Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Modelagem matemática com exponencial e logaritmo

Adauto Zanata

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa**

Barra do Garças - MT

Abril de 2018

Modelagem matemática com exponencial e logaritmo

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Seu Nome Completo e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 16 de agosto de 2018.

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa (Orientador) - UFMT
Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins - UFMT
Prof. Dr. Reinier Díaz Millán - IFGO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

Z27m Zanata, Adauto.
Modelagem matemática com exponencial e logaritmo/ Adauto Zanata, 2018.
xii, 102f.: il.; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Barra do Garças, 2018.
Inclui bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Cálculo. 2. Equações Diferenciais. 3. Aplicações. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Modelagem matemática com exponencial e logaritmo"

Autor: Adauto Zanata

defendida e aprovada em 19/07/2018.

Composição da Banca Examinadora:

Márcio Lemes de Sousa

Presidente Banca/Orientador Doutor Márcio Lemes de Sousa
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Tibério Bittencourt

Examinador Interno Doutor Tibério Bittencourt de Oliveira Martins
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Reinier Díaz Millán
Instituição: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Cuiabá, 19/07/2018.

À minha família.

Agradecimentos

À Deus, pela força.

Um agradecimento especial aos meus pais **Carlos** e **Alice**, por acreditar na minha capacidade e sempre terem me incentivado a estudar e a crescer.

Aos meus colegas de curso que sempre se prontificaram a estudar na sala 105 da UFMT, onde, através de muitas discussões e ilustrações, as dúvidas foram esclarecidas e conhecimento incorporado. Além do título de mestre, também conquistei amizades valiosas nesses dois anos.

Ao corpo docente do PROFMAT/UFMT, pelos ensinamentos, paciência e incentivos, em particular ao professor **Márcio**, pela orientação e avaliação deste trabalho. À SBM pela oportunidade concedida.

Enfim, a todas a pessoas que estão presentes ou que passaram em minha vida e que contribuem(íram), de alguma forma, para o meu desenvolvimento pessoal ou profissional. Essas pessoas têm me feito acreditar em meus objetivos e têm me incentivado a lutar todos os dias para conquistá-los. Obrigado!

Resumo

No presente trabalho apresentamos logaritmos, funções exponenciais e suas aplicações em modelagem matemática. Usamos conceitos de Cálculo e Equações diferenciais como ferramenta essencial para modelar algumas situações práticas em eventos físicos, químicos, econômicos, etc., como também na área da saúde (diálise), mostrando que os logaritmos e exponenciais estão presentes em nosso dia-a-dia, pois, são as únicas maneiras de descrever matematicamente uma grandeza cuja taxa de variação (derivada) é proporcional (direta ou inversamente) a ela própria em um determinado instante. Por fim, abordamos algumas propostas de atividades para o ensino de logaritmos e funções exponenciais no ensino médio.

Palavras chave: Cálculo; Equações diferenciais; Aplicações.

Abstract

In the present work, we present logarithms, exponential functions and their applications in mathematical modeling. We use concepts of Calculus and Differential Equations as essential tools to model some practical situations in physical, chemical, economic events, etc., as well as in health (dialysis), showing that logarithms and exponentials are present in our day-to-day, and are thus the only ways of describing mathematically a quantify whose rate of variation (derivative) is proportional (directly or inversely) to itself at a given instant. Finally, we discuss some proposed activities for the teaching of logarithms and exponential functions in high school.

Keywords: Calculus; Differential equations; Applications.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A sobrevivência humana é repleta de fenômenos naturais e entendê-los é fundamental para o desenvolvimento e prosperidade da humanidade, sendo a matemática uma das ciências que procura explicá-lo, de forma exata ou aproximada. Exponencial e logaritmo são dois conceitos matemáticos abordados no ensino médio e que são o alicerce na resolução de problemas específicos da disciplina bem como para compreender ou prever alguns eventos espontâneos da natureza. Entretanto, esses tópicos, quando abordados no ensino médio e até mesmo em muitos cursos de nível superior, são de maneira superficial, fazendo com que o estudante entenda meras aplicações de fórmulas, tornando o ensino deselegante e sem sentido.

Se o conteúdo é desestimulador, o aluno logo pergunta: *"Professor, onde eu vou usar isso na minha vida?"*; *"Isso tem aplicação?"*; *"Eu não vou precisar disso!"*; *"Por que estou estudando isso?"*. Geralmente, esses questionamentos apontam uma visão limitada que a sociedade tem a respeito da importância da matemática. Tal visão é comprovada pelos obstáculos encontrados na compreensão do objetivo base da matemática que é a sua aplicação.

Lima (1999, p. 1-2), defende que a o processo de ensino e aprendizagem da matemática deve conter pelo menos três componentes: Conceituação, Manipulação e Aplicações. Resumidamente, o primeiro consiste em formular correta e objetivamente as definições matemáticas estabelecendo conexões entre conceitos diversos, já o segundo fundamenta-se na aptidão e engenho de manejar expressões, equações e figuras geométricas básicas e, o último componente, compreende o uso das ideias matemáticas na obtenção de resultados, conclusões e previsões problemáticas de várias áreas do conhecimento. Esses componentes asseguram o equilíbrio e desenvolvimento das aulas e, o grande desafio do professor de matemática é conciliá-los de modo a estimular o pensamento crítico/reflexivo do estudante e despertar para seu uso em situações práticas.

É sempre importante que o conhecimento matemático seja associado a alguma aplicabilidade, e essa tarefa não é tão simples. Nesse sentido, Lima (1999, p. 5-6) afirma:

> "As aplicações constituem, para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente (ou menos cansativa) da matemática que estudam. Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar os estudos, por vezes áridos, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe."

Nesse contexto, concentraremos nossos estudos em exponenciais e logaritmos. Esforçaremos para apresentar todas as definições formalmente e, no decorrer do texto, faremos exemplos e ilustrações para uma melhor didática e absorção do conteúdo. Nossa abordagem será mais voltada ao cálculo, em contrapartida do que é tradicionalmente trabalhado no ensino regular.

No capítulo 1, iniciaremos com alguns comentários históricos do cálculo, definiremos função, função injetora, sobrejetora e bijetora, composta, inversa, crescente, decrescente e monótona, bem como, apresentaremos a definição de limite e suas propriedades fundamentais, limites laterais e no infinito, e a ideia de continuidade. Em frente, definimos derivada como a inclinação da reta tangente, regras de derivação, e o Teorema do Valor Médio. Adiante, daremos uma noção de integral definida como área sob uma curva utilizando-se a Soma de Riemann, algumas propriedades de integral, primitiva, integral indefinida e o Teorema Fundamental do Cálculo, preparando, assim, o leitor para a compreensão dos demais capítulos.

No capítulo 2, trazemos o contexto do surgimento dos logaritmos, recordaremos as definições de potência, funções exponencial e logarítmica (e algumas de suas propriedades), relacionando-as à ideia de área de uma faixa de hipérbole e explanando a importância e espontaneidade do número "e" como uma base importante para logaritmos e exponenciais.

No capítulo 3, daremos uma sucinta noção de Equações Diferenciais, classificação, ordem e apresentaremos o Teorema da Existência e Unicidade. Concentraremos em Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem - Lineares e de Variáveis Separáveis, trazendo algumas técnicas para encontrar suas soluções.

No capítulo 4, faremos um estudo de alguns modelos matemáticos voltados para a compreensão de problemas relacionados, por exemplo, ao crescimento e decrescimento de determinado conteúdo, curva de aprendizagem, resfriamento de um corpo, queda livre, misturas, juros compostos, diálise, etc.

No capítulo 5, por fim, trazemos algumas propostas de abordagem de Exponenciais e Logaritmos em sala de aula, como por exemplo, taxa de variação e cultura de bactérias, datação de fósseis, magnitude de terremotos, etc.

Com este trabalho esperamos que o leitor amplie seus conhecimentos relativo a Exponenciais e Logaritmos, bem como, conheça algumas de suas aplicações mediante modelagem matemática e, ainda, inteire-se de algumas propostas de abordagem desses temas no ensino médio.

Capítulo 1

Conceitos Iniciais

"Se de uma grandeza subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante outra parte não menor que sua metade, e assim sucessivamente, numa determinada etapa do processo chega-se a uma grandeza menor que qualquer outra da mesma espécie predeterminada."

Método da Exaustão, creditado a Eudoxo[1]

O Método da Exaustão, na antiguidade, contemplava os ideais gregos para lidar com somas infinitas. Um dos principais matemáticos da antiguidade que realizou grandes avanços nessa área foi Arquimedes[2]. Em um de seus trabalhos, *A Quadratura da Parábola*, Arquimedes utilizou o Método da Exaustão, através de somas infinitas, para calcular a área sob o arco de uma parábola.

Mais de mil anos depois, em meados dos século XVII, a matemática já possuía elementos suficientes para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Infinitesimal, ou simplesmente Cálculo, o qual, suas ideias fundamentais foram desenvolvidas pelos matemáticos Isaac Newton[3] e Gottfried Leibniz[4] em trabalhos independentes. Enquanto para Newton o cálculo se baseava em taxa de variação e não pregava um rigor lógico, Leibniz era centrado na diferencial, com foco em somatório de áreas infinitesimais onde criou o simbolo $\displaystyle\int$ (que representa integral), mostrando assim, bem mais preocupação com a notação.

[1] Eudoxo da Cnido, 408 a.C - 355 a.C, astrônomo, matemático e filósofo grego.

[2] Arquimedes de Siracusa, 287 a.C - 212 a.C, matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego.

[3] Isaac Newton, 1643 - 1727, físico, matemático, astrônomo, alquimista, filósofo, teólogo e cientista inglês.

[4] Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 - 1716, matemático, filósofo, cientista, polímata, diplomata e bibliotecário alemão.

O Cálculo é uma das ferramentas matemáticas que estuda a variação das grandezas. Por exemplo, a variação de crescimento ou decrescimento da grandeza em determinado instante quando é proporcional (diretamente ou inversamente) ao valor da grandeza naquele momento determinado no tempo. Variações deste tipo acontecem, por exemplo, na economia (juros), na química (desintegração radioativa), etc.

Neste capítulo apresentaremos as noções básicas de função, limite, derivada e integral, bem como algumas de suas propriedades e, para escrevê-lo, tivemos como referências (Courant e Robbins, 2000), (Eves, 2011), (Flemming e Gonçalves, 2007), (Guidorizzi, 2001), (Iezzi, 2010), (Lima et al., 1996), (Muniz Neto, 2015) e (Stewart, 2010). Os conceitos aqui abordados serão fundamentais para a compreensão dos próximos capítulos e servirão como ferramenta para o estudo de logaritmos, exponenciais e aplicações.

1.1 Função

Em matemática, sempre lidamos com grandezas que se modificam de acordo com outras. Assim, denominamos **variável** uma grandeza que depende de outra para assumir um valor/forma. O conceito de **função** é a ideia básica para começar entender a maioria das relações entre grandezas matemáticas e físicas. Estes objetos matemáticos, funções, descrevem relacionamentos entre quantidades variáveis. A seguir, mostraremos algumas situações em que essa dependência ocorre. Em muitos casos, o salário S de uma pessoa pode depender do número de horas trabalhadas t, neste caso, dizemos que S é uma função de t. Analogamente, o volume V do espaço ocupado por um determinado gás sob uma pressão constante depende da temperatura t do gás, então, dizemos que V está em função de t. A área A de uma esfera depende de seu raio r. A lei que relaciona A e r é dada pela equação $A = 4\pi r^2$, assim, para cada r positivo existe um valor associado A também positivo. Logo, dizemos que A é uma função de r.

1.1.1 Definição e exemplos

Iremos a seguir conceituar o que destacamos anteriormente.

Definição 1 Sejam X e Y conjuntos quaisquer. Uma **função** f é uma lei ou relação que associa cada elemento $x \in X$ a exatamente um elemento $y = f(x) \in Y$. Representa-se essa relação por $f : X \to Y$. O conjunto X chama-se **domínio**, enquanto o conjunto Y é denominado **contradomínio** de f. Dado $x \in X$, o elemento correspondente $y = f(x) \in Y$ é denominado **imagem**.

Como o nosso estudo é direcionado para conjuntos numéricos, podemos visualizar o comportamento de uma função através de seu gráfico, que será o conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ do plano cartesiano.

Exemplo 1 Quais são os maiores subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, tais que a fórmula $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ define uma função $f : X \to Y$? Como nenhum domínio está explícito, o domínio de f é seu domínio natural $[1, +\infty)$. Como x varia ao londo do intervalo $[1, +\infty)$, o valor de $\sqrt{x-1}$ varia dentro do intervalo $[0, +\infty)$, então, $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ varia dentro do intervalo $[2, +\infty)$ que é a imagem de f. A Figura 1.1 destaca o domínio, a imagem e o gráfico de f.

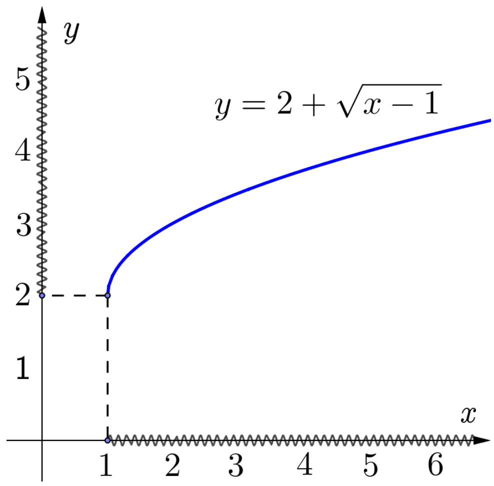
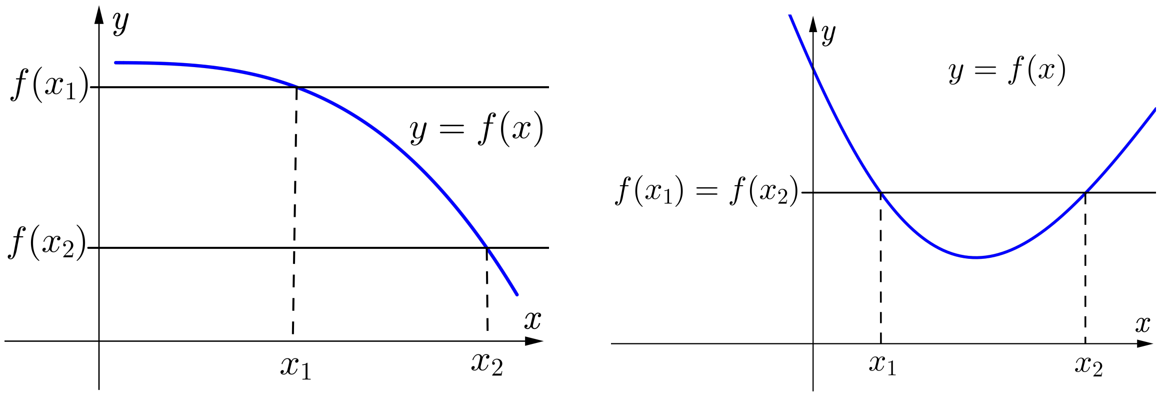


Figura 1.1: Gráfico, domínio e imagem da função $y = 2 + \sqrt{x-1}$.

Em seguida, daremos definições de tipos importantes de funções.

Definição 2 Uma função $f : X \to Y$ é dita **injetora** se $x_1, x_2 \in Y$, com $x_1 \neq x_2$, implica em $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ou seja, elementos diferentes de X são transformados, por f, em elementos diferentes em Y. Equivalentemente, f é injetora se, e somente se, $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Geometricamente falando, uma função f não é injetora se uma reta horizontal corta seu gráfico em dois ou mais pontos. Isto significa que existem no mínimo dois valores x_1 e x_2 do domínio de f, com $x_1 \neq x_2$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$, veja a Figura 1.2(b). Em



(a) Função injetora (b) Função não injtora

Figura 1.2: Teste de injetividade a partir do gráfico de uma função.

contrapartida, se qualquer reta horizontal cortar o gráfico de f em apenas um ponto, quer dizer que f é injetora, veja Figura a 1.2(a).

Definição 3 Uma função $f : X \to Y$ é dita **sobrejetora** se para todo $y \in Y$, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. É equivalente afirmar que f é sobrejetora se $f(X) = Y$, ou seja, para qualquer elemento de Y pode se encontrar pelo menos um elemento $x \in X$, de modo que y é imagem de x por f (a grosso modo, o contradomínio é igual a imagem).

Definição 4 Uma função $f : X \to Y$ é dita **bijetora** se para todo $y \in Y$, existe um único $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Ou seja, f é bijetora se é injetora e sobrejetora.

Exemplo 2 Seja $f : [\,-1, +\infty) \to [\,0, +\infty)$, tal que $f(x) = \sqrt{x+1}$. Logo f é injetora, pois, se $f(x_1) = f(x_2)$, então, $\sqrt{x_1 + 1} = \sqrt{x_2 + 1}$, ou seja, $x_1 + 1 = x_2 + 1$, portanto, $x_1 = x_2$. Também é sobrejetora, pois, para qualquer $y \in [\,0, +\infty)$ existe $x \in [\,-1, +\infty)$, pois como $y \in [\,0, +\infty)$, então, $(y^2 - 1) \in [\,-1, +\infty)$, assim, tomando $x = y^2 - 1$, temos $f(x) = f(y^2 - 1) = \sqrt{(y^2 - 1) + 1} = y$, ou seja, $f(x) = y$. Portanto, f é bijetora nos intervalos indicados. Por outro lado, se $f : [\,-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, então, f não é sobrejetora, pois, por exemplo, não existe $x \in [\,-1, +\infty)$, tal que $f(x) = -1$, isto é, $\sqrt{x+1} = -1$ e, consequentemente, não é bijetora.

1.1.2 Função Composta e função inversa

Definição 5 Dadas duas funções $f : X \to Y$ e $g : V \to W$ (nos valores em que a imagem de g está contida no domínio da f) a **função composta**, denotada por $f \circ g$, é definida por $(f \circ g)(v) = f(g(v))$. O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os $v \in V$, tal que $g(v)$ esteja no domínio de f.

Conforme definido acima, para calcular $(f \circ g)(v)$, devemos, primeiramente, calcular g em v e, então, f em $g(v)$. Vejamos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 3 Sejam duas funções definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 3x - 1$. Então, $(f \circ g)(x) = \sqrt{3x-1}$, desde que $x \geq \dfrac{1}{3}$.

Definição 6 Seja a função $f : X \to Y$, bijetora. Então a **função inversa** de f, denotada por f^{-1}, é definida por:

$$f^{-1}(y) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = y.$$

Observe que $f^{-1} : Y \to X$, ou seja, o domínio de f^{-1} é igual imagem de f, e ainda, a imagem de f^{-1} é igual o domínio de f. Além disso, $(f \circ f^{-1})(y) = y$, tal que $y \in Y$ e, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, com $x \in X$, chamada de **função identidade**.

Exemplo 4 Seja $f(x) = x^5 - 1$. Para calcularmos f^{-1}, de acordo com a Definição 6, devemos mostrar que f é uma bijeção. De fato,

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1^5 - 1 = x_2^5 - 1,$$

então,

$$x_1^5 = x_2^5,$$

ou seja, $x_1 = x_2$, mostrando que f é injetora. Seja $y \in \mathbb{R}$, tomando $x = \sqrt[5]{y+1}$ obtemos $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = \left(\sqrt[5]{y+1}\right)^5 - 1 = y + 1 - 1 = y$, isto é, f é sobrejetora e, portanto, bijetora. Em seguida, escrevendo $y = f(x)$, isolando x nesta igualdade e trocando x por y, temos

$$y = x^5 - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt[5]{y+1}.$$

Daí, nesta última igualdade, substituindo x por y obtemos a inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x+1}$.

Notemos que $(f \circ f^{-1})(x) = f(\sqrt[5]{x+1}) = (\sqrt[5]{x+1})^5 - 1 = x$, ou seja, f e f^{-1} são ditas *simétricas* em relação a reta $y = x$. Vide a Figura 1.3.

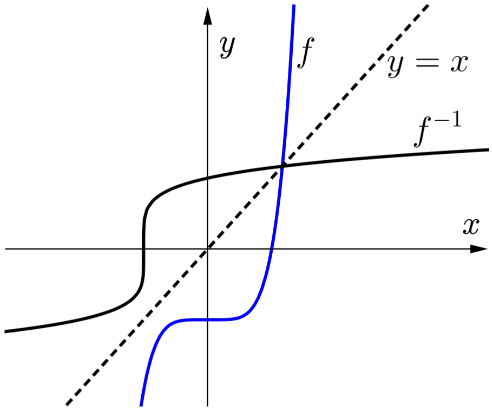


Figura 1.3: Gráfico da função $f(x) = x^5 - 1$ e de sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x+1}$.

Exemplo 5 Seja a função bijetora $f : \left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right) \to \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, de modo que $a > 0$. Pela Definição 6, temos que $f^{-1} : \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right) \to \left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$. Assim, fixando $y \in \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ e resolvendo para $x \in \left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$a equação $y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 + bx + c - y = 0$, considerando $a > 0$ e sabendo que $x \geq -\dfrac{b}{2a}$, obtemos $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a}$. Logo, $f^{-1}(x) = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$. Deste modo, se $a = 1$, $b = -2$ e $c = 3$, a Figura 1.4 ilustra o grafico de f e f^{-1}.

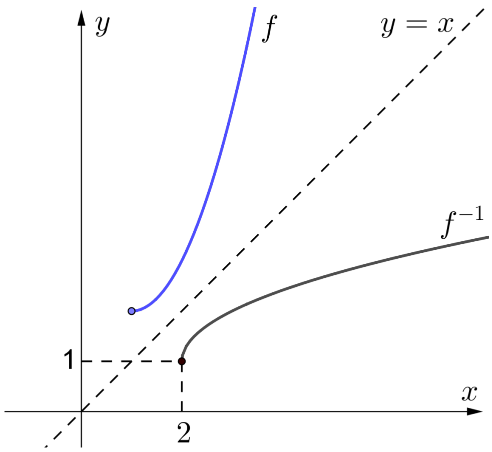


Figura 1.4: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 3$ e de sua inversa $f^{-1}(x) = (2 + \sqrt{4x-8})/2$.

Definição 7 Sejam a função $f : X \to Y$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, tal que $I \subset X$. Assim, f é dita:

(a) **Crescente** em I (respectivamente estritamente crescente em I) se, para quaisquer $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$(respectivamente $f(x_1) < f(x_2)$).

(b) **Decrescente** em I (respectivamente estritamente decrescente em I) se, para quaisquer $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) > f(x_2)$).

Nesses casos, dizemos que f é **monótona** em I. Uma consequência das definições 6 e 7 é o seguinte:

Corolário 1 Uma função $f : X \to Y$ é invertível em $I \subset X$ se é estritamente crescente (ou estritamente decrescente) no intervalo I.

Exemplo 6 A função $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$, do Exemplo 1, é crescente em $I = (1, +\infty)$, pois dados $x_1, x_2 \in [\,1, +\infty)$, com $x_1 < x_2$, temos que

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1},$$

isto é,

$$2 + \sqrt{x_1 - 1} < 2 + \sqrt{x_2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$

daí temos,

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Segue então do Corolário 1 que f é invertível em I.

1.2 Limite

Embora o cálculo infinitesimal tenha surgido com Newton e Leibniz no século XVII, a sua formalização ocorreu apenas no século XIX por Cauchy[5] e Weierstrass[6]. A seguir, apresentaremos noções de *limite* e algumas de suas propriedades.

Dada uma função, muitas vezes é necessário saber qual o seu comportamento quando x se aproxima de um ponto x_0, mesmo a função não existindo nesse ponto. Daí, surgiu a ideia de *limite* de uma função.

1.2.1 Definição e exemplos

Definição 8 (**Definição de limite**) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, tal que $x_0 \in I$ e a função $f : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$, onde $I - \{x_0\}$ significa o conjunto I exceto o elemento x_0. Dizemos

[5]Augustin-Louis Cauchy, 1789 - 1857, matemático francês.
[6]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815 - 1897, matemático alemão.

que o limite de f, quando $x \mapsto x_0$ (lemos x tende a x_0), existe e é igual a L e, denotamos por

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = L,$$

quando para todo $\epsilon > 0$, existe algum $\delta > 0$, tal que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Assim, se $x_0 \in I$, podemos dizer que o limite de uma função f, quando $x \mapsto x_0$, é L se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, o que implica em $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$, como podemos ver na Figura 1.5. Podemos, sempre que possível, usar a visão geométrica para calcular o limite, mas não provar o resultado do limite.

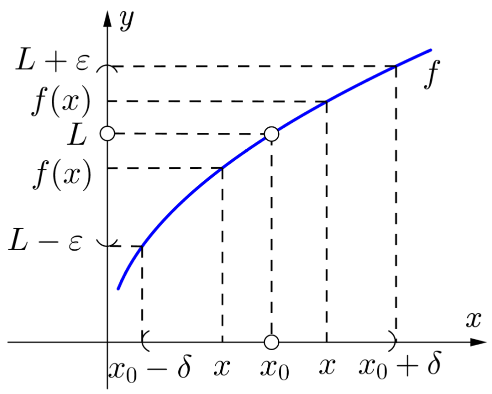


Figura 1.5: Limite de uma função.

Em matemática, usa-se, geralmente, as letras gregas ϵ (épsilon) e δ (delta) para se referir a diferenças pequenas.

Exemplo 7 Mostre, pela definição, que $\lim_{x \mapsto 1} (2x - 1) = 1$.

Demonstração: Pela definição de limite, temos que mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe sempre um $\delta > 0$, tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implica em $|f(x) - L| < \epsilon$. Neste caso, $x_0 = 1$, $f(x) = 2x - 1$ e $L = 1$. Assim, $|x - 1| < \delta$ implica em $|(2x - 1) - 1| < \epsilon$, isto é, $|x - 1| < \delta$ implica em $|2x - 2| < \epsilon$, isto é, $|x - 1| < \delta$ implica em $2|x - 1| < \epsilon$, ou seja, $|x - 1| < \delta$ implica em $|x - 1| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Portanto, se $|x - 1| < \delta$ e $\delta \leq \dfrac{\epsilon}{2}$, então, $|(2x - 1) - 1| < \epsilon$. $\square$

Notemos que não é necessário que a função esteja defina em $x = x_0$, pois em muitos casos f não existe em x_0.

Teorema 2 (**Unicidade do limite**) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, tal que $x_0 \in I$ e a função $f : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L_2$, então, $L_1 = L_2$.

Em (Iezzi, 2010, p. 25), podemos encontrar a demonstração do Teorema 2.

Teorema 3 (**Teorema do confronto**) Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, para todo $x \in I - \{x_0\}$, onde I é um intervalo aberto contendo x_0 e, se $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = L$, então, $\lim\limits_{x \mapsto x_0} h(x) = L$.

Demonstração: Tomando algum $\epsilon > 0$, como $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L$, então, existe $\delta_1 > 0$, tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$ implica em $|f(x) - L| < \epsilon$. Do mesmo modo, se $\lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = L$, então, existe $\delta_2 > 0$, tal que $0 < |x - x_0| < \delta_2$ implica em $|f(x) - L| < \epsilon$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então, se $0 < |x - x_0| < \delta$, temos $|f(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - L| < \epsilon$, isto é, $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ e $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$. Mas, por hipótese $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, então, $L - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \epsilon$, ou seja, $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$. Assim, de $0 < |x - x_0| < \delta$, temos que $|h(x) - L| < \epsilon$. Portanto, $\lim\limits_{x \mapsto x_0} h(x) = L$. $\square$

1.2.2 Propriedades

Para simplificar os cálculos, a proposição a seguir apresenta algumas das regras operatórias para limites.

Proposição 4 Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, tal que $x_0 \in I$, uma constante $k \in \mathbb{R}$, um inteiro n e duas funções $f, g : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = L_2$, então:

(a) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} k = k$

(b) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = k \cdot L_1$

(c) Se $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L$, então, $\lim\limits_{x \mapsto x_0} |f(x)| = |L|$

(d) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

(e) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$

(f) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$

(g) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x)\right]^n = (L_1)^n$

(h) $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \ln[f(x)] = \ln\left[\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x)\right]$, se $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) > 0$

Demonstração:

(a) Devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in I$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ implica em $|f(x) - k| < \epsilon$. Com efeito, como $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \epsilon$ é sempre válido, o resultado segue.

(c) Se $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L$, então, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implica em $|f(x) - L| < \epsilon$. Por outro lado, pela Proposição 28-(c), temos $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \epsilon$, isto é, $||f(x)| - |L|| < \epsilon$. Observe que esse resultado é equivalente a $|L| - \epsilon < |f(x)| < |L| + \epsilon$ que, tomando $\epsilon = 1$, temos $|f(x)| < |L| + 1$, desde que $0 < |x - x_0| < \delta$.

(d) Mostraremos esta fórmula para o sinal positivo $(+)$ sendo que para o negativo $(-)$ é análogo. Sejam $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = L_2$ e $\epsilon > 0$ dado. Devemos mostrar que existe $\delta > 0$, tal que, $0 < |x - x_0| < \delta$ implica em $|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)|$. Como $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L_1$ e $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$ implica em $|f(x) - L_1| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Ainda, se $\lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = L_2$ e $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$, existe $\delta_2 > 0$, tal que $0 < |x - x_0| < \delta_2$ implica em $|g(x) - L_2| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $\delta > 0$ e, se $0 < |x - x_0| < \delta$, temos $|f(x) - L_1| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $|g(x) - L_2| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Daí, pela desigualdade triangular, segue $0 < |x - x_0| < \delta$ implica em $|\,[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

(e) Por hipótese, para todos $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ dados, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tal que, $0 < |x - x_0| < \delta_1$ implica em, $|f(x) - L_1| < \epsilon_1$ e $0 < |x - x_0| < \delta_2$ implica em $|g(x) - L_2| < \epsilon_2$. Então, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $|f(x) \cdot g(x)| - L_1 \cdot L_2| = |f(x) \cdot g(x) - L_1 g(x) + L_1 \cdot g(x) - L_1 \cdot L_2| \leq |(f(x) - L_1) \cdot g(x)| + |L_1 \cdot (g(x) - L_2)| = |(f(x) - L_1)| \cdot |g(x)| + |L_1| \cdot |(g(x) - L_2)| < \epsilon_1 \cdot |g(x)| + |L_1| \cdot \epsilon_2$. Mas, como $\lim\limits_{x \mapsto x_0} g(x) = L_2$, pelo item (c) segue que $|g(x)| < |L_2| + 1$, desde que $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Então, para $0 < |x - x_0| < \delta$ tem-se $|f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot L_2| < \epsilon_1 \cdot (1 + |L_2|) + |L_1| \cdot \epsilon_2$. Assim, tomando $\epsilon_1 \leq \dfrac{\epsilon}{2(1 + |L_2|)}$ e $\epsilon_2 \leq \dfrac{\epsilon}{2|L_1|}$, temos que para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implica em $|f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot L_2| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

$\square$

A demonstração dos itens (b), (f), (g) e (h) são mais sofisticadas, podendo ser encontradas em (Iezzi, 2010, p. 34-36). Observe que o item (g) é um caso particular do item (e), para uma quantidade n de funções, tais que $f(x) = g(x) = ... = h(x)$. Já o item (h) é uma particularidade da função ln ser contínua.

1.2.3 Limites Laterais

Em muitos casos, há a necessidade de estudar o comportamento (limite) da função quando x se aproxima de um número x_0, tanto pela direita quanto pela esquerda. A seguir daremos algumas definições para melhor compreender essas peculiaridades.

Definição 9 Sejam um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com $x_0 \in I$, e $f : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ uma função. Representamos por

(a) $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} f(x) = L$, quando o número L é o **limite à direita** da função, se $x \mapsto x_0$ pela direita. Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

(b) $\lim\limits_{x \mapsto x_0^-} f(x) = L$, quando o número L é o **limite à esquerda** da função, se $x \mapsto x_0$ pela esquerda. Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Teorema 5 Sejam um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com $x_0 \in I$, e $f : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ uma função. Temos $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto x_0^-} f(x) = L$.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em Iezzi et al. (2010) e, uma consequência imediata é que, se $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \mapsto x_0^-} f(x) = L$, então, dizemos que $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x)$ não existe.

1.2.4 Limite no infinito

O conceito de limite pode ser estendido, em vez de x_0 podemos ter $\pm\infty$, isto é, adiante veremos os casos do comportamento da função quando $x \mapsto +\infty$ e $x \mapsto -\infty$.

Definição 10

(a) Sejam um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com $I = (x_0, +\infty)$, e $f : I \to \mathbb{R}$. Denotamos por

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = L,$$

quando para todo $\epsilon > 0$, existe um $N > 0$, tal que $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

(b) Sejam um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com $I = (-\infty, x_0)$, e $f : I \to \mathbb{R}$. Denotamos por

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = L,$$

quando para todo $\epsilon > 0$, existe um $M < 0$, tal que $x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Exemplo 8 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{x^2+1}, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

O gráfico de f é ilustrado na Figura 1.6, onde vemos, facilmente, que $\lim_{x \mapsto 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \mapsto 0^-} f(x) = -1$, ou seja, $\lim_{x \mapsto 0} f(x)$ não existe, e $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$.

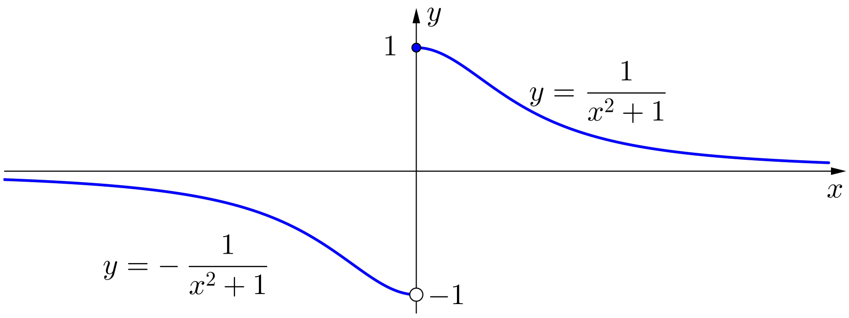


Figura 1.6: Limites laterais e limite no infinito de f.

1.2.5 Continuidade

Quando de uma função não tem “saltos” em todos os pontos de seu domínio, dizemos que a função é contínua e sua definição é apresentada a seguir:

Definição 11 Sejam um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com $x_0 \in I$, e uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em x_0 se, e somente se,

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.1}$$

Se f não é contínua em x_0, dizemos que é descontínua em x_0. Ainda, f é dita contínua se for para todo x_0 em seu domínio.

Para que tenhamos a equação (1.1), antes, $f(x_0)$ tem que existir, bem como $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x)$.

Exemplo 9 A função definida no Exemplo 8, é descontínua em $x_0 = 0$, visto que $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} (f(x)) \neq \lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x)$, isto é, o gráfico "salta" nesse ponto conforme a Figura 1.6 e, pelo Teorema 5, segue que $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x)$ não existe. Em contrapartida, a função definida no Exemplo 1, é contínua em $x_0 = 5$, já que $\lim\limits_{x \mapsto 5^+} (2 + \sqrt{x-1}) = \lim\limits_{x \mapsto 5^-} (2 + \sqrt{x-1}) = 4$.

1.3 Derivada

A derivada é um tipo especial de limite que determina, por exemplo, velocidade de um objeto ou a inclinação da reta tangente a uma curva e pode ser interpretada com a taxa de variação de determinada grandeza.

1.3.1 Definição e exemplos

Sejam I um intervalo aberto, com $x_0 \in I$, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $P = (x_0, f(x_0))$ um ponto pertencente ao gráfico de f. Tomando $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, com $h \in \mathbb{R} - \{0\}$, outro ponto do gráfico de f. A reta que passa pelos pontos P e Q é secante ao gráfico de f, conforme Figura 1.7(a) e sua inclinação (m_{sec}) é dada por

$$m_{sec} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.2}$$

Em (1.2), fazendo $h \mapsto 0$, também estaremos fazendo $Q \mapsto P$. Assim, a **inclinação da reta tangente** a f em P é definida por

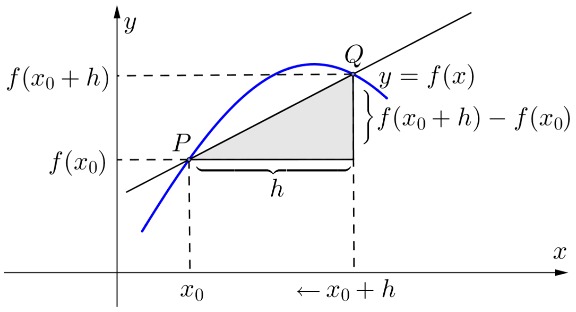
$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

caso esse limite exista. Neste caso, tal limite é denominado a **derivada** de f em x_0, sendo denotado por $f'(x_0)$. Deste modo,

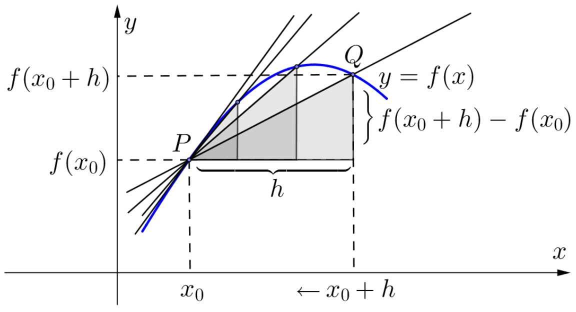
$$f'(x_0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.3}$$

Fazendo, em (1.3), $h = x - x_0$, temos que se $h \mapsto 0$, consequentemente $x \mapsto x_0$. Daí, segue que

$$f'(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1.4}$$



(a) Reta secante ao gráfico de f.



(b) Reta tangente ao gráfico de f.

Figura 1.7: Reta secante e reta tangente ao gráfico de uma função.

O conceito de derivada, exposto acima, pode ser ampliado. Em vez de calcularmos a inclinação da reta tangente em um determinado ponto x_0, podemos calcular a inclinação da reta tangente para qualquer x onde o limite existe. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1.5}$$

A derivada de uma função y em x pode, também, ser representada por y' ou $\dfrac{dy}{dx}$.

Exemplo 10 Se $f(x) = x^2 - 1$, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \mapsto 0} \frac{(x+h)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 1 - x^2 + 1}{h} \\ &= \lim_{h \mapsto 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \mapsto 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

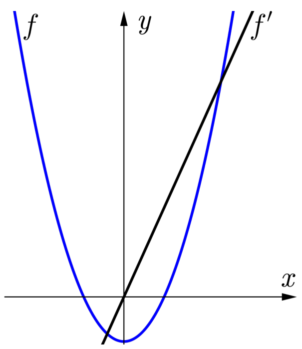


Figura 1.8: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$ e de $f'(x) = 2x$.

Um caso particular da inclinação da reta tangente dessa função é para $x = 3$, onde $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. A Figura 1.8 ilustra, nesse exemplo o gráfico de f e f'.

Teorema 6 Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in I$, então, f é contínua em x_0.

A demostração do Teorema 6 pode ser encontrada em (Flemming e Gonçalves, 2007, p. 126) e, notemos que sua recíproca não é válido, pois, existem funções contínuas em x_0 e que não são deriváveis nesse ponto. Por exemplo, $f(x) = |x|$ é contínua em x_0, mas não é derivável.

Se f é derivável em todo $x_0 \in I$, dizemos somente que f é derivável em I. Assim, a função $f' : I \to \mathbb{R}$ fica bem definida, pois associa a cada $x \in I$ a derivada $f'(x)$ de f em x_0.

1.3.2 Regras de Derivação

A seguir, apresentaremos algumas regras de derivação, afim que facilitar o cálculo de derivadas e deixarmos de recorrer a definição formal por limite.

Proposição 7 (**Derivada da função constante**) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função constante, então, f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja a função constante $f(x) = k$. Aplicando (1.5), para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos $f'(x) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{k-k}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} 0 = 0.$ □

Proposição 8 (**Derivada da função potência**) Sejam $n \in \mathbb{Z}_+$ (conjunto dos números inteiros positivos) e $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = x^n$, então, f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Inicialmente recordemos que, do Binômio de Newton, temos $x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + ... + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$, ver (Guidorizzi, 2001, p. 11). Daí, pela equação (1.4), segue

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \mapsto x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + ... + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ &= x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + ... + x_0 x_0^{n-2} + x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$. $\square$

Proposição 9 (**Propriedades**) Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$, com $I \subset \mathbb{R}$ aberto, funções deriváveis em $x_0 \in I$ e, seja ainda, k uma constante, então:

(a) (**Derivada do produto de uma constante por uma função**) $k \cdot f$ é derivável e

$$(k \cdot f)'(x_0) = k \cdot f'(x_0). \tag{1.6}$$

(b) (**Derivada da soma/diferença**) $f \pm g$ é derivável e

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0). \tag{1.7}$$

(c) (**Derivada do produto**) $f \cdot g$ é derivável e

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \tag{1.8}$$

(d) $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x_0)$ é derivável e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}. \tag{1.9}$$

(e) (**Derivada do quociente**) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0)$ é derivável e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}, \tag{1.10}$$

desde que $g(x_0) \neq 0$.

Demonstração:

(a) A demonstração desse item pode ser encontrada em (Flemming e Gonçalves, 2007, p. 134).

(b) Provaremos que $f - g$ é derivável em $x_0 \in I$, sendo o outro caso $(f + g)$ inteiramente análogo. Notemos que

$$\frac{(f-g)(x) - (f-g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Pelas propriedades de limites, temos que $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ existem, sendo assim, $(f-g)'(x_0)$ também existe. Daí,

$$\begin{aligned}(f-g)'(x_0) &= \lim_{x\mapsto x_0}\frac{(f-g)(x)-(f-g)(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\mapsto x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\\ &= \lim_{x\mapsto x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\mapsto x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

Portanto, $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$.

(c) A demonstração desse item pode ser encontrada em (Flemming e Gonçalves, 2007, p. 135-136).

(d) Seja um intervalo $J\subset I$, com $f(x)\neq 0$, para $x\in J$. Assim, $x\in J-\{0\}$ o que implica em

$$\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right]=-\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]\cdot\frac{1}{f(x)f(x_0)}.$$

Daí, pela equação (1.4), e pela Definição 11, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\mapsto x_0}\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right] &= \lim_{x\mapsto x_0}\left[-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{f(x)f(x_0)}\right]\\ &= -f'(x_0)\frac{1}{[f(x_0)]^2}.\end{aligned}$$

(e) Pela Proposição 1.8, temos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)+f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)\\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)}-f(x_0)\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 11 Se $f(x)=2x^2+2$, então, pelas proposições já vistas, segue que $f'(x)=\frac{d}{dx}(2x^2)+\frac{d}{dx}(2)=2\cdot\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(2)=2\cdot 2\cdot x^{2-1}+0=4x$.

Exemplo 12 Se $f(x)=\dfrac{2x^2+2}{3x+1}$, então, pela derivada do produto e do quociente, temos que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}(2x^2+2)\cdot(3x+1)+(2x^2+2)\cdot\frac{d}{dx}(3x+1)}{(3x+1)^2} \\
&= \frac{(4x)(3x+1)+(2x^2+2)(3)}{9x^2+6x+1} = \frac{18x^2+4x+6}{9x^2+6x+1}.
\end{aligned}
$$

Proposição 10 (**Regra da Cadeia**) Sejam os intervalos abertos I e J e as funções $g : I \to J$ e $f : J \to \mathbb{R}$. Se g é derivável em $x_0 \in I$ e f é derivável em $g(x_0) \in J$, então, $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ é derivável em x_0, com

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

A demostração dessa proposição é um pouco mais elaborada e pode ser encontrada em (Muniz Neto, 2015, p. 154-155).

Exemplo 13 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, tal que $f(x) = (3x^2+1)^3$, tomando $f(x) = g(u) = u^3$, onde $u = 3x^2+1$, temos $f'(x) = 3u^2$ e $u' = 6x$. Assim, pela regra da cadeia, temos $f'(x) = g'(u)\cdot u' = (3u^2)u' = 3(3x^2+1)6x = 54x^3+18x$.

Proposição 11 (**Derivada da Função Inversa**) Sejam os intervalos I e J e a função bijetora $f : I \to J$, derivável em todo I. Se $f'(x_0) \neq 0$, temos que a função inversa de f, definida por $f^{-1} : J \to I$ e derivável em $y_0 = f(x_0) \in J$, com $x_0 \in I$, tem derivada,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstração: Queremos mostrar que $(f^{-1})'$ existe no ponto y_0. Inicialmente note que:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}}$$

sempre que $y \neq y_0$. Seja $x = f^{-1}(y)$, com por hipótese f^{-1} é contínua em y_0 (pois f^{-1} é injetora) temos que $\lim_{y \mapsto y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$, ou seja, quando $y \mapsto y_0$, $f^{-1}(y) \mapsto f^{-1}(y_0)$, isto é, $x \mapsto x_0$. Daí, pela equação (1.4), pela Proposição 4 e por f ser derivável em

$x_0 = f^{-1}(y_0)$, com $f'(x_0) \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \mapsto y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \mapsto y_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \\ &= \frac{1}{\displaystyle\lim_{y \mapsto y_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 14 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x + 1$, como f é crescente, logo, f é invertível e $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $(f^{-1})(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Daí, pela regra da derivação da função inversa, temos que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}(2x+1)} = \frac{1}{2}.$$

1.3.3 Teorema do Valor Médio - TVM

Teorema 12 (**Teorema do Valor Médio - TVM**) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b), então, existe pelo menos um ponto $x_0 \in (a, b)$, tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0). \tag{1.11}$$

Demonstração: Para demonstrar este teorema assumiremos como válido o Teorema de Rolle[7] que diz que dada uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) se $f(a) = f(b)$, então, existe um ponto $x_0 \in (a, b)$, tal que, $f'(x_0) = 0$. Prosseguindo na demonstração do TVM, seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, com,

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

[7] A demonstração do Teorema de Rolle pode ser encontrada em (Muniz Neto, 2015, p. 161-162).

então, g é claramente contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Além disso,

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \\ g(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $g(b) = g(a)$. Daí, como g é a soma de funções contínuas em $[a, b]$, logo, g também é contínua em $[a, b]$, do mesmo modo, g é derivável em (a, b). Pelo Teorema de Rolle, existe $x_0 \in (a, b)$, tal que, $g'(x_0) = 0$. Mas, $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Portanto, $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. $\square$

O TVM nos diz que a reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(x_0, f(x_0))$, é paralelo à reta secante ao gráfico de f, que passa pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, como podemos ver na Figura 1.9.

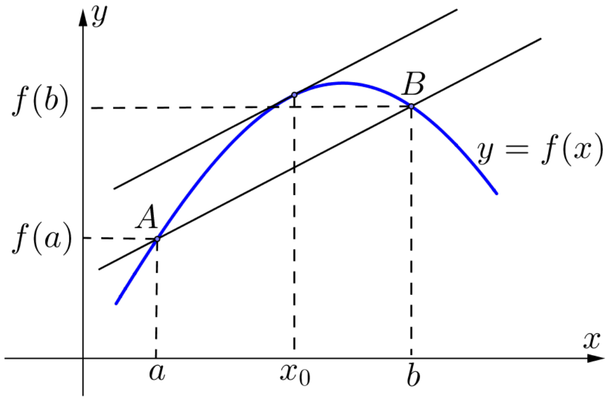


Figura 1.9: Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio.

1.4 Integral

Para calcular a área de uma figura tomamos como unidade de medida a área de um quadrado de lados de comprimentos unitário. Assim, por exemplo, fica fácil calcular a área de um retângulo e, geometricamente, vemos que a área de um triângulo é igual a metade da área de um retângulo com mesma base e altura. Como conseguimos decompor em triângulos qualquer figura do plano delimitada por retas, temos que a área dessa figura é obtida somando as áreas dos triângulos. Quando lidamos com figuras limitadas por curvas os cálculos não ficam mais triviais. No século III a.C Arquimedes, utilizando-se de algumas técnicas e do Método da Exaustão, conseguiu calcular a área de um círculo com considerável aproximação. E, somente no século XVII, surgiram outras técnicas para a mesma finalidade, tendo destaque os trabalhos de Leibniz. A seguir, apresentaremos o conceito de integral como a área sob uma curva por meio de limite.

1.4.1 Integral segundo Riemann

Sejam $[a, b]$ um intervalo e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, tal que, $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Definição 12 Uma **partição** P de $[a, b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, tal que, $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Uma partição P divide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, cada um deles da forma $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, 2, ..., n$.

Definição 13 Denominamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, com $i = 1, 2, ..., n$, como sendo a **amplitude** do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Não necessariamente essas amplitudes são todas iguais, a maior delas (subintervalo de maior comprimento) chamamos de **norma da partição** e representamos por $\|P\| = \overline{\Delta} x_i$, com $i = 1, 2, ..., n$.

Para calcular a área $\mathcal{A}$, da região compreendida entre a curva f, o eixo x e as retas verticais $x = a$ e $x = b$, conforme ilustra a Figura 1.10, particionamos $[a, b]$ de modo

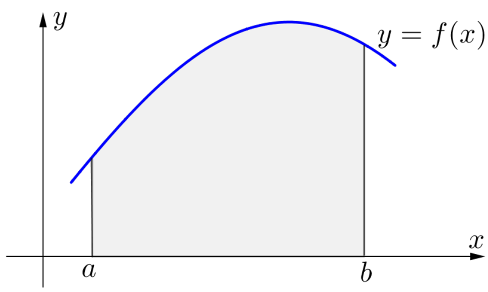


Figura 1.10: Área sobre uma curva.

a dividi-lo em n subintervalos, sendo cada um deles da forma $[x_{i-1}, x_i]$.

Seja m_i, com $i = 1, 2, ..., n$, o valor mínimo da função em todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, o que implica dizer que $f(m_i)$ é o valor da função nesse ponto. Então, a **soma**

inferior da partição P e da função f, denotada por $s(P,f)$, é uma aproximação por falta da área da região, que é dada por

$$s(P,f) = f(m_1)\Delta x_1 + f(m_2)\Delta x_2 + ... + f(m_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i,$$

onde $\sum_{i=1}^{n}$ simboliza o somatório de $i = 1$ até $i = n$. Por outro lado, seja M_i o valor máximo da função em cada um dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Então, a soma superior da partição P e da função f, denotada por $S(P,f)$, é uma aproximação por excesso da área da região, que é dada por

$$S(P,f) = f(M_1)\Delta x_1 + f(M_2)\Delta x_2 + ... + f(M_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i.$$

Seja $\overline{x}_i$ um valor arbitrário em cada um dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Por $\overline{x}_i$ obtemos também um valor aproximado da área da região. Assim, seja $\overline{s}(P,f)$ a soma da partição P e da função f nesses pontos, temos:

$$\overline{s}(P,f) = f(\overline{x}_1)\Delta x_1 + f(\overline{x}_2)\Delta x_2 + ... + f(\overline{x}_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i,$$

que é denominada **Soma de Riemann**[8] de f em relação a partição P. Daí, como

$$f(m_i) \leq f(\overline{x}_i) \leq f(M_i), \quad \text{para todo } i = 1, 2, ..., n.$$

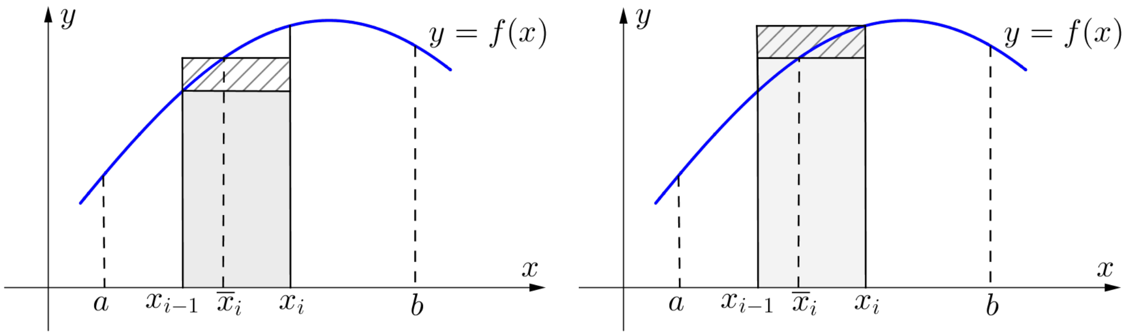
temos:

$$s(P,f) \leq \overline{s}(P,f) \leq S(P,f) \tag{1.12}$$

Ao fazermos n tender ao infinito estamos aumentando, indefinidamente, o número de pontos da partição e diminuindo as amplitudes dos intervalos, isto é, $n \mapsto +\infty$ implica que $\|P\| = \overline{\Delta} x_i \mapsto 0$. Logo,

$$\lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} s(P,f) = \lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} S(P,f) = \mathcal{A}.$$

[8]Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 - 1866, matemático alemão.



(a) Soma inferior (b) Soma superior

Figura 1.11: Soma de Riemann.

Assim, como vimos em (1.12), pelo Teorema 3, segue que

$$\lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} \overline{s}(P, f) = \mathcal{A},$$

para qualquer escolha de $\overline{x}_i$ em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, 2, ...n$.

Definição 14 Sejam a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, o número $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ e P uma partição de $[a, b]$. Se a maior das amplitudes $(\overline{\Delta} x_i)$ do intervalo tende a zero, isto é

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i \mapsto \mathcal{L},$$

ou seja,

$$\lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i \right] = \mathcal{L},$$

isto é equivalente a dizer que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i - \mathcal{L} \right| < \epsilon,$$

para toda partição P de $[a, b]$, com $\overline{\Delta} x_i < \delta$. Denotamos $\mathcal{L}$, por

$$\mathcal{L} = \lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i \right] = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1.13}$$

O símbolo $\displaystyle\int_a^b$ representa a integral de a até b.

Observação 1

(a) Se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$, então, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é a área da região compreendida entre a curva f, o eixo x e as retas verticais $x = a$ e $x = b$.

(b) Se $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\mathcal{A}$.

Em muitos casos, chamamos $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ de **"integral definida"** de f em $[a,b]$. Os símbolos, $\displaystyle\int$ e dx, assim, como o nome *integral* foram introduzidas por Leibniz para sugerir a maneira pela qual o limite é obtido.

Suponhamos, inicialmente, que $f(x) \geq 0$ em todo intervalo $[a,b]$, isto é, que nenhuma porção da curva está abaixo do eixo x. Daí, definimos a integral como a soma de pequenas quantidades $f(\overline{x}_i)\Delta x_i$, porém, este processo também tem significado se alguns ou todos os valores de $f(\overline{x}_1)$ forem negativos. Geometricamente, a integral definida de f é a soma algébrica das áreas limitadas pela curva e o eixo x, sendo que as áreas contidas abaixo do eixo x são contadas como negativas e as demais como positivas. Uma ilustração dessa situação está na Figura 1.12.

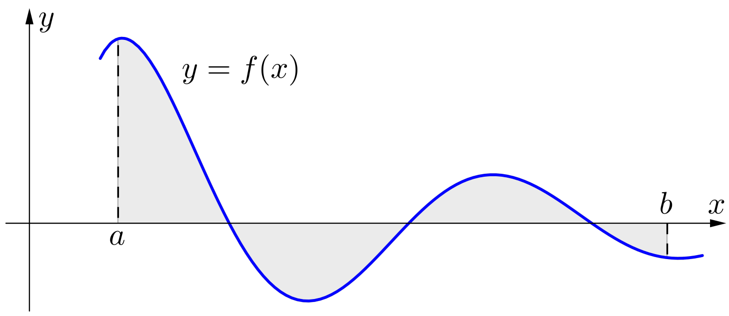


Figura 1.12: Integral negativa e positiva.

Assim, se $b < a$ temos que $\Delta x_i < 0$, isso quer dizer que o valor da integral de b para a será negativo, ou seja,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.14}$$

Em tempo, quando os limites de integração forem iguais, definimos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{1.15}$$

1.4.2 Propriedades

Iremos, agora, ilustrar algumas propriedades pré-operatórias de integral.

Proposição 13 Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, funções integráveis e k constante, então

(a) $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

(b) kf é integrável e

$$\int_a^b k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int_a^b f(x)\ dx.$$

(c) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então,

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq 0.$$

(d) $c \in [a, b]$ um ponto, então,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx. \tag{1.16}$$

Demonstração:

(a) Temos, por hipótese, que f e g são integráveis em $[a, b]$. Seja P uma partição de $[a, b]$, com $\overline{\Delta} x_i \mapsto 0$, quando $n \mapsto \infty$, então, temos que

$$\lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i \right] = \int_a^b f(x)\ dx \quad \text{e} \quad \lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} \left[\sum_{i=1}^{n} g(\overline{x}_i)\Delta x_i \right] = \int_a^b g(x)\ dx.$$

Pelas propriedades de limite, temos que os limites abaixo existem e,

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx &= \lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f(\overline{x}_i) + g(\overline{x}_i) \right] \Delta x_i \\ &= \lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x}_i)\Delta x_i \right] \\ &= \lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i \right] + \lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} \left[\sum_{i=1}^{n} g(\overline{x}_i)\Delta x_i \right]. \end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$

(b) Por hipótese, f é integrável em $[a,b]$. Daí, o limite da função no ponto $\overline{x}_i$ da partição P existe. Assim, pelas propriedades do limite temos:

$$\begin{aligned}\int_a^b k \cdot f(x)\, dx &= \lim_{\overline{\Delta x_i} \mapsto 0} \left[\sum_{i=1}^{n} k \cdot f(\overline{x}_i)\Delta x_i\right] = k \cdot \lim_{\overline{\Delta x_i} \mapsto 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i\right] \\ &= k \cdot \int_a^b f(x)\, dx.\end{aligned}$$

(c) Com efeito, se $f(x) \geq 0$ no intervalo $[a,b]$, então, pela definição de integral, temos que $\int_a^b f(x)\, dx$ representa a área da região compreendida entre a curva de f, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, que é um número real maior ou igual a zero.

$\square$

A demonstração da Proposição 13-(d) é mais elaborada e pode ser encontrada em (Muniz Neto, 2015, p. 236), entretanto, podemos ter uma ideia intuitiva, ao menos para o caso em que f é não negativa, através da visão geométrica da área, conforme Figura 1.13.

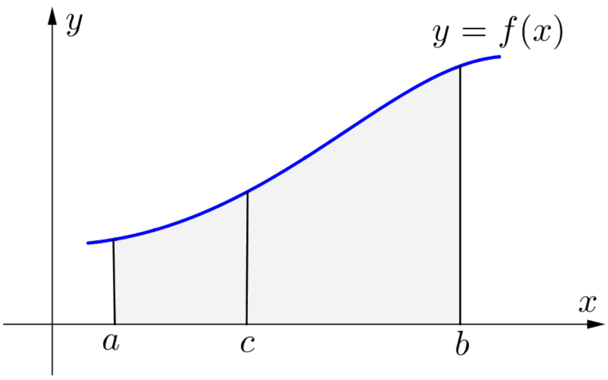


Figura 1.13: Propriedade da integral definida.

Antes de entrarmos no Teorema Fundamental do Cálculo definiremos, a seguir, a primitiva de uma função.

Definição 15 (**Primitiva de uma função**) Seja a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Chamamos de uma primitiva de f a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 15 Se $f(x) = x^2$, então, uma primitiva de f é $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, pois $F'(x) = x^2$. Observe também que se $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3$ temos também que $F'(x) = f(x)$.

Proposição 14 Se F é a primitiva de f e se $k \in \mathbb{R}$ é uma constante, então, a função $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que, $G(x) = F(x) + k$, também é primitiva de f.

Demonstração: De fato, como F é uma primitiva de f em $[a, b]$, temos que F' e f são iguais em $[a, b]$. Daí, $G'(x) = \dfrac{d}{dx}[F(x) + k] = F'(x) + 0 = f(x)$. $\square$

Definição 16 (**Integral Indefinida**) Se F é uma primitiva de f, então, a expressão $F(x) + k$ é denominada **integral indefinida** de f e, representada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k.$$

Chamamos de integração o processo de calcular a integral indefinida de uma função. O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona primitivas de funções com integrais definidas, foi daí que surgiu a notação $\displaystyle\int$ para integral indefinida.

1.4.3 Teorema Fundamental do Cálculo - TFC

O Lema a seguir, é conhecido como o **Teorema da Média** ou **Teorema do Valor Médio para Integrais**, visto ser uma analogia ao Teorema 12.

Lema 15 Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, então, existe $x_0 \in [a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b - a).$$

Demonstração: Da definição de integral de f em $[a, b]$, temos que,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \mapsto 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i$$

para toda partição P, para todo $\overline{x}_i \in [\,x_{i-1}, x_i]$ e pela equação (1.12) temos

$$s(P, f) \leq \overline{s}(P, f) \leq S(P, f),$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i,$$

Notemos que $f(m_i)$ e $f(M_i)$ são constantes e, se somarmos todas as amplitudes do intervalo $[a, b]$ chegamos ao tamanho do intervalo, assim, pelo Teorema Weierstrass ou

Valor Extremo[9], como $[a,b]$ é um intervalo fechado e f é contínua em $[a,b]$, existem $m, M \in [\ x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ para todo $x \in [a,b]$, em particular,

$$f(m) \leq f(\overline{x}_i) \leq f(M).$$

Assim,

$$f(m)\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i \leq f(M)\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i,$$

isto é,

$$f(m)(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i \leq f(M)(b-a).$$

Calculando o limite quando $\overline{\Delta} x_i \mapsto 0$, segue

$$\lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} [f(m)(b-a)] \leq \lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i\right] \leq \lim_{\overline{\Delta} x_i \mapsto 0} [f(M)(b-a)].$$

Daí,

$$f(m)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq f(M)(b-a),$$

ou seja,

$$f(m) \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx \leq f(M).$$

Isso significa que $\dfrac{1}{(b-a)} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ está compreendido entre o valor máximo e o valor mínimo de f, em $[a,b]$. Por hipótese, f é contínua em $[a,b]$, então, pelo Teorema 12 (TVM), existe $x_0 \in [a,b]$, tal que,

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx = f(x_0).$$

$\square$

Teorema 16 (**Teorema Fundamental do Cálculo - TFC**) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$. A função F, dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

é derivável em todo intervalo $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$.

[9] A demostração desse teorema pode ser encontrado em (Guidorizzi, 2001, p. 122).

Demonstração: Temos que mostrar que F é derivável em (a,b), isto é,

$$\lim_{\Delta x_i \mapsto 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

existe para todo $x \in (a,b)$ e que $F'(x) = f(x)$. Assim, para todo $x \in [a,b]$, pela equação (1.14), pela Proposição (1.16) e pelo Teorema da Média, temos

$$\begin{aligned} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{\displaystyle\int_x^a f(t)\,dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} \\ &= \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{f(x_0)(b-a)}{\Delta x} = \frac{f(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f(x_0). \end{aligned}$$

Como f, por hipótese, é contínua em $[a,b]$, e como $x_0 \in [x, x+\Delta x]$, se $\Delta x \mapsto 0$ temos que $f(x_0) \mapsto f(x)$, isto é

$$\lim_{\Delta x_i \mapsto 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Portanto $F'(x) = f(x)$. □

Corolário 17 Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$, então,

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a),$$

onde G é uma primitiva de f em a, b.

Demonstração: Seja $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Do TFC F é primitiva de f, já que $F'(x) = f(x)$. Seja G outra primitiva de f, ou seja,

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_a^x f(t)\,dt + C, \\ G(b) &= \int_a^b f(t)\,dt + C, && (1.17) \\ G(a) &= \int_a^a f(t)\,dt + C = C, && (1.18) \end{aligned}$$

pois, $\int_a^a f(t) = 0$. Subtraindo (1.18) de (1.17), obtemos, portanto,

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a).$$

□

Notemos que

$$\int_a^b G'(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b,$$

isto é, a integral da derivada de uma função, que é uma primitiva, é a própria primitiva calculada nos limites de integração.

Exemplo 16 Vamos calcular $\int_{-1}^{0} (x^3 + 3x - 1)\, dx$.

$$\int_{-1}^{0} (x^3 + 3x - 1)\, dx = \int_{-1}^{0} x^3\, dx + \int_{-1}^{0} 3x\, dx - \int_{-1}^{0} 1\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{3x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} - x\Big|_{-1}^{0} = -\frac{11}{4}.$$

Pois, basta lembrar que

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

com C constante, desde que $n \neq -1$, uma vez que, pela Proposição, 8 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$.

Capítulo 2

Funções Exponencial e Logarítmica

Há cerca de 350 anos, com a expansão das navegações, comércio e astronomia, surgiu a necessidade resolver grandes expressões aritméticas de forma rápida e precisa, visto que a matemática não era desenvolvida como nos dias de hoje. As dificuldades consistiam em calcular, com certa exatidão, multiplicações, divisões, potenciações e radiciações. Uma ideia foi reduzir multiplicação, divisão e radiciação em processos de somas e subtrações, que eram mais fáceis de serem feitas.

Nessa mesma época, Bürgi[1] e Napier[2] publicaram, de forma independente, as primeiras tábuas de logaritmos. Enquanto Bürgi deu enfoque algébrico, Napier deu abordagem geométrica. Essas tábuas eram compostas, basicamente, por duas colunas de números, onde cada numero à esquerda tem seu correspondente à direita, que é o seu logaritmo. Sendo assim, para calcular o produto de dois números, bastava somar os seus logaritmos correspondentes, resultando no logaritmo do produto, representado por um número à direita da tábua e o correspondente deste à esquerda era o resultado do produto inicialmente proposto. A divisão de dois números era semelhante, no lugar da soma utilizava-se subtração. O cálculo de potências consistia em multiplicar o expoente pelo logaritmo do número da base. Para efetuar radiciações bastava dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz. Observemos que as contas, utilizando-se das tábuas de logaritmos, se resumiam em somar e subtrair números.

Após a publicação da primeira tábua de logaritmos, Briggs[3] e Napier construíram uma nova tábua contendo os *logaritmos decimais* (logaritmos que conhecemos

[1] Jost Bürgi, 1552-1632, matemático e inventor suíço.
[2] Jhon Napier, 1550-1617, matemático e teólogo escocês.
[3] Henry Briggs, 1561 - 1630, matemático e professor universitário de geometria.

atualmente), facilitando sua utilização, pois explorava o sistema decimal de numeração. O termo *logaritmo* foi criação de Napier, e tem como o conceito de *"número de razão"*.

As tábuas de logaritmos se tornaram muito famosas na Europa e importantes para o desenvolvimento da ciência e tecnologia. Sua necessidade foi reconhecida, por exemplo, por Kepler[4] ao dizer que as tábuas de logaritmos *"aumentava vastamente o poder computacional do astrônomo"* e Laplace[5] quando afirmou que *"ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos"*.

Após Napier, veio Euler[6] com a definição de Função exponencial desvinculada da ideia de logaritmo, e voltada para o cálculo de área sob faixa de hipérbole, introduzindo o número e como base importante, tanto para logaritmos quanto para exponenciais. Nessa nova perspectiva, Euler definiu e^x como uma séries de potências e, pelas peculiaridades da derivada da função exponencial na base e, abriu as portas para as pesquisas na modelagem matemática.

Atualmente, com o surgimento da calculadora e computadores, realizar cálculos, utilizando as tábuas de logaritmos, é extremamente inconveniente. Entretanto, apesar das tábulas terem caído em desuso, novos estudos mostram que os logaritmos e as propriedades exponenciais fazem parte da explicação de vários eventos físicos, químicos, econômicos, etc. No capítulo 4, faremos um estudo de alguns destes modelos. Para a construção deste capítulo utilizamos as referências (Courant e Robbins, 2000), (Eves, 2011), (Flemming e Gonçalves, 2007), (Hughes-Hallett et al., 2009), (Iezzi et al., 2010), (Lima et al., 1996), (Lima, 1996), (Maor, 2008) e (Stewart, 2010).

2.1 Potenciação de Expoente Racional

Definição 17 Sejam a um número real positivo e $n > 0$ um inteiro. Definimos a^n como sendo o produto de n fatores iguais ao número a, isto é,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n}.$$

[4]Johannes Kepler, 1571 - 1630, matemático e astrônomo alemão.
[5]Pierre Simon Laplace, 1749 - 1827, matemático, astrônomo e físico francês.
[6]Leonhard Paul Euler, 1707 - 1783, matemático e físico suíço.

Daí, decorre imediatamente que

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n} = a^{m+n}, \tag{2.1}$$

com $m, n \in \mathbb{N}$. Para que (2.1) continue válida, estabelecemos que

$$a^0 = 1,$$

de modo que

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n.$$

Para ampliar a notação de potência, contemplando expoentes inteiros negativos, de modo a manter (2.1), assim, se $n \in \mathbb{Z}_+$ definimos

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1,$$

isto é,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Por outro lado, pela equação (2.1) segue que

$$a^n \cdot a^m \cdot a^r \cdot a^s = a^{n+m+r+s},$$

que pode ser estendido a um produto de n fatores. Particularmente, se tivermos um produto de r fatores iguais a a^n, pela equação (2.1), segue que

$$(a^n)^r = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot ... \cdot a^n}_{r} = a^{\overbrace{n + n + ... + n}^{r}} = a^{rn}.$$

Se $a \in \mathbb{R}_+$ (conjunto dos números reais positivos) e $p \in \mathbb{Z}_+$, então, o símbolo $\sqrt[p]{a}$ representa o número real positivo cuja p-ésima potência é igual a a, isto é, a única raiz positiva da equação $x^p - a = 0$. Portanto, as expressões

$$\sqrt[p]{a} > 0 \quad \text{e} \quad \left(\sqrt[p]{a}\right)^p = a,$$

definem a raiz p-ésima do número positivo a que é $\sqrt[p]{a}$. No entanto, se $n = \dfrac{q}{p}$, com

$q, p \in \mathbb{Z}$ e $p > 0$, então, para manter as propriedades anteriores, devemos ter

$$\left(a^{q/p}\right)^p = a^{(q/p)\cdot p} = a^q. \tag{2.2}$$

Assim, $a^{q/p} \in \mathbb{R}_+$ é o número cuja p-ésima potência é igual a a^q. Por definição de raiz, este número é igual a raiz p-ésima de a^q, isto é,

$$a^{q/p} = \sqrt[p]{a^q}. \tag{2.3}$$

Finalmente, se $s = \dfrac{q}{p}$ e $t = \dfrac{u}{v}$, pela equação (2.2), segue que

$$(a^s)^p = a^q \quad \text{e} \quad \left(a^t\right)^v = a^u,$$

que ainda pela equação (2.2) temos

$$\left(a^s \cdot a^t\right)^{pv} = (a^s)^{pv} \cdot \left(a^t\right)^{pv} = a^{spv} \cdot a^{tpv} = a^{qv} \cdot a^{up},$$

e pela equação (2.3), segue

$$a^s \cdot a^t = a^{(qv+up)/pv} = a^{(q/p)+(u/v)} = a^{s+t}.$$

Deste modo, fica claro que as propriedades de potenciação, para expoentes racionais, também são válidas.

Agora, e se x for um número irracional? Neste caso, usaremos a seguinte definição:

Definição 18 Sejam $a \in \mathbb{R}_+$ e x um número irracional, então, a^x é o número que satisfaz as propriedade anteriores.

Desta forma, se olharmos o gráfico da função a^x onde $x \in \mathbb{Q}$, os "buracos" correspondentes aos valores irracionais de x, foram preenchidos de forma a obter uma função crescente para todos os números reais. Para ilustrar essa situação perguntemos: Se $a = 10$, será que existe um número racional $r = \dfrac{m}{n}$, tal que, $10^{m/n} = 11$, com $m, n \in \mathbb{N}$? Suponhamos por absurdo que exista, então, pela propriedade de potência temos $10^m = 11^n$, o que significa que para qualquer $m \in \mathbb{N}$, 10^m é escrito como 1 seguido de m zeros, enquanto que, para $n \in \mathbb{N}$, 11^n termina em 1. Contradição! Logo, a solução de $10^r = 11$ é um número irracional.

Definição 19 Seja $a > 0$ um número real, tal que $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = a^x$, é denominada de **função exponencial** de base a.

Assim, pelas propriedades de potenciação devemos ter

(a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(b) $a^1 = a$

(c) $(a^x)^y = a^{xy}$;

(d) $(ab)^x = a^x b^x$;

(e) Se $a > 1$ a função exponencial é monótona crescente, ou seja, se $x < y$, então, $a^x < a^y$;

(f) Se $0 < a < 1$ a função exponencial é monótona decrescente, ou seja, se $x < y$, então, $a^x > a^y$.

Como a função exponencial é ou crescente ou decrescente, existe a sua função inversa, a qual definiremos na próxima seção.

2.2 Função Logarítmica

Definição 20 Sejam $a, x \in \mathbb{R}_+$, com $a \neq 1$. A função inversa da função exponencial é denominada de **função logarítmica** na base a, e representada por $\log_a$, isto é,

$$\log_a x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad a^y = x. \tag{2.4}$$

A seguir, provaremos algumas propriedades dos logaritmos, que são consequência da definição acima.

Proposição 18 Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+ - \{0\}, a \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}$, então:

(a) $\log_a 1 = 0$

(b) $\log_a a = 1$

(c) $\log_a a^k = k$

(d) $a^{\log_a b} = b$

(e) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ **Logaritmo do produto**

(f) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ **Logaritmo do quociente**

(g) $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$ **Logaritmo da potência**

(h) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ **Mudança de base**

Demonstração:

(c) Pela Definição 20, temos

$$\log_a a^k = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = a^k \quad \Leftrightarrow \quad x = k.$$

(d) Pela Definição 20, temos

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b \quad \Rightarrow \quad a^x = a^{\log_a b} = b.$$

(e) Sejam $\log_a b = p$, $\log_a c = q$ e $\log_a(bc) = r$. Pela Definição 20, temos $a^p = b$, $a^q = c$ e $a^r = bc$. Assim, $a^r = a^p a^q$. Da potenciação, segue que

$$a^r = a^{p+q} \quad \Leftrightarrow \quad r = p + q \quad \Rightarrow \quad \log_a(bc) = r = \log_a b + \log_a c.$$

(f) Sejam $\log_a b = p$, $\log_a c = q$ e $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = r$. Pela Definição 20, temos $a^p = b$, $a^q = c$ e $a^r = \dfrac{b}{c}$. Assim, $a^r = \dfrac{a^p}{a^q}$. Pelas propriedades de potência, segue

$$a^r = a^{p-q} \quad \Leftrightarrow \quad r = p - q \quad \Rightarrow \quad \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = r = \log_a b - \log_a c.$$

(g) Sejam $\log_a b = p$, $\log_a b^k = q$, com $k \in \mathbb{R}$. Pela Definição 20, temos $a^p = b$ e $a^q = b^k$. Assim, $a^q = (a^p)^k$. Da potenciação, segue que

$$a^q = a^{pk} \quad \Leftrightarrow \quad q = p \cdot k \quad \Rightarrow \quad \log_a b^k = p \cdot k = k \cdot \log_a b.$$

□

As demonstrações dos itens (a) e (b) são triviais e podem ser encontrados em em (Iezzi et al., 2010). O item (h) será discutido na Seção 2.3. A partir daqui, focaremos na definição e propriedades dos *logaritmos naturais*[7]. Assim, no lugar de $\log_a$, usaremos a notação ln para indicar que a base do logaritmo é o número e de Euler[8], isto é, $\log_e$ será representado por ln.

2.2.1 Logaritmo Natural

O logaritmo natural, que representaremos por $\ln x$, com $x \in \mathbb{R}_+$, é definido como a área sob a parte positiva da curva $y = \dfrac{1}{t}$, com $t \in \mathbb{R}$, de $t = 1$ até $t = x$ e limitada pelo eixo das abscissas, desde que $x > 1$. Caso $0 < x < 1$, o $\ln x$ é igual ao negativo do valor numérico da área da região descrita acima. Vide Figura 2.1. Refugiando-se aos conceitos de Cálculo definimos esta área a seguir.

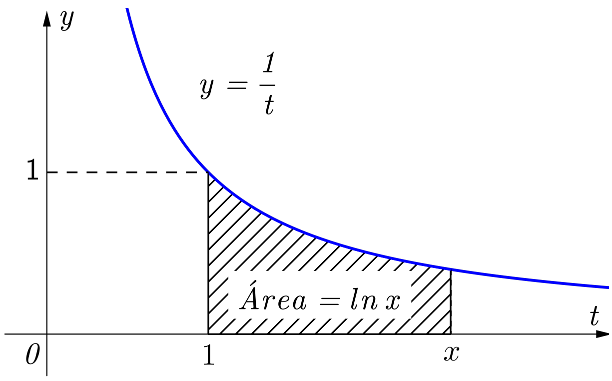


Figura 2.1: Área da região sombreada sob a hipérbole define $\ln x$.

Definição 21 A **função logarítmica natural** é definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \tag{2.5}$$

onde $x \in \mathbb{R}_+$.

Observação 2

(a) Se $0 < x < 1$, então, $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt.$

[7]Logaritmo na base e de Euler, onde $e = 2,718281828459...$, que é um número irracional.
[8]Leonhard Euler, 1707 - 1783, matemático e físico suíço.

(b) Podemos ter $0 < x \leq 1$, neste caso, quando $t \mapsto 0$, temos que $\dfrac{1}{t} \mapsto +\infty$, portanto, devemos desconsiderar $t = 0$. Analogamente, quando $t \mapsto +\infty$ temos que $\dfrac{1}{t} \mapsto 0$. Quando x assume o valor e, temos que $\ln e = 1$, tal fato será abordado na seção 2.2.3.

Até então, a função ln, definida em (2.5), não tem "força" para ser utilizada em cálculos numéricos, até que conheçamos suas propriedades. A seguir, apresentaremos algumas propriedades dos logaritmos naturais.

2.2.2 Propriedades

Proposição 19 A derivada da função $F(x) = \ln x$ é

$$F'(x) = \frac{1}{x}.$$

Demonstração: Pela Definição 21 e pelo Teorema 16 (TFC), temos

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{1}{t}\, dt\right] = \frac{1}{x}.$$

□

A derivada da função ln é sempre positiva, pois trata-se de uma função contínua e monótona, ao ponto que tomamos valores cada vez maiores para x.

Proposição 20 (**Logaritmo do produto**)

$$\ln(a \cdot x) = \ln a + \ln x.$$

Demonstração: Sejam as funções

$$F(x) = \ln x \quad \text{e} \quad k(x) = \ln(a \cdot x) = \ln w = F(w),$$

onde $w = f(x) = a \cdot x$ com $a \in \mathbb{R}_+$, ou seja, $F(f(x)) = k(x)$. Como F e f são deriváveis, pela Regra da Cadeia, temos

$$k'(x) = f'(x) \cdot F'((fx)) \quad \Rightarrow \quad k'(x) = f'(x) \cdot F'(w).$$

Daí, pela Proposição 19 e levando em conta que $f'(x) = a$, temos

$$k'(x) = a \cdot \frac{1}{w}$$

mas, $w = a \cdot x$, assim,

$$k'(x) = a \cdot \frac{1}{a \cdot x} = \frac{1}{x}.$$

Observe que $k(x)$ e $F(x)$ possuem a mesma derivada. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\ln(a \cdot x) = k(x) = F(x) + c, \tag{2.6}$$

tal que c é uma constante. Quando substituindo x por um número dado, encontramos o valor de c. Como $F(x) = \ln x$, então,

$$F(1) = \ln 1 = \int_1^1 dt \ = 0,$$

isso ocorre pela propriedade (1.15). Substituindo x por 1 em (2.6), obtemos

$$k(1) = \ln(a \cdot 1) = \ln a = F(1) + c = \ln 1 + c = c,$$

isto é,

$$\ln a = c.$$

Portanto,

$$\ln(a \cdot x) = \ln a + \ln x, \tag{2.7}$$

para todo x. □

Essa propriedade pode ser estendida, de modo indutivo, para o produto de n termos, ou seja,

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + ... + \ln a_n.$$

A propriedade do logaritmo da potência pode ser deduzida a partir da Proposição 20. Para isto, fazendo, em (2.7), sucessivamente, $x = a$, $x^2 = a$, ..., $x^{n-1} = a$, que de modo indutivo obtemos

$$\begin{aligned}
\ln(x \cdot x) &= \ln x + \ln x = 2\ln x \\
\ln(x^2 \cdot x) &= 2\ln x + \ln x = 3\ln x \\
&\vdots \\
\ln(x^{n-2} \cdot x) &= (n-2)\ln x + \ln x = (n-1)\ln x \\
\ln x^n &= n \cdot \ln x, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que, na expressão (2.8), a medida que x cresce, os valores de $\ln x$ tendem para o infinito, isto ocorre em conformidade com o fato de que a função ln é monótona crescente, este comentário segue no exemplo seguinte.

Exemplo 17 Na equação $\ln 5^n = n \cdot \ln 5$, temos que $\ln 5^n$ tende ao infinto a medida que n cresce indefinidamente.

Como foi visto que $\ln 1 = 0$, fazendo algumas manipulações e aplicando as propriedades anteriores, deduzimos outra propriedade dos logaritmos naturais:

$$0 = \ln 1 = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{1}{x} = -\ln x.$$

Em (2.8), quando n é racional $\left(n = \dfrac{p}{q}\right)$, temos,

$$\begin{aligned}
q \cdot \ln x^n &= q \cdot \ln x^{\frac{p}{q}} = \ln x^{\frac{p}{q}\cdot q} = \ln x^p = p \cdot \ln x \\
\ln x^n &= \frac{p}{q} \cdot \ln x \\
\ln x^n &= \frac{p}{q} \cdot \ln x.
\end{aligned}$$

2.2.3 O Número e de Euler

Usa-se frequentemente o número $e = 2,71828128459...$, que é *irracional*[9] e *transcedente*[10], como base de logaritmos. Tal motivo se dá de forma natural em vários

[9]Irracional, pois não pode ser obtido como quociente de dois números inteiros.
[10]Transcedente, pois não existe um polinômio $\mathcal{P}(x)$, com coeficientes inteiros, tal que $\mathcal{P}(e) = 0$.

fenômenos da natureza, como veremos no capítulo 4. Vamos ampliar as ideias inicialmente propostas sobre logaritmos naturais.

Seja a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, tal que $f(t) = \dfrac{1}{t}$. O gráfico desta função é o ramo positivo da hipérbole equilátera.

Definição 22 Seja H_1^x, com $x \in \mathbb{R}_+$, a faixa da hipérbole $y = \dfrac{1}{t}$, de $t = 1$ a $t = x$. Define-se $\mathcal{A}(H_1^x)$ como a área dessa faixa de hipérbole, limitada pelas retas $t = 1$, $t = x$ e pelo eixo t das abscissas.

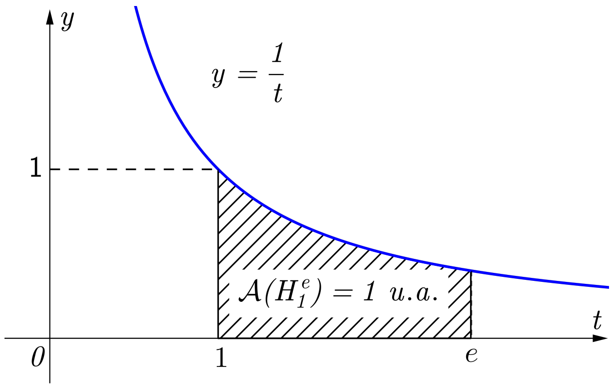


Figura 2.2: $\ln e = 1$

Observe que x pode estar tanto a direita quanto a esquerda de $t = 1$. Assim, se $x \geq 1$ temos que $\mathcal{A}(H_1^x)$ é igual ao logaritmo natural de x, ou seja, $\ln x$. Por outro lado, se $0 < x \leq 1$, segue que $\mathcal{A}(H_1^x)$ é igual a $-\ln x$.

A primeira pergunta a se fazer é: Qual o valor de x, tal que $\mathcal{A}(H_1^x) = 1$? Em outras palavras, qual o valor de x para que tenhamos $\ln x = 1$? A resposta é $x = e$. Em termos de cálculo temos,

$$\mathcal{A}(H_1^e) = \int_1^e \frac{1}{t}\, dt = \ln e - \ln 1 = 1\ u.a.,$$

onde $u.a.$ significa unidades de área. A Figura 2.2 ilustra o fato.

Euler, chamava os logaritmos naturais de logaritmos hiperbólicos, pois, como discutido, está inteiramente ligado a área sob uma faixa de hipérbole. Outro modo de definir o número e está a seguir.

Proposição 21 Dado $x \in \mathbb{R}$, a função $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ tende para o número e a medida que

x tende para o infinito, isto é,

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2.9}$$

Demonstração: Fazendo $x = \dfrac{1}{t}$, então, $t = \dfrac{1}{x}$. Daí, se $x \mapsto +\infty$, temos que $t \mapsto 0$. Assim,

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \mapsto 0} (1+t)^{1/t}.$$

Seja $f(t) = \ln t$, pela Proposição 19, temos $f'(1) = 1$ e, pela definição de derivada

$$f'(1) = \lim_{t \mapsto 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = \lim_{t \mapsto 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t \mapsto 0} \ln(1+t)^{1/t} = \ln\left[\lim_{t \mapsto 0} (1+t)^{1/t}\right].$$

Na expressão acima, o fato usado da penúltima para a última igualdade é que a função ln é contínua. Assim,

$$\ln\left[\lim_{t \mapsto 0} (1+t)^{1/t}\right] = 1.$$

Como $\ln e = 1$, segue que,

$$\lim_{t \mapsto 0} (1+t)^{1/t} = e.$$

$\square$

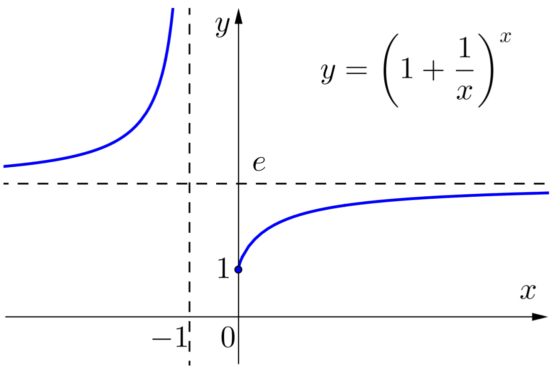


Figura 2.3: Gráfico da função $(1 + 1/x)^x$.

Através da Figura 2.3, notamos que a medida que $x \mapsto -\infty$ a função $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ tende para o número e. De fato, fazendo $t = -(x+1)$, temos que $x = -(t+1)$. Daí,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(\frac{t+1}{t}\right).$$

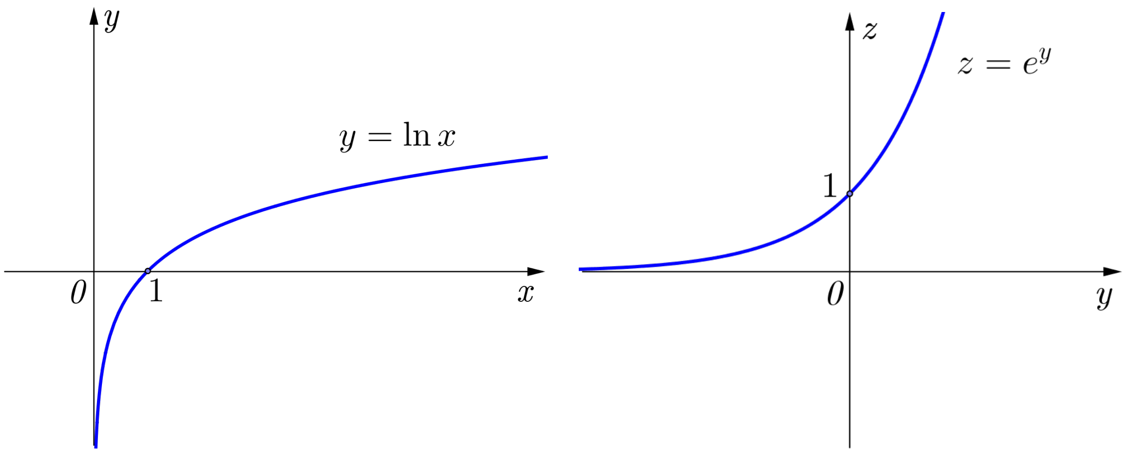
Como $x \mapsto -\infty$ se, e somente se, $t \mapsto +\infty$, segue que,

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t \mapsto +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right) = e, \tag{2.10}$$

já que $\lim_{t \mapsto +\infty} \left(\dfrac{t+1}{t}\right) = 1$.

2.3 Função Exponencial Natural

Nesta seção faremos um estudo da função exponencial exclusivamente na base e. Como vimos, $F(1) = \ln 1 = 0$, e para $x > 1$ a função $y = \ln x$ aumenta monotonicamente e lentamente (como podemos ver na Figura 2.3) para o infinito, com inclinação decrescente $\dfrac{1}{x}$. Neste caso, os valores da função $y = \ln x$ ficam infinitamente negativos à medida que x tende a 0. Vide Figura 2.4(a).



(a) Função $\ln x$.

(b) Função e^y.

Figura 2.4: Funções logarítmica e exponencial.

Daí, como $F(x) = \ln x$ é monótona, define-se a sua inversa, a função exponencial $E : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+ - \{0\}$, como sendo

$$E(y) = x,$$

que significa $x = e^y$. Seu gráfico é obtido a partir da função $y = \ln x$. Assim, se $y \mapsto -\infty$ temos que $E(y) \mapsto 0$. Por outro lado, se $y \mapsto +\infty$ segue que $E(y) \mapsto +\infty$, como podemos ver na Figura 2.4(b). Ainda, como as funções logarítmica e exponencial são inversas uma da outra, segue do Definição 6 que

$$E\left(ln(x)\right) = ln\left(E(x)\right) = x.$$

Euler, em uma de suas mais renomadas obras, com título de *"Introductio in analysin in nitorum"*, que se tratava de um texto sobre funções matemáticas, publicado em 1748, definiu a função exponencial fugindo da relação de inversa de logaritmos, como se segue

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \tag{2.11}$$

Também definiu $\ln x$ através de limite, pela expressão:

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \left[n \cdot \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right] = \ln x.$$

Em (2.11), Euler usou a definição de e^x para desenvolvê-la como a série de potência $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Assim,

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Conforme Maor (2008), é desta série que os valores numéricos de e^x são geralmente obtidos. Os primeiros termos são, em geral, suficientes para se obter a precisão necessária. Mostraremos a seguir a validade de (2.11) a partir de (2.9). Com efeito, em (2.9), fazendo $x = \dfrac{1}{\alpha}$, isto é, $\alpha = \dfrac{1}{x}$ e notando que $x \mapsto +\infty$ se, e somente se, $\alpha \mapsto 0^+$, temos que (2.9) pode ser escrito como

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \mapsto 0^+} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.12}$$

Daí, tomando $\alpha = \dfrac{x}{n}$ e, invertendo esta expressão, temos $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{n}{x}$. Assim, $\alpha \mapsto 0$ se, e somente se, $n \mapsto +\infty$, o que implica em

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \mapsto +\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = \lim_{\alpha \mapsto 0} \left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x.$$

Portanto,

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Visto que a equação (2.11) existe para todo $x \in \mathbb{R}$, substituindo x por -1, obtemos o caso particular:

$$e^{-1} = \lim_{n\mapsto+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

2.3.1 Propriedades

A seguir apresentaremos algumas propriedades da função E que estão diretamente relacionadas as propriedades dos logaritmos.

Proposição 22 Para $a, b \in \mathbb{R}$, a **Propriedade Fundamental da Exponencial** é:

$$E(a)\cdot E(b) = E(a+b).$$

Demonstração: Observe que se $E(a) = p$ e $E(b) = q$, ou seja, se $\ln p = a$ e $\ln q = b$, pela propriedade do logaritmo do produto, temos:

$$\begin{aligned}\ln(p\cdot q) &= \ln p + \ln q\\ &= a+b.\end{aligned}$$

Pela definição de função exponencial,

$$E(a+b) = p\cdot q = E(a)\cdot E(b).$$

□

Proposição 23 Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$E(x) = e^x > 0.$$

Demonstração: Inicialmente provaremos que $E(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, notemos que $e^0 = 1$. Suponhamos, por contradição, que $E(x) = e^x = 0$, para algum $x \neq 0$. Ora, $0 = e^x \cdot e^{-x+1} = e^1 = e > 0$, contradição. Logo, $E(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí, $E(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, já que $f(0) = e^0 = 1$. □

Corolário 24 Exponencial de 1 é igual a e, isto é,

$$e^1 = e.$$

Demonstração: Pela definição da função ln, temos que $\ln e = 1$. Daí, por definição da função E o resultado segue. $\square$

Proposição 25 A função $E(x) = e^x$ é contínua.

Demonstração: De fato, $E(c)$ está bem definida para todo $c \in \mathbb{R}$, pois $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a inversa de $\ln(x)$. Logo,

$$\lim_{h \mapsto 0} E(c+h) = \lim_{h \mapsto 0} e^{c+h} = \lim_{h \mapsto 0} \left(e^c \cdot e^h\right) = e^c \cdot \lim_{h \mapsto 0} e^h,$$

mas como $\lim\limits_{h \mapsto 0} e^h = 1$, temos que $\lim\limits_{x \mapsto c} E(x) = E(c)$. $\square$

Ainda, pela Proposição 22, indutivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned}
e^2 &= e \cdot e = E(1) \cdot E(1) = E(1+1) = E(2) \\
e^3 &= e \cdot e \cdot e = E(1) \cdot E(1) \cdot E(1) = E(1+1+1) = E(3) \\
&\vdots \\
e^n &= E(n).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Uma prova mais rigorosa deste resultado é feita por indução sobre n, porém foge dos objetivos desse trabalho.

De (2.13) decorre imediatamente que $E\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$, pois

$$e = E(1) = E(n \cdot \frac{1}{n}) = E\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{n}\right),$$

isto é,

$$e = \underbrace{E\left(\frac{1}{n}\right) \cdot E\left(\frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot E\left(\frac{1}{n}\right)}_{n}.$$

Pelas propriedades de potência, segue que

$$e = E\left(\frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \quad E\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}.$$

Daí, se $\dfrac{p}{q}$ é uma fração irredutível, temos:

$$E\left(\frac{p}{q}\right) = \underbrace{E\left(\frac{1}{q}\right) \cdot E\left(\frac{1}{q}\right) \cdot ... \cdot E\left(\frac{1}{q}\right)}_{p} = \underbrace{e^{\frac{1}{q}} \cdot e^{\frac{1}{q}} \cdot ... \cdot e^{\frac{1}{q}}}_{p} = \left[e^{\frac{1}{q}}\right]^{p}.$$

Assim, $E(r) = e^r$, para todo $r = \dfrac{p}{q}$ racional. Como a função E é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que e^x está bem definida para qualquer número irracional x. Portanto, para quaisquer $a, b, \in \mathbb{R}$, temos:

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}.$$

Até aqui, relacionamos logaritmos e função exponencial ambos na base e, entretanto, podemos também tomar como base qualquer outro número real positivo. Considere $\lambda = \ln a$. Por definição, temos $a = e^{\lambda} = e^{\ln a}$. Daí, fazendo $z = a^x$, ou seja,

$$z = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a} = e^{\lambda x},$$

isto é,

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}. \tag{2.14}$$

Por um lado, temos que

$$z = a^x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log_a z,$$

por outro lado,

$$z = e^{\lambda x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda x = \ln z \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{\ln z}{\lambda},$$

Daí,

$$\log_a z = \frac{\ln z}{\lambda} = \frac{\ln z}{\ln a}. \tag{2.15}$$

A expressão (2.15) é conhecida como a **Propriedade da Mudança de Base** para logaritmo. A base 10 é bastante utilizada em logaritmos e exponenciais por ser mais fácil operar com esse número no nosso sistema decimal de numeração. Em (2.14), substituindo a por 10, temos:

$$10^x = e^{x \cdot \ln 10} \tag{2.16}$$

Notemos que a potência x da expressão a esquerda de (2.16) está na base 10, enquanto que a expressão à direita está na base e. Nesse caso,

$$\ln 10 = y \qquad \Leftrightarrow \qquad e^y = 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad y \simeq 2,303,$$

onde $\simeq$ significa aproximadamente.

2.3.2 Derivada da Função Exponencial Natural

Proposição 26 Suponhamos C e K constantes quaisquer, então:

(a) A função exponencial natural é igual a sua própria derivada, isto é, se

$$E(x) = e^x, \quad \text{então}, \quad E'(x) = e^x.$$

(b) Se a função $E(x) = Ce^{Kx}$, então, sua derivada é proporcional a E, onde K é o fator de proporcionalidade. Isto é,

$$E'(x) = KCe^{Kx}.$$

Demonstração:

(a) Como definimos anteriormente, $E(x) = e^x$ é a inversa de $L(y) = \ln y$, isto é,

$$e^x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \ln y.$$

Como $L(y)$ é derivável, pela Proposição 11, temos que $E(x)$ também é derivável com,

$$E'(x) = \frac{1}{L'(y)}$$

mas, pela Proposição 19, temos $L'(y) = \dfrac{1}{y}$. Daí,

$$E'(x) = \frac{1}{1/y} = y = e^x.$$

Indo mais além, se C é uma constante, pela Proposição 9-(a), a função $E(x) = Ce^x$ também é igual a sua própria derivada.

(b) Sejam $f(x) = Kx$ e $F(x) = e^x$, tais que, $E(x) = CF(f(x))$. Pelas Proposições 8 e 26-(a), F e f são deriváveis e, pela Proposição 10 (Regra da Cadeia), a função E é derivável, com

$$E'(x) = CF'(f(x))f'(x) = KCe^{Kx}.$$

$\square$

Esse resultado é restrito às funções do tipo exponencial, tornando-as importantes nas aplicações da matemática de modo geral.

Capítulo 3

Noções de Equações Diferenciais

As funções exponenciais exercem papel dominante em muitas aplicações na física, química, economia, etc, e isso decorre do fato de que estas funções resolvem as equações diferenciais mais elementares. Neste capítulo apresentaremos uma breve noção de Equação Diferencial ordinária de primeira ordem e, para escrevê-lo, apoiamos em (Boyce e DiPrima, 2012), (Courant e Robbins, 2000), (Guidorizzi, 2001), (Nagle, 2012), (Krantz e Simmons, 2007), (Stewart, 2010) e (Zill, 2009).

3.1 Definição e exemplos

Definição 23 Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de **Equação Diferencial (ED)**.

Seguem alguns exemplos:

$$y' = 3x - 1 \tag{3.1}$$

$$y' = ay - b. \tag{3.2}$$

Podemos ter também derivadas de ordem[1] maior que um.

$$y'' + 3y - 2y = 0, \tag{3.3}$$

[1]Ordem de uma derivada, resumidamente, é a quantidade de vezes que a função foi derivada.

onde y'' simboliza a derivada segunda de y.

Em termos de notação escrevemos $y' = \dfrac{dy}{dx}$ para indicar que a variável independente da equação diferencial é x e a variável dependente é y.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y + x\frac{\partial y}{\partial z}. \tag{3.4}$$

De modo geral, resolver uma equação diferencial é encontrar uma função $y = f(x)$ que satisfaz a equação dada. Esse processo resume-se em encontrar uma função primitiva de uma função $g(x)$, ou seja, encontrar y, tal que, $y' = g(x)$.

Exemplo 18 A equação diferencial $y' = x^2$ tem solução geral $y = \dfrac{x^3}{3} + k$, onde k é uma constante.

Quando for informado ainda que $y(x_0) = y_0$, com y_0 uma constante qualquer, estaremos diante de um **Problema de Valor Inicial (PVI)**, isto é,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0. \tag{3.5}$$

Por via de regra, as equações de (3.5) representam um problema do valor inicial. A notação $f(x, y)$ representa uma função de valor real com duas variáveis x e y. Assim, no Exemplo 18, se tivermos $y(3) = 12$, então, conseguimos determinar o valor da constante k, isto é,

$$y(3) = \frac{3^3}{3} + k = 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = 3.$$

3.2 Classificação e Ordem

Uma equação diferencial é dita **ordinária** (EDO) se possui apenas uma variável independente, enquanto que se possuir duas ou mais variáveis independentes é dita **parcial** (EDP). Assim, as equações (3.1), (3.2) e (3.3) são EDO, já 3.4) é EDP. Nosso foco será dado às EDO's.

A ordem de uma equação diferencial é a maior ordem da derivada na equação. Assim, (3.1), (3.2) e (3.4) são de primeira ordem, enquanto (3.3) é de segunda ordem.

3.3 Existência e Unicidade

O teorema a seguir nos garante que um problema de valor inicial, como em (3.5), satisfazendo determinadas condições, tem solução e ela é única, tal fato é essencial para resolver e entender as equações diferenciais.

Teorema 27 Seja R uma região retangular do plano xy, definido por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então, existe algum intervalo $I_0 : (x_0 - h, x_0 + h)$, com $h > 0$, contido em $[a, b]$ e uma única função definida em I_0, que é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0.$$

A demostração deste teorema foge dos objetivos deste trabalho, porém pode ser encontrada em (Zill, 2009). Uma ilustração da região retangular R está na Figura 3.1.

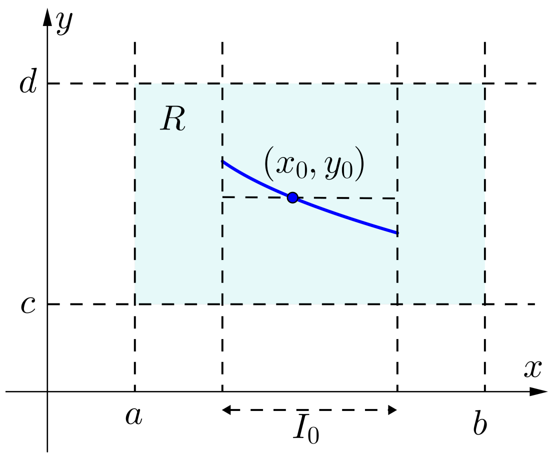


Figura 3.1: Região retangular R.

Exemplo 19 O problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y \qquad y(0) = 3$$

tem como solução única $y = 3e^x$, pois, pelo Teorema 27, como $f(x, y) = y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ são contínuas em todo o plano, então, existe um intervalo contendo $(0, 3)$, de modo que $y = 3e^x$ é solução única.

Exemplo 20 O problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2} \qquad y(0) = 0,$$

tem $y = 0$ e $y = \dfrac{x^4}{16}$ como soluções em qualquer intervalo contendo $(0,0)$, pois, se $f(x,y) = xy^{1/2}$, então, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{2y^{1/2}}$ não é derivável em $(0,0)$, logo, não satisfaz o Teorema 27.

3.4 ED de 1ª Ordem Separável

Definição 24 - Uma ED de 1ª Ordem é dita **separável** se for da forma:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)q(y), \tag{3.6}$$

onde p e q são funções contínuas em intervalos abertos I e J, respectivamente.

Para resolvermos esse tipo de equação, em resumo, basta separarmos as variáveis, no caso x e y e, integrar ambos os lados. Se y_0 é tal que $q(y_0) = 0$, então, a função $y(x) = y_0$ é uma solução de (3.6). De fato, basta notar que $\dfrac{dy}{dx} = p(x)q(y_0) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$, que por sua vez implica que $y(x) = y_0$, satisfazendo, assim, a equação. Por outro lado, em (3.6), se $q(y) \neq 0$, e tomando $h(y) = \dfrac{1}{q(y)}$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{h(y)}. \tag{3.7}$$

Separando as variáveis, e integrando ambos os lados, obtemos:

$$h(y)dy = p(x)dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \int h(y)\ dy = \int p(x)\ dx. \tag{3.8}$$

Assim, y está definido implicitamente, sendo possível, em alguns casos, isolá-lo. Se derivarmos (3.8), em relação a x, chegamos em (3.7), justificando, assim, o método.

Exemplo 21 Vamos encontrar todas as soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = k(y - R),$$

onde k e R são constantes. Notemos inicialmente que esta equação é de variáveis separáveis, assim, separando as variáveis e em seguia aplicando a integral indefinida, temos

$$\int \frac{1}{y-R}\, dy = \int k\, dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln|y-R| = kx + D,$$

onde D é constante de integração. Daí, resolvendo em y, leva a

$$\begin{aligned} |y-R| &= e^{kx+D} = e^{kx}e^{D} \\ y-R &= \pm e^{D}e^{kx} \\ y &= R + Ce^{kx}, \end{aligned}$$

onde $C = \pm e^{D}$.

3.4.1 Crescimento e Decrescimento Exponencial

Qual a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y? \tag{3.9}$$

A solução é uma função que é igual a sua derivada. Conforme vimos na Proposição 26-(a), a função $y = e^{t}$ tem essa propriedade, logo é solução de (3.4.1). Na verdade, qualquer múltiplo de e^{t}, ou seja, $y = Ce^{t}$, com C constante, também é solução de (3.9). Assim,

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{3.10}$$

é similar à (3.9), e diz que a taxa de variação de y é proporcional a y, sendo k a constante de proporcionalidade. Mais ainda, se substituirmos $y = Ce^{kt}$ em (3.10) obtemos

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d(Ce^{kt})}{dt} = k\left(Ce^{kt}\right),$$

que pela regra da cadeia para derivada (Proposição 10), segue

$$Cke^{kt} - kCe^{kt} = 0.$$

Ainda, se $y(t_0) = y_0$, determinamos a constante C, ou seja,

$$y(t_0) = Ce^{kt_0} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{y_0}{e^{kt_0}}.$$

Portanto,

$$y(t) = Ce^{kt} \tag{3.11}$$

é dita **solução geral** da equação diferencial (3.10). Essa função representa um **crescimento exponencial** se $k > 0$ e, um **decaimento exponencial** se $k < 0$.

3.5 ED's Lineares de 1ª Ordem

Definição 25 Uma ED é dita **linear de 1ª ordem** se for da forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{3.12}$$

onde p e q são funções contínuas em um intervalo (a, b).

Notemos que a equação diferencial descrita em (3.2), pode ser escrita como $\frac{dy}{dx} = ay - b$. Manuseando esta igualdade conseguimos resolver a equação,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & a\left(y - \dfrac{b}{a}\right) \\ \dfrac{\frac{dy}{dx}}{y - \frac{b}{a}} & = & a, \end{array}$$

separando as variáveis e integrando ambos os lados em relação a x, obtemos

$$\begin{array}{rcl} \ln\left|y - \dfrac{b}{a}\right| & = & ax + K \\ \left|y - \dfrac{b}{a}\right| & = & e^{ax}e^{K} \\ y - \dfrac{b}{a} & = & \pm e^{ax}e^{K} \\ y & = & \dfrac{b}{a} + Ce^{ax}, \end{array}$$

onde K e $C = \pm e^{K}$ são constantes quaisquer. Entretanto, raramente conseguimos manipular a equação (3.12) e encontrar y, como acima. Por isso, para resolver (3.12) precisamos de uma técnica mais eficaz, conforme veremos a seguir.

3.5.1 Método do Fator Integrante

Considere a equação diferencial (3.12), onde $y = y(x)$. Multiplicando ambos os lados de (3.12) por $\mu(x)$, obtemos:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y(x) = \mu(x)q(x). \tag{3.13}$$

Suponhamos, agora, que

$$\frac{d\left[\mu(x)\right]}{dx} = \mu(x)p(x). \tag{3.14}$$

Então, (3.13) pode ser escrito como

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\left[\mu(x)\right]}{dx}y(x) = \mu(x)q(x). \tag{3.15}$$

Notemos que o lado esquerdo de (3.15) trata-se da derivada do produto de $\mu(x)$ por $y(x)$. Daí,

$$\frac{d\left[\mu(x)y(x)\right]}{dx} = \mu(x)q(x). \tag{3.16}$$

Integrando (3.16), em relação a x, em ambos o lados, obtemos:

$$\mu(x)y(x) = \int \left[\mu(x)q(x)\right]\ dx + C, \tag{3.17}$$

onde C é uma constante. Isolando $y(x)$ em (3.17), temos:

$$y(x) = \frac{\displaystyle\int \left[\mu(x)q(x)\right]\ dx}{\mu(x)} + \frac{C}{\mu(x)}. \tag{3.18}$$

Para encontrarmos $\mu(x)$, devemos retornar à (3.14), separar as variáveis e integrar em relação a x, isto é,

$$\frac{d\left[\mu(x)\right]}{\mu(x)} = p(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|\mu(x)| = \int p(x)\ dx + K, \tag{3.19}$$

onde K é uma constante arbitrária. Fazendo $K = 0$ e isolando $\mu(x)$, segue que

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\, dx}, \tag{3.20}$$

denominado **fator integrante**. Portanto, podemos reescrever (3.18) da seguinte forma:

$$y(x) = e^{-\int p(x)\, dx} \int \left[e^{\int p(x)\, dx} q(x) \right]\, dx + Ce^{-\int p(x)\, dx}, \tag{3.21}$$

que é a solução geral da equação diferencial (3.12). Para comprovar a solução basta derivar $y(x)$ e substituir $y(x)$ e $y'(x)$ em (3.12).

Exemplo 22 Voltemos na equação (3.2), isto é, em $\dfrac{dy}{dx} = ay - b$, e comparando-a com (3.12) temos que $p(x) = -a$ e $Q(x) = -b$. Assim, o seu fator integrante é $\mu(x) = e^{\int (-a)\, dx} = e^{-ax}$. Daí, por (3.21), temos

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int (-a)\, dx} \int \left[e^{\int (-a)\, dx} (-b) \right]\, dx + Ce^{-\int (-a)\, dx} \\ &= e^{ax} \cdot \frac{-b}{-a} e^{-ax} + Ce^{ax}. \end{aligned}$$

Portanto, $y(x) = \dfrac{b}{a} + Ce^{ax}$.

No capítulo seguinte resolveremos outros exemplos envolvendo os conceitos abordados neste capítulo.

Capítulo 4

Modelagem com Logaritmo e Exponencial

Um dos principais campos de aplicação de exponenciais e logaritmos está em modelagem matemática. As vezes temos a necessidade de descrever o comportamento de algum fenômeno ou sistema que está acontecendo, seja físico, sociológico, ou mesmo econômico, em termos matemáticos. A descrição matemática de um fenômeno é chamado de modelo matemático. Neste capítulo, que teve como referência (Boyce e DiPrima, 2012), (Courant e Robbins, 2000), (Hughes-Hallett et al., 2009), (Lima, 1996), (Nagle, 2012), (Krantz e Simmons, 2007), (Stewart, 2010) e (Zill, 2009), estudaremos alguns desses modelos afim de matematizar alguns eventos naturais, explicando sua origem e necessidade.

4.1 Curva de Aprendizado e esquecimento

Os psicólogos interessados em Teoria do Aprendizado estudam as curvas da aprendizagem, que é o gráfico de uma função $P(t)$, representando o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo (t) de treinamento. A derivada, $\frac{dP}{dt}$, representa, teoricamente, a taxa na qual o desemprenho melhora. Note que P aumenta mais rapidamente no início, já que há muitas sub-habilidades simples e facilmente aprendidas associadas à aprendizagem de uma habilidade. À medida que t aumenta, esperamos que $\frac{dP}{dt}$ permaneça positivo, mas diminua, pois à medida que o tempo avança, os únicos pontos a aprender são os mais difíceis. Deste modo, se M é o nível máximo de desempenho do qual o aprendiz é capaz, à medida que P se aproxima de M, $\dfrac{dP}{dt}$ fica perto de 0, isto é, os níveis de desempenho diminuem. Assim, formulamos um modelo matemático para o aprendizado, qual seja,

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P), \tag{4.1}$$

com k uma constante positiva e, $M - P$, o conhecimento que falta a ser aprendido. Esse modelo, equação (4.1), é uma ED de 1ª ordem de variável separável a qual iremos encontrar a solução a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= k(M - P) \\
\int \frac{1}{P - M}\, dP &= \int (-k)\, dt \\
\ln|P - M| &= -kt + C \\
|P - M| &= e^{-kt+C} \\
P &= M + Ae^{-kt}.
\end{aligned}$$

onde $A = \pm e^{C}$. Se assumirmos que, em $t = 0$, o desempenho está no nível 0, temos $P(0) = 0$, isso significa que $0 = M + Ae^{0}$, isto é, $A = -M$. Daí,

$$P = M - Me^{-kt}.$$

Fazendo $t \mapsto +\infty$ temos $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} P(t) = M - M \cdot 0 = M$, que significa o nível máximo de desempenho que o aprendiz pode atingir no decorrer do tempo. Vide Figura 4.1.

Por outro lado, suponhamos que a taxa no qual o assunto é esquecido seja proporcional a quantidade aprendida no instante t. Assim, temos o modelo para o **esquecimento**,

$$\frac{dP}{dt} = k_1(M - P) - k_2 P, \tag{4.2}$$

com $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ constantes. Daí, reescrevendo a equação (4.2), obtemos

$$\frac{dP}{dt} + (k_1 + k_2)P = k_1 M,$$

que, pela equação (3.12), trata-se de uma ED linear de 1ª ordem e, por (3.20), seu fator integrante é $\mu(x) = e^{\int (k_1+k_2)\,dt} = e^{(k_1+k_2)t}$. Assim, pela equação (3.21),

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{-\int (k_1+k_2)\,dt} \int \left[\left(e^{-\int (k_1+k_2)\,dt} \right) k_1 M \right] \, dt + Ce^{-\int (k_1+k_2)\,dt} \\ &= e^{-(k_1+k_2)} \left[\frac{k_1 M e^{(k_1+k_2)t}}{k_1+k_2} \right] + Ce^{-(k_1+K_2)t} \\ &= \frac{k_1 M}{k_1+k_2} + Ce^{-(k_1+k_2)t}, \end{aligned}$$

com C constante qualquer. Se $P(0) = 0$, temos $P(0) = \dfrac{k_1 M}{k_1+k_2} + Ce^{-(k_1+k_2)\cdot 0} = 0$, isto é, $C = -\dfrac{k_1 M}{k_1+k_2}$. Logo,

$$P(t) = \frac{k_1 M}{k_1+k_2} \left[1 - e^{-(k_1+k_2)t} \right]. \tag{4.3}$$

Fazendo $t \mapsto +\infty$ em (4.3), temos $\displaystyle\lim_{t \mapsto +\infty} P(t) = \frac{k_1 M}{k_1+k_2}$. Como $k_2 > 0$, o conteúdo nunca será completamente memorizado e, quanto maior for k_2 menor será a quantidade de material memorizado ao longo do tempo. Vide Figura 4.1.

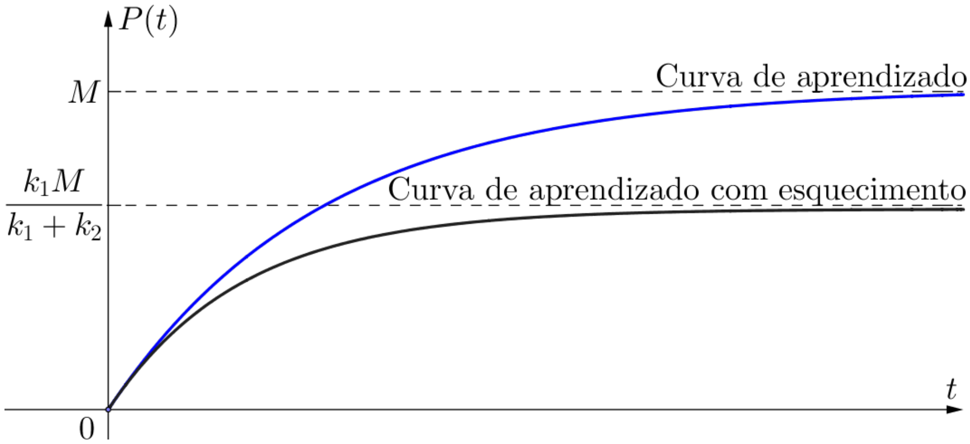


Figura 4.1: Curva de aprendizado e esquecimento.

Notemos que, em ambos casos, $P(0)$ pode ser diferente de 0, indicando, assim, que o aprendiz já possui algum conhecimento memorizado.

4.2 Crescimento Populacional

4.2.1 Modelo de Malthus (Crescimento Exponencial)

Malthus[1] criou um modelo para prever o crescimento da população mundial, que resumiremos a seguir. Seja P a população de uma determinada região onde não há emigração ou imigração. Muitas vezes a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população. Isso significa que as populações maiores crescem mais rápido, como previsto, pois existem mais pessoas para se reproduzirem. Se a população tiver uma taxa de crescimento contínuo de $k\%$, com $k > 0$, por unidade de tempo, então, conforme vimos na seção 3.4.1, a taxa de crescimento da população é de $k\%$ da população atual. Isto é,

$$\frac{dP}{dt} = kP. \tag{4.4}$$

Notemos que (4.4) é uma EDO de variáveis separáveis, sendo similar a equação (3.10), assim, sua solução geral é $P = Ce^{kt}$. Considerando que, em $t = 0$, temos uma população inicial P_0, então, $P_0 = Ce^{k\cdot 0} = C$, ou seja, $P_0 = C$. Portanto ,a população da região, em determinado instante t, pode ser estimada pela equação

$$P = P_0e^{kt}. \tag{4.5}$$

Por outro lado, se consideramos uma população com taxa de emigração constante (m), então, a taxa de variação da população é modelada por

$$\frac{dP}{dt} = kP - m. \tag{4.6}$$

Para resolvermos a EDO (4.6), primeiramente, temos que reescrevê-la do seguinte modo

$$\frac{dP}{dt} = k\left(P - \frac{m}{k}\right). \tag{4.7}$$

Daí, se $y = P - \dfrac{m}{k}$, então, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dP}{dt}$, o que implica que (4.7) torna-se $\dfrac{dy}{dt} = ky$ e, conforme vimos na subseção 3.4.1, sua solução é dada por

$$y = y_0e^{kt} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{m}{k} + \left(P_0 - \frac{m}{k}\right)e^{kt}.$$

[1]Thomas Robert Malthus, 1766-1834, economista britânico.

Como $k > 0$, teremos um crescimento exponencial da população quando $P_0 - \frac{m}{k} > 0$, isto é, se $m < kP_0$. A população será constante se $P_0 - \frac{m}{k} = 0$, ou seja, $m = kP_0$. Por fim, teremos um declínio da população se $P_0 - \frac{m}{k} < 0$, ou melhor, $m > kP_0$.

Exemplo 23 (Estimativa populacional) A população do Quênia, em 1984, era de 19.5 milhões de habitantes, já em 2009 foi de $39,0$ milhões de habitantes. Considerando que a população aumenta exponencialmente, vamos determinar uma equação da população (P) do Quênia, em função do tempo (t). Se k é uma taxa de crescimento contínuo anual, $19,5$ a população inicial e P dado milhões e habitantes, então, por (4.5), temos

$$P = 19,5e^{kt}.$$

Observemos que após 25 anos (tomando 1984 como ano incial) a população do Quênia passou a ser $39,0$ milhões de habitantes, segue que

$$39 = 19,5e^{25k} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{39,0}{19,5} = e^{25k},$$

e, aplicando o logaritmo natural em ambos lados, obtemos

$$\ln\frac{39,0}{19,5} = \ln e^{25k} \qquad \Leftrightarrow \qquad k = \frac{1}{25}\ln\frac{39,0}{19,5} \simeq 0,028.$$

Portanto, podemos estimar a população do Quênia em função do tempo, a partir de ano de 1984, pela equação

$$P(t) = 19,5e^{0,028t}.$$

4.2.2 Modelo de Verhulst (Crescimento Logístico)

O modelo de Malthus não leva em consideração a ocorrência de guerras, epidemias, fome, catástrofes, etc, prevendo assim, um crescimento exponencial contínuo. Afim de tornar o modelo de Malthus mais realístico e abrangente, o modelo de Verhulst[2] considera a taxa de crescimento da população como sendo proporcional à própria população em cada instante, porém, a razão de proporcionalidade não é mais considerada constante, mas sim dependente da população e da **capacidade limite** (L) do meio. Isto é, ao ponto que uma população cresce seus recursos ficam cada vez mais limitados e tende a se

[2]Pierre François Verhulst, 1804-1849, matemático Bélga.

estabilizar, se aproximando de sua valor limite. Uma população que vive em um espaço confinado cresce proporcionalmente ao produto da população atual (P) pela diferença entre a capacidade de carga (L), e a população atual, ambos divididos por L. Se t é o tempo, e k é a constante de proporcionalidade, então, a expressão

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(\frac{L-P}{L}\right) \tag{4.8}$$

é chamada de **Equação Diferencial Logística.** Vamos encontrar a solução geral para esta equação. Por se tratar de uma EDO de variáveis separáveis, podemos reescrevê-la deste modo:

$$\frac{dP}{P\left(\dfrac{L-P}{L}\right)} = kdt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP}{P\left(1-P/L\right)} = kdt. \tag{4.9}$$

Integrando ambos os lados da igualdade e notando que

$$\frac{1}{P\left(1-P/L\right)} = \frac{L}{P(L-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{L-P},$$

obtemos

$$\int \frac{1}{P\left(1-P/L\right)}\, dP = \int k\ dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{L-P}\right) dP = \int k\ dt.$$

Resolvendo as integrais e aplicando as propriedades dos logaritmos, resta-nos

$$\begin{aligned} \ln|P| - \ln|L-P| &= kt + C \\ \ln\left|\frac{L-P}{P}\right| &= -kt - C \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \left|\frac{L-P}{P}\right| &= e^{-kt-C} \\ \frac{L-P}{P} &= \pm e^{-C}e^{-kt}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Daí, fazendo $B = \pm e^{-C}$, temos

$$L = P + PBe^{-kt} \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{L}{1+Be^{-kt}}.$$

Como para $t = 0$ temos uma população inicial P_0, então, substituindo P por P_0 e t por 0 em (4.10) encontramos o valor de B, isto é,

$$\frac{L - P_0}{P_0} = Be^{-k0} \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{L - P_0}{P_0}.$$

Portanto, a solução da equação (4.8) é

$$P(t) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L - P_0}{P_0}\right) e^{-kt}} = \frac{P_0 L}{P_0 + (L - P_0)e^{-kt}}. \tag{4.11}$$

Exemplo 24 (Propagação de um boato) A taxa de propagação de um boato é proporcional ao produto da fração Q da população que se ouviu o boato pela fração que não ouviu o boato. Assim, esse modelo é dado pela equação

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(1 - Q), \tag{4.12}$$

onde t é o tempo e k é a constante de propagação do boato. Vamos encontrar a solução desta equação. Usando a equação logística $\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right)$, fazendo $Q = \frac{P}{L} \Rightarrow P = LQ$, então, $\frac{dP}{dt} = L\frac{dQ}{dt}$. Daí,

$$\begin{aligned} L\frac{dQ}{dt} &= k(LQ)(1 - Q) \\ \frac{dQ}{dt} &= kQ(1 - Q). \end{aligned}$$

Portanto, a solução de (4.12) é

$$Q(t) = \frac{Q_0}{Q_0 + (1 - Q_0)e^{-kt}}, \tag{4.13}$$

onde Q_0 é a quantidade de pessoas que sabem do boato no tempo $t = 0$. Portanto, a equação (4.13) determina a quantidade de pessoas que sabem do boato em um tempo t.

Exemplo 25 (Disseminação de uma doença) Suponhamos que um estudante tenha o vírus da gripe e o transporta para uma escola isolada contendo 1.000 alunos. Se assumirmos que a taxa de propagação do vírus $\left(\frac{dI}{dt}\right)$ é proporcional, não apenas ao número I de estudantes infectados, como também ao número de alunos não infectados. Observando que depois de 4 dias o número de alunos infectados é de 50. Vamos determinar o número de alunos infectados após 6 dias. Com feito, seja $I(t)$ o número de alunos infectados após t unidades de tempo, a contar a partir do momento em que o estudante chegou na escola. Vamos considerar que ninguém saia da escola durante o surto da doença. Assim, como a doença tem uma capacidade limite de 1000 infectados, o modelo que mais de encaixa a essa situação é o logístico. Logo, devemos resolver a equação

$$\frac{dI}{dt} = kI\left(\frac{1000 - I}{1000}\right).$$

Notemos que a quantidade de infectados inicialmente é 1, isto é $I_0 = 1$. Daí, por (4.11), temos

$$I(t) = \frac{1000}{1 + (1000 - 1)e^{-kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-kt}}.$$

Como $I(4) = 50$, encontramos o valor de k. Isto é,

$$50 = \frac{1000}{1 + (1000 - 1)e^{-4k}} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{19}{999}\right) = \ln\left(e^{-4k}\right) \quad \Leftrightarrow \quad k \simeq 0,991.$$

Assim, a equação que determina o número de infectados é dados por

$$I(t) = \frac{1000}{1 + (1000 - 1)e^{-0,991t}}.$$

Portanto,

$$I(6) = \frac{1000}{1 + (1000 - 1)e^{-0,991 \cdot 6}} \simeq 276 \text{ estudantes}$$

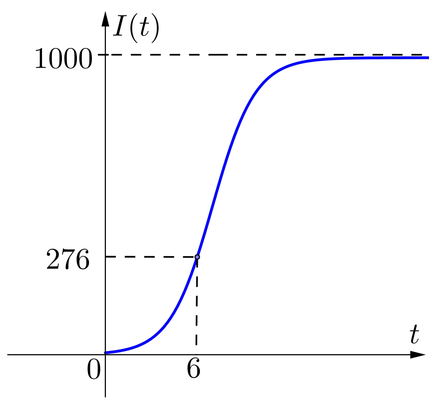


Figura 4.2: Curva da disseminação de uma doença.

A Figura 4.2 ilustra, sob as condições inicialmente apresentadas,a curva da disseminação da doença. Outra pergunta bastante pertinente é: Considerando que todos os estudante possuem a mesma capacidade de se infectarem com a doença, assim, em quanto tempo a gripe infectará todos os estudantes da escola? A resposta fica a cargo do leitor, porém basta notar que a doença estará em todos os estudante quando $I(t) = 1000$.

4.3 Aquecimento e Resfriamento de um Corpo

De acordo com a **Lei do Resfriamento de Newton**, a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente. Isto é, se T é a temperatura do meio ambiente e $y(t)$ é a temperatura de um corpo nesse ambiente, então:

$$\frac{d\,[y(t)]}{dt} = -\kappa(y - T), \tag{4.14}$$

onde κ é denominada **constante de resfriamento**, a qual depende de condições específicas do corpo e do ambiente. Se κ for positivo, é dita **constante de aquecimento**. Notemos que (4.14) é uma ED linear de 1ª ordem, que pode ser escrita como

$$\frac{d\,[y(t)]}{dt} + \kappa y = \kappa T.$$

Pelo método do fator integrante, temos que $\mu(t) = e^{\int \kappa\, dt} = e^{\kappa t}$, já que κ é uma constante fixa. Logo, por (3.21), temos

$$y(t) \;=\; e^{-\kappa t}\int \left(e^{\kappa t}kT\right)\, dt + Ce^{-\kappa t} = \frac{e^{-\kappa t}\kappa T e^{\kappa t}}{\kappa} + Ce^{-\kappa t} = T + Ce^{-\kappa t}.$$

Para determinarmos o valor de C, precisamos da temperatura do corpo no instante t_0, ou seja, de um condição inicial. Assim, se $y(t_0) = y_0$, temos

$$y(t_0) = T + Ce^{-\kappa t_0} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{y_0 - T}{e^{-\kappa t_0}}.$$

Portanto,

$$y(t) = T + \left(\frac{y_0 - T}{e^{-\kappa t_0}}\right) e^{-\kappa t} = T + (y_0 - T)e^{-\kappa(t-t_0)}. \tag{4.15}$$

Exemplo 26 (Resfriamento de um corpo) Suponhamos que um "presunto" (cadáver) seja encontrado em condições suspeitas no instante $t_0 = 0$. A temperatura do corpo é medida, imediatamente, pelo perito e o valor obtido é $y_0 = 29C$. O corpo é retirado da cena do suposto crime e, 2 horas depois, sua temperatura é novamente medida, sendo o valor encontrado $y_1 = 23C$. O crime parece ter ocorrido durante a madrugada e corpo foi encontrado pela manhã bem cedo. A perícia, então, faz a suposição adicional de que a temperatura do meio ambiente, entre a hora da morte (t_{morte}) e a hora em que o cadáver foi encontrado (t_0), tenha se mantido mais ou menos constante $T \simeq 20C$. A perícia sabe também que a temperatura normal de um ser humano vivo é de $37C$. Com esses dados é possível que o perito determine a hora aproximada do crime. Devemos, primeiramente, determinar a constante de resfriamento, para isso, substituindo os dados em 4.15, obtemos:

$$y(2) = 20 + (29 - 20)e^{-\kappa(2-0)} = 23.$$

Isolando k e aplicando ln em ambos lados, resulta em

$$\kappa = -\frac{1}{2}\ln\frac{(23-20)}{29-20} = \frac{\ln 3}{2} \simeq 0,55.$$

Daí, a equação que determina a hora da morte é dada por

$$y(t_{morte}) = T + (y_0 - T)e^{-0,55(t_{morte})}. \tag{4.16}$$

Como no momento da morte a temperatura era de $37C$, temos

$$37 = 20 + (29-20)e^{-0,55t_{morte}} \quad \Leftrightarrow \quad t_{morte} = -\frac{1}{0,55}\ln\frac{17}{9} \simeq -1,16 \text{ h}.$$

Com isso, o perito pode concluir que o momento da morte foi cerca de 1h10min antes do cadáver ser encontrado. A Figura 4.3 representa a curva de resfriamento do cadáver.

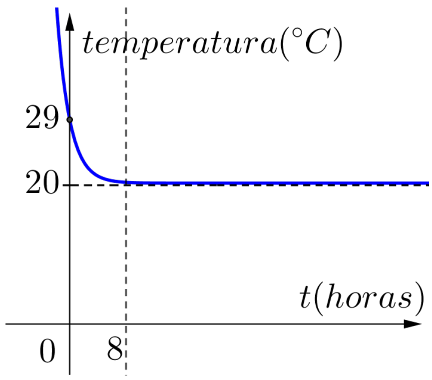


Figura 4.3: Curva de resfriamento.

4.4 Queda Livre

Soltemos um objeto a partir do repouso e consideremos que a resistência do ar seja proporcional a velocidade do objeto. Se $s(t)$ for a distância percorrida após t segundos, então, a velocidade é $v = s'(t)$ e a aceleração é $a = v'(t)$. Tomando g como a aceleração da gravidade, então, a força para baixo do objeto é $mg - cv$, com c uma constante positiva. Daí, pela Segunda Lei de Newton[3], temos

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv. \tag{4.17}$$

Notemos que a equação (4.17) pode ser reescrita como

$$\frac{dv}{dt} + \frac{c}{m}v = g, \tag{4.18}$$

que se trata de uma ED linear de primeira ordem. Para resolvê-la, utilizaremos o método do fator integrante, onde $\mu(t) = e^{\int (c/m)\, dt} = e^{(c/m)t}$. Multiplicando (4.18) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^{(c/m)t}\frac{dv}{dt} + \frac{c}{m}e^{(c/m)t}v = ge^{(c/m)t}. \tag{4.19}$$

Observe que o o lado esquerdo de (4.19) é a derivada do do produto de $e^{(c/m)t}$ por v, isto é,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{(c/m)t}v\right] = ge^{(c/m)t}.$$

Daí, por (3.21) temos

$$v(t) = e^{-(c/m)t}\int ge^{(c/m)t}\, dt + Ke^{-(c/m)t} = \frac{mg}{c} + Ke^{-(c/m)t},$$

onde K é uma constante. Como o objeto é descartado do repouso, temos $v(0) = 0$, o que implica que $v(0) = \frac{mg}{c} + Ke^{-(c/m)0} = 0$, isto é, $K = -\frac{mg}{c}$. Portanto, a equação da velocidade em função do tempo é dada por

$$v(t) = \frac{mg}{c} - \frac{mg}{c}e^{-(c/m)t} = \frac{mg}{c}\left[1 - e^{-(c/m)t}\right]. \tag{4.20}$$

Fazendo o tempo aumentar indefinidamente, temos a **velocidade máxima**

[3]Segunda Lei de Newton: *"A força resultante que atua sobre um corpo é proporcional ao produto da massa pela aceleração por ele adquirida."*

(terminal) do objeto, ou seja,

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \frac{mg}{c}\left[1 - e^{-(c/m)t}\right] = \frac{mg}{c}. \tag{4.21}$$

Por outro lado, podemos determinar a distância $s(t)$ percorrida pelo objeto após t unidades de tempo. Para isso, basta observarmos que

$$s(t) = \int v(t)\, dt = \int \frac{mg}{c}\left[1 - e^{-(c/m)t}\right] dt = \frac{mg}{c}t + \frac{mg}{c}\frac{m}{c}e^{-(c/m)t} + C_1.$$

Mas $s(0) = 0$,

$$s(0) = \frac{mg}{c}0 + \frac{mg}{c}\frac{m}{c}e^{-(c/m)0} + C_1 = 0$$

isto é,

$$C_1 = -\frac{m^2 g}{c^2}.$$

Portanto,

$$s(t) = \frac{mg}{c}\left[t + \frac{m}{c}e^{-(c/m)t}\right] - \frac{m^2 g}{c^2}. \tag{4.22}$$

Exemplo 27 Um objeto, com massa $m = 3\ kg$, é lançado, do repouso, a uma distância de 500 m acima do solo e, depois, é deixado cair sob a influência da gravidade. Se $g = 9,81\ m/s^2$ e a força de resistência do ar for proporcional à velocidade do objeto, com $c = 3$, temos, por (4.20), que a equação da velocidade do objeto é

$$v(t) = \frac{3 \cdot 9,81}{3}\left[1 - e^{-(3/3)t}\right] = 9,81\left(1 - e^{-t}\right).$$

Assim, $t = 2\ s$ após o objeto ser soltado do repouso, ele estará a uma velocidade de

$$v(2) = 9,81 \cdot (1 - e^{-2}) \simeq 8,48\ m/s.$$

Por (4.21), a velocidade máxima alcançada pelo objeto será de

$$\text{Velocidade Terminal} = \frac{mg}{c} = \frac{3 \cdot 9,81}{3} = 9,81\ m/s.$$

Podemos determinar ainda o tempo necessário para o objeto atingir o solo, para isto, na equação (4.22), basta fazermos $s(t) = 500$, e resolvermos para t, isto é,

$$500 = \frac{3 \cdot 9,81}{3}\left[t + \frac{3}{3}e^{-(3/3)t}\right] - \frac{3^2 \cdot 9,81}{3^2},$$

ou, arredondando os cálculos para duas casas decimais, temos

$$t + e^{-t} = \frac{500}{9,81} + 1 = 51,97. \tag{4.23}$$

Notemos que, para t próximo de $51,97$, e^{-t} é muito pequeno e próximo de 0, isto significa que podemos desprezar o termo e^{-t} em (4.23). Portanto, em $t \simeq 51,97$, o objeto percorre $500\ m$, ou seja, alcança o chão.

4.5 Misturas

Consideremos que um tanque tenha, inicialmente, uma quantidade Q_0 de sal dissolvido em água, totalizando $300\ L$ (litros de salmoura). Outra solução de salmoura é despejada no tanque a uma taxa de $r\ L/\text{min}$ (litro por minuto), com concentração de sal de $3\ g/L$ (gramas por litro), enquanto que uma quantidade de líquido, bem misturado, está saindo a mesma taxa de entrada. Vide Figura 4.4.

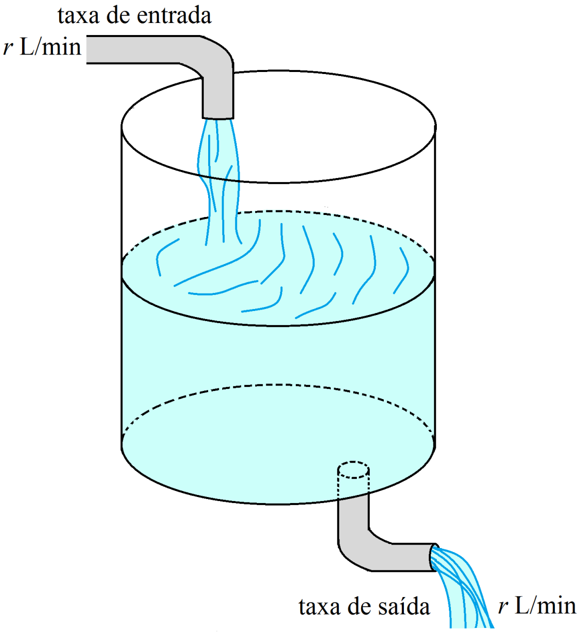


Figura 4.4: Tanque com mistura.

Suponhamos que a variação da quantidade de sal no tanque deve-se apenas a seu fluxo de entrada (R_e) e saída (R_s). Assim, se $Q(t)$ é a quantidade de sal (medida em grama (g)) no tanque no instante t, então, a taxa de variação da quantidade de sal, $\dfrac{dQ}{dt}$, é

$$\frac{dQ}{dt} = \text{Taxa de entrada} - \text{Taxa de saída} = R_e - R_s, \tag{4.24}$$

onde $R_e = 3\ g/L \cdot r\ L/\text{min} = 3r\ g/\text{min}$. Como as taxas de entrada e saída de salmoura são iguais, temos que o volume de líquido no tanque permanece constante e igual a 300 L. Daí, a quantidade de sal no tanque, bem como na saída, é $\dfrac{Q(t)}{300}\ g/L$, logo, a taxa de saída de sal é $R_s = \dfrac{Q(t)}{300}\ g/L \cdot r\ L/\text{min} = \dfrac{rQ(t)}{300}\ g/\text{min}$. Portanto, da equação (4.24), segue que

$$\frac{dQ}{dt} = 3r - \frac{rQ}{300} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dQ}{dt} + \frac{r}{300}Q = 3r, \tag{4.25}$$

com condição inicial

$$Q(0) = Q_0. \tag{4.26}$$

Se r_e e r_s indicam a entrada e saída geral das soluções de salmoura, então, na situação acima, $r_e = r_s$ e, neste caso, a quantidade de salmoura permanece a mesma no tanque, entretanto, pode aumentar, se $r_e > r_s$, ou diminuir, se $r_e < r_s$, na taxa líquida de $r_e - r_s$. Não é difícil percebermos que, após um longo período de tempo, a mistura original do tanque será substituída por outra que está sendo despejada, atingindo sua **capacidade limite** Q_L, que pode ser determinada substituindo $\dfrac{dQ}{dt}$ por 0 em (4.25) e resolvendo em relação a Q. Isto é,

$$\frac{r}{300}Q = 3r \quad \Leftrightarrow \quad Q_L = 900\ g.$$

A expressão (4.25) governa o processo de mistura discutido acima e trata-se de uma EDO de 1ª Ordem, onde a resolveremos utilizando o Método do Fato Integrante discutido na seção 3.5.1. Com efeito, pela equação (3.20), o fator integrante de (4.25) é $\mu(t) = e^{\int r/300\, dt} = e^{rt/300}$. Daí, pela equação (3.21), temos

$$\begin{aligned} Q(t) &= e^{-\int r/300\, dt} \int \left(3re^{rt/300}\right)\, dt + Ce^{-\int r/300\, dt} \\ &= e^{-rt/300}\frac{3re^{rt/300}}{r/300} + Ce^{-rt/300} \\ &= 900 + Ce^{-rt/300}, \end{aligned}$$

onde C é uma constante qualquer. Pela equação (4.26) temos

$$Q(0) = 900 + Ce^{-r\cdot 0/300} = Q_0 \quad \Leftrightarrow \quad C = Q_0 - 900.$$

Assim, a solução do problema de valor inicial (4.25), (4.26) é

$$Q(t) = 900 + (Q_0 - 900)e^{-rt/300}. \tag{4.27}$$

Notemos que, como r é constante, a medida que $t \mapsto +\infty$, $e^{-rt/300} \mapsto 0$, o que implica que, em (4.27), $Q(t) \mapsto 900$, isto justifica que $Q_L = 900\ g$, conforme discutido anteriormente. Ainda, quando r aumenta, $Q(t)$ tende mais rapidamente a seu valor limite Q_L. Vide figura 4.5.

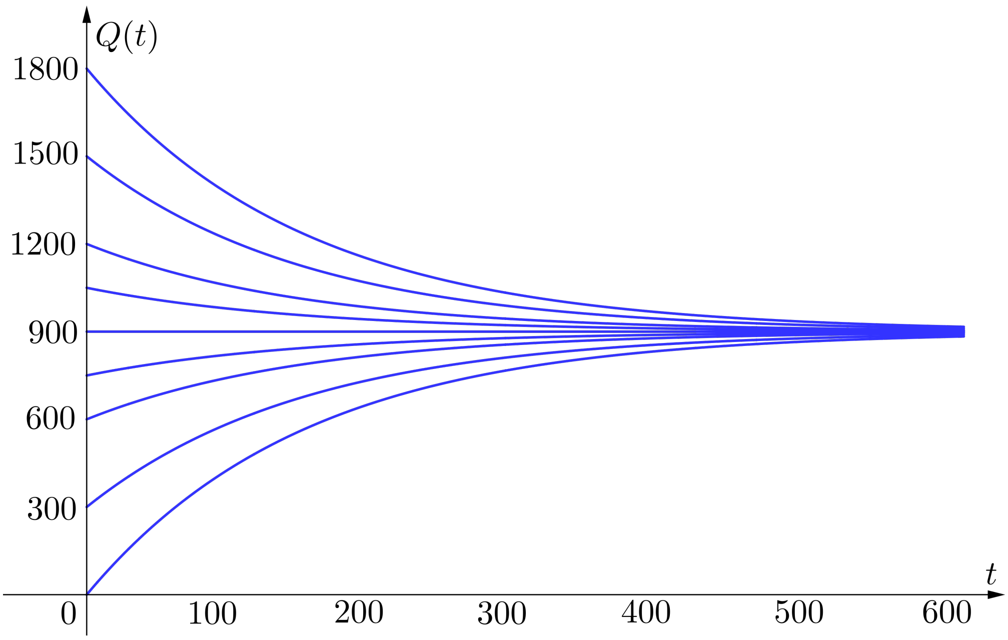


Figura 4.5: Soluções do PVI (4.25), (4.26) para $r = 2$ e Q_0 diversos.

Fazendo $r = 2\ L/\text{min}$ e $Q_0 = 2Q_L = 1800\ g$, podemos, também, determinar o instante (t) após o qual o nível de sal está dentro de uma faixa de 2% de Q_L. Na prática, substituindo os valores em (4.27), temos

$$Q(t) = 900 + (1800 - 900)e^{-2t/300} = 900 - 900e^{-2t/300}, \tag{4.28}$$

mas como 2% de $Q_L = 900$ é 18, queremos determinar o instante t no qual $Q(t)$ é igual a

918. Para tanto, em (4.28), substituindo $Q(t)$ por 918 e resolvendo para t:

$$\begin{aligned}
918 &= 900 - 900e^{-2t/300} \\
\frac{1}{50} &= e^{-2t/300} \\
\ln\left(\frac{1}{50}\right) &= -\frac{2t}{300} \\
t &\simeq 586,8 \text{ min.}
\end{aligned}$$

Encontraremos, ainda, a taxa de fluxo (r) necessária para que o valor de t não ultrapasse 30 min, para isso, em (4.27), fazendo $t = 30$, $Q_0 = 1800$, $Q(t) = 918$ e resolvendo a equação para r, obtemos

$$\begin{aligned}
918 &= 900 + (1800 - 900)e^{-30r/300} \\
\frac{1}{50} &= e^{-r/10} \\
\ln\left(\frac{1}{50}\right) &= -\frac{r}{10} \\
r &\simeq 39,1 \ L/\text{min.}
\end{aligned}$$

4.6 Juros Compostos

Suponhamos que uma determinada quantia em dinheiro seja depositada em um banco ou fundo de investimento que paga juros a taxa anual de i. O valor $S(t)$ do investimento em qualquer tempo, t, depende da frequência com que os juros são compostos, como também da taxa de juros. As instituições financeiras têm posições variadas a respeito da composição dos juros, sendo em algumas mensais, outras semanais e até mesmo diárias. Se assumirmos que a composição dos juros seja feita de forma contínua, podemos montar um modelo matemático, com um problema de valor inicial, que descreve o crescimento do investimento. A taxa de variação do investimento, $\frac{dS}{dt}$, é igual a taxa de juros acumulada (taxa de juros, i, vezes a valor atual do investimento, $S(t)$), isto é,

$$\frac{dS}{dt} = iS. \tag{4.29}$$

Notemos que a equação diferencial (4.29) é de variáveis separáveis. Se aliarmos esta equação com uma condição de valor inicial, digamos $S(0) = S_0$ como sendo o valor do investimento quando $t = 0$, por (3.11), obtemos a solução

$$S(t) = s_0 e^{it}. \tag{4.30}$$

Assim, operações como essas descrevem um crescimento exponencial do investimento. Comparando esse modelo a situações em que os juros são compostos, por exemplo, uma vez por ano, após t anos temos

$$S(t) = S_0(1+i)^t.$$

Se os juros forem compostos duas vezes por ano, no final de 6 meses temos $S(t) = S_0\left(1+\dfrac{i}{2}\right)$ e, ao ao final de 1 ano temos $S(t) = S_0\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^2$. Logo ao final de t anos, temos

$$S(t) = S_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2t}.$$

Mais geralmente, no caso dos juros serem compostos n vezes ao ano, temos

$$S(t) = S_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}. \tag{4.31}$$

Daí, pela equação (2.11), segue que

$$\lim_{n\mapsto+\infty} S(t) = S_0\left[\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n}\right]^t = S_0 e^{it}.$$

Notemos que tanto (4.30) quanto (4.31) determinam o valor do investimento, no tempo t, quando aplicado a juros compostos e contínuos.

Por outro lado, até agora não consideramos saques e depósitos. Assim, se considerarmos que saques e depósitos são feitos a uma taxa constante k, podemos remodelar 4.29, como

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= iS + k \\ \frac{dS}{dt} - iS &= k \end{aligned} \tag{4.32}$$

onde a constante k será positiva para depósitos e negativa para saques. Como (4.32) é uma ED Linear de primeira ordem, seu fator integrante é $\mu(t) = e^{\int (-i)\,dt} = e^{-it}$. Assim, por (3.21), sua solução geral é

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{-\int(-i)\,dt}\int k e^{\int(-i)\,dt}\,dt + Ce^{-\int(-i)\,dt} = e^{it}k\frac{e^{-it}}{(-i)} + Ce^{it} \\ S(t) &= Ce^{it} - \frac{k}{i}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Daí, se $S(0) = S_0$, então, $C = \dfrac{S_0}{e^{i0}} + \dfrac{k}{i} = S_0 + \dfrac{k}{i}$. Portanto, esse problema de valor inicial tem solução igual a

$$S(t) = \left(S_0 + \frac{k}{i}\right)e^{it} - \frac{k}{i} = S_0e^{it} + \frac{k}{i}\left(e^{it} - 1\right). \tag{4.34}$$

Com a expressão (4.34) podemos comparar, rapidamente, resultados de investimentos diversos ou, até mesmo, taxas variadas de rendimento.

Exemplo 28 (Compra de um imóvel) Um estudante recém-formado realiza um empréstimo de R\$ 150.000,00, a taxa anual de 6%, afim de adquirir um apartamento. O comprador espera efetuar pagamentos mensais de R\$ 800,00. Supondo que essa programação de pagamentos seja mantida, vamos determinar quando o empréstimo será liquidado. Com efeito, seja S o valor da hipoteca. A dívida se acumula a uma taxa de iS, em que $i = 0,06$ é a taxa de juros anual que equivale a uma taxa de $\dfrac{0,06}{12} = 0,005$ mensal. Assim, a equação diferencial que determina o valor da hipoteca é

$$\frac{dS}{dt} = 0,005S - 800 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dS}{dt} - 0,005S = -800.$$

Porém, se $S_0 = 150.000$ é o valor inicial do empréstimo, então, por se tratar de uma ED Linear de Primeira Ordem, usando (4.34), temos que a dívida S em função do tempo t é dada por

$$\begin{aligned} S(t) &= 150.000e^{0,005t} + \frac{(-800)}{0,005}\left(e^{0,005t} - 1\right) \\ &= -10.000e^{0,005t} + 160.000. \end{aligned}$$

A dívida será quitada quando $S(t) = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= -10.000e^{0,005t} + 160.000 \\ e^{0,005t} &= 16 \\ 0,005t &= \ln 16 \\ t &= 554,51, \end{aligned}$$

após $t = 555$ meses. Por outro lado, se os pagamentos mensais fossem de R\$ 1.600,00, o comprador gastaria $t = 127$ meses, verifique!

4.7 Diálise

A diálise é uma técnica medicinal de filtração do sangue por meio de uma máquina (dialisador), eliminando os materiais residuais que os rins doentes não conseguem tirar. Assim que o sangue entra no dialisador, separados apenas por uma membrana semipermeável, tem um fluido de limpeza, denominado *dialisato*, que flui em direção oposta a do sangue, conforme ilustrado na Figura 4.6(a).

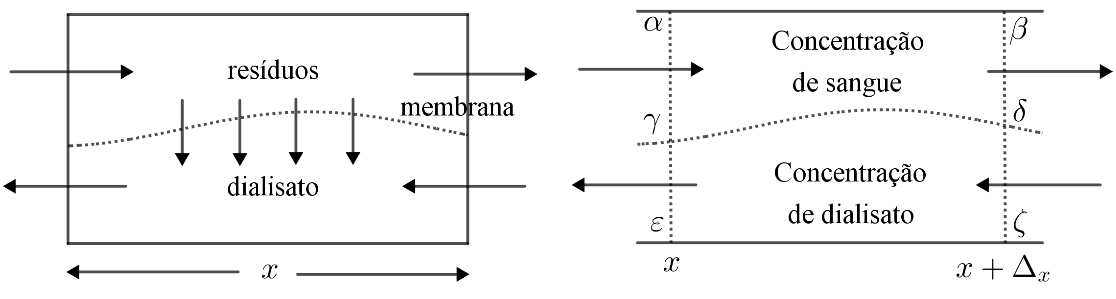


Figura 4.6: Processo de diálise.

Através do processo de difusão molecular os resídios atravessam a membrana a uma taxa, a qual depende da vazão do sangue, vazão do dialisato, capacidade do dialisador e da permeabilidade da membrana. Consideraremos os dois últimos itens constantes determinadas, sendo assim, analisaremos a dependência da taxa de escoamento apenas com a vazão dos fluidos. Para isso, a Figura 4.6(b) ilustra uma seção transversal do escoamento no dialisador, de x até $x + \Delta_x$, a qual chamaremos apenas de seção.

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ a concentração de resíduos no sangue e a concentração de resíduos no dialisato, respectivamente. Então, pela *lei de Fick*[4], que regula o escoamento dos resíduos através da membrana, temos que *"a quantidade de material passando através de uma membrana é proporcional à diferença das concentrações"*. Nosso objetivo é entender o movimento da concentração de resíduos, para tanto, analisando a figura 4.6(b), podemos perceber que a diferença de concentração de $\alpha\varepsilon$ (deslocamento da parte superior da Figura sentido parte inferior) é $p(x) - q(x)$, assim, a transferência dos resíduos, pela membrana de largura 1 e comprimento Δ_x, da solução de sangue para a de dialisato é

$$k[p(x) - q(x)]\Delta_x,$$

onde k é a constante de proporcionalidade que independe de x. Considerando a variação da massa na seção por unidade de tempo, temos:

massa entrando na seção por $\alpha\gamma$	$=$	massa de resíduos atravessando a membrana $\gamma\delta$	$+$	massa escoando de $\beta\delta$ para fora da seção

Se F_S é a taxa constante de escoamento de sangue pelo dialisador, então, a igualdade acima pode ser escrita por

$$F_S \cdot p(x) = k[p(x) - q(x)]\Delta_x + F_S \cdot p(x + \Delta_x),$$

isto é,

$$F_S \cdot \frac{p(x + \Delta_x) - p(x)}{\Delta_x} = -k\left(p(x) - q(x)\right).$$

Fazendo $\Delta_x \mapsto 0$, ou seja, diminuindo cada vez mais o comprimento da seção, temos

$$\lim_{\Delta_x \mapsto 0}\left[F_S \cdot \frac{p(x + \Delta_x) - p(x)}{\Delta_x}\right] = \lim_{\Delta_x \mapsto 0}\left[-k\left(p(x) - q(x)\right)\right],$$

que, pela Proposição 4-(a)(b) e equação (1.3), chegamos a equação diferencial

$$F_S \frac{dp}{dx} = -k(p - q). \tag{4.35}$$

Por outro lado, se F_D for a taxa constante de escoamento do dialisato através do dialisador, fazendo, analogamente, o que fizemos acima e, levando em consideração o fato de que o

[4] Adolf Eugen Fick, 1829 - 1901, médico alemão.

dialisato escoa na direção oposta a do sangue, encontramos

$$-F_D\frac{dq}{dx} = k(p-q). \tag{4.36}$$

Somando as equações (4.35) e (4.36), obtemos

$$\frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx} = -\frac{k}{F_S}(p-q) + \frac{k}{F_D}(p-q),$$

fazendo $r = (p-q)$ e $\lambda = \frac{k}{F_S} - \frac{k}{F_D}$, chegamos a

$$\frac{dr}{dx} = -\lambda r, \tag{4.37}$$

que se trata de uma ED de 1ª Ordem e, conforme discutido na seção 3.4 (separação de variáveis), sua solução é

$$r(x) = C_1 e^{-\lambda x}, \tag{4.38}$$

onde C_1 é uma constante qualquer. Assim, podemos reescrever (4.35) como

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{k}{F_S}(p-q) = -\frac{k}{F_S}r = -\frac{k}{F_S}C_1e^{-\lambda x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{F_S}C_1e^{-\lambda x},$$

e integrando em relação a x ambos lados, obtemos

$$\int\left(\frac{dp}{dx}\right)\,dx = \int\left(-\frac{k}{F_S}C_1e^{-\lambda x}\right)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = C_2 + \frac{kC_1}{\lambda F_S}e^{-\lambda x}, \tag{4.39}$$

com C_2 sendo uma constante qualquer. Procedendo de modo análogo em (4.36), encontramos

$$q(x) = C_2 + \frac{kC_1}{\lambda F_D}e^{-\lambda x}.$$

Se, inicialmente, o sangue tem uma concentração p_0 de resíduos e o dialisato não possua resíduos, então, $p(0) = p_0$ e $q(L) = 0$, onde L é o componente do dialisador. Assim,

$$p(0) = C_2 + \frac{kC_1}{\lambda F_S}e^{-\lambda\cdot 0} = p_0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = p_0 - \frac{kC_1}{\lambda F_S}, \tag{4.40}$$

e

$$q(L) = C_2 + \frac{kC_1}{\lambda F_D}e^{-\lambda L} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{\lambda p_0}{k\left(\dfrac{1}{F_S} - \dfrac{e^{-\lambda L}}{F_D}\right)}. \tag{4.41}$$

Daí, substituindo (4.40) e (4.41) em (4.39), temos

$$p(x) = C_2 + \frac{kC_1}{\lambda F_S}e^{-\lambda x} = \left(p_0 - \frac{kC_1}{\lambda F_S}\right) + \frac{kC_1}{\lambda F_S}e^{-\lambda x},$$

isto é,

$$\begin{aligned}
p(x) &= P_0 - \frac{k}{\lambda F_S}\cdot\frac{\lambda p_0}{k\left(\dfrac{1}{F_S} - \dfrac{e^{-\lambda L}}{F_D}\right)} + \frac{ke^{-\lambda x}}{\lambda F_S}\cdot\frac{\lambda p_0}{k\left(\dfrac{1}{F_S} - \dfrac{e^{-\lambda L}}{F_D}\right)} \\
&= p_0 - \frac{p_0}{1 - \dfrac{F_S e^{-\lambda L}}{F_D}} + \frac{p_0 e^{-\lambda x}}{1 - \dfrac{F_S e^{-\lambda L}}{F_D}} = p_0\left(\frac{1 - \dfrac{F_S e^{-\lambda L}}{F_D} - 1 + e^{-\lambda x}}{\dfrac{F_D - F_S e^{-\lambda L}}{F_D}}\right) \\
&= p_0\left(\frac{-\dfrac{F_S e^{-\lambda L}}{F_D} + \dfrac{F_S e^{-\lambda x}}{F_S}}{\dfrac{F_D - F_S e^{-\lambda L}}{F_D}}\right) = p_0\left(\frac{-\dfrac{e^{-\lambda L}}{F_D} + \dfrac{e^{-\lambda x}}{F_S}}{\dfrac{F_D - F_S e^{-\lambda L}}{F_S F_D}}\right) \\
&= -p_0\left[\frac{\dfrac{e^{-\lambda L}}{F_D} + \dfrac{e^{-\lambda x}}{F_S}}{-\left(\dfrac{e^{-\lambda L}}{F_S} + \dfrac{1}{F_S}\right)}\right] = p_0\left(\frac{\dfrac{e^{-\lambda L}}{F_D} + \dfrac{e^{-\lambda x}}{F_S}}{\dfrac{e^{-\lambda L}}{F_S} + \dfrac{1}{F_S}}\right).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

A equação (4.42) representa um diagnóstico preciso da concentração de resíduos no sangue. Analogamente, podemos fazer essa análise para o dialisato e encontrar

$$q(x) = \frac{p_0}{F_D}\left(\frac{e^{-\lambda L} - e^{-\lambda x}}{\dfrac{e^{-\lambda L}}{F_D} - \dfrac{1}{F_D}}\right). \tag{4.43}$$

Das equações (4.42) e (4.43), podemos notar que a quantidade de resíduo, por unidade de tempo, retirado do sangue é

$$\begin{aligned}
\int_0^L k\left[p(x)-q(x)\right]\,dx &= \int_0^L \left(-F_S\frac{dp}{dx}\right)\,dx && \text{(pela equação (4.35))}\\
&= -F_S\int_0^L \frac{dp}{dx}\,dx\\
&= -F_S\int_0^L dp && \text{(pelo Corolário 17)}\\
&= F_S\left[p_0-p(L)\right].
\end{aligned}$$

Para sabermos a situação da remoção dos resíduos (limpeza) do sangue pelo dialisador, definimos

$$Limp=\frac{F_S\left[p_0-p(L)\right]}{p_0}.$$

Pela equação (4.40) tiramos que $p_0 = C_2+\dfrac{kC_1}{\lambda F_S}$ e, pela equação (4.39), temos $p(L) = C_2+\dfrac{kC_1}{\lambda F_S}e^{-\lambda L}$. Daí,

$$\begin{aligned}
Limp &= \frac{F_S\left[p_0-p(L)\right]}{p_0}\\
&= \frac{F_S}{p_0}\left[\left(C_2+\frac{kC_1}{\lambda F_S}\right)-\left(C_2+\frac{kC_1}{\lambda F_S}e^{-\lambda L}\right)\right]\\
&= F_S\left(1-e^{-\lambda L}\right)\cdot\frac{kC_1}{p_0\lambda F_S} && \text{(pela equação (4.41))}\\
&= F_S\left(1-e^{-\lambda L}\right)\cdot\frac{k}{p_0\lambda F_S}\cdot\left[\frac{\lambda p_0}{k\left(\dfrac{1}{F_S}-\dfrac{e^{-\lambda L}}{F_D}\right)}\right]\\
&= F_S\left(\frac{1-e^{-\lambda L}}{1-\dfrac{F_S e^{-\lambda L}}{F_D}}\right),
\end{aligned}$$

onde, $\lambda L=\dfrac{kL}{F_D}\left(\dfrac{F_D}{F_S}-1\right)$.

Capítulo 5

Proposta de Abordagem

Após conhecermos a definição e algumas aplicações de logaritmos e exponencias, tendo como apoio (Boyce e DiPrima, 2012), (Courant e Robbins, 2000), (Hughes-Hallett et al., 2009), (Lima, 1999), (Sá, 2012), (Stewart, 2010), (Tipler e Mosca, 2009), (Weber, 2004) e (Zill, 2009), apresentaremos algumas propostas de abordagem desses temas em sala de aula. Inciaremos com atividades de crescimento e decrescimento exponencial e finalizaremos com atividades de aplicação de logaritmos.

5.1 Atividade 1 - Taxa de Variação e Cultura de Bactérias

Primeiramente, o professor pode trabalhar com uma atividade para desenvolver a ideia **Taxa Média de Variação** com seus alunos. Ao relatar alguns exemplos no nosso cotidiano, como o tempo gasto para chegar na escola, o aumento e/ou diminuição da temperatura no decorrer do dia, etc, o professor estará colocando significado no assunto.

Se uma cultura de bactérias tem inicialmente uma população $P_0 = a$, e após uma unidade de tempo (seja 1 min, 1h, 2 dias, etc), passa-se a ter uma população de $P_1 = b$ bactérias, então, a variação da população ocorreu mediante a variação, $\Delta_t = t_2 - t_1$ do tempo e, é de $b - a$, que representamos por $\Delta_y = b - a$. Assim, denominamos **Taxa Média de Variação** a divisão de Δ_y por Δ_x, isto é,

$$\text{Taxa Média de Variação} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}.$$

Adiante, o professor pode explicar que a taxa de variação mostra o que ocorre com a função naquele intervalo de tempo, e dizer que se a Taxa Média de Variação for positiva indica que está havendo um crescimento e, se for negativa, um decaimento da população de bactérias. Assim, se a Taxa Média de Variação for, por exemplo, 3, significa que a população de bactérias está crescendo, em média, 3 unidades por intervalo de tempo. Por outro lado, se a Taxa Média de Variação for, por exemplo, -3, indica que a população de bactérias está decaindo, em média, 3 unidades por intervalo de tempo. Vide Figura 5.1 [1] ilustrativa.

Figura 5.1: População de bactérias.

Em seguida, o professor pode supor que a cada 2h uma bactéria se reproduz, isto é, gera outra bactéria. Nesse contexto, se a população inicial, P_0, de bactérias é de 2 unidades, então, após 2h temos 4 bactérias e, após 6h temos 8 bactérias. Se em vez de 2 bactérias iniciais tivéssemos 4 bactérias, então, após 2h teríamos 8 bactérias, e assim por diante. Logo, o professor pode induzir o aluno a generalizar esta situação, isto é, se tivéssemos b bactérias iniciais, após 2h temos um total de $2b$ bactérias, e após 4h a população será de $2(2b) = 4b$ bactérias. Assim, o professor pode mostrar que a quantidade final de bactérias é proporcional a sua quantidade inicial. Analogamente, se a população de bactérias estiver decaindo, então a população final de bactérias também depende da população inicial.

O professor deve deixar claro a diferença entre Taxa Média de Variação e a quantidade de bactérias, fazendo o estudante notar que, se possuirmos inicialmente 30 bactérias, então, após 2h temos 60 e, após 4h, temos 120 bactérias. Assim, após a primeira variação do tempo aumentou-se 30 bactérias e na segunda variação do tempo aumentou-se 60 bactérias, ficando claro que em momentos de duas horas ouve dois aumentos distintos na quantidade de bactérias, mostrando que a taxa de variação, comparada em intervalos

[1]Disponível em: https://goo.gl/Vy69JR. Acesso em: 17 out. 2017.

de tempo iguais, está aumentando.

Afim de ampliar a ideia de Taxa Média de Variação, o professor pode questionar os alunos sobre o que aconteceria com a população de bactérias se tomássemos intervalos de tempo cada vez menores, isto é, se trocássemos 2h por 1h, 30min, 2min, etc, de modo a tornar o tempo muito próximo de zero. Diante das diversas respostas dos alunos, o professor deve acrescentar dizendo que esta situação é denominada **Taxa de Variação Instantânea**, e representada por $\frac{dP}{dt}$, já que o tempo (t), entre uma medição de população de bactérias, $P(t)$, e outra, tende a zero. Assim, a taxa de variação instantânea da quantidade de bactérias, $P(t)$, no decorrer do tempo, t, é proporcional a P no instante t. Isto é,

$$\text{Taxa de Variação Instantânea} = \frac{dP}{dt} = kP. \tag{5.1}$$

Apesar do estudante do ensino médio poder não entender, o professor pode salientar que (5.1) é uma Equação Diferencial de Variável Separável, sendo que resolvê-la (fizemos isso na subseção 3.4.1) consiste, basicamente, em encontrar uma fórmula que determine a população de bactérias em qualquer instante de tempo. E apresentar a solução de (5.1):

$$P(t) = P_0 e^{kt}, \tag{5.2}$$

onde P_0 é a população inicial de bactérias, t é o tempo e k é a constante de proporcionalidade que, se for positiva indica que P está crescendo e se for negativa indica que P está diminuindo.

Em tempo, é imprescindível o professor resolver situações-problema envolvendo as ideias acima. Assim, o professor pode trabalhar a situação a seguir.

Uma cultura de bactérias tem, inicialmente, uma população P_0. Em $t = 1$h, o número de bactérias é medido e passa a ser $\frac{3}{2}P_0$. Se a taxa de crescimento for proporcional ao número de bactérias $P(t)$ presente no tempo t, determine:

(a) o valor de k e, se a população está aumentando ou diminuindo.

Solução: Por (5.2) temos:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}P_0 &= P_0 e^{k\cdot 1} \\ \ln\frac{3}{2} &= \ln e^k \\ k &\simeq 0,4055. \end{aligned}$$

Logo a população de bactérias está aumentando.

(b) o tempo necessário para o número de bactérias para triplicar.

Solução: Do item (a) temos

$$P(t) = P_0 e^{0,4055t}. \tag{5.3}$$

Para encontrar o tempo em que o número de bactérias triplicou, devemos ter

$$\begin{aligned} 3P_0 &= P_0 e^{0,4055t} \\ 0,4055t &= \ln 3 \\ t &= \frac{\ln 3}{0,4055} \\ t &= 2,71 \text{ h}, \end{aligned}$$

ou seja, aproximadamente 2h42min. É importante ressaltar que o número inicial de bactérias, P_0, presente no tempo $t = 0$, não influenciou na determinação do tempo necessário para que a cultura triplicasse.

(c) a quantidade de bactérias após 5h se $P_0 = 2$.

Solução: Em (5.3), fazendo $P_0 = 2$ e $t = 5$, obtemos

$$P(5) = 2e^{0,4055 \cdot 5} \simeq 15 \text{ bactérias.}$$

Para finalizar essa atividade o professor pode traçar o gráfico da função (5.3), tomando $P_0 = 2$, utilizando o software livre GeoGebra[2]. Para isso, basta digitar no campo *"Entrada"* a expressão "$y = 2e\hat{}(0.4055x)$" e obter a Figura 5.2.

Em posse do gráfico, pode ser oportuno fazer outras perguntas, tais como: A função é crescente ou decrescente? O gráfico tem sentido, no contexto de crescimento de bactérias, para valores de t menores que zero? etc.

[2] O software GeoGebra tem código aberto e é disponível gratuitamente em https://www.geogebra.orá/download

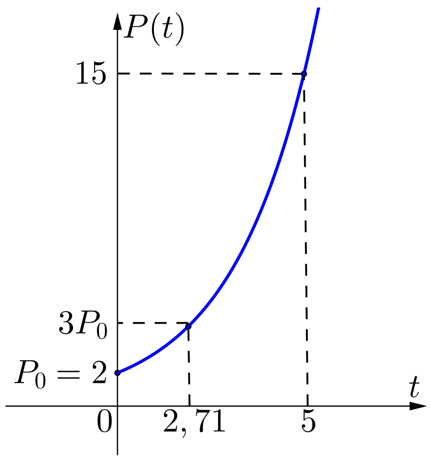


Figura 5.2: Curva da população de bactérias.

5.2 Atividade 2 - Datação de Fósseis

Conforme Zill (2009), em ciências, a **meia-vida** é uma medida da estabilidade de uma substância radioativa. Isto é, meia-vida é simplesmente o tempo que leva para a metade dos átomos, em uma quantidade inicial M_0, se desintegrar ou transmutar nos átomos de outro elemento. Quanto maior a meia-vida de uma substância, mais estável ela é. Por exemplo, a meia-vida do elemento químico Rádio (Ra-226), altamente radioativo, tem cerca de 1.700 anos. Em 1.700 anos, uma parte de uma dada quantidade de Ra-226 é transmutada para o outro elemento químico Radão (Rn-222). O isótopo de urânio mais comum, U-238, tem uma meia-vida de aproximadamente $4,5$ bilhões de anos e a cada fração desse tempo a metade de uma quantidade de U-238 é transmutada em Chumbo (Pb-206).

O químico Willard Libby criou, em 1950, um método para determinar a idade aproximada de fósseis (ver Figura ilustrativa 5.3 [3]), o qual lhe rendeu o prêmio Nobel em 1960. Tal método baseia-se no fato de que o carbono 14 (C-14) é produzido na atmosfera pela ação da radiação cósmica no nitrogênio. A proporção da quantidade de C-14 para o carbono comum na atmosfera parece ser uma constante e, como consequência, a quantidade proporcional do isótopo presente em todos os organismos vivos é a mesma que a da atmosfera. Quando um organismo morre, a absorção de C-14, por respiração ou alimentação, acaba. Assim, comparando a quantidade proporcional de C-14 presente, por exemplo, em um fóssil com a relação constante encontrada na atmosfera, é possível obter uma estimativa razoável da idade do fóssil. Esta técnica baseia-se no conhecimento

[3]Disponível em: https://goo.gl/XdDLr3. Acesso em: 10 out. 2017.

Figura 5.3: Fóssil de um dinossauro.

de que a meia-vida do C-14 radioativo é de aproximadamente 5.600 anos e, ainda é muito utilizado na datação de objetos milenares de madeira, tecidos utilizado como pergaminhos, etc.

A equação diferencial que descreve a massa de C-14 em um fóssil é

$$\frac{dM}{dt} = -kM,$$

onde M é a massa de C-14 no fóssil no tempo t e k é chamada de constante de decaimento. Assim, por (3.11) segue que

$$M(t) = M_0 e^{-kt}, \tag{5.4}$$

tal que M_0 é a massa inicial de C-14 no fóssil.

A partir da discussão acima e da equação (5.4), o professor pode explorar algumas perguntas:

(a) Se M_0 é a massa de C-14 de um fóssil, qual será sua massa de C-14 nesse fóssil após 5.600 anos? E após 14.450 anos?

Solução: Como a cada 5.600 anos M_0 diminui pela metade, a resposta da primeira pergunta é $\frac{M_0}{2}$. Em seguida, vamos calcular o valor de k para responder a outra pergunta.

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{2} &= M_0 e^{-k5600} \\ k &= \frac{\ln(1/2)}{5600} \\ k &\simeq 0,000124. \end{aligned}$$

Daí, $M(t) = M_0 e^{-0,000124t}$. Fazendo $t = 14.450$ obtemos $M(14500) \simeq \frac{M_0}{6}$.

(b) Qual é a datação de um fóssil que tem 20% de C-14 original?

Solução: Como 20% de M_0, corresponde a $\dfrac{M_0}{5}$, temos

$$\frac{M_0}{5} = M_0 e^{-0{,}000124t} \quad \Leftrightarrow \quad t \simeq 12.979 \text{ anos.}$$

(c) Um osso fossilizado contém um milésimo de nível C-14 encontrado na matéria viva. Determinar a idade do fóssil.

Solução: Em (5.4), fazendo $M(t) = \dfrac{M_0}{1000}$, obtemos

$$\frac{M_0}{1000} = M_0 e^{-0{,}000124t} \quad \Leftrightarrow \quad t \simeq 55.708 \text{ anos.}$$

Para completar, o professor pode levar os alunos em um laboratório de informática ou, utilizando-se do aplicativo de celular GeoGebra, para ensiná-los a traçar o gráfico da função (5.4) e, em seguida, explorar outras perguntas. Supondo que um fóssil tenha $M_0 = 1000$, a Figura 5.4 representa o gráfico da função exponencial que determina sua datação. No GeoGebra, digitar no campo *"Entrada"* a expressão *"$y = 1000e\hat{}(-0.000124x)$"* para obter o gráfico.

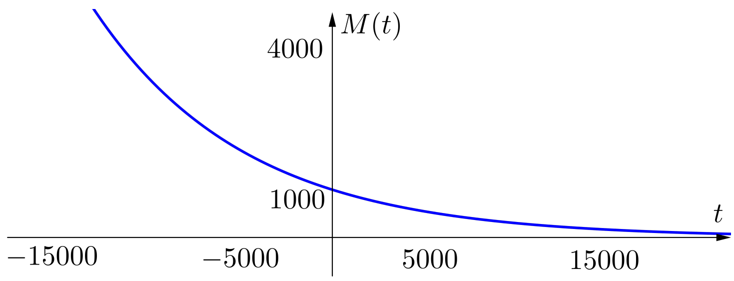


Figura 5.4: Datação de um fóssil usando C-14.

Essa atividade pode ser realizada em conjunto com o professor de física e/ou química de modo a lapidar o máximo de conhecimento do tema e de forma interdisciplinar.

5.3 Atividade 3 - Magnitude de Terremotos

Essa atividade complementa o que foi ensinado de logaritmo em sala de aula. Uma das aplicações dos logaritmos é na **Escala Richter**, que varia de 0 a 10 e mede a magnitude de um terremoto/sismo. Mas o que é um terremoto? O que é magnitude de um Terremoto? A seguir vamos tentar responder essas e outras perguntas. Terremoto é um tremor na superfície terrestre que pode ter origem em falhas geológicas, vulcanismos e, principalmente, pelo encontro de placas tectônicas. Os locais mais atingidos pelos terremotos estão localizados nas bordas dessas placas. Até o momento, os cientistas não conseguem prever um terremoto, entretanto, possuem ferramentas capazes de medir a sua intensidade. A escala Richter é utilizada como padrão para a comparação entre os terremotos. Esta escala foi desenvolvida por Richter[4] e Gutenberg[5] em 1935, a qual aumenta de forma logarítmica. A Tabela 5.1 mostra os efeitos gerados por um terremoto de acordo com sua magnitude na escala Richter.

Tabela 5.1: Efeitos de um terremoto de acordo com sua magnitude.

Descrição	**Magnitude** (M)	**Efeitos**
Micro	$M < 2,0$	Micro tremor de terra, não se sente
Mini	$2,0 \leq M \leq 2,9$	Geralmente não se sente, mas é registrado
Pequeno	$3,0 \leq M \leq 3,9$	Perceptível mas, raramente causa danos
Ligeiro	$4,0 \leq M \leq 4,9$	Provoca vibrações em objetos domésticos
Moderado	$5,0 \leq M \leq 5,9$	Causar danos maiores em edifícios
Forte	$6,0 \leq M \leq 6,9$	Destruidor num raio de até 180km
Grande	$7,0 \leq M \leq 7,9$	Pode provocar danos em ampla área
Importante	$8,0 \leq M \leq 8,9$	Causa danos sérios em centenas de km
Excepcional	$9,0 \leq M \leq 9,9$	Devasta zonas num raio de milhares de km
Extremo	$10,0 \leq M$	Nunca registrado

A magnitude (M, sem unidade de medida) é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto e está ligada ao intervalo de tempo (Δt, em segundo) entre a onda superficial (S) e a onda de pressão máxima (P), bem como com a amplitude[6] (A, em milímetros) das ondas registradas pelo sismógrafo. Assim, a magnitude de um terremoto é determinado pela equação

$$M = \log_{10} A + 3 \cdot \log_{10} (8 \cdot \Delta t) - 2,92. \tag{5.5}$$

Um sismógrafo é instrumento mecânico que possui agulhas extremamente sensíveis, as quais registram um gráfico, em papel, dos movimentos/tremores do solo terrestre. Esse gráfico é denominado sismograma. Vide Figura 5.5.

Assim, se a amplitude for 23 mm, se a distância entre as ondas P e S for 22 s e, se o papel do sismógrafo movimenta 1 mm/s, então, $\Delta t = 22$ mm. Logo, por (5.5),

[4] Charles Francis Richter, 1900 - 1985, sismólogo estadunidense.

[5] Beno Gutenberg, 1989 - 1960, sismólogo alemão.

[6] Amplitude é o "tamanho" da onda, é a distância entre o eixo da onda e seu cume.

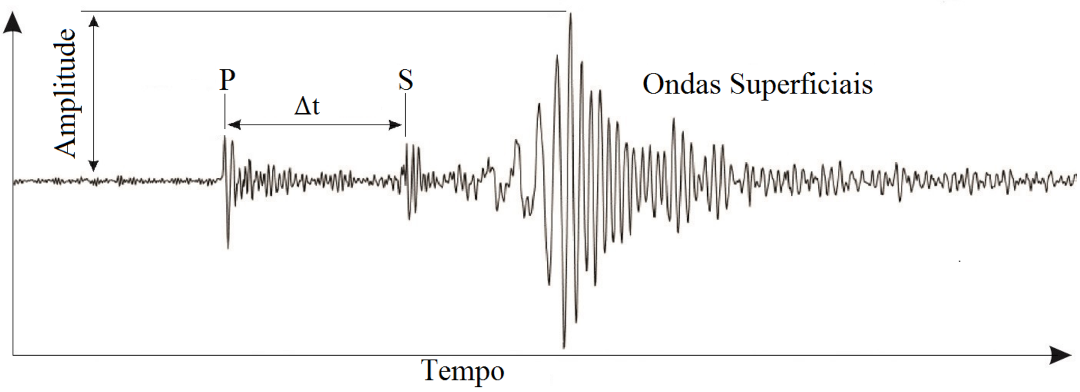


Figura 5.5: Sismograma de um terremoto.

temos

$$M = \log_{10} 25 + 3 \cdot \log_{10}(8 \cdot 22) - 2,92 = 5,21,$$

que pela Tabela 5.1, é um terremoto de moderada magnitude. Porém, há registro de terremoto que chegou a magnitude de $9,5$ pontos na escala Richter (maior já registrado), tal terremoto ocorreu no Chile em 1960, matou cerca de 5.700 pessoas e deixou mais de 2 milhões de feridos.

Note que a função $f(x) = \log_{10} x$, tem seu domínio no intervalo de $(0, +\infty)$ e é crescente nele, isto é, quanto maior o valor de x, maior o valor de $f(x)$. Assim, no contexto de terremotos, quanto maiores os valores de Δt e A, maior será a magnitude M. Entretanto, terremotos com grandes amplitudes e intervalo de tempo elevado são raros de acontecer.

Além da fórmula (5.5) exitem outras formulas para o cálculo da magnitude de um terremoto na escala Richter, como a expressão (5.6), que leva em conta a quantidade energia liberada (E) pelo tremor de terra, isto é

$$M = 0,67 \log_{10} E - 3,25, \tag{5.6}$$

onde, E é medida em Joules (J). A tabela a seguir mostra os valores de E em alguns registros de terremotos.

Nessa atividade, o professor pode trabalhar com as informações da Tabela 5.2, determinando e comparando valores.

(a) Ao fazer uma leitura da Tabela 5.2, notamos que a magnitude do terremoto ocorrido

Tabela 5.2: Energia libertada em Joules por alguns terramotos.

Magnitude (M)	**Energia** (J)	**Ocorrência**
$2,0$	$6,3 \cdot 10^{7}$	Praticamente imperceptível
$5,0$	$2,0 \cdot 10^{12}$	Bomba atômica em Hiroshima, Japão 1945
$6,7$	$7,1 \cdot 10^{14}$	Estados Unidos (Los Angeles) 1994
$6,9$	$1,4 \cdot 10^{15}$	Armênia, 1998 e Índia, 2001
?	$2,0 \cdot 10^{15}$	Haiti, Janeiro de 2010
$7,4$	$7,9 \cdot 10^{15}$	Turquia, 1999 e Irã, 1990
$7,8$	$1,6 \cdot 10^{16}$	China (Tangshan), 1976
$7,9$	$4,4 \cdot 10^{16}$	Japão, 1923, Peru, 2007 e China, 2008
$8,1$	$8,7 \cdot 10^{16}$	México (Cidade do México), 1985
$8,3$	$1,8 \cdot 10^{17}$	Estados Unidos (São Francisco) 1906
$8,8$	?	Chile, 2010
$9,5$	$1,1 \cdot 10^{19}$	Chile, 1960

no Haiti, no ano de 2010, não apareceu. Vamos determiná-la! Como foi dado a quantidade de energia liberada naquele terremoto, vamos utilizar (5.6) para determinar M. Assim, com o uso de uma calculadora, temos

$$M = 0,67 \cdot \log_{10}\left(2,0 \cdot 10^{15}\right) - 3,25 \simeq 7,0$$

isto é, a magnitude foi $7,0$ na escala Richter e liberou uma energia aproximada de $2,0 \cdot 10^{15}\ J$.

(b) Na Tabela 5.2, também não aparece a energia liberada pelo tremor de terra no Chile, em 2010. Utilizando (5.6), vamos determinar a quantidade de energia, em Joules, liberada por esse terremoto. Notemos que, neste caso, $M = 8,8$. Assim, substituindo em (5.6), temos

$$\begin{aligned} 8,8 &= 0,67\log_{10} E - 3,25 \\ \log_{10} E &= \frac{12,05}{0,67} \\ \log_{10} E &\simeq 17,98, \end{aligned}$$

isto é, $E \simeq 10^{17,98} = 10^{17} \cdot 10^{0,98}$. Com o uso de uma calculadora, temos, finalmente,

$$E \simeq 9,55 \cdot 10^{17}\ J.$$

(c) Comparando a quantidade de energia do terremoto do item (a) com o terremoto do item (b), segue

$$\frac{9,55 \cdot 10^{17}}{2,0 \cdot 10^{15}} = 4,775 \cdot 10^{2} = 477,5.$$

Isto significa, que o terremoto ocorrido no Chile, em 2010, liberou $477,5$ vezes mais energia que o ocorrido no Haiti, no mesmo ano.

(d) Para finalizar, com a Tabela 5.2 preenchida, o professor pode instigar o aluno a fazer uma boa análise desta Tabela, até notar que dois pontos de diferença na magnitude, leva a uma diferença de $10^3 = 1000\ J$ na quantidade de energia liberada. Esse fato pode ser observado nas linhas:

$5,0$	$2,0 \cdot 10^{12}$	Bomba atômica em Hiroshima, Japão 1945
$7,0$	$2,0 \cdot 10^{15}$	Haiti, Janeiro de 2010

Daí, o professor pode mostrar, matematicamente, que isso sempre acontece para dois M quaisquer, cuja diferença da magnitude do maior pelo menor é 2. Na verdade, a energia liberada pelo terremoto de maior intensidade é "quase" 1000 vezes maior do que a do de menor intensidade, essa diferença se dá por mera aproximação e estética. Vejamos! Com efeito, sejam M e $M+2$ as magnitudes de dois terremotos na escala Richter, com E_1 e E_2, respectivamente, as quantidades de energia (em Joules) liberadas por eles. Assim, por (5.6), temos

$$M = 0,67 \log_{10} E_1 - 3,25 \tag{5.7}$$

$$M + 2 = 0,67 \log_{10} E_2 - 3,25. \tag{5.8}$$

Subtraindo (5.7) de (5.8), obtemos

$$0,67 \cdot (\log_{10} E_2 - \log_{10} E_1) = 2.$$

Aplicando a Proposição 18-(f), temos

$$\begin{aligned} 0,67 \cdot \log_{10} \frac{E_2}{E_1} &= 2 \\ \log_{10} \frac{E_2}{E_1} &= 2,985 \\ \frac{E_2}{E_1} &= 10^{2,985} \simeq 966. \end{aligned}$$

Portanto, nesse contexto, o terremoto de maior intensidade libera 966 mais energia que o de menor intensidade.

5.4 Atividade 4 - Nível de Intensidade Sonora

Nível de intensidade sonora (volume do som) é uma percepção humana que diferencia as variações nas alturas (volumes) do som e, está ligado, em boa aproximação, logaritmicamente, com a intensidade da fonte sonora. Uma escala logarítmica é utilizada para medir o nível de intensidade (β, medido em decibéis[7] (dB)) de uma onda sonora.

Segundo (Tipler e Mosca, 2009, p. 515), se uma fonte pontual emite ondas uniformemente em todas as direções, então, a energia, a uma distância r da fonte, é distribuída uniformemente em uma superfície esférica de raio r e área $A = 4\pi r^2$. Seja P_{med} a potência média emitida pela fonte, então, a potência média por unidade de área, a uma distância r da fonte, é $\dfrac{P_{med}}{4\pi r^2}$, que chamamos de intensidade (I). Assim,

$$I = \frac{P_{med}}{4\pi r^2}, \tag{5.9}$$

que tem como unidade de medida o watts por metro quadrado ($W/\ \mathrm{m}^2$).

O nível de intensidade (β) é definido por

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right), \tag{5.10}$$

onde I_0 é o nível de referência que, por convenção, é o limiar de audição $I_0 = 10^{-12}\ W/\ \mathrm{m}^2$. Daí, o limiar de audição corresponde, na escala, ao nível de intensidade 0dB. De fato, $\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\dfrac{10^{-12}}{10^{-12}}\right) = 0$ dB. Por outro lado, o limiar da dor tem $I = 1\ W/\ \mathrm{m}^2$, isto é, $\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\dfrac{1}{10^{-12}}\right) = 120$ dB.

Substituindo (5.9) em (5.10), podemos determinar o nível de intensidade sonora em função da potência média da fonte sonora e do raio da superfície esférica, ou seja,

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_{med}}{4\pi r^2 \cdot 10^{-12}}\right). \tag{5.11}$$

A Tabela 5.3 destaca a intensidade e o nível de intensidade de alguns sons.

[7] Derivado de Bell, em homenagem a Alexander Graham Bell, 1914-1918, cientista e inventor britânico.

Tabela 5.3: Intensidade e Nível de Intensidade de alguns sons.

Fonte	I/I_0	**dB**	**Descrição**
	10^0	0	Limiar da audição
Respiração	10^1	10	Quase inaudível
murmúrio a 5m	10^3	30	Muito Quieto
Escritório tranquilo	10^5	50	Quieto
Conversação normal a 1m	10^6	60	
Caminhão a 15m	10^9	90	Pode prejudicar a audição
Trem velho de metro	10^{10}	100	
Concerto de rock	10^{12}	120	Limiar da dor
Motor de foguete	10^{18}	180	

Neste contexto, o professor pode explorar perguntas, afim de trabalhar algumas propriedades de logaritmos e exponenciais. Por exemplo: (Adaptação do problema 15.61 de (Tipler e Mosca, 2009, p. 535)), Sabendo que uma fonte pontual emite ondas sonoras, uniformemente, em todas as direções, sendo que a 10 m da fonte o nível de intensidade é de 80 dB.

(a) Qual a intensidade sonora (I)?

Solução: Usando (5.10), temos

$$\begin{aligned} 80 &= 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \\ 8 &= \log_{10} I - \log_{10}\left(10^{-12}\right) \\ \log_{10} I &= -4. \end{aligned}$$

Portanto, pela definição de logaritmo, $I = 10^{-4}\ W/\text{m}^2$.

(b) Qual a potência média (P_{med}) emitida pela fonte?

Solução: Como a 10 m da fonte a intensidade é $I = 10^{-4}\ W/\text{m}^2$, por (5.9) temos

$$\begin{aligned} 10^{-4}\,\frac{W}{\text{m}^2} &= \frac{P_{med}}{4\pi(10\text{ m})^2} \\ P_{med} &= 100\dot{4}\pi \cdot 10^{-4}\ W \\ P_{med} &\simeq 0,13\ W. \end{aligned}$$

(c) Determine a que distância o nível de intensidade é de 60dB.

Solução: Como temos o valor da potência média, por (5.11), segue

$$
\begin{aligned}
60 &= 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{0,13}{4\pi r^2 \cdot 10^{-12}}\right) \\
10^6 &= \frac{0,13}{4\pi r^2 \cdot 10^{-12}} \\
10^{-6} \cdot 4\pi r^2 &= 0,13 \\
r &= \sqrt{\frac{0,13}{4 \cdot 10^{-6}\pi}} \\
r &\simeq 100 \text{ m.}
\end{aligned}
$$

Portanto, a uma distância de 100 m da fonte o nível de intensidade é de 60 dB.

(d) Para finalizar, uma opção é o professor ilustrar a superfície esférica dessa situação, identificando as distâncias e a intensidade sonora, vide Figura 5.6.

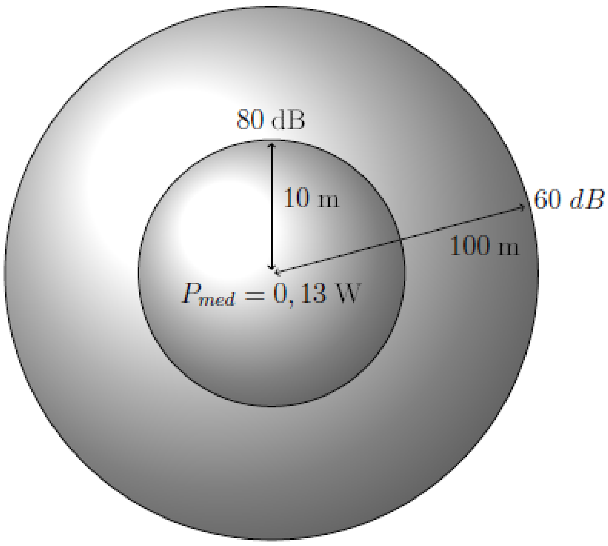


Figura 5.6: Nível de intensidade sonora.

Essas atividades são exemplos de como o professor pode trabalhar logaritmos em assuntos contemporâneos e que estão no cotidiano das pessoas, como é o caso dos terremotos e intensidade sonora e, ao mesmo tempo, instigar a criatividade e imaginação do aluno, de modo a desperta seu senso crítico.

Últimos Comentários

As funções exponencial e logarítmica têm papel importante na compreensão de várias situações cotidianas, desde o crescimento populacional, aquecimento e resfriamento de um corpo, queda livre, juros compostos, misturas, até mesmo na datação de fósseis, magnitude de terremotos, entre outros.

É buscando alternativas que o professor de matemática, de fato, consegue transmitir o conhecimento ou até mesmo instigar o aluno a buscar outras informações que não são ensinadas em sala de aula, transformando-o no próprio agente atuante do seu conhecimento.

Com este trabalho podemos perceber que a matemática é uma ciência que está em várias outras, justificando, assim, a importância de seu aprendizado.

As propostas de abordagem apresentadas no Capítulo 5 são exemplos de como o professor (mediador) pode ensinar a teoria de modo a explorar situações práticas e, muitas das vezes, se for planejada sincronicamente com outros professores, consegue enriquecer as informações tornando o conhecimento mais significativo.

Foi utilizado o software GeoGebra para elaborar todos os gráficos do texto, com a finalidade de interpretar geometricamente os resultados obtidos. Foi usado, também, o sistema de edição de texto LaTeX, especificamente o editor TeXstudio, para confeccionar o presente trabalho, proporcionando melhor estética e estrutura coerente a seu conteúdo.

Com esse trabalho esperamos contribuir para o ensino-aprendizagem de alunos e professores, assim como já contribuiu para quem o escreveu.

Referências Bibliográficas

Boyce, W. e DiPrima, R. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 10th Edition.*

Courant, R. e Robbins, H. (2000). *O que é matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos.* Ciência Moderna.

Eves, H. (2011). *Introdução à história da matemática.* Editora da Unicamp, São Paulo, 5^a edição.

Flemming, D. e Gonçalves, M. (2007). *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração.* Prentice Hall Brasil, São Paulo, 6^a edição.

Guidorizzi, H. (2001). *Um Curso De Cálculo*, volume 1. LTC, Rio de Janeiro, 5^a edição.

Hughes-Hallett, D., Lock, P., e Gleason, A. (2009). *Applied Calculus, 4th Edition.* Wiley.

Iezzi, G.; Murakami, C. M. J. N. (2010). *Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas, Noções de Integral*, volume 8. Atual, São Paulo, 6^a edição.

Iezzi, G., Dolce, O., e Murakami, C. (2010). *Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos.* Atual, São Paulo, 8^a edição.

Krantz, S. e Simmons, G. (2007). *Equações diferenciais: Teoria, Técnica e prática.* Mcgraw Hill, São Paulo, 1^a edição.

Lima, E. (1996). *Logaritmos.* Sociedade Brasileira de matemática, Rio de Janeiro, 2^a edição.

Lima, E., Carvalho, P., Wagner, E., e Morgado, C. (1996). *A matemática do ensino médio: Elon Lages Lima et al.* Coleção do Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 9^a edição.

Lima, E. L. (1999). Conceituação, manipulação e aplicações: Os três componentes do ensino da matemática. *Revista do professor de matemática*, 41.

Maor, E. (2008). *E: a história de um número*. Record, Rio de Janeiro, 5^a edição.

Muniz Neto, A. C. (2015). *Fundamentos de Cálculo*. SBM, Rio de Janeiro, 1^a edição.

Nagle, R. K.; Saff, E. B. S. A. D. (2012). *Equações diferenciais*. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 8^a edição.

Sá, Ilydio Pereira de; Paiva, A. M. S. d. (2012). O que é a escala richter (como se mede um terramoto). *Revista da Associação de Professores de Matemática*, 116:46–48.

Stewart, J. (2010). *Cálculo*, volume 1 e 2. Cengage Learning, São Paulo, 6^a edição.

Tipler, P. e Mosca, G. (2009). *Física para cientistas e engenheiros. Vol. 1: mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica*, volume 1. LTC, Rio de Janeiro, 6^a edição.

Weber, D. (2004). A escala richter. URL: https://goo.gl/bJ2Lsw. Acesso 17 de nov de 2017.

Zill, D. G. (2009). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. Cengage Learning, 9^a edição.

Apêndice

.

A.1 Módulo e Desigualdade Triangular

Definição 26 Para $a \in \mathbb{R}$, o módulo ou valor absoluto de a, representado por $|a|$, é definido como

$$|a| = \begin{cases} a, sea \geq 0 \\ -a, sea < 0 \end{cases}$$

Notemos que se tivermos $|a - b|$, isto significa a distância entre os pontos a e b na reta. Assim, $|a - b|$=$|b - a|$. Ainda, $|a| =$ máx $\{a, -a\}$. É trivial que $a \leq |a|$ e $-|a| \leq a$, isso implica que $-|a| \leq a \leq |a|$.

Proposição 28 Se $a, b \in \mathbb{R}$, então

(a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(b) (**Desigualdade Triangular**) $|a+b| \leq |a|+|b|$, onde a igualdade ocorre se, e somente se, a e b tiverem o mesmo sinal.

(c) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Demonstração:

(a) Basta mostrarmos que os dois lados da igualdade possuem o mesmo quadrado. De fato,

$$|a \cdot b| = (a \cdot y)^2 = a^2 \cdot b^2,$$

enquanto que

$$(|a| \cdot |b|) = |a|^2 \cdot |b|^2.$$

(b) Pela definição 26, ambos lados de $|a+b| \leq |a| + |b|$ são não negativos. Daí,

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &\leq (|a|+|b|)^2 \\ (a+b)^2 &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \\ 2ab &\leq 2|ab|, \end{aligned}$$

que é verdadeiro. Por outro lado, $|a+b| = |a| + |b|$ se, e somente se, $ab = |ab|$, sendo que isto ocorre se, e somente se, $ab \geq 0$.

(c) Pela desigualdade triangular temos

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|,$$

ou seja,

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a-b|.$$

De modo análogo,

$$|b| - |a| \leq |a-b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a-b|.$$

$\square$