

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Ricardo Lagreca Salema

**DAS CORDAS AO GPS: UM ESTUDO SOBRE A
GEOMETRIA ESFÉRICA**

Rio de Janeiro
2018



Ricardo Lagreca Salema

**DAS CORDAS AO GPS: UM ESTUDO SOBRE
A GEOMETRIA ESFÉRICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof(a). Dra Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa.

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

S163 Salema, Ricardo Lagreca

Das cordas ao GPS: um estudo sobre geometria esférica /
Ricardo Lagreca Salema. – Rio de Janeiro, 2018.
94 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa,
Extensão e Cultura.

Orientador: Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria não euclidiana. 3.
Geometria esférica. 4. Globos. 5. Sistema de posicionamento global (GPS).
I. Costa, Liliana Manuela Gaspar Cerveira da. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5026

Ricardo Lagreca Salema

**DAS CORDAS AO GPS: UM ESTUDO SOBRE
A GEOMETRIA ESFÉRICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____/____/____.

Banca Examinadora:

Prof^a Dr^a Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa (Orientador)
PROFMAT – Colégio Pedro II

Prof^a Dr^a Teresa Cristina de Carvalho Piva
Universidade Veiga de Almeida

Prof. Dr. Sc. Daniel Felipe Neves Martins
PROFMAT - Colégio Pedro II

Prof. Dr. Sc. Jorge Fernando Silva de Araujo
Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2018

Dedico esse trabalho ao meu pai (in memoriam), meu maior incentivador, apesar de sua peculiar simplicidade. Você faz muita falta!
RICO.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos...

Os faço aos meus queridos, pai (in memoriam) e mãe, pelo exemplo de uma vida!

Os dirijo aos meus amados filhos, fonte da minha determinação!

Os dedico a minha apaixonante esposa, fonte de inspiração!

Os conduzo aos professores do PROFMAT CII, em especial a minha orientadora Professora Liliana Costa pelo trabalho como mentora na descoberta de uma nova paixão.

Na falta de um melhor trato com as palavras, tomo de empréstimo as de Mario Quintana como um presente por tanto carinho e dedicação.

“Existe somente uma idade para a gente ser feliz, somente uma época na vida de cada pessoa em que é possível sonhar e fazer planos e ter energia bastante para realiza-los a despeito de todas as dificuldades e obstáculos.

Uma só idade para a gente se encontrar com a vida e viver apaixonadamente e desfrutar tudo com toda intensidade sem medo nem culpa de sentir prazer. Fases douradas em que a gente pode criar e recriar a vida à nossa própria imagem e semelhança e vestir-se com todas as cores e experimentar todos os sabores e entregar-se a todos os amores sem preconceito nem pudor.

Tempo de entusiasmo e coragem em que todo desafio é mais um convite à luta que a gente enfrenta com toda disposição de tentar algo NOVO, de NOVO e de NOVO, e quantas vezes for preciso. Essa idade tão fugaz na vida da gente chama-se PRESENTE e tem a duração do instante que passa.”

Muito Obrigado!

"Descobertas matemáticas, pequenas ou grandes, nunca nascem por geração espontânea. Elas pressupõem um solo fertilizado com conhecimentos preliminares, e bem lavrado com trabalho consciente e inconsciente."(Henri Jules Poincaré)

RESUMO

SALEMA, Ricardo Lagreca. **Das cordas ao GPS**: Um estudo sobre a geometria esférica. 2018. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

Este trabalho tem como objetivo estudar os conceitos fundamentais relacionados à geometria esférica. Inicia-se por traçar um panorama histórico sobre a construção do conhecimento. Para então, através de um caráter interdisciplinar entre matemática e geografia, a partir da relação entre esfera e globo terrestre, abordar a trigonometria esférica aplicada a conceitos como latitude e longitude; paralelo e meridiano e finalmente no estudo do princípio de funcionamento de geolocalização do GPS. Por fim, através da construção de modelos e situações contextualizadas do dia a dia foi possível colocar em prática as noções fundamentais que regem a geometria esférica.

Palavras-chave: Geometria Não-Euclidiana; Geometria Esférica; Globo Terrestre; GPS.

ABSTRACT

SALEMA, Ricardo Lagreca. **Das cordas ao GPS**: Um estudo sobre a geometria esférica. 2018. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

This work has as objective to study the fundamental concepts related to spherical geometry. It begins by tracing a historical panorama on the construction of knowledge. For then, through an interdisciplinary character between mathematics and geography, from the relation between sphere and globe, approach spherical trigonometry applied to concepts such as latitude and longitude; parallel and meridian and finally in the study of the operating principle of GPS geolocation. Finally, through the construction of contextualized models and situations from day to day it was possible to put into practice the fundamental notions that rule spherical geometry.

Keywords: Non-Euclidean Geometry; Spherical Geometry; Globe; GPS.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tumba de Menna– XVIII dinastia (1401 – 1390 AEC)	22
Figura 2 – Reconstrução do mundo segundo Hecateus	23
Figura 3 – Mapa de Eratóstenes	25
Figura 4 – Mapa-mundí de Johannes Schnitzer (1489) a partir do tratado de Ptolomeu	27
Figura 5 – Rosa dos ventos de 32 pontos	31
Figura 6 – Astrolábio	32
Figura 7 – Balestilha	32
Figura 8 – Modelo simplificado de Nónio	34
Figura 9 – Círculo Limite I - M. C. Escher	35
Figura 10 – Octógono e círculo inscritos no quadrado	39
Figura 11 – Quadrado e octógono com malha menor	40
Figura 12 – Área a partir da composição de estruturas menores	40
Figura 13 – V Postulado de Euclides	41
Figura 14 – Ilustração da Proposição 29 de Euclides	42
Figura 15 – O experimento de Eratóstenes	43
Figura 16 – Astrolábio	45
Figura 17 – Quadrante	45
Figura 18 – Balestilha	45
Figura 19 – Medição da latitude local a partir do horizonte	45
Figura 20 – Medição da latitude local a partir do zênite	46
Figura 21 – Medição da distância angular entre duas estrelas	46
Figura 22 – Processo de Pedro Nunes para obtenção de pontos da linha de rumo	47
Figura 23 – Esfera de centro O e raio r	48
Figura 24 – Elementos notáveis da esfera	49
Figura 25 – Sistema de coordenadas geográficas	50
Figura 26 – Ângulos esféricos	54
Figura 27 – Geodésica	54
Figura 28 – Triângulo esférico	55
Figura 29 – Triângulo sobre a esfera	56
Figura 30 – Triângulo esférico e a Lei dos Cossenos	58
Figura 31 – Triângulo esférico e a lei dos senos	60
Figura 32 – Pontos sobre a linha de rumo	61
Figura 33 – Satélites orbitando sobre a terra	63
Figura 34 – Funcionamento do GPS	63
Figura 35 – mapa do Rio de Janeiro - 1:50	68

Figura 36 – Distância entre pontos com mesma longitude	69
Figura 37 – Distância entre pontos com mesma latitude	70
Figura 38 – Modelo para determinação da distância Lisboa x Porto Seguro	71
Figura 39 – Triângulo esférico (Lisboa - Porto Seguro - Polo Norte)	71
Figura 40 – Coordenadas geográficas em um quadrante do mapa	72
Figura 41 – modelo do globo terrestre	73
Figura 42 – Localização de Porto Seguro no modelo de globo terrestre	74
Figura 43 – Localização das cidades no modelo de globo terrestre	74
Figura 44 – Modelo da distância entre Lisboa e Porto Seguro	75
Figura 45 – Triângulo das Bermudas	76
Figura 46 – Modelo do Triângulo das Bermudas	76
Figura 47 – Trajetória euclidiana do caçador	78
Figura 48 – Trajetória A não euclidiana do caçador	78
Figura 49 – Trajetória B não euclidiana do caçador	79
Figura 50 – Trilateração bidimensional	80
Figura 51 – Retas concorrentes em 1 ponto	81
Figura 52 – Círculos concorrentes em 2 pontos antípodas	81
Figura 53 – Reta r_2 passando por A e paralela a r_1	82
Figura 54 – Círculos máximos concorrentes	82
Figura 55 – Retas r_1 e r_2 paralelas e perpendiculares a r_3	82
Figura 56 – Círculos máximos perpendiculares a um terceiro e concorrentes entre si	83
Figura 57 – Soma dos ângulos internos de um triângulo	83
Figura 58 – Soma dos ângulos internos do triângulo esférico	83
Figura 59 – Soma dos ângulos internos de um quadrilátero	84
Figura 60 – Soma dos ângulos internos de um quadrilátero esférico	84
Figura 61 – Mapa de Manhattan e a Geometria do Táxi	85
Figura 62 – Distâncias na Geometria do Táxi	86
Figura 63 – $d_t(A, C) = d_t(A, B) + d_t(B, C)$ na Geometria do Táxi	86
Figura 64 – Circunferência na Geometria do Táxi	87
Figura 65 – Contra exemplo do caso LAL na Geometria do Táxi	88
Figura 66 – Material para construção do transferidor esférico	93
Figura 67 – Transferidor esférico	94

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Captação do sinal	80
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AEC	Antes da Era Cristã
\arctan	Arco de tangente
A_{ce}	Área da calota esférica
A_{fe}	Área do fuso esférica
A_{se}	Área da superfície esférica
A_{te}	Área do triângulo esférico
A_{ze}	Área da zona esférica
\cos	Cosseno
CPII	Colégio Pedro II
d_t	Distância do táxi
E	East (leste)
EC	Era Cristã
GPS	Global Positioning System
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
MEC	Ministério da Educação e Cultura
N	North (norte)
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PUC/SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
\sec	Secante
\sin	Seno
SBHMat	Sociedade Brasileira de História da Matemática
S	South (Sul)

<i>tan</i>	Tangente
<i>u.a.</i>	Unidade de área
<i>km²</i>	Quilômetro quadrado
<i>u.c.</i>	Unidade de comprimento
<i>cm</i>	Centímetro
<i>km</i>	Quilômetro
<i>m</i>	Metro
<i>u.v.</i>	Unidade de volume
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
Unesp	Universidade do Estado de São Paulo
Unicamp	Universidade Estadual de Campinas
USP	Universidade de São Paulo
<i>W</i>	West (oeste)

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Letra grega Alpha
β	Letra grega Beta
δ	Letra grega Delta
Λ	Letra grega Lambda
π	Número que representa o valor da razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro
θ	Latitude
ϕ	Longitude
$^{\circ}$	Graus
<i>rad</i>	Radianos
$a \in B$	Elemento a pertence ao conjunto B
$a = b$	Número a é igual ao número b
$a \simeq b$	Número a é aproximadamente igual ao número b
$a \neq b$	Número a é diferente do número b
$a \equiv b$	Número a é equivalente ao número b
$a > b$	Número a é maior do que o número b
$a \geq b$	Número a é maior do que ou igual ao número b
$a < b$	Número a é menor do que o número b
$a \leq b$	Número a é menor do que ou igual ao número b
\overline{AB}	Segmento de reta com extremidades nos pontos A e B
AB	Comprimento de \overline{AB}
$\angle AOB$	Ângulo formado pelas semiretas de origem O , OA e OB
\hat{A}	Ângulo com vértice no ponto A
\widehat{AB}	Arco de circunferência com extremidades nos pontos A e B

$d(AB)$	Distância de A a B
$\triangle ABC$	Triângulo com vértices nos pontos A, B e C
$O - ABC$	Triedro com vértices em A, B, C e O
$r \perp s$	A reta r é perpendicular à reta s
$r \parallel s$	A reta r é paralela à reta s
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\int_a^b	Integral definida de a a b
LLL	Caso lado - lado - lado de congruência de triângulos
LAL	Caso lado - ângulo - lado de congruência de triângulos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	A HISTÓRIA COMO PANO DE FUNDO	20
2.1	Esticadores de cordas	21
2.2	Da forma e posição do mundo habitado	22
2.3	O farol do conhecimento	24
2.4	Idade Média	28
2.5	Renascimento científico	29
2.6	Por mares nunca d'antes navegados	29
3	A MATEMÁTICA COMO PROTAGONISTA	37
3.1	Um estudo do π no antigo Egito	38
3.2	O V Postulado de Euclides	41
3.3	Eratóstenes e a medida do raio da terra	42
3.4	A balestilha como instrumento náutico	44
3.5	As Linhas de Rumo de Pedro Nunes	47
3.6	A geometria da esfera	48
3.7	A trigonometria esférica	54
3.8	Revisitando as Linhas de Rumo de Pedro Nunes	61
3.9	O funcionamento do GPS	62
4	APLICAÇÕES	67
4.1	Calculando distâncias sobre a terra	68
4.2	Determinando coordenadas geográficas	72
4.3	Determinando áreas sobre superfícies esféricas	75
4.4	Consequências inusitadas	77
4.5	Uma aplicação do uso do GPS	79
4.6	Geometria Euclidiana X Geometria Esférica	81
4.7	Vou de Táxi	84
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
	REFERÊNCIAS	90
	APÊNDICE A – TRANSFERIDOR ESFÉRICO	93

1 INTRODUÇÃO

Um mestre de obras costuma recorrer a uma corda de nylon para garantir a exatidão de suas medidas. O esquadro perfeito depende da localização precisa dos seus alicerces. Sem qualquer conhecimento teórico esses profissionais reproduzem um procedimento de mais de 5000 anos quando, nas margens do rio Nilo, funcionários públicos denominados esticadores de cordas realizavam o trabalho de agrimensura e posicionamento de estacas para cálculo do imposto devido. Da mesma forma, uma pessoa que acabou de perder seu smartphone é capaz de localizá-lo com extrema precisão, graças ao Sistema de Posicionamento Global (GPS) tão usualmente inserido na sociedade moderna. Atividades tão distintas, que têm na matemática seu ponto de convergência. Este é o tipo de problemática que buscamos atingir com este trabalho.

A base teórica está ancorada na matemática. Em um primeiro momento trabalhamos com a geometria euclidiana. Posteriormente o homem se dá conta da esfericidade da terra, bem como situações que a geometria de Euclides não são capazes de explicar. Neste contexto surge a geometria esférica. Aliás, o principal objetivo deste trabalho é apresentar de forma clara e objetiva, este tipo de geometria não euclidiana, conceito um tanto quanto distante da realidade do estudante do ensino médio, apesar dos esforços para incluí-lo no dia a dia, como deixam bem claro os PCN de matemática - 5ª a 8ª séries (BRASIL,1998):

Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico

Acreditamos que uma maneira viável de inserção das Geometrias Não Euclidianas no currículo da Educação Básica é o ensino da Geometria Esférica. Tomemos dois exemplos bem esclarecedores: Primeiro imagine um grupo de crianças jogando futebol com uma bola de borracha. De repente esta bola fura e se torna inútil. Cortam a bola dando origem a duas calotas esféricas. Tentam de todas as formas planificar estas calotas. Ou ainda, imagine que uma criança desenhe um triângulo em uma folha de papel. Recorte a figura e tente sobrepô-la totalmente em uma superfície esférica. Nesses dois casos, temos a convicção de que por mais que tentem jamais conseguirão

êxito nos experimentos. Isso ocorre porque as propriedades da superfície plana são diferentes da superfície esférica. Apesar da ausência da conceituação formal, um conhecimento intuitivo encontra-se bem presente no dia a dia. Objetivando facilitar esse estudo, sugerimos uma associação com o Globo Terrestre e conseqüentemente uma contextualização com a Geografia. Por fim propomos um aprofundamento do conhecimento com o estudo do funcionamento do GPS (Sistema de Posicionamento Global).

Uma interface com a História também se mostrou conveniente para a plena compreensão deste longo processo de evolução do conhecimento, de modo que o trabalho ficou estruturado da seguinte maneira: no primeiro capítulo, “A história como pano de fundo”, como o próprio nome diz traça-se uma extensa contextualização histórica do processo que permitiu o desenvolvimento do pensamento humano e a mudança de paradigmas. Partimos do Egito Antigo por julgar que foi nesse momento que se oficializou uma preocupação com a localização e o posicionamento. Na Grécia, procura-se identificar a evolução do modelo de mundo conhecido. Neste momento, pontua-se a importância de Euclides por sua contribuição na compilação de todo o pensamento geométrico do mundo antigo, bem como a base do conhecimento até os nossos dias. Ênfase foi atribuída à Escola de Alexandria, celeiro do conhecimento e pensadores. O empreendimento monumental das grandes navegações representou um marco na forma de ver o mundo. A busca de alternativas para a falta de referências levou Pedro Nunes a destacar a importância do estudo da Esfera. O século XIX foi o último grande momento dessa viagem histórica, onde as bases teóricas da Geometria não euclidiana são desenvolvidas.

No segundo capítulo, “A matemática como protagonista”, procura-se desenvolver com uma linguagem matemática os principais conteúdos abordados no capítulo I. Começamos com uma reflexão sobre o número π no Antigo Egito. Um breve estudo sobre o V Postulado de Euclides. Abordam-se as concepções geométricas envolvidas por trás das contribuições de Aristarco e Eratóstenes nas medidas de distância entre astros e o raio da Terra. As linhas de rumo propostas por Pedro Nunes também constituem objeto de investigação. Um enfoque minucioso sobre a geometria esférica foi fundamental para um melhor entendimento da última parte do capítulo, onde abordamos a matemática no funcionamento do GPS.

No terceiro capítulo, “Aplicações e atividades propostas”, procura-se propor atividades que tenham por objetivo desenvolver os principais conceitos trabalhados na geometria não euclidiana. Trabalham-se com atividades visando aplicar a geometria esférica em analogia ao globo terrestre, com o objetivo de determinar latitudes, longitudes e distâncias geográficas. Maquetes são construídas com a finalidade de facilitar a visualização dos princípios que diferenciam a geometria euclidiana da geometria

esférica. São apresentadas atividades de um tipo especial de Geometria não euclidiana: a geometria do táxi. Permitindo através de jogos e de maneira lúdica um entendimento maior sobre as consequências da negação ao V Postulado Euclidiano. A geometria dinâmica constitui-se em ferramenta valiosa para uma melhor visualização desses conceitos.

Por fim, para a elaboração de uma representação gráfica da superfície da Terra, são utilizados vários conhecimentos matemáticos em prol da operação de transposição de dados esféricos existentes no mundo real para o plano. Este trabalho procura desvendar esses caminhos.

2 A HISTÓRIA COMO PANO DE FUNDO

“O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera, sendo gerada pela rotação do círculo, é, de todos os corpos, o mais perfeito.”

Aristóteles

2.1 Esticadores de cordas

Há mais de 5000 anos as terras férteis próximas ao Rio Nilo testemunham um milagre. As cheias do rio presenteiam o Egito com vida e abundância. Certamente um oásis no meio do deserto. Naquela região, a água costuma ser generosa. Extensas áreas de terras são encobertas e o que se pode ver são pequenas ilhas em meio a um grande “mar”. Todo o ano os egípcios aguardam com ansiedade o recuo das águas. Agora as terras estão prontas para o cultivo, base econômica na região. Entretanto antes de começar o cultivo, as áreas precisam ser remarcadas. As fortes cheias carregam consigo todas as identificações referentes as posses de terras. Como cultivar em terreno alheio? De quem cobrar os imposto devidos ao Estado?

Para Heródoto (2001,p.251), foi a partir de um contexto como o retratado acima, que a Geometria se desenvolveu:

CIX – Disseram-me ainda os sacerdotes que Sesóstris realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos certo tributo. Se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da geometria, que teria passado desse país para a Grécia. Quanto ao gnomon ou relógio solar e a divisão do dia em doze partes, os Gregos devem-nos aos Babilônios.

Medir as terras para fixar os limites das propriedades era uma tarefa primordial nas civilizações antigas. A base da economia era essencialmente agrícola e um sistema desenvolvido de medição e plotamento de estacas era a garantia de estabilidade e justiça. Para tanto, os egípcios lançaram mão dos “esticadores de cordas”, agrimensores estatais treinados e especializados.

O trabalho de se orientar, localizar e estabelecer medidas era coisa muito séria no antigo Egito, ao ponto do Livro dos Mortos estabelecer punições similares para quem rouba a terra alheia ou comete um homicídio. Nas sociedades antigas os números estavam intimamente ligados ao senso de justiça e ordem.

Assim, a necessidade de se localizar parece coincidir com as necessidades do dia a dia. Partilhar terras e prever inundações estavam intimamente ligadas com a prática da observação e do conhecimento empírico. O próprio nome da Geometria, deriva da palavra grega *geometrein* que significa “medir terra”.

Não se pode contudo, adotar um pensamento simplista e esquecer as contribuições de outros povos contemporâneos; Mesopotâmia, Índia e China também desenvolveram uma matemática voltada para a prática diária. Bem se sabe, que todo conhecimento, incluindo a matemática, se ancora sobre um processo de construção e

Figura 1 – Tumba de Menna– XVIII dinastia (1401 – 1390 AEC)



Fonte: <http://www.civilization.ca/civil/egypt/images/fback3b.jpg>. Acesso em 24/08/2017.

que estabelecer origens constitui-se em atitude no mínimo inocente. Mas parece justo atribuir aos egípcios a oficialização dessa nova forma de saber.

2.2 Da forma e posição do mundo habitado

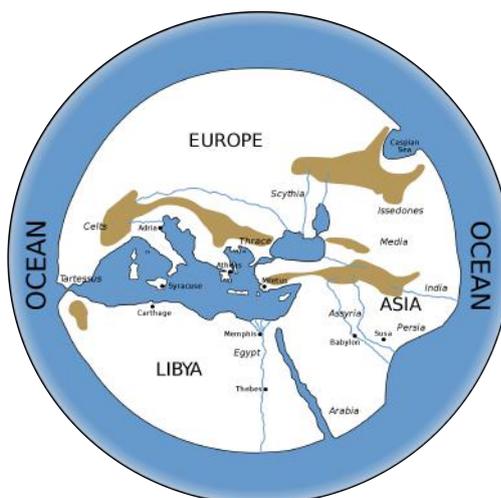
Os gregos herdaram a base do seu conhecimento da cultura egípcia. Desde os primórdios técnicas foram copiadas e conhecimentos transmitidos. Rapidamente o domínio e influência grega se disseminou pelo mundo conhecido. A necessidade de conhecer suas posses caminhou de mãos dadas com essa expansão. Agora os especialistas deveriam ser capazes de localizar as fronteiras do império e o quanto ainda poderia expandir. Fato concreto é que segundo Brotton (2014), já no século VIII AEC, na *Ilíada* ¹ encontra-se a descrição do escudo de Aquiles como alegoria do mundo conhecido. A Terra era representada por um disco achatado cercada por um rio, Okeanos, que nascia ao norte e girava no sentido horário. Pode parecer um tanto quanto ingênua essa ideia, mas significou uma mudança de concepção. Além do caráter empírico o homem passa a se preocupar com questões mais especulativas. Qual o meu lugar nesse mundo? É a pergunta que passa a fazer sentido. Começa-se a formular pensamentos para explicar a formação do universo. Não que eles nunca tenham existido, mas na Grécia mitos e o que transcende ao real são colocados de lado em detrimento da racionalidade. O homem já consegue se localizar na Terra então começa a especular sobre o seu lugar no universo.

Interessante observar que nesta concepção de mundo a Grécia ocupa uma posição central, reafirmando a supervalorização do “EU”; Grécia como centro do mundo habitável e Terra como centro do cosmos observável. A água em volta do mundo conhecido remonta a uma tradição babilônica.

Atribui-se a Thales de Mileto (c.624 – c.546 AEC) a medida da altura da pirâmide de Gizé bem como a previsão de um eclipse solar. O inacessível começa a

¹ Poema épico de Homero.

Figura 2 – Reconstrução do mundo segundo Hecateus



Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d6/Hecataeus-world-map-en.svg/2000px-Hecataeus-world-map-en.svg.png>. Acesso em 28/08/2017.

ser desvendado, sendo porém um conhecimento restrito. A ampla maioria continuava mergulhada nas crenças e superstições. Segundo Heródoto (2001,p.86):

LXXIV - (...) Durante cinco anos, os Medos e os Lídios obtiveram, alternadamente, vantagens, e no sexto ano de luta aconteceu algo extraordinário, que motivou o término da hostilidade. Durante um combate que os triunfos se equivaliam de parte a parte, o dia transformou-se em noite. Tales de Mileto havia predito aos Iônios esse fenômeno, fixando a data que se verificaria. Os Lídios e Medos, vendo a noite tomar inopinadamente o lugar do dia, cessaram de combater e procuraram o mais depressa possível fazer as pazes.

Anaximandro (c.610 – c.545 AEC), também de Mileto, rompe definitivamente com a concepção do universo vigente. Para ele a terra era cilíndrica e o universo infinito com a terra ocupando seu centro. Esta concepção, entretanto, estava longe de ser unânime. Mas, por volta de 380 AEC, na obra Fénon de Platão, retratando o diálogo sobre os últimos dias de Sócrates, já se tinha convicção de que a terra era esférica.

- Em primeiro lugar – disse Sócrates, estou convencido de que a Terra, se localiza no meio de céu e possui forma esférica, não necessita do ar e de qualquer outro apoio, que a impeça de cair, uma vez que o próprio céu, que a rodeia em partes uniformes de cada lado, e seu próprio equilíbrio são suficientes para sustentá-la.(PLATÃO,2000,p.179)

A partir dessa nova concepção, Platão colocara aos matemáticos um desafio de desenvolver um modelo que explicasse os fenômenos nos céus, preservando as aparências apresentadas pelos planetas. Da mesma forma que Aristóteles especulava

que o céu deveria seguir a esfericidade natural da Terra, por ser a forma sólida mais perfeita.

Ao desviar seus olhos para o céu, os gregos se deram conta que precisariam de mais recursos que a geometria plana poderia dar. As ideias básicas sobre a geometria esférica surgem neste contexto, com Eudoxo ainda no século IV AEC, Apolônio no século III AEC e Hiparco no século II AEC.

Conforme Martins (1997), admitir que a terra era esférica trazia consequências incompreensíveis para a época. Poderiam realizar circunavegações, ou seja, sair e chegar em um mesmo lugar e a todo momento teriam pessoas que estariam de cabeça para baixo. Apesar das desconfianças, os argumentos foram sendo forjados com o tempo. Primeiro foram os eclipses da lua; depois o afastamento no horizonte e a consequente diminuição no tamanho e por último o fato das estrelas serem distintas nos polos sul e norte.

2.3 O farol do conhecimento

Em 332 AEC Alexandre, o Grande, expandiu seu império anexando as terras do Egito. Fundou então a cidade de Alexandria, com grandeza proporcional aos seus domínios. Sua morte prematura em 323 AEC, ocasionou a divisão do seu vasto império entre seus generais de confiança, cabendo a Ptolomeu, o Egito. Inaugurava-se assim, a dinastia dos Ptolomeus. Alexandria passou a ser o centro intelectual do mundo. Os maiores sábios da época circulavam por suas ruas e desfrutavam de sua biblioteca. Existiam ainda, aqueles que mantinham uma extensa correspondência com os intelectuais alexandrinos, como é o caso de Arquimedes.

Uma cidade fervilhando e plural era o espaço ideal para Euclides (c.325 AEC – c. 265 AEC) compilar suas ideias. No seu trabalho principal *Os Elementos*, acentua-se o espírito eminentemente teórico e investigativo, em detrimento ao sentido prático. Um trabalho monumental, onde os dados são agrupados seguindo uma coerência lógica. Cada proposição resulta de definições e axiomas pré estabelecidos ou de proposições anteriormente provadas. O método axiomático proposto em seu trabalho constituiu-se no novo paradigma de se fazer ciência.

É atribuído a Sócrates o dito “o começo da sabedoria é a definição dos termos”. Pois bem, Euclides (2009) em sua obra segue à risca essa máxima. Começa com 23 definições, e em seguida enumera os postulados:

I – dado dois pontos, há um segmento de reta que os une.

II – um segmento de reta pode ser prolongado infinitamente para construir uma reta.

III – dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir um círculo de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada.

IV – todos os ângulos retos são iguais entre si.

V – se uma reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor que dois ângulos retos, então as duas outras retas se cruzam, quando suficientemente prolongadas, do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos.

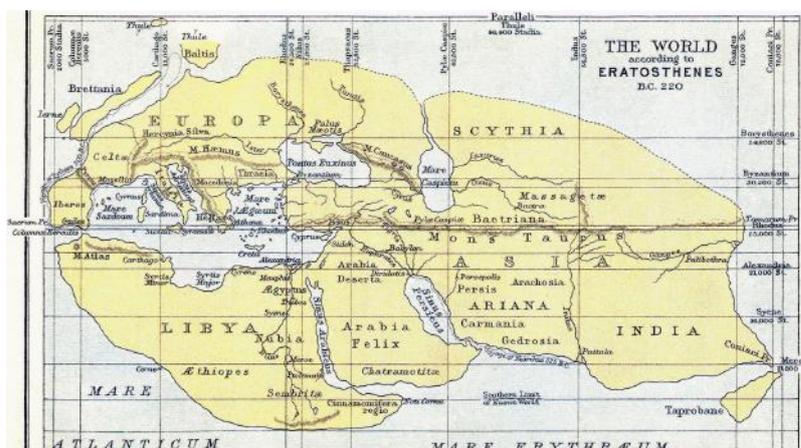
O trabalho de Euclides é a obra científica de maior longevidade na história. Seu maior mérito foi a partir de 5 axiomas deduzir 465 proposições.

Aristarco (c.310 – c.230AEC) foi outro astrônomo e matemático de Alexandria que se indagou sobre o lugar que ocupamos no universo? Toda sua exposição, pressupõe que o sol girava em torno da terra, modelo aceito na época².

Como bem analisou Ávila (1982), Aristarco observou que as quatro fases da lua e o eclipse do sol garantiriam que a lua estaria entre a terra e o sol. Entretanto seu modelo teórico não combinava com os resultados práticos. Segundo seus cálculos, o sol era aproximadamente seis vezes maior que a terra, passava a não fazer sentido o lugar de destaque que a terra ocupava como centro do universo conhecido. Estava lançada a semente para a teoria do heliocentrismo.

Outro ilustre sábio de Alexandria foi Eratóstenes (c.285 – c.194 AEC). Coube a ele, uma alternativa engenhosa para se medir com precisão o raio da terra. O mundo conhecido por ele, serviu para a compilação do mapa a seguir:

Figura 3 – Mapa de Eratóstenes



Fonte: <http://www.mapas-históricos.com/mapa-eratostenes.htm>. Acesso em 26/08/2017

Eratóstenes tinha conhecimento que durante o solstício de verão³ os raios sola-

² O único texto que chegou até nós foi **Sobre as dimensões e distâncias entre o sol e a lua**.

³ Dia do ano em que o sol, ao meio dia, atinge seu ponto mais alto do céu, e tem-se o dia mais longo.

res atingiam perpendicularmente a superfície de Siena ao meio dia. Em contrapartida, neste mesmo instante existia uma inclinação dos raios em Alexandria. Como a distância entre as cidades era conhecida, ele foi capaz de medir o raio da terra⁴.

Arquimedes (c.287 – c.212 AEC), nasceu e morreu em Siracusa, mas desempenhou importante papel na escola alexandrina, trocando intensa correspondência com Eratóstenes. Ao contrário da maioria dos pensadores da antiguidade, os quais conhecemos por fontes secundárias, a maior parte da obra de Arquimedes chegou até nós: *Da esfera e do cilindro I e II*, *Das espirais*, *Da quadratura da parábola*, *Da medida do círculo*, *Dos corpos flutuantes*, entre outras.

Em particular, nos estudos sobre a esfera e o cilindro, observou que tanto a razão dos volumes entre esfera e cilindro como também suas áreas estavam na proporção 2/3. Segundo Ávila (1984), Arquimedes como qualquer outro grego de seu tempo expressava suas descobertas na forma de proporções. Mecânico por natureza, foi capaz de desenvolver importantes estudos sem as ferramentas adequadas. As ideias embrionárias do cálculo infinitesimal e as projeções cartográficas da esfera sobre o cilindro estão presentes na sua obra, 1500 anos antes de virem a luz.

Hiparco (c.190-c.120AEC), foi um opositor ferrenho de Eratóstenes, a ponto de escrever um tratado com críticas ao método empregado pelo antecessor⁵. Mas foi obrigado a concordar com a precisão de seu método quanto à medição do raio da terra. Hiparco criou um método engenhoso para calcular a distância da terra à lua, baseando-se nas posições relativas do sol, terra e lua durante um eclipse lunar, ou seja, quando a terra fica entre o sol e a lua. A vantagem desse método era que Hiparco não precisava utilizar o raio da terra, principal triunfo do seu antecessor.

Cláudio Ptolomeu (100 - 168 EC) foi o último grande astrônomo da antiguidade. Sua célebre obra *Mathematiks Sintaxis*, apelidada de *Almagestum*, pelos árabes, faz jus ao nome. Uma compilação de todos os avanços da época que juntamente com a obra *Geographia*, serviram de referência por mais de um milênio.

Na época de Ptolomeu, o império romano estava no seu apogeu. Para os romanos, práticos por natureza, muito interessados por itinerários e distâncias, a obra de Ptolomeu se revestiu de notoriedade. Representava o que se conhecia de mais avançado, um acúmulo de conhecimento que remontava toda antiguidade. A representação das latitudes por linhas horizontais e das longitudes por verticais facilitou a localização do homem sobre a terra. O mundo conhecido ia das Ilhas Canárias (longitude 0 °) até à capital da seda, China (longitude 180 °). Havia um subdimensionamento dos oceanos e uma aparente distorção das coordenadas geográficas.

⁴ Um estudo do método será proposto no capítulo II.

⁵ Um dos seus tratados chamava-se *Contra Eratóstenes*.

A representação Ptolomaica correspondia a 1/4 do globo terrestre real, aproximando distâncias e encorajando desbravadores a atingir o leste a partir do oeste. A intensa circulação de sua obra até o século XVI mudou o rumo das grandes navegações tornando o empreendimento bem menor do que o vivenciado pelos exploradores.

Figura 4 – Mapa-mundi de Johannes Schnitzer (1489) a partir do tratado de Ptolomeu



Fonte: greciantiga.org/img.asp?num=0026. Acesso: 28/08/2017.

Segundo Katz (1998), embora a geometria esférica tenha sido estudada já em 300 AEC, o primeiro trabalho sobre trigonometria esférica foi *Spherica* de Menelau (c. 100 EC). Sua maior contribuição foi o teorema de Menelau, que estabelece relações entre arcos de círculo máximo.

Os capítulos finais da matemática greco-romana seguiram um enredo triste e melancólico:

Um rumor espalhou-se entre os cristãos de que [Hipátia], a filha de Teão, era o único obstáculo à reconciliação do prefeito [Orestes] e o arcebispo [Cirilo]. Num dia fatal da sagrada estação da Quaresma, Hipátia foi arrancada da sua quadriga, despida, arrastada até a igreja e desumanamente esquartejada por um baldo de selvagens e fanáticos sem misericórdia chefiados por um homem chamado Pedro (...). O assassinato de Hipátia imprimiu uma mancha indelével no caráter e na religião de Cirilo de Alexandria. (GIBBON *apud* KATZ, 1998,p.209)

Com a morte da matemática Hipátia (c.370 – 415 EC) a “luz do farol” alexandrino se apagou. Cristãos católicos, religião recém oficializada, começam a perseguir as vozes dissidentes e Hipátia transforma-se em mártir. Por uma triste coincidência, a “Voz” da ciência permanecerá calada durante toda a Idade Média.

2.4 Idade Média

Conforme Roque (2012) muito se tem debatido sobre a produção matemática durante a Idade Média. Os mais ortodoxos acreditam em um grande vazio entre o século III e XV, apelidado de “Idade das Trevas”. Para uma corrente mais progressista, a matemática árabe assumiu um papel de protagonismo e substituiu sem rupturas a construção do conhecimento até então. Preferimos trabalhar com momentos de descontinuidade a acreditar em gigantescos saltos. Por questões históricas e culturais continuaremos com concepções eurocentristas.

Aliás, para Dampier (1961), o apogeu do império romano, com suas características eminentemente práticas; bem como o abismo cultural entre o Oriente e Ocidente, ajudam a compreender a ruptura da matemática medieval. Mas é a ascensão da Igreja Católica Apostólica Romana a grande responsável por cunhar a nova forma de se pensar ciência. Santo Agostinho (1957 *apud* BRITO, 2007,p.128), pensador cristão que ajudou na concepção do pensamento dominante falava:

Tudo o que se conhece com a mente, e não o que se percebe pelos sentidos, está com Deus. Atrevo-me ainda a dizer mais [...] quem se entrega à percepção das coisas sensíveis, não apenas está separado de Deus, mas também de si mesmo. [...] Esta disciplina [matemática] é a mesma lei de Deus [...]

O monopólio da Igreja sobre a leitura e escrita contribuiu na manutenção do *status quo*. As abadias e mosteiros exerciam seu poder de censura aos saberes que estivessem em desacordo com os dogmas católicos. Assim proliferaram cópias “mancas e banguelas” dos manuscritos científicos e filosóficos da antiguidade.

Segundo Brito (2007) na Idade Média, a matemática era organizada a partir do *quadrivium*: aritmética, música, geometria e astronomia. Se observamos algum desenvolvimento na aritmética e música, a geometria se limitou ao campo prático, em especial à arquitetura e construção. A astronomia medieval era “míope”, por assim dizer. Como se o céu, local da morada do senhor, fosse inatingível ao conhecimento humano.

Somente a partir do século XII que a matemática volta a se desenvolver na Europa, com Fibonacci (1170-1250)⁶, Jordanus Nemorarius (c.1230)⁷ até voltar ao centro das discussões com Pacioli, Tartaglia e Cardano.

⁶ Publicação das obras *Pratica da Geometriae e Liber Quadratorum*.

⁷ Publicação do *Tratado sobre triângulos*.

2.5 Renascimento científico

A partir do período conhecido como Baixa Idade Média, começa a se resgatar as obras da antiguidade, bem como a se ter acesso aos avanços da ciência árabe. A península Ibérica era a porta de entrada das obras repaginadas de Aristóteles, Euclides, Arquimedes e Ptolomeu todas traduzidas pelos árabes. Ao final do século XV, a ciência e principalmente a astronomia procuravam recuperar o tempo perdido. O *Tratado da Esphera* de Sacrobosco, baseado nas ideias de Ptolomeu, teve uma ampla difusão na Europa. A influência de suas edições ajudaram a consolidar o modelo de mundo proposto por Ptolomeu.

A prosperidade comercial europeia e o renascimento da cultura clássica impulsionaram mecenas e cidades a financiar pintores e escultores. Atividades intelectuais competitivas foram propostas, nos moldes das discussões sobre resoluções de equações do 3º grau propostas por Pacioli, Tartaglia e Cardano. Neste contexto encontra-se inserido o financiamento das viagens de Américo Vespúcio e Cristóvão Colombo pelas cortes de Espanha e Portugal. Não se pode deixar de lado a revolução da imprensa de Gutenberg, diminuindo os custos e aumentando a disseminação da informação.

As imensas transformações ocorridas neste curto período de tempo ajudaram a moldar o homem moderno. Duas, entretanto, contribuíram para a quebra de todos os paradigmas da época. A primeira foi a proposição do Sistema heliocêntrico de Copérnico. Concepção que de acordo com Lopes (2001) pôs fim ao modelo Ptolomaico no qual a terra estava em repouso e ocupava o centro do universo, ideia que perdurara por mais de um milênio. Copérnico propunha que a Terra se movimentava e que cabia ao Sol o centro do mundo. A segunda transformação, talvez ainda mais impactante, foram as descobertas propiciadas pelas Grandes Navegações. O homem estava aberto às mudanças do universo inatingível mas julgava não haver mais mistérios a se explorar sobre a terra. Para enfrentar esta epopéia, mais uma vez o homem teve que procurar novas alternativas para se localizar.

2.6 Por mares nunca d'antes navegados

A prematura unificação de Portugal como reino independente criou condições necessárias ao seu crescimento. Reino de dimensões diminutas e isolado no extremo de um braço do continente europeu, teve desde cedo que buscar alternativas para o seu desenvolvimento. A agricultura era limitada pelas dimensões e terrenos montanhosos e o comércio terrestre desfavorável devido ao isolamento. Coube ao gênio português um olhar mais atento para a extensão de seu quintal. O oceano Atlântico estava longe de ser um problema para o povo português. O desenvolvimento da navegação costeira com a pesca se fez presente desde tempos remotos para suprir necessidades

básicas. Esta associação de fatores fez com que Portugal se lançasse no maior empreendimento até então realizado, a expansão marítima. A busca das rotas marítimas foi fator preponderante para transformar Portugal em potência no século XV.

Coube ao infante Dom Henrique o planejamento e execução do mais importante projeto de expansão na história da humanidade. A “Escola de Sagres” logrou êxito em reunir todo o conhecimento adquirido até então: as ideias de Ptolomeu e Sacrobosco, as inovações tecnológicas e instrumentais marítimas, a cartografia Portulano e posteriormente Mercator e a prática matemática de Pedro Nunes. Portugal em sua ousadia seguiu um caminho inverso do restante da Europa. Nas palavras de D’Ambrósio (2000,p.80),

Temos portanto duas vertentes de conhecimento científico e matemático na Europa no final do século XV. Um praticado na Europa, construindo as bases do que viria a ser a ciência moderna, representado principalmente por Bradwardine e a Escola de Merton; e outro, praticado em Portugal, repousando essencialmente sobre os trabalhos de Ptolomeu, e o Tratado da Esfera, de Sacrobosco.

Já foi discutido aqui o papel inovador no Trabalho de Ptolomeu. Entretanto, não se pode deixar de observar que alguns dos seus equívocos refletiram nos quinhentos como verdades desconstruídas pela prática. A mais importante foi sem dúvidas o subdimensionamento terrestre a partir do raio da terra o que propiciou uma avaliação errônea do projeto de expansão marítima. Talvez se soubessem das reais dimensões do empreendimento os ânimos teriam se amenizado por mais tempo. Quanto ao Tratado de Sacrobosco, representou a afirmação e generalização da redondeza da terra e da água (SACROBOSCO *apud* PEDRO NUNES,1991,p.35)

ponha-se um sinal da ribeira do mar e saia uma nau do porto, e aparta-se tanto que quem estiver ao pé do mastro não possa ver o sinal, e estando assim a nau, ver-se-á o mesmo sinal da gávea, pois o olho que estivesse ao pé do mastro, melhor deveria ver o sinal do que o que acima estivesse, como parece pelas linhas que vão até o sinal. E portanto nenhum desconto tem isso senão ser a água redonda.

Como já foi mencionado, o processo de desenvolvimento marítimo português não se deu do dia para a noite. Foi fruto de um empreendimento que uniu a experiência marítima de cabotagem portuguesa aliada ao desenvolvimento de novas técnicas. Desde o reinado de Afonso III no século XIII, Portugal já começava a compilar um saber marítimo. O *Libro del saber de astronomia* é um bom exemplo deste comprometimento. Nesta coletânea são descritos de forma pormenorizada a utilização e construção de instrumentos como o astrolábio e o quadrante. Enquanto que durante o início dos quatrocentos, Portugal foi “arranhando” a costa africana, utilizando-se das cartas portulano e o processo de rumo e estima. Este processo mostrou-se muito eficaz na

navegação em pequenos percursos onde as estimativas eram compensadas mediante observação, tornando os erros praticamente desprezíveis.

Mas o que fazer quando as referências terrestres não existiam? Portugal se viu obrigado a procurar alternativas para a falta de referências ao se localizar. A prática portuguesa começou por determinar a latitude de uma localidade mediante a observação da altura da estrela polar. Surge, assim, a navegação de ponto. A prática consistia na determinação das distâncias em léguas, mediante o cálculo da diferença angular da altura da estrela polar no horizonte entre os locais de partida e chegada das frotas. Durante a noite a estrela polar norte e o cruzeiro do sul representavam o ponto de referência dos homens do mar; mas durante o dia as agulhas magnéticas desempenhavam este papel em conjunto com a rosa dos ventos que progressivamente foi aumentando seus rumos, até atingir 32 rumos, e diminuir os desvios de rota para menos de 11,25°.

Figura 5 – Rosa dos ventos de 32 pontos



Fonte: <http://dx.doi.org/10.1590/S0104-59702014000300012>. Acesso em:02/09/2017

O Quadrante náutico e posteriormente o astrolábio náutico também não podiam faltar na lista de instrumentos embarcados. O quadrante era um instrumento simples e eficaz na medição da altura do sol ou estrela. Tratava-se de 1/4 de círculo graduado de 0° a 90° em que o observador mirava o astro por uma pínula enquanto pendia um prumo registrando o ângulo vertical. No século XVI passou a ser utilizado em conjunto com o astrolábio que apresentava uma maior sofisticação.

Entretanto a precisão desses instrumentos era comprometida tanto pela ineficácia no manuseio, quanto pelo balanço do mar. Mestre João (*apud* PEREIRA, 1999, p.69) cronista da armada de Pedro Álvares Cabral em 1500, relata sua experiência a D Manuel I:

Quando, Senhor, ao outro ponto, saberá Vossa Alteza que, acerca das estrelas, eu tenho trabalhado o que tenho podido, mas não muito, por

causa de uma perna que tenho muito mal, que de uma coçadura se me fez uma chaga maior que a palma da mão; e também por causa deste navio ser muito pequeno e estar muito carregado, que não há lugar para coisa nenhuma. Somente mando a Vossa Alteza como estão situadas as estrelas do (Sul), mas em que grau está cada um não o pude saber, antes me parece impossível, no mar, tomarse altura de nenhuma estrela, porque eu trabalhei muito nisso e, por pouco que o navio balance, se erram quatro ou cinco graus, de modo que se não pode fazer, senão em terra [...].

Instrumento menos frequente, porém não menos importante era a Balestilha⁸. Composta de uma régua, denominada virote, sobre o qual desliza outra perpendicularmente, chamada soalha. A facilidade no manuseio, permitia qualquer um da tripulação obter medições angulares. Para se determinar a medição desejada com a balestilha, devia-se mirar com o virote e deslizar a soalha fazendo coincidir sua parte inferior com o horizonte e sua parte superior com o objeto de observação.

Figura 6 – Astrolábio



Figura 7 – Balestilha



Fonte: <http://pt.m.wikipedia.org/wiki/> Acesso em:05/10/2017

Os séculos XV e XVI também presenciaram uma nova forma de representar o mundo. Para Nogueira e Biasi (2015), as cartas medievais Portulano foram sendo substituídas pelo modelo Mercator, mais adaptadas às novas necessidades marítimas. As Cartas Portulanos eram caracterizadas por um entrelaçamento infinito de rumos, obtidos a partir da rosa dos ventos e uma abundância de localidades, sendo os portos, cidades costeiras e acidentes geográficos minuciosamente representados. Eram bastante funcionais para os deslocamentos no Mar Mediterrâneo, mas o sistema referencial de coordenadas não estava presente, o que dificultava navegações mar a dentro.

No século XVI, entretanto, as projeções do cartógrafo e matemático Gerardus Mercator passam a dominar o cenário das grandes navegações. A proliferação dos

⁸ Retornaremos a este instrumento no 2º capítulo.

mapas trazendo as novas descobertas fizeram da visão de mundo de Mercator um padrão que durou séculos. As distorções polares e setentrionais atendem ao interesse mercantilista e de dominação da Europa ampliando sua influência também no campo ideológico. Diferente das produções cartográficas até então que representavam as malhas geográficas a partir de uma concepção de superfície bidimensional, as projeções de Mercator baseavam-se no fato da Terra ser esférica e portanto as malhas acompanhavam essa esfericidade, preservando os ângulos ou conformidades.

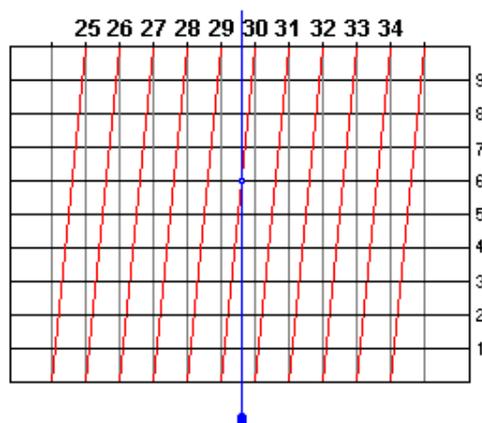
A partir deste momento o homem passa a se dar conta da importância do entendimento sobre a esfericidade da Terra. Mais que isso, compreende que vive em um espaço tridimensional e o sentido da localização ganha novos rumos. As viagens transoceânicas empreendidas por Cristovão Colombo, Américo Vespúcio, Vasco da Gama, Pedro Álvares Cabral e Fernão de Magalhães exigiam novas aplicações matemáticas envolvendo os cálculos de posição e rota baseado na geometria esférica. O problema da latitude estava desde o século anterior bem resolvido com as medições astronômicas, mas a “arte de leste-oeste”, ou seja, das longitudes, era uma dificuldade recorrente em alto mar. Coube novamente a Portugal o papel de precursor na matemática aplicada à navegação. O papel de protagonismo foi desempenhado por Pedro Nunes que teorizou o universo prático da navegação. É bom que se esclareça que dentro de uma embarcação portuguesa do século XVI uma minoria era letrada. Para ser mais exato não passava do capitão mor, piloto, copiloto, cosmógrafo e escrivão. Quase a totalidade era de iletrados, mas com grande experiência no mar. O sucesso português foi forjado na prática. Coube em terra, ao matemático Pedro Nunes reger esta orquestra de práticos. Um dos seus discípulos que se tornou um grande navegador foi Martim Afonso de Souza, este levou a Pedro Nunes uma série de dúvidas e indagações que foram respondidas no *Tratado sobre certas dúvidas de navegação*. Neste trabalho e posteriormente no *Tratado em defesa da arte de marear*, Pedro Nunes expõe duas características fundamentais na navegação da época: a preservação dos ângulos e a representação das linhas de rumo como retas. Ainda recebe influência de Ptolomeu ao traduzir sua obra, mas percebe a importância do *Tratado da Esfera*, trabalho de Sacrobosco.

Segundo Queiró (2002) uma das maiores contribuições de Pedro Nunes foi a linha de rumo. Posteriormente chamadas linhas loxodrômicas, estas se caracterizavam por manter o mesmo ângulo pelos meridianos que a linha cruza. Eram de extrema importância em alto mar onde as referências obrigavam o barco a manter um rumo de 90° com o norte da bússola. O inconveniente é que manter o rumo quase sempre significava uma maior distância por não se navegar em um círculo máximo. Resumindo, Pedro Nunes é o primeiro a abordar o fato de que rotas mínimas, ou seja, sobre círculos máximos, só são possíveis sobre a linha do equador, sobre os meridianos ou na maioria das vezes corrigindo sistematicamente o rumo. Entretanto, nos mapas essas linhas de

rumo deveriam ser retas que ligariam partida e chegada, possibilitando uma orientação pré determinada dos pilotos. Para tanto as cartas náuticas deveriam ser construídas em projeções que corrigissem as distorções oriundas da esfericidade da terra. Antes mesmo de Mercator, Pedro Nunes já havia pensado em uma projeção que atendesse aos interesses da navegação.

Pedro Nunes também desenvolveu instrumentos de navegação que aumentavam a precisão das observações em alto mar. A lâmina de sombras, o instrumento jacente e o anel náutico foram algumas de suas contribuições. A complexidade e a necessidade de habilitação para o manuseio desses instrumentos impossibilitaram em uma maior difusão. Contudo, a simplicidade do Nónio, mecanismo desenvolvido por Pedro Nunes, revela toda a engenhosidade do Cosmógrafo Mor português. O instrumento representava uma solução brilhante para o problema das aferições astronômicas a bordo. Vários relatos manifestam a dificuldade em se obter medições exatas com o balanço das mares. Pedro Nunes objetivando amenizar esses problemas recorrentes, introduziu uma escala vertical nos quadrantes, aumentando a precisão na leitura do limbo (prumo) e fracionando a escala do quadrante, como reproduzido na figura a seguir:

Figura 8 – Modelo simplificado de Nónio



Fonte: <http://www.cienciaviva.pt/latlong/anterior/nonio2.asp?cao=printid-conteudo=521id-layout=3>, acesso em 12/09/17.

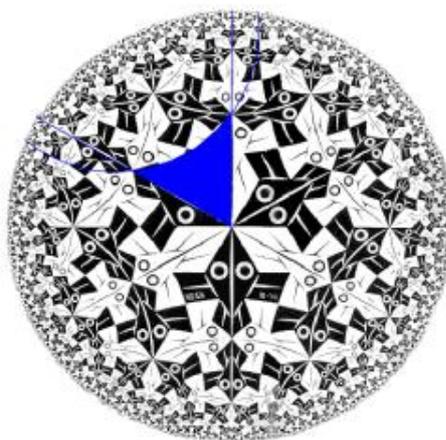
A forma de se posicionar diante do mundo havia mudado com o Renascimento. Segundo Roque (2012) a obra, *O Homem Vitruviano* de Leonardo da Vinci exprime bem a nova maneira de pensar renascentista. O Homem de medidas matematicamente harmônicas se encaixa perfeitamente no centro do mundo. Galileu, talvez tenha sido o último elemento de transição entre esses dois mundos; unindo a prática ao rigor científico.

A partir do século XVII, a natureza passa a ser interpretada através de um método analítico e quantitativo. Ao traduzir problemas de geometria para a linguagem

algébrica, Descartes se apropria de um sistema de coordenadas cartesianas que facilitam o estudo do comportamento de determinadas curvas. Segundo Roque (2012), a geometria transcende o campo das proporções e grandezas presentes na geometria euclidiana e passa a operar com números.

Segundo Boyer (1974), até o século XIX a geometria euclidiana descrevia o mundo por aproximações. Reinava absoluta e era capaz de dar conta dos fenômenos estudados até então. Entretanto como se viu, as navegações colocaram em xeque o paradigma euclidiano, a ponto de no século XIX se formalizar um sistema axiomático que contrariava o V postulado de Euclides. Matemáticos como Carl Friedrich Gauss, Johann Bolyai, Nicolai Ivanovich Lobachevski e Georg Bernhard Riemann começaram a desconfiar do Postulado das Paralelas⁹. A negação do Postulado euclidiano implica na admissão de duas novas alternativas: por um ponto exterior a uma reta dada passa mais do que uma ou não passa reta paralela à reta original. As duas formulações que resultam de negar o postulado depois de refinadas deram origem a duas geometrias não euclidianas. Por um lado a Geometria Hiperbólica admite que por um ponto externo a uma reta dada, passa uma infinidade de retas paralelas. Enquanto que na Geometria esférica, desenvolvida por Riemann, sendo as retas círculos máximos, não é possível existirem retas paralelas.

Figura 9 – Círculo Limite I - M. C. Escher



Fonte: <http://www.connectionsinspace.co.uk/Patterns-and-Space-Filling/Hyperbolic-Geometry/hyperbolic-geometry.html>. Acesso em 19/09/2017.

O desenvolvimento das geometrias não euclidianas no século XVIII e início do XIX causou um reexame no sistema axiomático euclidiano e conseqüentemente na constatação de que asserções foram usadas nas provas sem a devida explicitação na lista de axiomas e postulados. Naturalmente o fim do século XIX assistiu a uma "corrida" de trabalhos tentando estabelecer um conjunto completo de axiomas a partir

⁹ O V Postulado é conhecido como Postulado das Paralelas. Um novo enunciado foi proposto por John Playfair, em 1795. Retornaremos no capítulo 2 a este assunto.

do qual a geometria euclidiana pudesse ser derivada. Dentre os trabalhos, maior êxito coube ao conjunto axiomático de Hilbert. Seguindo um caminho oposto ao de Euclides, Hilbert partiu de três termos primitivos indefiníveis, que chamou de ponto, reta e plano e construiu suas relações mútuas por meio dos axiomas. Caminhos opostos que foram dar no mesmo lugar: as ideias de Euclides foram reconfirmadas no século XIX e perduram até hoje.

Já a geometria não euclidiana foi fundamental para o avanço da astronomia, bem como para a Teoria da Relatividade. Mais recentemente, o Sistema de Posicionamento Global (GPS) tem seu funcionamento baseado em conceitos da Geometria Esférica.

A partir deste amplo panorama vamos trabalhar com os principais conceitos matemáticos abordados até aqui.

3 A MATEMÁTICA COMO PROTAGONISTA

*“Uma geometria não pode ser
mais verdadeira do que outra;
poderá ser apenas mais
cômoda.”*

Poincaré

Na sequência deste texto iremos trabalhar com círculos e esferas, o que nos leva a mergulhar na trigonometria esférica, com cálculo de círculos máximos e áreas de triângulos esféricos. Assim, pareceu-nos pertinente fazer aqui uma abordagem da gênese do número π .

3.1 Um estudo do π no antigo Egito

Como observado no capítulo 1, os egípcios utilizavam a matemática para resolver questões práticas. Como bem abordado por Gaspar e Mauro (2004), questões relativas à agrimensura de terras, cálculo dos impostos devidos, capacidade dos depósitos de grãos e medidas das construções eram assuntos recorrentes nos papiros que procuravam registrar estes conhecimentos para gerações futuras. O papiro de Rhind e o papiro de Moscou são os documentos primários mais importantes sobre a matemática egípcia.

Segundo Eves (2008) o Papiro de Rhind pode ser definido como um texto matemático na forma de manual prático que contém 87 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Em particular, os egípcios escreviam sobre o método para calcular a área do círculo com o objetivo de estimar o volume dos celeiros cilíndricos. Os problemas 41, 42 e 43 são relacionados com o cálculo da capacidade desses celeiros, enquanto que os problemas 48 e 50 trabalham com a área do círculo.

No problema 50, o escriba nos diz que tem um corpo redondo de diâmetro 9 unidades de comprimento e pergunta qual a sua área. A solução indicada por Ahmes ocorre da seguinte maneira : inicialmente retire $1/9$ do diâmetro, o que sobra é $8/9$. Multiplique esse valor por 8, daí tem-se como resultado 64. Portanto a área é 64.¹

Sendo d o diâmetro, matematicamente, a solução ficaria representada da seguinte maneira:

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left[\left(\frac{8}{9}\right)d\right]^2 \quad (2.1.1)$$

Atendendo a que a área de um círculo é o produto entre o quadrado do raio e π , para os egípcios π estaria estimado a partir da igualdade:

$$\begin{aligned} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 &= \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \\ \pi &= 4 \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cong 3,160493 \end{aligned}$$

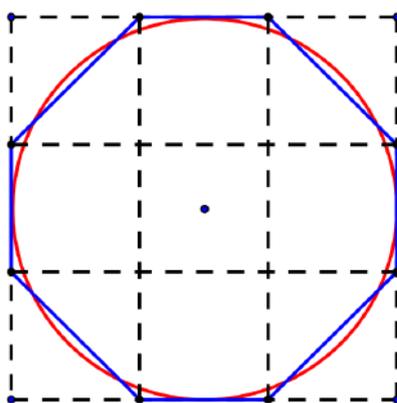
¹ Fonte: <http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad-ancient-egyptpapyrus.html>. Acesso em 04/10/2017.

A etnomatemática e a história da matemática procuram explicações para o resultado encontrado em (2.1.1). Como destacam Gaspar e Mauro (2004), várias explicações foram propostas. Aqui abordaremos as três principais:

Os egípcios eram especialistas em decoração de afrescos. Para tanto, utilizavam uma malha quadriculada, tanto no modelo como na parede, com a finalidade de tornar o trabalho mais fácil.

Um octógono inscrito no quadrado² remete naturalmente a uma divisão da malha em 9 quadrados. Ao adicionarmos um círculo inscrito ao quadrado, é válido supor para a época, que este círculo estaria bem distribuído no octógono, ou seja, as áreas que sobravam correspondiam as áreas que faltavam ao octógono. Levando à conclusão que círculo e octógono deveriam ter a mesma área aproximada. Este pensamento está reproduzido na figura³ abaixo:

Figura 10 – Octógono e círculo inscritos no quadrado



Fonte: O autor, 2018.

Portanto teríamos:

$$d^2 - 2 \left(\frac{d}{3} \right)^2 = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 \cong \left(\frac{8}{9}d \right)^2$$

Que equivale a eq. (2.1.1).

Agora, imagine que, ainda tendo como referência a figura 10, se resolva dividir esta malha em porções menores, de tal modo que se tenha uma PG em que $a_1 = 1$ (quadrado maior) e a razão seja $q = 9$. Assim como terceiro termo da PG ter-se-ia um quadrado com 81 células. O octógono inscrito ocuparia 63 células, restando 18 células, que reorganizadas poderiam se dispor na lateral do quadrado, sobrando apenas 1 célula. De tal forma que a área do octógono seria o quadrado de lado $\frac{8}{9}$ subtraído

² Naturalmente este octógono não é regular.

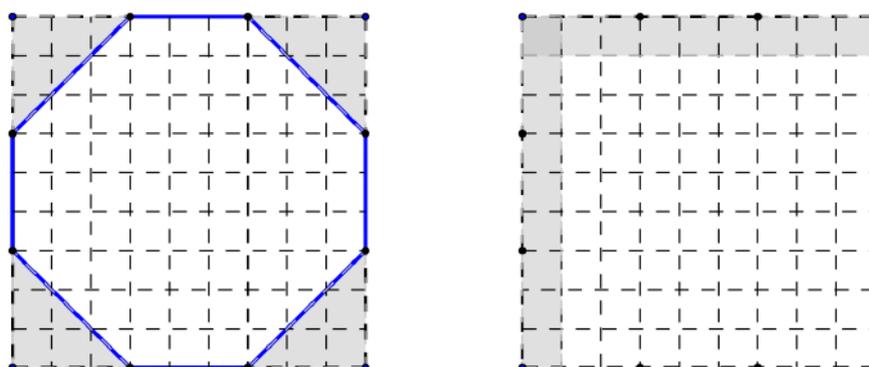
³ As figuras autorais foram confeccionadas através do Geogebra ou mediante modelos fotográficos.

do quadrado de lado $\frac{1}{9}$. Mas a área do círculo é aproximadamente igual a área do octógono, assim:

$$A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 - \left(\frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 - \frac{1}{81}d^2 \cong \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Um esquema desse processo está representado abaixo.

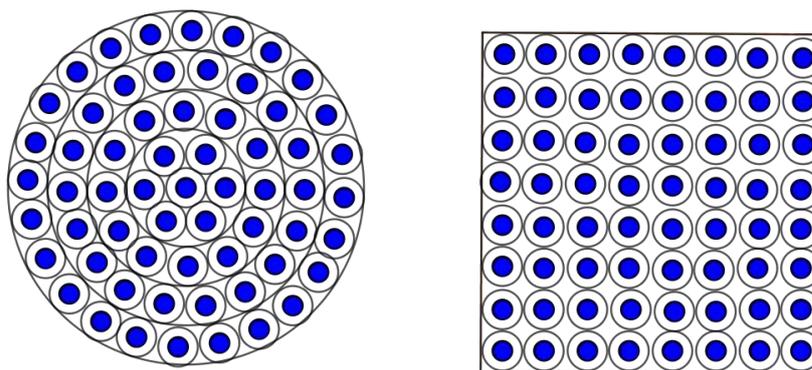
Figura 11 – Quadrado e octógono com malha menor



Fonte: O autor, 2018.

Uma outra abordagem decorre do fato de os egípcios poderem construir círculos maiores a partir de círculos menores. Sendo que as áreas das construções seriam equivalentes ao número de estruturas utilizadas na sua construção.

Figura 12 – Área a partir da composição de estruturas menores



Fonte: O autor, 2018.

Considere cada círculo menor com diâmetro $d = 1$. Mas o círculo representado na (figura 12) é formado por 63 círculos pequenos, estruturados de forma circular tal que $D = 9d$. Já o quadrado tem $l = 8d$ sendo formado por 64 círculos menores. Pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{l}{D} = \frac{8}{9} \rightarrow l = \frac{8}{9}D \rightarrow A(D) = l^2 = \left(\frac{8}{9}D\right)^2$$

As explicações propostas acima possuem um certo grau expeculativo, mas estão alinhadas com o espírito prático do povo egípcio. O que se pode afirmar com convicção é a eficiência do método que permitiu trabalhar há 4000 anos com um valor aproximado do número π com um erro inferior a 0,019.

3.2 O V Postulado de Euclides

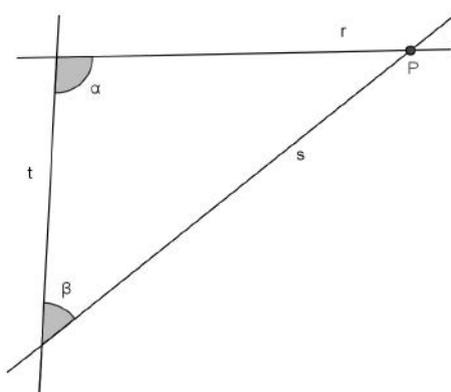
Ao longo da história houve muita discussão sobre o V postulado, essa discussão foi intensificada a partir do século XVI. A celeuma girava em torno de ele ser, ou não, demonstrável através dos axiomas e postulados anteriores e, conseqüentemente, tratar-se de um teorema.

Originalmente (EUCLIDES,2009,p.98), o V Postulado diz que:

5 – E caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

A escrita rebuscada pertinente à época pode ser traduzida a partir da figura abaixo:

Figura 13 – V Postulado de Euclides



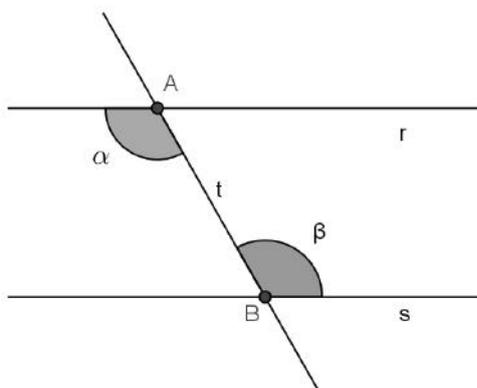
Fonte: O autor, 2018.

Como $\alpha + \beta < 180^\circ$ temos que a reta r e a reta s se encontram em P .

Apesar do texto original não mencionar o paralelismo, essa relação fica bastante evidente a partir da proposição 29 da mesma obra (EUCLIDES,2009,p-120): “ A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o

exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos”. Parte desta proposição pode ser visualizada na figura abaixo:

Figura 14 – Ilustração da Proposição 29 de Euclides



Fonte: O autor, 2018.

Hipótese : $r \parallel s$

Tese : $\alpha = \beta$

Suponha por absurdo que $\alpha \neq \beta$ então pode-se construir uma reta p que passa pelo ponto B e faz um ângulo γ com t de tal forma que $\alpha = \gamma$. Mas pela recíproca $p \parallel r$. Portanto temos que por B existem duas retas s e p paralelas a r o que contradiz o V Postulado de Euclides. Logo $\alpha = \beta$.

A demonstração desta proposição talvez seja a primeira relação do postulado com o paralelismo. Com o tempo os matemáticos concluíram que para provar corretamente esta proposição e as subsequentes tinham necessariamente que utilizar um postulado equivalente ao quinto. Começaram portanto a trabalhar com a independência do V Postulado e a possibilidade de sua negação; surgindo novas perspectivas para a Geometria.

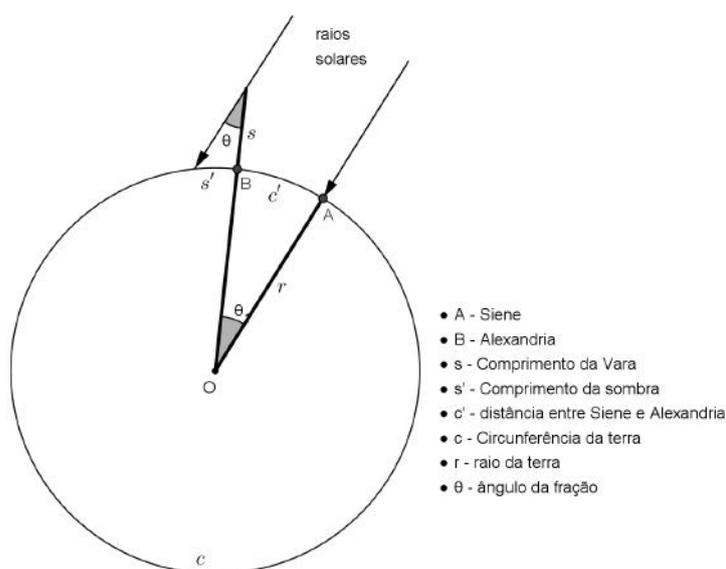
3.3 Eratóstenes e a medida do raio da terra

Como visto no capítulo 1, Eratóstenes pertencia a um grupo de sábios alexandrinos que romperam com o saber prático em detrimento a um sentido mais abstrato do conhecimento. Entender o “mecanismo de funcionamento” do mundo em que se vivia passou a ser prioridade. Nesse contexto se insere o engenhoso experimento que Eratóstenes empreendeu para calcular as dimensões da terra. Ainda assim, essas informações não deixaram de ter uma importância prática crucial na época das grandes navegações, quando prever a quantidade de víveres e o tempo das viagens representava uma questão de sobrevivência.

Para o presente trabalho, as experiências promovidas por Aristarco, Eratóstenes e Hiparco mostram o quanto que, àquela época, a geometria euclidiana era capaz de dar conta dos problemas de dimensão e localização propostos. Delimitar esse processo evolutivo do conhecimento é o principal objetivo desta seção.

Eratóstenes observou, baseado em um conhecimento empírico peculiar aos sábios da época, que durante o solstício, os raios solares incidiam verticalmente, ao meio dia, na localidade de Siene, atual Assuan. Chegou a essa conclusão ao observar que a imagem do sol podia ser vista refletida nas águas de um poço profundo. Ao mesmo tempo, em Alexandria, os raios incidiam com uma certa inclinação θ , que após medir chegou a um valor aproximado de $7,2^\circ$. A grande ideia de Eratóstenes foi concluir que a distância entre as duas cidades (c'), medida recorrendo a θ representava uma fração da medida da circunferência da terra, ou seja, $c' = 5000$ estádios⁴. Para se saber quantas frações formavam o todo, bastava então dividir 360° por $7,2^\circ$, o que dá 50. Logo concluiu genialmente Eratóstenes, a circunferência da terra era formada por 50 frações iguais à distância entre Siene e Alexandria. Uma representação sobre a ideia de Eratóstenes pode ser observada na figura abaixo:

Figura 15 – O experimento de Eratóstenes



Fonte: O autor, 2018.

Para promover seu experimento, Eratóstenes mediu em Alexandria, a sombra projetada pelos raios solares por uma vara de tamanho pré determinado s , ao mesmo tempo que os raios incidiam perpendicularmente sobre Siene. Logo, de forma simples

⁴ O estádio (em latim: *stadium*) era uma unidade de medida de comprimento usada na Grécia Clássica. O padrão desta medida era a pista de corrida de Olímpia, onde era disputada a prova do estádio. Um estádio na Grécia equivale a 157,5 m

e perfeitamente calculável, Eratóstenes foi capaz de estabelecer uma proporção entre o comprimento da sombra s' e o comprimento da vara s .

Para o cálculo do ângulo θ temos:

$$\tan \theta = \left(\frac{s'}{s} \right)$$

Sabendo que a tangente possui um determinado valor e recorrendo as tabelas trigonométricas, cuja existência é patente no Papiro de Rindt, ele concluiu que:

$$\theta = 7,2^\circ$$

Atendendo a que em um mesmo círculo, o comprimento de arco é proporcional à amplitude do ângulo que subtende, podemos calcular a circunferência da terra c , utilizando a seguinte relação:

$$\frac{5000 \text{stadium}}{7,2^\circ} = \frac{c}{360^\circ}$$

$$c = 5000 \cdot \left(\frac{360^\circ}{7,2^\circ} \right)$$

$$c = 250000 \text{stadium}$$

E finalmente, como $1 \text{stadium} = 0,1575 \text{ km}$, o raio da terra r pode ser obtido a partir da seguinte relação:

$$c = 2\pi r$$

$$r = \frac{250000 \times 0,1575 \text{ km}}{2\pi}$$

$$r \approx 6267 \text{ km}$$

Considerando que atualmente o raio da terra medido de forma precisa é 6371 km, os cálculos empreendidos por Eratóstenes no século III AEC são bastante precisos.

3.4 A balestilha como instrumento náutico

Para uma maior compreensão do processo evolutivo dos mecanismos que propiciaram a localização do homem sobre a terra, agora se abordará os preceitos matemáticos por trás de um instrumento de navegação. Apesar de utilizar-se a balestilha como referência, a metodologia pode ser estendida para outros instrumentos como: astrolábio e quadrante.

Em Fernandes, Longuini e Marques (2011), as navegações no século XV e XVI eram orientadas pelas posições dos astros celestes, ou melhor, pelo ângulo entre a visada do astro e o horizonte. Por analogia, esses instrumentos podiam medir a latitude

Figura 16 – Astrolábio



Figura 17 – Quadrante



Fonte: <http://rohist.blogspot.com.br/2008/09/procura-identificar-cada-um-dos.html>. Acesso em:04/03/18

Figura 18 – Balestilha

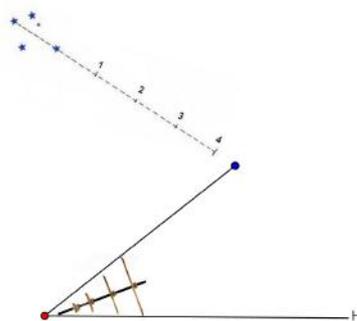


Fonte: <http://marleysvirtualmuseum.weebly.com/cross-staff.html>. Acesso em:04/03/18

local, bastando para tanto, tomar como referência um dos polos celestes. Assim o ângulo entre o polo celeste e a linha do horizonte correspondia à latitude local.

No caso particular do Hemisfério Sul, desde muito cedo existia uma forma prática de se localizar seu polo celeste, através do prolongamento em 4,5 vezes do eixo maior da constelação do Cruzeiro do sul. Conforme pode-se observar na figura 19, o ângulo formado entre este ponto e o horizonte indica a latitude local.

Figura 19 – Medição da latitude local a partir do horizonte



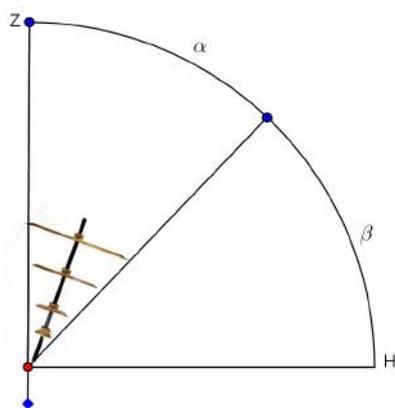
Fonte: O autor, 2018.

Deve-se ressaltar entretanto, a dificuldade dos navegadores em localizar o horizonte durante a noite. Uma maneira engenhosa de contornar esse problema era colocar uma linha de prumo e direcionar o instrumento para o zênite⁵, formando

⁵ termo que designa o ponto imaginário intersectado por um eixo vertical traçado a partir da cabeça de

um ângulo α entre o zênite e o polo celeste que pode ser facilmente identificado. O complemento β representava a latitude local. A figura 20, ajuda a entender esse mecanismo.

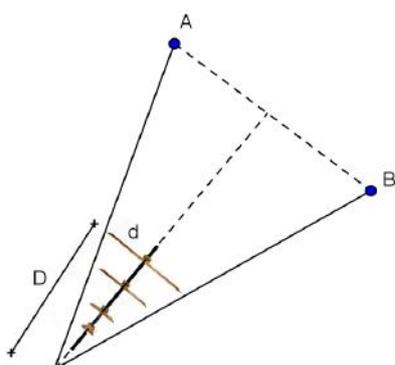
Figura 20 – Medição da latitude local a partir do zênite



Fonte: O autor, 2018.

Particularmente com a ballestilha também se podia descobrir o ângulo de separação entre duas estrelas, de modo que cada uma estivesse alinhada a extremidade da soalha. A figura 21, ilustra o mecanismo geométrico envolvido na utilização do instrumento.

Figura 21 – Medição da distância angular entre duas estrelas



Fonte: O autor, 2018.

Logo a partir da figura teremos:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{D}$$

$$\alpha = 2 \times \arctan\left(\frac{d}{D}\right)$$

um observador localizado sobre a superfície terrestre e que se prolonga até a esfera celeste.

Além disso, a gradação do virote permitia ao observador uma determinação imediata dos intervalos angulares a partir das distâncias de visada.

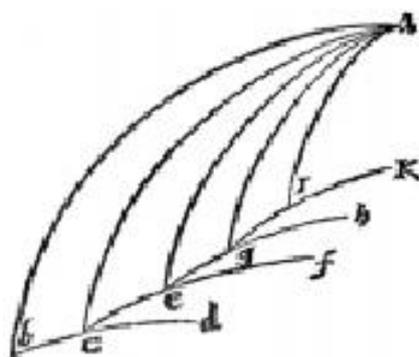
3.5 As Linhas de Rumo de Pedro Nunes

Desde muito cedo os navegadores perceberam que existiam duas maneiras de se navegar em alto mar: a primeira mantendo a mesma rota, sem mudanças; a segunda seguindo o caminho mais curto, através de círculos maiores. Como já abordado anteriormente, coube a Portugal o papel de primazia na navegação e conseqüentemente um destaque no desenvolvimento das tecnologias que propiciaram esse grande empreendimento.

Foi Pedro Nunes que transformou em linguagem matemática o que vinha sendo feito na prática há décadas pelos pilotos das embarcações portuguesas. De fato, a maneira mais natural de navegar em alto mar, onde as referências não existem, é fazer com que a embarcação mantenha um ângulo constante com o norte da bússola. Na prática esta rota segue uma linha de rumo. Assim, uma definição simples para linha de rumo sobre o globo terrestre seria a de uma curva que mantém o ângulo constante por todos os meridianos pelos quais passa.

Como bem abordou Queiró (2002), Pedro Nunes mesmo antes da trigonometria esférica, já apresentava um elaborado processo sequencial de triângulos esféricos a fim de obter pontos sobre uma linha de rumo. A figura⁶ abaixo, ajuda a entender o processo.

Figura 22 – Processo de Pedro Nunes para obtenção de pontos da linha de rumo



Fonte: Gazeta de Matemática 143, Universidade de Coimbra, p.45,2002.

Nela uma rota que sai do ponto b, localizado no Equador, segue uma linha de rumo quando ao passar pelos meridianos tem seus ângulos preservados. Assim os

⁶ Figura elaborada por Pedro Nunes na obra *Sobre a arte e a ciência de navegar* (1575).

pontos b, c, e, g e i pertencem à linha de rumo. Como A é o Polo Norte, os arcos $\widehat{AB}, \widehat{AC}, \widehat{AE}, \widehat{AG}, \widehat{AI}$ estão sobre círculos máximos (meridianos).

Na prática a ideia de linha de rumo é fácil de entender, porém a teoria requer conceitos que escapam à geometria euclidiana. Portanto, agora se faz necessário uma pausa neste tópico, e o desenvolvimento dos principais conceitos da geometria e trigonometria esféricas para só então ter subsídios para concluir a teoria matemática por trás das linhas de rumo.

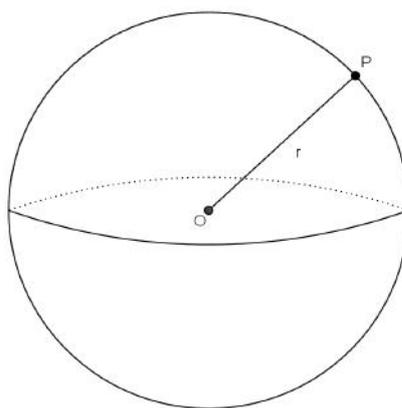
3.6 A geometria da esfera

A partir de agora vamos começar a desenvolver um estudo da esfera e de seus principais elementos, explorando suas associações com o globo terrestre. Os elementos notáveis da superfície esférica podem remeter a conceitos geográficos como: pólos, paralelos, meridianos, latitudes e longitudes, permitindo um interessante nicho entre a matemática e a geografia.

Definição 1. Esfera: Sejam um ponto O e r um número real positivo. Chamamos **esfera** de centro O e raio r ao lugar geométrico dos pontos P do espaço, cujas distâncias medidas a partir de O são menores ou iguais a r .

Para efeito didático a terra passa a ser considerada uma esfera.

Figura 23 – Esfera de centro O e raio r



Fonte: O autor, 2018.

Definição 2. Eixo Polar: É o eixo no qual a esfera (Terra) efetua seu movimento de Rotação.

Definição 3. Pólos: São os pontos de interseção do eixo polar com a superfície esférica. Os pontos N e S representam os Pólos Norte e Sul, respectivamente.

Definição 4. Equador: É a circunferência máxima situada no plano perpendicular ao eixo polar no ponto O.

Definição 5. Paralelos: São circunferências situadas em planos perpendiculares ao eixo polar e paralelas ao plano do equador.

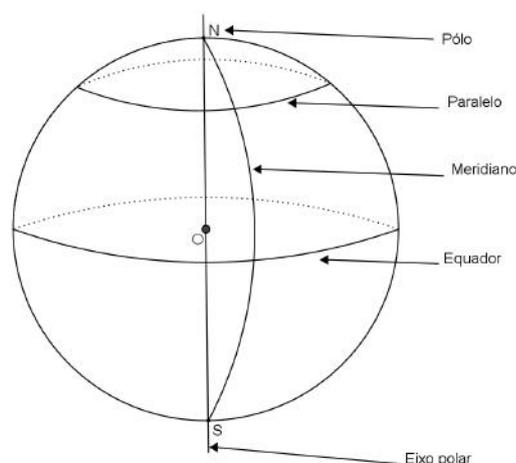
Definição 6. Meridianos: São semicircunferências formadas a partir de círculos máximos que contém os pólos.

Definição 7. Fuso esférico: É a superfície obtida pela rotação de α ($0 < \alpha < 2\pi$) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro.

Definição 8. Calota esférica: São as duas partes oriundas da interseção de um plano em uma superfície esférica formando uma circunferência.

Definição 9. Zona esférica: É a parte da superfície esférica resultante da interseção de dois planos distintos paralelos e não tangentes.

Figura 24 – Elementos notáveis da esfera



Fonte: O autor, 2018.

A figura acima ilustra as associações entre elementos da esfera e do globo terrestre.

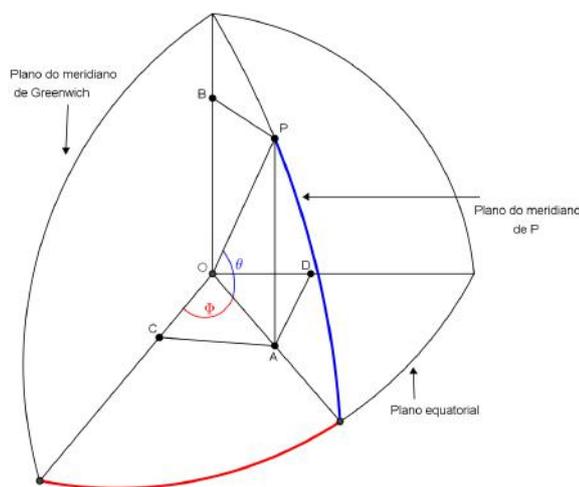
Definição 10. A latitude de um ponto P: É a medida da amplitude do arco de meridiano que passa por P, compreendido entre o paralelo que contém P e o Equador.

Definição 11. A longitude de um ponto P: É a medida da amplitude do arco de paralelo que passa por P, compreendido entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich⁷.

⁷ Meridiano de Greenwich - é o meridiano que passa sobre a localidade de Greenwich (no Observatório Real, nos arredores de Londres, Reino Unido) e que, por convenção, divide o globo terrestre e permite medir a longitude.

Quando P está sobre a superfície terrestre as medidas das amplitudes dos ângulos θ e ϕ indicados na figura seguinte, correspondem exatamente à latitude e longitude do ponto P .

Figura 25 – Sistema de coordenadas geográficas



Fonte: O autor, 2018.

Agora, o trabalho irá abordar algumas propriedades envolvendo superfícies esféricas e planos no espaço, que englobam propriedades que envolvem circunferência e retas no plano.

Teorema 1. Um plano perpendicular ao raio na sua extremidade comum com a superfície esférica é tangente à mesma. A recíproca também é verdadeira.

PROVA:

Sendo α um plano perpendicular ao raio OA em A , basta mostrar que nenhum outro ponto de α pertence à superfície esférica.

Seja P um ponto qualquer de α , com P distinto de A . Como α é perpendicular ao raio OA temos que o triângulo OAP é retângulo com hipotenusa OP . Logo $OP > OA = r$, assim P não pertence à superfície esférica.

Reciprocamente seja α um plano tangente a uma superfície esférica no ponto A . Suponha, por absurdo, que α não é perpendicular ao raio OA . Então teremos um ponto M em α de tal forma que OM seja perpendicular α . Assim OA será a hipotenusa do triângulo OAM pelo que $OM < OA = r$ e M é um ponto interior à superfície. Deste modo, o plano intersecta a superfície esférica em A e M . Mas isso é absurdo, pois α é tangente à esfera. A contradição surgiu ao se assumir que o raio não era perpendicular ao plano. Logo o plano α é perpendicular ao raio OA . \square

Teorema 2. A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência com esse centro e o mesmo raio.

PROVA:

Sejam a esfera com centro O e raio r e um plano α que passa por O . A interseção da superfície esférica com o plano α é o conjunto de pontos do referido plano cuja distância de O é igual a r . Mas essa é a definição de circunferência de centro O e raio r . \square

Esta circunferência é chamada de **circunferência máxima** da superfície esférica.

Teorema 3. Se um plano contém um ponto no interior de uma esfera, então a interseção desse plano com a superfície esférica é uma circunferência.

PROVA:

Se α passa pelo centro O da esfera, cai-se no teorema anterior.

Seja α um plano que não passa pelo centro O da esfera, mas contém um ponto X do seu interior. Sendo C o pé da perpendicular a α traçada a partir de O , vamos mostrar que a interseção de α com a superfície esférica é uma circunferência de centro C .

Sabe-se que $OX < r$. Mas $OC < OX$, porque OCX é um triângulo retângulo em C . Assim $OC < r$, logo C também está no interior da esfera.

Seja P um ponto arbitrário da interseção de α com a superfície esférica. Então $OP = r$ e $CP = \sqrt{r^2 - OC^2}$. Logo P está na circunferência de centro C e raio $\sqrt{r^2 - OC^2}$. Da arbitrariedade de P resulta que a interseção de α e a superfície esférica está contida na referida circunferência.

Sendo P um ponto qualquer da circunferência temos: $OP^2 = OC^2 + CP^2$, mas $CP = \sqrt{r^2 - OC^2}$. Portanto $OP = r$ e P pertence a superfície esférica. \square

Por fim, irá se abordar o volume e áreas das formas de superfície esférica.

Teorema 4. O volume de uma esfera de raio r u.c. é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ u.v.

Para obter o volume de uma esfera, basta considerar a função contínua em $[-r, r]$ definida como $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$ e executar uma revolução em torno do eixo Ox , de forma que:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

$$V = \int_{-r}^r \pi [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$V = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r$$

$$V = \pi \left(r^3 - \frac{x^3}{3} + r^3 - \frac{x^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Teorema 5. A área da superfície esférica de raio r u.c. é igual a $A = 4\pi r^2$ u.a.

Utilizando a demonstração anterior, o objetivo é calcular a área da esfera. Vamos imaginar uma esfera dentro de outra esfera, concêntricas, sendo que a diferença entre seus raios seja e . Sabe-se também que se fatiar essa esfera em pedaços muito pequenos, podemos nos aproximar de sólidos cujo o volume sejam dados por $V = A.h$, onde A representa a área da superfície e h a altura.

Então o que se tem é uma esfera de volume V' e raio r interna a uma esfera de volume V e raio $r + e$. O volume da região entre as duas esferas seria dado por:

$$V - V' = \frac{4}{3}\pi(r + e)^3 - \frac{4}{3}\pi(r)^3$$

$$V - V' = \frac{4}{3}\pi[(r + e)^3 - (r)^3]$$

$$V - V' = \frac{4}{3}\pi[r^3 + 3r^2e + 3re^2 + e^3 - r^3]$$

$$V - V' = \frac{4}{3}\pi[3r^2e + 3re^2 + e^3]$$

$$V - V' = \frac{4}{3}\pi e[3r^2 + 3re + e^2]$$

Agora admitindo que a superfície esférica seja planificável e fazendo $h = e$ a área da superfície entre as duas esferas pode ser expressa por $A = \frac{V - V'}{e}$, portanto:

$$A = \frac{V - V'}{e} = \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3re + e^2]$$

Entretanto fazendo $e \rightarrow 0$ teremos a área da superfície esférica de raio r , que é o que interessa.

$$A = \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3r.0 + 0^2] = 4\pi r^2$$

Esta prova carece de rigor da análise, mas pode perfeitamente ser trabalhada com alunos do ensino médio, devido seu caráter intuitivo.

Corolário 1. A área da calota esférica (A_{ce}), onde r u.c. é o raio da superfície esférica e h u.c. é a altura da calota é igual a $A_{ce} = 2\pi r h$ u. a.

Seja A_{ce} a área da calota esférica de altura h e A_{se} a área da superfície esférica de altura $2r$, onde r é o raio da esfera, assim temos:

$$\frac{A_{se}}{A_{ce}} = \frac{2r}{h}$$

Mas como se viu no **Teorema 5**, $A_{se} = 4\pi r^2$ u.a., logo:

$$\begin{aligned}\frac{4\pi r^2}{A_{ce}} &= \frac{2r}{h} \\ A_{ce} &= \frac{4\pi r^2 h}{2r} \\ A_{ce} &= 2\pi r h\end{aligned}$$

Corolário 2. A área de uma zona esférica (A_{ze}), onde r é o raio da superfície esférica e d é a distância entre os planos paralelos que cortam a esfera é igual a $A_{ze} = 2\pi r d$ u.a.

Uma zona esférica pode ser obtida através da diferença entre duas calotas esféricas. Seja A_{ce1} a área da calota esférica de altura h_1 e A_{ce2} a área da calota esférica de altura h_2 , com $h_2 > h_1$. A área da zona esférica A_{ze} é dada por:

$$\begin{aligned}A_{ze} &= A_{ce2} - A_{ce1} \\ A_{ze} &= 2\pi r h_2 - 2\pi r h_1 \\ A_{ze} &= 2\pi r (h_2 - h_1) \\ A_{ze} &= 2\pi r d\end{aligned}$$

Corolário 3. A área de uma fuso esférico (A_{fe}), onde r é o raio da superfície esférica e α é o ângulo do fuso é dada por $A_{fe} = 2\alpha r^2$ u.a.

$$\begin{aligned}\frac{A_{fe}}{4\pi r^2} &= \frac{\alpha}{2\pi} \\ A_{fe} &= \frac{4\pi r^2 \alpha}{2\pi} \\ A_{fe} &= 2\alpha r^2\end{aligned}$$

Fusos completos serão de extrema importância para os cálculos de áreas de triângulos esféricos. Neles, leva-se em consideração além do fuso o seu antípoda, sendo assim sua área é dobrada.

Nesta seção foram apresentados conceitos básicos sobre geometria esférica, que como se viu se utilizam da geometria euclidiana. Na próxima seção mergulharemos mais fundo...

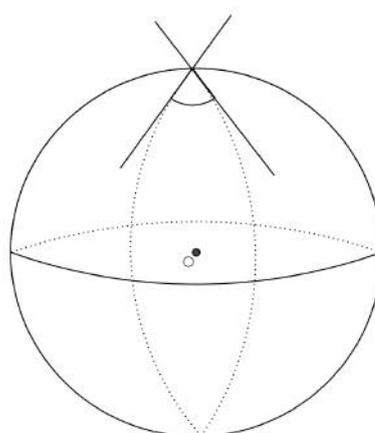
3.7 A trigonometria esférica

Da mesma forma que se fez na seção anterior, começaremos por apresentar algumas definições.

Definição 12. Ângulo esférico: É o ângulo, formado por dois arcos de circunferência máxima, possui a mesma medida do ângulo plano formado pelas retas tangentes a esses arcos no ponto comum.

A figura a seguir, ilustra um ângulo esférico.

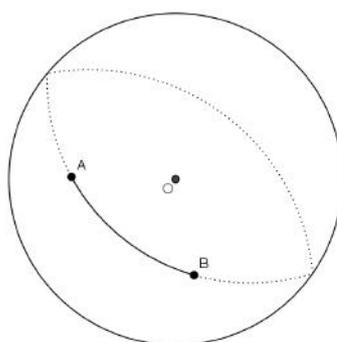
Figura 26 – Ângulos esféricos



Fonte: O autor, 2018.

Definição 13. Geodésica: É o menor caminho entre dois pontos distintos pertencentes à superfície esférica, representada pelo menor arco de circunferência máxima que contém esses pontos.

Figura 27 – Geodésica



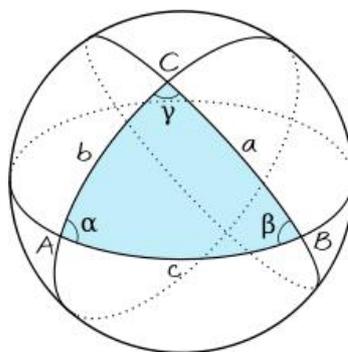
Fonte: O autor, 2018.

Na geometria plana euclidiana a menor distância entre dois pontos é dada pelo segmento de reta que os liga. Entretanto o plano da geometria esférica é uma superfície esférica e a distância entre dois pontos passa a ser dada pelo menor arco da circunferência máxima que passa por esses pontos. A figura anterior ajuda a entender a definição.

Definição 14. Sejam A, B e C três pontos distintos e não pertencentes ao mesmo círculo máximo. A figura formada pelas geodésicas que unem esses pontos dois a dois é denominada **triângulo esférico**.

Na figura 28, tem-se um triângulo esférico de vértices A, B e C . Seus lados são as geodésicas a, b e c . Seus ângulos internos são α, β e γ .

Figura 28 – Triângulo esférico



Fonte: <https://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometría-esférica>

A partir da definição de triângulo esférico, vamos abordar algumas propriedades peculiares à geometria esférica.

Teorema 6. Sejam α, β e γ , as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC , então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_{te}}{r^2}$, onde A_{te} é a área desse triângulo esférico e r é o raio da superfície esférica.

Prolongando os lados do triângulo esférico da figura 28, obtemos três fusos completos, que possuem os mesmos ângulos internos do triângulo. Assim a área de cada fuso completo referente aos ângulos internos α, β e γ é respectivamente, $4\alpha r^2, 4\beta r^2$ e $4\gamma r^2$. Observe ainda, que os fusos completos associados formam além do triângulo esférico ABC , o triângulo esférico antípoda $A'B'C'$, congruente a ABC (caso LLL). Se somarmos as áreas dos fusos completos teremos a área da superfície esférica acrescida de quatro vezes a área do triângulo esférico ABC , já que foram contadas repetidamente duas vezes por ABC e duas vezes por $A'B'C'$.

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 4A_{te}$$

$$4r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4(\pi r^2 + A_{te})$$

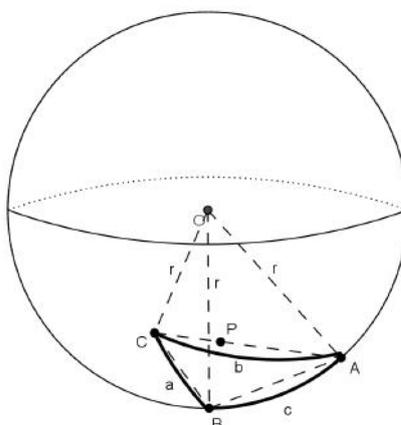
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_{te}}{r^2}$$

Teorema 7. Sejam α , β e γ , as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC , então $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$

Sejam A_{te} a área desse triângulo esférico e r o raio da superfície esférica. Como vimos no teorema anterior $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_{te}}{r^2}$. Assim, a soma dos ângulos internos do triângulo esférico será sempre maior que π . Em contrapartida vamos imaginar um triângulo esférico que ocupe uma área máxima, próxima à ocupada por um hemisfério. Assim sua área tende para a área do Hemisfério ($2\pi r^2$). Logo, pelo teorema anterior a soma tende para 3π , sem entretanto assumir este valor.

Teorema 8. Num triângulo esférico a soma das medidas dos comprimentos de dois lados é sempre maior do que a medida do comprimento do terceiro lado.

Figura 29 – Triângulo sobre a esfera



Fonte: O autor, 2018.

A partir da figura 29, pode-se tirar as seguintes conclusões:

O lado AB do triângulo esférico é medido através do arco \widehat{AB} contido na circunferência máxima, que é equivalente a face do triedo que se obtém quando se liga os pontos A , B com o centro da esfera O . Assim seu comprimento é o arco que corresponde ao $\angle AOB$. O mesmo ocorre para os lados AC e BC do triângulo esférico que são medidos pelos comprimentos dos arcos \widehat{AC} e \widehat{BC} , dessa forma os arcos \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} são representados por c , b e a , respectivamente. Note-se que um arco corresponde a duas medidas de natureza diferente: a do seu comprimento e a de sua amplitude. O contexto em que são utilizadas as letras a , b e c para designar os arcos se encarrega de fazer tal distinção.

Unindo-se os vértices A, B, C do triângulo esférico ao centro O da esfera, obtemos o triedro $O - ABC$. Portanto para provar que a desigualdade triangular é válida para triângulos esféricos, basta mostrar que um ângulo da face do triedro $O-ABC$ é menor que a soma dos ângulos das outras duas faces.

Considerando, os três ângulos do triedro $O - ABC$ congruentes, o teorema é trivialmente verdadeiro.

Agora, supondo que o $\angle AOC$ seja o ângulo no triedro $O - ABC$. Assim teremos um ponto P sobre AC , tal que $\angle AOP = \angle AOB$. Teremos $OB = OP$ e conseqüentemente o $\triangle AOB \cong \triangle AOP$ (caso LAL). Logo $AP = AB$.

Por outro lado, considerando no plano o $\triangle ABC$, pela desigualdade triangular, temos:

$$AC < AB + BC$$

$$AC = AP + PC < AB + BC$$

Mas como $AP = AB$, temos

$$PC < BC$$

Conseqüentemente

$$\angle POC < \angle BOC$$

donde tem-se por conclusão que:

$$\angle AOC = \angle AOP + \angle POC < \angle AOB + \angle BOC$$

Como foi considerado AC como o maior lado, a demonstração acima se estende para os demais lados.

Como já referido, tem-se \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} como ângulos esféricos formados nos vértices do triângulo. Da mesma forma, os lados a, b e c que são os arcos de circunferência máxima que unem os três vértices. Assim, resolver um triângulo esférico consiste em determinar três de seus elementos quando são conhecidos os outros três. Para isso serão úteis as relações que figuram nos teoremas seguintes.

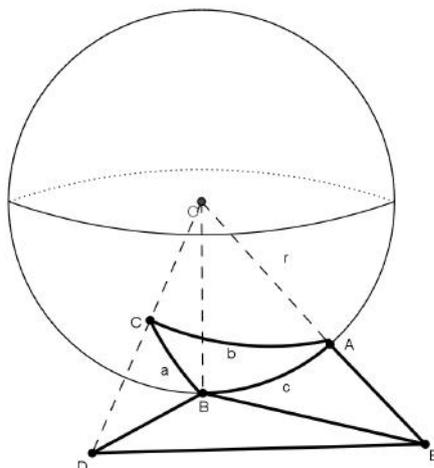
Teorema 9 (Lei dos cossenos para triângulos esféricos). Seja ABC um triângulo esférico, com lados a, b e c , e ângulos internos \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} . Então:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \hat{B}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C}$$

Figura 30 – Triângulo esférico e a Lei dos Cossenos



Fonte: O autor, 2018.

A figura 30, ilustra um triângulo esférico:

Uma vez que a prova das três relações anteriores se faz de forma semelhante, vamos apenas apresentar a prova da segunda delas.

Sejam BD e BE as retas tangentes às geodésicas BC e BA no ponto B , respectivamente. Portanto o raio OB é perpendicular a BD e BE .

Por definição o ângulo esférico \hat{B} é definido como o ângulo entre as tangentes em B , é o $\angle DBE$ do $\triangle BDE$.

O $\triangle OBD$, é retângulo em B e o $\angle BOD$ corresponde ao lado BC do triângulo esférico, e foi designado por a . Desse triângulo tem-se:

$$\tan a = \frac{BD}{OB}$$

$$BD = OB \tan a$$

$$\cos a = \frac{OB}{OD}$$

$$OD = OB \sec a$$

Do $\triangle OBE$, retângulo em B , o $\angle BOE$ se mede a partir do lado AB do triângulo esférico, que foi chamado de c . Logo:

$$\tan c = \frac{BE}{OB}$$

$$BE = OB \tan c$$

$$\cos c = \frac{OB}{OE}$$

$$OE = OB \sec c$$

Aplicando a lei dos cossenos no $\triangle BDE$:

$$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2(BD)(BE) \cos \hat{B}$$

Substituindo BD e BE na equação acima:

$$DE^2 = OB^2[\tan^2 a + \tan^2 c - 2\tan a \tan c \cos \hat{B}] \quad \mathbf{(2.7.1)}$$

Por fim, aplicando a lei dos cossenos no $\triangle DOE$:

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2(OD)(OE) \cos b$$

Substituindo OD e OE na equação acima:

$$DE^2 = OB^2[\sec^2 a + \sec^2 c - 2\sec a \sec c \cos b] \quad \mathbf{(2.7.2)}$$

Igualando **(2.7.1)** e **(2.7.2)** obtem-se:

$$\tan^2 a + \tan^2 c - 2\tan a \tan c \cos \hat{B} = \sec^2 a + \sec^2 c - 2\sec a \sec c \cos b$$

Substituindo as relações $\sec^2 c = 1 + \tan^2 c$ e $\sec^2 a = 1 + \tan^2 a$

Obtem-se finalmente a lei dos cossenos do triângulo esférico:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \hat{B}$$

Teorema 10 (Lei dos senos para triângulos esféricos). Seja ABC um triângulo esférico, com lados a, b e c , e ângulos internos \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} , então:

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c}$$

Na figura 31, os pontos P, M e N são tais que:

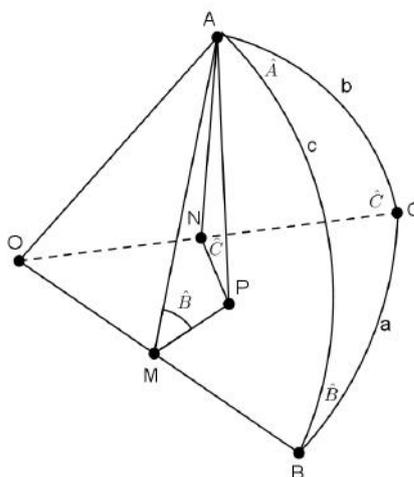
P é a projeção ortogonal de A sobre o plano (BOC) ; M e N são, respectivamente, as projeções ortogonais de P sobre as retas OB e OC .

Note que o ângulo AMP é congruente ao ângulo \hat{B} . Assim como ANP é congruente ao ângulo \hat{C} .

$O \triangle AMP, \triangle AMO, \triangle ANP$ e $\triangle ANO$ são triângulos retângulos. Assim, extrai-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sin \hat{B} &= \frac{AP}{AM} \\ \sin \hat{C} &= \frac{AP}{AN} \\ \sin b &= \frac{AN}{OA} \end{aligned}$$

Figura 31 – Triângulo esférico e a lei dos senos



Fonte: O autor, 2018.

$$\sin c = \frac{AM}{OA}$$

Portanto:

$$AP = AM \sin \hat{B} = AN \sin \hat{C}$$

Mas como:

$$AM = OA \sin c$$

$$AN = OA \sin b$$

Então

$$OA \sin b \sin \hat{C} = OA \sin c \sin \hat{B}$$

E resulta:

$$\frac{\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c}$$

Por analogia, considerando o vértice B , temos⁸:

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c}$$

E conclui-se que:

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c}$$

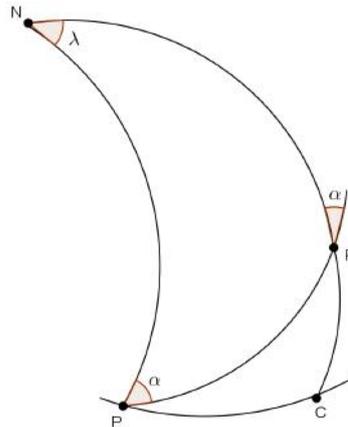
⁸ Poderíamos ter escolhido também o vértice C .

3.8 Revisitando as Linhas de Rumo de Pedro Nunes

Agora, já se pode entender melhor a matemática por trás das Linhas de Rumo propostas por Pedro Nunes.

Para efeito de estudo, vamos considerar o raio da terra como sendo a unidade de comprimento. O ponto P tem à partida, na latitude θ , a longitude $\phi(\theta)$, ou seja, a longitude é função da latitude. Imaginemos que P se desloca sobre uma linha de rumo e que em um determinado momento subsequente sua localização seja P' com latitude $(\theta + d)$. Se fizermos este d muito pequeno, podemos considerar o triângulo PCP' um triângulo plano. Este triângulo também é reto em C (encontro entre um meridiano e um paralelo) e possui ângulo α em P' (P' está sobre uma linha de rumo). A figura 32, ajuda na compreensão desse processo.

Figura 32 – Pontos sobre a linha de rumo



Fonte: O autor, 2018.

A circunferência que tem como arco \widehat{PC} , sobre a latitude θ , possui raio $\cos \theta$.

A diferença entre as longitudes de P e P' é $\lambda = \phi(\theta + d) - \phi(\theta)$.

Logo temos que:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi r}{\widehat{PC}}$$

$$\widehat{PC} = r\lambda$$

$$\widehat{PC} = \cos \theta [\phi(\theta + d) - \phi(\theta)]$$

Do $\triangle PCP'$ temos:

$$\tan \alpha = \frac{\cos \theta [\phi(\theta + d) - \phi(\theta)]}{d}$$

Ou seja,

$$\tan \alpha \sec \theta = \frac{\phi(\theta + d) - \phi(\theta)}{d}$$

Com d suficientemente pequeno, o segundo membro da igualdade anterior tende a $\phi'(\theta)$

Donde:

$$\begin{aligned}\phi'(\theta) &= \tan(\alpha)\sec(\theta) \\ \phi(\theta) &= \tan(\alpha) \int \sec(\theta) d\theta \\ \phi(\theta) &= \tan(\alpha) \ln \left| \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|\end{aligned}$$

Dessa forma é possível calcular pontos sucessivos que se encontram sobre a Linha de Rumo.

3.9 O funcionamento do GPS

Os aparelhos celulares constituem itens indispensáveis no dia a dia das pessoas. Hoje não nos imaginamos sem eles, apesar que realizar uma ligação seja ação de segunda necessidade. As redes sociais, sites de buscas e informações dominam o seu emprego. Se queremos chegar a algum lugar e estamos perdidos, lá chegaremos através de aplicativos de celular. Somos capazes de localizar a posição do nosso aparelho, bem como de qualquer outro a cujo dados tenhamos acesso. Somos capazes de viajar sem sair de casa. Realmente uma realidade não imaginada nem por mentes criativas como a de Júlio Verne⁹.

Para desfrutarmos de tudo isso basta uma simples autorização. Com ela, vamos do céu ao purgatório. Sim, porque nossos dados, hábitos e costumes ficam registrados e em algum momento poderão ser utilizados a nosso favor ou contra.

Feito esse parênteses filosófico, nos interessa abordar aqui o que está por trás do extraordinário Sistema de Posicionamento Global (GPS). Seu princípio de funcionamento se baseia na posição relativa de um determinado número de superfícies esféricas que se intersectam em um ponto que pode ser obtido através de coordenadas geográficas com extrema precisão.

O projeto foi iniciado em 1973 para atender ao Departamento de Defesa dos Estados Unidos. Mas, com o passar do tempo, foi estendido ao uso civil. Trata-se da disposição de 24 satélites orbitando a aproximadamente 20200 Km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecer a sua posição em qualquer lugar sobre a terra.

Mas afinal, como a matemática é utilizada no funcionamento do GPS?

⁹ Jules Gabriel Verne é considerado por críticos literários o inventor do gênero de ficção científica, tendo feito predições em seus livros sobre o aparecimento de novos avanços científicos: como os submarinos, máquinas voadoras e viagem à Lua.

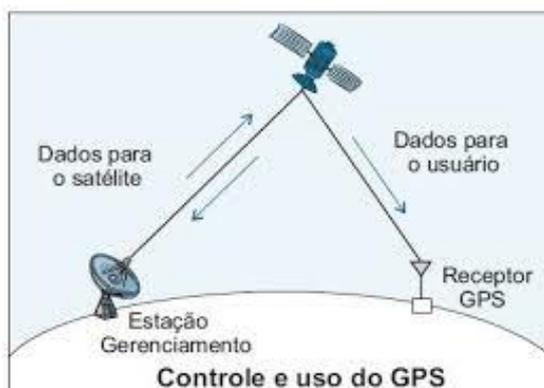
Figura 33 – Satélites orbitando sobre a terra



Fonte: <http://blog.tuningparts.com.br/gps-entenda-como-funciona>. Acesso em:20/02/2018

Sem considerar toda a tecnologia envolvida no processo, o conceito matemático presente no funcionamento do GPS é bastante simples. Cada satélite emite a todo momento um sinal aos receptores na terra (aparelhos de GPS). Estes por sua vez calculam a distância ao satélite emissor. De modo que o satélite funciona como o centro de uma esfera de raio igual a distância entre o satélite e o receptor GPS. Assim, através de interseções de esferas, garantimos a determinação de uma localização exata.

Figura 34 – Funcionamento do GPS



Fonte: <http://blogdogps.com.br/novidades/como-funcionam-os-receptores-gps>. Acesso em:20/02/2018

Primeiramente, vamos nos reportar à figura 25, e determinar uma forma de representarmos uma superfície esférica em coordenadas cartesianas.

Seja $O(0, 0, 0)$, então:

$$d(O, P) = OP = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Genericamente, entretanto, o centro C pode estar fora da origem O e supondo que tem coordenadas (x_1, y_1, z_1) , temos:

$$d(C, P) = CP = r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$$

Que após desenvolvermos obteremos a equação geral da superfície esférica de centro C e raio r .

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1x - 2y_1y - 2z_1z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Já estamos aptos a localizar qualquer ponto P na superfície da esfera, seja através de suas coordenadas cartesianas (x, y, z) , ou ainda se considerarmos o globo terrestre, através de suas coordenadas geográficas dadas por sua latitude e longitude. Ainda tendo como referência a figura 25 temos que:

$$A = (x, y, 0)$$

$$B = (0, 0, z)$$

$$C = (x, 0, 0)$$

$$D = (0, y, 0)$$

$$\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Do $\triangle AOP$ temos que $\sin(\theta) = \frac{z}{r}$ e portanto $z = r\sin(\theta)$. Da mesma forma do $\triangle AOC$ temos que $\sin(\phi) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Por outro lado, do $\triangle BOP$ temos que $\cos(90 - \theta) = \sin \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Se estivermos interessados em coordenadas geográficas temos que:

A latitude θ é definida por $\theta = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Onde, quando $z > 0$ temos que a latitude está θ° **N** (norte), enquanto se $z < 0$ temos que a latitude está $-\theta^\circ$ **S** (sul), com $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

A longitude ϕ é definida por $\phi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Quando $y > 0$ temos que a longitude está ϕ° **E** (leste), enquanto se $y < 0$ temos que a longitude está $-\phi^\circ$ **W** (oeste), com $0^\circ < \phi < 180^\circ$.

Entretanto se estivermos interessados em coordenadas cartesianas basta desenvolvermos as expressões acima e chegaremos aos seguintes resultados:

$$x = r \cos \theta \cos \phi$$

$$y = r \cos \theta \sin \phi$$

$$z = r \sin \theta$$

Finalmente, o teorema a seguir garante que se um receptor (GPS) coletar sinais emitidos por quatro satélites, fica determinada a posição exata deste receptor através da interseção das quatro superfícies esféricas obtidas usando os sinais dos satélites. Na prática a terra pode ser considerada uma das superfícies esféricas sendo necessário para se determinar com precisão a localização de um ponto, apenas o sinal de três satélites.

Teorema 11. Se quatro superfícies esféricas com centros não coplanares se intersectam, então esta interseção consiste em um único ponto.

Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centros não coplanares, de tal modo que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$

Vamos considerar S_i de raios e centros respectivamente r_i e $C_i(x_i, y_i, z_i)$ com $1 \leq i \leq 4$.

Como vimos acima, os sinais dos satélites S_i podem ser expressos algebricamente pelas equações das superfícies esféricas.

$$S_i : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = r_i^2$$

Ou seja, de forma equivalente:

$$S_i : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_i x - 2y_i y - 2z_i z + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r_i^2 = 0$$

$$S_i : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_i x - 2y_i y - 2z_i z + d_i = 0$$

Como $1 \leq i \leq 4$ nosso trabalho fica reduzido a resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1 x - 2y_1 y - 2z_1 z + d_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_2 x - 2y_2 y - 2z_2 z + d_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_3 x - 2y_3 y - 2z_3 z + d_3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_4 x - 2y_4 y - 2z_4 z + d_4 = 0 \end{cases}$$

Fazendo $S_1 - S_2$, $S_1 - S_3$ e $S_1 - S_4$, obteremos o subsistema:

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)2x + (y_2 - y_1)2y + (z_2 - z_1)2z + (d_2 - d_1) = 0 \\ (x_3 - x_1)2x + (y_3 - y_1)2y + (z_3 - z_1)2z + (d_3 - d_1) = 0 \\ (x_4 - x_1)2x + (y_4 - y_1)2y + (z_4 - z_1)2z + (d_4 - d_1) = 0 \end{cases}$$

Cada uma das equações representa um plano e queremos provar que a interseção destes se dá em um único ponto P . Ou seja, o sistema terá que ser possível e

determinado, mas isso só é possível se:

$$\begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) & (z_4 - z_1) \end{vmatrix} \neq 0$$

Como os centros C_1, C_2, C_3 e C_4 são por hipótese não coplanares, segue que o determinante é não nulo, caso contrário definiria um plano, e portanto o sistema linear tem uma única solução, o que prova o teorema 11.

Agora todas as vezes que olharmos para o aparelho GPS teremos a consciência que somos um ponto P , produto da interseção de quatro superfícies esféricas.

4 APLICAÇÕES

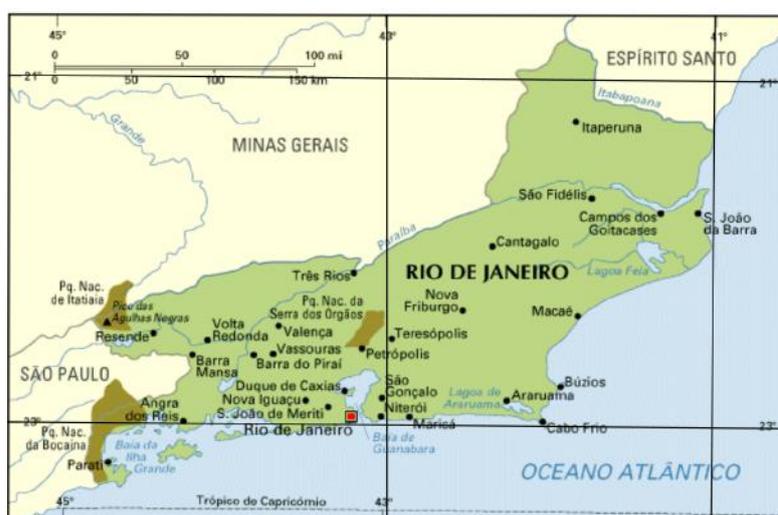
*“A mente que se abre a uma
nova idéia jamais voltará ao seu
tamanho original.”*

Oliver Wendell Holmes Sr.

4.1 Calculando distâncias sobre a terra

A partir de agora vamos colocar em prática os conceitos abordados anteriormente. Começaremos, com aqueles usualmente desenvolvidos em sala de aula. Por exemplo: É comum quando se trabalha com escalas e distâncias geográficas, fornecer um mapa ou esboço com uma escala para que o aluno determine distâncias entre cidades que estão representadas na ilustração. A figura 35 ajuda a compreender esse processo.

Figura 35 – mapa do Rio de Janeiro - 1:50



Fonte: www.viagemdeferias.com

Para calcular a distância (d) entre as cidades do Rio de Janeiro e Cabo Frio, teríamos simplesmente que, recorrendo à proporcionalidade direta, medir essa distância na representação gráfica e associar com a escala presente. Em uma escala 1 : 50, a medição de 3,2 cm se traduz:

$$\frac{1}{3,2} = \frac{50}{d}$$

$$d = 160Km$$

Simples, não? Certamente acessível a maioria dos alunos do ensino básico. Entretanto um dos objetivos deste trabalho é ir de encontro a esse pensamento simplista. Considerando para efeito de estudo a terra como uma esfera, quando medimos distâncias sobre o globo terrestre temos que ter presentes algumas noções da geometria esférica. Assim, abandonar o conforto da geometria euclidiana e mergulhar em conceitos de círculo máximo, ortodromia¹ e triângulos esféricos pode representar uma

¹ Ortodromia é a linha que une dois pontos à superfície da Terra, à qual corresponde o caminho mais curto entre eles. Em contrapartida, a loxodromia, mantém constante o rumo, isto é, o ângulo entre o caminho seguido e os meridianos. Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki>

dificuldade para os alunos do ensino médio. Vamos procurar deixar as coisas mais claras.

A noção fundamental quando se fala em distância entre dois pontos em uma esfera é um arco que tem a particularidade de estar sobre um círculo máximo. Assim se queremos a distância entre dois pontos do globo terrestre temos que procurar o único círculo máximo que contém o arco pretendido.

Decorre deste fato a primeira conclusão de fácil aceitação. Quando os lugares possuem a mesma longitude ϕ , ou seja, estão sobre um mesmo meridiano; a distância entre elas se reduz a diferença das latitudes θ . Isso acontece porque todo meridiano é um círculo máximo.

Como exemplo, tomemos a distância entre as cidades de São Paulo ($\theta = 23^{\circ}32' S - \phi = 46^{\circ}38' W$) e Paracatu em Minas Gerais ($\theta = 17^{\circ}13' S - \phi = 46^{\circ}52' W$). Podemos, para efeito didático, considerar que as cidades estão sobre o mesmo meridiano e portanto a distância entre as cidades (l) se reduz:

$$\Delta\theta \simeq -17^{\circ} - (-23^{\circ})$$

$$\Delta\theta \simeq 6^{\circ}$$

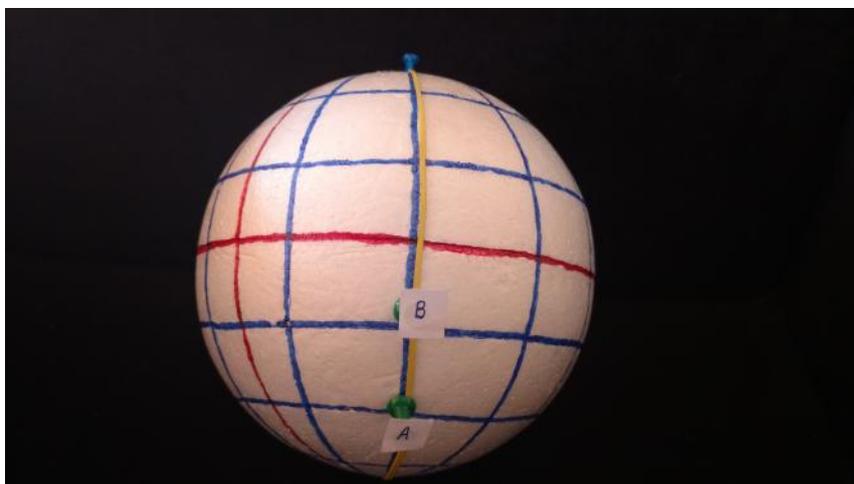
Considerando o raio da terra $6370Km$, temos:

$$\frac{360^{\circ}}{6^{\circ}} = \frac{2\pi 6370}{l}$$

$$l \simeq 667Km$$

Esquemáticamente, podemos representar essa situação com a figura 36.

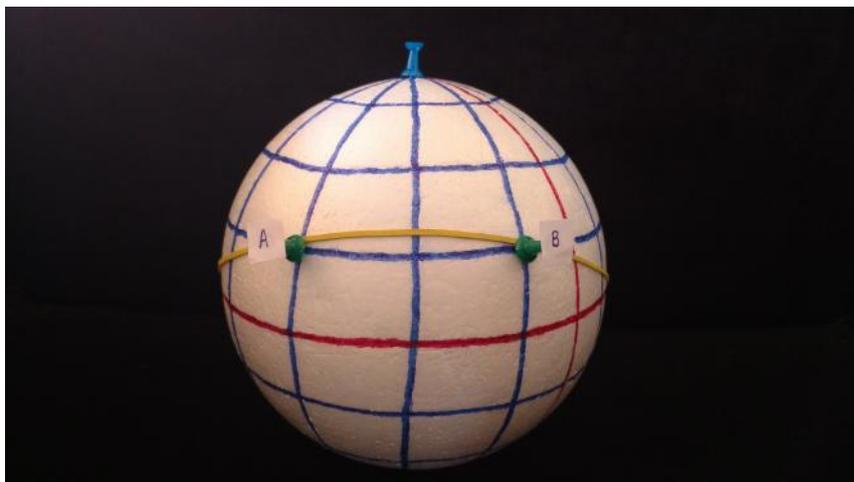
Figura 36 – Distância entre pontos com mesma longitude



Fonte: O autor, 2018.

Pode-se adotar um procedimento similar para cidades sobre a mesma latitude? Certamente que não! Basta observar que os paralelos se reduzem a círculos concêntricos que vão diminuindo em raio à medida que nos afastamos do equador. Portanto, à exceção deste, os paralelos não são círculos máximos.

Figura 37 – Distância entre pontos com mesma latitude



Fonte: O autor, 2018.

A figura acima, ajuda a desconstruir o senso comum. As cidades A e B estão sobre o mesmo paralelo, em um primeiro momento poderia pensar-se que o arco nela contido forneceria a distância entre as cidades. Entretanto como vimos no capítulo anterior, esta é dada pelo arco que tem que estar necessariamente sobre um círculo máximo. Logo, na figura, a trajetória amarela daria a distância entre A e B.

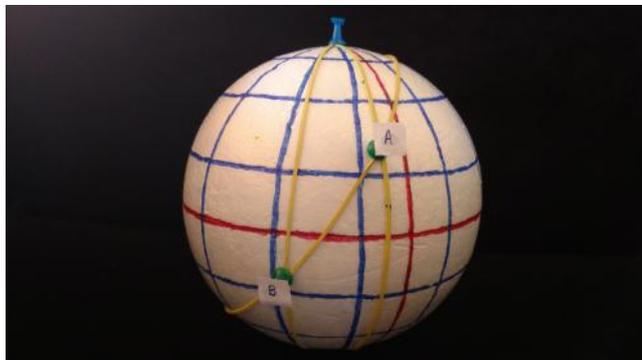
Assim medir distâncias entre pontos de mesma latitude recai no caso geral de medir a distância entre dois pontos quaisquer sobre o globo terrestre. No caso geral temos que formar triângulos esféricos, cujos lados estão necessariamente sobre círculos máximos (reportar a definição no capítulo 2), onde os vértices são os pontos A e B cuja distância se quer medir e um terceiro ponto C, no Polo Norte, garantindo que os lados estejam sobre círculos máximos. Por fim o uso da lei dos cossenos da geometria esférica permite determinar o lado desconhecido do triângulo esférico construído.

Um reporte a um exemplo prático ajuda a entender melhor o que foi falado acima. Em 1500, o navegante português Pedro Álvares Cabral, saiu do porto da Praia do Restelo, no estuário do rio Tejo, Lisboa, para 43 dias depois ancorar em uma praia de Porto Seguro no Brasil. Imaginando que seguiu uma linha ortodrômica (na realidade, como foi visto, viajavam sobre linhas loxodrômicas). A partir desta contextualização, vamos na realidade ao que nos interessa: Queremos determinar a distância entre as cidades de Porto Seguro e Lisboa.

Chamando de ponto A, a cidade de Lisboa ($\theta = 38,72^\circ N$; $\phi = 9,14^\circ W$) e ponto

B a cidade de Porto Seguro ($\theta = 16,44^\circ S$; $\phi = 39,06^\circ W$), e tomando como ponto C, o Polo Norte, de modo a obter o triângulo esférico ABC como na figura 38:

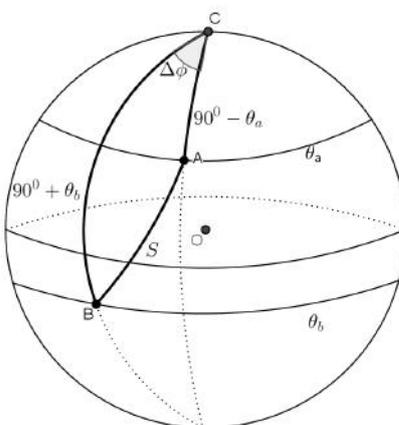
Figura 38 – Modelo para determinação da distância Lisboa x Porto Seguro



Fonte: O autor, 2018.

Observe que todos os lados do triângulo esférico estão contidos em circunferências máximas. Os arcos \widehat{AC} e \widehat{BC} estão sobre meridianos e o arco \widehat{AB} cuja medida é a distância que se pretende achar. Podemos então aplicar a lei dos cossenos a partir da figura 39 que representa o que foi desenvolvido até então.

Figura 39 – Triângulo esférico (Lisboa - Porto Seguro - Polo Norte)



Fonte: O autor, 2018.

As coordenadas geográficas de A e de B são $A = (\theta_a, \phi_a)$ e $B = (\theta_b, \phi_b)$. Temos $\widehat{AC} = b = 90^\circ - \theta_a$, $\widehat{BC} = a = 90^\circ + \theta_b$, $\widehat{AB} = c = S$ e $\widehat{C} = \Delta\phi = \phi_a - \phi_b$. Assim,

$$\cos S = \cos(90^\circ + \theta_b) \cos(90^\circ - \theta_a) + \sin(90^\circ + \theta_b) \sin(90^\circ - \theta_a) \cos(\Delta\phi)$$

Como:

$$90^\circ - \theta_a = 90^\circ - 38,72^\circ = 51,28^\circ$$

$$90^\circ + \theta_b = 90^\circ + 16,44^\circ = 106,44^\circ$$

$$\hat{C} = \Delta\phi = \phi_b - \phi_a = 39,06^\circ - 9,14^\circ = 29,92^\circ$$

temos:

$$\cos S = \cos 106,44^\circ \cos 51,28^\circ + \sin 106,44^\circ \sin 51,28^\circ \cos 29,92^\circ$$

$$\cos(S) = 0,471$$

$$S = \arccos 0,471$$

$$S \simeq 62^\circ$$

Considerando o raio terrestre $6370Km$, tem-se:

$$\frac{360^\circ}{62^\circ} = \frac{2\pi 6370}{d}$$

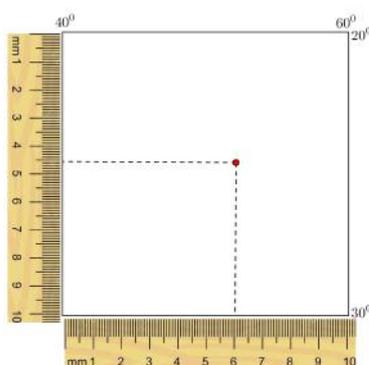
$$d \simeq 6882Km$$

Uma distância bastante considerável à época, demonstrando o grande empenho dos primeiros desbravadores dos mares!

4.2 Determinando coordenadas geográficas

Como foi feito anteriormente, parte-se por determinar as coordenadas geográficas primeiramente em uma superfície plana. Isolando um quadrante de um mapa onde as projeções do globo terrestre garantem através de proporções uma relativa precisão. Os mapas possuem demarcações de paralelos e meridianos que se cruzam formando quadrantes com uma faixa de variação de latitude e longitude determinada pelas linhas limítrofes. Assim, qualquer ponto no interior desse quadrante fica bem definido levando em consideração a proporção presente na escala do mapa. Na figura 40, representa-se um ponto em um quadrante previamente isolado, cujas coordenadas se quer determinar.

Figura 40 – Coordenadas geográficas em um quadrante do mapa



Fonte: O autor, 2018.

O ponto que se deseja determinar está a 6 cm Leste do meridiano 40° e 4,5 cm Sul do paralelo 20° . Através de uma relação de proporcionalidade direta com os respectivos comprimentos dos quadrantes. Com $\theta = \theta_1 + 20^\circ$ e θ_1 determinado por:

$$\frac{10^\circ}{\theta_1} = \frac{10}{4,5}$$

$$\theta_1 = 4,5^\circ$$

$$\theta = 24,5^\circ$$

Para a longitude, temos $\phi = \phi_1 + 40^\circ$ com ϕ_1 determinado por:

$$\frac{20^\circ}{\phi_1} = \frac{10}{6}$$

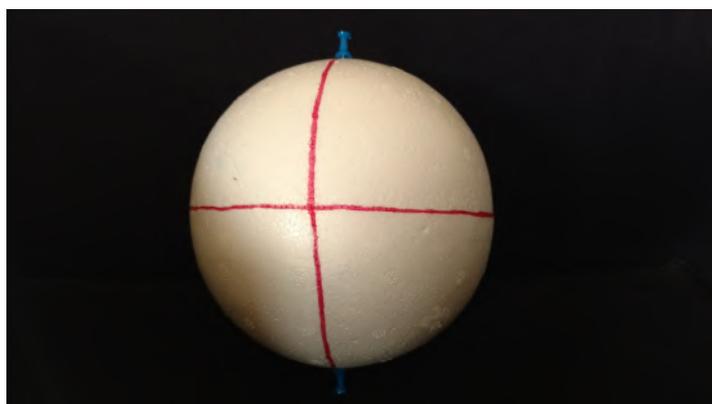
$$\phi_1 = 12^\circ$$

$$\phi = 52^\circ$$

Mas, aqui, o interesse está em determinar as coordenadas geográficas tendo como referência o globo terrestre. Então temos que propor um modelo e aplicar nele os conceitos de geometria esférica. Utilizaremos uma esfera de isopor de diâmetro 15 cm simulando o globo terrestre. Aproveitando o exemplo da seção anterior, digamos que nossa tarefa seja localizar na esfera de isopor as cidades de Lisboa ($\theta = 38,72^\circ N$; $\phi = 9,14^\circ W$) e Porto Seguro ($\theta = 16,44^\circ S$; $\phi = 39,06^\circ W$).

Bom, para tanto, tem-se que criar um sistema de referências na esfera de isopor. A partir daí, se constrói então, dois círculos máximos: um será a latitude 0° (Equador) e o outro a longitude 0° (Greenwich) de acordo com a figura 41.

Figura 41 – modelo do globo terrestre

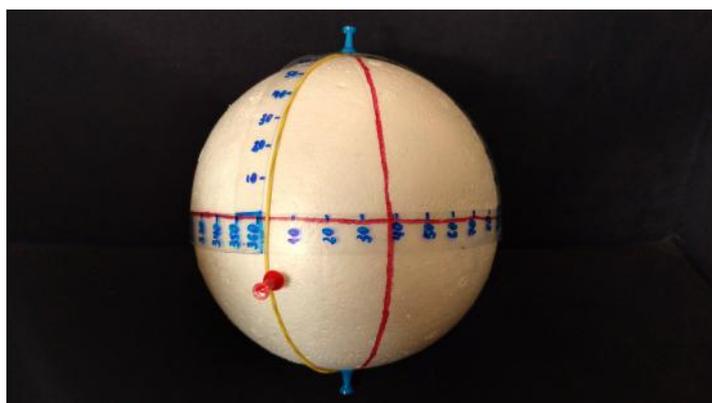


Fonte: O autor, 2018.

Agora, basta criar um dispositivo para medir ângulos no modelo de globo terrestre. No Apêndice A, foi desenvolvido, passo a passo, um transferidor capaz de medir ângulos sobre a esfera. Chamaremos esse instrumento de transferidor esférico.

Para localizar a cidade de Porto Seguro, primeiro medimos com o instrumento a longitude de $\phi = 39,06^\circ$ W, a partir da referência de Greenwich. Um elástico pode ser colocado representando o círculo máximo que passa por essa longitude. Agora, basta medirmos a latitude $\theta = 16,44^\circ$ S, sobre o elástico a partir da referência do Equador. A figura 42 ilustra bem esse processo:

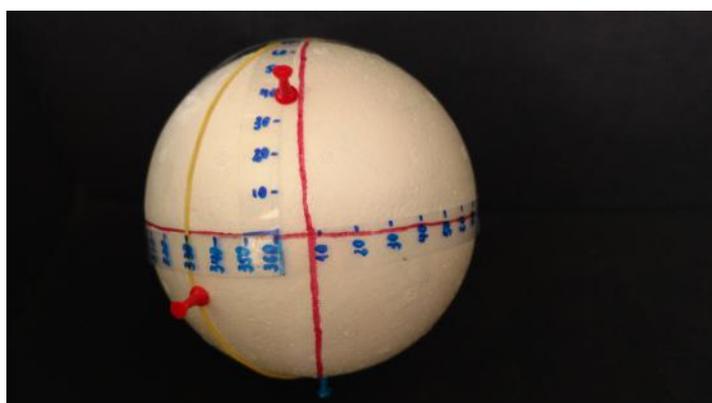
Figura 42 – Localização de Porto Seguro no modelo de globo terrestre



Fonte: O autor, 2018.

O mesmo procedimento será utilizado para localizar a cidade de Lisboa. Após a execução das etapas, obtem-se o seguinte resultado:

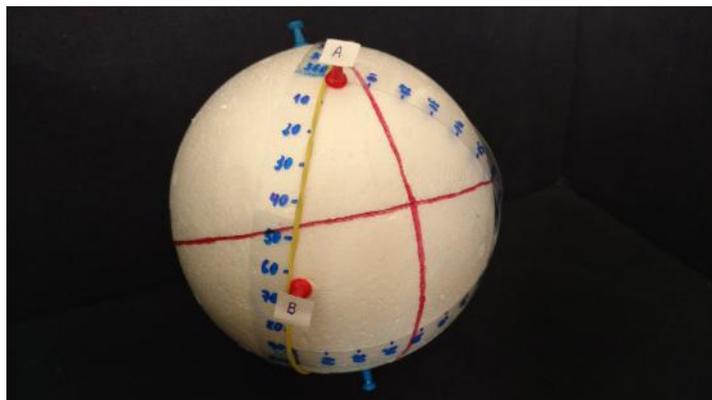
Figura 43 – Localização das cidades no modelo de globo terrestre



Fonte: O autor, 2018.

Pronto! As cidades de Porto Seguro e Lisboa estão representadas no globo terrestre hipotético. Aproveitando a construção, pode-se ir além, e calcular novamente a distância entre Lisboa e Porto Seguro proposta na seção anterior. Agora entretanto, não recorreremos à lei dos cossenos da geometria esférica, mas trabalharemos com o elástico que representa o círculo máximo que contém o arco entre as duas cidades. Basta utilizarmos o transferidor esférico para medirmos o ângulo formado entre Lisboa e Porto Seguro, como ilustrado a seguir:

Figura 44 – Modelo da distância entre Lisboa e Porto Seguro



Fonte: O autor, 2018.

A partir da figura e levando em consideração a escala aplicada no transferidor esférico, podemos mensurar que o ângulo (α) entre as cidades se encontra entre:

$$60^\circ < \alpha < 65^\circ$$

Consultando o resultado obtido na seção anterior, um ângulo de 62° e uma distância de 6882 Km, acreditamos ter obtido uma excelente aproximação.

4.3 Determinando áreas sobre superfícies esféricas

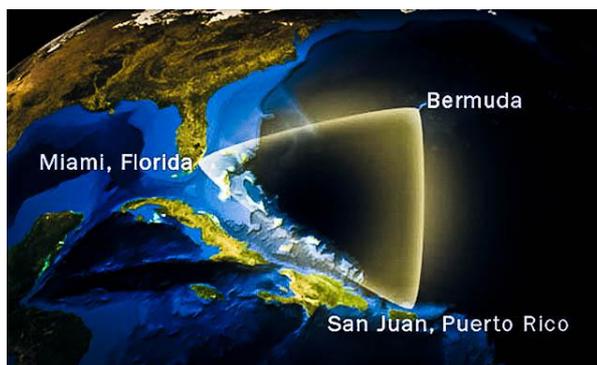
Quem no século XX nunca ouviu falar do Triângulo das Bermudas? Parte do imaginário popular, essa região no Oceano Atlântico, entre Flórida, Porto Rico e Bermudas ficou notabilizada pelo desaparecimento de dezenas de aviões e navios. Lendas e mitos foram se intensificando junto com a fama misteriosa da região.

Hoje, as respostas da ciência para esses fenômenos inexplicáveis têm a ver com a matemática. Pesquisadores da Universidade do Colorado, Estados Unidos, descobriram um padrão anormal nas nuvens que se formam na região. O formato geométrico dessas nuvens é hexagonal e essa peculiaridade seria responsável por correntes de ar superpotentes que afetariam os meios de transporte que cruzassem aquela área².

Aqui se está interessado em outro tipo de geometria. Assim, vamos deixar de lado as causas e efeitos do triângulo das Bermudas e nos concentrar no seu formato. Como atividade vamos propor calcular a área do triângulo esférico formado pelos vértices: sul da Flórida, Fort Lauderdale ($\theta = 26, 13^\circ N$; $\phi = 80, 14^\circ W$); San Juan, capital de Porto Rico ($\theta = 18, 49^\circ N$; $\phi = 66, 08^\circ W$) e como último teríamos Hamilton, capital da Ilha das Bermudas ($\theta = 32, 29^\circ N$; $\phi = 64, 75^\circ W$). A figura 45, mostra essa região.

² <https://www.sciencechannel.com> - what can hexagonal clouds tell us about the bermuda triangle.

Figura 45 – Triângulo das Bermudas



Fonte: <https://www.cemiteriomaldito.com/terror/misterios-do-triangulo-das-bermudas/>

Vamos modelar a figura acima com as ferramentas que fomos construindo até aqui. Com o modelo proposto na figura 41 e o transferidor esférico (apêndice 1), vamos localizar, seguindo os passos da seção 2, os três vértices do triângulo esférico: Fort Lauderdale, San Juan e Hamilton, pontos A, B e C respectivamente.

Com os vértices determinados, ligaremos com elásticos os pontos dois a dois sobre círculos máximos, de modo a obtermos o triângulo esférico representado na figura 46.

Figura 46 – Modelo do Triângulo das Bermudas



Fonte: O autor, 2018.

Agora nosso problema ficou limitado a medir os ângulos do triângulo esférico. Para tanto, novamente utilizaremos o transferidor esférico. Tendo, entretanto uma preocupação adicional quando a precisão das medidas, uma vez que pequenos ângulos podem se transformar em grandes áreas. Após essa ressalva, chegamos aos seguintes valores:

$$\hat{\text{Ângulo do vértice Fort Lauderdale}} = \alpha \simeq 52^\circ \simeq 0,91rad$$

$$\hat{\text{Ângulo do vértice Hamilton}} = \beta \simeq 60^\circ \simeq 1,04rad$$

Ângulo do vértice San Juan = $\gamma \simeq 70^\circ \simeq 1,22rad$

No capítulo 2, deduzimos uma fórmula que nos permite calcular a área do triângulo esférico a partir dos seus ângulos internos e do raio da esfera (terra). Recorrendo a ela, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_{te}}{r^2}$$

$$0,91 + 1,04 + 1,22 = \pi + \frac{A_{te}}{r^2}$$

$$\frac{A_{te}}{r^2} = 3,17 - \pi$$

$$A_{te} \simeq 0,028r^2$$

$$A_{te} \simeq 0,028(6370)^2$$

$$A_{te} \simeq 1152682km^2$$

Uma região de um pouco mais de 1 milhão de km^2 que guarda mistérios e muita matemática.

4.4 Consequências inusitadas

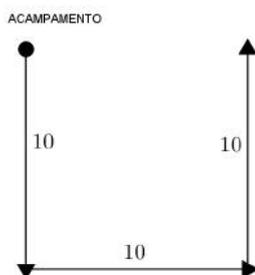
Algumas vezes os avanços tecnológicos são resultados de insights criativos, entretanto em sua grande maioria são frutos de trabalho árduo e exaustivo. De toda maneira uma nova teoria que surge permite a exploração de novos caminhos e a ampliação dos horizontes criativos.

Na geometria de Euclides duas pessoas que andam paralelamente jamais se encontram e a cada passo se distanciam mais do ponto de partida. É uma viagem solitária e sem volta! A partir do século XIX entretanto, esses caminhos mudaram. Suponhamos que 2 atletas muito resistentes fossem colocados à prova: o primeiro saindo de Manaus no Brasil e o segundo saindo de Uganda, África, ambos sobre a Linha do Equador. O objetivo seria chegar ao Polo Norte mantendo uma trajetória perpendicular com o Paralelo do Equador. Se nessa situação hipotética o ritmo de passadas e paradas fosse mantido pelos atletas, eles se encontrariam no Polo Norte. E se sobrasse fôlego e a odisséia continuasse, um novo encontro seria promovido no Polo Sul. Até que o esforço sobrehumano fosse coroado, para espanto de todos, com o retorno ao ponto de partida. Um empreendimento, certamente, capaz de dar inveja ao mensageiro de Maratona.

Outra situação peculiar, capaz de um desfecho surpreendente é o *Problema do Urso*. Nele um caçador partindo do seu acampamento, em um certo ponto da terra, anda 10 Km para o sul, em seguida 10 Km para o leste e finaliza andando 10 km para o Norte. Ao fim da jornada, percebe que retornou ao ponto de origem e se depara com um Urso. A pergunta que se faz é: Qual a cor do Urso?

A princípio, pensando a partir da geometria euclidiana, esse problema não tem solução, já que o caçador jamais voltaria ao ponto de partida e portanto não poderia encontrar o urso no acampamento de onde saiu. Observe a figura 47.

Figura 47 – Trajetória euclidiana do caçador

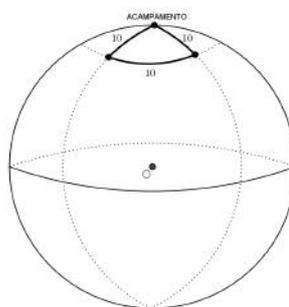


Fonte: O autor, 2018.

Imaginar a terra como uma superfície plana gera esse tipo de conclusão. Quando analisamos o problema sobre a ótica da geometria esférica, novas soluções passam a fazer sentido.

A mais aparente seria que andando 10 Km seguindo três direções perpendiculares e necessariamente voltando ao ponto de partida faria sentido se o acampamento do caçador fosse no Polo Norte. Assim, ele desceria por um meridiano, depois se deslocaria por um paralelo e por fim subiria por outro meridiano. Ao chegar no acampamento ele estaria na presença de um urso polar, portanto, **branco**. Um esquema pode ser observado na figura 48.

Figura 48 – Trajetória A não euclidiana do caçador

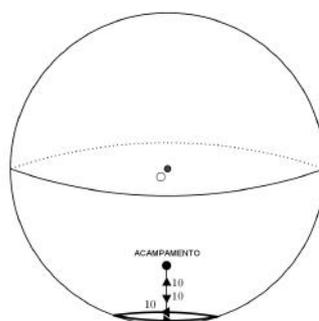


Fonte: O autor, 2018.

Não tão óbvio seria pensar que os paralelos são círculos concêntricos e que próximos ao Polo Sul, certamente existe um paralelo cujo comprimento seja de 10 Km. Assim qualquer ponto situado a 10 Km ao norte desse paralelo satisfaz a condição do problema, na qual o caçador desce 10 Km por um meridiano, anda 10 Km para leste

(percorrendo todo paralelo) e sobe 10 Km pelo mesmo meridiano que desceu. Observe a figura 49 abaixo.

Figura 49 – Trajetória B não euclidiana do caçador



Fonte: O autor, 2018.

E o urso? Bom, nessa situação não teríamos urso, já que estaríamos muito próximo do Polo Sul, onde não existem ursos. Como o caçador se defrontou com um urso no retorno, certamente o endereço do seu acampamento é o Polo Norte e o urso **branco!**

4.5 Uma aplicação do uso do GPS

Como foi visto na seção 9 do capítulo anterior, o conceito que justifica o funcionamento do GPS é relativamente simples de ser entendido. Entretanto sua aplicabilidade em sala de aula é complexa. Isso porque para que o GPS funcione corretamente, faz-se necessário a presença de três componentes integrados. Um espacial, que são os 24 satélites em órbita. Um receptor, que recebe o sinal dos satélites e usualmente é o aparelho que a maioria das pessoas tem acesso. Por fim, uma estação de controle, que atualiza a posição dos satélites através do tempo de resposta. Portanto, reproduzir um modelo em três dimensões do sistema de trilateração dos satélites não é uma tarefa fácil.

Entretanto, pode-se adaptar um modelo em duas dimensões para que se possa ter um bom entendimento de como funciona a trilateração.

Vamos propor uma situação-problema bem atual. Imagine uma pessoa que encontra-se em prisão condicional e controlada por tornozeleira eletrônica. Em uma de suas apresentações as autoridades essa pessoa resolve fugir. Um alerta é emitido e algumas delegacias especializadas captam os sinais emitidos pelo aparelho preso ao foragido. No Rio de Janeiro o sinal é captado a um raio de 950 Km de distância. Da delegacia de Corumbá/MS o sinal é emitido a uma distância de 1100 Km e Barreira/BA registra um sinal a 610 Km de distância. Uma central em São Paulo concentra as

investigações e a partir de um mapa com escala 1:35000000 procura localizar o foragido. De modo que temos:

Tabela 1 – Captação do sinal

<i>Delegacia</i>	<i>Distncia(Km)</i>	<i>Distncia(cm)</i>
<i>RiodeJaneiro</i>	950	2,7
<i>Corumba/MS</i>	1100	3,1
<i>Barreiras/BA</i>	610	1,7

Fonte: O autor, 2018.

Observe entretanto, que se considerarmos as informações de apenas 2 delegacias, teremos como interseção entre as circunferências 2 pontos, distantes entre si, dificultando a localização. Mas quando utilizamos os dados das três delegacias, o lugar geométrico de interseção entre as circunferências é um único ponto (Brasília) que determina a localização exata do foragido. A figura 50, ajuda a esclarecer o que foi dito.

Figura 50 – Trilateração bidimensional



Fonte: O autor, 2018.

Acabamos de desenvolver um sistema de trilateração em duas dimensões. Por analogia o funcionamento do GPS pode ser melhor compreendido, de forma que: as delegacias do Rio de Janeiro, Corumbá e Barreiras funcionam como os **satélites**; a tornozeleira eletrônica seria o aparelho **receptor GPS**, bem como a central de São Paulo a **estação controladora**. Além disso é perfeitamente razoável supor que em três dimensões as circunferências sejam substituída por esferas, assim resulta a necessidade de mais uma esfera para se determinar um ponto com precisão.

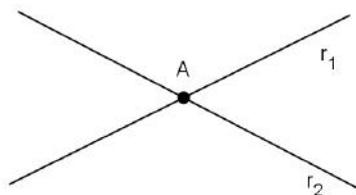
4.6 Geometria Euclidiana X Geometria Esférica

No capítulo 2 foi desenvolvido uma série de conceitos básicos que permitiram entender melhor as peculiaridades da geometria esférica. Entretanto a falta de domínio de tais conceitos aliada ao senso comum da geometria euclidiana ajudam a intensificar este estranhamento. Agora o que se propõe é comparar alguns dos conceitos amplamente difundidos pela geometria euclidiana com os correspondentes para a geometria esférica. Para auxiliar no entendimento, introduziremos modelos, afinal, o dito popular é sábio ao afirmar que: "uma imagem vale mais que mil palavras".

1. Duas retas distintas, quando se intersectam, o fazem em:

a) Geometria Euclidiana - Um ponto

Figura 51 – Retas concorrentes em 1 ponto



Fonte: O autor, 2018.

b) Geometria Esférica - Dois pontos antípodas

Figura 52 – Circulos concorrentes em 2 pontos antípodas

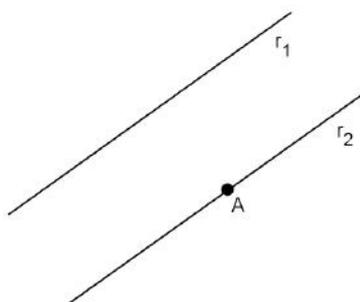


Fonte: O autor, 2018.

2. Por um ponto A exterior a uma reta r_1 :

a) Geometria Euclidiana - Passa uma única reta r_2 paralela a reta r_1 .

Figura 53 – Reta r_2 passando por A e paralela a r_1



Fonte: O autor, 2018.

b) **Geometria Esférica** - Não passa nenhuma reta paralela a r_1 .

Figura 54 – Círculos máximos concorrentes

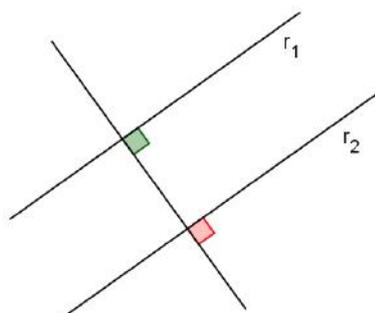


Fonte: O autor, 2018.

3. Duas retas distintas e perpendiculares a uma terceira:

a) **Geometria Euclidiana** - São paralelas entre si.

Figura 55 – Retas r_1 e r_2 paralelas e perpendiculares a r_3



Fonte: O autor, 2018.

b) **Geometria Esférica** - São concorrentes entre si.

Figura 56 – Círculos máximos perpendiculares a um terceiro e concorrentes entre si

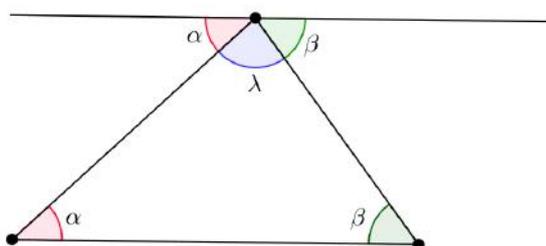


Fonte: O autor, 2018.

4. **A soma dos ângulos internos de um triângulo é:**

a) **Geometria Euclidiana** - Igual a 180° .

Figura 57 – Soma dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: O autor, 2018.

b) **Geometria Esférica** - Sempre maior que 180° .

Figura 58 – Soma dos ângulos internos do triângulo esférico

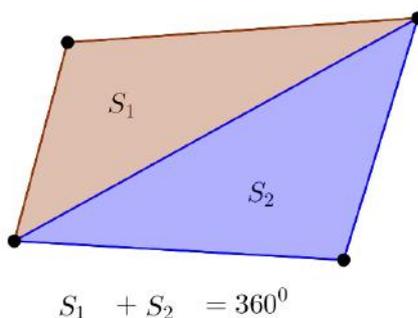


Fonte: O autor, 2018.

5. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é:

- a) **Geometria Euclidiana** - Igual a 360° .

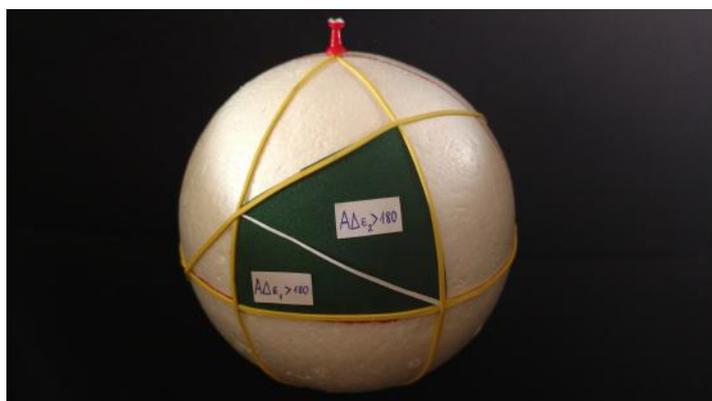
Figura 59 – Soma dos ângulos internos de um quadrilátero



Fonte: O autor, 2018.

- b) **Geometria Esférica** - Sempre maior que 360° .

Figura 60 – Soma dos ângulos internos de um quadrilátero esférico



Fonte: O autor, 2018.

4.7 Vou de Táxi

Desenvolvemos ao longo desse trabalho um estudo de uma forma específica de geometria não euclidiana: A geometria esférica. Entretanto entendemos que muitas vezes seus conceitos podem causar certo estranhamento para aqueles que sempre pensaram o espaço com uma concepção euclidiana. Julgamos que uma maneira de amenizar esses conflitos é apresentando a "Geometria do Táxi"³. Estaremos assim, introduzindo novas perspectivas oriundas de uma geometria associada com a ideia

³ Geometria desenvolvida pelo matemático Hermann Minkowski (1864 - 1909) sendo que o termo Taxicab Geometry foi cunhado por Eugene F. Krause (1975).

cotidiana de trafegar por ruas. O objetivo básico aqui é romper paradigmas e introduzir a concepção que a distância entre dois pontos nem sempre é o que pensamos.

Na geometria esférica os termos reta e plano não são os mesmos que na geometria euclidiana. Porém, tal não acontece com a geometria do táxi. Aqui, o que difere é a distância utilizada. Estamos condicionados a considerar a distância entre dois pontos do plano euclidiano como sendo a medida do comprimento do segmento de reta que os une e obtido através da métrica euclidiana usual, em que tal segmento é considerado a hipotenusa de um triângulo retângulo conveniente. Entretanto, quando consideramos uma geografia urbana, passa a fazer mais sentido pensar a distância entre dois pontos como o que na realidade os separa, ou seja, a soma dos valores percorridos pelos caminhos de menor comprimento, tanto na vertical como horizontal. E como fazer isso?

Vamos considerar o mapa da cidade de Manhattan⁴ da figura 61.

Figura 61 – Mapa de Manhattan e a Geometria do Táxi



Fonte: O autor, 2018.

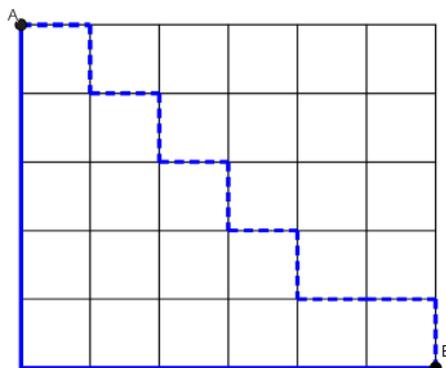
Partindo da concepção euclidiana a distância entre os pontos A e B representados, seria o segmento de reta na cor azul da figura acima. Enquanto que na realidade, para ir de A e B é necessário percorrer a linha representada de vermelho, ou alguma equivalente, assim a distância entre esses dois pontos sob a perspectiva da Geometria do Táxi uma possível distância entre A e B, seria a soma das distâncias representadas pela linha vermelha.

Em uma situação ideal, onde as quadras são idênticas, a distância percorrida pelo táxi entre A e B seria sempre a mesma, independente do percurso. Na figura 62,

⁴ A geometria do táxi também é chamada de geometria de Manhattan

temos $462 = C_{11}^5$ maneiras diferentes respeitando a condição de menor percurso entre os pontos A e B, todos com a mesma distância para o Táxi.

Figura 62 – Distâncias na Geometria do Táxi



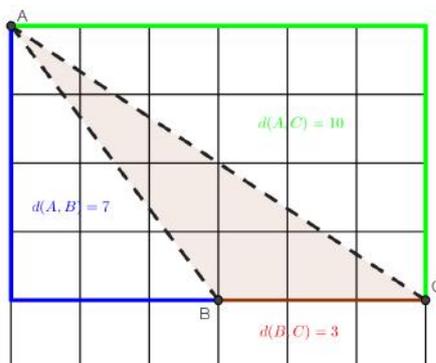
Fonte: O autor, 2018.

Se considerarmos para unidade de comprimento o lado de cada quadra, temos pela geometria do Táxi uma distância total de 11 unidades de comprimento entre A e B, independente do percurso. Se num referencial cartesiano $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ a distância do táxi será $d_t(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$.

Apesar da Geometria do Táxi diferir da Geometria Euclidiana apenas pela distância utilizada, uma série de consequências importantes são registradas.

A primeira que estudaremos diz respeito ao teorema da desigualdade triangular. A geometria de Euclides (2009) afirma na proposição 20, que a soma de dois lados de um triângulo é estritamente maior do que o terceiro lado. Contudo essa proposição não se verifica na Geometria do Táxi, conforme se pode verificar no exemplo proposto na figura 63, onde $d_t(A, C) = d_t(A, B) + d_t(B, C)$.

Figura 63 – $d_t(A, C) = d_t(A, B) + d_t(B, C)$ na Geometria do Táxi



Fonte: O autor, 2018.

Agora que sabemos calcular distâncias na geometria do Táxi, vamos construir uma "circunferência do Táxi".

A definição de circunferência é o ponto de partida: **Circunferência** - *É o lugar geométrico dos pontos do plano, equidistantes de um ponto fixo (centro)*. Vamos escolher um ponto para ser o nosso centro O. Arbitramos um raio $r = 2$, por exemplo. A uma distância de 2 unidades, a partir do centro O, respectivamente para leste, norte, oeste e sul, obtemos os pontos auxiliares A, B, C e D. Para visualizar melhor nossa circunferência, vamos marcar mais quatro pontos. Repetimos o processo, andando 1N+1E, 1N+1W, 1S+1W e 1S+1E a partir de O e marcamos respectivamente os pontos A_1, B_1, C_1 e D_1 . Repare que se tomarmos O para centro do referencial, um qualquer ponto P da circunferência situada entre A(2, 0) e B(0, 2), é tal que $P(x, 2 - x)$. Vejamos que A, B e P são colineares: $\frac{(0 - (2 - x))}{(2 - x)} = \frac{(2 - (2 - x))}{(0 - x)}$ ou seja $-1 = -1$. Se pensarmos de modo análogo nas restantes situações nossa "circunferência táxi" assumirá a forma da figura 64.

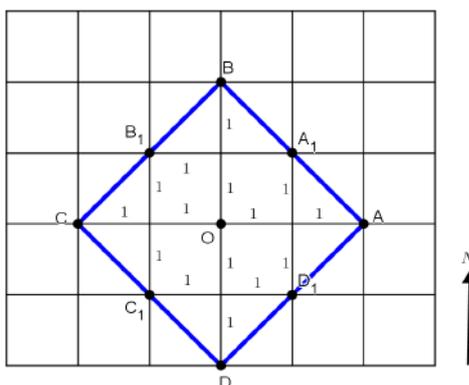


Figura 64 – Circunferência na Geometria do Táxi

Fonte: O autor, 2018.

Surpreendentemente a "circunferência táxi" tem a forma de um quadrado. Entretanto as surpresas não param por aí. Como bem sabemos é constante a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro e essa constante é chamada de π . Através de um cálculo simples, chegamos a conclusão que o " π " táxi vale 4.

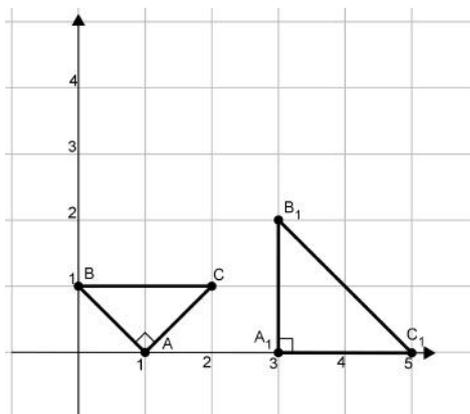
Resta agora, entendermos o porquê da Geometria do Táxi ser uma forma de geometria não euclidiana. Vejamos qual axioma ⁵ essa geometria viola. Na geometria euclidiana o caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado) ⁶ é um axioma que diz que: Dados dois triângulos, a igualdade, de um para o outro, de dois dos seus lados e da amplitude do ângulo entre estes implica que os triângulos são congruentes. A partir da figura 60 temos sob o ponto de vista da geometria do táxi que $\overline{AB} \equiv \overline{A_1B_1}$, da mesma

⁵ Os axiomas de Hilbert são um conjunto de 20 (originalmente 21) premissas que fundamentam o tratamento moderno da geometria euclidiana. Assim a violação de qualquer axioma significa que estamos em um ambiente de geometria não euclidiana.

⁶ Axioma 17 de Hilbert.

forma que $\overline{AC} \equiv \overline{A_1C_1}$ e $\hat{A} \equiv \hat{A}_1$. Entretanto através de uma observação direta da figura temos que o $\triangle ABC$ e o $\triangle A_1B_1C_1$ não são congruentes, contrariando o caso LAL e portanto o axioma 17 de Hilbert.

Figura 65 – Contra exemplo do caso LAL na Geometria do Táxi



Fonte: O autor, 2018.

Como acabamos de ver, andar de táxi pode ser uma experiência matemática cheia de surpresas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho se propôs a apresentar os conceitos fundamentais da Geometria Esférica. Através de uma abordagem interdisciplinar, primeiro foi traçado um panorama histórico sobre a construção do conhecimento. O ponto de partida foi a utilização de cordas no antigo Egito para aferir dimensões e cobrar os impostos cabíveis. Ao longo de mais de 3000 anos, personagens como Aristóteles, Eratóstenes, Euclides, Pedro Nunes e Hilbert consolidaram os conceitos fundamentais da geometria euclidiana e abriram caminhos para novas abordagens, entre elas a Geometria Esférica. Em um segundo momento, abordamos os conceitos matemáticos relacionados à Geometria Esférica utilizando como analogia o globo terrestre. A associação com a realidade geográfica permitiu a construção de significados mais reais frente a abstração dos conceitos matemáticos. Finalmente, através de modelos e situações contextualizadas procuramos tornar o aprendizado mais significativo.

Aliás, a consolidação de significados deveria ser o “norte” de todo trabalho acadêmico. Ainda mais, quando tratamos de um mestrado profissional. Quanto a isso, cabem reflexões que, embora fujam ao tema central, se inserem em um contexto maior sobre a educação matemática no país. Em janeiro de 2018, o Brasil passou a fazer parte do honroso rol da elite da matemática mundial, o chamado grupo 5. Por outro lado, no último teste Pisa nossos jovens amargaram a 66 colocação nas provas de matemática em um grupo de 70 países. Fazendo uma analogia, seria a de um país extremamente desenvolvido com uma população extremamente carente. Alguma coisa está errada!

Buscar soluções deve ser uma preocupação constante de programas como o PROFMAT. Dentre as quais, procurar alternativas para despertar o interesse na matemática. Quando se realiza uma atividade no cotidiano, dificilmente associa-se com uma aplicação matemática. É como se existissem dois mundos paralelos: a sala de aula das fórmulas e algoritmos e o mundo exterior onde só a aritmética elementar tem vez. A solução passa por romper essa barreira, trazendo o cotidiano para a sala de aula. Talvez o maior desafio seja romper com o clichê no qual “a matemática está em tudo” e começar a entender de que forma a matemática está presente em nossas vidas.

Qual a diferença entre um pedestre parado em um semáforo mexendo em seu celular e um ponto, produto da interseção de quatro superfícies esféricas? Ou ao entrar em um táxi, imagine um usuário se sentindo lesado ao observar a profusão de manobras empreendidas pelo taxista para chegar ao destino; Afinal a menor distância entre dois pontos não é dada pelo segmento de reta que os une? Devaneios a parte, o que sobra é o fascinante mundo da matemática.

REFERÊNCIAS

- [1] ADAMES, Márcio Rostirolla. **Geometria Esférica**. 2005. 68f. Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- [2] AGOSTINHO, Santo, Bispo de Hipona, 354-430. De ordine. Madrid: BAC, 1957.
- [3] ALVES, Sérgio. **A geometria do globo terrestre**. Anais. Salvador: UFBA-IM, 2004
- [4] ALVES, Sérgio. **A matemática do GPS**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, v. 59, p. 17-19, 2006.
- [5] ALVES, Sérgio; SANTOS FILHO, Luiz Carlos dos. **Encontro com o mundo não Euclidiano**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 78, p. 43-51, 2012.
- [6] ANDRADE, Maria Lúcia T. Dória de. **Geometria Esférica: Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no ensino básico**. 2008. 116f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PROFMAT, São Paulo, 2011.
- [7] ARANA, José Milton. **Trigonometria Esférica: Notas de Aula**. Presidente Prudente: Faculdade de Ciência e Tecnologia – Departamento de Cartografia, 2006.
- [8] ÁVILA, G.. **A geometria e as distâncias astronômicas na Grécia antiga**. Revista do Professor de matemática - SBM, Rio de Janeiro, n.01, p.39-46,1982.
- [9] ÁVILA, G.. **Arquimedes, a esfera e o cilindro**. Revista do Professor de matemática - SBM, Rio de Janeiro, n.10, p.01-08, 1984.
- [10] BICUDO, I. **Os Elementos/Euclides**. São Paulo: Editora Unesp, 2009.
- [11] BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Ed Blucher, 1974.
- [12] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [13] BRITO, A. de Jesus. **Matemática na idade média: entre o místico e o científico**. Revista Brasileira de História da Matemática - SBHMat, São Paulo, RBHM, Especial n.01, p. 127-141, 2007.
- [14] BROTTON, Jerry. **A história do mundo contada em doze mapas**. 1 edição. Rio de Janeiro: Ed Zahar, 2014.

- [15] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Há 500 anos, que matemática?**. Revista Impulso, Piracicaba, v.12, n.27, p.67-84, 2011.
- [16] DAMPIER, Willian C. **Pequena história da ciência**. São Paulo: IBRASA, 1961.
- [17] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 2008.
- [18] FERNANDES, Telma Cristina Dias; LONGHINI, Marcos Daniel ; MARQUES, Deividi Márcio. **A construção de um antigo instrumento para navegação marítima e seu emprego em aulas de astronomia e matemática**. Revista de História da Ciência e Tecnologia - construindo interfaces, Uberlândia, v.4, p.62-79, 2011.
- [19] GASPAR, M. T. ; MAURO, S. **Explorando a geometria através da história da matemática e etnomatemática**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. 8., 2004, Recife. Universidade Federal de Pernambuco, 2004.
- [20] GURGEL, Abílio Castro. **Mercator e sua contribuição à cartografia e ao estudo dos mapas**. 2012. 114f. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Mestrado em História da Ciência, São Paulo, 2012.
- [21] HERÓDOTO. **História: Estudo crítico por Vítor de Azevedo**. 2 edição reformada. São Paulo: Ediouro, 2001.
- [22] KATZ, Victor J. **História da matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.
- [23] LEIVAS, José C. Pinto. **Geometria do táxi: resolvendo problemas de rotina**. Alexandria revista de educação em ciência e tecnologia, Florianópolis, v.27, n.02, 2016.
- [24] LOPES, Maria H. O. **A retrogradação dos planetas e suas explicações: Os orbis dos planetas e seus movimentos, da antiguidade a Copérnico**. 2001. 245f. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Mestrado em História da Ciência, São Paulo, 2001.
- [25] LUMINATI, Emerson Roberto. **A matemática dos sistemas de localização por satélites**. 2015. 98f. Dissertação (Mestrado) - UNESP, PROFMAT, São José do Rio Preto, 2015.
- [26] MARTINS, Roberto de Andrade. **O Universo: teoria sobre sua origem e evolução**. 5 Edição. São Paulo: Ed Moderna, 1997.

- [27] NOGUEIRA, Magali G. e BIASI, Mario de. **Fontes e técnicas da cartografia medieval portulano**. Terra Brasilis – revista da rede brasileira de história da geografia e geografia histórica, online, n.04, 2015.
- [28] NUNES, Paulo Jorge Antunes. **Os instrumentos náuticos na obra de Pedro Nunes**. 2012. 166f. Dissertação (mestrado) - Universidade de Lisboa, Mestrado em História Marítima, Lisboa, 2012.
- [29] PEREIRA, Paulo Roberto. **Os três únicos testemunhos do descobrimento do Brasil**. Rio de Janeiro: Lacerda Editores, 1999.
- [30] PLATÃO. **Fédon**. São Paulo: Ed Nova Fronteira, 2000.
- [31] QUEIRÓ, João Filipe. **Pedro Nunes e as linhas de rumo**. Gazeta de Matemática, Universidade de Coimbra, Coimbra, n.143, p.42-47, 2002.
- [32] REIS, Joana D'arc da Silva. **Geometria Esférica por meio de materiais manipuláveis**. 2006. 158f. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2006.
- [33] ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2012.
- [34] SACROBOSCO, Johannes de. **Tratado da Esfera**. São Paulo: UNESP, 1991.
- [35] SILVA, Antônio E. P. Filho da. **A trigonometria esférica e o globo terrestre**. 1 edição. Rio de Janeiro: Ed Zahar, 2014.
- [36] THOMAZ, Maria Lúcia ; FRANCO,Valdeni Soliani . **Geometria não-euclidiana: geometria esférica**. In: Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná, 2007/2008, Curitiba, UFC, 2014.
- [37] ZANETTI, Maria Aparecida Zehnpfennig. **Geodésia**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2007.

APÊNDICE A – TRANSFERIDOR ESFÉRICO

Para medir ângulos no plano temos o usual transferidor. Entretanto quando trabalhamos com a esfera, utilizar um instrumento plano não faz sentido. Assim, temos que construir um instrumento no formato de uma meia calota esférica que nos garanta mensurar todos os possíveis ângulos na esfera.

Para levar a cabo a tarefa de construção do transferidor esférico temos que reunir o material proposto na figura 66.

Figura 66 – Material para construção do transferidor esférico



Fonte: O autor, 2018.

Seguiremos então o seguinte passo a passo:

- 1) Cortar uma tira de acetato com largura de 1,5 cm que envolva completamente o círculo máximo da esfera.
- 2) Graduar esta tira ($0^\circ - 360^\circ$) de forma que mantenha uma proporcionalidade com o seu comprimento.
- 3) Cortar mais 2 tiras de acetato, também com 1,5 cm de largura, de forma que tenha comprimento final igual a semi circunferência máxima.
- 4) Graduar essas tiras, sendo que a primeira metade seja de ($0^\circ - 90^\circ$) e a segunda metade de ($90^\circ - 0^\circ$) com a mesma proporcionalidade do item 2.
- 5) Colar os extremos da tira do item 1 de forma a obter um círculo máximo que envolva a esfera de isopor modelo.
- 6) Colar os extremos das tiras do item 3 na circunferência máxima formada no item 5 em intervalos de 90° .

Por fim temos como resultado final o transferidor esférico representado na figura 67.

Figura 67 – Transferidor esférico



Fonte: O autor, 2018.