de retas paralelas, cortadas por duas retas transversais u e u'. Se A, B, C e A', B', C' são as interseções de u e u' com as retas r, s e t, respectivamente, então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Figura 21: Teorema de Tales



Para a demonstração do Teorema de Tales necessitaremos de alguns resultados preliminares que serão apresentados a seguir.

Definição 16 *Trapézio é todo quadrilátero que possui um par, e somente um par, de lados opostos paralelos.*

Os lados opostos paralelos são denominados *bases* e os lados opostos transversais são denominados *lados*.

Definição 17 *Base média de um trapézio é o segmento que une os pontos médios dos lados do trapézio.*

Agora estamos prontos para provar o Teorema de Tales.

Prova do Teorema de Tales: Considere no plano três retas paralelas r, s e t (veja Figura 16). Traçamos, em seguida, duas retas transversais u e u', a primeira intersectando r, s e t respectivamente nos pontos A, B e C, a segunda intersectando r, s e t respectivamente em A', B' e C'.

Note que $AA'C'C$ é um trapézio de bases $\overline{AA'}$ e $\overline{CC'}$. Então teremos três casos a considerar.

Caso 1: Suponhamos que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Então neste caso o ponto B é ponto médio $\overline{AC}$. Como s é paralelo a r e t, o ponto B' pertence a s. Assim $\overline{BB'}$ é base média do trapézio $AA'C'C$. Logo pela definição da base média de um trapézio, teremos que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. Logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1.$$

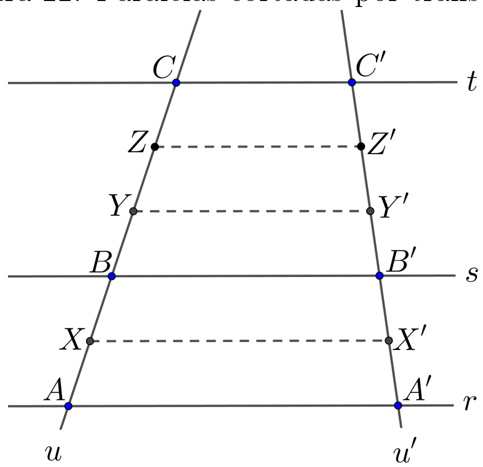
Portanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Caso 2: Suponhamos que $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ e $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{2}{3}$. Então podemos dividir os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, em duas e três partes iguais (veja Figura 22), obtendo pontos X, Y e Z em u, tais que

$$\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}.$$

Figura 22: Paralelas cortadas por transversais



Se traçarmos por X, Y e Z retas paralelas a r, s e t, as quais intersectam u', respectivamente, em X', Y' e Z', formando os trapézios $AA'B'B$, $BB'Z'Z$ e $YY'C'C$ de bases médias $\overline{XX'}$, $\overline{YY'}$ e $\overline{ZZ'}$, respectivamente, obtemos

$$\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}.$$

Daí,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}.$$

Logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Caso 3: Suponhamos que $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ e $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$.
Seguindo o mesmo raciocínio do Caso 2, podemos dividir o segmento AB e BC em m e em n partes iguais, respectivamente, obtendo $m + n - 2$ trapézios com lados transversais iguais sobre u e u', logo, $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{m}{n}$, onde de fato temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}.$$

Portanto, concluímos que a relação

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

é valida sempre que o primeiro (ou o segundo) membro for um número racional.

Caso 4: Suponhamos que $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ e $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$, com $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

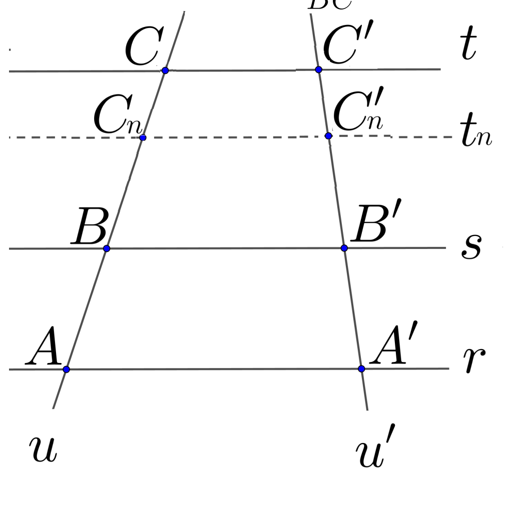
Para provar esse caso, usaremos que os números racionais é denso nos reais, isto é, qualquer intervalo não vazio de números reais possui números racionais. Assim para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in \mathbb{Q}$ tal que $x < a_n < x + \frac{1}{n}$, logo obtemos uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de racionais positivos, tais que

$$x < a_n < x + \frac{1}{n}, \tag{2}$$

para todo $n \in N$. Tomando os pontos $C_n \in u$ (veja Figura 23) tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n.$$

Figura 23: Razão $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ irracional



Seja t_n a reta paralela às retas r, s e t traçadas por C_n e C'_n o ponto onde t_n intersecta u'. Como $a_n \in Q$, pelo Caso 3 temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}},$$

portanto,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} = a_n.$$

Segue pela definição da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, a seguinte desigualdade

$$x < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < x + \frac{1}{n}.$$

Como $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Observe que as desigualdades do primeiro membro acima garantem que, à medida em que n aumenta, os pontos C_n estão mais próximos do ponto C. Mas, como t_n é paralelo t, segue então que os pontos C'_n aproximam-se mais e mais do ponto C', de maneira que a razão $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}}$ aproxima-se cada vez mais da razão $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$, quando n aumenta. Fazendo n aumentar infinitamente obtemos

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \longrightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Por outro lado, utilizando notação análoga à da primeira linha acima, a partir das desigualdades do segundo membro de (3), que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

(Lê-se $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}}$ tende $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ quando n tende a $+\infty$). Uma vez que uma mesma sequência de números reais não pode aproximar-se simultaneamente de dois números reais distintos quando n tende a $+\infty$, obtemos

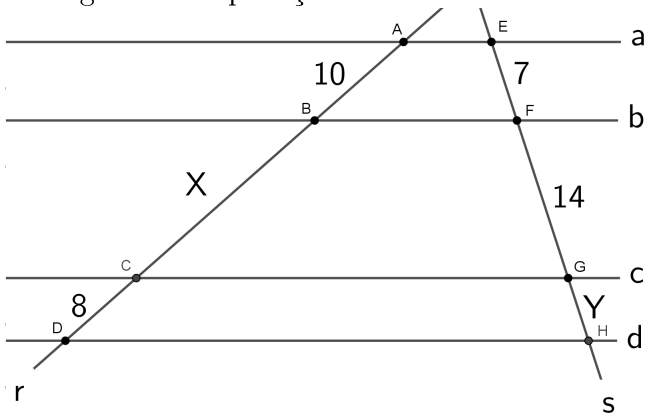
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

■

Nosso próximo exemplo mostra como o Teorema de Tales é usado para resolver alguns problemas matemáticos.

Exemplo 1 *Na Figura 24 , as retas paralelas a, b, c e d são cortadas pelas retas transversais r e s. Calcule o valor de x e y.*

Figura 24: Aplicação do Teorema de tales



Solução: Pelo Teorema de Tales

$$\frac{10}{7} = \frac{x}{14} = \frac{8}{y}.$$

Assim,

$$\frac{10}{7} = \frac{x}{14} \Rightarrow 7x = 140 \Rightarrow x = 20.$$

Por outro lado,

$$\frac{10}{7} = \frac{8}{y} \Rightarrow 10y = 56 \Rightarrow y = 5,6.$$

Logo, $x = 20$ e $y = 5,6$.

Note que o Teorema de Tales relaciona a noção geométrica de paralelismo com a noção algébrica de proporcionalidade (razão de números), portanto, este teorema relaciona duas áreas fundamentais da matemática.

2 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Neste capítulo, veremos um dos mais importantes conceitos da Geometria, a semelhança de triângulos. Dois triângulos são semelhantes se eles têm a mesma forma, porém não necessariamente o mesmo tamanho. Para entendermos melhor o conceito de semelhança entre triângulos devemos conhecer primeiro o conceito de proporcionalidade.

Definição 18 *Dadas duas sequências de números positivos*

$$a, b, c \quad e \quad a', b', c'$$

Se $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$*, então dizemos que as duas sequências são* **proporcionais***, e escrevemos*

$$a, b, c \sim a', b', c'$$

A constante $k = \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$, é chamada de constante de proporcionalidade.

A relação de proporcionalidade é reflexiva, simétrica e transitiva, portanto, é uma relação de equivalência.

1. **Reflexiva:** $a, b, c \sim a, b, c$

2. **Simétrica:** $a, b, c \sim a', b', c' \Leftrightarrow a', b', c' \sim a, b, c$

3. **Transitiva** $a, b, c \sim a', b', c'$ e $a', b', c' \sim a'', b'', c'' \Leftrightarrow a, b, c \sim a'', b'', c''$

Note que a constante de proporcionalidade depende da ordem na qual as sequências são escritas. Se alterarmos a ordem, obteremos uma nova constante que é inversa da primeira, isto é, se k é a constante de proporcionalidade de $a, b, c \sim a', b', c'$, então $\dfrac{1}{k}$ é a constante de proporcionalidade de $a', b', c' \sim a, b, c$.

O fato importante da relação de proporcionalidade ser uma relação de equivalência, é que a relação de semelhança também será, e como consequência, muitas das propriedades que vale para um triângulo valerá de forma proporcional para todos os triângulos equivalentes à ele, isto ficará claro nas próxima seções.

2.1 Definição de Semelhança de Triângulos

Segundo Elon Lages, a noção de semelhança corresponde à ideia natural de "mudança de escala", isto é, ampliação ou redução de uma figura alterando seu tamanho sem modificar suas proporções. Para mais detalhes veja [5, 12, 13, 15].

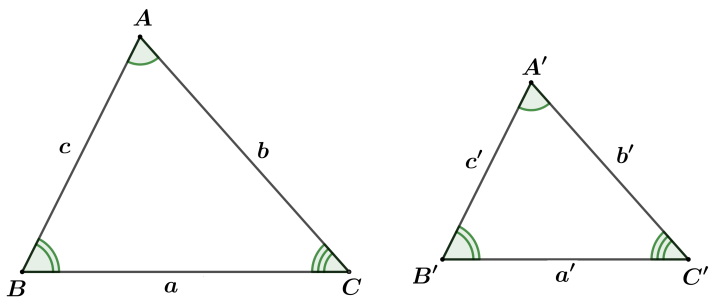
No estudo da Geometria, o conceito de semelhança de triângulos, ocupa um lugar bem destacado, como veremos a seguir.

Definição 19 *Dois triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A'B'C'$ *são semelhantes quando existir uma correspondência entre os vértices dos triângulos de modo que os lados correspondentes sejam proporcionais e os ângulos correspondentes sejam congruentes entre si.*

Quando dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ forem semelhantes, indicaremos por

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Figura 25: Triângulos semelhantes



Em símbolos, a Definição 19 significa:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \iff \left(\begin{array}{l} \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \quad e \quad \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{array} \right) \tag{4}$$

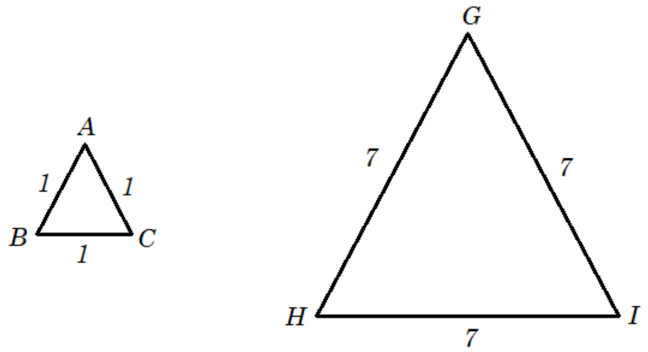
Definição 20 *Sejam* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A'B'C'$ *triângulos semelhantes, com lados medindo respectivamente* a, b, c *e* a', b', c' *(veja Figura 25). A constante de proporcionalidade dos números* a, b, c *e* a', b', c' *é chamada de razão de semelhança, e será representada por* k*, isto é:*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k.$$

Observação 1 *Dados o triângulo* $\triangle ABC$ *e um número real* $k > 0$*, sempre existe um triângulo* $A'B'C'$ *tal que:* $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$*, com constante de semelhança igual a* k*.*

Temos também que a razão k de semelhança entre dois triângulos não vale apenas para seus lados, ela se estende para quaisquer dois elementos lineares homólogos, como por exemplo o *perímetro* entre dois triângulos, como pode ser visto a seguir na Figura 26.

Figura 26: Razão entre o perímetro de dois triângulos



Temos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle GHI$ são semelhantes, e a razão entre seus lados é $k = \frac{1}{7}$, assim o perímetro do triângulos $\triangle ABC$ é $p = 3$ e o perímetro do triângulo $\triangle GHI$ é $p' = 21$, logo a razão $\frac{p}{p'} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

Em geral se consideramos o conjunto formado por todos os triângulos, a semelhança de triângulos é uma relação de equivalência neste conjunto. Isto é, vale as seguintes propriedades:

1. **Reflexiva:** todo triângulo é semelhante a si mesmo.

   $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

2. **Simétrica:** se um triângulo é semelhante a outro, esse outro é semelhante ao primeiro.

   $\triangle ABC \sim \triangle RST \Rightarrow \triangle RST \sim \triangle ABC$

3. **Transitiva**: se um triângulo é semelhante a outro, que por sua vez é semelhante a um terceiro triângulo, temos que o primeiro e o terceiro triângulo também são semelhantes.

   $\triangle ABC \sim \triangle RST \quad e \quad \triangle RST \sim \triangle XYZ \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle XYZ$

Note que a congruência de triângulos é um caso particular da semelhança de triângulos, ocorrendo quando a razão de semelhança for $k = 1$.

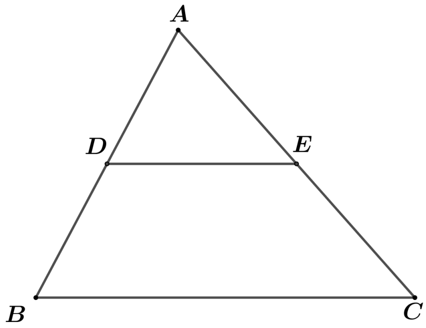
Existem situações em que podemos concluir a semelhança de dois triângulos a partir da comparação de somente três de seus lados ou ângulos, são nessas situações que aplicamos os critérios de semelhança. Este é justamente o tema da nossa próxima seção.

2.2 Critérios de Semelhança

Provar a semelhança entre dois triângulos, utilizando como método a definição, é um processo complexo e maçante, uma vez que, para isso se faz necessário averiguar as 6 condições de (4). Por isso, nesta seção provaremos alguns critérios que serão mais adequados para verificar se dois triângulos são ou não semelhantes. Perante o que foi dito, o próximo teorema será de primordial importância. Para maiores informações veja [4, 5, 12].

Teorema 2 (Teorema fundamental de semelhança:) *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

Figura 27: Teorema Fundamental de Semelhança



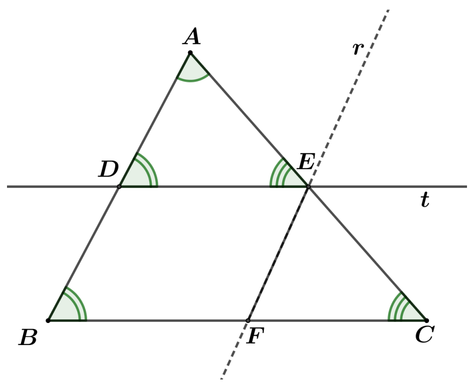
Prova: Para assegurar que dois triângulos são semelhantes, precisamos demonstrar que eles têm lados correspondentes proporcionais e ângulos ordenadamente congruentes.

A demonstração será dividida em duas partes.

1ª Parte: Lados correspondentes proporcionais:

Considere um triângulo $\triangle ABC$ e uma reta t, paralela ao lado $\overline{BC}$, e que cruze os outros lados nos pontos D e E (veja Figura 28).

Figura 28: Prova do Teorema Fundamental de Semelhança 1ª parte



Como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \tag{5}$$

Traçamos a reta r passando por E, paralela a $\overline{AB}$, que cruza o lado $\overline{BC}$ no ponto F (veja Figura 28).

Como $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, pelo Teorema de Tales, temos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}. \tag{6}$$

Logo, o quadrilátero $BDEF$ é um paralelogramo, pois $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Como lados opostos de um paralelogramo são congruentes, temos que

$$\overline{BF} = \overline{DE}. \tag{7}$$

De (6) e (7), obtemos:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}. \tag{8}$$

Com base nas igualdades (5) e (8), obtemos que

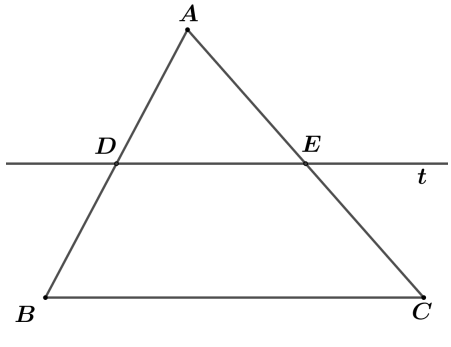
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

O que nos permite afirmar que os lados correspondentes dos triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ são proporcionais.

2ª Parte: Ângulos congruentes:

Por outro lado, considere um triângulo $\triangle ABC$ e uma reta t, paralela ao lado $\overline{BC}$, e que corte os outros lados nos pontos D e E. (veja Figura 29).

Figura 29: Prova do Teorema Fundamental de Semelhança 2ª parte



Assim $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, pelo postulado das paralelas, temos: $\widehat{D} \equiv \widehat{B} \quad e \quad \widehat{E} \equiv \widehat{C}$, pois são ângulos correspondentes e o ângulo $\widehat{A}$, é comum aos dois triângulos. Logo os ângulos correspondentes dos triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ são congruentes.

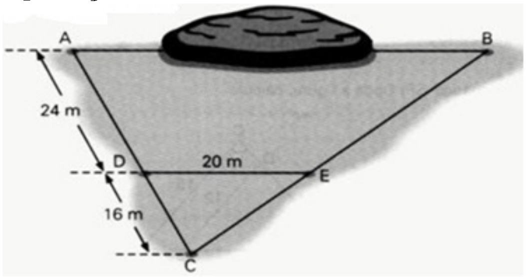
Portanto, como os ângulos correspondentes dos triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ são congruentes e os lados correspondentes proporcionais, concluímos que o triângulo $\triangle ADE$ e o triângulo $\triangle ABC$ são triângulos semelhantes. $\blacksquare$

O Teorema Fundamental de Semelhança ajuda muito na resolução de problemas que envolve segmentos que cortam os lado de um triângulo, pois sabendo que algum segmento é paralelo a qualquer um dos lados, sabemos que os segmentos sobre os lados são proporcionais.

O próximo exemplo ilustra uma aplicação do Teorema Fundamental de Semelhança.

Exemplo 2 *Se AB é paralelo a DE, determinar a medida AB da Figura 30.*

Figura 30: Aplicação do Teorema Fundamental de Semelhança



Solução: Pelo Teorema Fundamental de Semelhança, como AB é paralelo a $DE \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC$.

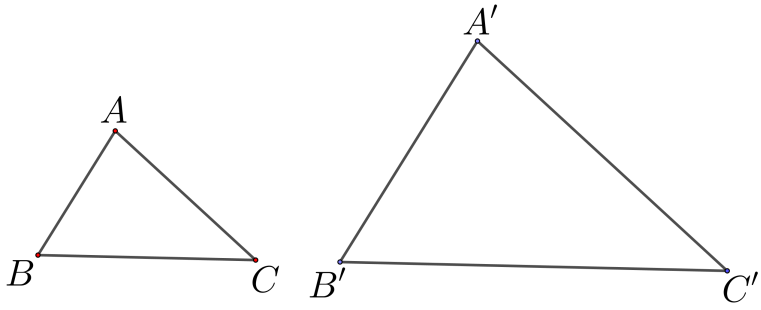
Logo,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \Rightarrow \frac{40}{16} = \frac{\overline{AB}}{20} \Rightarrow \overline{AB} = 50m.$$

Veremos a seguir, três proposições que estabelecem as condições suficientes usuais para que dois triângulos sejam semelhantes. Por tal razão, as mesmas são conhecidas como os *critérios de semelhança de triângulos.* O primeiro nos diz que precisamos apenas analisar se os lados dos triângulos são proporcionais.

Proposição 3 *(Critério de semelhança LLL) Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os lados correspondentes proporcionais. Em símbolos, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$.*

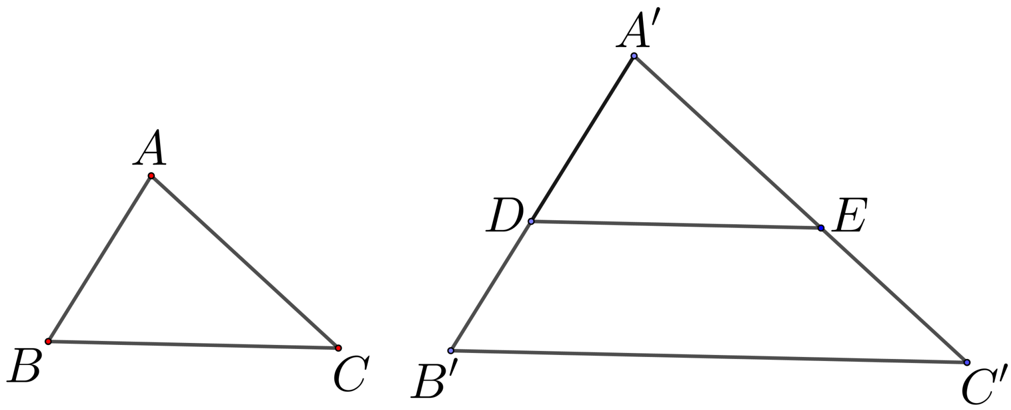
Figura 31: Triângulos semelhantes − Critério LLL



Prova: Suponha que os $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ não são congruentes. Logo, sem perda de generalidade suponha $\overline{AB} < \overline{A'B'}$.

Marque um ponto D sobre o lado $\overline{A'B'}$ de modo que $\overline{A'D} = \overline{AB}$ e tracemos um segmento DE paralelo a $B'C'$ (veja Figura 32).

Figura 32: Prova do Critério LLL



Segue do Teorema 2 que o triângulo $\triangle A'B'C'$ é semelhante ao triângulo $\triangle A'DE$. Agora temos que provar que o triângulo $\triangle ABC$ é congruente ao triângulo $\triangle A'DE$.

De fato, como os triângulos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle A'DE$ são semelhantes, temos que seus lados são proporcionais, isto é,

$$\frac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{B'C'}}.$$

Sabemos que $\overline{A'D} = \overline{AB}$, por construção da Figura 32, logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{B'C'}}. \tag{9}$$

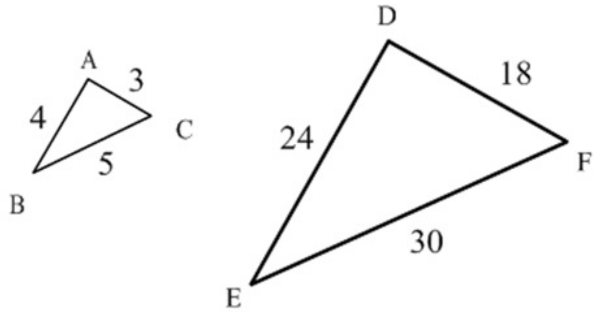
Por hipótese, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}. \tag{10}$$

Das igualdades (9) e (10), temos $\overline{A'E} = \overline{AC}$ e $\overline{DE} = \overline{BC}$. Portanto, como $\overline{AB} = \overline{A'D}, \overline{AC} = \overline{A'E}$ e $\overline{BC} = \overline{DE}$, pelo caso de congruência de triângulo LLL, o triângulo $\triangle ABC$ é congruente ao triângulo $\triangle A'DE$. Provando que $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Como já tínhamos por hipótese que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$, concluímos que o triângulo $\triangle ABC$ é semelhante ao triângulo $\triangle A'B'C'$. ■

Exemplo 3 *Os triângulos da Figura 33 são semelhantes.*

Figura 33: Aplicação do Critério LLL



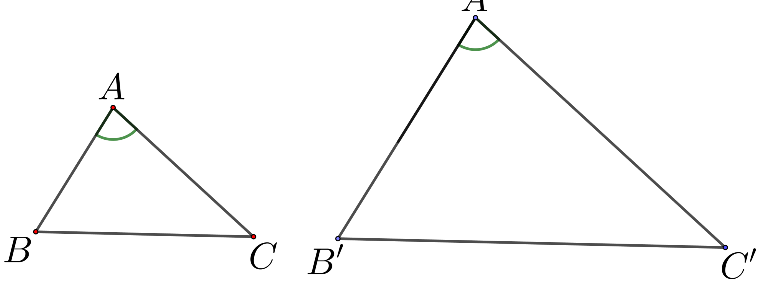
De fato, os lados correspondentes são proporcionais. Assim

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \Rightarrow \frac{4}{24} = \frac{5}{30} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

Note que os lados correspondentes são proporcionais e tem razão de semelhança igual a $\dfrac{1}{6}$, portanto os triângulos são semelhantes.

Proposição 4 *(Critério de semelhança LAL) Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem dois lados correspondentes proporcionais e o ângulo formado entre esses dois lados for congruentes. Em símbolos,* $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ *e* $\widehat{A} = \widehat{A'}$.

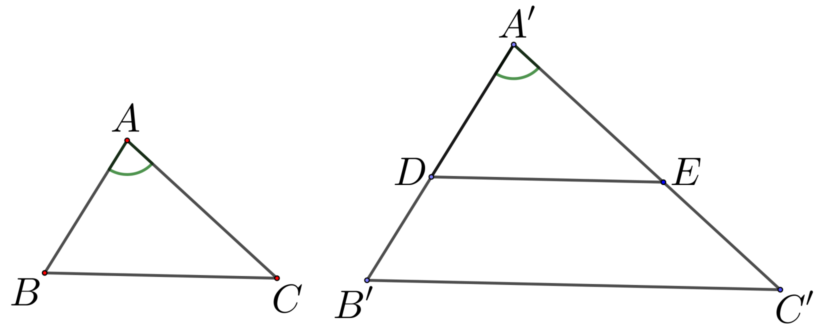
Figura 34: Triângulos semelhantes − Critério LAL



Prova: Vamos supor que $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ não são congruentes, isto é, $\overline{AB} < \overline{A'B'}$.

Marque um ponto D sobre o lado $\overline{A'B'}$ de modo que $\overline{A'D} = \overline{AB}$ e trace um segmento DE paralelo a $B'C'$ (veja Figura 35).

Figura 35: Prova do Critério LAL



Segue do Teorema 2 que os triângulos $\triangle A'DE$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes. Resta mostrar que o triângulo $\triangle ABC$ é congruente ao triângulo $\triangle A'DE$.

De fato, como $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{B'C'}$, então pelo Teorema 2 os lados correspondentes dos triângulos $\triangle A'DE$ e $\triangle A'B'C'$ são proporcionais, isto é,

$$\frac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}},$$

Por construção, temos $\overline{A'D} = \overline{AB}$, logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}}, \tag{11}$$

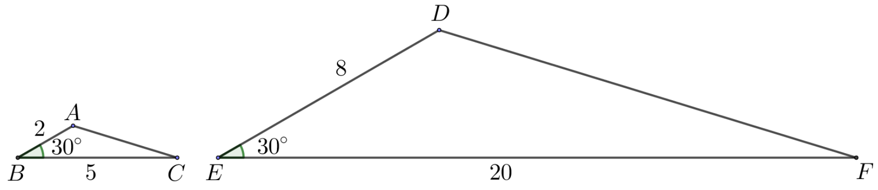
Por hipótese, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \tag{12}$$

Das igualdades (11) e (12), temos $\dfrac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$, logo $\overline{A'E} = \overline{AC}$. Portanto, como $\overline{AB} = \overline{A'D}$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'E}$, pelo critério LAL de congruência de triângulos, o triângulo $\triangle ABC$ é congruente ao triângulo $\triangle A'DE$. Com isso, provamos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes. ■

Exemplo 4 *Verifique se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ da Figura 36 são semelhantes.*

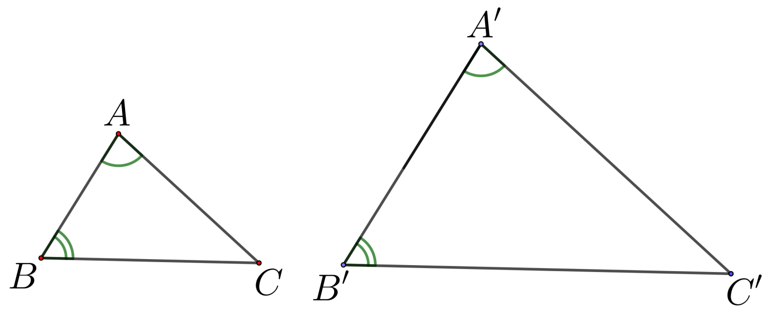
Figura 36: Aplicação do Critério LAL



Solução: De fato, observe que: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$ e o ângulo $\widehat{B} = \widehat{E}$, portanto os triângulos ABC e DEF são semelhantes pelo caso LAL.

Proposição 5 *(Critério de Semelhança AA) Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes iguais, então eles são semelhantes, ou seja, se os triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A'B'C'$*, tais que* $\widehat{A} = \widehat{A'}$ *e* $\widehat{B} = \widehat{B'}$*, então eles são semelhantes.*

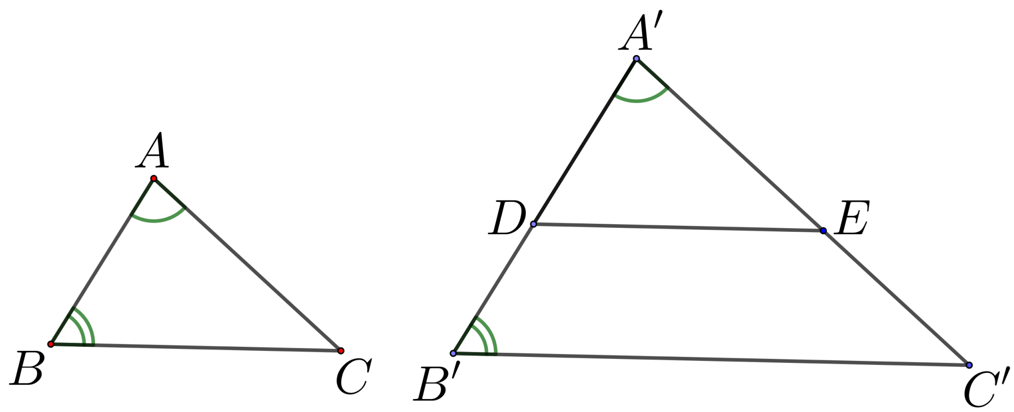
Figura 37: Triângulos semelhantes − Critério AA



Prova: Sabemos que soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, logo, a congruência dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{A'}$ e dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{B'}$ implica na congruência dos ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{C'}$.

Agora temos que provar se os lados são proporcionais. Para isto, marque um ponto D sobre o lado $A'B'$ de modo que $\overline{A'D} = \overline{AB}$. Pelo ponto D tracemos um segmento paralelo a $\overline{B'C'}$ (veja Figura 38).

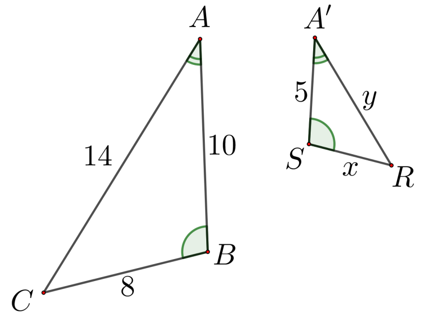
Figura 38: Prova do Critério AA



Este segmento corta o lado $\overline{A'C'}$ num ponto E, formando um triângulo $\triangle A'DE$ que é congruente ao triângulo $\triangle ABC$, pois $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\overline{AB} = \overline{A'D}$ e como $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{B'C'}$, temos $\widehat{B} = \widehat{B'} = A'\widehat{D}E$. Segue-se agora do Teorema 2 que $\dfrac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{B'C'}}$, mas sabemos que $\overline{A'D} = \overline{AB}$, $\overline{A'E} = \overline{AC}$ e $\overline{DE} = \overline{BC}$, logo obtemos $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$.
■

Exemplo 5 *Determine os valores de x e y na Figura 39 , sabendo que os triângulos são semelhantes.*

Figura 39: Aplicação do Critério AA



Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'SR$ são semelhantes pelo Critério AA de semelhança, onde $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{S}$, temos então que seus lados são proporcionais. Assim temos que:
$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'S}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AR}} \Rightarrow \dfrac{10}{5} = \dfrac{14}{y} \Rightarrow y = 7$. Por outro lado, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'S}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{RS}} \Rightarrow \dfrac{10}{5} = \dfrac{8}{x} \Rightarrow x = 4$ ■

3 APLICAÇÕES DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

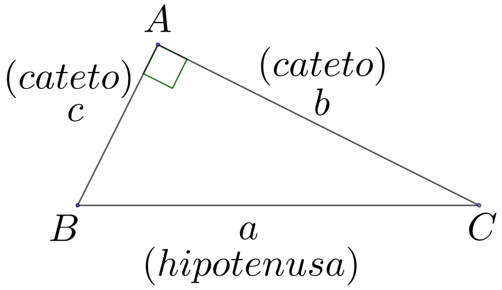
Neste capítulo, como aplicações de semelhança de triângulos, demonstraremos o Teorema de Pitágoras, o Teorema de Ptolomeu e o Teorema das Cordas, depois daremos algumas aplicações no cotidiano e por fim, apresentaremos uma atividade que pode ser feita em sala de aula para que o professor possa motivar seus alunos quanto a importância da semelhança de triângulos.

3.1 Relações métricas no triângulo retângulo

Nessa seção, determinaremos algumas relações métricas que são válidas em qualquer triângulo retângulo. Inicialmente, definimos certos elementos de um triângulo retângulo para então, aplicando semelhança de triângulos, obter algumas relações. Para mais detalhes veja [5, 11, 12, 15].

Definição 21 *Em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa, e os demais lados, são chamados catetos (veja Figura 40).*

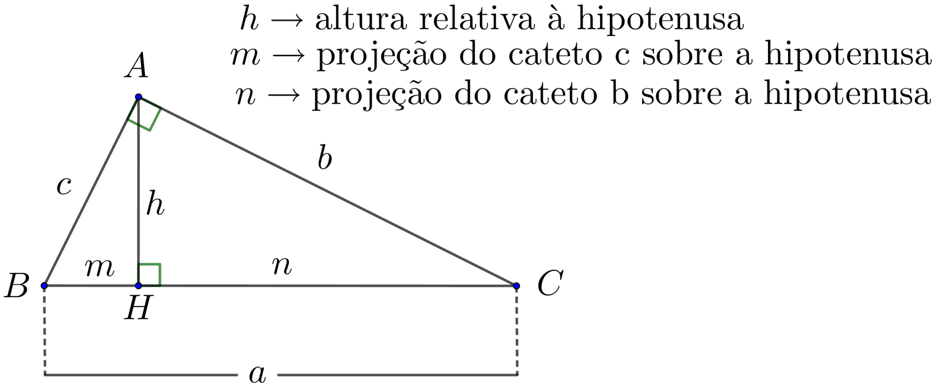
Figura 40: Triângulos Retângulo



Todo triângulo possui 3 alturas. No triângulo retângulo a altura relativa a hipotenusa desempenha um papel importante no estudo desse triângulo, pois ela divide o triângulo em dois outros triângulos retângulos semelhantes entre si.

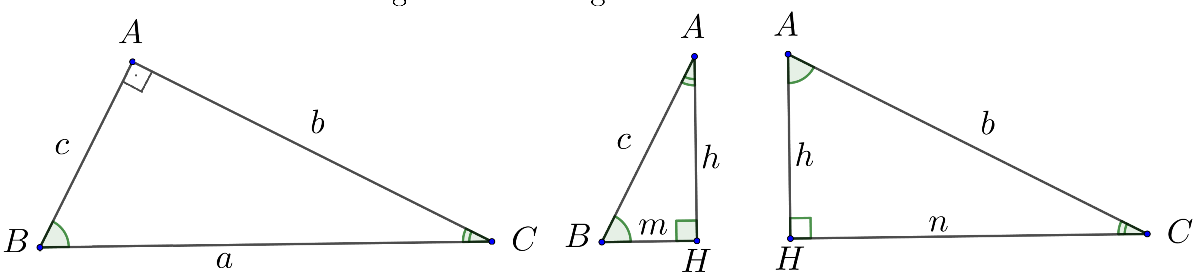
Definição 22 *O segmento formado pelo pé da perpendicular e o vértice do ângulo reto é chamado de altura relativa a hipotenusa. Por outro lado os segmentos formados pelo ponto H e os vértices da hipotenusa são chamados de projeções dos catetos sobre a hipotenusa (veja figura 41).*

Figura 41: Triângulo retângulo e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa



Proposição 6 *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo retângulo e AH sua altura. Então os triângulos $\triangle ABC, \triangle HBA$ e $\triangle HAC$ são semelhantes.*

Figura 42: Triângulos semelhantes



Prova: De fato, a altura AH divide o triângulo $\triangle ABC$ em dois triângulos retângulos, $\triangle HBA$ e $\triangle HCA$. No triângulo $\triangle ABC$, os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são complementares, pois $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$. Assim, no triângulo $\triangle HBA$, tem-se $\widehat{B} + B\widehat{A}H = 90°$. Logo $B\widehat{A}H = \widehat{C}$. Analogamente, no triângulo $\triangle HCA$, temos $C\widehat{A}H = \widehat{B}$. Portanto, os triângulos $\triangle AHB$ e $\triangle AHC$ são semelhantes ao triângulo $\triangle ABC$ e também semelhantes entre si (veja Figura 42). ■

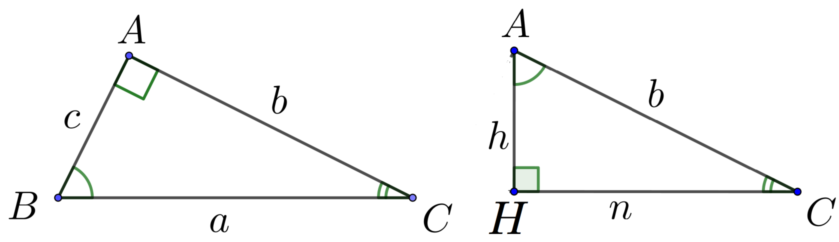
Com base nas semelhança dos triângulos citados acima e com os elementos já caracterizados, enunciaremos as seguintes relações métricas:

Corolário 3 *Em todo triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa, isto é,*

$$bc = ah.$$

Prova: Pela Proposição 6 os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HBA$ são semelhantes (Veja Figura 43) tais que leva A em H, B em A e C em C, e comparando as medidas dos lados correspondentes desses triângulos, temos:

Figura 43: Semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$



Temos então a proporcionalidade entre a medida de seus lados

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} = \frac{b}{n}.$$

Portanto,

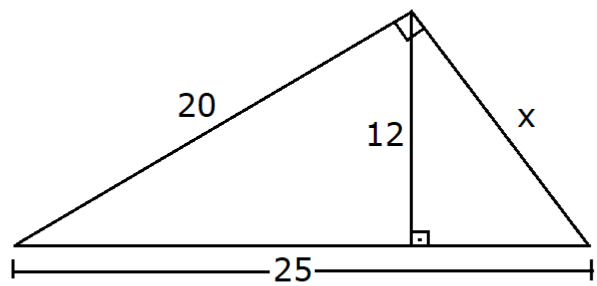
$$bc = ah.$$

■

A seguir apresentaremos um exemplo do Corolário 3, muito usado nos problemas de triângulos retângulos.

Exemplo 6 *No triângulo retângulo abaixo determinar o valor do cateto x.*

Figura 44: Aplicação do Corolário 3



Solução: Pelo Corolário 3, temos $a = 25, b = x, c = 20$ e $h = 12$, assim

$$bc = ah \Rightarrow x \cdot 20 = 25 \cdot 12 \Rightarrow x = 15.$$

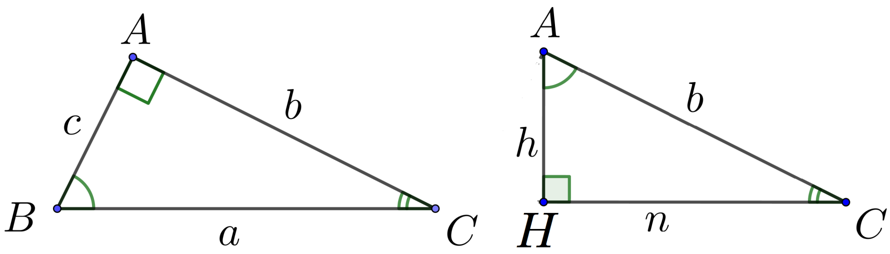
Corolário 4 *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida de um dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa, isto é,*

1) $b^2 = an$

2) $c^2 = am$

Prova: Para provar o item 1), pela Proposição 6 os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HAB$ (Veja Figura 45) que leva A em H, B em A e C em C, e comparando as medidas dos lados correspondentes desses triângulos, temos:

Figura 45: Semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$



$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}.$$

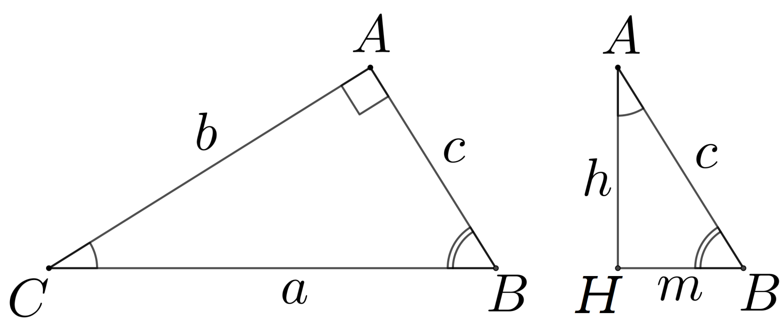
Assim, da primeira igualdade provamos que

$$b^2 = an.$$

■

Para provar o item 2), usando a proposição 6 os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HBA$ (veja Figura 46) que leva A em H, B em B e C em A, e comparando as medidas dos lados correspondentes desses triângulos, temos:

Figura 46: Semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HBA$



$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} = \frac{b}{h}.$$

Assim, da primeira igualdade provamos que

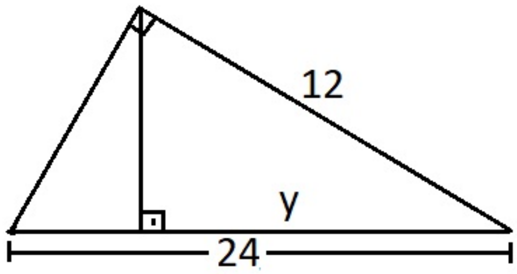
$$c^2 = am.$$

■

Daremos agora um exemplo ilustrando o corolário 4.

Exemplo 7 *No triângulo retângulo da Figura 47, determinar o valor de y.*

Figura 47: Aplicação do Corolário 4



Solução: Pelo Corolário 4, temos $a = 24, b = 12$ e $n = y$. Logo,

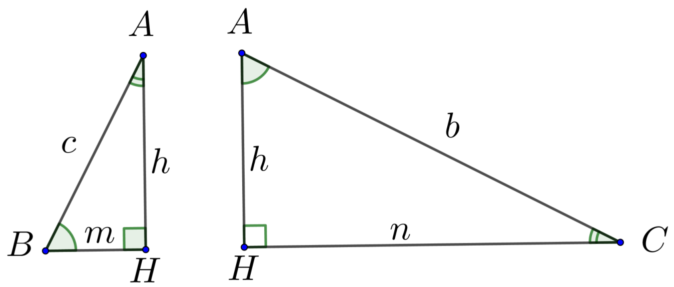
$$b^2 = an \Rightarrow 12^2 = 24 \cdot y \Rightarrow 24y = 144 \Rightarrow y = 6.$$

Corolário 5 *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, isto é,*

$$h^2 = mn.$$

Prova: Pela Proposição 6 os triângulos $\triangle HAB$ e $\triangle HCA$ (veja Figura 48) que leva H em H, A em C e B em A, e comparando as medidas dos lados correspondentes desses triângulos, temos:

Figura 48: Semelhança entre os triângulos $\triangle HAB$ e $\triangle HCA$



$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} = \frac{c}{b}.$$

Assim, da primeira igualdade provamos que

$$h^2 = mn.$$

■

A próxima aplicação é um dos mais importantes e mais uteis teorema da geometria Euclidiana Plana. É conhecido como *Teorema de Pitágoras* em homenagem a um grande geômetra da Grécia antiga.

Teorema 6 (Teorema de Pitágoras) *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos. Em símbolos, sejam $\triangle ABC$ triângulo retângulo com hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c, logo*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Prova: Para demonstrar o Teorema de Pitágoras, basta adicionar, membro a membro, as relações $am = c^2$ e $an = b^2$.

$$am + an = b^2 + c^2$$

$$a(m + n) = b^2 + c^2$$

Como $m + n = a$, Obtemos:

$$a \cdot a = b^2 + c^2.$$

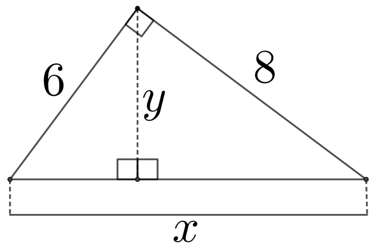
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

■

Mostraremos a seguir um exemplo bastante usado na aplicação do Teorema de Pitágoras.

Exemplo 8 *Determinar os valores de x e y no triângulo da Figura 49.*

Figura 49: Aplicação das relações métricas



Solução: Vamos usar o Teorema de Pitágoras e o Corolário 3 para determinar os valores de x e y.

Do Teorema de Pitágoras temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10.$$

Do Corolário 3 temos

$$bc = ah \Rightarrow 6.8 = y.10 \Rightarrow y = 4,8.$$

Faremos também a recíproca do Teorema de Pitágoras, muito útil para verificar se um triângulo é retângulo. Para maiores detalhes veja [5].

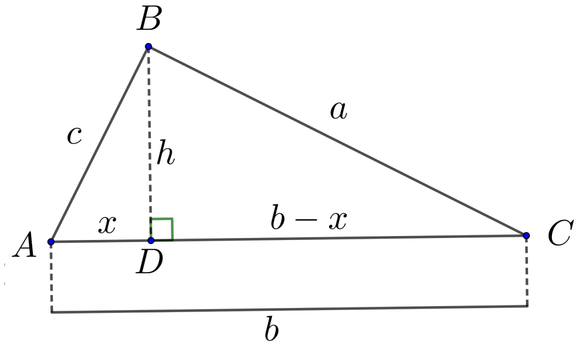
Proposição 7 (Recíproca do Teorema de Pitágoras) *Seja ABC um triângulo cujas medidas de seus lados sejam a, b e c. Se em algum caso tivermos $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo ABC é retângulo.*

Prova: Considere um triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{AB} = c$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{BC} = a$, com $c \leq b$. vamos considerar os seguintes casos:

1° caso: $\widehat{A} < 90°$

Seja D a projeção do vértice B sobre o lado AC, considere ainda, $\overline{AD} = x$ e $\overline{BD} = h$ (veja Figura 50)

Figura 50: Demonstração da Proposição 7



Como $\triangle ADB$ e $\triangle CDB$ são triângulos retângulos, temos:

Do triângulo $\triangle ADB$ que:

$$c^2 = h^2 + x^2.$$

Do triângulo $\triangle CDB$ que

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 \rightarrow a^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2.$$

Assim de $c^2 = h^2+x^2$, temos que $h^2 = c^2-x^2$, e substituindo em $a^2 = h^2+b^2-2bx+x^2$, obtemos:

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2,$$

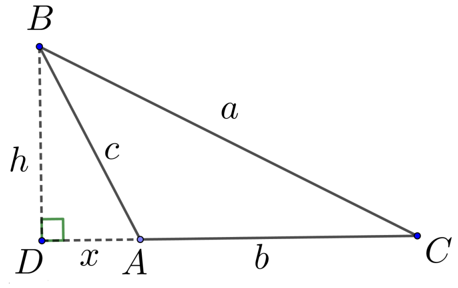
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

Ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, o que contradiz a condição inicial.

2° caso: $\widehat{A} > 90°$

Neste caso, a projeção do vértice B não estará sobre o lado AC. considere $\overline{AD} = x$ e $\overline{BD} = h$ (veja Figura 51).

Figura 51: Demonstração da Proposição 7



Como $\triangle ABD$ e $\triangle CDB$ são triângulos retângulos, chegamos facilmente a $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$, ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, o que contraria mais uma vez a condição inicial.

Logo, concluímos que se em um triângulo $\triangle ABC$, de lados a, b e c, $a^2 = b^2+c^2$ implica necessariamente $\widehat{A} = 90°$, ou seja, é um triângulo retângulo e sua hipotenusa é o lado com medida a. ■

Agora faremos uma da aplicação sobre a recíproca do Teorema de Pitágoras.

Exemplo 9 *Verifique se o triângulo cujos lados medem 8, 15 e 17 é um triângulo retângulo.*

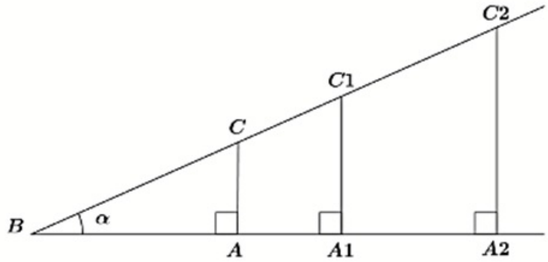
De fato, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, temos $17^2 = 8^2 + 15^2$, logo, é um triângulo retângulo com a hipotenusa sendo o lado de medida 17.

3.2 Razões trigonométricas de um ângulo agudo

Nesta seção, determinaremos as razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, em relação a um de seus ângulos agudos. Chamaremos essas razões de trigonométricas, que serão denotadas por *seno*, *cosseno* e *tangente*. Tais razões trigonométricas nos permitirão calcular indiretamente distâncias e ângulos. Mais informações podem ser encontradas em [2] e [5].

Considere O triângulo $\triangle ABC$, retângulo em A. Podemos construir triângulos semelhantes a ele do seguinte modo. Traçamos as semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, marcamos sobre a semirreta $\overrightarrow{BA}$ os pontos $A_1, A_2, ...$ e por eles, traçamos perpendiculares que ao se encontrar com o outra semirreta $\overrightarrow{BC}$, determina os pontos $C, C_1, C_2, ...$ respectivamente (veja Figura 52).

Figura 52: Triângulos Semelhantes para obter as razões trigonométricas



Como os triângulos $\triangle BAC$, $\triangle BA_1C_1$, $\triangle BA_2C_2, ...$ são todos semelhantes Pelo caso AA de semelhança de triângulos, podemos estabelecer a proporcionalidade entre as razões:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BC_2}} = ... = r_1$$

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_2}} = ... = r_2$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BA_2}} = ... = r_3$$

O número r_1 encontrado é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo agudo α e a medida da hipotenusa.

O número r_2 encontrado é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo agudo α e a medida da hipotenusa.

O número r_3 encontrado é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo agudo α e a medida do cateto adjacente ao ângulo α.

A seguir definiremos três razões entre os lados de um triângulo retângulo. Elas são conhecidas como razões trigonométricas, e são usadas para determinar a medida de um lado desconhecido do triângulo retângulo, sendo conhecido apenas a medida do ângulo agudo e de um lado. Dessa maneira é importante facilitar a identificação dessas razões usando a seguinte nomenclatura:

Definição 23 *A razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa é chamada de seno de α.*

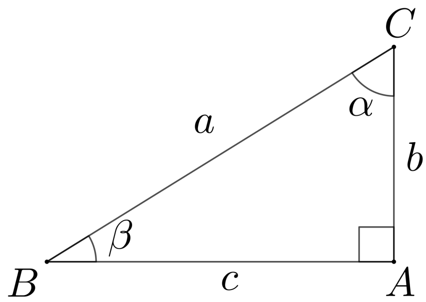
Definição 24 *A razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa é chamada de cosseno de α.*

Definição 25 *A razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α é chamada de tangente de α.*

Usaremos *sen* α, *cos* α e *tg* α para abreviar seno de α, cosseno de α e tangente de α, respectivamente. Note que os números *sen* α, *cos* α e *tg* α não dependem do tamanho do triângulo, mas apenas do valor do ângulo α, pois todo triângulo retângulo que possui o mesmo ângulo α são semelhantes.

Assim, considerando o triângulo retângulo $\triangle ABC$, indicado na Figura 53:

Figura 53: Triângulo Retângulo com os ângulos β e α



onde, $\beta + \alpha = 90°$, ($\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são complementares), $\overline{AC}$: cateto oposto a $\widehat{B}$ e adjacente a $\widehat{C}$, $\overline{AB}$: cateto oposto a $\widehat{C}$ e adjacente a $\widehat{B}$.

Assim, dependendo do ângulo, medidas das razões podem mudar, isto é:

Para o seno, temos:

$$sen\ \beta = \frac{b}{a}$$

$$sen\ \alpha = \frac{c}{a}$$

Para o cosseno, temos:

$$cos\ \beta = \frac{c}{a}$$

$$cos\ \alpha = \frac{b}{a}$$

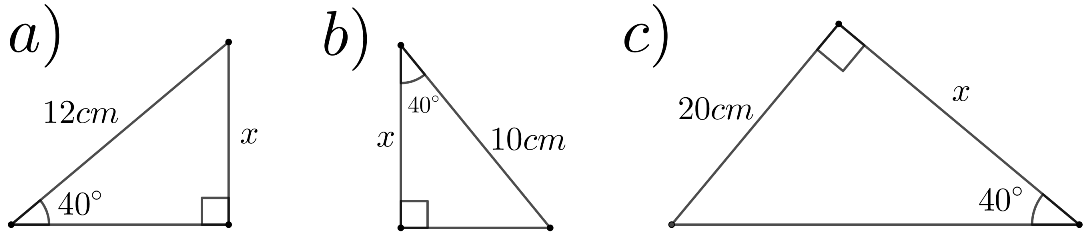
Para a tangente, temos:

$$tg\ \beta = \frac{b}{c}$$

$$tg\ \alpha = \frac{c}{b}$$

Exemplo 10 *Adotando sen* $40° = 0,64, cos\ 40° = 0,76$ *e* $tg;\ 40° = 0,84$*, determine as medidas indicadas por* x *nos triângulos da Figura 54:*

Figura 54: Aplicação das razões trigonométricas



Solução:

a) No triângulo retângulo temos os elementos:

angulo agudo 40º, cateto oposto ao ângulo x e hipotenusa $12cm$

A razão trigonométrica adequada para encontrar o valor de x é o seno. Logo,

$$sen\ 40° = \frac{x}{12} \Rightarrow 0,64 = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 7,68cm$$

b) No triângulo retângulo temos os elementos:

angulo agudo 40°, cateto adjacente ao ângulo x e hipotenusa $10cm$

A razão trigonométrica adequada para encontrar o valor de x é o cosseno. Logo,

$$cos\ 40° = \frac{x}{10} \Rightarrow 0,76 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 7,6cm$$

c) No triângulo retângulo temos os elementos:

angulo agudo 40°, cateto adjacente ao ângulo x e cateto oposto ao ângulo $20cm$

A razão trigonométrica adequada para encontrar o valor de x é o tangente. Logo,

$$tg\ 40° = \frac{20}{x} \Rightarrow 0,84 = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 23,8cm$$

3.3 Teorema de Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu, foi um matemático e astrônomo grego do século II d.C. Ele ficou conhecido por seus trabalhos sobre astronomia, principalmente por haver proposto a (equivocada) Teoria Geocêntrica, segundo a qual a Terra ocupava o centro do Universo. Na matemática, seu grande legado foi o Teorema de Ptolomeu. Para compreender o enunciado de seu teorema, necessitamos inicialmente da seguinte definição:

Definição 26 *Um quadrilátero convexo é dito inscritível se seus quatro vértices podem ser colocados sobre uma circunferência. Assim um quadrilátero convexo é inscritível se, e só se, uma das condições a seguir for satisfeita:*

a) a soma de seus ângulos opostos é 180 graus.

b) os ângulos formados pelas diagonais e um dos lados forem congruentes.

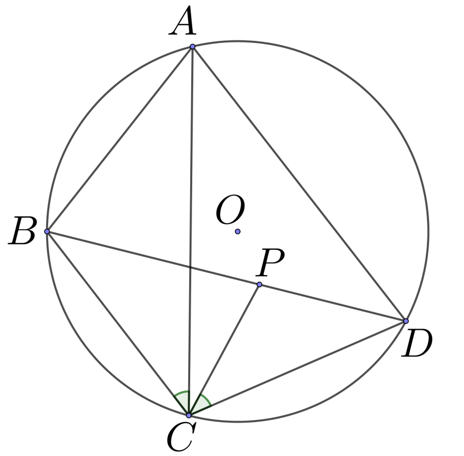
Definição 27 *Se AB e BC são cordas de um circulo de centro O, então a medida do ângulo inscrito $B\widehat{A}C$ é igual à metade da medida do ângulo central $B\widehat{O}C$ correspondente.*

Teorema 7 (Teorema de Ptolomeu) *Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então o produto das diagonais desse quadrilátero é igual a soma dos produtos dos lados opostos, isto é,*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

Prova: Marque o ponto P sobre a diagonal $\overline{BD}$, tal que $P\widehat{C}D = A\widehat{C}B$ (veja Figura 55). Como $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C = \dfrac{1}{2}\widehat{BC}$, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DPC$ são semelhantes pelo caso AA. Daí,

Figura 55: Teorema de Ptolomeu



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{DP} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC}}.$$

Analogamente, também são semelhantes os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BPC$, de maneira que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{BP} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

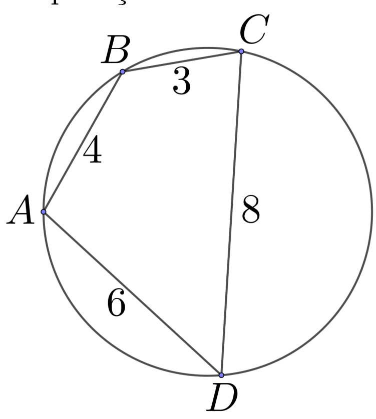
Agora, as duas relações obtidas acima nos dão

$$\overline{BD} = \overline{BP} + \overline{PD} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

■

Exemplo 11 *Determine o produto das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ no quadrilátero inscritível abaixo com suas mediadas dadas em cm.*

Figura 56: Aplicação do Teorema de Ptolomeu



Pelo Teorema de Ptolomeu temos que, $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 4 \cdot 8 + 6 \cdot 3 \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 32 + 18 = 50cm$.

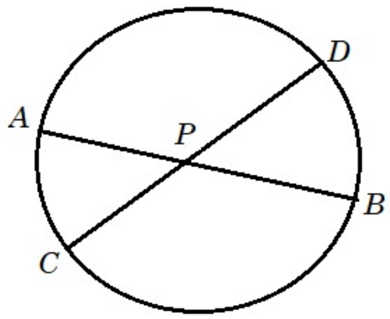
3.4 Teorema das Cordas

A circunferência possui importantes relações métricas envolvendo segmentos internos, secantes e tangentes. Através dessas relações obtemos as medidas das cordas sobre uma circunferência. Para isso o próximo teorema desenvolverá um papel fundamental.

Teorema 8 (Teorema das Cordas) *Sejam AB e CD duas cordas distintas de um mesmo círculo, que se interceptam num ponto P. Então o produto das medidas dos segmentos de uma corda é igual ao produto das medidas dos segmentos da outra, isto é,*

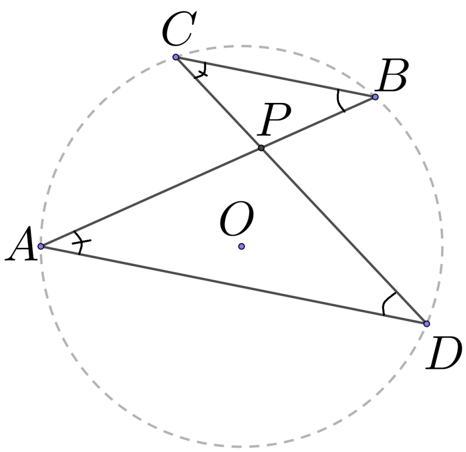
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Figura 57: Teorema das cordas



Prova: Trace os segmentos AD e BC (veja Figura 58). Pelo definição 27, temos $A\widehat{B}C = A\widehat{D}C$ ou, $P\widehat{B}C = A\widehat{D}P$. Como $B\widehat{P}C = A\widehat{P}D$ (pois são ângulos OPV), segue do caso de semelhança AA que $\triangle PBC \sim \triangle PDA$. Daí, temos $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PA}}$, e portanto, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

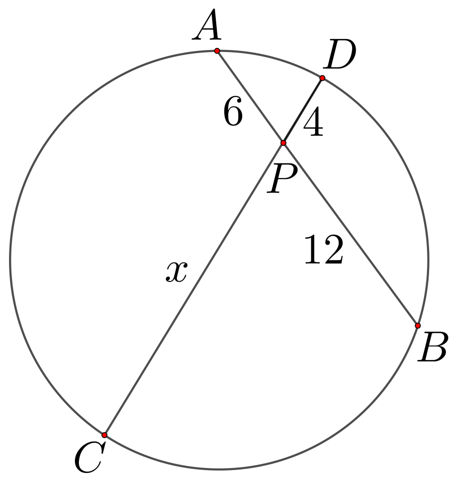
Figura 58: Teorema das cordas



Mostraremos a seguir uma aplicação do teorema das Cordas.

Exemplo 12 *Determine o valor do segmento $\overline{CP}$ no círculo abaixo:*

Figura 59: Aplicação do Teorema das cordas



Solução: Pelo Teorema da Cordas

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} \Rightarrow 6 \cdot 12 = x \cdot 4 \Rightarrow 4x = 72 \Rightarrow x = 18$$

3.5 Resolução de Problemas

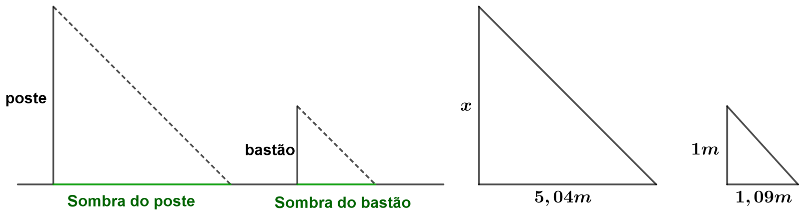
Nessa seção vamos mostrar a aplicação de semelhança de triângulos na resolução de alguns problemas práticos do cotidiano.

Nosso primeiro exemplo vai ilustrar uma forma bem simples e prática de como o professor pode mostrar para seus alunos o uso de semelhança de triângulos na prática.

Suponha que próximo a um colégio tenha um poste, um prédio ou uma árvore, de altura inacessível. Para medir a sua altura destes, podemos proceder da seguinte maneira. Fixamos um pedaço de madeira de comprimento 1 metro, de modo que forme com o solo um ângulo de 90º, depois com auxílio de uma trena medimos no mesmo instante o comprimento das sombra do pedaço de madeira e do objeto a ser medido. Como a altura é medida na perpendicular em relação ao solo, portanto faz ângulo de 90º. Como as sombras são medidas no mesmo instante e os objetos estão próximos, o ângulo de incidência do Sol é o mesmo. Deste modo, com as medidas encontradas formaremos triângulos semelhantes pelo critério AA, logo seus lados correspondentes serão proporcionais.

Exemplo 13 *Um poste projeta uma sombra de 5,04 metros ao mesmo tempo em que um pedaço de madeira fixado ao solo, de 1 metro projeta uma sombra de 1,09 metros. Qual é a altura do poste, sabendo que o poste e o pedaço de madeira estão perpendiculares ao solo?*

Figura 60: Aplicação de semelhança de triângulos

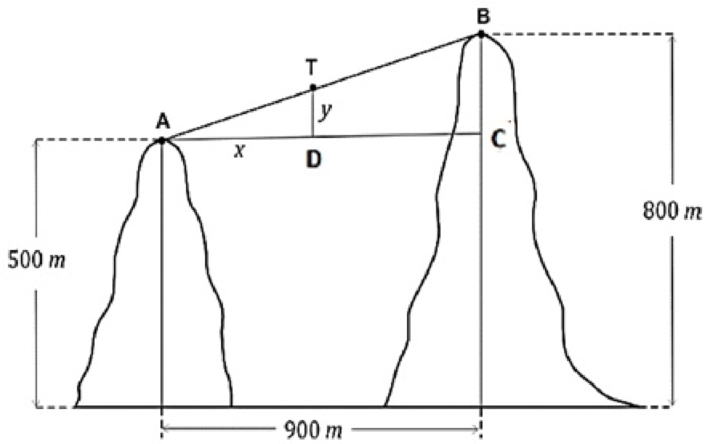


Como os triângulos formados são semelhantes, onde x representa a altura do poste, que é o que queremos calcular, temos então que:

$$\frac{x}{1} = \frac{5,04}{1,09} \Rightarrow 1,09x = 5,04 \Rightarrow x = 4,6m.$$

Exemplo 14 *Um teleférico é usado para transportar pessoas entre os picos A e B de dois morros. A altitude do pico A é de* $500m$*, a altitude do pico B é de* $800m$ *e a distância entre as retas verticais que passam por A e B é de* $900m$*. Na figura, T representa o teleférico em um momento de sua ascensão e x e y representam, respectivamente, os deslocamentos horizontal e vertical do teleférico, em metros, até este momento. Qual é o deslocamento horizontal do teleférico quando o seu deslocamento vertical é igual a* $20m$*?*

Figura 61: Aplicação de semelhança de triângulos

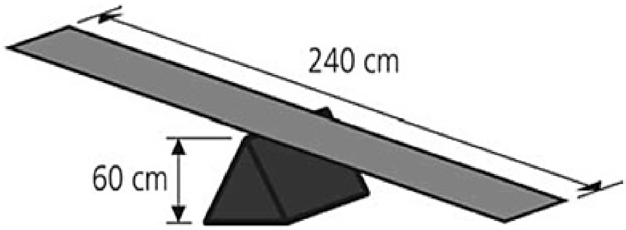


Solução: Temos que os triângulos $\triangle ATD$ e $\triangle ABC$ são semelhantes, assim seus lados correspondentes são proporcionais. Daí $\overline{AD} = x, \overline{DT} = 20m, \overline{AC} = 900m$ e $\overline{BC} = 300m$, logo,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DT}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{x}{900} = \frac{20}{300} \Rightarrow 300x = 18000 \Rightarrow x = 60m.$$

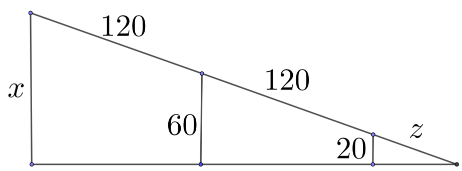
Exemplo 15 *Considere uma gangorra composta por uma tábua de* $240cm$ *de comprimento, equilibrada, em seu ponto central, sobre uma estrutura na forma de um prisma* *de base triangular de altura 60cm, como mostra a figura. Suponha que a gangorra esteja instalada sobre um piso perfeitamente horizontal. Desprezando a espessura da tábua e supondo que a extremidade direita da gangorra esteja a 20cm do chão, determine a altura da extremidade esquerda.*

Figura 62: Aplicação de semelhança de triângulos



Solução: A figura abaixo mostra o triângulo obtido pelo prolongamento do segmento de reta que representa a tábua, até que ele encontre a linha horizontal que representa o chão.

Figura 63: Aplicação de semelhança de triângulos



Usando a semelhança de triângulos, para encontrar o valor de z, obtemos

$$\frac{60}{20} = \frac{120+z}{z} \Rightarrow 3z = 120 + z \Rightarrow z = 60cm$$

Recorrendo, novamente, à propriedade de semelhança de triângulos, agora para calcular o valor de x, concluímos que

$$\frac{x}{20} = \frac{120+120+z}{z} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{300}{60} \Rightarrow x = 100cm$$

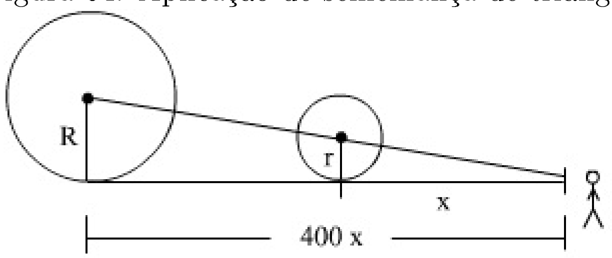
.

O próximo exemplo mostra como foi a ideia que Aristarco usou para calcular o raio do Sol no século III a.C. aplicando os conceitos semelhança de triângulos. Isso mostra a importância do estudo de semelhança de triângulo também na área da Astronomia.

Exemplo 16 *Num eclipse total do sol, o disco lunar cobre exatamente o disco solar, o que comprova que o ângulo sob o qual vemos o Sol é o mesmo sob o qual vemos a Lua. Considerando que o raio da Lua é 1738 km e que a distância da Lua ao Sol é 400 vezes a da Terra à Lua, calcule o raio do Sol.*

Solução: Inicialmente mostraremos a imagem abaixo, que ilustra o problema pedido.

Figura 64: Aplicação de semelhança de triângulos



Fonte: [19]

Assim temos, conforme a figura 64, que o triângulo menor é semelhante a triângulo maior, segue da definição de semelhança de triângulos que seus lados correspondentes são proporcionais, assim

$$\frac{x}{400x} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{x}{400x} = \frac{1738}{R} \Rightarrow R = 695200km.$$

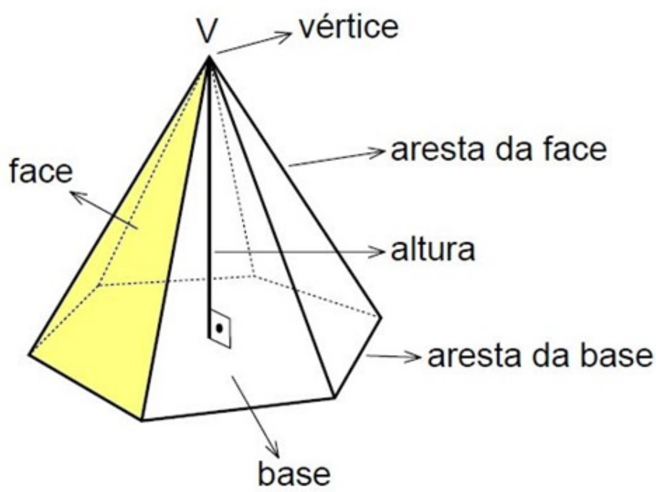
4 SEMELHANÇA DE PIRÂMIDES

Neste capítulo, iremos associar retas paralelas com proporcionalidade, através do Teorema de Tales e de semelhança de triângulos. Faremos um estudo sobre Pirâmides, para isto, inicialmente temos que definir de maneira precisa o que é uma pirâmide. Uma discussão mais completa poderá ser encontrada em [13] e [16].

Definição 28 *Dados um polígono convexo P contido em um plano e um ponto V não pertencente a esse plano, tracemos todos os possíveis segmentos de reta que têm uma extremidade em V e outra num ponto do polígono. A reunião desses segmentos é um sólido chamado de pirâmide.*

Em uma pirâmide o ponto V é chamado de vértice, o polígono convexo P é a base da pirâmide, os segmentos que formam a base são as arestas das bases (l), os segmentos formados pelo vértice e um ponto do polígono são as arestas laterais (a), os triângulos formados são as faces laterais e a distância de V ao plano da base é a altura da Pirâmide (h).

Figura 65: Elementos de uma Pirâmide



4.1 Teorema de Tales no Espaço

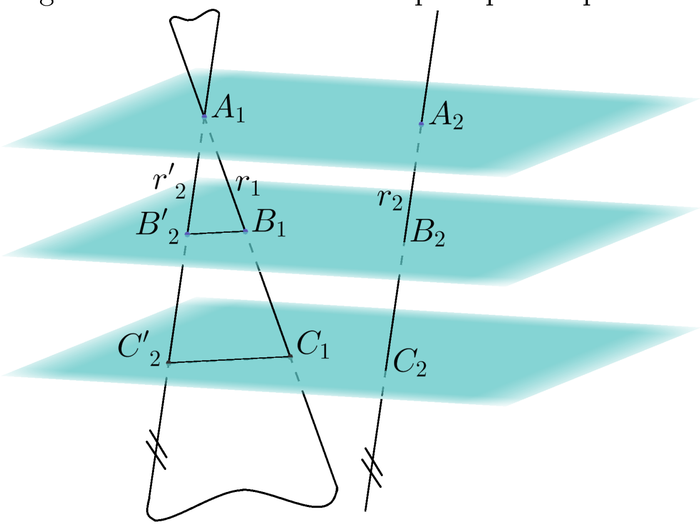
Para estudarmos semelhança de pirâmides, precisamos de uma definição análoga ao de seguimentos proporcionais no plano, isto é, precisamos definir quando dois seguimentos no espaço são proporcionais. Este é exatamente o conteúdo do próximo teorema.

Definição 29 *Dois segmentos de retas paralelos compreendidos entre planos paralelos são iguais.*

Teorema 9 (Teorema de Tales no espaço) *Um feixe de planos paralelos determina segmentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.*

Prova: Sejam α, β e γ três planos paralelos e sejam r_1 e r_2 duas retas secantes quaisquer (veja Figura 66). A demonstração consiste em reduzir o teorema para seu correspondente no plano. Assim a reta r_1 corta os planos nos pontos A_1, B_1 e C_1 e r_2 corta os mesmos planos nos pontos A_2, B_2 e C_2. Pelo ponto A_1 de r_1 traçamos uma reta r_2' paralela a r_2, que corta os três planos nos pontos A_1, B_2' e C_2'. As retas r_1 e r_2' determinam um plano, que corta β e γ segundo as retas paralelas B_1B_2' e C_1C_2'.

Figura 66: Teorema de Tales para planos paralelos



Logo, pelo Teorema de Tales para as retas paralelas, temos

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1B_2'}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2'C_2'}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1C_2'}}$$

Mas pela Definição 29 , temos que $\overline{A_1B_2'} = \overline{A_2B_2}$, $\overline{B_2'C_2'} = \overline{B_2C_2}$ e $\overline{A_1C_2'} = \overline{A_2C_2}$. Portanto,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_2C_2}}.$$

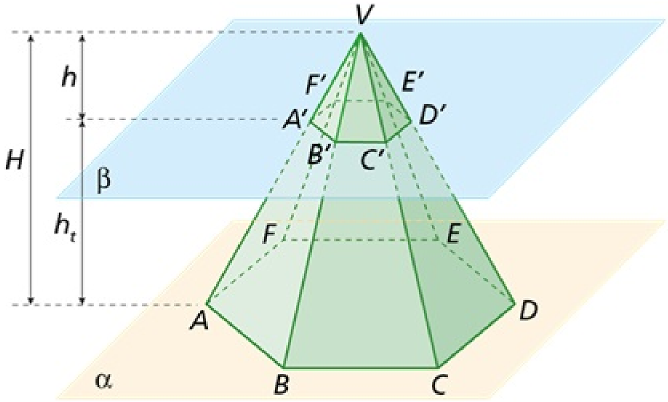
■

4.2 Um Estudo Sobre Semelhança de Pirâmides

Agora, de posse desse Teorema de Tales no Espaço podemos apresentar as relações entre os elementos de duas piramides e verificar se elas são ou não semelhantes.

Considere uma Pirâmide no plano α de base $AB...F$ e vértice V. Tracemos um plano β paralelo à base, que corta as arestas laterias segundo o polígono $A'B'...F'$ e que divide a pirâmide em dois poliedros: um deles é a pirâmide de base $A'B'...F'$ e o outro é chamado de tronco de pirâmide de bases $AB...F$ e $A'B'...F'$. Consideremos as duas pirâmides e examinaremos suas faces laterais.

Figura 67: Pirâmides semelhantes



Tomaremos para demonstração apenas uma face lateral, visto que as outras são iguais.

Considere as faces $VB'C'$ e VBC das pirâmides da Figura 67. Queremos mostrar que os triângulos que formam essas faces são semelhantes. De fato, pelo Teorema 9 os segmentos $\dfrac{\overline{VB'}}{\overline{VC'}} = \dfrac{\overline{VB}}{\overline{VC}}$ e como ângulo $\widehat{V}$ é comum aos dois triângulos. Logo o triângulo $\triangle VB'C'$ é semelhante ao triângulo $\triangle VBC$, consequentemente seus lados são proporcionais, isto é,

$$\frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{VC'}}{\overline{VC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = k.$$

Acabamos de mostrar que existe uma razão de semelhança entre os elementos das faces das pirâmides. Mas isso não é suficiente para afirmarmos que as duas pirâmides são semelhantes, temos que provar para quaisquer dois segmentos correspondentes das duas pirâmides.

Suponha um ponto P pertencente a pirâmide $VAB...F$ seu correspondente na pirâmide $VA'B'...F'$ será o ponto P' sobre VP de modo que $\dfrac{\overline{VP'}}{\overline{VP}} = k$. Além disso, tomando um outro segundo par de pontos correspondentes Q e Q', novamente os triângulos $\triangle VP'Q'$ e $\triangle VPQ$ são semelhantes na razão k, o que implica em $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = k$. Logo, a razão entre os segmentos correspondentes nas duas pirâmides é sempre igual a k.

Portanto, as duas pirâmides são semelhantes, pois é possível estabelecer uma correspondência entre seus pontos de modo que a razão entre os comprimentos de segmentos correspondentes nas duas figuras sejam sempre proporcionais.

Considere duas pirâmides semelhantes (veja Figura 67) de razão de semelhança k. Temos as seguintes propriedades.

1. As razões entre as arestas laterais, as arestas das bases e as alturas das duas pirâmides h e H serão iguais:

$$\frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{h}{H} = k$$

2. As razões entre as áreas das bases A_b e A_B, entre as áreas laterias A_l e A_L e entre as áreas totais A_t e A_T é igual ao quadrado da razão de semelhança, isto é,

$$\frac{A_b}{A_B} = \frac{A_l}{A_L} = \frac{A_t}{A_T} = k^2.$$

Prova: Como as bases são polígonos semelhantes, então as razões entre os respectivos semiperímetros e as medidas dos apótemas das bases correspondentes, são tais que $\frac{p}{P} = \frac{x}{X} = k$, assim

$$\frac{A_b}{A_B} = \frac{p \cdot x}{P \cdot X} = \frac{p}{P} \cdot \frac{x}{X} = k \cdot k = k^2$$

3. A razão entre os volumes v e V é igual ao cubo da razão de semelhança, isto é,

$$\frac{v}{V} = k^3.$$

Prova: Sejam v e V os volumes das duas pirâmides, como $\frac{A_b}{A_B} = k^2$ e $\frac{V}{H} = k$, temos que

$$\frac{v}{V} = \frac{\frac{1}{3}A_b \cdot h}{\frac{1}{3}A_B \cdot H} = \frac{A_b}{A_B} \cdot \frac{h}{H} = k^2 \cdot k = k^3$$

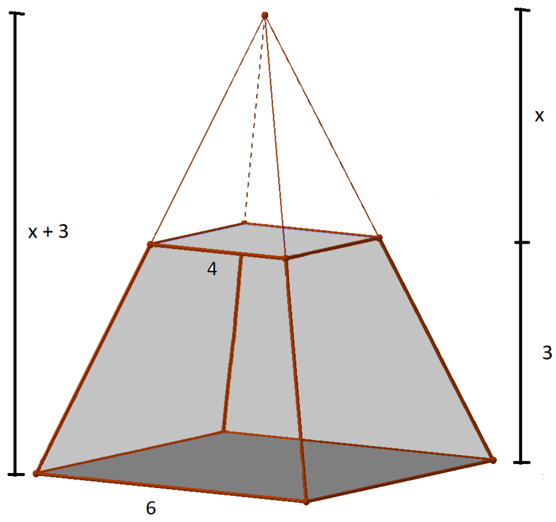
4.3 Aplicações

Faremos a seguir três aplicações onde usamos a razão de semelhança de Pirâmides e suas propriedades nas resoluções.

Exemplo 17 *Calcule o volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular, cujas arestas medem* $4cm$ *e* $6cm$ *e sua altura é* $3cm$.

Solução: Vamos imaginar a pirâmide que deu origem a esse tronco, como segue

Figura 68: Exemplo sobre Semelhança de Pirâmide



x: medida da altura da pirâmide obtida

x + 3: medida da altura da pirâmide original

Assim a razão entre o lado da base da pirâmide obtida pelo lado da base da pirâmide original é $\frac{2}{3}$.

Logo, a razão entre suas alturas é igual a razão dos lados das bases, assim

$$\frac{x}{x+3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 6cm,$$

e consequentemente $x + 3 = 9cm$.

Agora pra determinar o volume do tronco precisamos encontrar o volume da pirâmide original e depois subtrair do volume da nova pirâmide. Daí,

Volume da pirâmide original:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot (x+3) = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 9 \Rightarrow V = 108cm^3$$

Volume da nova pirâmide:

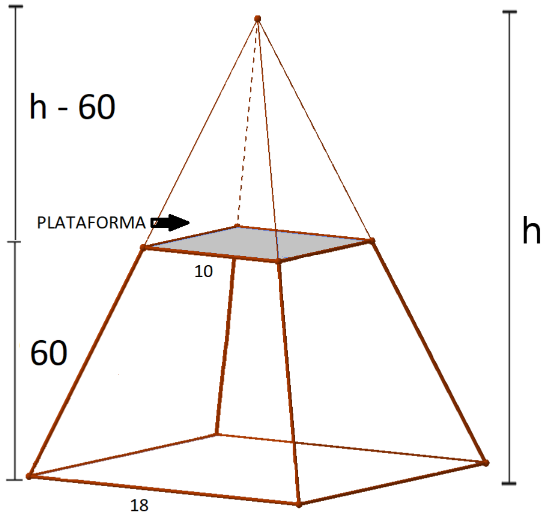
$$V' = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 \Rightarrow V' = 32cm^3$$

Logo, o volume do tronco é:

$$V - V' = 108 - 32 = 76cm^3.$$

Exemplo 18 *A figura abaixo representa uma torre, na forma de uma pirâmide regular de base quadrada, na qual foi construída uma plataforma, a 60 metros de altura, paralela a base. Se os lados da base e da plataforma medem, respectivamente, 18 e 10 metros, qual a altura da torre, em metros?*

Figura 69: Exemplo sobre Semelhança de Pirâmide



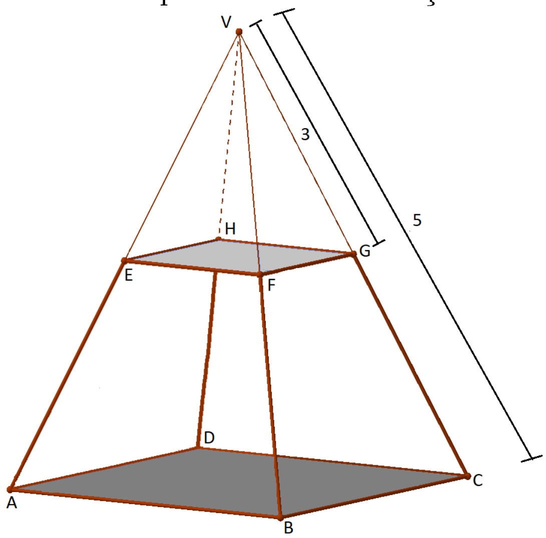
Solução: Como as pirâmides formadas na figura são semelhantes, temos que a razão entre os lados da base da pirâmide e da plataforma é igual a razão entre a altura da pirâmide e a altura a da plataforma ao topo da pirâmide. Assim sendo h a altura da pirâmide, a altura da plataforma ao topo da pirâmide será $h - 60$, lodo usando as propriedades de semelhança entre pirâmides temos que

$$\frac{18}{10} = \frac{h}{h-60} \Rightarrow 18h - 1080 = 10h \Rightarrow 8h = 1080 \Rightarrow h = 135.$$

Portanto a pirâmide tem 135 metros de altura.

Exemplo 19 *Na pirâmide quadrangular da Figura 70 os planos que passam por A, B, C e D e por E, F, G e H são paralelos. Se as arestas $VG = 3cm$, $VC = 5cm$ e a área da base $EFGH = 18cm^2$, qual a área da base $ABCD$?*

Figura 70: Exemplo sobre Semelhança de Pirâmide



Solução: Como as pirâmides $VEFGH$ e $VABCD$ são semelhantes pois possuem as bases paralelas, temos que a razão entre as arestas laterais $\dfrac{\overline{VG}}{\overline{VC}} = \dfrac{3}{5}$, e seja a área da base menor representada por A_b igual a 18 e área da base maior representada por A_B. Segue então da propriedade de semelhança de Pirâmides que o quadrado da razão entre as duas arestas das pirâmides é igual a razão entre as áreas das bases, assim

$$\frac{A_b}{A_B} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{18}{A_B} = \frac{9}{25} \Rightarrow A_B = \frac{18 \cdot 25}{9} \Rightarrow A_B = 50$$

Portanto, a área da base $ABCD$ é igual a $50cm^2$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo fazer um estudo da semelhança de triângulos e suas aplicações. O ensino de Matemática tem sofrido ao longo de sua história grandes mudanças e, com isso, tem feito com que professores dessa disciplina buscassem inovações para motivar seus alunos quanto a importância do estuda da mesma. Neste contexto, este trabalho apresenta uma proposta de aplicação de semelhança de triângulos para as demonstrações de relações métricas e razões trigonométricas no triângulo retângulo, Teorema de Ptolomeu e o Teorema das Cordas. Com isso apresentou-se uma proposta de trabalho aplicando a semelhança de triângulos para o ensino de geometria no ensino fundamenta, médio e superior, visando uma melhor compreensão do ensino dessa disciplina para professores e alunos. Espero que este trabalho, contribua para um melhor entendimento do objeto de estudo apresentado, tornando a aprendizagem significativa e oferecendo ao leitor mais uma opção de abordar tais assuntos, focado principalmente nas aplicações e nas demonstrações matemáticas.

REFERÊNCIAS

[1] EIZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Plana. vol. 9. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[2] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Trigonometria. v. 3. 7 ed.. São Paulo: Atual Editora, 1993.

[3] NETO, Antonio Camina Muniz. **Geometria** - Coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM 2013.

[4] NETO, Antonio Camina Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar** - Geometria Euclidiana plana volume 2. SBM. Rio de Janeiro, 2012.

[5] CRUZ, Josinaldo dos Santos. **O uso de investigações matemáticas na abordagem da semelhança de triângulos e suas aplicações.** Trabalho de conclusão de curso (Mestrado) - Universidade Federal de Sergipe, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2015.

[6] https://www.nsaulasparticulares.com.br. Acesso em: 16 de julho de 2018.

[7] https://brasilescola.uol.com.br/upload/e/Untitled-11(18).jpg . Acesso em: 30 de julho de 2018.

[8] http://1.bp.blogspot.com/piramide03.gif. Acesso em: 30 de julho de 2018.

[9] Material Teórico do Portal da Matemática - OBMEP. Semelhança entre Triângulos. SATO, J. Revisor MUNIR, A. C. M. Rio de Janeiro: IMPA.

[10] https://www.pensador.com/frase de geometria. Acesso em 06 de agosto de 2018

[11] BARBOSA, J. Lucas M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[12] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau.**Fundamentos de Matemática Elementar**, 9: Geometria Plana. 7ed. São Paulo: Atual, 1993.

[13] LIMA, E. L. Matemática e Ensino volume 2. ed. **Coleção do Professor de Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2007.

[14] LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria - 2. ed. **Coleção Matemática Elementar**. SBM. Rio de Janeiro, 1991.

[15] Costa, Márcio Alisson Leandro. **Semelhança de triângulos: Uma abordagem para o ensino médio.** Trabalho de conclusão de curso (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2017.

[16] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Introdução à Geometria Espacial**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[17] Geraldo, A. **Explorando o Ensino da Matemática, vol. II**, páginas 39-46. http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm

[18] https://static9.depositphotos.com/1010613/1147/i/950/jpg. Acesso em 11 de outubro de 2018

[19] https://www.tutorbrasil.com.br/forum/download/file.php. Acesso em 12 de outubro de 2018.