COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Vinícius Trevezani Pereira Leal

COLORAÇÃO DE GRAFOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Rio de Janeiro
2018

Vinícius Trevezani Pereira Leal

COLORAÇÃO DE GRAFOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Christine Sertã Costa.

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

L436 Leal, Vinícius Trevezani Pereira

Coloração de grafos na educação básica / Vinícius Trevezani Pereira Leal. – Rio de Janeiro, 2018.
112 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Christine Sertã Costa.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Grafo. 3. Coloração. 4. Teorema das quatro cores. 5. Ensino fundamental. I. Christine Sertã Costa. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Andre Dantas – CRB7 5026

Vinícius Trevezani Pereira Leal

COLORAÇÃO DE GRAFOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Profa. Dra. Christine Sertã Costa (Orientadora)
Colégio Pedro II

____
Prof.Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II

____
Prof. Dr. Sinésio Pesco
PUC-Rio

Rio de Janeiro
2018

Este trabalho é dedicado a minha mãe, Sandra, que sempre me apoiou em todas as decisões e ao meu pai, Ronaldo, que esteve ao meu lado se preocupando em dando suporte ao longo da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Aos professores do PROFMAT da unidade Colégio Pedro II que contribuíram para minha formação, em especial ao professor Daniel que sempre se preocupou com todos nós do curso.

Agradeço a minha professora orientadora Christine, por todo seu apoio e paciência, sem sua dedicação este trabalho não teria sido concluído.

Aos meus amigos e colegas que convivi ao longo do curso, que sempre incentivaram e ajudaram uns aos outros para que todos caminhassem juntos.

"A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura."

(Bertrand Russell)

RESUMO

LEAL, Vinícius Trevezani Pereira. **Coloração de grafos no ensino fundamental.** 2018. 103 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

Este trabalho propõe a introdução de conteúdos da teoria de grafos na educação básica com o objetivo de promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, priorizar a construção de estratégias de solução, analisar e discutir soluções diversas e apresentar algoritmos como uma técnica organizada de criação de soluções. Para isso, escolheu-se trabalhar com a questão da coloração de vértices num grafo - assunto com características lúdicas e conteúdo que pode ser trabalhado nesse segmento da educação. Na parte teórica do trabalho, os conceitos básicos e teoremas importantes do assunto são apresentados e demonstrados. Uma apresentação específica sobre coloração de mapas foi elaborada em PowerPoint e está disponível para que professores possam utilizar em suas salas de aula. Além disso, uma série de atividades sobre o tema foram elaboradas e aplicadas. Suas descrições e avaliações encontram-se descritas no presente trabalho e espera-se que sejam adaptadas e utilizadas por professores da educação básica. Pretende-se assim que esse estudo contribua para promoção de uma educação cada vez mais significativa, autônoma e criativa.

Palavras-chave: Grafo; Coloração; Teorema das quatro cores; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

LEAL, Vinícius Trevezani Pereira. **Graphs coloration in elementary school**. 2018. 103 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

This work proposes the insertion of contents from graphs theory in the basic education with the objective of promoting the development of logical reasoning, prioritize the construction of solutions strategies, analyze and discuss several solutions and present algorythms as an organized technique of solutions creation. For this, it was chosen to work with the question of coloring the apexes in a graph - subject with ludic caracteristics and content that can be elaborated in this education segment. In the theoric part of the job, the basic concepts and important theorems about the subject are presented and demonstrated. A specific presentation about maps coloring was created on PowerPoint and is available so that teachers could use at their classrooms. Besides that, a series of activities about the theme were created and applied. Its descriptions and assessments are described on this work and are expected to be adapted and used by teachers from basic education. It intends that this study contributes to the promotion of a increasingly significant, autonomous and creative education.

Keywords: Graph; Coloration; Four Color Theorem; Elementary School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Pontes de Königsberg na época de Euler 15

Figura 2 -Grafo que modela a situação da figura 1 16

Figura 3 - Grafo associado à sua tabela de adjacência 17

Figura 4 - Exemplo Grafo com arestas paralelas 19

Figura 5 - Solução do exemplo, Grafo com laços 19

Figura 6 - Grafo associado a matriz de adjacência A do exemplo 2.4 20

Figura 7 - Grafo 2-regular 21

Figura 8- Grafos 3-Regular 21

Figura 9- Grafo 4-Regular 22

Figura 10 - Exemplos de grafos completos com 4 e 5 vértices respectivamente 22

Figura 11 - Exemplos de subgrafos de G 23

Figura 12 - Grafo G 24

Figura 13 - Grafo G' (um clique em G) e grafo G'' (um clique maximal em G) 24

Figura 14 - Grafos G' e G'', dois caminhos em G 25

Figura 15 - Grafo Conexo e grafo desconexo respectivamente 26

Figura 16 - Exemplo de Grafo com ciclos 26

Figura 17 - Exemplos de grafos ciclo 27

Figura 18 - Exemplos de grafos árvores 27

Figura 19 - G' uma árvore geradora de G 28

Figura 20 - Exemplo de conjuntos independentes num grafo G 29

Figura 21 - Grafos bipartidos 29

Figura 22 - Exemplos de grafos bipartidos completos 30

Figura 23 - Conjunto independentes 32

Figura 24 - Grafos isomorfos 33

Figura 25 - Grafo planar e não planar respectivamente 33

Figura 26 - Grafo $K4$ planar e sua forma topológica respectivamente 34

Figura 27 - Curva interceptando C ao ligar um ponto do interior a um ponto exterior 35

Figura 28 - Faces de um grafo 35

Figura 29 - Exemplo de grau da face de um 37

Figura 30 - Grafos ciclos $C6$ e $C5$, nomeados H e P respectivamente 40

Figura 31 - Uma coloração de vértices para $C6$ 40

Figura 32 - Uma coloração de vértices para grafos ciclos pares 41

Figura 33 - Uma coloração de vértices para $C5$ 42
Figura 34 - Uma solução para grafos ciclos ímpares 43
Figura 35 - Grafo para realização do processo de coloração sequencial 45
Figura 36 - Uma solução para o exemplo 3.1 46
Figura 37 - Grafo com vértices reordenados para realização do segundo processo de coloração sequencial 46
Figura 38 - Uma segunda solução para o exemplo 3.1 47
Figura 39 - Grafos para exemplo de aplicação do algoritmo guloso para construção de um conjunto independente máximo 49
Figura 40 - Grafo G e sua cadeia de Kempe $G12$ 52
Figura 41 - Recoloração dos vértices da componente conexa Gpq que contém o vp 54
Figura 42 - Recoloração dos vértices da componente Gpqque não é um caminho 55
Figura 43 - Cadeias de Kemper Gpqe Gpr 56
Figura 44 - Mapa do Brasil 58
Figura 45 - Grafo associado aos estados do Brasil 58
Figura 46 - Grafo associado aos estados do Brasil com o grau de cada vértice 59
Figura 47 - Uma possível solução para o problema de coloração dos estados do Brasil 61
Figura 48 - Grafo explicando a situação descrita na demonstração 64
Figura 49 - Componentes do jogo Chroma 4 66
Figura 50 - Foto da disposição da mesa para realização da atividade 1 67
Figura 51 - Região do problema de "Rotação de Cultura" 73
Figura 52 - "Treino" para o desafio da atividade 1 75
Figura 53 - Contorno 30x35cm, erro mais comum da segunda etapa da atividade 1 77
Figura 54 - Grupo com os alunos integrados 78
Figura 55 - Questionário atividade 1, pergunta 4, respondido por um aluno 79
Figura 56 - Atividade 2 - Parte 1 80
Figura 57 - Um exemplo de coloração obtida na Atividade 2 – Parte 1 81
Figura 58 - Atividade 2 - Parte 2 82
Figura 59 - PowerPoint Utilizado na Associação do Mapa com Grafo 83
Figura 60 - PowerPoint Utilizado Para Auxiliar a Coloração de Vértices do Grafo 83
Figura 61- PowerPoint Utilizado Para Exemplificar uma Coloração Ótima 84
Figura 62 - Atividade 2 – parte 2, alunos construindo os grafos associados as suas respectivas regiões e realizando uma coloração 85
Figura 63 - Atividade 3 86
Figura 64 - Resposta de um aluno para a terceira região da Atividade 3 – folha B 86

Figura 65 - Introdução a Atividade 4 87
Figura 66 - Slides Para Resolver o Problema de Coloração dos Estados do Brasil 88
Figura 67 - Atividade 4 89

LISTA DE SÍMBOLOS

$V(G)$ Conjunto de vértices de G

$E(G)$ Conjunto de arestas de G

(v, w) Aresta que conecta os vértices v ao w

$G = (V, E)$ Grafo composto pelos conjuntos V de vértices e E de arestas

$d(v)$ Grau do vértice v

$\Delta(G)$ Grau máximo de G

$\delta(G)$ Grau mínimo de G

N_n Grafo nulo com n vértices

$|V|$ Ordem de V

K_n Grafo completo com n vértices

n Número de vértices

$K_{p,q}$ Grafo bipartido completo com conjuntos independentes de cardinalidades p e q

$\alpha(G)$ Número de independência

f Número de faces de um grafo

m Número de arestas

$\chi(G)$ Número cromático de G

C_n Grafo ciclo com n vértices

G_{ij} Cadeia de Kempe de um grafo G formado exatamente pelos vértices de cores i ou de cor j

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 CONCEITOS BÁSICOS 17

3 COLORAÇÃO 38

3.1 Coloração de Vértices 38

3.1.1 Limitações para $\chi(G)$ 51

3.2 Coloração de Mapas 57

3.2.1 Teorema das 4 cores 61

3.2.2 Teorema das 5 cores 63

4 ATIVIDADES 65

5 APLICAÇÃO 75

5.1 Atividade 1 – Chroma 4 75

5.2 Atividade 2 – Colorindo as Regiões do Brasil 79

5.3 Atividade 3 – Construindo e Colorindo Grafos 85

5.4 Atividade 4 – Problema Rotação de Cultura 87

REFERÊNCIAS 91

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO: ATIVIDADE 1 92

APÊNDICE B – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL (FOLHA A) 93

APÊNDICE C – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL (FOLHA B) 94

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO: ATIVIDADE 2 – PARTE 1 95

APÊNDICE E – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL 96

APÊNDICE F – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL 97

APÊNDICE G – QUESTIONÁRIO: ATIVIDADE 2 – PARTE 2 98

APÊNDICE H – ATIVIDADE 3: COLORINDO GRAFOS (FOLHA A) 99

APÊNDICE I – ATIVIDADE 3: COLORINDO GRAFOS (FOLHA B) 100

APÊNDICE J – QUESTIONÁRIO: ATIVIDADE 3 101

APÊNDICE K – ATIVIDADE 4: PROBLEMA DA ROTAÇÃO DE CULTURAS 102

APÊNDICE L – QUESTIONÁRIO: ATIVIDADE 4...103

APÊNDICE M – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 1...104

APÊNDICE N – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS - SLIDE 2...105

APÊNDICE O – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 3...106

APÊNDICE P – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 4...107

APÊNDICE Q – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 5...108

APÊNDICE R – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS - SLIDE 6...109

APÊNDICE S – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 7...110

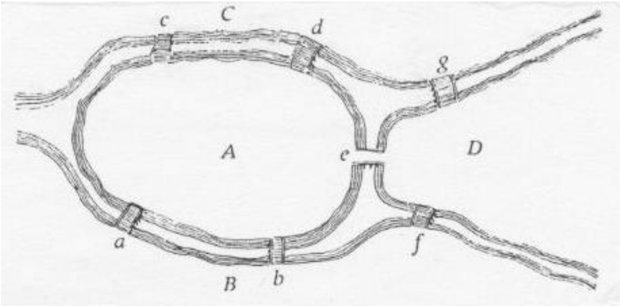
APÊNDICE T – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 8...111

APÊNDICE U – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 9...112

1 INTRODUÇÃO

A primeira referência à teoria dos grafos encontrada na literatura diz respeito ao famoso problema das pontes de Königsberg (figura 1). A cidade de Königsberg (hoje Kaliningrado) era dividida em quatro distritos, separados pelo rio Pregel e conectados por sete pontes. Relatos descrevem que os moradores caminhavam diariamente pela cidade, atravessando as pontes e intrigavam-se com a seguinte questão: seria possível fazer um passeio de modo que se atravessasse todas as sete pontes passando por cada uma delas exatamente uma vez? Essa questão ficou famosa na época e é conhecida até os dias atuais como o Problema das Sete Pontes.

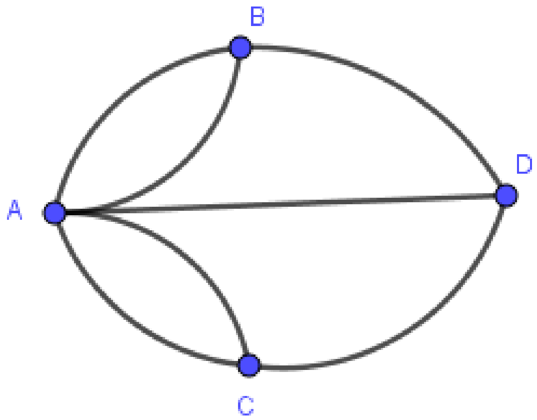
Figura 1 - Pontes de Königsberg na época de Euler



Fonte: Universidade de Coimbra, 2017.
(http://www.mat.uc.pt/~picado/ediscretas/2015/TextosApoio.pdf)

A solução deste problema foi publicada em um artigo em 1736 onde Euler demonstrava que o referido passeio sugerido era impossível. Na sua demonstração Euler apresentou uma representação gráfica para o problema (figura 2) onde associou a cada um dos quatro distritos, um ponto no plano e a cada uma das sete pontes, uma linha. Assim, distritos que eram conectados por pontes estavam representados por pontos que eram unidos por linhas. Possivelmente, essa foi a primeira representação gráfica de um grafo na história. Os pontos no plano são hoje conhecidos como vértices do grafo e as linhas que relacionam esses pontos, são chamadas de arestas.

Figura 2 -Grafo que modela a situação da figura 1



Fonte: O autor, 2017.

Anos depois, vários outros problemas passaram a ser modelados com o que hoje chamamos de Teoria dos Grafos e despertaram o interesse da comunidade matemática.

Atualmente, a Teoria dos Grafos serve de modelo para diferentes situações e problemas práticos e teóricos, como os que envolvem circuitos elétricos, representação de fórmulas químicas, logística, alocação de recursos, entre outros, atendendo a diversas áreas do conhecimento, além da matemática.

A seguir, iremos fazer uma introdução aos conceitos básicos de grafos, apresentando seus elementos, representações, definições, lemas e teoremas mais relevantes para a compreensão do assunto, que em especial tratamos no presente trabalho, o problema de coloração em grafos.

No capítulo três será abordado o problema de coloração de vértices, trabalhando algoritmos que nos auxiliam na resolução de problemas, além de definições e teoremas que nos fornece um domínio maior sobre o assunto e recursos para investigar uma possível solução como limitantes para o número cromático, permitindo abordar sobre o teorema das 4 cores, seu contexto histórico e a contribuição nos desenvolvimentos teóricos para a teoria dos grafos, além de apresentar uma demonstração do teorema das 5 cores ao leitor.

A proposta do trabalho é apresentar conceitos básicos de grafos a alunos, especialmente da educação básica, a partir do problema de coloração, que pode ser inicialmente compreendido, através da ideia de coloração de mapas. Assim, no capítulo quatro, temos uma série de propostas de atividades para aplicação e no capítulo cinco a descrição dos resultados destas atividades com alunos na educação básica da rede pública de ensino do Rio de Janeiro.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Este capítulo está fundamentado no marco teórico de Boaventura Netto e Jurkiewicz (2009).

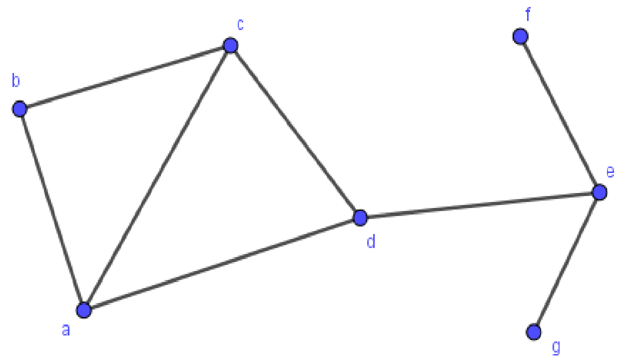
Atualmente, a Teoria dos Grafos serve de modelo para diferentes situações e problemas práticos e teóricos, como os que envolvem circuitos elétricos, representação de fórmulas químicas, logística, alocação de recursos, entre outros, atendendo a diversas áreas do conhecimento, além da matemática.

Definição 2.1: Um **grafo**, segundo Boaventura Netto e Jurkiewicz (2009), é uma estrutura matemática formada por dois conjuntos. O conjunto **V**, não vazio, chamado de **conjunto de vértices** e usualmente notado por $\boldsymbol{V(G)}$ e o conjunto **E**, que estabelece relações entre os vértices, chamado de **conjunto de arestas,** denotado por $\boldsymbol{E(G)}$.

Se dois vértices v e w de V estão relacionados em G, dizemos que existe uma aresta, notada por (v, w) ou por vw, pertencente a E. Um grafo $G = (V, E)$ está então definido se são conhecidos seus conjuntos V e E. Dado um grafo $G = (V, E)$, se $(v, w) \in E$, dizemos que os vértices v e w estão conectados e os nomeamos de **vértices adjacentes** ou **vizinhos**.

Exemplo 2.1: Observe a relação de adjacência entre os vértices do grafo abaixo.

Figura 3 - Grafo associado à sua tabela de adjacência



Vértices	Vértices Adjacentes
a	b, c, d
b	a, c
c	a, b, d
d	a, c, e
e	d, f, g
f	e
g	e

Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.2: Grau de um vértice $\boldsymbol{v}$, é o número de arestas incidentes sobre ele. Este número é simbolizado por $d(v)$. No exemplo 2.1, tem-se: $d(a) = 3$, $d(b) = 2$, $d(c) = 3$,

$d(d) = 3$, $d(e) = 3$, $d(f) = 1$, $d(g) = 1$. Pode-se também definir **grau máximo** ($\Delta(G)$) e **grau mínimo** ($\delta(G)$) entre os vértices de um grafo. No exemplo, $\Delta(G) = 3$ (vértices, a, c, d, e) e $\delta(G) = 1$ (vértices f, g).

Definição 2.3: Um grafo G que não possuir arestas, ou seja, $E(G) = \emptyset$, é dito grafo nulo e todos seus vértices possuem grau zero e são ditos isolados. Denotamos um grafo nulo com n vértices por N_n.

Definição 2.4: A cardinalidade do conjunto $V(G)$ definirá a **ordem** do grafo G e é notada por $|V| = n$. Neste trabalho consideramos apenas grafos cuja cardinalidade do conjunto de vértices é finita. No exemplo 2.1, tem-se $|V| = 7$.

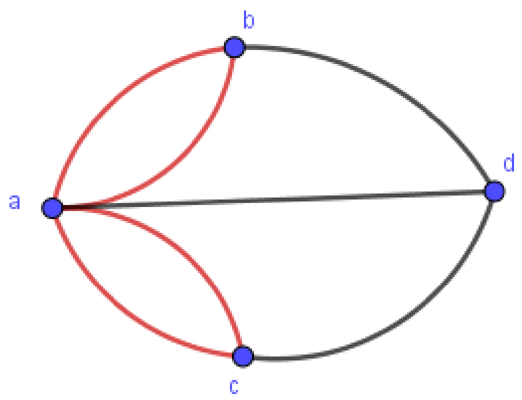
Definição 2.5: Se em um grafo $G = (V, E)$, existe pelo menos uma aresta $(v, w) \in E$ cuja relação não é biunívoca, ou seja $(v, w) \in E$ mas $(w, v) \notin E$, este grafo é dito **orientado**. Esta condição é suficiente, porém não necessária, pois note que a todo grafo **G não orientado** pode ser associado a um grafo **G' orientado** onde cada aresta de **G** corresponderá, biunivocamente, a um par de arestas de sentidos opostos em **G'**. Porém, observe que para grafos nessa situação não há nenhuma vantagem em se trabalhar com o grafo orientado no lugar do não orientado.

Em nosso trabalho iremos tratar apenas de grafos não orientados, ou seja, para toda aresta $(v, w) \in E$ a relação será biunívoca, assim $(v, w) = (w, v)$.

Definição 2.6: Um grafo pode apresentar arestas E_1, $E_2 \in E$ com $E_1 = (v, w)$, $E_2 = (v, w)$ e $E_1 \neq E_2$, ou seja, caso o grafo possua mais de uma aresta ligando o mesmo par de vértices, as arestas que apresentarem essa característica são nomeadas de *arestas paralelas*.

Exemplo 2.2: Um exemplo de grafo com arestas paralelas é o grafo das pontes de Königsberg (figura 4). Temos um par de paralelas em $E_1 = (a, b)$ e $E_2 = (a, b)$ e outro em $E_3 = (a, c)$ e $E_4 = (a, c)$.

Figura 4 - Exemplo Grafo com arestas paralelas

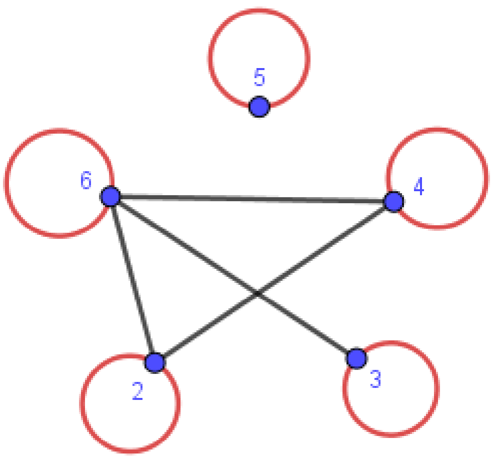


Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.7: Quando existe em G uma aresta $E = (v, v)$, diz-se que G tem um **laço**. Note que para o grau de um vértice, o laço é contabilizado tanto como aresta de partida, como de chegada e portanto, acrescenta duas unidades ao grau do vértice sobre o qual o laço incide.

Exemplo 2.3: Um exemplo, encontrado em Jurkiewicz (2009), de grafo $G(V, E)$ com laços pode ser assim explicitado (figura 5). Seja $V = \{2,3,4,5,6\}$ e considere que que existe uma aresta unindo um vértice v a um vértice w de V se e só se o $mdc(v, w) \neq 1$ (assim, vértices são adjacentes quando os números que os rotulam tiverem um divisor comum diferente de 1). Neste caso, os laços são as arestas $E_2 = (2,2)$, $E_3 = (3,3)$, $E_4 = (4,4)$, $E_5 = (5,5)$ e $E_6 = (6,6)$.

Figura 5 - Solução do exemplo, Grafo com laços



Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.8: Quando um grafo possuir arestas paralelas ou laços, é chamado de **multigrafo.** Caso contrário é um **grafo simples**.

No presente trabalho consideraremos apenas grafos simples.

Uma forma muito usual de definir um grafo é utilizando matrizes.

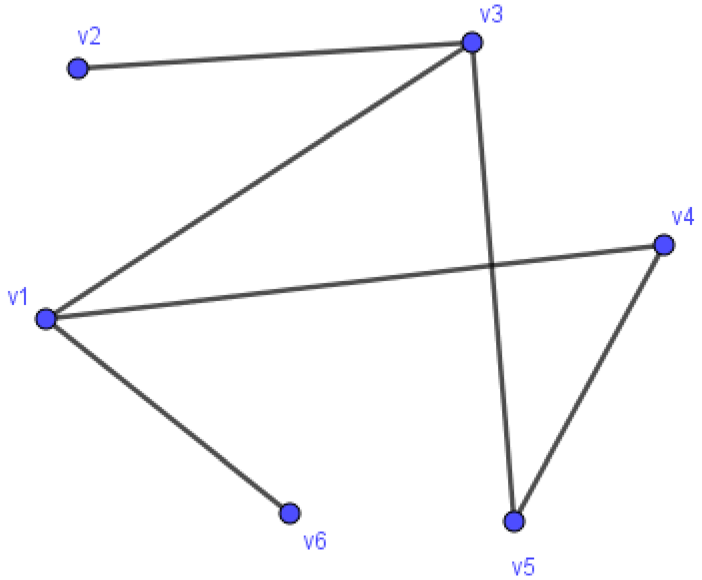
Definição 2.9: Seja $G\ (V, E)$ um grafo não orientado, simples e com as arestas não valoradas. A **matriz de adjacência** de G é uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n\ x\ n$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ (v_i\ , v_j) \in E \\ 0, se\ (v_i\ , v_j) \notin E \end{cases}$$

Exemplo 2.4: Construiremos o grafo G (figura 6) a partir da sua matriz de adjacência.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 6 - Grafo associado a matriz de adjacência A do exemplo 2.4

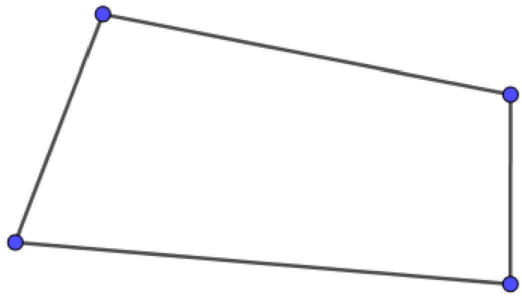


Fonte: O autor, 2017.

Observe que a matriz de adjacência para grafos não orientados, simples e com as arestas não valoradas é simétrica e somente com 0 na diagonal principal, a presença de 1 na diagonal principal indicaria um laço.

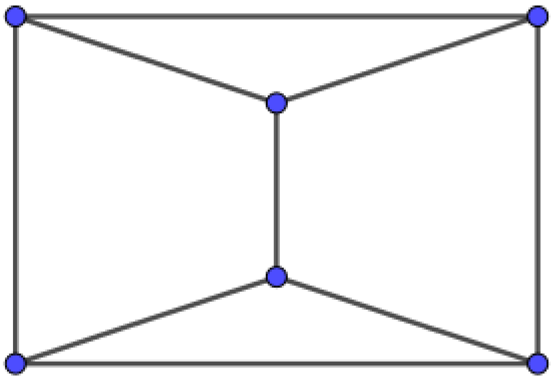
Definição 2.10: Grafo $k-$regular é um grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau k.

Figura 7 - Grafo 2-regular



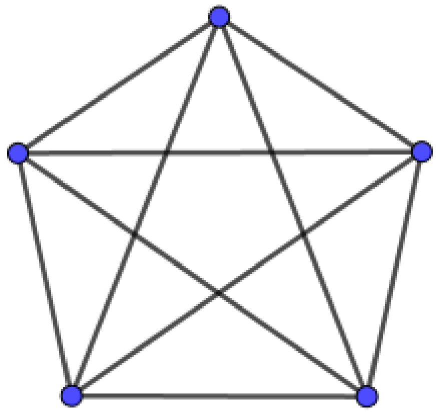
Fonte: O autor, 2017.

Figura 8- Grafos 3-Regular



Fonte: O autor, 2017.

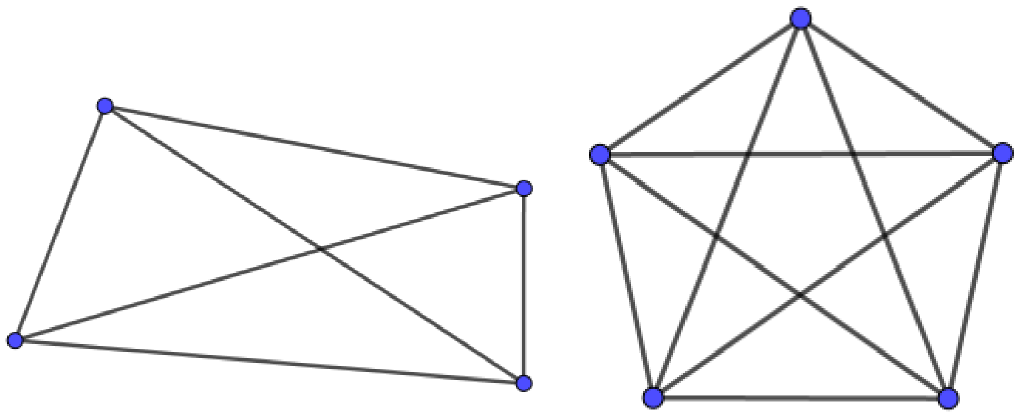
Figura 9- Grafo 4-Regular



Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.11: Um grafo G é dito completo se for um grafo simples e para quaisquer pares distintos de vértices u e v temos $(u, v) \in E(G)$. Um grafo completo com n vértices é representado por K_n.

Figura 10 - Exemplos de grafos completos com 4 e 5 vértices respectivamente



K_4 $\quad$ K_5

Fonte: O autor, 2017.

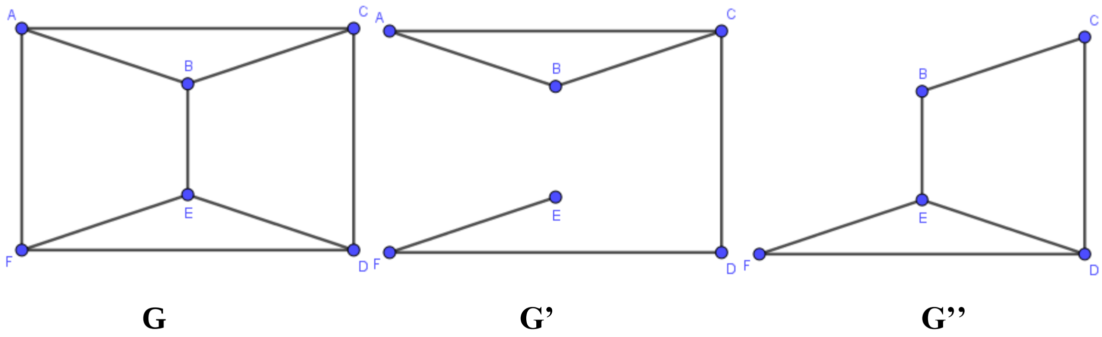
Note que todo grafo completo K_n é naturalmente regular com cada vértice tendo grau $(n-1)$. Perceba também que K_n tem $n(n-1)/2$ arestas.

Definição 2.12: Dado um grafo G, um subgrafo de G é um grafo G' tal que $V\ (G') \subseteq V\ (G)\ e\ E(G') \subseteq E(G)$.

Temos que um subgrafo G' está contido em G, em outras palavras, um subgrafo pode ser obtido removendo algumas arestas ou alguns vértices de um grafo. Cabe ressaltar que a operação de retirada de algum vértice implica na retirada de todos as arestas adjacentes a esse vértice. Já a retirada de uma aresta não acarreta retirada de nenhum outro elemento do grafo.

Exemplo 2.5: Os grafos G' e G'' são subgrafos de G (figura 11). G' foi obtido a partir de G apenas com a eliminação de arestas. G'' foi obtido a partir de G com a retirada do vértice A (consequentemente das arestas a ele adjacentes). Em ambos os casos os conjuntos de vértices e de arestas dos subgrafos G' e G'' estão respectivamente contidos nos conjuntos de vértices e arestas de G.

Figura 11 - Exemplos de subgrafos de G

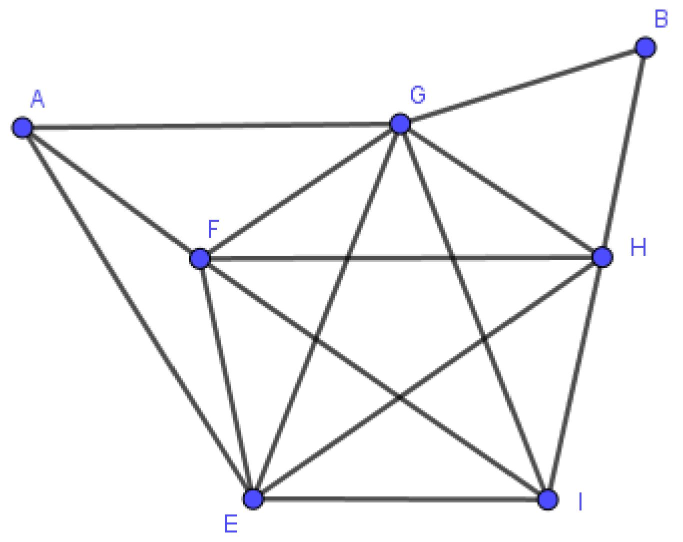


Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.13: Um **clique** em um grafo simples em $G(V, E)$ é um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto de vértices $V' \subseteq V$ e tal que, para cada dois vértices em V', existe uma aresta os conectando, ou seja, um clique em G é um subgrafo completo de G.

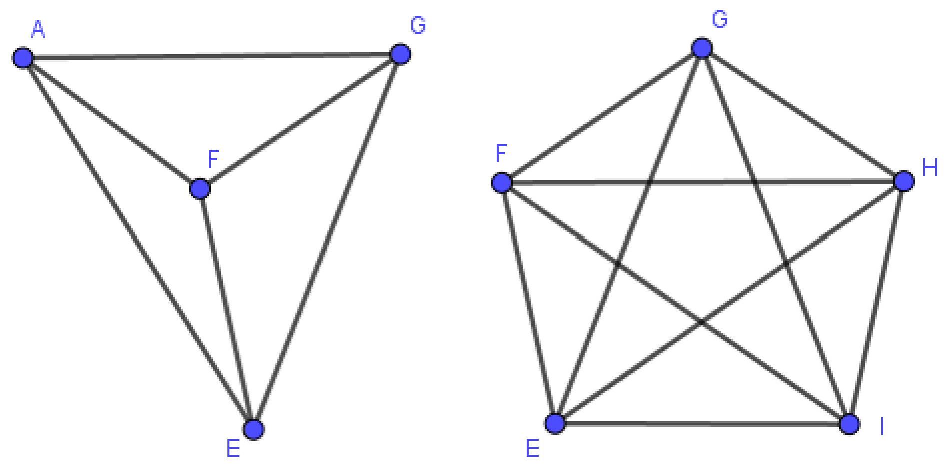
Exemplo 2.6: Dois exemplos de clique em G (figura 13). Um subgrafo clique de G com o maior número possível de vértices é chamado de **clique maximal de G.**

Figura 12 - Grafo G



Fonte: O autor, 2017.

Figura 13 - Grafo G’ (um clique em G) e grafo G’’ (um clique maximal em G)



Grafo G’ Grafo G’’

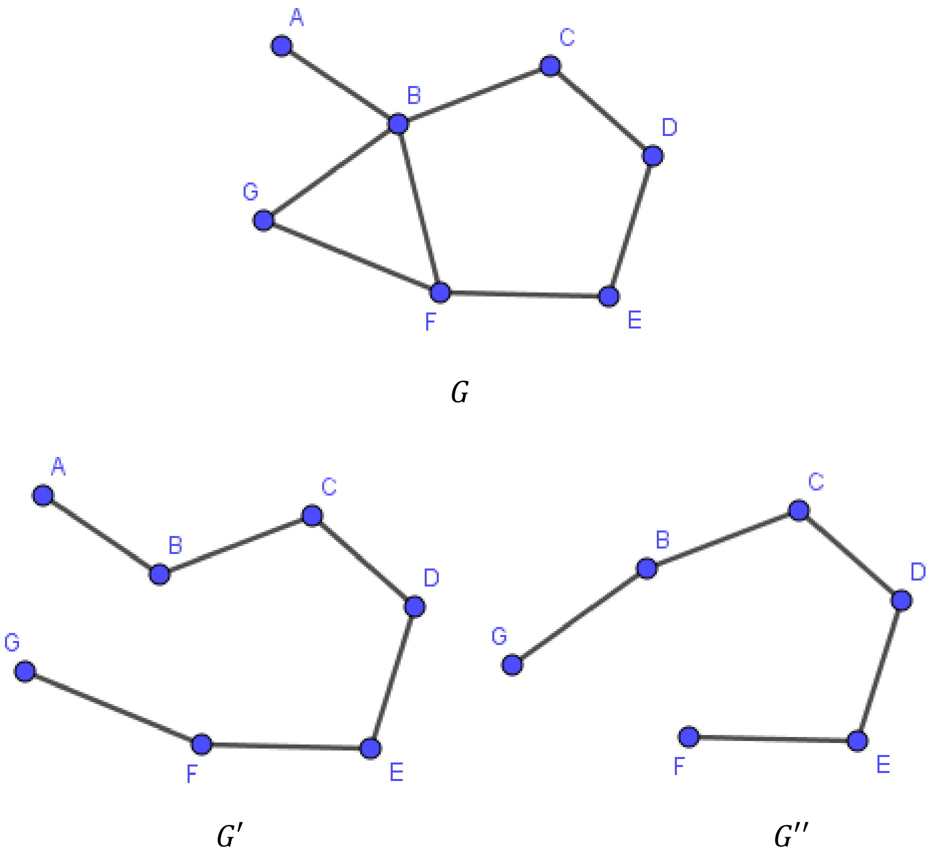
Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.14: Segundo Paulo Oswaldo Boaventura Netto (2006), um **percurso** em um grafo é uma família de ligações sucessivamente adjacentes, cada uma tendo sua extremidade adjacente à anterior e a outra à subsequente, com possível exceção da primeira e da última caso seja um percurso aberto e, caso contrário, será um percurso fechado.

Definição 2.15: Um **caminho** em um grafo $G(V, E)$ é um percurso onde não repetimos vértices, também chamado de percurso elementar. O primeiro vértice é chamado de vértice inicial e o ultimo de vértice final. Note que um caminho é um subgrafo simples G' de G. O **comprimento de um caminho** é o número de arestas que possui.

Exemplo 2.7: Grafo G' e grafo G'' (figura 14) formando os caminhos ABCDEFG e GBCDEF respectivamente ambos caminhos em G e de comprimentos 6 e 5 respectivamente.

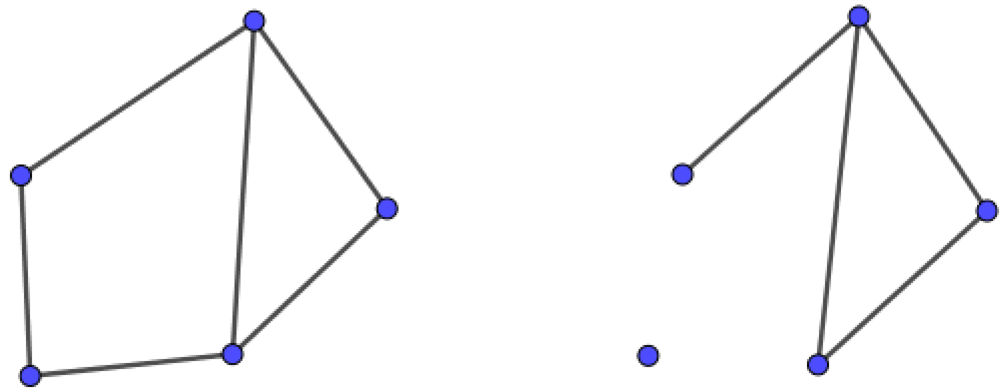
Figura 14 - Grafos G' e G'', dois caminhos em G



Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.16: Um grafo G é dito **conexo** quando para qualquer par de vértices distintos pertencentes a G existe um caminho entre eles. Caso exista pelo menos um par que não satisfaça essa condição o grafo é dito **desconexo** (figura15).

Figura 15 - Grafo Conexo e grafo desconexo respectivamente

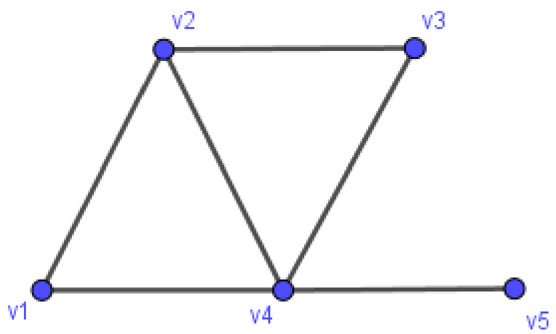


Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.17: Um **ciclo** em um grafo é um caminho com três ou mais vértices com a exceção de ter um único vértice repetido, o vértice coincidente é tanto vértice inicial como final.

Exemplo 2.8: O grafo G (figura 16) apresenta diversos ciclos. Alguns desses ciclos podem ser gerados pelos vértices v_1, v_2, v_4 nas sequências cíclicas $v_1v_2v_4v_1$, $v_2v_4v_1v_2, v_4v_1v_2v_4$, note que obtemos ciclos diferentes utilizando os mesmos vértices e ainda com os mesmos vértices podemos realizar diferentes ciclos caminhando no sentido contrário $v_1v_4v_2v_1$, $v_2v_1v_4v_2$, $v_4v_2v_1v_4$, teremos as mesmas seis variações para a sequência cíclica $v_2v_3v_4v_2$ e para a sequência $v_1v_2v_3v_4v_1$ serão 8 variações, totalizando 20 ciclos diferentes para o grafo G. O vértice v_5 não faz parte de nenhum ciclo.

Figura 16 - Exemplo de Grafo com ciclos

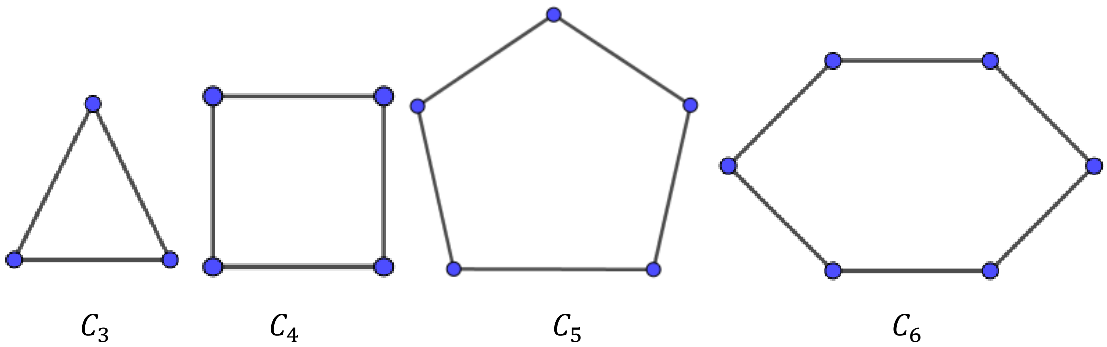


G

Fonte: O autor, 2017.

Quando temos um grafo corresponde a um ciclo, notamos por C_n (figura 17) e este grafo será conexo regular de grau 2. Consequentemente seu número de vértices é igual ao número de arestas.

Figura 17 - Exemplos de grafos ciclo



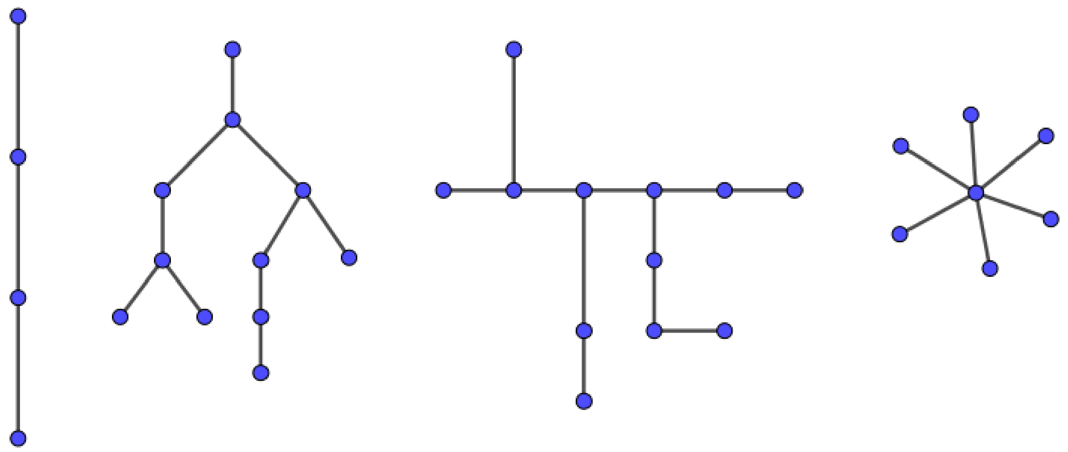
Fonte: O autor, 2017.

Um ciclo pode conter um número ímpar de vértices, denominado **ciclo ímpar** ou um número par de vértices, denominado **ciclo par**.

Definição 2.18: Uma **árvore** é um grafo simples conexo e acíclico, ou seja, sem ciclos.

Exemplo 2.9: Os grafos abaixo são exemplos de árvores.

Figura 18 - Exemplos de grafos árvores



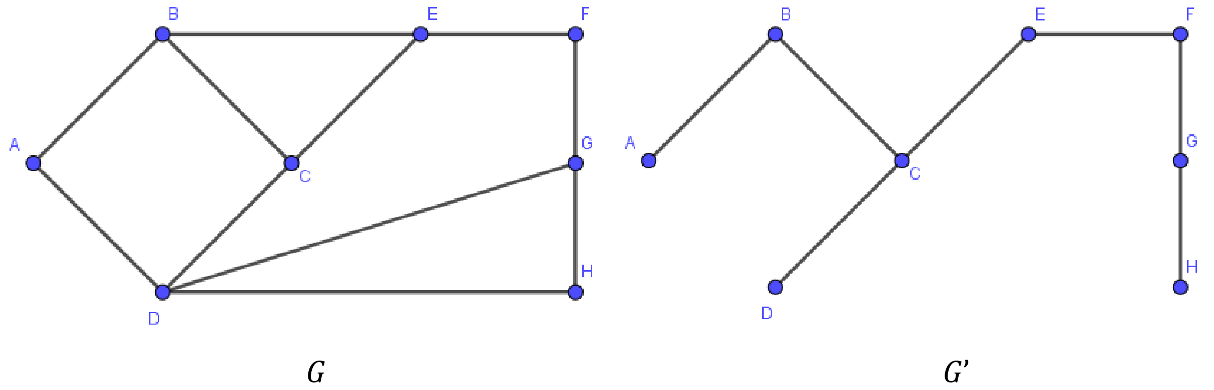
Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.19: Uma árvore de G é qualquer subgrafo de G que seja árvore, caso essa árvore de G contenha todos seus vértices será chamada **árvore geradora** de G.

Como árvores são conexas, um grafo possui árvore geradora se, e somente se, for conexo.

Exemplo 2.10: G' (figura 19), uma das possíveis árvores geradoras de $G,$ obtida a partir da eliminação das arestas que possibilitavam ciclos.

Figura 19 - G' uma árvore geradora de G



Fonte: O autor, 2017.

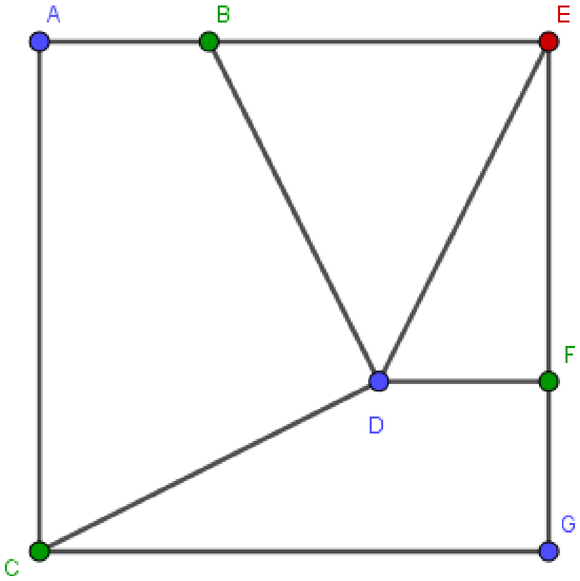
Lema 2.1: Toda árvore não trivial (com mais de 1 vértice), tem pelo menos dois vértices com grau 1.

Demonstração. Toda árvore possui exatamente $n-1$ arestas, sendo n o número de vértices da árvore. Portanto, a soma dos graus dos vértices da árvore tem que ser igual ao dobro do número de arestas, ou seja, $2n-2$. Além disso, o grau de todo vértice é pelo menos 1 porque uma árvore é um grafo conexo. Se a árvore tiver no máximo um vértice com grau 1, então a soma dos graus dos vértices será pelo menos $2(n-1)+1 > 2n-2$, o que não é possível. Portanto, toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos dois vértices com grau 1.

Definição 2.20: Um **conjunto independente** de um grafo G é um conjunto S de vértices de G mutuamente não adjacentes, ou seja, dado quaisquer dois vértices u e v de um conjunto independente, não existe aresta que ligue o vértice u ao v.

Exemplo 2.11: Exemplo de conjuntos independentes em um grafo G (figura 20), $S_1 = \{A, D, G\}$, $S_2 = \{B, C, F\}$, $S_3 = \{E\}$.

Figura 20 - Exemplo de conjuntos independentes num grafo G



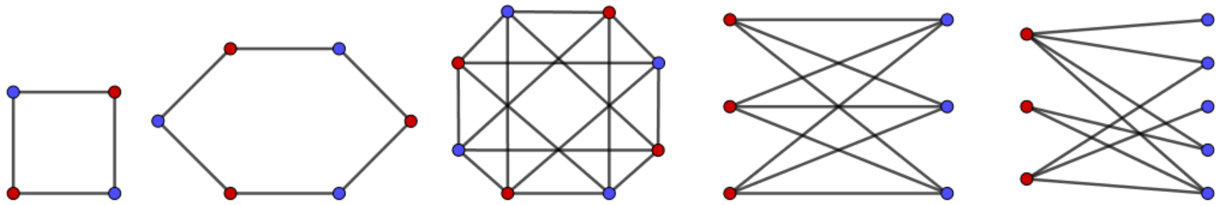
G

Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.21: Um grafo é dito **bipartido** sempre que o seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois subconjuntos independentes U e V. Usualmente escreve-se $G(U, V, E)$ para denotar um grafo bipartido cuja partição tem as partes U e V.

Exemplo 2.12: Grafos bipartidos com destaque aos subconjuntos independentes de vértices.

Figura 21 - Grafos bipartidos



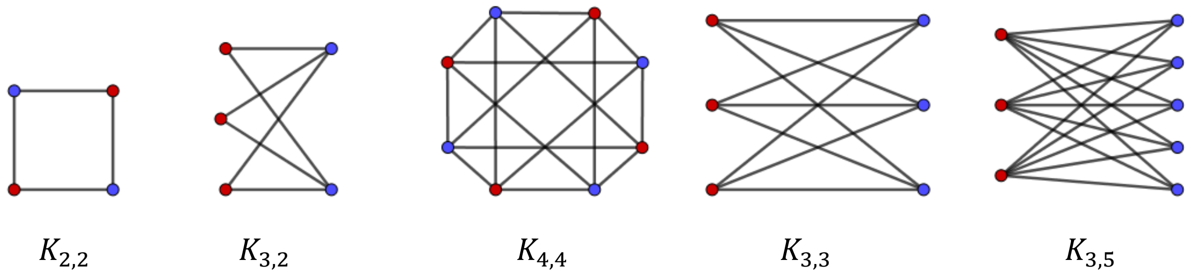
Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.22: Um grafo **bipartido completo** é um grafo bipartido que possua o maior número possível de arestas.

Para grafos bipartidos completos usamos a notação $K_{p,q}$, onde p e q são as cardinalidades dos dois conjuntos independentes e ainda temos que $p + q = n$, assim temos que $K_{p,q}$ possui $p.q$ arestas.

Exemplo 2.13: Exemplos de grafos bipartidos completos e suas respectivas notações.

Figura 22 - Exemplos de grafos bipartidos completos



Fonte: O autor, 2017.

Teorema 2.1: Seja G um grafo com no mínimo dois vértices. G é bipartido se, e somente se, não contém ciclos ímpares.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja G um grafo bipartido e X, Y uma bipartição de G. Se G não possuir ciclos não tem o que demonstrar. Tomemos então um ciclo $C = v_1v_2 \dots v_kv_1$ em G, onde, sem perda de generalidade, suponhamos que $v_1 \in X$. Pela definição de grafo bipartido temos $v_2 \in Y$, $v_3 \in X$, e assim sucessivamente, de maneira generalizada, teremos $v_i \in X$ se i ímpar e $v_i \in Y$ se i par. Como C é um ciclo então v_1 é adjacente a v_k, logo K é par e, portanto C é um ciclo par.

($\Longleftarrow$) Seja G um grafo com no mínimo dois vértices e que não contém ciclos ímpares. Caso G não seja conexo, aplicaremos o raciocínio para G conexo em cada uma de suas componentes conexas. Portanto, sem perda de generalidade suponhamos G conexo.

> [...] Seja G um grafo sem ciclos ímpares. Vamos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos V_1 e V_2, independentes e disjuntos. Tomamos primeiramente um vértice qualquer v. O subconjunto V_1 será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento par entre v e w. O subconjunto V_2 será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre v e w. Os conjuntos V_1 e V_2 são disjuntos, pois se w estivesse em V_1 e V_2ao mesmo tempo, haveria um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar ligando v a w. Esses dois caminhos podem se cruzar (ou não) antes de chegar em w, produzindo alguns ciclos. Como o número de arestas usado nestes ciclos é ímpar (é a soma do número de arestas dos dois caminhos) isso produziria pelo menos um ciclo ímpar em G, contrariando a hipótese. (SAMUEL; JURKIEWICZ, 2009, p. 39).

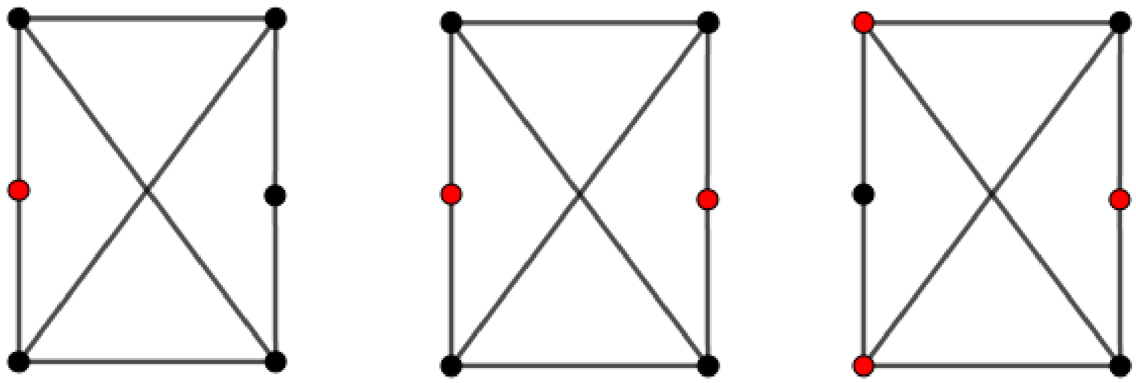
Definição 2.23: Um subconjunto independente é dito **maximal** quando não existe nenhum outro subconjunto independente que o contenha, ou seja, não podemos adicionar nenhum vértice a ele de forma que continue a ser um subconjunto independente.

Caso um conjunto independente maximal possua cardinalidade maior ou igual a todos os demais subconjuntos independentes este será nomeado de subconjunto independente **máximo**.

Note que maximal é referente à uma condição de pertinência, máximo é referente à cardinalidade.

Exemplo 2.14: Nos grafos a seguir (figura 23), temos o subconjunto independente em questão destacado com vértices em vermelho e vemos que em G_1 existe a possibilidade de acrescentar mais vértices ao subconjunto independente, em G_2 não existe a possibilidade de se acrescentar nenhum outro vértice sem perder a independência, sendo assim um subconjunto independente maximal, já em G_3 o subconjunto independente possui 3 vértices e note que não é possível formar nenhum subconjunto independente com cardinalidade maior, assim G_3 é um subconjunto independente máximo.

Figura 23 - Conjunto independentes



G_1 G_2 G_3

Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.24: O **número de independência** de um grafo G, representado por $\alpha(G)$, é a cardinalidade de um subconjunto independente máximo de vértices de G.

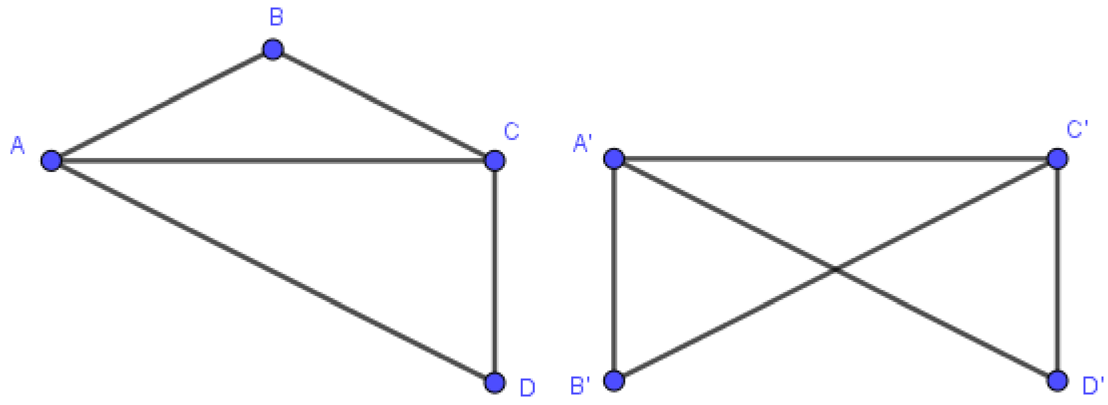
No grafo do exemplo 2.14 temos $\alpha(G) = 3$. Vale ressaltar que grafos com laços podem não possuir subconjuntos independentes, nesse caso fica implícito $\alpha(G) = 0$.

Definição 2.25: Dado dois grafos $G = (V(G), A(G))$ e $H = (V(H), A(H))$. Dizemos que G e H são isomorfos se existir uma bijeção $\varphi: V(G) \to V(H)$ tal que $vw \in A(G) \Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(b) \in A(H)$.

Exemplo 2.15: Observe os grafos G e H (figura 24). Temos $V(G) = \{A, B, C, D\}$ e $V(H) = \{A', B', C', D'\}$, definimos a bijeção $\varphi: V(G) \to V(H)$ dada por $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$, $\varphi(D) = D'$, de modo que $AB \in A(G) \leftrightarrow \varphi(A)\varphi(B) \in A(H)$, $AC \in A(G) \leftrightarrow \varphi(A)\varphi(C) \in A(H)$, $AD \in A(G) \leftrightarrow \varphi(A)\varphi(D) \in A(H)$, $BC \in A(G) \leftrightarrow \varphi(B)\varphi(C) \in A(H)$, $CD \in A(G) \leftrightarrow \varphi(C)\varphi(D) \in A(H)$.

Ou seja, devemos ter para cada vértice em G um único vértice associado em H de forma que cada par de vértices conectado por uma aresta em G o par de vértices associado em H devem possuir as mesmas arestas conectando-os e reciprocamente de H para G.

Figura 24 - Grafos isomorfos



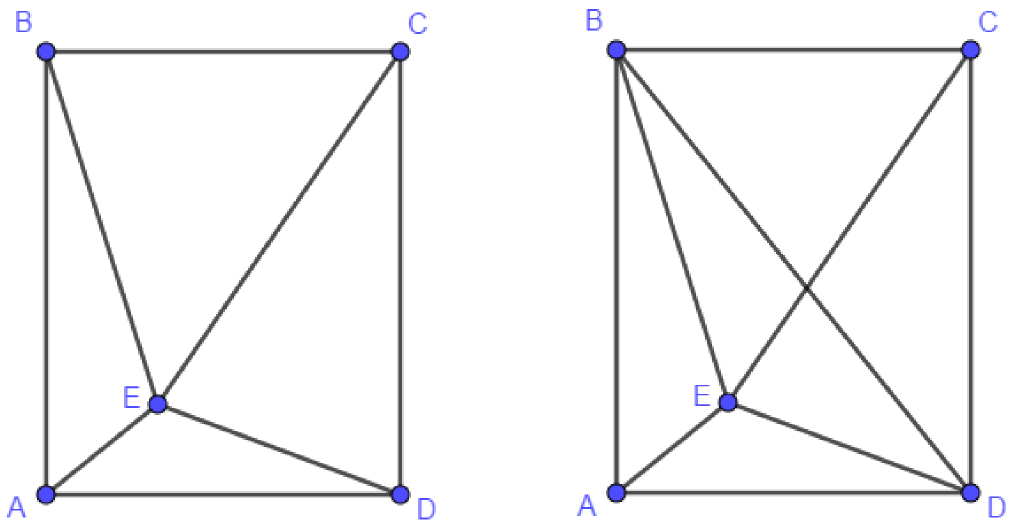
G H

Fonte: O autor, 2017.

Definição 2.26: Dizemos que um grafo simples G é planar se possuir uma representação gráfica no plano, onde quaisquer duas arestas se interceptam apenas em vértices. Neste caso, temos uma representação planar.

Exemplo 2.16: Temos o grafo G_1 planar e o grafo G_2 não planar (figura 25), pois não existe nenhuma forma gráfica isomórfica ao grafo G_2 ao qual suas arestas se interceptem apenas nos vértices.

Figura 25 - Grafo planar e não planar respectivamente



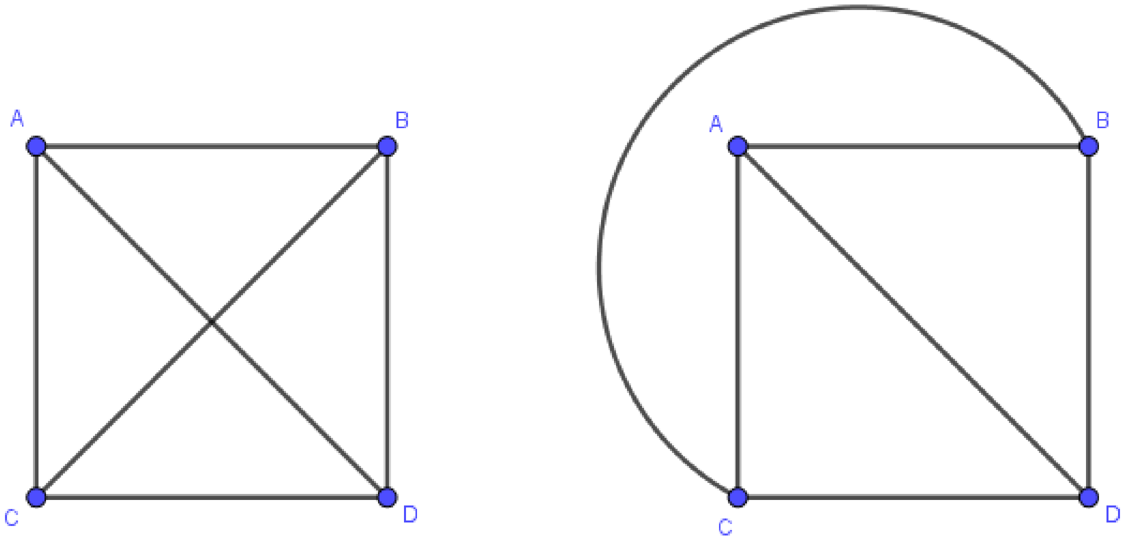
G_1 G_2

Fonte: O autor, 2017.

Note que no grafo H (figura 24), apesar de possuir arestas se interceptando fora dos vértices, ele possui uma representação gráfica (grafo G da mesma figura) que cumpre o critério, assim o grafo H é dito planar.

Exemplo 2.17: A figura 26 mostra, através da forma traçada em (b), que o grafo K_4 é planar. Esta forma é conhecida como **grafo plano**, **forma topológica** ou **grafo planar topológico**.

Figura 26 - Grafo K_4 planar e sua forma topológica respectivamente



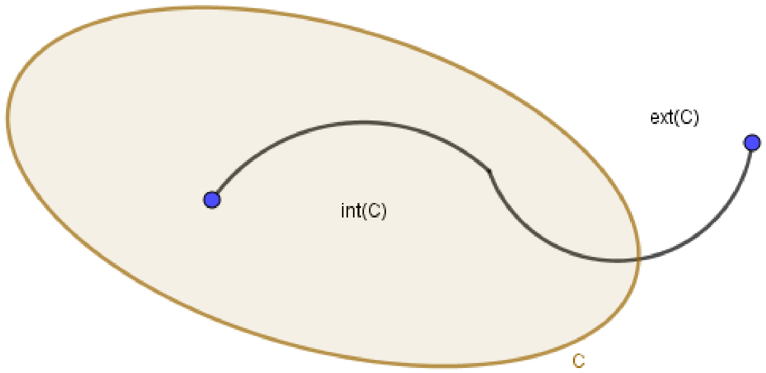
Fonte: O autor, 2017.

Teorema 2.2 (da curva de Jordan): Qualquer curva simples fechada C no plano particiona-o em duas partes, uma limitada a outra ilimitada, sendo o traço da curva a fronteira comum das duas regiões.

Este teorema é intuitivamente fácil de compreender, porém uma demonstração formal e de grande complexidade matemática e pode ser encontrada em Alencar e Santos (2003).

Uma curva simples fechada C, particiona o plano em dois conjuntos abertos ao qual chamamos de interior e exterior e denotaremos $int(C)$ e $ext(C)$ respectivamente, onde $int(C) \cap ext(C) = C$. O teorema da curva de Jordan implica que cada curva que ligue um ponto de $int(C)$ a um ponto em $ext(C)$ intercepta C em pelo menos um ponto.

Figura 27 - Curva interceptando C ao ligar um ponto do interior a um ponto exterior

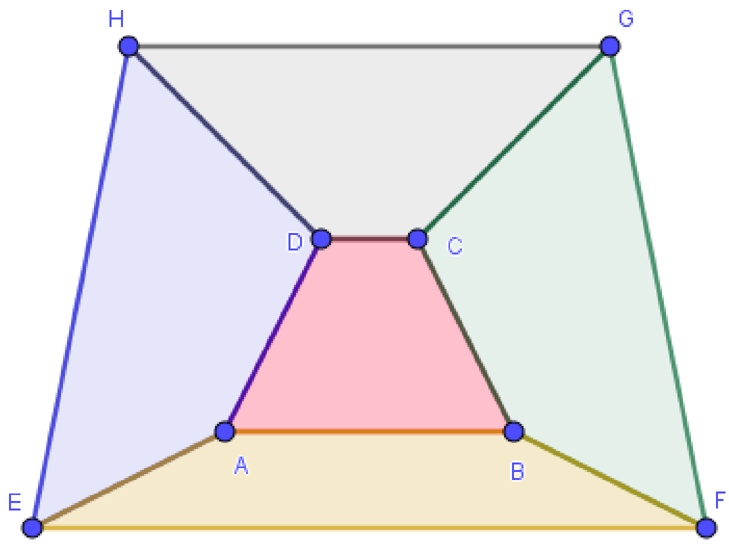


Fonte: O autor, 2018

Uma consequência direta do teorema 2.2 acima, é que as arestas de um grafo planar dividem o plano que o contem em regiões, a cada uma destas regiões denotaremos **face do grafo**. Dois pontos do plano estão na mesma face se existir uma curva que os ligue de forma que não intercepte nenhuma aresta. O número de faces de um grafo será representado por f.

Exemplo 2.18: Na figura 28, temos um grafo com suas faces em destaque, totalizando 6 faces, pois não podemos esquecer que a região exterior é contabilizada como uma face também.

Figura 28 - Faces de um grafo



Fonte: O autor, 2018

Teorema 2.3 (de Euler): Seja G um grafo conexo planar com f faces, n vértices e m arestas. Temos que $n - m + f = 2$

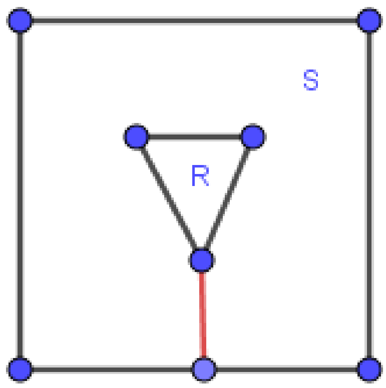
Demonstração. Indução infinita sobre o número de arestas.

- Se $m = 0$;
  Então G é um grafo nulo, como G é conexo então $n = 1$ e portanto $f = 1$, logo a fórmula é válida.
- Hipótese de indução: suponhamos que o resultado seja válido para todo grafo planar conexo com m ou menos arestas.
- Seja G um grafo com $m + 1$ arestas, n vértices e f arestas;
  Caso 1: Se G tiver um vértice com grau 1, tira-se esse vértice e consequentemente a aresta nele incidente.
  Obtemos um grafo G' com menos uma aresta e menos um vértice e o mesmo número de faces, pois com a retirada de um vértice de grau 1 e suma aresta incidente não faz desaparecer nenhuma face já que não forma ciclo para fechar uma face. Para o grafo G' é válida a fórmula de Euler e pela hipótese de indução, temos $(n - 1) - m + f = 2$, ou seja, $n - (m + 1) + f = 2$.
  Caso 2: Se G não tiver nenhum vértice de grau 1, então G não é uma árvore, consequentemente deve possuir pelo menos um ciclo. Retira-se uma das arestas desse ciclo. Obtemos um grafo G'' que continua a ser conexo, mantendo o mesmo número de vértices de G, porém com uma aresta e uma face a menos, pois ao desfazer um ciclo houveram duas faces se juntaram e passaram a ser numa só. Para G'' é válida a fórmula de Euler e, pela hipótese de indução, temos $n - m + (f - 1) = 2$. Então é válido $n - (m + 1) + f = 2$.

Definição 2.27: Definiremos como grau de uma face o número de arestas nos limites da face. Caso uma aresta apareça duas vezes para um mesmo limiar contabilize-a duas vezes (caso da aresta destacada em vermelho no exemplo 2.19)

Exemplo 2.19: No grafo a seguir (figura 29), a região R possui grau 3 e região S grau 10.

Figura 29 - Exemplo de grau da face de um



Fonte: O autor, 2018

Colorário 2.1: Se G é um grafo planar conexo com $m > 1$, então $m \leq 3n - 6$.

Demonstração: Note que nenhuma face pode ter menos do que grau 3, lembrando que estamos trabalhando com grafos simples.

$2m$ = soma dos graus das faces $\geq 3f$ ou seja $f \leq \frac{2}{3}m$

Substituindo a desigualdade acima com a Fórmula de Euler temos:

$$\frac{2}{3}m \geq f = m - n + 2$$

Isolando m temos:

$$\frac{2}{3}m \geq f = m - n + 2$$

$$m \leq 3n - 6 \tag{1}$$

3 COLORAÇÃO

Coloração de um grafo simples G, é uma forma de ver um problema onde devemos particionar o conjunto de vértices (ou arestas) do grafo em subconjuntos independentes, atribuindo um mesmo rótulo aos vértices de um mesmo subconjunto independente e diferentes rótulos a cada um dos subconjuntos independentes, onde o rótulo atribuído serão “cores”, ou qualquer outro símbolo. Nesse trabalho iremos explorar problemas que envolvam coloração de vértices, que em outras palavras, consiste em encontrar uma coloração num determinado grafo, de forma que para quaisquer dois vértices adjacentes possuam necessariamente cores distintas. Para encontrar uma solução iremos utilizar algoritmos que serão mostrados mais a frente, ao especificar “um grafo” neste trabalho, estaremos sempre nos referindo um grafo simples e note que utilizamos “uma” solução e não “a” solução, pois como iremos ver adiante soluções para coloração não são únicas.

3.1 Coloração de Vértices

Uma solução natural para o problema de coloração de vértices num grafo, seria atribuir a cada vértice uma cor diferente, mas resolver o problema utilizando menos cores, ou encontrar uma solução com o mínimo de cores possíveis (que é o que pretendemos) pode ser uma tarefa árdua.

Definição 3.1: Uma coloração consiste numa função $c: V(G) \to \mathbb{N}$, tal que para dois vértices u e v adjacentes, temos $c(u) \neq c(v)$. Neste trabalho sempre que utilizarmos o conjunto dos números naturais $(\mathbb{N})$, não estaremos considerando o zero.

Se cada cor utilizada no grafo for uma das K cores estabelecidas, denomina-se a coloração resultante como uma K-coloração e denominamos o grafo como k-colorível.

Definição 3.2: O **número cromático** $\chi(G)$ de um grafo G será o mínimo de n cores necessárias para se colorir os vértices de G de forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Quando encontramos uma solução onde o número de cores utilizadas é igual ao valor de $\chi(G)$, dizemos que encontramos uma coloração ótima. Quando o grafo subentendido estiver claro, escrevemos apenas χ para indicar seu número cromático.

Note que pela solução natural para o problema de coloração, ou seja, para um grafo G de n vértices utilizarmos n cores distintas, garantimos a existência de pelo menos uma solução para qualquer grafo G. Isso implica que dado um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ com elementos correspondentes a quantidade de cores para cada coloração de vértices de G, é não vazio, então temos que $\chi(G)$ está bem definido como o mínimo de A.

Exemplo 3.1: Os primeiros resultados que encontramos são para os grafos N_n e K_n.

Como N_n não possui arestas, então nenhum de seus vértices são adjacentes, consequentemente $\chi(N_n) = 1$. Já em um grafo completo K_n temos que todos seus vértices são adjacentes a todos os demais vértices do grafo, assim não podendo atribuir a mesma cor a um segundo vértice, consequentemente necessitando de n cores, logo $\chi(K_n) = n$.

Teorema 3.1: Um grafo G é bipartido se, e somente se, $\chi(G) = 2$.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Se G é bipartido possui dois conjuntos independentes de vértices, logo podemos atribuir uma Cor_1 a todos os vértices de um dos conjuntos independentes e uma Cor_2 ao outro, portanto $\chi(G) = 2$.

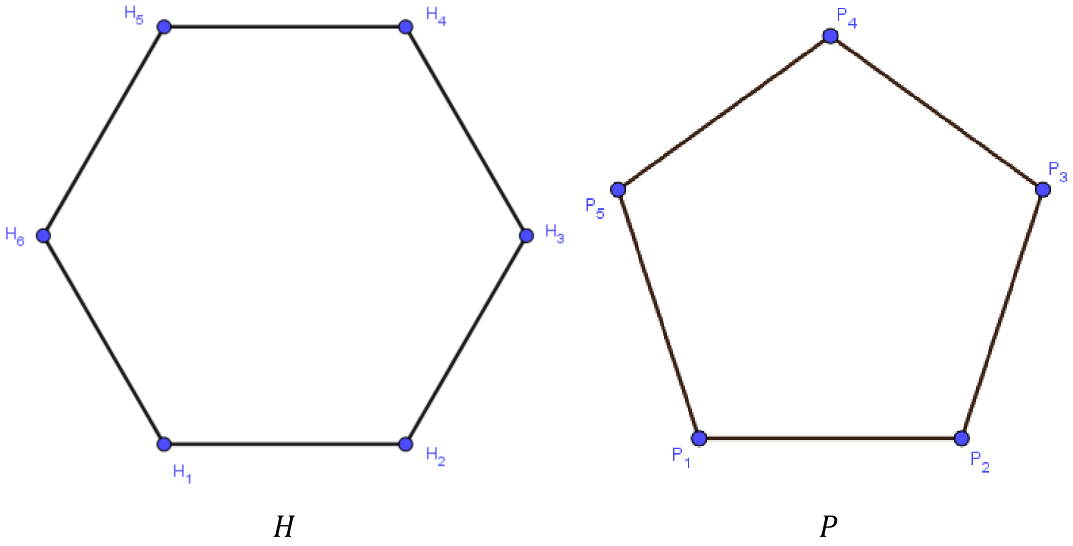
($\Longleftarrow$) Se G possui $\chi(G) = 2$, pela definição de número cromático temos que dois vértices de mesma cor não possuem aresta conectando-os, portanto temos os vértices separados pelos conjuntos Cor_1 e Cor_2 onde todas as arestas de G conectam necessariamente um elemento de Cor_1 a um elemento de Cor_2. Logo G é bipartido.

Corolário 3.1: Grafos que correspondem a ciclos pares ou que são caminhos são bipartidos, portanto tem $\chi = 2$.

Demonstração. Para o caso de grafos ciclos pares, podemos particionar os vértices do grafo de modo que vértices ímpares e pares sejam agrupados em dois conjuntos distintos, ou seja, trata-se de um grafo bipartido e, pelo teorema anterior, $\chi = 2$. Se o grafo em questão for um caminho, podemos realizar a partição de modo análogo ao grafo ciclo par, sendo que o grafo também será bipartido e, portanto, $\chi = 2$.

Exemplo 3.2: Determinaremos o número cromático de dois grafos ciclos C_6 e C_5 (figura 30) a fim de, posteriormente, generalizar este resultado para qualquer grafo ciclo C_n.

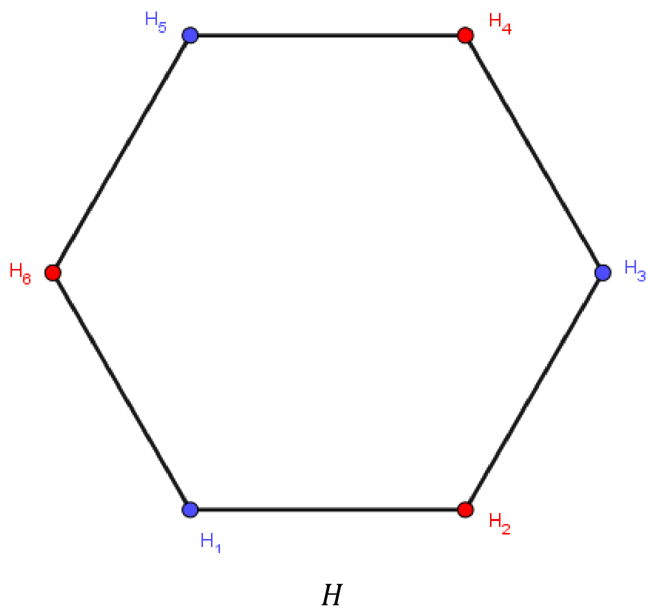
Figura 30 - Grafos ciclos C_6 e C_5, nomeados H e P respectivamente



Fonte: O autor, 2017.

O grafo C_6 pode ser dividido em dois subconjuntos independentes (figura 31), $Cor_1 = \{H_1, H_3, H_5\}$ e $Cor_2 = \{H_2, H_4, H_6\}$, assim temos $\chi(C_6) = 2$.

Figura 31 - Uma coloração de vértices para C_6

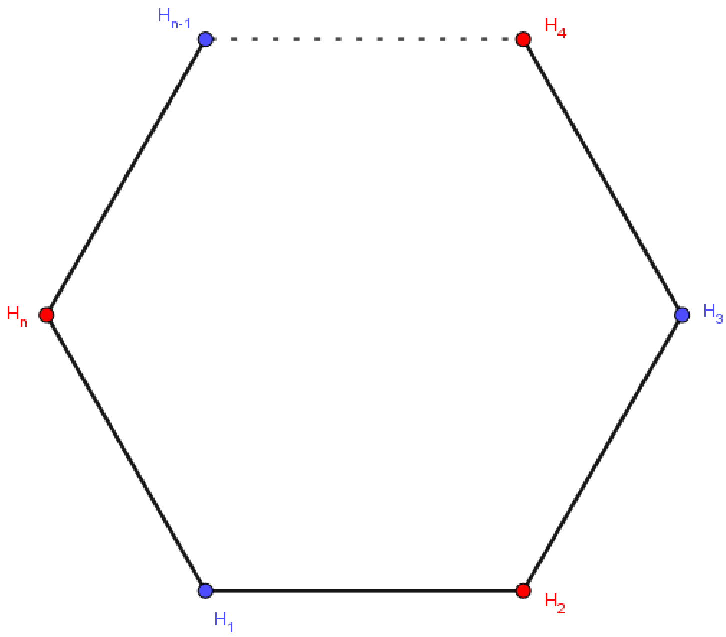


Fonte: O autor, 2017.

A definição de ciclo e caminho nos garante que em todo grafo ciclo podemos formar um caminho que contenha todos os vértices (ver definição 2.14 e 2.16), reorganizando os vértices $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ a fim de formar este caminho, garantindo que nesta ordem, todos os vértices sejam consecutivos.

Organizando desta forma, para um grafo C_n, com $n = 2(K+1)\ \forall\ K \in \mathbb{N}$, ou seja, n natural par maior que 3, teremos todos os vértices de índice par adjacentes a vértices de índice ímpar, assim podemos separa-los em dois subconjuntos independentes (figura 32), $Cor_1 = \{v_i, i\ ímpar \mid v_i \in C_n\}$ e $Cor_2 = \{v_j, j\ par \mid v_j \in C_n\}$, consequentemente $\chi(C_n) = 2$.

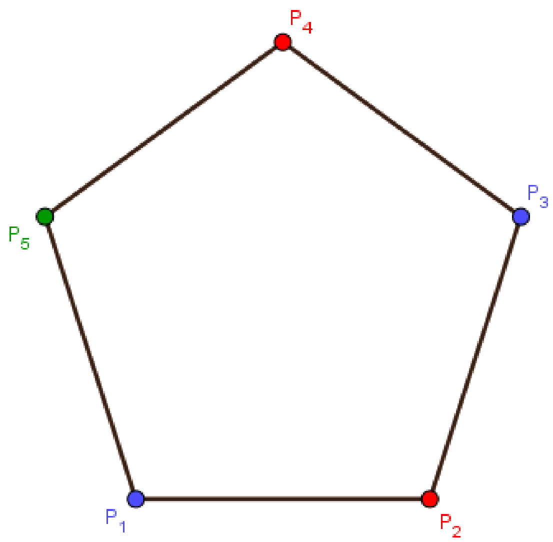
Figura 32 - Uma coloração de vértices para grafos ciclos pares



Fonte: O autor, 2017.

Para o grafo C_5 (figura 33), iremos separar os vértices em subconjuntos independentes, $Cor_1 = \{P_1, P_3\}$, $Cor_2 = \{P_2, P_4\}$ e o vértice P_5 tem conflito com P_1 e P_4 sendo necessário um terceiro subconjunto independente $Cor_3 = \{P_5\}$.

Figura 33 - Uma coloração de vértices para C_5

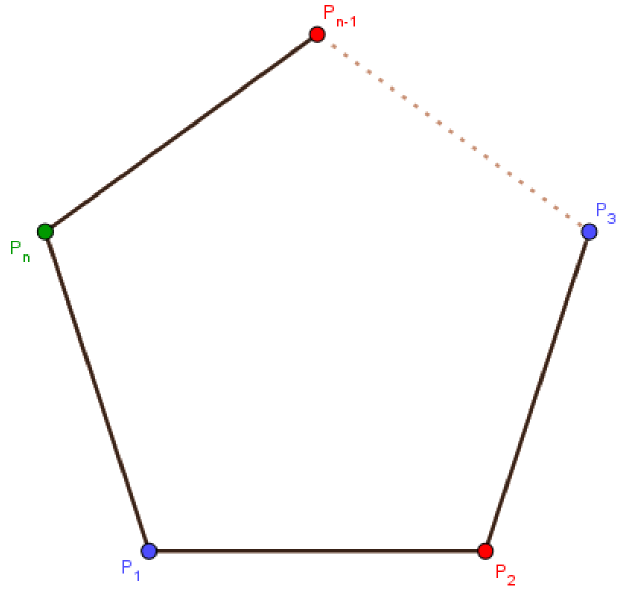


Fonte: O autor, 2017.

De maneira semelhante ao caso anterior iremos generalizar para C_n com $n = 2K + 1 \; \forall \; K \in \mathbb{N}$, ou seja, ciclos ímpares. Vamos utilizar a mesma ordenação dos vértices $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$, formando uma sequência de vértices adjacentes, assim o único elemento que difere do caso anterior é o vértice v_n que terá índice ímpar e estará conectado ao vértice v_1, também ímpar.

Então teremos os subconjuntos independentes $Cor_1 = \{v_i, i \; ímpar \; e \; i \neq n \mid v_i \in C_n\}$, $Cor_2 = \{v_j, j \; par \; |v_j \in C_n\}$ e como v_n é adjacente a elementos tanto de Cor_1 como Cor_2, será necessário um terceiro subconjunto independente $Cor_3 = \{v_n\}$, consequentemente $\chi(C_n) = 3$.

Figura 34 - Uma solução para grafos ciclos ímpares



Fonte: O autor, 2017.

Assim podemos concluir que:

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, se\ n = 2(K+1) \\ 3, se\ n = 2K+1 \end{cases} \quad \forall\ K \in \mathbb{N}\ e\ K \neq 0 \tag{2}$$

Problemas de coloração podem se tornar bem complexos quando analisamos grafos com elevado número de vértices e se torna necessário uma estratégia na tentativa de encontrar uma solução para que o resultado obtido não seja muito distante da solução ótima. Veremos a seguir os algoritmos de alguns processos utilizados na coloração de vértices de um grafo.

O método de coloração sequencial é um processo de coloração heurística para os vértices de um grafo G, onde o critério local a tornar o elemento elegível é não possuir conflitos com a cor selecionada e pode ser obtido com os seguintes procedimentos.

Algoritmo de coloração sequencial:

Entrada: Grafo G com lista de vértices $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$.

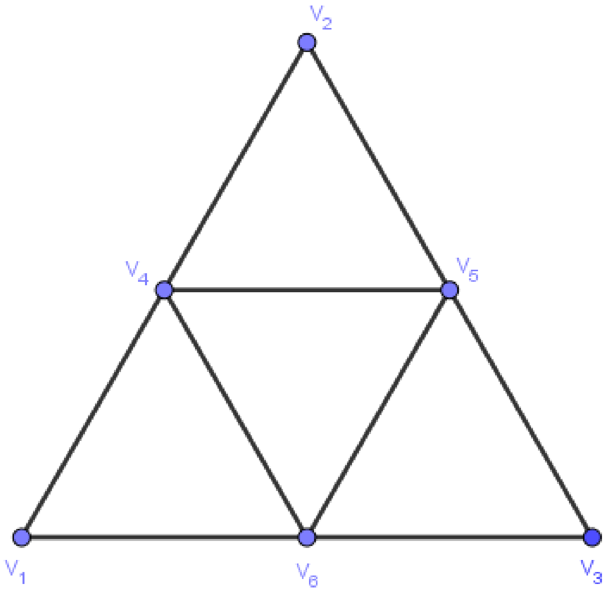
Saída: Conjuntos $C_{1,}C_2, \dots, C_n$, onde cada conjunto representa os vértices que devem ser coloridos com uma mesma cor.

1. Liste os vértices em sequência $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$.
2. Faça $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = \emptyset$.
3. Inclua v_1 em C_1.
4. Para $j = 2, \dots, n$ faça:
   4.1. Encontre o conjunto C_r, tal que o vértice v_j não seja adjacente a nenhum vértice já incluído a ele e $r = min\,\{i, i = 1, \dots, n\}$.
1. Inclua o vértice v_j em C_r.
2. Fim.

O resultado obtido depende da ordem adotada ao formar a sequência dos vértices. Diferentes ordenações, nos proporciona, diferentes resultados, por esse motivo nos referimos sempre como “uma solução”.

Exemplo 3.1: Utilizaremos o processo heurístico acima para realizar uma coloração no grafo a seguir (figura 35).

Figura 35 - Grafo para realização do processo de coloração sequencial

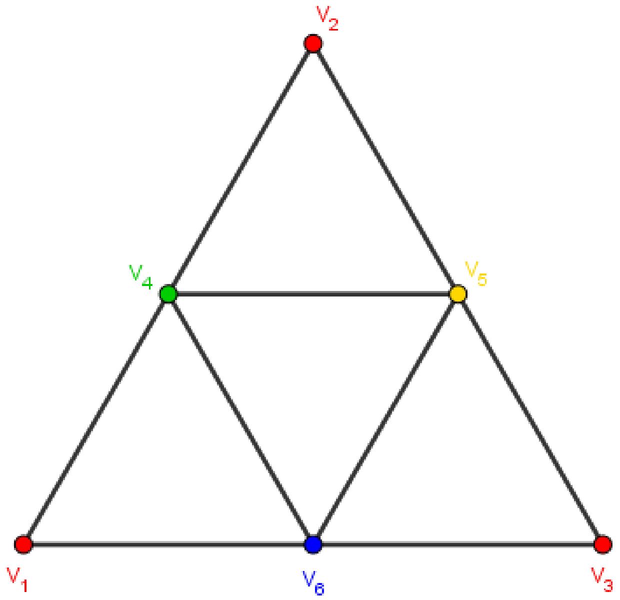


Fonte: O autor, 2017.

Os vértices já foram devidamente nomeados a fim de formarem uma sequência $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$.

Para o vértice v_1 adotaremos a cor C_1, analisando o vértice v_2 não possui vértices adjacentes com a cor C_1 então adotaremos esta cor, o vértice v_3 também não possui vértices adjacentes com a cor C_1, ao analisar o vértice v_4 vemos que ele possui conflito com a cor C_1, então iremos colorir com uma cor C_2, o vértice v_5 possui vértices adjacentes com a cor C_1 e a cor C_2, então utilizaremos uma cor C_3 e o vértice v_6 possui vértices adjacentes com a cor C_1, C_2 e C_3, então adotaremos um cor C_4. Assim temos $C_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $C_2 = \{v_4\}$, $C_3 = \{v_5\}$, $C_4 = \{v_6\}$, obtendo a seguinte coloração (figura36).

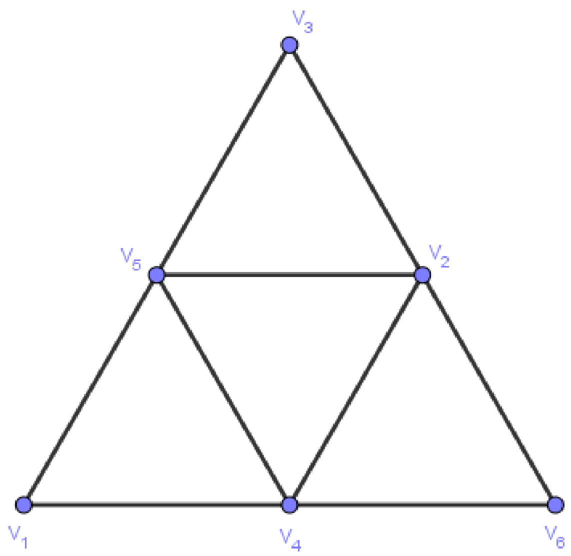
Figura 36 - Uma solução para o exemplo 3.1



Fonte: O autor, 2017.

A solução encontrada depende exclusivamente da ordenação estabelecida no início do processo, assim se alterarmos a ordem dos vértices podemos obter uma coloração diferente.

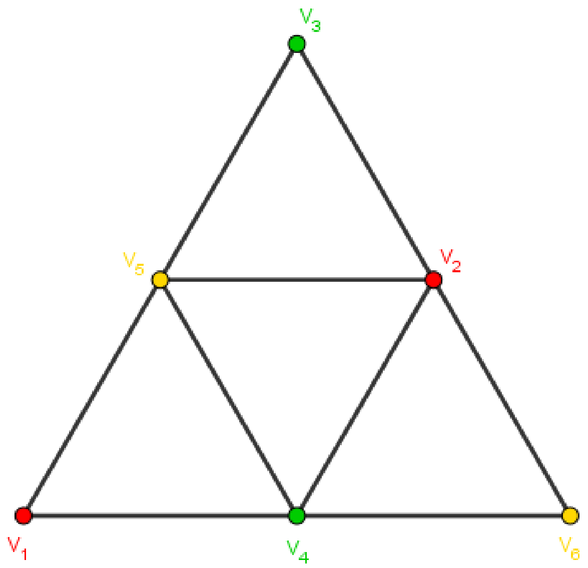
Figura 37 - Grafo com vértices reordenados para realização do segundo processo de coloração sequencial



Fonte: O autor, 2017.

Seguindo os mesmos processos iremos obter $C_1 = \{v_1, v_2\}$, $C_2 = \{v_3, v_4\}$, $C_3 = \{v_5, v_6\}$, representada no grafo abaixo (figura 38).

Figura 38 - Uma segunda solução para o exemplo 3.1



Fonte: O autor, 2017.

Como em outros algoritmos heurísticos, o resultado obtido depende da sequência adotada, veja como na figura 36 obtivemos uma solução diferente da figura 38 para o mesmo exemplo 3.1 e com menos cores.

Como pode ser visto em Boaventura Netto (2006), ao tentar sucessivas rotulações de vértices, eventualmente encontrará uma que lhe forneça a coloração ótima, porém existem $n!$ possibilidades de rotulações, o que implica num tempo exponencial de processamento. Uma alternativa é rotular os vértices em ordem não-crescente dos graus dos vértices, que aumenta o número de incompatibilidades registradas a cada etapa e consequentemente diminuindo a cardinalidade da coloração obtida.

O problema de coloração de um grafo G com $\chi(G)$ cores é geralmente NP-difícil e para obter soluções para problemas da classe NP-difícil é usualmente utilizado uma heurística gulosa. Um processo de heurística gulosa, constrói uma solução analisando elemento por elemento, em cada fase do processo adicionamos um único elemento dentre os candidatos, eleito por um critério localmente ótimo com o objetivo de tentar encontrar um ótimo global, o método termina quando todos os elementos foram analisados. Mesmo não sendo garantido encontrar a solução ótima encontra-se usualmente uma boa aproximação.

Algoritmo "guloso" para colorir os vértices de um grafo:

ENTRADA: Grafo G com lista de vértices em ordem não crescente de acordo com o grau de cada vértice, em caso de empate escolha arbitrariamente.

SAÍDA: $C_1, C_2, \dots, C_k$, onde cada conjunto representa os vértices que devem ser coloridos com uma mesma cor e $k \leq n$ que representa o número de cores utilizadas para uma possível coloração do grafo G.

1. Ordene o conjunto de vértices V em ordem não crescente de graus: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$.
2. $i = 0$.
3. Se $V \neq \emptyset$ vá para 4, se não vá para 8.
4. $i = i + 1$
5. Crie um conjunto C_i contendo o primeiro vértice v_j de V.
6. Enquanto existir um vértice v_k não adjacente a qualquer vértice pertencente a C_i faça:
   6.1. Inclua v_k em C_i.
   6.2. Remova v_k de V.
7. Volte para 3.
8. Fim

Encontrar uma p −coloração dos vértices de um grafo G é equivalente a particionar o conjunto de vértices V do grafo em subconjuntos V_i, de forma que $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_p$. Se os conjuntos V_i são subconjuntos independentes de V então obtemos uma coloração válida. Assim, podemos utilizar um "algoritmo guloso" para encontrar conjuntos independentes de um grafo G, atribuindo uma cor diferente a cada um dos conjuntos independentes.

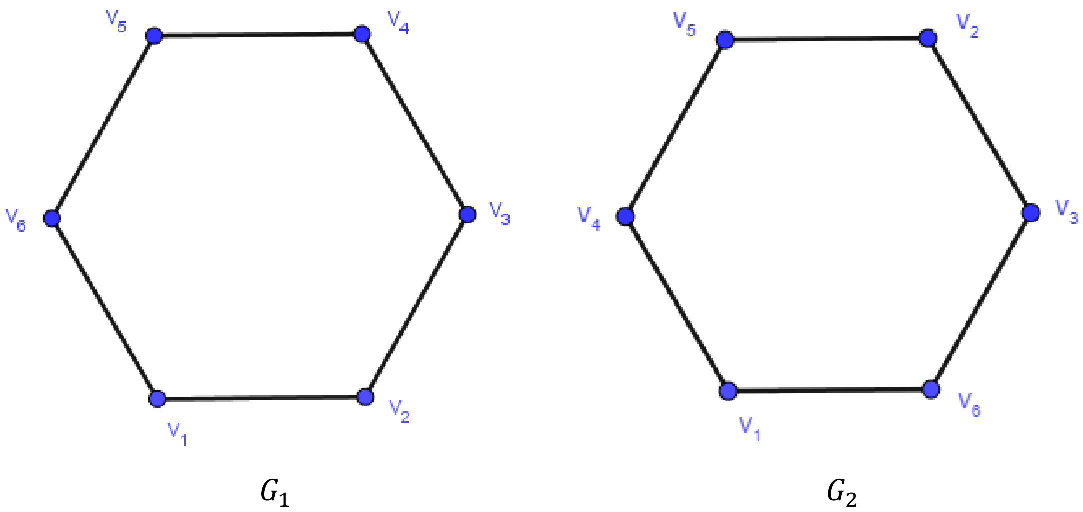
De acordo com Carvalho (2017, p.9), podemos utilizar o seguinte algoritmo para construir um conjunto independente máximo.

Algoritmo Guloso para Construção de um Conjunto Independente Máximo

1. Selecione o vértice de menor grau ainda não considerado;
2. Se este vértice não possuir conflitos com vértices já adicionados, inclua-o no conjunto;
3. Remova as arestas deste vértice e os seus vértices vizinhos do grafo original;
4. Se houverem vértices ainda não considerados volte para 1.

Exemplo 3.3: Utilizaremos para análise do algoritmo os grafos G_1 e G_2 semelhantes (figura 39), tendo como única diferença a rotulação dos vértices.

Figura 39 - Grafos para exemplo de aplicação do algoritmo guloso para construção de um conjunto independente máximo



Fonte: O autor, 2017.

Como em ambos os grafos todos os vértices possuem grau 2, temos a liberdade de escolher a ordem da seleção dos vértices ao aplicar o algoritmo, assim rotulamos os vértices convenientemente a fim de formar uma sequência $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ a qual adotaremos na aplicação do algoritmo.

Aplicando o algoritmo ao grafo G_1:

Tabela 1 – Verificação do algoritmo em G_1

v_1	Incluído ao Conjunto
v_2	Conflito com v_1
v_3	Incluído ao Conjunto
v_4	Conflito com v_3
v_5	Incluído ao Conjunto
v_6	Conflito com v_5
Conjunto	$\{v_1, v_3, v_5\}$

Fonte: O autor, 2017.

O conjunto $\{v_1, v_3, v_5\}$ é de fato um conjunto independente máximo

Aplicando o algoritmo ao grafo G_2:

Tabela 2 – Verificação do algoritmo em G_2

v_1	Incluído ao Conjunto
v_2	Incluído ao Conjunto
v_3	Conflito com v_2
v_4	Conflito com v_1
v_5	Conflito com v_2
v_6	Conflito com v_1
Conjunto	$\{v_1, v_2\}$

Fonte: O autor, 2017.

Como podemos observar, no grafo H encontramos um subconjunto maximal, porém não máximo. Assim como no algoritmo guloso de coloração sequencial, o resultado do algoritmo guloso para construção de um subconjunto independente máximo depende da ordem adotada não nos garantindo uma solução ótima sem verificar todas as ordenações de vértices possíveis tornando o problema computacionalmente inviável para grafos com número muito elevado de vértices.

3.1.1 Limitações para $\chi(G)$

Como vimos, encontrar o número cromático de um grafo é normalmente uma tarefa complexa, principalmente para grafos de ordens elevadas, então é natural que se busque limitantes para o número cromático. A seguir iremos explorar alguns desses limitantes e teoremas que refinam os resultados obtidos e serão necessários mais à frente no trabalho.

Teorema 3.2: Todo grafo G é $(\Delta + 1)$-colorível, onde Δ é o grau máximo de G.

Demonstração. Em um grafo G qualquer, o número máximo de vértices adjacentes a um vértice v é Δ, no pior dos casos, cada um desses Δ vértices estão coloridos com uma cor diferente assim para o vértice v é possível adotar uma (Δ +1) cor. Logo $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

O resultado acima $\chi(G) \leq \Delta + 1$, ainda não nos fornece um bom limitante. Em alguns casos, a diferença entre o número cromático e o valor de $\Delta + 1$ é discrepante, como por exemplo no grafo bipartido $K_{1,23}$, terá grau máximo 22 então o teorema nos fornece um limitante igual a 23 para o número cromático, porém sabemos que para qualquer grafo bipartido $\chi(G) = 2$.

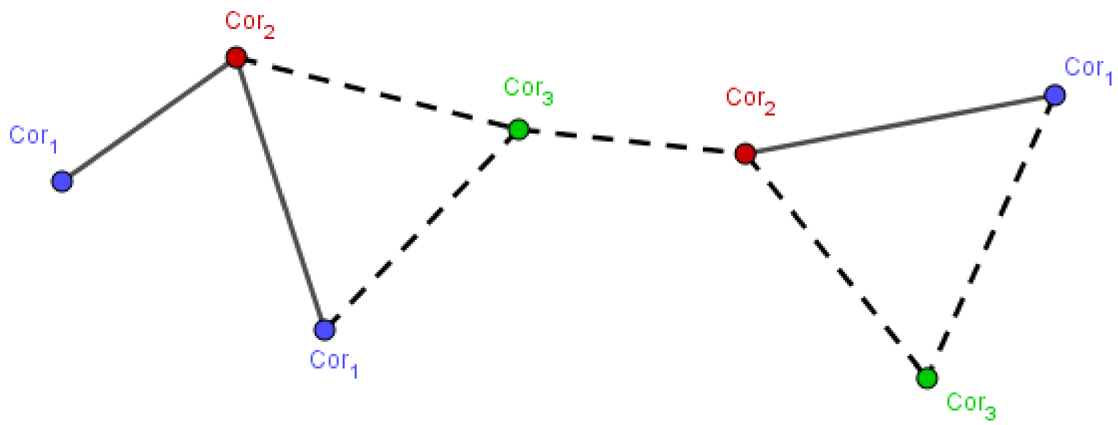
O **teorema de Brooks** nos garante que a igualdade, $\chi(G) = \Delta + 1$, somente será válida quando G for um grafo completo ou grafo ciclo de ordem ímpar.

Para apresentar o teorema de Brooks é necessário definir primeiro uma **cadeia de Kempe**.

Definição 3.4: Dados G um grafo qualquer e K uma coloração própria de G, uma cadeia de Kempe de G correspondente a duas cores i, j de K é o subgrafo formado exatamente pelos vértices de cores i ou de cor j, tal grafo é representado por G_{ij}.

Exemplo 3.4: No grafo seguinte (figura 40) temos um o exemplo de um grafo G (linhas tracejadas) e sua cadeia de Kempe G_{12} (linhas contínuas).

Figura 40 - Grafo G e sua cadeia de Kempe G_{12}



Fonte: O autor, 2017.

Teorema 3.3 (Brooks): Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Demonstração. Sejam G um grafo conexo de ordem n que não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo. Temos que:

- $\Delta \neq 0$.

  Se $\Delta = 0$, temos que o grafo G não possui arestas, assim G é um grafo desconexo ou G é um grafo com um único vértice, portanto um grafo completo K_1 o que, em ambos os casos, é absurdo.

- $\Delta \neq 1$.

  Se $\Delta = 1$, temos que o grafo G possui exatamente uma única aresta, assim se G possuir apenas dois vértices será um grafo completo K_2, caso contrário deverá possuir três ou mais vértices, consequentemente desconexo, o que, em ambos os casos, é absurdo

- $\Delta \neq 2$

  Se $\Delta = 2$ então pela hipótese o grafo G corresponde a um caminho ou um grafo ciclo par, pelo corolário 3.1, $\chi(G) = 2 = \Delta$.

Portanto, vamos supor $\Delta \geq 3$. Por indução em n assumiremos que o resultado é válido para todos os grafos com menos que n vértices e dividiremos a demonstração em dois casos.

Caso 1: G não regular.

Selecionaremos um vértice v tal que $d(v) < \Delta$. Então o grafo $G - v$, ou seja, o grafo obtido excluindo esse vértice v e consequentemente todas arestas conectadas a v, tem menos que n vértices e, pela hipótese de indução, pode ser colorido com $\Delta(G - v) \leq \Delta$ cores, ou seja, $G - v$ é Δ-colorível.

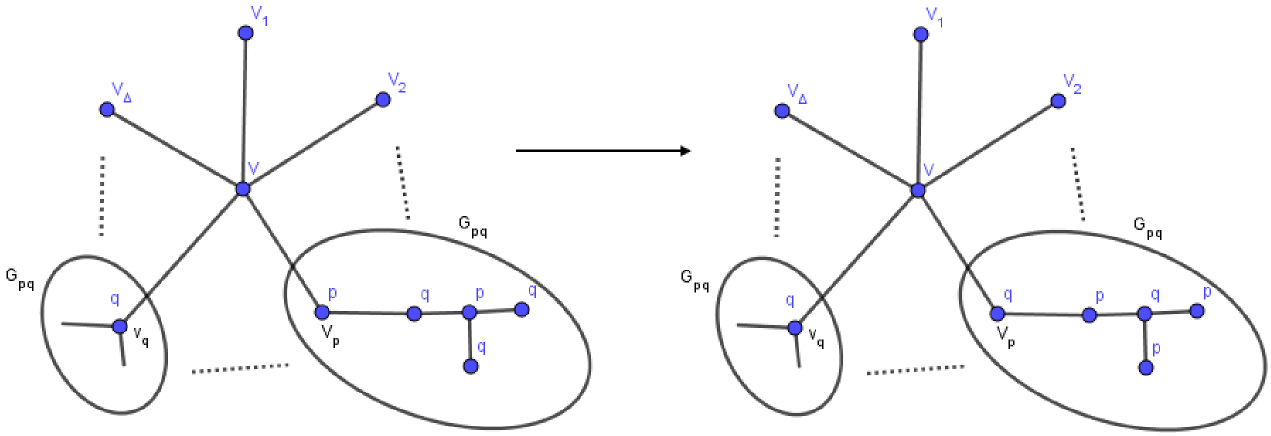
Como $d(v) < \Delta$, haverá pelo menos uma entre as Δ cores utilizadas nos vértices adjacentes a v em G que não foi utilizada em nenhum vértice adjacente a v. Aplicaremos tal cor ao vértice v, então G é Δ-colorível.

Caso 2: G é Δ-regular.

Suponhamos que G não pode ser colorido com Δ cores. Pela hipótese de indução, como $G - v$ possui menos que n vértices, representa um grafo Δ-colorível. Além disso podemos assumir que todos os vértices vizinhos de v recebem exatamente Δ cores, pois caso contrário, poderíamos como no caso anterior, colorir v da cor ainda não utilizada.

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ os vértices vizinhos de v e $Cor(v_p) = p$, ou seja, adotamos por p a cor utilizada para colorir o vértice v_p. Tomemos v_p e v_q, como dois destes vértices vizinhos a v e consideremos a cadeia de Kempe G_{pq}. Se v_p e v_q estão em diferentes componentes conexas de G_{pq} (portanto v_p e v_q não são adjacentes), podemos permutar as cores p e q em todos os vértices da componente que contém v_p e ainda assim teremos uma coloração própria (figura 41). Desta forma a nova coloração obtida, não haverá vértice de cor p adjacente a v, já que os vértices v_p agora estão coloridos com a cor q, e desse modo v pode receber a cor p tornando então G Δ-colorível, o que é um absurdo.

Figura 41 - Recoloração dos vértices da componente conexa G_{pq} que contém o v_p



Fonte: O autor, 2017.

Então somente precisamos considerar o caso em que v_p e v_q estão em uma mesma componente conexa de G_{pq}, para todo p e q, ou seja, que para todo par de vizinhos v_p e v_q de v, existe um caminho P_{pq} de v_p a v_q no qual todos os vértices estão coloridos satisfatoriamente apenas com as cores com p ou q.

Agora mostraremos que $Gpq = Ppq$. Suponha $d(v_p) \geq 2$ em Gpq, em outras palavras, v_p não é o vértice inicial nem final do caminho P_{pq}. Então v_p possui pelo menos dois vizinhos de cor q e, como $d(v_p) = \Delta$ (pois G é um grafo Δ -regular), garantimos que pelo menos uma cor r não será usada (já que a cor q foi utilizada duas vezes em vizinhos a v_p) nos vértices vizinhos a v_p. Então, podemos recolorir v_p com r, possibilitando assim colorir o vértice v com a cor p, obtendo G Δ-colorível, o que contradiz a hipótese. Portanto, temos que v_p (e analogamente v_q) possui grau 1 em G_{pq}.

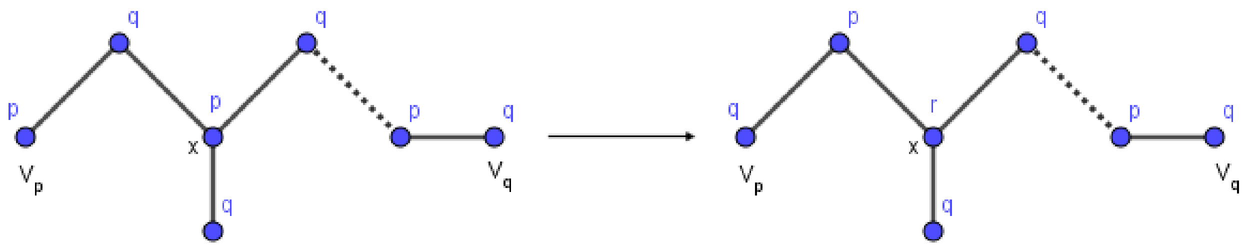
Consideremos então que o vértice v_p tenha o vizinho v_{p1} em G_{pq}, então:

1. $v_{p1} = v_q$
2. v_{p1} tem como único vizinho o vértice v_{p2} em G_{pq} diferente do vértice v_p
3. $d(v_{p1}) > 2$

Para 1, é imediato que $G_{pq} = P_{pq}$. Para 2 e 3, fazemos o mesmo raciocínio sucessivamente, obtendo uma coleção de vértices da forma v_{pk} em G_{pq}. Como $d(v_q) = 1$ algum dos vértices da coleção v_{pk} será seu único vizinho.

Se G_{pq} não é um caminho, existe pelo menos um vértice de grau maior ou igual a três, obtido pelo processo acima. Seja x, dentre estes vértices, o mais próximo em G_{pq} de v_p. Se a $Cor(x) = p$, então x é adjacente a três vértices com cor q e assim deve existir pelo menos uma cor, digamos r, que não foi utilizada para colorir os vizinhos de x. Podemos então recolorir v_p com a cor q, v_{p1} com a cor p, v_{p2} com a cor $q, \dots, x$ com a cor r e v com a cor p (Figura 42), tornando o grafo G Δ-colorível, o que é um absurdo. Para o caso $Cor(x) = q$ o raciocínio é análogo. Portanto G_{pq} deve ser um caminho de v_p a v_q.

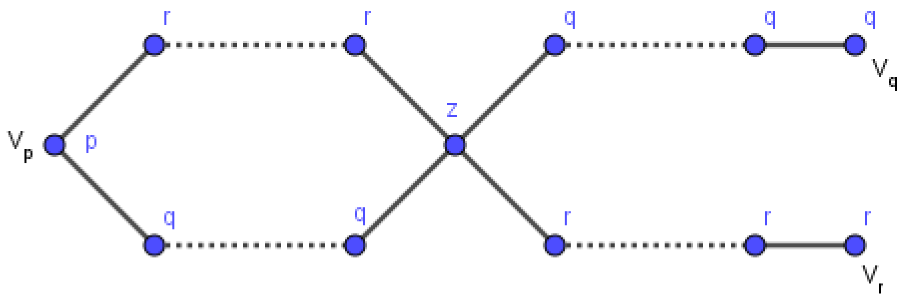
Figura 42 - Recoloração dos vértices da componente G_{pq}que não é um caminho



Fonte: O autor, 2017.

Mostraremos agora que duas cadeias G_{pq} e G_{pr} e $r \neq q$ interceptam-se apenas em v_p. Suponha que z é um vértice que pertença a ambas as cadeias, G_{pq} e G_{pr}. Então $Cor(z) = p$, pois é a única cor em comum a G_{pq} e G_{pr}. Portanto, a menos $z = v_p$, z tem dois vizinhos coloridos com a cor q e outros dois coloridos com a cor r (Figura 43). Logo, existe uma cor não utilizada nos vértices adjacentes à z e, portanto, é possível recolorir o grafo G como realizado no processo anterior, gerando um absurdo.

Figura 43 - Cadeias de Kemper G_{pq}e G_{pr}



Fonte: O autor, 2017.

Agora suponhamos que dois vértices vizinhos de v, v_p e v_q, são não adjacentes em G. Então eles também são não adjacentes em $G - v$ e o caminho G_{pq} contém um vértice diferente de v_q, digamos y, adjacente a v_p com $Cor(y) = q$. Selecione alguma cor r (diferente das cores p e q) e troque as cores dos vértices da cadeia G_{pr} de modo que v_p receba a cor r. Considere então a cadeia de Kempe para essa nova coloração própria de $G - v$. Assim, G_{pq} é a nova cadeia G'_{rq} e teremos uma outra cadeia G'_{pq} que vai do vértice v_r ao vértice v_q. Então concluímos que $y \in G'_{rq}$, pois é adjacente ao vértice v_p e $y \in G'_{rq}$, pois possui cor q, o que contraria o parágrafo anterior, pois temos duas cadeias de Kempe interceptando-se em um vértice diferente dos extremos.

Então temos que todos vizinhos do vértice v são adjacentes entre si e como v é um vértice qualquer e G, concluímos que G deve ser um grafo completo, o que contradiz a hipótese de que G não pode ser colorido adequadamente com Δ cores. Logo G é Δ-colorível.

Vimos alguns casos específicos de grafos e algumas conclusões que podemos tirar desses casos, a respeito de seu número cromático. Abaixo temos um limitante inferior para um grafo G qualquer.

Analisando o conjunto de vértices em busca de conjuntos independentes e independentes maximais, separando-os em grupos por cores é possível obter um limite inferior para $\chi(G)$. Ao multiplicar o número cromático pelo número de independência, lembrando que número de independência $\alpha(G)$ é a cardinalidade de um subconjunto independente máximo de vértices de G, este resultado de fato não pode ser menor que o número de vértices de G. No "pior dos casos", todos os conjuntos independentes dos vértices possuem a mesma cardinalidade, onde todos são conjuntos independentes maximais, neste caso $\chi(G).\alpha(G) =$ n, assim para qualquer situação temos $\chi(G).\alpha(G) \geq$ n, consequentemente $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

3.2 Coloração de Mapas

Coloração de mapas consiste em colorir as regiões de um determinado mapa, de tal maneira que, regiões adjacentes (ou seja, aqueles que têm fronteira) devem possuir cores distintas. O objetivo principal é determinar uma coloração utilizando o menor número de cores possível com a restrição posta.

Este problema pode ser resolvido associando o mapa a um grafo, onde cada região do mapa corresponde a um vértice e caso haja fronteira entre as regiões, existirá uma aresta conectando os vértices correspondestes a essas regiões. Construído desta forma, todo grafo gerado a partir de um mapa será um grafo planar.

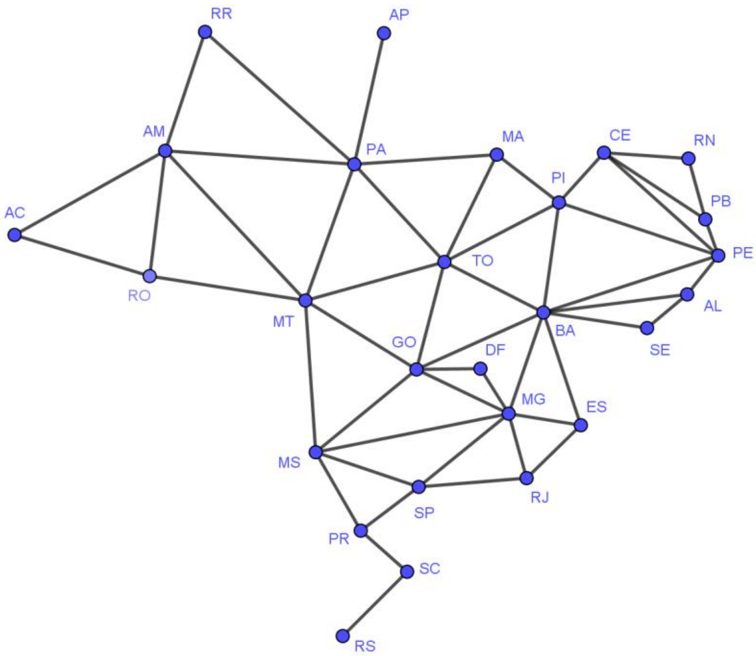
Exemplo 3.4: Determinação de uma coloração para o mapa do Brasil.

Para resolver este problema primeiro vamos associar ao mapa dos estados do Brasil, (figura 44), um grafo correspondente (figura 45), assim o problema de coloração de mapa se torna um problema de coloração de vértices de um grafo e iremos aplicar o algoritmo guloso para coloração de vértices.

Figura 44 - Mapa do Brasil

Fonte: (https://asnovidades.com.br/wp-content/uploads/2010/11/Mapa-do-Braisl-por-estados.jpg)

Figura 45 - Grafo associado aos estados do Brasil



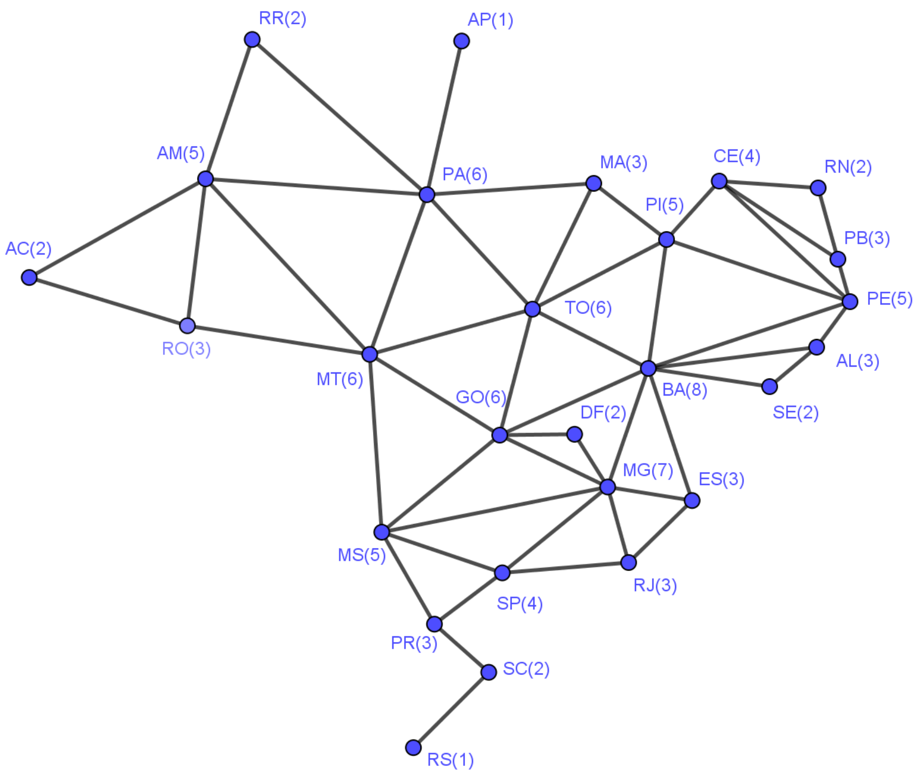
B

Fonte: O autor, 2017.

Iremos aplicar o algoritmo guloso para coloração de vértice ao grafo B acima, a fim de encontrar uma solução para a coloração dos estados do Brasil.

- Ordene o conjunto de vértices V em ordem não crescente de graus:

Figura 46 - Grafo associado aos estados do Brasil com o grau de cada vértice



Fonte: O autor, 2017.

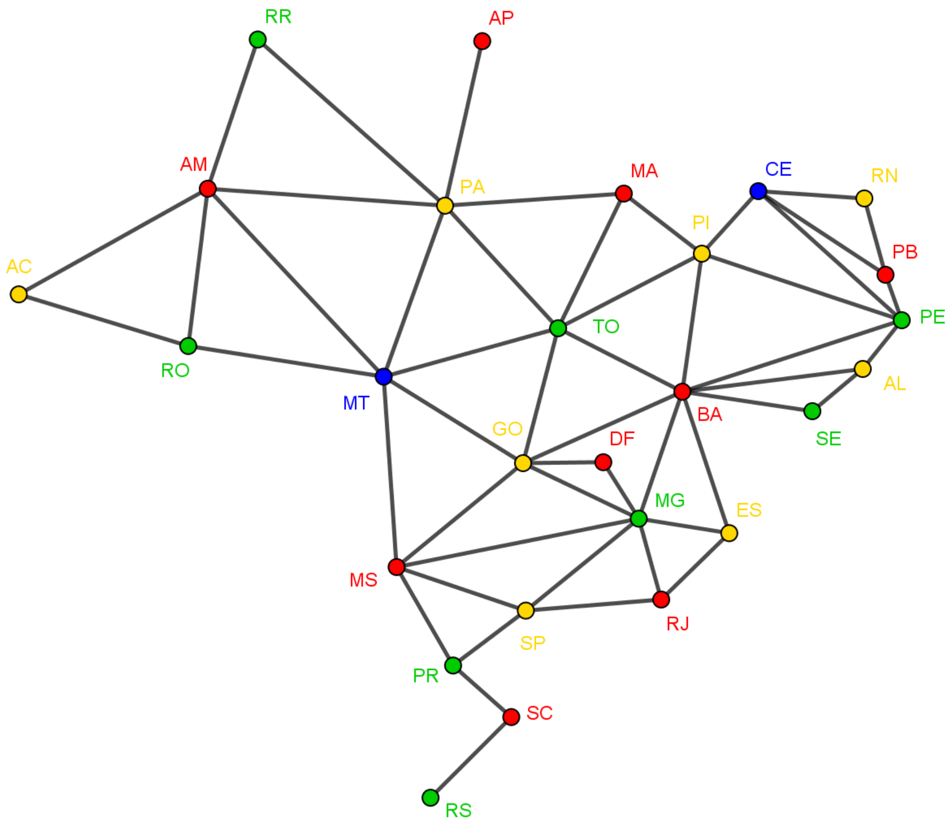
Então temos representada no conjunto $V = \{$BA, MG, TO, MT, PA, GO, PE, PI, AM, MS, SP, CE, RJ, AL, PB, MA, RO, PR, ES, DF, SC, SE, RN, RR, AC, RS, AP$\}$, lista de vértices em ordem não crescente de grau.

- Faça $i = 0$;
- Como $V \neq \emptyset$, segue $i = 1$;
- Crie o conjunto C_1;
- Adicione o primeiro vértice em V, no caso, BA e, em ordem, todos os vértices de V que não causam conflito com nenhum vértice de C_1;

   - $C_1 = \{BA, MT, SP, CE, MA, DF, SC, RR, AC, AP\}$
- Remova todos os vértices adicionado no passo anterior de V;
   - $V =$ {MG, TO, PA, GO, PE, PI, AM, MS, RJ, AL, PB, RO, PR, ES, SE, RN, RS}
- Como $V \neq \emptyset$, segue $i = 2$;
- Crie o conjunto C_2;
- Adicione o primeiro vértice em V, no caso, MG e, em ordem, todos os vértices de V que não causam conflito com nenhum vértice de C_2;
   - $C_2 = \{MG, TO, PE, AM, PR, SE, RN, RS\}$
- Remova todos os vértices adicionado no passo anterior de V;
   - $V =$ {PA, GO, PI, MS, RJ, AL, PB, RO, ES}
- Como $V \neq \emptyset$, segue $i = 3$;
- Crie o conjunto C_3;
- Adicione o primeiro vértice em V, no caso, PA e, em ordem, todos os vértices de V que não causam conflito com nenhum vértice de C_3;
   - $C_3 = \{PA, GO, PI, RJ, AL, PB, RO\}$
- Remova todos os vértices adicionado no passo anterior de V;
   - $V =$ {MS, ES}
- Como $V \neq \emptyset$, segue $i = 4$;
- Crie o conjunto C_4;
- Adicione o primeiro vértice em V, no caso, MS e, em ordem, todos os vértices de V que não causam conflito com nenhum vértice de C_4;
   - $C_4 = \{MS, ES\}$
- Remova todos os vértices adicionado no passo anterior de V;
   - $V = \{ \}$
- Como $V = \emptyset$
- Fim

Assim separamos os vértices em quatro conjuntos independentes. Adotando uma cor para cada um dos conjuntos, temos a solução representada abaixo.

Figura 47 - Uma possível solução para o problema de coloração dos estados do Brasil



Fonte: O autor, 2017.

3.2.1 Teorema das 4 cores

Teorema 3.4 (das 4 cores): Todo mapa pode ser colorido com 4 cores de modo que regiões fronteiriças não sejam coloridas com a mesma cor.

Como pode ser encontrado em Souza (2001), em 1852 Francis Guthrie após refletir sobre o problema de colorir os vários distritos do mapa de Inglaterra de tal modo que dois distritos vizinhos não tivessem a mesma cor, conjecturou que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores. Posteriormente, em 23 de outubro de 1852, o irmão mais novo de Francis Guthrie, Frederick Guthrie, que era aluno de Augustus De Morgan lhe apresentou o problema das 4 cores que viria a ser um dos mais importantes já abordados pela teoria dos grafos. No mesmo dia De Morgan escreveu uma carta a Sir William Rowan Hamilton explicando o problema, esta carta encontra-se hoje nos arquivos do Trinity College em Dublin.

Como citado em Boaventura Netto (2006), em 1879 Alfred Bray Kempe tentou demostrar a “conjectura das 4 cores”, Peter Guthrie Tait em 1880 também divulgou uma “prova”, porém baseada em uma conjectura falsa de que todo grafo planar 3-conexo 3-regular era hamiltoniano que foi derrubada por um contraexemplo apresentado por William Thomas Tutte. Já em 1890, Percy John Heawood veio a mostrar que prova de Kempe estava errada, apesar de não ter encontrado uma demonstração alternativa para o problema, Heawood obteve uma prova válida para 5 cores.

O problema das 4 cores oferece interesse teórico e, por mais de um século, diversos métodos foram desenvolvidos para tentar solucionar o problema. Os desenvolvimentos teóricos trazidos por essas tentativas contribuíram para a teoria dos grafos na primeira metade do século XX como por exemplo Brooks, em 1941, enunciou um teorema fornecendo um limite para o número cromático de um grafo.

Somente em 1976, com base no raciocínio de Kempe e de Birkhoff, que Kenneth Appel e Wolfgang Haken elaborarem uma prova utilizando um computador para testar os muitos casos em que dividiram o problema, está demonstração pode ser encontrada em Kenneth Appel e Wolfgang Haken, em sua obra Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. Illinois Journal of Mathematics (1977) nas páginas 429-490[1].

A solução de Appel e Haken não foi aceita por todos os matemáticos por parte da solução envolver mais de mil horas de uso de computadores e a prova ser de uma complexidade elevada e demasiado longa dificultando uma verificação completa demonstração.

De acordo com Souza (2001), perante a dificuldade de verificar a validade da solução apresentada até então, em 1993, um grupo de matemáticos formado por Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul D. Seymour e Robin Thomas, resolveram provar o teorema de outra forma e vieram a obter uma demonstração simplificada do teorema das 4 cores, apresentada por Paul Seymor em agosto de 1994, no Congresso Internacional de Matemática. Ainda necessitando do uso de computador, eles conseguiram reduzir a complexidade do problema sendo viável uma verificação. Porém, ainda hoje, continua em aberto se é possível encontrar uma demonstração para o teorema das 4 cores que não necessite de processamento computacional.

[1] Disponível em: <https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ijm/1256049011> Acesso em: 04 fev. 2018.

3.2.2 Teorema das 5 cores

Lema 3.1: Em um grafo conexo e planar $G = (V, E)$ com $|V| = n$ e $|E| = m$, há pelo menos um vértice v tal que $d(v) = 5$.

Demonstração. Se G é planar então $3n - m \geq 6$ (colorário 2.1), ou seja, $m \leq 3n - 6$ (1).

Suponha, por absurdo, que todos os vértices de G tenham grau maior ou igual a 6. Assim, $\sum d(vi) \geq 6n \longrightarrow 2m \geq 6n \longrightarrow m \geq 3n$, o que contradiz (1), portanto, pelo menos um vértice de G tem grau menor ou igual a 5.

Teorema 3.5 (das 5 cores): Se $G(V, E)$ é um grafo planar com $|V| = n$ e $|E| = m$ então $\chi(G) \leq 5$.

Demonstração. Por indução sobre o número n de vértices do grafo G.

(i) Caso base, $n = 1$.
O grafo com um vértice tem, trivialmente, $\chi(G) = 1 \leq 5$.

(ii) Hipótese indutiva. Suponha que todo grafo conexo e planar com menos do que n vértice tem $\chi(G) \leq 5$.

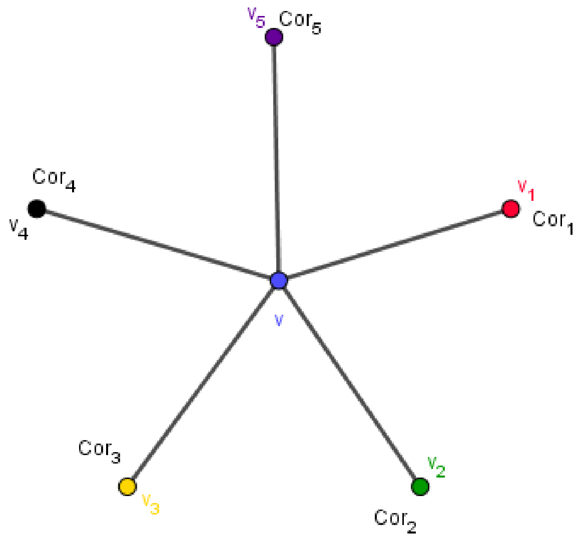
Seja G um grafo conexo planar com n vértices. Pelo lema 3.1 acima, sabe-se que G possui pelo menos um vértice v de grau menor ou igual a 5. Seja $G'(V', E')$ tal que $G' = G - \{v\}$. Assim, $|V'| = n - 1$ e, portanto, pela hipótese indutiva, G' tem número cromático menor ou igual a 5.

Mostraremos agora que é possível colorir G (ou seja, escolher uma cor para colorir o vértice v retirado) utilizando uma das 5 cores utilizadas na coloração de G'.

- Se os vértices adjacentes a v não utilizam todas as cinco cores na coloração dos vértices de G, então existe pelo menos uma entre as cinco cores disponíveis que podemos usar para colorir o vértice v e, portanto, o grafo G é 5-colorível, $\chi(G) = 1 \leq 5$.

- Se os vértices adjacentes a v utilizam todas as cinco cores (figura 48) então existe em G vértices v_1e v_3, por exemplo, adjacentes a v e coloridos cada um com uma cor (1 e 3). Considere a cadeia de Kempe G_{13} de G:

Figura 48 - Grafo explicando a situação descrita na demonstração



Fonte: O autor, 2018

1. Se v_1 e v_3 estiverem em componentes conexas diferentes de G_{13} então podemos trocar as cores 1 e 3 em uma dessas componentes e assim, v_1 e v_3 ficarão com a mesma cor e a outra cor fica disponível para colorir o vértice v. Assim, não é utilizada nenhuma nova cor na coloração de G e, portanto, o grafo G é 5-colorível, $\chi(G) = 1 \leq 5$.

2. Se v_1 e v_3 estiverem na mesma componente conexa em G_{13} então não é possível colorir v_1 e v_3 com a mesma cor, ou seja, existe um caminho em G, com início em v_1 e fim em v_3 (que não passa por v) colorido com duas cores (1 e 3) alternadas. Como G é planar, esse caminho limita a uma parte do plano, uma união de faces, arestas e vértices do grafo G. Essa região contém (no exemplo) o vértice v_2 colorido com a Cor_2; mas então podemos trocar a Cor_2 com a Cor_4 nos vértices que ficam no caminho interior a região limitada (pois não existirá nenhum caminho de Kempe G_{24} com uma componente conexa iniciando em v_2 e terminando em v_4 em que as cores 2 e 4 estejam alternadas, visto que o grafo G é planar), deixando a Cor_2 disponível para v. Portanto, $\chi(G) \leq 5$.

O raciocínio desenvolvido acima, usando os vértices v_1 e v_3 da figura 48 é análogo para qualquer escolha de dois vértices distintos entre v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5.

4 ATIVIDADES

O presente trabalho se propôs a construir uma série de atividades que envolvam conceitos de coloração de grafos e possam ser aplicadas na educação básica. O objetivo é promover no alunado o desenvolvimento do raciocínio lógico, a criação de estratégias para solução de problemas, além de incrementar e aplicar o pensamento algorítmico.

A seguir iremos descrever as atividades. Todo o material criado para esse propósito está disponível em anexo para alteração, adaptação ou utilização similar de qualquer professor que tenha interesse nesta abordagem.

Para algumas atividades foi elaborado uma apresentação de PowerPoint para auxiliar o professor durante a aplicação, esse PowerPoint pode ser solicitado através do e-mail viniciustpl@gmail.com.

Atividade 1: Desafio Chroma 4

Objetivo:

- Apresentar o conceito de regiões adjacentes e um primeiro contato com problema de coloração através do jogo Chroma 4.

Informações Adicionais:

Chroma 4 é um jogo da editora Mitra, que possui uma linha de jogos e brinquedos educativos, sua proposta original é um desafio individual ou em equipe, mas também possui regras para um desafio competitivo. No trabalho utilizamos como um desafio em equipe para que os alunos colaborassem em conjunto para encontrar a solução.

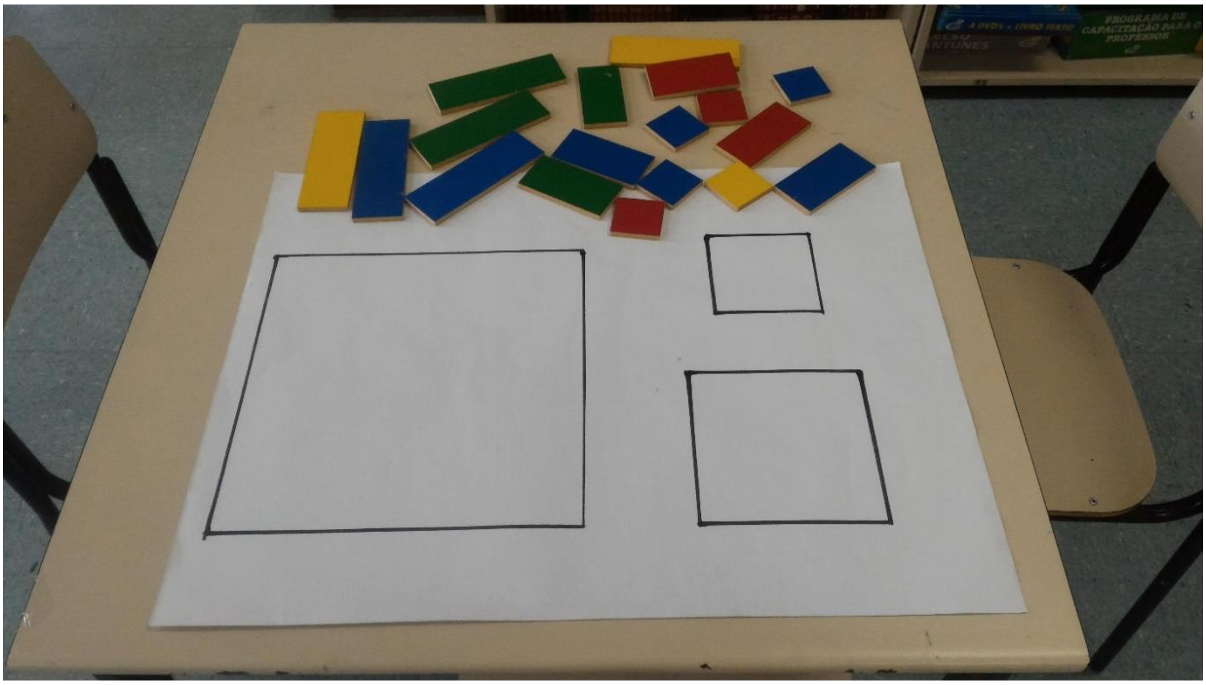
Chroma 4 é composto por 6 peças coloridas de $5x5\ cm$ (1 amarela, 3 azuis e 2 vermelhas), 6 peças coloridas de $5x10\ cm$ (2 amarelas, 2 azuis e 2 verdes), 6 peças coloridas de $5x15\ cm$ (2 amarelas, 2 azuis e 2 verdes) e tem como objetivo montar um quadrado de tamanho $30x30$ cm, de forma que peças adjacentes devem possuir cores diferentes e o jogo inclui que peças postas em diagonal também devem possuir cores diferentes.

Figura 49 - Componentes do jogo Chroma 4

Fonte: O autor, 2017.

Na nossa atividade foram desenhadas molduras em cartolina de tamanhos $10x10\ cm$ e $15x15\ cm$ além de uma com $30x30\ cm$, para que eles entendessem melhor o problema antes de tentarem o desafio maior. Além disso, para efeito de simplificação em função do público alvo, não consideramos peças na diagonal como adjacentes.

Figura 50 - Foto da disposição da mesa para realização da atividade 1



Fonte: O autor, 2017.

Público Alvo: Alunos da educação básica

Tempo Estimado: 15 minutos por grupo

Material:

- Jogo Chroma 4;
- Cartolina;
- Mesa de comprimento e largura maiores que 30 centímetros.

Metodologia:

- Construir na cartolina três molduras de $10x10\ cm$, $15x15\ cm$ e $30x30\ cm$;
- Colocar a cartolina aberta sobre a mesa juntamente com as peças;
- Separar a turma em grupos (sugestão: 3 alunos);
- Explicar as regras;
- Solicitar que resolvam primeiro os desafios dos quadrados de medidas $10x10\ cm$ e $15x15\ cm$;

- Permitir que os alunos tentem o quadrado maior de $30x30\ cm$, somente após os completarem o item anterior;
- Determinar um tempo limite para completar o desafio maior (sugestão: 10 min);
- Caso completem a tarefa e ainda tiverem tempo disponível, solicitar que refaçam o desafio do quadrado $30x30\ cm$, mas desta vez sem a moldura.

Atividade 2: Colorindo as Regiões do Brasil

Esta atividade foi dividida em duas partes e propõe fazer um primeiro contato dos alunos com a estrutura de grafos, apresentando-lhes alguns conceitos básicos e ensinando-os a associarem um grafo a um mapa.

Atividade 2 – Parte 1

Objetivo:

- Apresentar aos alunos uma das regiões do Brasil para que identifique a sua região e liste seus estados;
- Encontrar uma solução de coloração para a região que lhe foi atribuída sem exigir ainda que seja utilizado o mínimo de cores possível.

Público Alvo: Alunos da educação básica

Tempo Estimado: 25 minutos

Lista de Material:

- Folhas da atividade impressas;
- Lápis de cor;
- Mapa com as regiões do Brasil destacadas.

Metodologia:

- Separar a turma em duplas;
- Abrir um mapa do Brasil com suas regiões em destaque, para consulta dos alunos;
- Distribuir a cada aluno uma única das duas folhas da “Atividade 2 – Parte 1” (apêndice B e apêndice C);

- Solicitar que identifiquem a região correspondente ao mapa;
- Solicitar que listem os estados que compunha sua região;
- Distribuir lápis de cor para as duplas;
- Pedir que coloram o mapa de forma que regiões adjacentes sempre possuam cores diferentes.

Observação: Fizemos a atividade em dupla para que a dupla pudesse trocar informação e compartilhar o lápis de cor (encontrava-se em quantidade limitada).

Após a atividade, analisamos os resultados obtidos, mostrando que um mesmo mapa possui uma variedade de formas de colorir, e dando ênfase que algumas podem utilizar mais cores e outras menos. É importante que nessa etapa tenha tantos lápis de cor quanto o de regiões, para que caso um aluno deseje resolver com a solução “menos eficiente”, ou seja, pintar cada região com uma cor diferente, ele possa. O objetivo nessa etapa é deixar a livre solução do problema para os alunos e espera-se que após encontrarem a solução óbvia, eles naturalmente tentem utilizar o menor número de cores.

Atividade 2 – Parte 2

Objetivo:

- Apresentar ao aluno a estrutura de grafos e seus elementos básicos como vértices, arestas e vértices adjacentes;
- Associar um grafo a algumas regiões do Brasil com vértices sendo os estados e arestas ligando os vértices que representam estados fronteiriços.

Público Alvo: Alunos da educação básica

Tempo Estimado: 50 minutos

Lista de Material:

- Folhas da atividade impressas;
- Lápis de cor;
- Discos de EVA (acetato-vinilo de etileno);
- Meio para reproduzir slide. (todos os slides serão disponibilizados, basta entrar em contato através do email viniciustpl@gmail.com, um “print” dos mesmos encontram-se nos anexos.)

Metodologia:

- Separar os alunos em grupos;
- Nos Slides;
  - Apresentar a estrutura de grafos; (slide 2, apêndice N)
  - Mostrar ao menos um exemplo de grafo associado a algumas regiões do Brasil, com estados como vértices e arestas ligando os vértices que representam estados fronteiriços; (slide 2, apêndice N)
  - Mostrar ao menos um exemplo de coloração menos eficiente e mais eficiente (nesse caso mais eficiente é utilizando menos cores), para regiões do Brasil; (slide 3 e 4, apêndice O e apêndice P respectivamente)
- Distribuir para os alunos uma única folha das duas disponíveis referente a “Atividade 2 – Parte 2” (apêndice E e apêndice F);
- Solicitar que façam o grafo associado a região em sua lista, ressaltando que ao construir os vértices façam de forma que seja possível pintar seu interior posteriormente;
- Distribuir discos de EVA;
- Solicitar que coloquem os discos de EVA sobre os vértices, indicando sua coloração para o grafo, de forma que utilize o mínimo de cores possíveis;
- Distribuir os lápis de cor;
- Solicitar que façam a devida coloração já marcada pelos discos de EVA;
- Após a atividade mostrar os grafos associados aos mapas das regiões propostas na atividade;
- Mostrar uma solução ótima de coloração para a atividade que lhes foi entregue;

Vale a pena ressaltar que um mesmo mapa ou grafo pode ser colorido de diversas formas, mas como nesta atividade foi requisitado uma solução ótima, para os grafos em questão tanto para a região norte como para região sudoeste a solução ótima deles apresentam três cores.

Atividade 3: Construindo e Colorindo Grafos

Objetivo:

- Praticar a construção de grafos associados a uma determinada região, com vértices sendo as áreas desta região e arestas regiões adjacentes;
- Encontrar solução ótima para problemas de coloração dos vértices deste grafo;

- Enunciar o teorema das quatro cores e mostrar que um mesmo grafo pode ser desenhado de diferentes formas.

Público Alvo: 8° e 9° ano

Tempo Estimado: 60 minutos

Lista de Material:

- Folhas da atividade impressas;
- Lápis de cor;
- Discos de EVA (acetato-vinilo de etileno);

Metodologia:

- Separar os alunos em grupos;
- Enunciar o “problema das quatro cores”;
- Ressaltar que o teorema das 4 cores é válido para mapas e regiões no plano consequentemente válido para grafos associados a mapas e regiões no plano, mas não necessariamente para todo grafo;
- Definir grafo planar;
- Enunciar que todo grafo associado a um mapa ou região no plano é um grafo planar;
- Distribuir para os alunos uma única folha das duas disponíveis referente a “Atividade 3” (apêndice H e apêndice I);
- Solicitar que façam os grafos associados aos mapas de sua lista, ressaltando que ao construir os vértices façam de forma que seja possível pintar seu interior posteriormente;
- Distribuir 4 cores de discos de EVA por grupo;
- Solicitar que coloquem os discos de EVA sobre os vértices, indicando sua coloração para o grafo, de forma que utilize o mínimo de cores possíveis;
- Distribuir os lápis de cor;
- Solicitar que façam a devida coloração já marcada pelos discos de EVA;
- Após os alunos completarem a atividade:
    - Discutir a solução para os dois primeiros mapas de cada folha utilizando resultados obtidos pelos alunos como exemplo;

- Mostrar com os resultados dos alunos que grafos visualmente diferentes são iguais desde que apresentem o mesmo número de vértices com exatamente os mesmos graus.
- Mostrar os grafos associados aos mapas que possuam $\chi(G) = 4$;
- Pedir para que os alunos comparem seus resultados com os grafos apresentados pelo professor;
- Mostrar uma solução ótima de coloração para os grafos associados aos mapas com $\chi(G) = 4$.

Atividade 4: Problema da Rotação de Cultura

Objetivo:

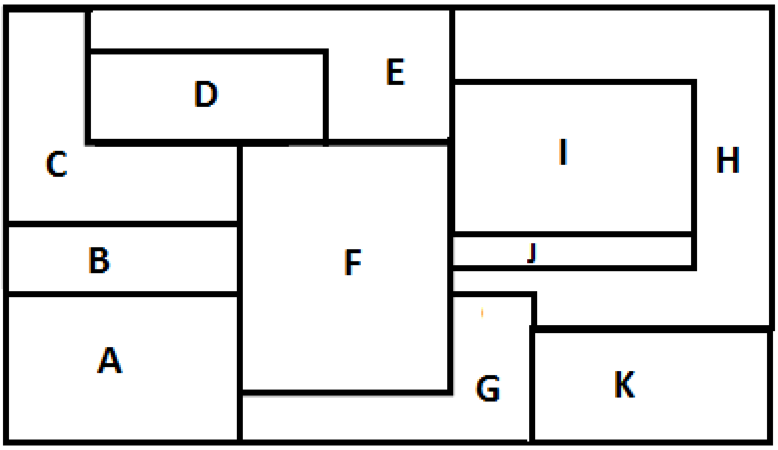
- Apresentar um problema mais desafiador para mostrar para os alunos a utilidade do uso de grafos e as vantagens de se ter uma estratégia em situações mais complexas;
- Definir grau de um vértice;
- Explicar o processo do "algoritmo guloso";
- Propor o problema abaixo.

Problema da Rotação de Cultura:

Numa determinada região era adotado o sistema de rotação de cultura, uma técnica agrícola que tem como objetivo conservar o solo diminuindo seu desgaste, que consiste na alternância das espécies de vegetais plantados.

Os produtores locais desejavam plantar algodão, feijão, soja e girassol, com uma restrição. Para que as fronteiras ficassem bem delineadas, regiões adjacentes não deveriam ter a mesma espécie de vegetal plantado.

Figura 51 - Região do problema de “Rotação de Cultura”



Fonte: O autor, 2017.

Público Alvo: 8° e 9° anos

Tempo Estimado: 75 minutos

Lista de Material:

- Folhas da atividade impressas;
- Lápis de cor;
- Discos de EVA (acetato-vinilo de etileno);
- Meio para reproduzir slide. (todos os slides serão disponibilizados, basta entrar em contato através do email viniciustpl@gmail.com, um “print” dos mesmos encontram-se nos anexos.)

Metodologia:

- Separar os alunos em grupos
- Nos Slides
    - Definir grau do vértice; (slide 6 e 7 para exemplificar, apêndice R e apêndice S respectivamente)
    - Apresentar o algoritmo guloso; (slide 7 e 8, apêndice S e apêndice T respectivamente)
    - Apresentar a solução, passo a passo, para o problema de coloração do mapa do Brasil através do algoritmo guloso; (slide 9, apêndice U)

    - Ressaltar que o algoritmo guloso não garante a solução ótima, mas garante uma boa solução e que pode ser a ótima;
- Distribuir uma única folha para cada aluno referente a “Atividade 4” (apêndice K);
- Solicitar que construam o grafo associado ao mapa do problema;
- Distribuir 4 cores de discos de EVA por dupla;
- Solicitar que sigam o algoritmo guloso;
    - Enumerar cada vértice com seu respectivo grau;
    - Construir uma lista não crescente a partir do grau dos vértices;
    - Com uma única cor de discos de EVA, marcar os vértices seguindo a ordem da lista até não ter nenhum outro vértice possível;
    - Repetir o item anterior com outra cor até o mapa inteiro estar marcado;
- Distribuir os lápis de cor;
- Solicitar que façam a devida coloração já marcada pelos discos de EVA;
- Apresentar uma solução para o problema “rotação de culturas”.

5 APLICAÇÃO

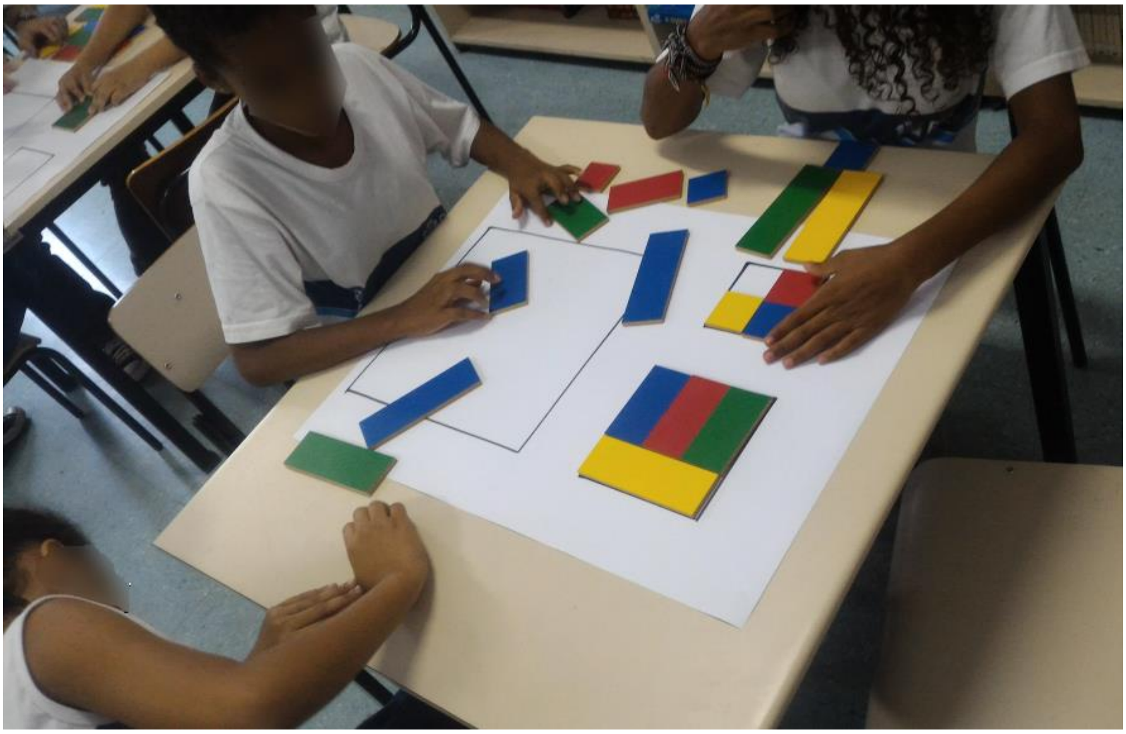
5.1 Atividade 1 – Chroma 4

Foi possível realizar a aplicação com duas turmas de realidades bem distintas, ambas aplicações ocorreram no final do ano letivo de 2017 com caráter voluntário.

A primeira turma a ter a atividade aplicada foi um 6° ano de uma escola da prefeitura do Rio com 26 alunos inscritos, sendo 2 alunos integrados, que possuem necessidades educacionais especiais de alunos com deficiência, transtornos globais de desenvolvimento ou altas habilidades. Nesse sexto ano foi realizado somente a atividade 1.

A atividade 1 foi montada na biblioteca do colégio (figura 50) e de dois em dois grupos com três alunos cada foram sendo convidados para realizar a atividade onde ouviam a explicação, utilizavam como "treino" os quadrados menores (figura 52). Depois de compreenderem as restrições do problema e realizarem testes com os quadrados menores, chegava a hora do desafio de completar o quadrado maior com tempo limite de 10 minutos.

Figura 52 - "Treino" para o desafio da atividade 1

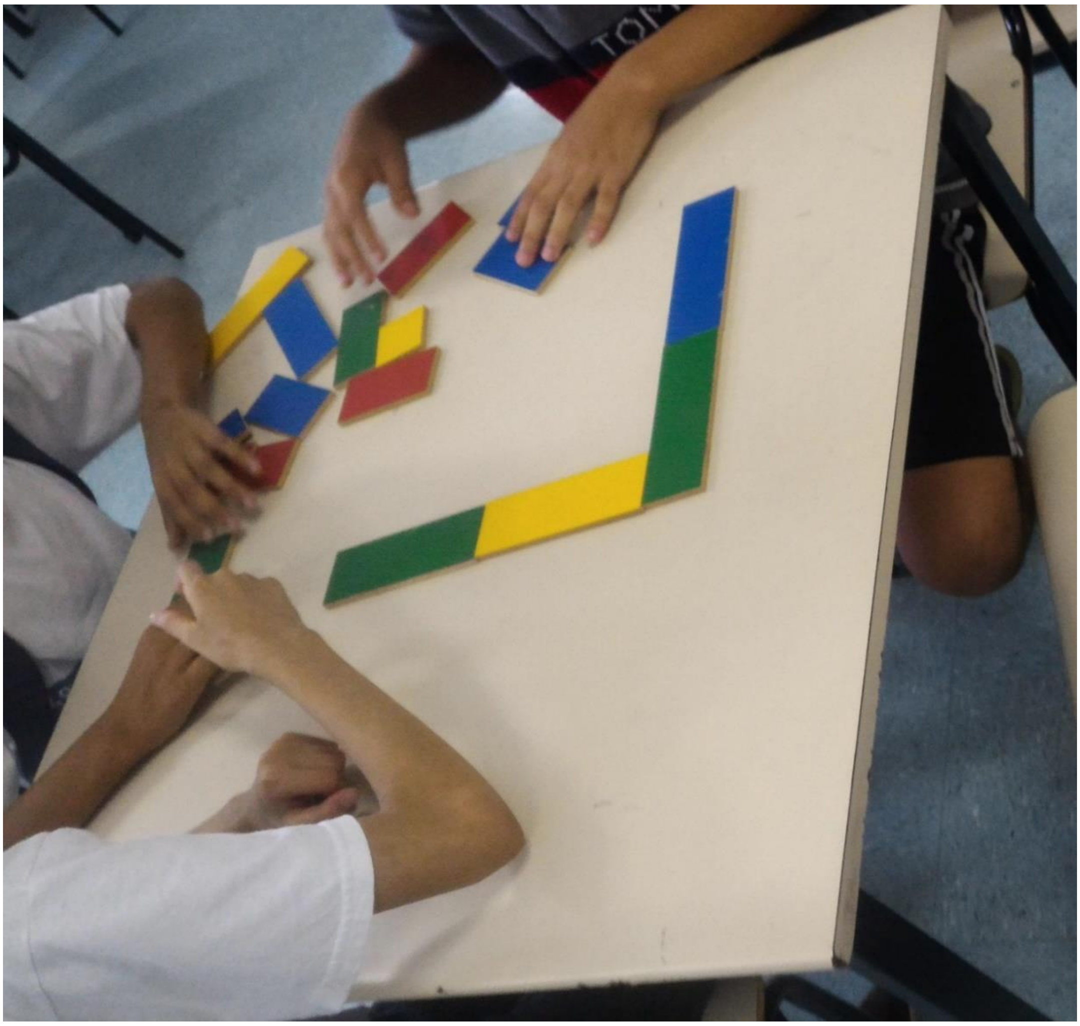


Fonte: O autor, 2017.

Todos os alunos compreenderam o objetivo e as restrições e conseguiram finalizar o desafio utilizando a moldura sem muitas dificuldades. Foi interessante verificar durante a experimentação as estratégias do grupo para corrigir os conflitos que surgiam durante a montagem. De todos os grupos que realizaram a atividade (oito grupos ao todo), apenas dois desistiram de concertar o conflito e resolveram começar desde o início novamente, mas todos completaram dentro do prazo limite.

Concluída essa etapa, o desafio foi novamente proposto, porém, desta vez, sem a moldura para guia-los. Apenas um grupo conseguiu resolver esta etapa sem problemas, todos os demais tiveram bastante dificuldade. O maior problema encontrado foi o de montar um quadrado $30x30cm$, todos tentaram fazer uma moldura inicial com as próprias peças, limitando a região que deveriam preencher, porem a maioria completava a base do quadrado com duas peças de $15x5cm$ e ao montar a altura também com duas peças de $15x5cm$, as colocavam acima da base e não percebiam inicialmente que com os $5cm$ da base a altura formada era de $35cm$ e não os $30cm$ desejados (figura 53). Mesmo com toda essa dificuldade, apenas um grupo não concluiu o desafio.

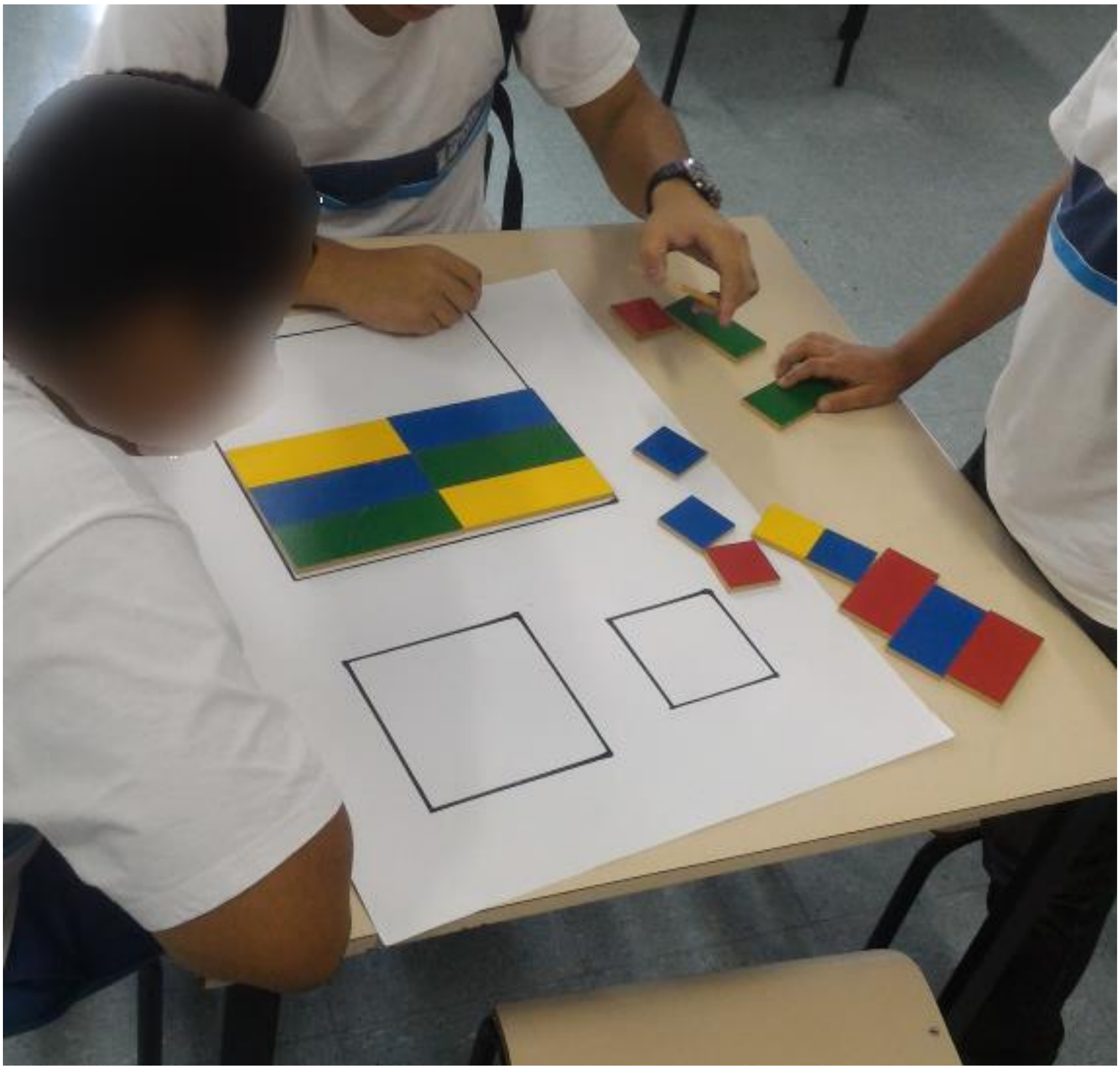
Figura 53 - Contorno 30x35cm, erro mais comum da segunda etapa da atividade 1



Fonte: O autor, 2017.

O destaque desta atividade foi o grupo que continha os dois alunos integrados, que se saíram muito bem, dando ótimas ideias para resolver os conflitos e foi justamente o grupo que resolveu sem muitos problemas o desafio sem a moldura da cartolina.

Figura 54 - Grupo com os alunos integrados

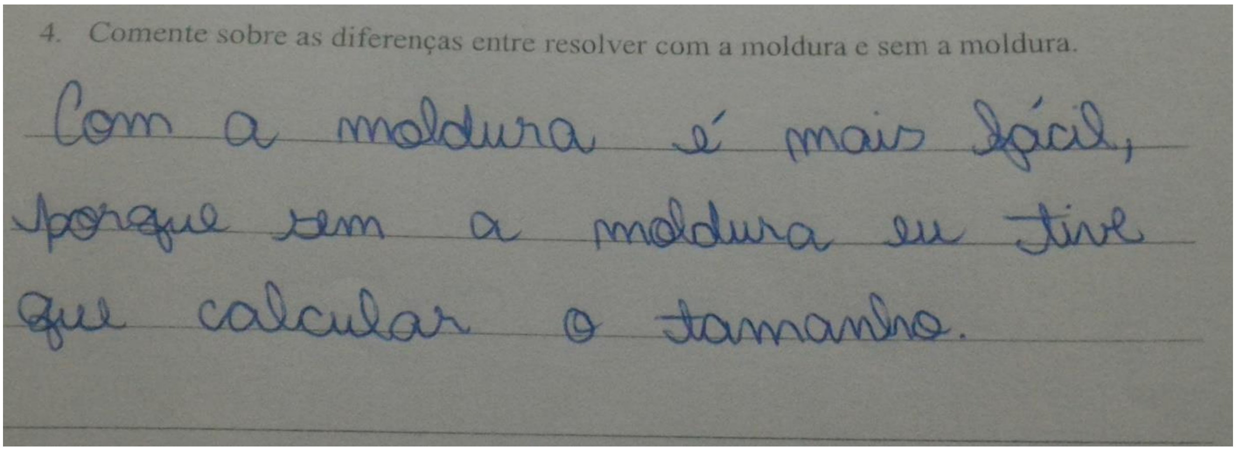


Fonte: O autor, 2017.

A segunda turma na qual foi aplicada as atividades foi uma turma de 9° ano de um colégio da rede estadual localizado em Campos Elísios, com 42 alunos matriculados. As atividades foram realizadas na sala de vídeo em dois dias distintos. No primeiro dia, as atividades 1 e 2 e, no segundo dia, as atividades 3 e 4. Ao todo 22 alunos realizaram a primeira etapa, mas 8 não retornaram para o segundo dia de tarefa. Isso se deve ao fato de ser uma atividade voluntária e somente ter sido possível sua aplicação após as provas e período de recuperação do 4° bimestre.

A atividade 1 foi resolvida com bastante tranquilidade pelos alunos, todos conseguiram resolver tanto o desafio com moldura como sem moldura, e nos questionários foi quase unânime o fato do desafio sem moldura trazer maiores dificuldades.

Figura 55 - Questionário atividade 1, pergunta 4, respondido por um aluno



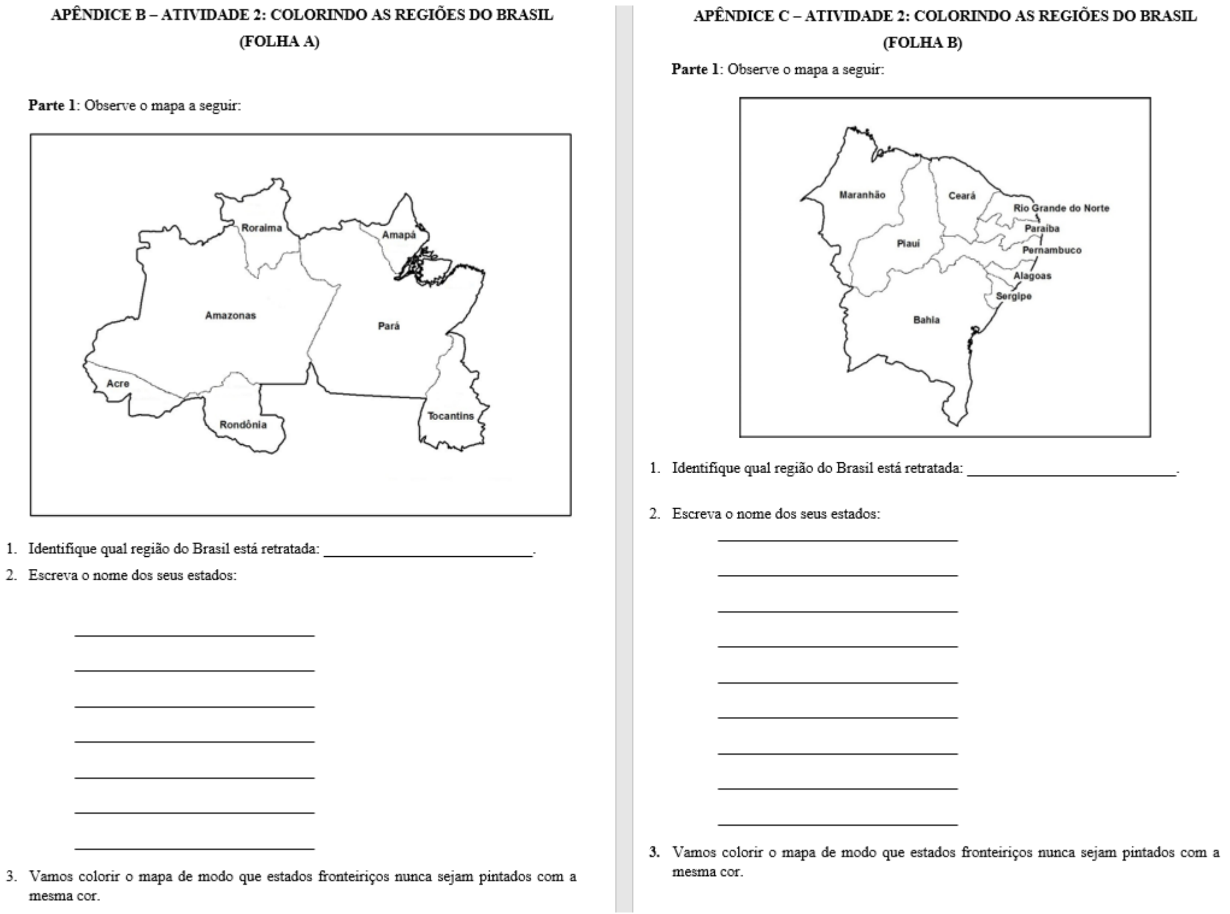
Fonte: O autor, 2017.

Em ambas as turmas o resultado da primeira atividade foi muito satisfatório, os alunos gostaram da atividade, a maioria se sentiu desafiado e motivado para resolver algo prático e interagiram bastante uns com os outros para encontrar a solução.

5.2 Atividade 2 – Colorindo as Regiões do Brasil

Atividade 2 parte 1 (figura 56) é referente aos apêndices B, C e seu questionário no apêndice D.

Figura 56 - Atividade 2 - Parte 1



APÊNDICE B – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL (FOLHA A)

Parte 1: Observe o mapa a seguir:

1. Identifique qual região do Brasil está retratada: ________________________.
2. Escreva o nome dos seus estados:
3. Vamos colorir o mapa de modo que estados fronteiriços nunca sejam pintados com a mesma cor.

APÊNDICE C – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL (FOLHA B)

Parte 1: Observe o mapa a seguir:

1. Identifique qual região do Brasil está retratada: ________________________.
2. Escreva o nome dos seus estados:
3. Vamos colorir o mapa de modo que estados fronteiriços nunca sejam pintados com a mesma cor.

Fonte: O autor, 2017.

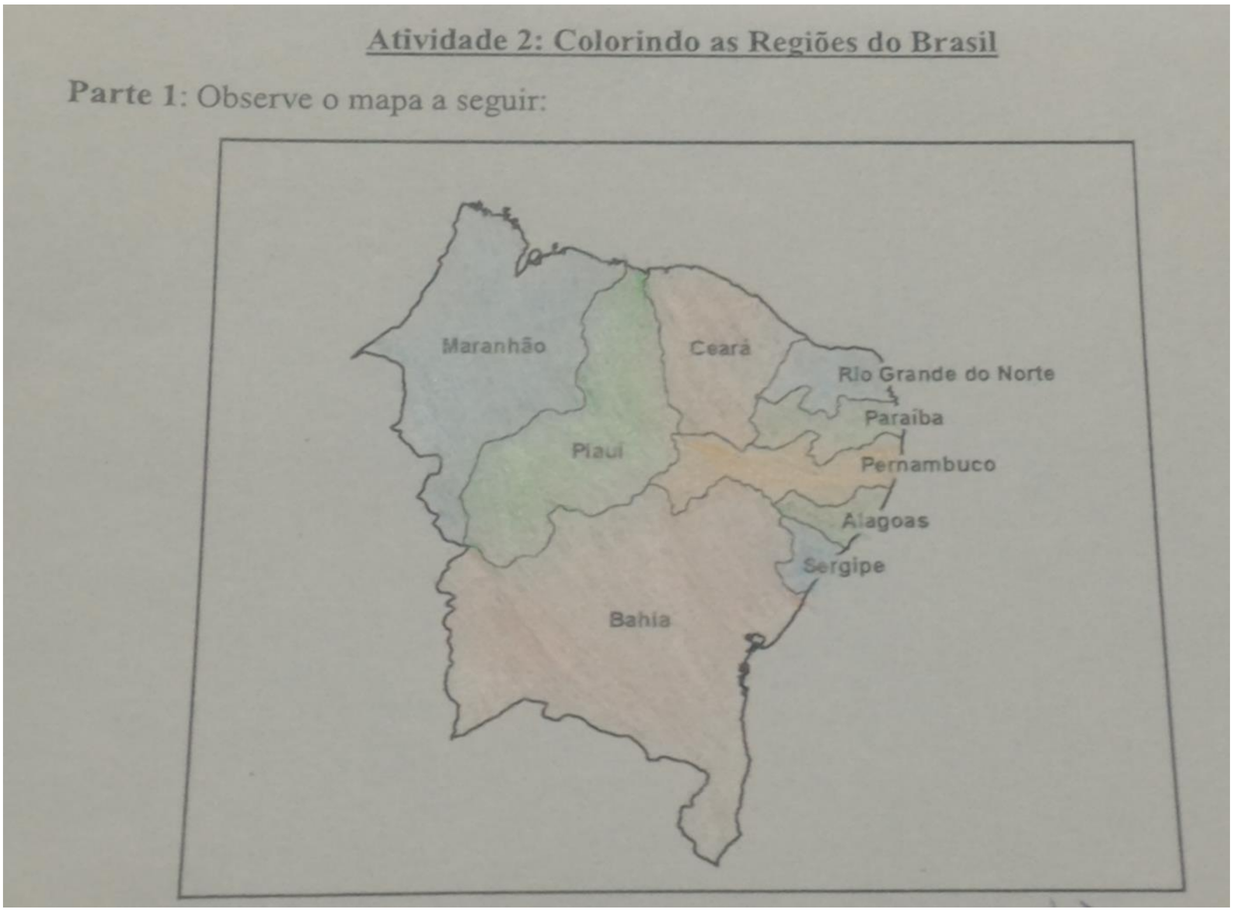
Na atividade 2, parte 1, os alunos foram separados em grupos de quatro. Alguns apresentaram dificuldade em visualizar o mapa do Brasil separado por regiões que estava projetado na parede e associar a sua respectiva região do Brasil, mas com a ajuda dos colegas do mesmo grupo, foram capazes de identificar e responder corretamente.

Não houve muitos problemas para identificar os estados, o objetivo era reforçar cada um dos estados, para na próxima atividade facilitar a associação dos estados com vértices.

Na coloração a maioria utilizou o máximo de cores possíveis, alguns poucos durante a atividade vieram questionar se poderiam repetir uma determinada cor, já que a região em questão não estaria mais adjacente a outra com a mesma cor (figura 57).

Dos 22 alunos participantes todos obtiveram uma coloração correta, onde 10 repetiam cores e desses a maioria realizou uma 4-coloração mas nenhum fez uma coloração ótima que para a questão seria uma 3-coloração, lembrando que durante esta etapa nada foi dito sobre realizar uma coloração com o mínimo de cores possíveis, apesar de alguns terem naturalmente tentado concluir a tarefa com está restrição.

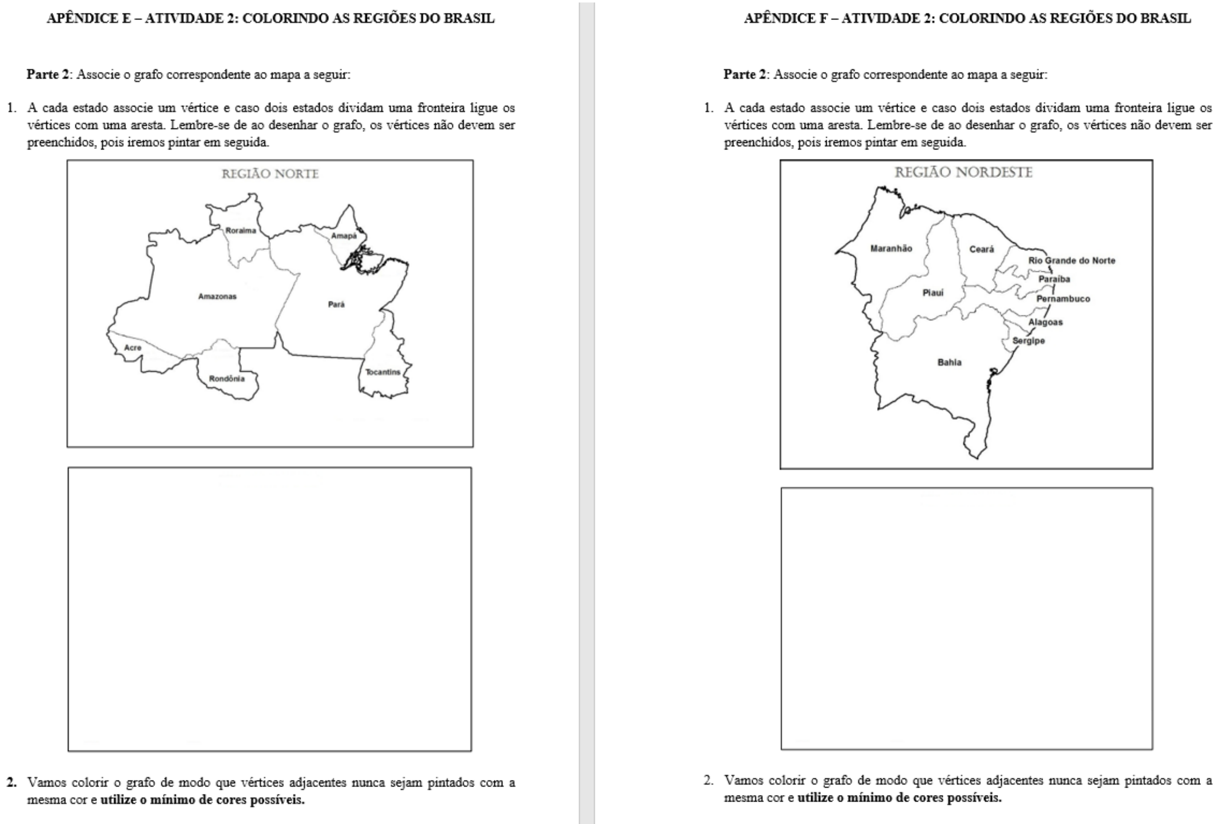
Figura 57 - Um exemplo de coloração obtida na Atividade 2 – Parte 1



Fonte: O autor, 2017.

A atividade 2 parte 2 (figura 58) é referente aos apêndices E e F e seu questionário ao apêndice G.

Figura 58 - Atividade 2 - Parte 2



APÊNDICE E – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL

Parte 2: Associe o grafo correspondente ao mapa a seguir:

1. A cada estado associe um vértice e caso dois estados dividam uma fronteira ligue os vértices com uma aresta. Lembre-se de ao desenhar o grafo, os vértices não devem ser preenchidos, pois iremos pintar em seguida.

2. Vamos colorir o grafo de modo que vértices adjacentes nunca sejam pintados com a mesma cor e **utilize o mínimo de cores possíveis.**

APÊNDICE F – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL

Parte 2: Associe o grafo correspondente ao mapa a seguir:

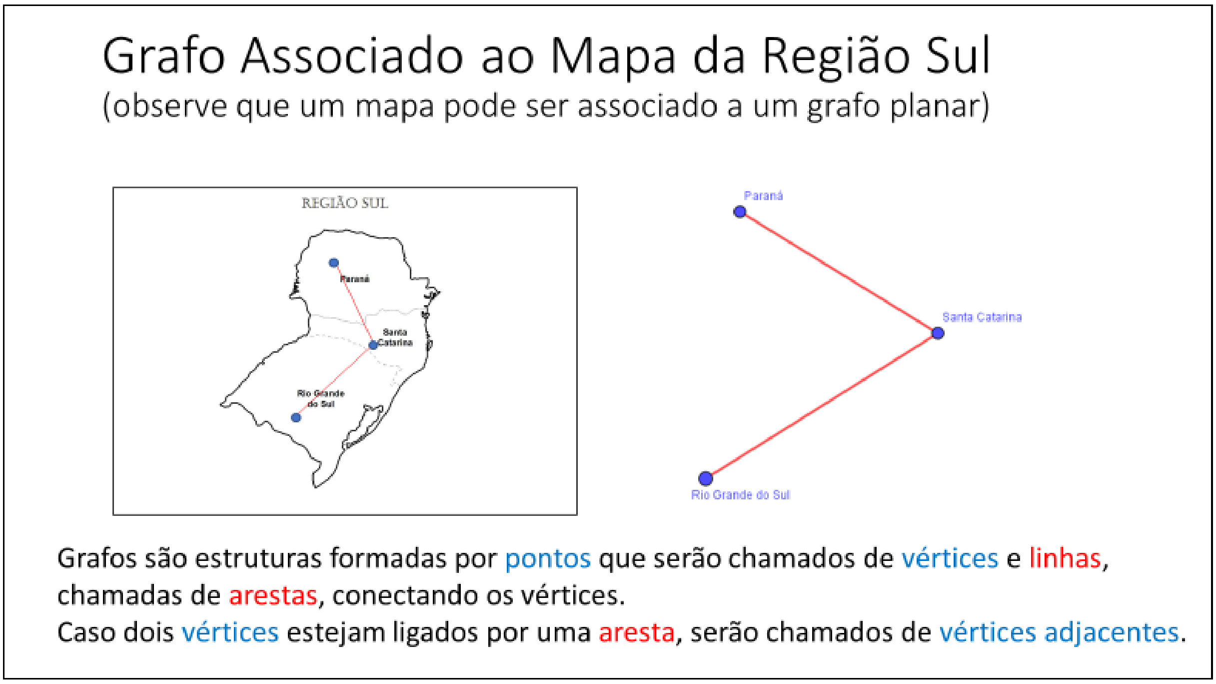
1. A cada estado associe um vértice e caso dois estados dividam uma fronteira ligue os vértices com uma aresta. Lembre-se de ao desenhar o grafo, os vértices não devem ser preenchidos, pois iremos pintar em seguida.

2. Vamos colorir o grafo de modo que vértices adjacentes nunca sejam pintados com a mesma cor e **utilize o mínimo de cores possíveis.**

Fonte: O autor, 2017.

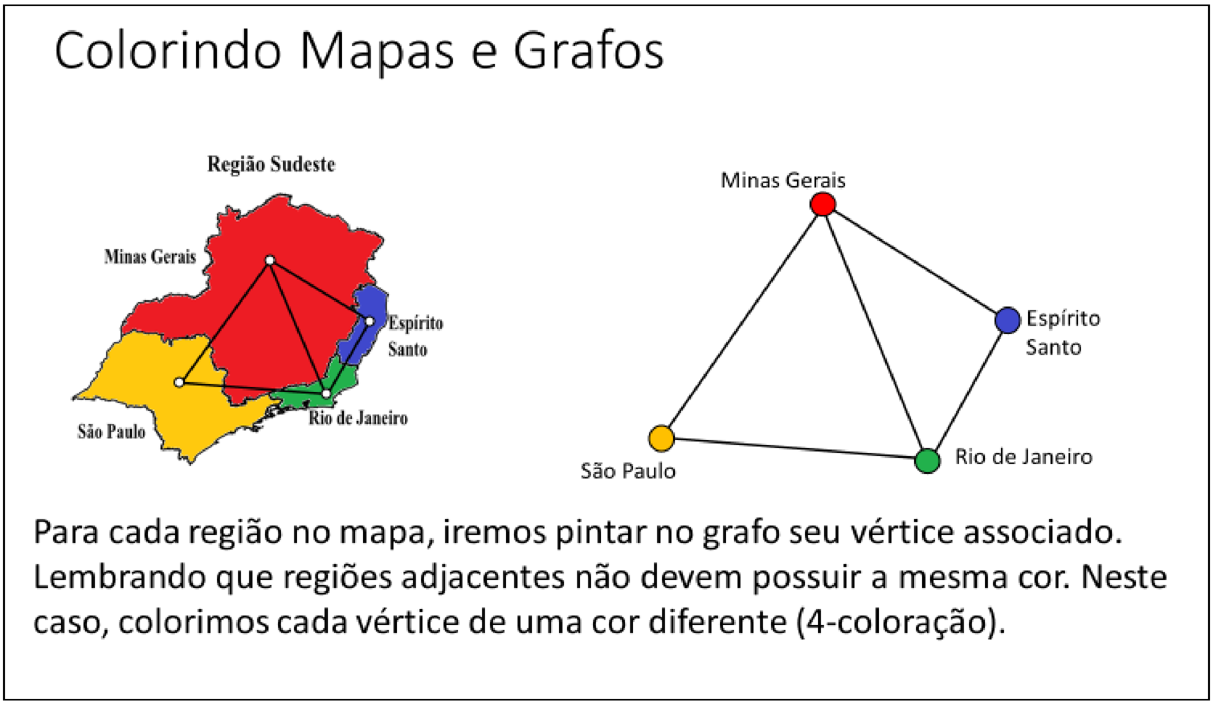
Na parte 2 desta atividade utilizamos a apresentação de PowerPoint (figura 59) para melhor visualização dos alunos os elementos de um grafo, a associação de vértice aos estados, aresta a relação de adjacência, e a correlação entre mapas e grafos planares, definindo grafo planar e em seguida, a coloração do grafo associado ao mapa (figura 60). Vale a pena destacar que na apresentação de slides, os elementos e a coloração são feitos um a um ao invés de apresentar todos preenchidos como a imagem sugere.

Figura 59 - PowerPoint Utilizado na Associação do Mapa com Grafo



Fonte: O autor, 2017.

Figura 60 - PowerPoint Utilizado Para Auxiliar a Coloração de Vértices do Grafo

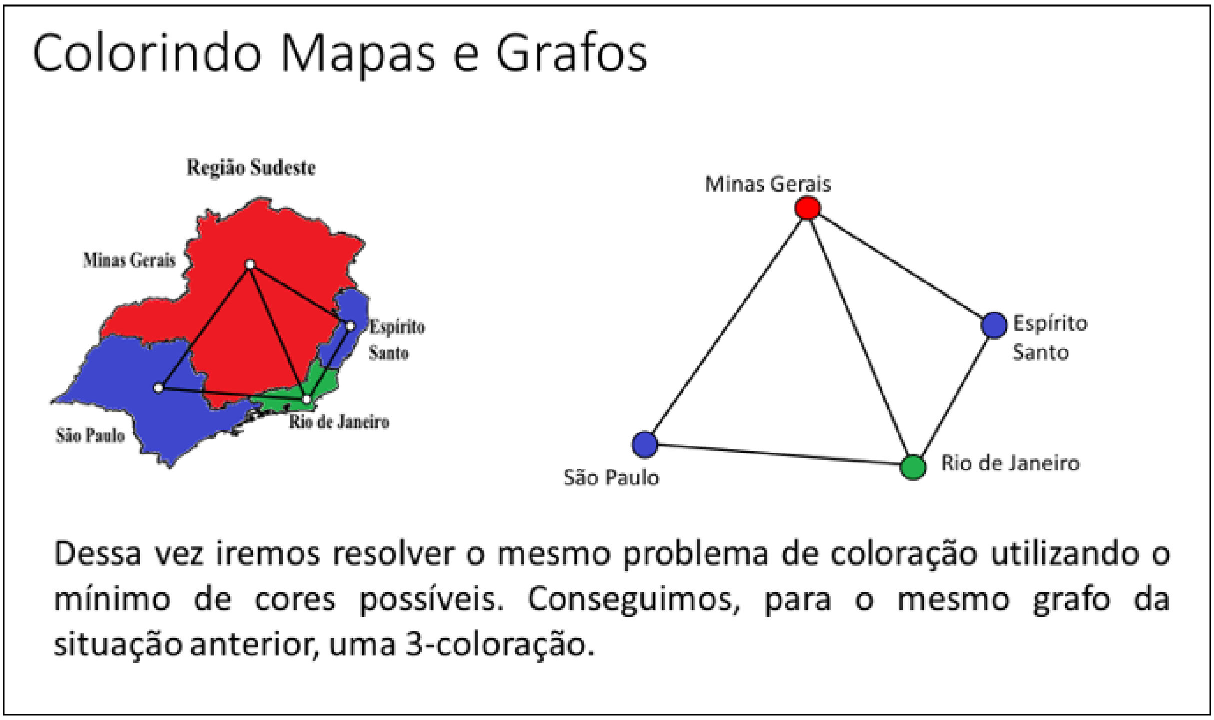


Fonte: O autor, 2017.

Nesta parte 2 muitos tiveram dificuldade em desenhar o grafo associado e precisaram de orientações além da ajuda dos colegas. No fim, a maioria apresentou um grafo correto.

Já na coloração, dessa vez foi orientado que tentassem utilizar o mínimo de cores possíveis (figura 61).

Figura 61- PowerPoint Utilizado Para Exemplificar uma Coloração Ótima



Fonte: O autor, 2017.

Nessa primeira tentativa de coloração com o mínimo de cores o resultado ainda foi uma 4-coloração, apesar do resultado ótimo ser uma 3-coloração. Pouquíssimos cometeram conflitos no momento da coloração, pois eles verificavam antes com os discos de EVA para somente depois pintar uma versão definitiva. Cabe ressaltar que, como não obtivemos uma 3-coloração nessa etapa então foi necessário mostrar para os alunos uma solução ótima de ambas as folhas. Utilizamos um projetor Datashow e o programa GeoGebra para desenhar os grafos e colorir de uma maneira correta as arestas obtendo a 3-coloração.

Vale a pena destacar que um grupo específico utilizou os discos de EVA em cima do próprio mapa, para ter uma visualização dos vértices do grafo antes de desenha-lo.

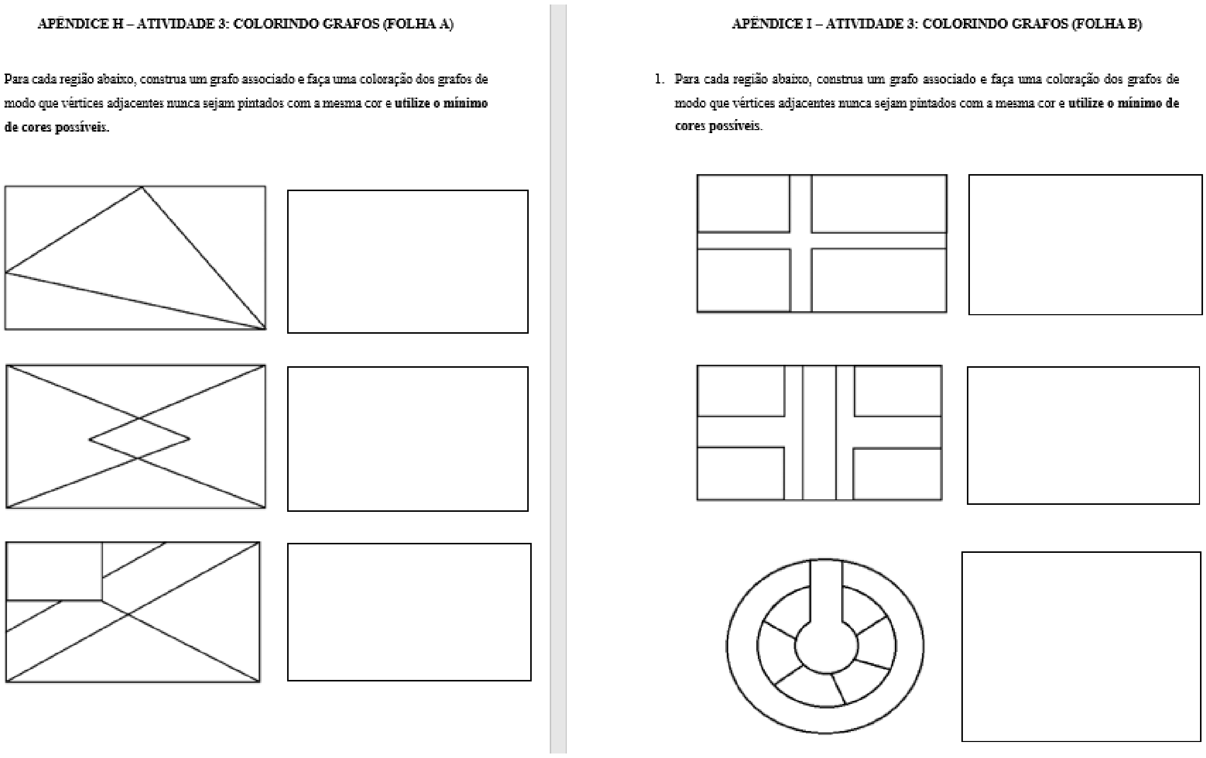
Figura 62 - Atividade 2 – parte 2, alunos construindo os grafos associados as suas respectivas regiões e realizando uma coloração

Fonte: O autor, 2017.

5.3 Atividade 3 – Construindo e Colorindo Grafos

A atividade 3 (figura 63) é referente aos apêndices H e I e seu questionário ao apêndice J.

Figura 63 - Atividade 3



APÊNDICE H – ATIVIDADE 3: COLORINDO GRAFOS (FOLHA A)

1. Para cada região abaixo, construa um grafo associado e faça uma coloração dos grafos de modo que vértices adjacentes nunca sejam pintados com a mesma cor e **utilize o mínimo de cores possíveis.**

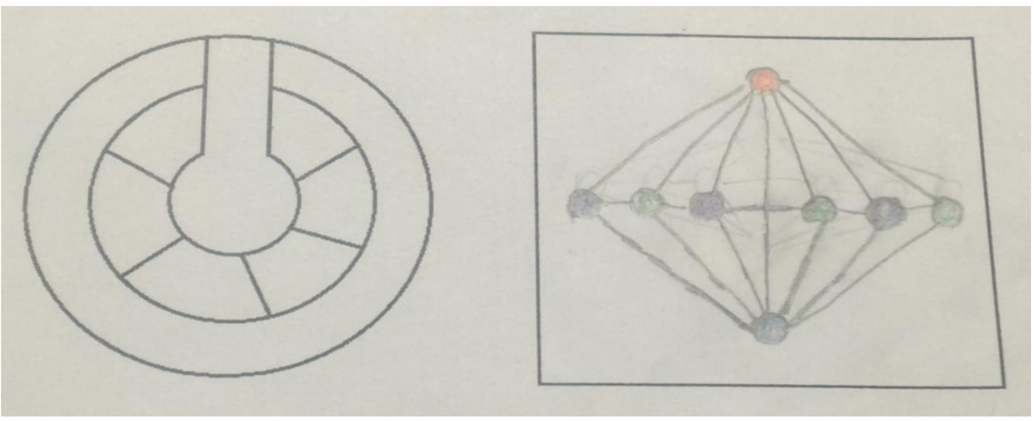
APÊNDICE I – ATIVIDADE 3: COLORINDO GRAFOS (FOLHA B)

1. Para cada região abaixo, construa um grafo associado e faça uma coloração dos grafos de modo que vértices adjacentes nunca sejam pintados com a mesma cor e **utilize o mínimo de cores possíveis.**

Fonte: O autor, 2017.

Na atividade 3 surgiram poucas dúvidas e houve muitos acertos para as duas primeiras regiões. Porém, para a terceira e mais difícil, muitos tiveram dificuldades. Para a folha A da atividade 3 tivemos uma quantidade considerável de acertos já para a folha B apenas um aluno conseguiu construir um grafo correto para a região de forma circular e o coloriu adequadamente (figura 64), este aluno ainda questionou como seria a forma planar do grafo, mas preferiu esteticamente pelo grafo com aresta se interceptando fora dos vértices.

Figura 64 - Resposta de um aluno para a terceira região da Atividade 3 – folha B

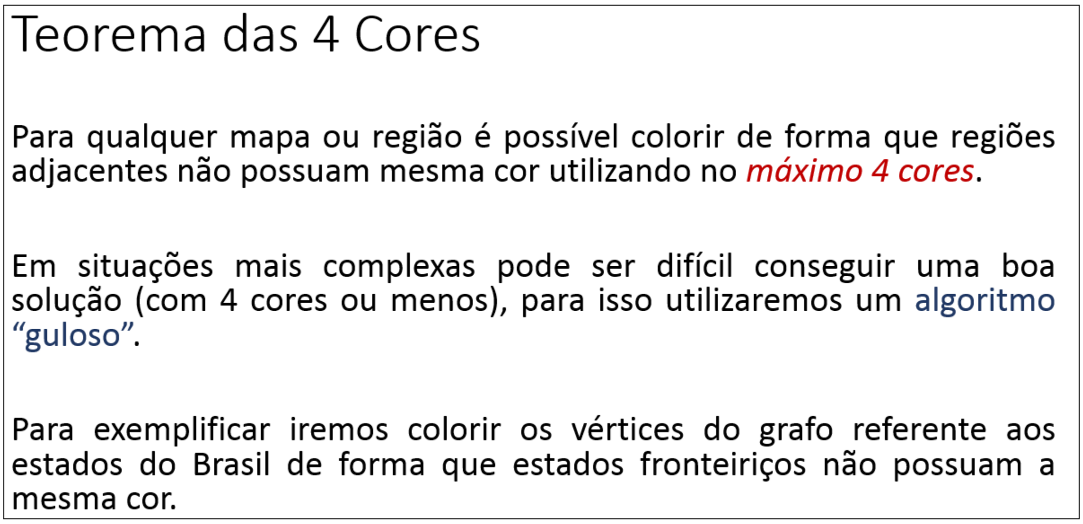


Fonte: O autor, 2017.

5.4 Atividade 4 – Problema Rotação de Cultura

Antes de iniciar a atividade 4 foi apresentado um slide (figura 65) onde enunciávamos o teorema das 4 cores e explicamos que para grafos mais complexos seria necessário uma estratégia. Essa estratégia foi apresentada como uma sequência de regras que nos auxiliaria a encontrar uma solução, não necessariamente a ótima, para o problema e assim foi enunciado a eles o conceito de algoritmo.

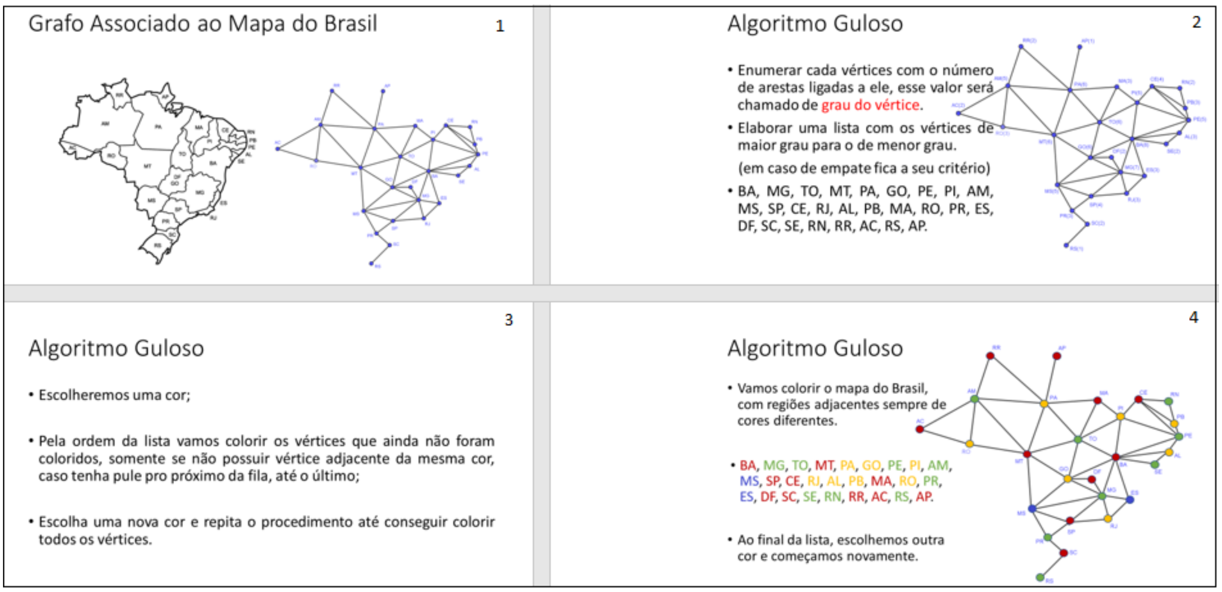
Figura 65 - Introdução a Atividade 4



Fonte: O autor, 2017.

Para exemplificar o algoritmo guloso, foi resolvido passo a passo (figura 66), o problema de coloração dos estados do Brasil. Os slides também podem ser encontrados nos apêndices R, S, T e U, ressaltando novamente que os slides elaborados estão passo a passo, colorindo vértice a vértice, diferente do que a imagem sugere.

Figura 66 - Slides Para Resolver o Problema de Coloração dos Estados do Brasil



Fonte: O autor, 2017.

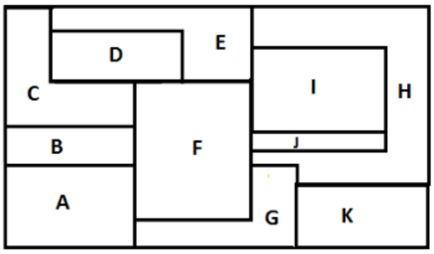
A atividade 4 (figura 67) é referente ao apêndice K e seu questionário ao apêndice L.

Figura 67 - Atividade 4

APÊNDICE K – ATIVIDADE 4: PROBLEMA DA ROTAÇÃO DE CULTURAS

1. Numa determinada região, correspondente a figura abaixo, era adotado o sistema de rotação de cultura, uma técnica agrícola que tem como objetivo conservar o solo diminuindo seu desgaste, que consiste na alternância das espécies de vegetais plantados.

   Os produtores locais desejavam plantar algodão, feijão, soja e girassol, com uma restrição. Para que as fronteiras ficassem bem delineadas, regiões adjacentes não deveriam ter a mesma espécie de vegetal plantado.



Resolva o problema da rotação de culturas. Para auxiliar na solução construa o grafo associado ao problema e utilize o algoritmo guloso:

Fonte: O autor, 2017.

Na atividade 4 a maior dificuldade foi construir um grafo correto para o problema. Eles apresentaram um pouco de dificuldade no começo para entender o processo do algoritmo guloso, então passo a passo do algoritmo era explicado novamente sempre que solicitado. Foi a etapa mais demorada, muitos não construíram um grafo adequado, o erro mais comum foi esquecer uma aresta que deverias conectar duas regiões adjacentes, mas tivemos alguns resultados com o grafo e uma coloração corretos. Pelo questionário foi possível perceber que os que conseguiram confirmaram que o algoritmo foi importante e necessário para que eles encontrassem a solução.

As atividades decorreram bem, todos os alunos presentes foram participativos e prestativos em ajudar os colegas. Até mesmo alunos que ao decorrer do ano não se mostravam interessados cumpriram com todas as etapas propostas. As respostas dos questionários e as observações das experimentações reforçam que os objetivos de promover o desenvolvimento do raciocínio apresentando uma nova teoria (grafos), seus elementos básicos e problemas desafiadores (coloração) e apresentar um pensamento algorítmico para chegar a soluções viáveis traz mais ludicidade à sala de aula e mais conhecimento de forma investigativa e prazerosa.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. **Geometria diferencial das curvas planas**. [2005?]. Disponível em:http://www.im.ufal.br/posgraduacao/posmat/index.php/downloads/category/6-livros?download=61:livro.geometria.diferencial.das.curvas.planas02.07.2003. Acesso em: 10 nov. 2017.

ALVES, Robson Piacente. **Coloração de grafos e aplicações.** 2015. 132 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Florianópolis, 2015.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. **Grafos**: Teoria, modelos e algoritmos. São Paulo: Editora Blucher, 2006.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo; JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos**: Introdução e prática. São Paulo: Editora Blucher, 2009.

CARVALHO, Marco Antônio Moreira. **BCC204 - Teoria dos Grafos**. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2017. 42 slides. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/marco/site_media/uploads/bcc204/11_aula_11.pdf>. Acesso em: 02 nov. 2017.

COSTA, Polyanna Possani da. **Teoria de Grafos e suas Aplicações**. 2011. 77 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Curso de Mestrado Profissional em Matemática Universitária Rio Claro, 2011.

POLETTI, Elaine Cristina Catapani. **FT 024 - Teoria dos Grafos e Aplicações:** Coloração. Limeira: Unicamp, 2010. 23 slides. Disponível em: <https://www.ft.unicamp.br/~magic/ft024/coloracao.pdf>. Acesso em: 05 out. 2017.

SOUSA, Lurdes. **O Teorema das Quatro Cores**. 2001. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2018.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO: ATIVIDADE 1

1. Teve dificuldade em entender o problema proposto?

   ____

2. Conseguiu obter a solução com a moldura?

   ____

3. Conseguiu obter a solução sem a moldura?

   ____

4. Comente sobre as diferenças entre resolver com a moldura e sem a moldura.

   ____

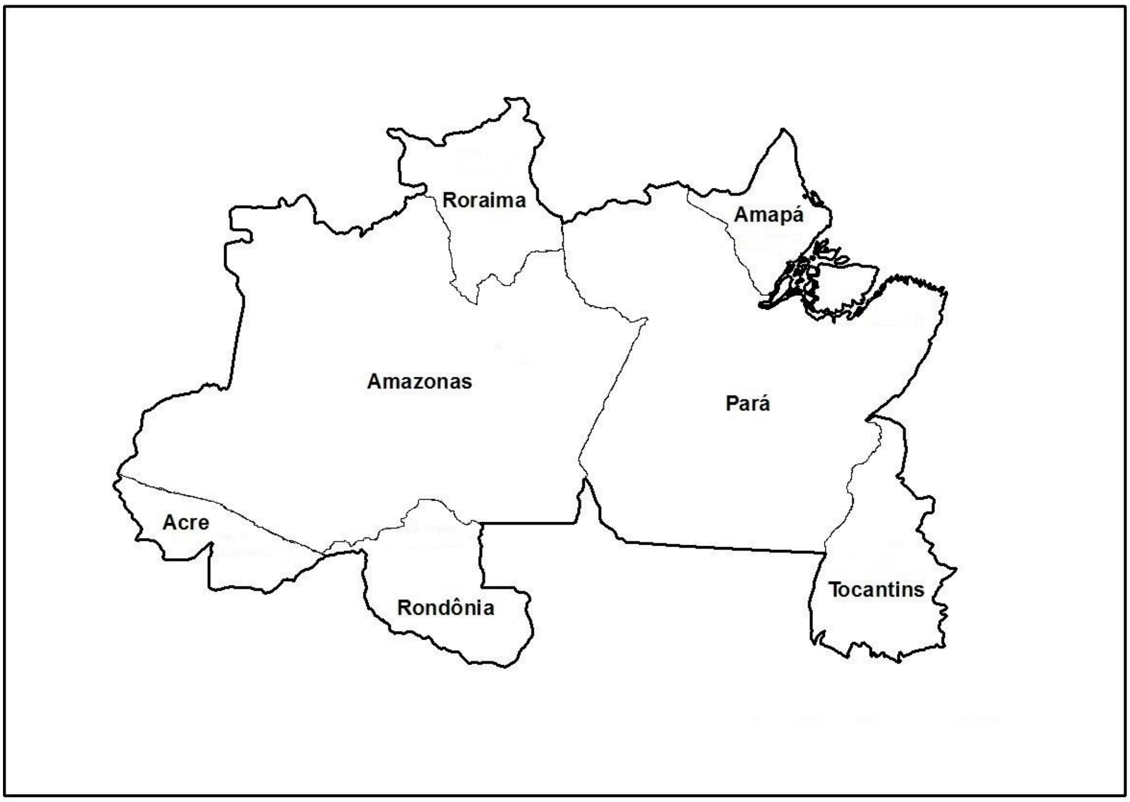
   ____

   ____

   ____

APÊNDICE B – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL (FOLHA A)

Parte 1: Observe o mapa a seguir:



1. Identifique qual região do Brasil está retratada: ___________________________.
2. Escreva o nome dos seus estados:

____

____

____

____

____

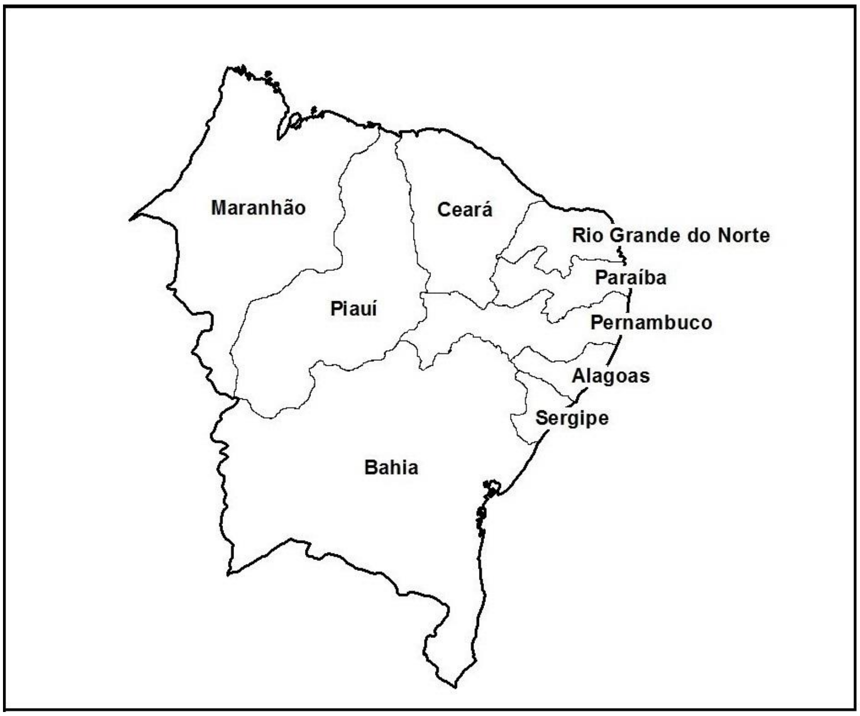
____

____

3. Vamos colorir o mapa de modo que estados fronteiriços nunca sejam pintados com a mesma cor.

APÊNDICE C – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL (FOLHA B)

Parte 1: Observe o mapa a seguir:



1. Identifique qual região do Brasil está retratada: ____________________________.

2. Escreva o nome dos seus estados:

 ____

 ____

 ____

 ____

 ____

 ____

 ____

 ____

 ____

3. Vamos colorir o mapa de modo que estados fronteiriços nunca sejam pintados com a mesma cor.

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO: ATIVIDADE 2 – PARTE 1

1. Você conseguiu responder qual a região do Brasil sua região retratava sem precisar consultar um mapa específico?

____

2. Encontrou dificuldade na coloração do mapa? Se sim comente.

____

____

____

3. Seria possível pintar o mesmo mapa utilizando menos cores do que você utilizou?

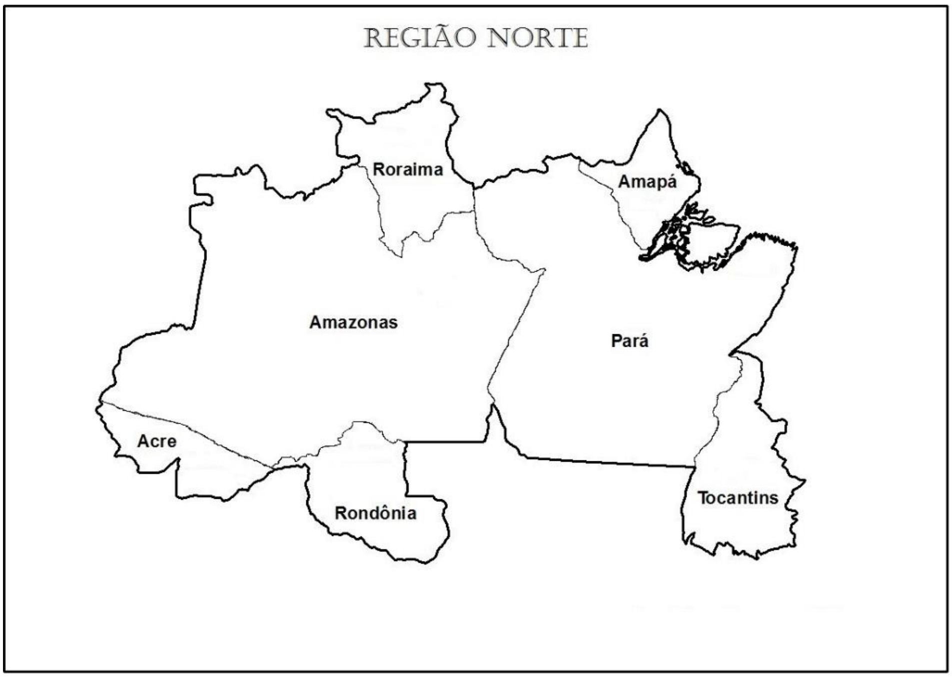
____

____

APÊNDICE E – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL

Parte 2: Associe o grafo correspondente ao mapa a seguir:

1. A cada estado associe um vértice e caso dois estados dividam uma fronteira ligue os vértices com uma aresta. Lembre-se de ao desenhar o grafo, os vértices não devem ser preenchidos, pois iremos pintar em seguida.



2. Vamos colorir o grafo de modo que vértices adjacentes nunca sejam pintados com a mesma cor e **utilize o mínimo de cores possíveis.**

APÊNDICE F – ATIVIDADE 2: COLORINDO AS REGIÕES DO BRASIL

Parte 2: Associe o grafo correspondente ao mapa a seguir:

1. A cada estado associe um vértice e caso dois estados dividam uma fronteira ligue os vértices com uma aresta. Lembre-se de ao desenhar o grafo, os vértices não devem ser preenchidos, pois iremos pintar em seguida.

2. Vamos colorir o grafo de modo que vértices adjacentes nunca sejam pintados com a mesma cor e **utilize o mínimo de cores possíveis.**

APÊNDICE G – QUESTIONÁRIO: ATIVIDADE 2 – PARTE 2

1. Com as suas palavras responda. O que é um grafo?

____

____

2. No nosso problema o que os vértices e as arestas do grafo representam?

____

____

____

3. Você conseguiu construir o grafo associado ao mapa corretamente?

____

4. Obteve uma solução com o menor números de cores possível?

____

____

5. Comente as diferenças que você observou entre colorir o mapa e o grafo.

____

____

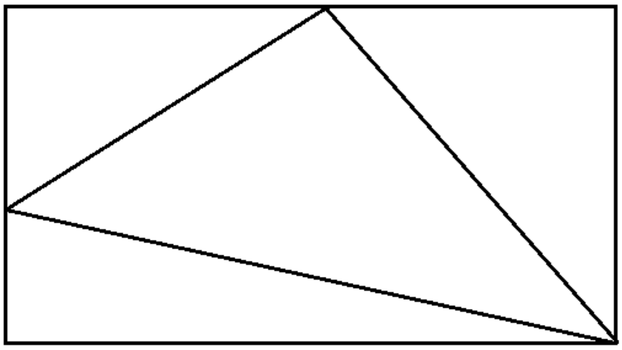
____

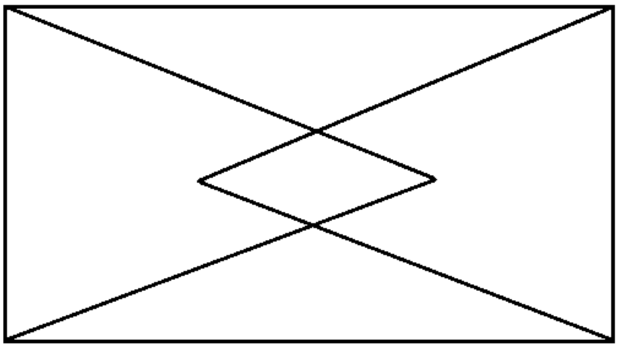
____

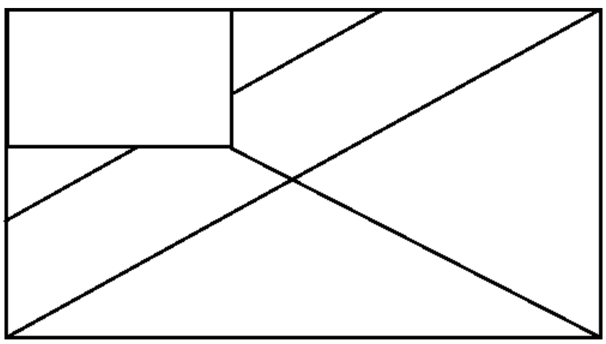
____

APÊNDICE H – ATIVIDADE 3: COLORINDO GRAFOS (FOLHA A)

1. Para cada região abaixo, construa um grafo associado e faça uma coloração dos grafos de modo que vértices adjacentes nunca sejam pintados com a mesma cor e **utilize o mínimo de cores possíveis.**

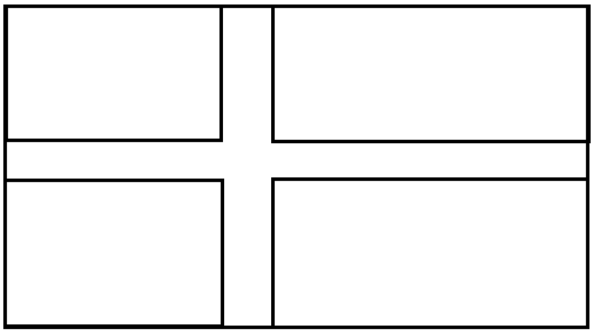


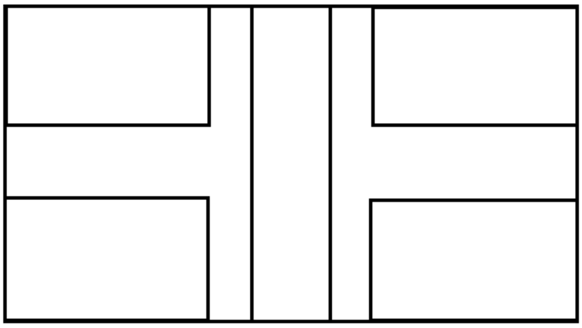


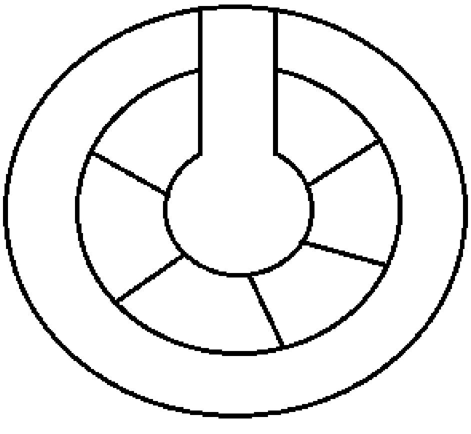


APÊNDICE I – ATIVIDADE 3: COLORINDO GRAFOS (FOLHA B)

1. Para cada região abaixo, construa um grafo associado e faça uma coloração dos grafos de modo que vértices adjacentes nunca sejam pintados com a mesma cor e **utilize o mínimo de cores possíveis.**







APÊNDICE J – QUESTIONÁRIO: ATIVIDADE 3

1. Houve dificuldade na associação dos mapas a forma de grafo? Comente.

2. Conseguiu obter uma solução de coloração utilizando o mínimo de cores para os três mapas? Comente.

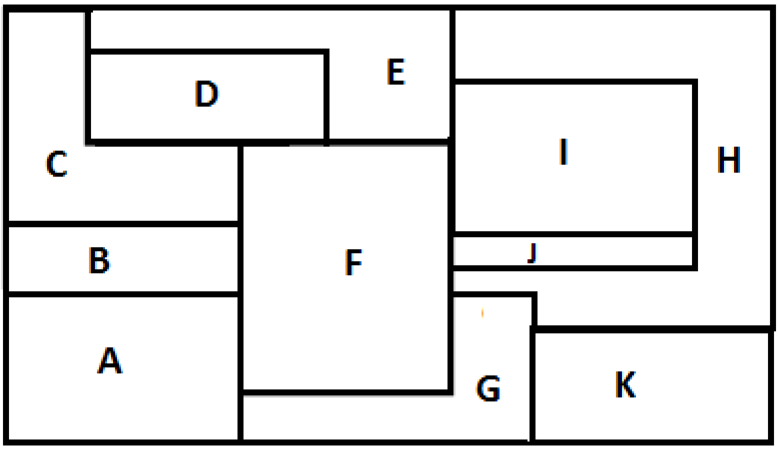
3. Comente sobre o que se trata o teorema das 4 cores.

4. Todo grafo pode ser colorido com no máximo 4 cores?

APÊNDICE K – ATIVIDADE 4: PROBLEMA DA ROTAÇÃO DE CULTURAS

1. Numa determinada região, correspondente a figura abaixo, era adotado o sistema de rotação de cultura, uma técnica agrícola que tem como objetivo conservar o solo diminuindo seu desgaste, que consiste na alternância das espécies de vegetais plantados.

   Os produtores locais desejavam plantar algodão, feijão, soja e girassol, com uma restrição. Para que as fronteiras ficassem bem delineadas, regiões adjacentes não deveriam ter a mesma espécie de vegetal plantado.



Resolva o problema da rotação de culturas. Para auxiliar na solução construa o grafo associado ao problema e utilize o algoritmo guloso:

APÊNDICE L – QUESTIONÁRIO: ATIVIDADE 4

1. Ao ler o enunciado do problema, você foi capaz de perceber o problema como um problema de coloração?

____

____

2. Conseguiu desenhar o grafo associado ao problema? Houve muita dificuldade?

____

____

3. O que é um algoritmo?

____

4. O Algoritmo guloso auxiliou na solução? Comente.

____

____

____

5. Conseguiu encontrar uma solução para o problema? Comente.

____

____

____

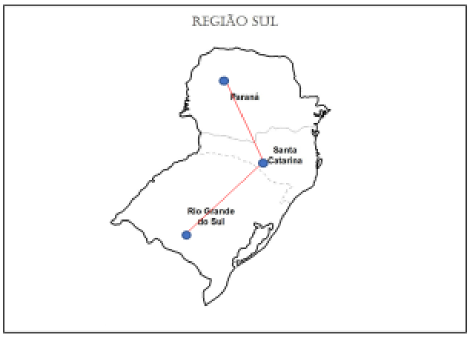
APÊNDICE M – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 1

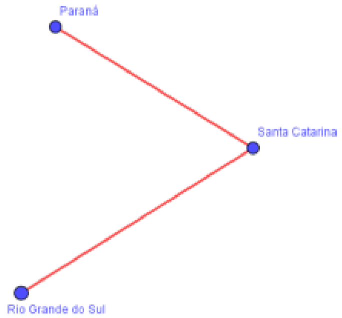
Conceitos Básicos de Grafo

Associando mapas a grafos planares e estudando coloração

APÊNDICE N – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS - SLIDE 2

Grafo Associado ao Mapa da Região Sul
(observe que um mapa pode ser associado a um grafo planar)

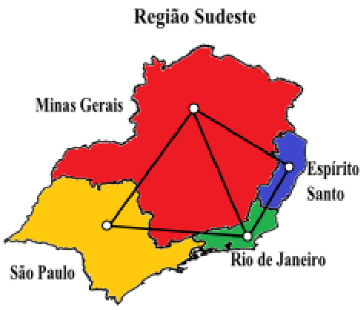


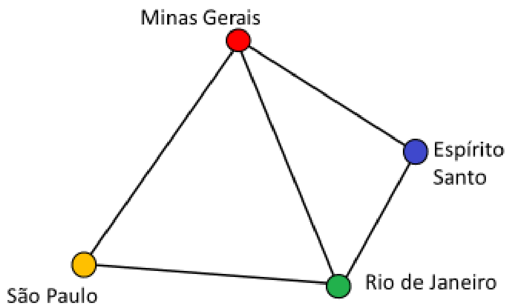


Grafos são estruturas formadas por pontos que serão chamados de vértices e linhas, chamadas de arestas, conectando os vértices.
Caso dois vértices estejam ligados por uma aresta, serão chamados de vértices adjacentes.

APÊNDICE O – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 3

Colorindo Mapas e Grafos

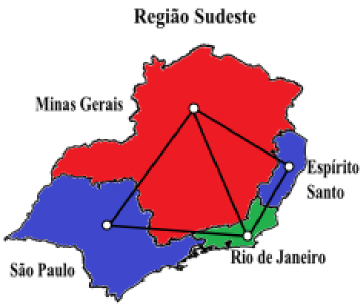


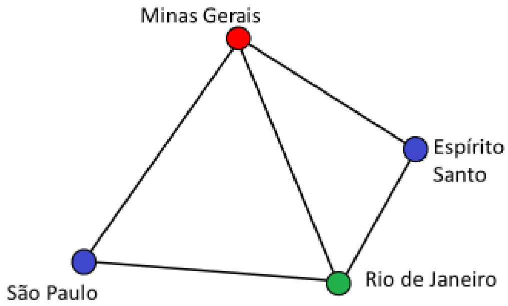


Para cada região no mapa, iremos pintar no grafo seu vértice associado. Lembrando que regiões adjacentes não devem possuir a mesma cor. Neste caso, colorimos cada vértice de uma cor diferente (4-coloração).

APÊNDICE P – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 4

Colorindo Mapas e Grafos





Dessa vez iremos resolver o mesmo problema de coloração utilizando o mínimo de cores possíveis. Conseguimos, para o mesmo grafo da situação anterior, uma 3-coloração.

APÊNDICE Q – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 5

Teorema das 4 Cores

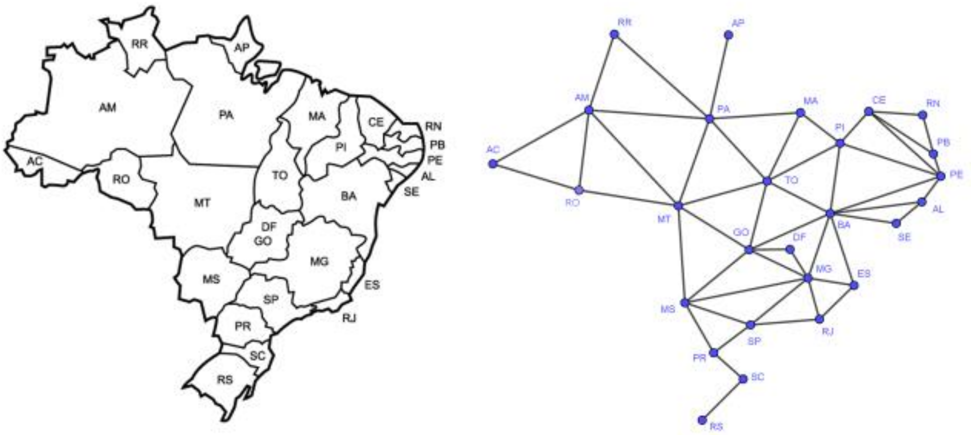
Para qualquer mapa ou região é possível colorir de forma que regiões adjacentes não possuam mesma cor utilizando no *máximo 4 cores*.

Em situações mais complexas pode ser difícil conseguir uma boa solução (com 4 cores ou menos), para isso utilizaremos um algoritmo “guloso”.

Para exemplificar iremos colorir os vértices do grafo referente aos estados do Brasil de forma que estados fronteiriços não possuam a mesma cor.

APÊNDICE R – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS - SLIDE 6

Grafo Associado ao Mapa do Brasil

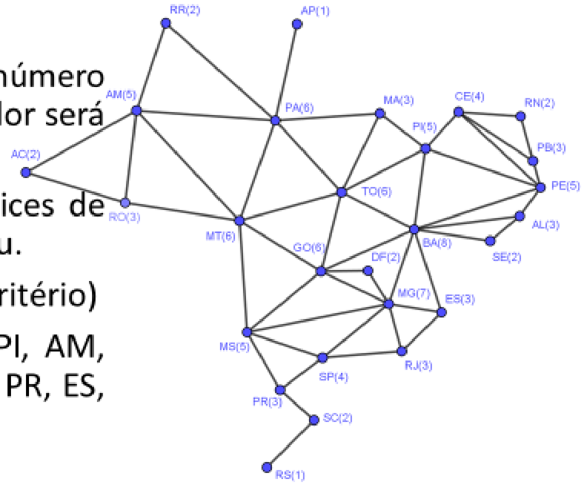


APÊNDICE S – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 7

Algoritmo Guloso

- Enumerar cada vértices com o número de arestas ligadas a ele, esse valor será chamado de grau do vértice.
- Elaborar uma lista com os vértices de maior grau para o de menor grau.

  (em caso de empate fica a seu critério)
- BA, MG, TO, MT, PA, GO, PE, PI, AM, MS, SP, CE, RJ, AL, PB, MA, RO, PR, ES, DF, SC, SE, RN, RR, AC, RS, AP.



APÊNDICE T – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 8

Algoritmo Guloso

- Escolheremos uma cor;
- Pela ordem da lista vamos colorir os vértices que ainda não foram coloridos, somente se não possuir vértice adjacente da mesma cor, caso tenha pule pro próximo da fila, até o último;
- Escolha uma nova cor e repita o procedimento até conseguir colorir todos os vértices.

APÊNDICE U – SLIDE DE APRESENTAÇÃO PARA AS ATIVIDADES PROPOSTAS – SLIDE 9